空気力学第四　レポート課題

2018/06/04

航空宇宙工学科 4 年

学籍番号: 03-170313

飯山敬大

[課題 1] スカラー1 次元型双曲線偏微分方程式

1-1 概要

スカラー1 次元線形双曲線型偏部分方程式: $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ f=au$ (aは実定数)について, 3 種類の計算スキームで数値計算を行う.

1-2 設定した条件

計算する範囲を 0≤x≤1 とし, dx=0.02, ノード数 mx=50, クーラン数 cfl=0.5, 流速 a=1.0, 計算ステップ数 nstep=30 と設定した.

[初期条件]

x ≤ 0.5 で u=1, x.0.5 で u=0 とする.

[境界条件]

x=0 で u=1 , x=1 で u=0. TVD スキームでは前後 2 つ分の情報が必要なので, x=0,0.02 で u=1, x=1,1.02 で u=0 とした.

1-3 使用した差分スキーム

今回の解析に利用したスキームは以下の 3 つである.

(1) 1 次風上差分

$$u_i^{n+1}=(1-\nu)u_i^n+\nu u_{i-1}^n \qquad (\nu\text{はクーラン数})$$

$$f_{j+1/2}^n=\begin{cases}f_j^n & (a>0)\\ f_{j+1}^n & (a<0)\end{cases} \qquad (1.1)$$

と近似する. 1 次精度.

(2) Lax_Wendroff:

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\nu(u_i^n-u_{i-1}^n)+\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n) \qquad (\nu\text{はクーラン数})$$

$$f_{j+1/2}^n=\frac{1}{2}\ [\ (1-\nu)f_{j+1}^n+(1+\nu)f_j^n\ ]$$

$$=a\left[\ u_j^n+\frac{1}{2}(1-\nu)\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)\right] \qquad (1.2)$$

と近似する. (時間, 空間) 2 次精度.

(3) Symmetric-TVD(minmod): 2 次精度

Lax_Wendroff スキームの数値流束(2)のの第二項に流速制限関数$B_{j+1/2}$を追加する非線形なスキームを考えることにより，不連続面での振動を抑えることを考える．

$$f_{j+1/2}^{n} = a\left[\ u_j^n + \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j+1/2}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right)\right] \qquad (1.3)$$

数値振動が起こらないようにするため$B_{j+1/2}$が満たさなくてはならない条件は以下のように与えられる．

$$0 \le B_{j+1/2} \le 2$$

$$0 \le \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \le 2 \qquad \left(r_j = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}\ \right) \qquad (1.4)$$

ここで, (3)を以下のように変形する．

$$f_{j+1/2}^{n} = \frac{1}{2}\left[\ \left(f_{j+1} + f_j\right) + \phi_{j+1/2}\right] \qquad (1.5)$$

a < 0 の場合も成り立つように変形すると，

$$\phi_{j+1/2} = \ -\left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\cdot a^2 \cdot \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}} + |a|\cdot\left(u_{j+1} - u_j - \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad (1.6)$$

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}} = B_{j+\frac{1}{2}}\left(u_{j+1} -\ \ u_j\right) \qquad (7)$$

$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}$は$\Delta_{j+\frac{1}{2}} = u_{j+1} - u_j$の次元をもつ limiter 関数である．ここでは，以下の minmod 関数を採用する．

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}} = minmod\left\{\ \Delta_{j-\frac{1}{2}}, \Delta_{j+\frac{1}{2}}, \Delta_{j+\frac{3}{2}},\right\} \qquad (1.7)$$

(6)式より|a|≈0 のとき，$\phi_{j+\frac{1}{2}}$ ≈0 となり，(5)式より Flux が中心差分で評価され，スキームが stable でなくなってしまう．そこで，以下のように|a|を置き換え，人工粘性を追加した．

$$|a| = \psi(a) = \begin{cases} |a| & (|a| \ge \delta) \\ \dfrac{a^2 + \ \delta^2}{2\delta} & (|a| < \delta) \end{cases} \qquad (1.8)$$

今回は$\delta = 0.1$と設定した．

1-4 使用した計算機, OS，プログラミング言語

使用した計算機	MacBookPro
プロセッサ	2.7GHz Intel Core i5
メモリ	8GB 1867MHz DDR3
OS	macOS High Sierra ver10.13.4
使用したプログラミング言語	計算:　C++ (コンパイラ: gcc5.5.0) プロット: Python3

1-5 結果

各スキームについて 1-2 の条件の元で計算を行ったところ，以下のような結果が得られた．実線が数値解，点線が厳密解である．

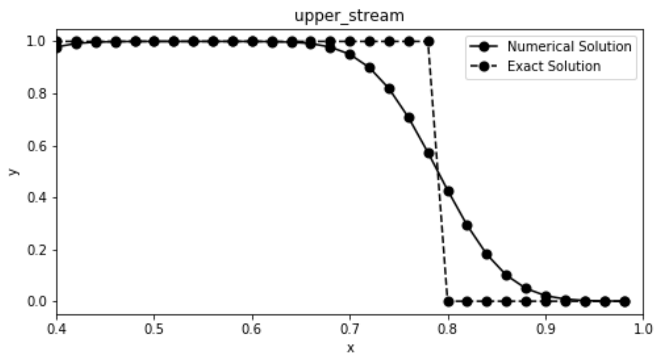


図 1 一次風上差分

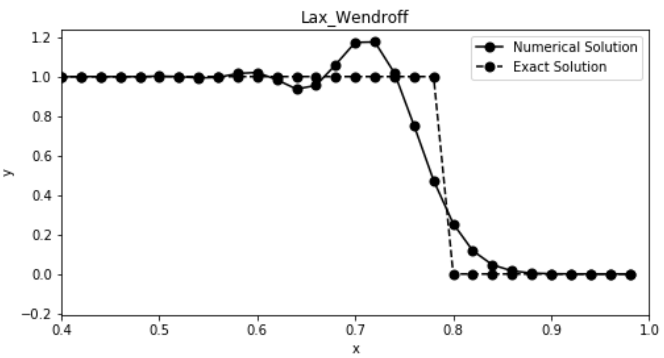


図 2　Lax_Wendroff

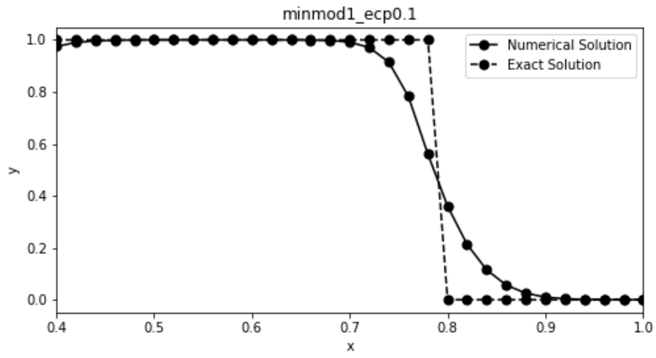


図 3 Symmetric-TVD

1-6 使用したスキームについての考察

1 次風上差分では，単調な解が得られるが, 1 次精度であることから，高周波成分がカットされて，解が「鈍って」しまい，高精度の解は得られなかった．一方, 2 次精度の Lax-Wendroff スキームでは，精度は良いが，図 2 のように不連続面で振動が発生し，単調でない解が得られた．そこで，両者の良いところを組み合わせたスキームを考える．Gudonouv の定理より，高精度かつ解が単調である定係数のスキームは存在しないので、Lax_wendroff スキームに流速制限関数を加えた非線形なスキームを考えたものが TVD スキームである．Symmetric-TVD スキームを使用したところ，図 3 のように一次風上差分よりシャープで，かつ振動が発生しない数値解が得られた．

1-7 格子解像度の効果

Lax_Wendroff スキームについて, dx=0.01(1-5 の 0.5 倍)としたところ以下のようになった．メッシュ幅を小さくすると，高周波の波形が表現できるようになり，より精度の高い解が得られた．

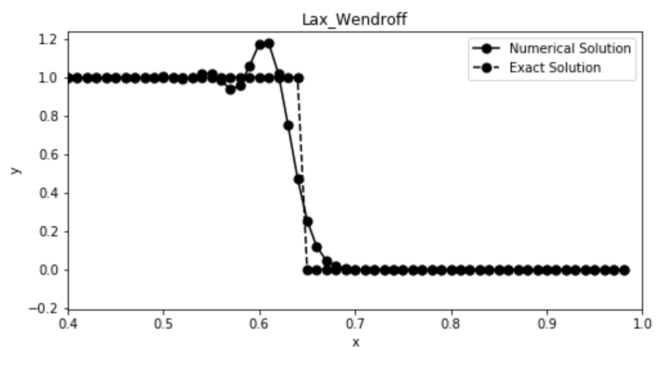


図 4 Lax_Wendroff スキーム(dx=0.01)

[課題 2] 線型双曲線型連立偏微分方程式

2-1 概要

線型双曲線型連立偏微分方程式

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}+\frac{\partial F}{\partial x}=0\ ,\quad F=AU\quad (A\text{は }2x2\text{ の定数係数行列})\qquad (2.1)$$

について，ゴドノフ法による数値計算を行う．

2-2 使用したスキーム

1 次風上差分法スキームを使用する. (時間，空間)1 次精度である.

Time update は以下の式のようになる

$$\mathrm{U}_{\mathrm{j}}^{n+1}=U_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+\frac{1}{2}}-F_{j-\frac{1}{2}}\right)\qquad (2.2)$$

ただし，

$$F_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left\{F_j+F_{j+1}-R\cdot|\Lambda|\cdot R^{-1}\left(U_{j+1}-U_j\right)\right\}\qquad (2.3)$$

である.

2-3 設定した条件

計算する範囲を 0≤x≤1 とし, dx=0.01，ノード数 n=100，クーラン数ν=0.5，計算ステップ数 nstep=100 と設定した．また行列 A の値は

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\qquad (2.3)$$

と設定した．ここで

$$dt=\frac{\nu*dx}{a}\qquad (2.4)$$

であるが，この計算に用いる流速 a の値としては，A の固有値$(\lambda_1=2,\lambda_2=5)$の内，大きい方を採用し a=5 とした.

[初期条件]

t=0 において，

$$(u,v)=\begin{cases}(1,1) & (x\le 0.2)\\ (2,-1) & (x>0.2)\end{cases}\qquad (2.5)$$

とした．

[境界条件]

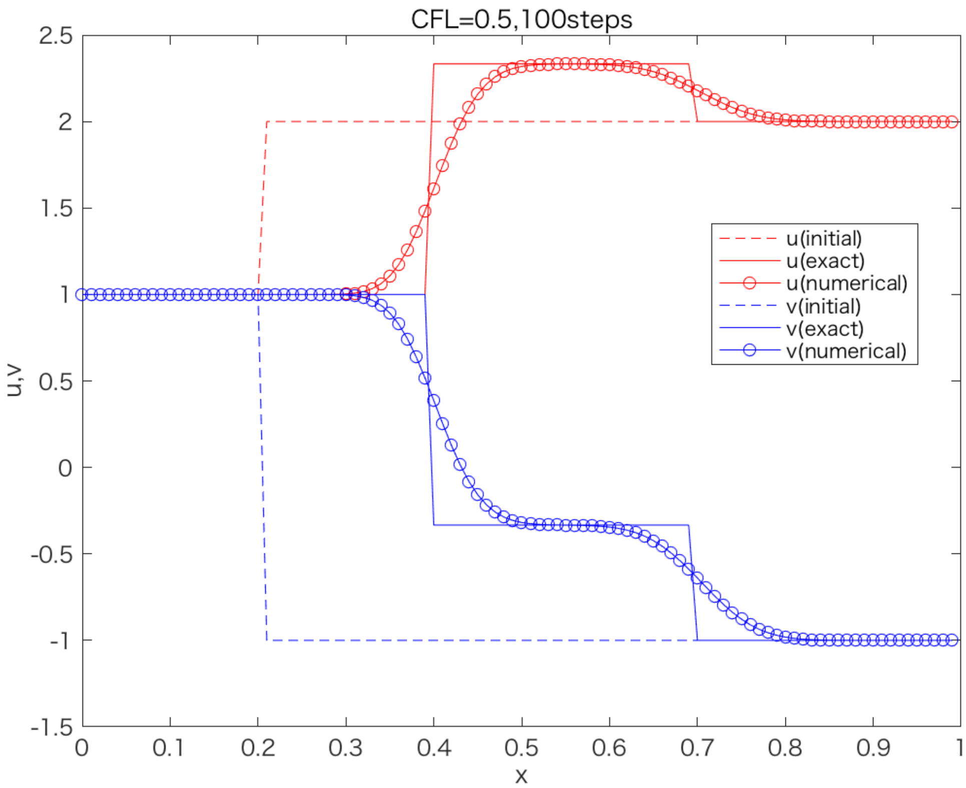
(2.2)の計算に際して，U_{j-1}, U_j, U_{j+1}の 3 つの値が必要になる．よって，ノード番号を 1-100 とすると，ノード番号 1, 100 の U はノード番号 2,99 の値と同じものに設定する．

2-4 使用した計算機, OS，プログラミング言語

使用した計算機	MacBookPro
プロセッサ	2.7GHz Intel Core i5
メモリ	8GB 1867MHz DDR3
OS	macOS High Sierra ver10.13.4
使用したプログラミング言語	計算，プロット：　MATLAB

2-5 結果

結果は以下のグラフのようになった．



1 次精度であることから，解が鈍っていることが分かる．

2-6 ソースコード

計算に使用した MATLAB のソースコードを添付する.(¥は＼を表す)

```
%% 線形双曲線型連立偏微分方程式　ゴドノフ法 2x2
% U = 2x1, A = 2x2, F = 2x1
A = [3,1;2,4];
n= 100;
x = zeros([1,n]);
U = zeros([2,n]);
U_init = zeros([2,n]);
Flux = zeros([2,n]); %Flux(j) = F(j+1/2)

nlast = 100; %number of timesteps
cfl = 0.5;
dx = 1/n;
lambda = eig(A);
a= max(lambda);
dt = cfl * dx / a;

%% Initialize
U_init_l = [1;1];
U_init_r = [2;-1];
for i = 1:n
    x(i) = (i-1)*dx;
    if(x(i) <= 0.2)
        U(:,i) = U_init_l;
        U_init(:,i) = U_init_l;
    else
        U(:,i) = U_init_r;
        U_init(:,i) = U_init_r;
    end
end
```

```
%% Exact Answer
[R,Lambda] = eig(A);
W_init_l = R¥U_init_l;
W_init_r = R¥U_init_r;
W_exact = zeros([2,100]);
for j = 1:n
    for k = 1:2
       if(x(j) < (0.2 + dt*lambda(k)*nlast))
           W_exact(k,j) = W_init_l(k,1);
       else
           W_exact(k,j) = W_init_r(k,1);
       end
    end
end
U_exact = R * W_exact;

%% Numerical Answer
for t = 1:nlast
    F = A * U;
    U_new = zeros([2,n]); %U of next timestep
    for m = 1:n-1
        Flux(:,m) = 0.5 * (F(:,m) + F(:,m+1) - R * (abs(Lambda) * inv(R)) * (U(:,m+1) - U(:,m)));
    end
    for p = 2:n-1
        U_new(:,p) = U(:,p) - (dt/dx)*(Flux(:,p) - Flux(:,p-1));
    end
    U_new(:,1) = repmat(U(:,1),1);
    U_new(:,n) = repmat(U(:,n),1);
    U = repmat(U_new,1);
end
```