기수 : 15기 이름 : 백가은

26-1 DSL 정규 세션

Math for ML

☐ 본 과제는 학회 정규 세션「Linear Algebra」,「Basic Statistics」및「Math for ML」일부 내용을 다루며, 개념의 이해와 실제 활용 사례에 대한 이해를 돕기 위해 기획되었습니다. 평가를 위한 것이 아니므로, 주어진 힌트를 적극 활용하시고 학회원 간 토론, Slack의 질의응답을 활용하여 해결해주십시오. 단, 답안 표절은 금지합니다.

☐ 2/11 (수) 23시 59분까지 Github 에 PDF 파일 하나로 제출해주십시오. Github에 제출하는 방법을 모른다면 학술부장 혹은 과제 질의응답을 위한 오픈채팅방을 활용해주십시오.

문제 1 선형대수 기초 (Linear Algebra Basic)

1. $Ax = b$의 동치 조건

$n \times n$ 정사각행렬 A에 대하여 다음 조건들은 동치(equivalent)입니다.

(a) 행렬 A는 가역적(invertible)이다.

(b) 임의의 $n \times 1$ 벡터 b에 대하여 방정식 $Ax = b$는 유일한 해를 갖는다.

(c) 동차 방정식(Homogeneous equation) $Ax = 0$은 오직 자명한 해(trivial solution, $x = 0$)만을 갖는다.

1-1. 다음과 같은 삼변수 함수 $f(x, y, z)$가 주어져 있습니다.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 1.5z^2 + xy + yz + zx$$

(1) 이 함수의 헤시안 행렬(Hessian Matrix) A를 구하고 PD(Positive Definite), PSD, ND, NSD 중 무엇인지 판별하시오.

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$2 > 0$

$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0$

$\det(A) = 8 > 0$ $\therefore$ Positive Definite

(2) 위에서 구한 행렬 A의 역행렬 A^{-1}을 계산하시오.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) 만약 특정 상수 k에 대해 함수의 항 xy가 kxy로 변하여 $\det(A) = 0$이 된다면, 조건 (b)는 여전히 성립하는가? 그 이유를 행렬식(determinant)과 관련지어 설명하시오.

$\det(A) = 0$ A는 비가역행렬이므로 역행렬이 없고 어떤 b에 대해서 $Ax = b$가 해가 없거나 무한히 많다

→ 조건 (b)는 성립하지 않는다.

1-2. (Optional)

(1) (a), (b), (c) 세 조건들이 동치임을 증명하시오.

(a)→(b) A^{-1} 존재 ⇒ $x = A^{-1}b$ → 유일함

(b)→(c) $Ax = 0$이 유일 해 ⇒ $x = 0$

(c)→(a) Null space = $\{0\}$ ⇒ rank = n ⇒ invertible

(2) 행렬 A가 가역적이라고 가정할 때, 임의의 b에 대하여 $Ax = b$를 만족하는 해 x가 항상 존재함을 대수적으로 유도하여 증명하고 해당 증명의 의미를 서술하시오.

$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$

해는 항상 존재하고 유일하다

기수 : 15기 이름 : 백가은

문제 2 특이값 분해 (SVD)

특이값 분해(SVD)는 대각화와 달리 모든 크기의 행렬에 대해 적용이 가능하며, 그 계산 과정은 다음과 같습니다.

> 1) 항상 대칭 행렬을 이루는 두 행렬 B^TB, BB^T를 계산하고, 이들의 고유값을 계산해 특이값 σ와 고유벡터를 통해 직교대각화하여 $B^TB = VDV^T, BB^T = UDU^T$를 구합니다.
>
> 2) 0이 아닌 특이값들을 내림차순으로 나열하여 Σ를 구성하고, 이들을 모두 활용해 $A = U\Sigma V^T$를 구합니다.

다음 행렬 B에 특이값 분해를 적용하였을 때 나오는 행렬 U, Σ, V^T를 각각 구하시오.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B^TB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$\lambda = \{2, 1, 0\}$

$\sigma = \{\sqrt{2}, 1\}$

$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$u_i = \frac{1}{\sigma_i} B v_i$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

기수 : 15기 이름 : 박지은

문제 3 Convex Sets & Functions

3-1. Convex Set

1. 다음 집합들이 Convex set인지 증명하시오.

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq 1\}$$
$$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^x\}$$

C1. $x+y \leq 1$
선형부등식
임의의 convex combination 유지
→ convex

C2. $\|x\|_1 \leq 1$
$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|_1 \leq \lambda\|x\|_1 + (1-\lambda)\|y\|_1 \leq 1$
⇒ convex

C3. $y \geq e^x$
e^x는 convex

2. 함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 convex function일 때, f의 epigraph인 집합 S가 convex set임을 보이시오.

$$S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$$

$(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in S \Rightarrow \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 > f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ → S는 convex

3-2. Convex Function

1. Convex 함수의 합성

$f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$가 실수 값을 갖는 함수라고 합시다.

(a) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 convex일 때, $f(x) + g(x)$ 또한 convex임을 보이시오.

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda(f(x) + g(x)) + (1-\lambda)(f(y) + g(y))$
→ convex

(b) A와 b가 호환되는 크기의 행렬과 벡터라고 합시다. $f(x)$가 convex라면 $f(Ax+b)$ 또한 convex임을 보이시오.

$f(A(\lambda x + (1-\lambda)y) + b) = f(\lambda(Ax+b) + (1-\lambda)(Ay+b))$

→ convex

2. Convex Optimization

또 다른 함수 $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$를 고려해 봅시다.

$$f(x) = \|Ax - b\|^2.$$

오직 convex 함수의 정의만을 사용하여, $f(x)$가 $x \in \mathbf{R}^d$에서 convex임을 보이시오.

$\|A(\lambda x + (1-\lambda)y) - b\| \leq \lambda\|Ax - b\| + (1-\lambda)\|Ay - b\|$

제곱해도 convex 유지 → convex

문제 4 정보이론 (Information Theory)

4-1. Entropy

확률분포 $p(x, y)$가 다음과 같이 주어졌다고 합시다.

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

다음 값들을 구하시오.

(a) $H(X), H(Y)$.

$H(X) = H(Y) = \log 3 - \frac{2}{3}\log 2$

(b) $H(X \mid Y), H(Y \mid X)$.

$H(Y|X) = \frac{2}{3}$

$H(X|Y) = \frac{2}{3}$

(c) $H(X, Y)$.

$H(X,Y) = \log 3$

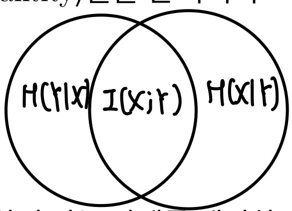
(d) $H(Y) - H(Y \mid X)$.

$H(Y) - H(Y|X) = I(X;Y)$

(e) $I(X; Y)$.

$I(X;Y) = \log 3 - \frac{2}{3}$

(f) (a)부터 (e)까지 구한 양(quantity)들을 벤 다이어그램으로 나타내시오.



4-2. KL-divergence

(a) $D(q\|p) = D(p\|q)$가 성립하지 않는 반례를 제시하시오.

$p = (0.9, 0.1),\ q = (0.5, 0.5) \Rightarrow D(p\|q) \neq D(q\|p)$

(b) $D(p\|q) \geq 0$임을 보이시오. (Hint : Jensen's Inequality)

$D(p\|q) = E_p\left[\log \frac{p}{q}\right] \geq 0$

Reference

Data Science Lab

담당자: 14 기 박창용, 어희정, 여준호

qkrckddyd0@yonsei.ac.kr

heejung.uh@gmail.com

asap03153@gmail.com

- Elements of Information Theory (2nd Ed.), T. M. Cover & J. A. Thomas
- Convex Optimization for ML, Prof. Changho Suh