① 对于 $\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{\text{转化}} \int_0^k f(t)\,dt$ 这种操作.

令 $t=\frac{k}{(b-a)}(x-a)$

$x=\frac{b-a}{k}t+a.$

则 $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{k}\int_0^k f\left(\frac{b-a}{k}t+a\right)dt.$

② 对于 $\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow[b+a-x]{\text{区间再现}} \int_a^b f(b+a-x)\,dx.$

③ 留数定理: $f(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)^2}=\frac{a_1}{(s+3)^2}+\frac{a_2}{s+3}+\frac{1}{s+2}$

(次数由高向低排)

$a_1=(s+3)^2f(s)\big|_{s=-3}=\frac{1}{s+2}\Big|_{s=-3}=-1$

$a_2=\frac{d}{ds}(s+3)^2f(s)\Big|_{s=-3}=\frac{d}{ds}\frac{1}{s+2}\Big|_{s=-3}=-1$

$a_3=(s+2)f(s)\big|_{s=-2}=\frac{1}{(s+3)^2}\Big|_{s=-2}=1.$

$\therefore f(s)=\frac{-1}{(s+3)^2}+\frac{-1}{s+3}+\frac{1}{s+2}$

例2: $f(s)=\frac{1}{s^3(s+1)(s-1)}=\frac{a_1}{s^3}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s}+\frac{a_4}{s+1}+\frac{a_5}{s-1}$

$a_1=s^3f(s)\big|_{s=0}=\frac{1}{(s+1)(s-1)}\Big|_{s=0}=-1$

$a_2=\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}s^3f(s)\Big|_{s=0}=\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)(s-1)}\Big|_{s=0}=0$

$a_3=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}s^3f(s)\Big|_{s=0}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{(s+1)(s-1)}\Big|_{s=0}=-1$

$a_4=(s+1)f(s)\big|_{s=-1}=\frac{1}{s^3(s-1)}\Big|_{s=-1}=\frac{1}{2}$

$a_5=(s-1)f(s)\big|_{s=1}=\frac{1}{s^3(s+1)}\Big|_{s=1}=\frac{1}{2}$

$-1 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

$\therefore f(s) = \frac{}{s^3} + \frac{}{s^2} + \frac{}{s} + \frac{}{s+1} + \frac{}{s-1}$

分母有二次实数域不可约项：

例：$f(x) = \frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2x+c_3}{x^2+1}$

$c_1 = (x-1)f(x)\big|_{x=1} = 1$

$\therefore f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{c_2x+c_3}{x^2+1} \Rightarrow \frac{(c_2x+c_3)(x-1)+x^2+1}{(x-1)(x^2+1)}$

对比系数得 $\begin{cases} c_2 = -1 \\ c_3 = -1 \end{cases}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{-x-1}{x^2+1}$

④ 微分算子法

$\begin{cases} \cos\beta x = \mathrm{Re}\, e^{i\beta x} \text{（实）} \\ \sin\beta x = \mathrm{Im}\, e^{i\beta x} \text{（虚）} \end{cases}$

$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \end{cases}$

$y'' + y = x\cos x$

$y^* = \frac{1}{s^2+1} x\cos x = \frac{1}{s^2+1} x e^{ix}$

$= \mathrm{Re}\left[e^{ix} \frac{1}{(s+i)^2+1} x\right]$

$= \mathrm{Re}\left[(\cos x + i\sin x)\left(\frac{-i}{2s} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8s}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x - \frac{1}{8}\sin x$

（3）设 $f(x) = (x^2-1)^{2015}$，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）$f^{(2015)}(0) = 0$　　（B）$f^{(2015)}(1) + f^{(2015)}(-1) = 0$

（C）$f^{(2015)}(1) - f^{(2015)}(-1) = 0$　　（D）$f^{(2015)}(1) - f^{(2015)}(-1) = 2015!\cdot 2^{2016}$

$f(x)$ 为偶函数. 则 $f^{(2014)}$ 为奇函数.

⑤：比较大小. 先利用常用不等式

1. $\begin{cases} e^x > 1+x \\ \sin x < x \\ \tan x > x \\ \ln(1+x) < x \end{cases}$　　$0 \sim \frac{\pi}{2}$. $\sin x > \frac{2}{\pi}x$　　$0 \sim \frac{\pi}{4}$. $\tan x < \frac{4}{\pi}x$

2. 利用拉化定理：

凑 $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$

注：注意某些函数的特殊值.

例如：
$$\begin{cases} e^0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \\ \ln(1+0) = 0 \end{cases}$$

3. 再利用构造函数求导.

在求导过程中重复利用1.2.有奇效.

4. 变上限积分 记得及时构造：

$\int_0^x f(x)\,dx = F(x)$ 求导.和分部积分用.

⑥ 对于物理应用.

1) 碰到时间一定要列出有关t的算式.

2) 碰到做功就是 dx.

⑦ 参数方程. 利用已知
$$\begin{cases} x', y', x'', y'' \\ \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{y''x' - x''y'}{x'^2}}{x'} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^3} \end{cases}$$

⑧ 判广义积分敛散性.

1) 能积分就积分出来

2) $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} < 1, \text{收敛.} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1 \quad \text{收敛.} \end{cases}\right\} \text{反之,发散.}$$

线代.

- A 行满秩. $\to r(AB) = r(B)$
- B 列满秩. $\to r(AB) = r(A)$

ABX BX 同解

B^TA^TX A^TX 同解.

- $AB = C$. $\to$ A 的列, B 的行.
  AB 的列 相关　AB 的行 相关.

- $r(AA^T) = r(A) = r(A^T)$