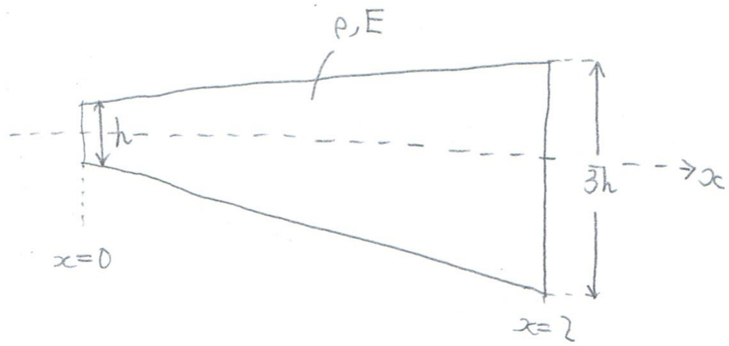
構造振動論
期末レポート

03-170313　飯山敬大

1、



梁についての運動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

ここで

$$w(x,t) = w_0(x)e^{i\lambda t} \tag{2}$$

とおけば,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right) = \rho A \lambda^2 w_0 \tag{3}$$

ここで, 梁のたわみ $w_0(x)$ を次のように仮定する

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n(x) \tag{4}$$

ここで $w_n(x)$ は

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} = \left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^4 w_n(x)$$

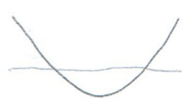
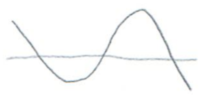
および両端の境界条件を満足する梁の正規固有関数とする。

両端自由梁であるから,

$$x=0 : \quad \frac{d^2 w_n}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 w_n}{dx^3} = 0$$

$$x=l : \quad \frac{d^2 w_n}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 w_n}{dx^3} = 0$$

をみたすので, 両端自由梁の正規固有関数は以下の表のようになる。

n	モード	γ_n	$\alpha_n = \dfrac{\cosh\gamma_n - \cos\gamma_n}{\sinh\gamma_n - \sin\gamma_n}$
1		4.730	0.98250
2		7.853	1.00077
3		10.996	0.99996

以上の表について，

$$\cos\gamma_n \cosh\gamma_n - 1 = 0 \qquad (5)$$

となり，正規固有関数は以下のように表される。

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\cosh\left(\frac{\gamma_n x}{l}\right) + \cos\frac{\gamma_n x}{l}\right) - \alpha_n\left(\sinh\frac{\gamma_n x}{2} + \sin\frac{\gamma_n x}{l}\right)\right\} \qquad (6)$$

(4)を(3)に代入し，両辺に $w_m(x)$ をかけ 0から l まで積分すると，

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)w_m\right\}dx = \lambda^2\int_0^l \rho A\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n w_m\, dx \qquad (7)$$

ここで

$$(\text{右辺}) = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)w_m\right\}dx$$

$$= \left[\underbrace{\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)}_{x=0,\ l\text{ で }0} w_m\right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)\cdot\frac{d}{dx}(w_m)\,dx$$

$$= -\left[\underbrace{EI\frac{d^2w_0}{dx^2}}_{0}\cdot\frac{d}{dx}(w_m)\right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l EI\frac{d^2w_0}{dx^2}\cdot\frac{d^2w_m}{dx^2}\,dx$$

$$= \int_0^l EI\underbrace{\frac{d^2w_0}{dx^2}}_{\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n w_n}\cdot\frac{d^2w_m}{dx^2}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^l EI\frac{d^2w_n}{dx^2}\cdot\frac{d^2w_m}{dx^2}\,dx$$

$$(\text{左辺}) = \lambda^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^l \rho A\, w_m w_n\, dx$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda^2 A_{mn} - B_{mn}) = 0 \qquad (8) \qquad (n=1, 2, 3 \cdots)$$

ただし

$$\begin{cases} A_{mn} = \int_0^l \rho A\, w_n(x)\, w_m(x)\, dx \\ B_{mn} = \int_0^l EI\frac{d^2w_n(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2w_m(x)}{dx^2}\,dx \end{cases} \qquad (9)$$

(8)によって与えられる，a_nについての無限次元斉一次方程式が0以外の解を持つためには，以下のλに関する無限次元行列式が0にならなくてはならない。

$$\begin{array}{l} m=1 \rightarrow \\ m=2 \rightarrow \\ m=3 \rightarrow \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^2A_{11} - B_{11} & \lambda^2A_{12} - B_{12} & \cdots \\ \lambda^2A_{21} - B_{21} & \lambda^2A_{22} - B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \end{bmatrix} = 0 \qquad (10)$$

$$\det(P) = 0$$

(10) は以下のように書きかえられる

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots \\ B_{21} & B_{22} & & \\ B_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{31} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & & \\ A_{31} & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = [a_1\ a_2 \cdots\ ]^T \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \\ B_{21} & B_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

とすれば,

$$B\vec{a} = \lambda^2 A\vec{a} \qquad (11)$$

となる。これは一般化固有値問題であり、これを解くことで、固有振動数 λ と固有モード行列 $\vec{a}$ が求められる。

以上の議論を下に、与えられた変断面梁について解析する。

$h(x) = h\left(1+\frac{2x}{l}\right)$ より、

$$\left.\begin{aligned} I_z(x) &= \frac{bh^3}{12}\left(1+\frac{2x}{l}\right)^3 \\ A(x) &= bh\left(1+\frac{2x}{l}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

したがって $\frac{x}{l} = \xi$ とおけば、(9) は

$$\left\{\begin{aligned} A_{mn} &= \rho bh \int_0^1 (1+2\xi)\,\phi_n(\xi)\,\phi_m(\xi)\,d\xi \\ B_{mn} &= \frac{\gamma_m^2\gamma_n^2 Ebh^3}{12l^4}\int_0^1 (1+2\xi)^3\,\phi_n''(\xi)\,\phi_m''(\xi)\,d\xi \end{aligned}\right. \qquad (13)$$

のように書きかえられる。ここで,

$\phi_n(\xi)$: 梁の長さ $L=l$ とした場合の正規固有関数

$\phi_n''(\xi)$: $\phi_n(\xi)$ を2度微分したものを γ_n^2 で割った関数

すなわち $\frac{d^2\phi_n}{d\xi^2} = \gamma_n^2\phi_n''(\xi) \qquad (14)$

両端自由梁であるから, $\alpha_n = \frac{\cosh\gamma_n - \cos\gamma_n}{\sinh\gamma_n - \sin\gamma_n}$ として

$$\begin{aligned} \phi_n(\xi) &= \{\cosh(\gamma_n\xi) + \cos(\gamma_n\xi)\} - \alpha_n\{\sinh(\gamma_n\xi) + \sin(\gamma_n\xi)\} \\ \phi_n''(\xi) &= \{\cosh(\gamma_n\xi) - \cos(\gamma_n\xi)\} - \alpha_n\{\sinh(\gamma_n\xi) - \sin(\gamma_n\xi)\} \end{aligned} \qquad (15)$$

となる。

(13), (15) を元に A_{mn}, B_{mn} を $m \leqq 3$, $n \leqq 3$ までにおいて数値計算すると (Simpsonの法則) を用いた, A, Bの行列は以下のようになった。

$$A = \begin{bmatrix} 5.39918 & -1.24772 & -0.16021 \\ -1.24772 & 5.38872 & -1.17050 \\ -0.01602 & -1.17050 & 5.31950 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 24879e+4 & -28936e+4 & 96734e+3 \\ -28936e+4 & 20456e+5 & -18411e+5 \\ 96734e+3 & -18411e+5 & 79278e+5 \end{bmatrix}$$

これについて (11) の一般化固有値問題を解くと, λと$\vec{a}$の組み合わせは以下のようになった

(i) $\lambda = 6299$ のとき　(1次モード)

$$\vec{a}^T = \begin{bmatrix} -0.9961 & -0.0872 & 0.0130 \end{bmatrix}$$

(ii) $\lambda = 17820$ のとき　(2次モード)

$$\vec{a}^T = \begin{bmatrix} -0.1546 & -0.9879 & -0.0129 \end{bmatrix}$$

(iii) $\lambda = 38612$ のとき　(3次モード)

$$\vec{a}^T = \begin{bmatrix} -0.0223 & -0.2214 & 0.9749 \end{bmatrix}$$

(4), (6) 式より,

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n(x)$$

および

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\cosh \frac{\gamma_n x}{l} + \cos \frac{\gamma_n x}{l} \right) - \alpha_n \left(\sinh \frac{\gamma_n x}{l} + \sin \frac{\gamma_n x}{l} \right) \right\}$$

であったから,

固有振動モードは次のページの図2のように表される。

また図1に高さ2hを要する一様断面はりの場合の固有モードを記す

また高さ2hの一様断面はりにおいて1ページの表のγ_nを用いて

$$\lambda = \left(\frac{\gamma_n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$ と表されるから,

$\lambda_1 = 3289$　　$\lambda_2 = 9065$　　$\lambda_3 = 17771$

となる。変断面はりについて, 一様断面はりの2倍弱の固有振動数となっていることが分かる。

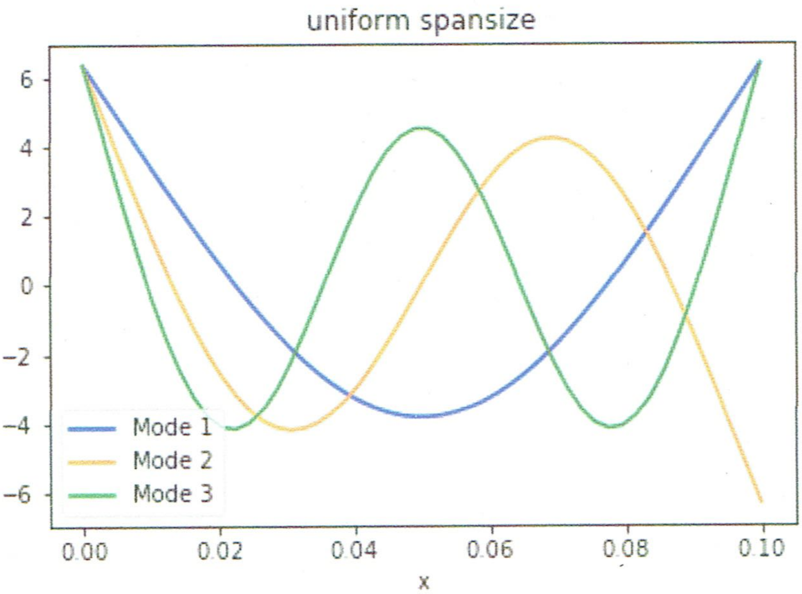


図 1 高さ 2h の一様断面梁

固有振動数 λ =3289, 9065, 17771

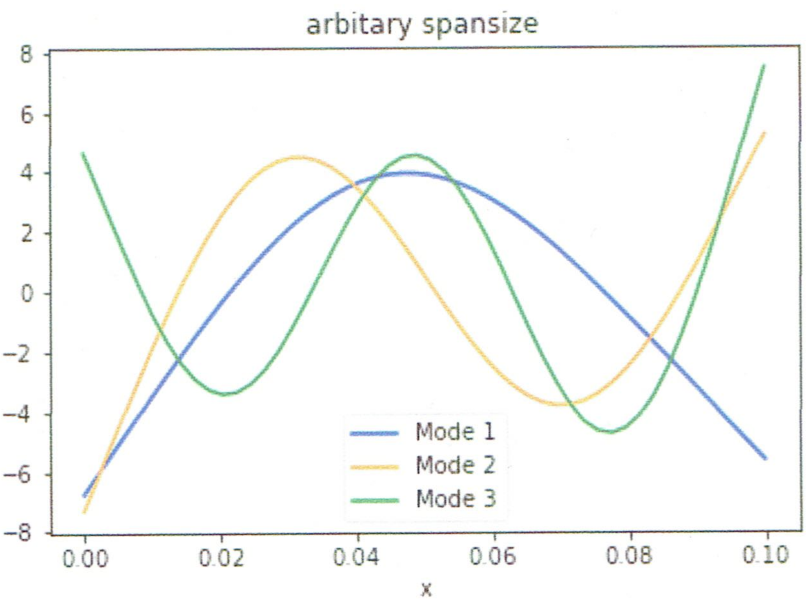


図 2 変断面梁

固有振動数 λ =6229, 17820, 38612

2、

(1)

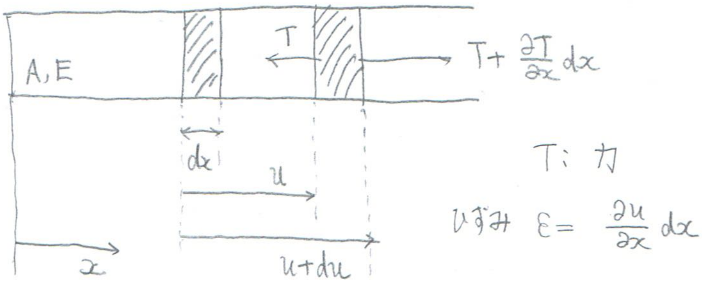


図3

$T = AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ より、

$$\sigma = \frac{T}{A} = E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \cdots \quad (1)$$

また，$u = f(x - at)$ とすると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -af' = -a\frac{\partial u}{\partial x} \quad \cdots \quad (2)$$

よって，(1)、(2) より、

$$\sigma = -\frac{E}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

変位速度を $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ とおくと $\underline{\sigma = -\frac{Ev}{a} = -a\rho v}$ // $\cdots$ (3)

(2) 剛体と棒が接触を保っているので，接触している間の運動方程式は

$$\underline{V(t) = v(t, 0) = -\frac{1}{\rho a}\sigma(t, 0) = -\frac{1}{\rho a}\sigma_0(t)} \quad \cdots \quad (4)$$

また，作用·反作用の法則より，

$$\underline{m\left(\frac{dV}{dt}\right) = A\sigma_0(t)} \quad \cdots \quad (5)$$

(3) (4)、(5) より、$V(t)$ を消去して

$$-\frac{m}{\rho a}\cdot\frac{\sigma_0(t)}{dt} = A\sigma_0(t)$$

$$\frac{\sigma_0(t)}{dt} + \frac{A\rho a}{m}\sigma_0(t) = 0$$

$\sigma_0(t) = Ce^{\lambda t}$ とおくと

$$C\left(\lambda + \frac{A\rho a}{m}\right)e^{\lambda t} = 0 \qquad \therefore \lambda = -\frac{A\rho a}{m}$$

よって $\sigma_0(t) = C\exp\left(-\frac{A\rho a}{m}t\right)$

$\sigma_0(0) = -\rho a V_0$ より $C = -\rho a V_0$ よって $\underline{\sigma_0(t) = -\rho a V_0 \exp\left(-\frac{A\rho a}{m}t\right)}$ (6)

(4) 図3における微小要素についての運動方程式は

$$\left(T+\frac{\partial T}{\partial x}dx\right)-T=\rho A\,dx\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial T}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$T=A\sigma$ であるから、縦波の運動方程式は

$$\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial x}\quad\cdots\ (7)}$$

(3)をtについて微分すると

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}=-a\rho\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$=-a\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad\cdots\ (8)$$

(7)、(8)より、$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ を消去して

$$\underline{\frac{\partial \sigma}{\partial t}=-a\frac{\partial \sigma}{\partial x}\quad\cdots\ (9)}$$

(3)とのアナロジーから、$\sigma(x,t)=g(x-at)$ がこの運動方程式の解となることが分かる

(5) $\sigma(x,t)=g(x-at)$

において $x=0$ とすると

$$\sigma(0,t)=\sigma_0(t)=-\rho a V_0\exp\left(-\frac{A\rho a}{m}t\right)=g(-at)$$

よって (6)式の$-at$を$x-at$に置きかえて

$$\sigma(x,t)=-\rho a V_0\exp\left(\frac{A\rho}{m}(x-at)\right)$$

ただし $x=0$ で生じた応力波がxに到達するのは $t=\frac{x}{a}$ であるから、

$$\sigma(x,t)=\begin{cases}-\rho a V_0\exp\left(\frac{A\rho}{m}(x-at)\right) & 0\leqq x\leqq ta\\ 0 & x\geqq ta\end{cases}$$

となる。時刻tにおける棒内部の応力状態は以下のようになる