1 問題設定

無重力場でのスピン衛星の姿勢運動を推定するカルマンフィルタを作成する．シミュレーションのソースコードは付録にまとめた．

1.1 条件

条件は以下のように設定する．

1. 対象の慣性モーメント及び運動の様子は課題 1 と同様に設定する．
2. 観測量として DCM の 3 つの列ベクトルがランダムに与えられるとする．その観測ノイズは平均値 0, 標準偏差 0.01 の正規白色雑音とする．
3. 外乱トルクとして, 平均値 0, 標準偏差 0.01 の正規白色雑音が各軸に入るとする．

1.2 解くべき方程式

オイラーの運動方程式は,x,y,z を慣性主軸に取れば, $\boldsymbol{M_C} = 0$ であるから,$\boldsymbol{w}$ を外乱トルクベクトルとして

$$\boldsymbol{M_D} = \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x\dot{\omega_x} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ I_y\dot{\omega_y} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\ I_z\dot{\omega_z} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{bmatrix} \tag{1}$$

また外乱ベクトル $\boldsymbol{w}$ については, 条件 3 より, 共分散を $\boldsymbol{Q}$ として,

$$E(\boldsymbol{w}) = 0 \tag{2}$$

$$E[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}] = Q \tag{3}$$

が成り立つ. ただし,

$$Q = \begin{bmatrix} {\sigma_w}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\sigma_w}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\sigma_w}^2 \end{bmatrix}, \sigma_w = 0.01[Nm] \tag{4}$$

また Quartanion $\boldsymbol{q}$ については,

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{5}$$

これらをまとめると $\boldsymbol{q}$ 及び $\boldsymbol{\omega}$ についての関係式は,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ \dfrac{I_y - I_z}{I_x}\omega_y\omega_z + \dfrac{w_x}{I_x} \\ \dfrac{I_z - I_x}{I_y}\omega_z\omega_x + \dfrac{w_y}{I_y} \\ \dfrac{I_x - I_y}{I_z}\omega_x\omega_y + \dfrac{w_z}{I_z} \end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで, この関係式を線形化することを考える. 式 6 で $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\Delta q}, \boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Delta\omega}$ とした式を式 6 から引き, 2 次以上の微小項を無視することで, Quartanion と角速度の真値からのずれ $\boldsymbol{\Delta q}, \boldsymbol{\Delta\omega}$ に関する微分方程式を得ることができる. さらに, 系の状態量 $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{q} \\ \Delta\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \tag{7}$$

とおけば, 状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} \tag{8}$$

と表せる. ただし,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_x & -\frac{1}{2}\omega_y & -\frac{1}{2}\omega_z & -\frac{1}{2}q_1 & -\frac{1}{2}q_2 & -\frac{1}{2}q_3 \\ +\frac{1}{2}\omega_x & 0 & +\frac{1}{2}\omega_z & +\frac{1}{2}\omega_y & +\frac{1}{2}q_0 & -\frac{1}{2}q_3 & +\frac{1}{2}q_2 \\ +\frac{1}{2}\omega_y & -\frac{1}{2}\omega_z & 0 & +\frac{1}{2}\omega_x & +\frac{1}{2}q_3 & +\frac{1}{2}q_0 & -\frac{1}{2}q_1 \\ +\frac{1}{2}\omega_z & +\frac{1}{2}\omega_y & -\frac{1}{2}\omega_x & 0 & -\frac{1}{2}q_2 & +\frac{1}{2}q_1 & +\frac{1}{2}q_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_y - I_z}{I_x}\omega_{I_y} & \frac{I_y - I_z}{I_x}\omega_{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_z - I_x}{I_y}\omega_{I_z} & 0 & \frac{I_z - I_x}{I_y}\omega_{I_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x - I_y}{I_z}\omega_{I_x} & \frac{I_x - I_y}{I_z}\omega_{I_x} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \tag{10}$$

である.
次に観測量であるが, DCM の 3 つの列ベクトルのうち、ランダムに 1 列が与えられるので, 観測値を $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}$ とすると,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1} = \begin{bmatrix} {q_0}^2 + {q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2 \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \end{bmatrix} + \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y_2} = \begin{bmatrix} 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) \\ {q_0}^2 - {q_1}^2 + {q_2}^2 - {q_3}^2 \\ 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \end{bmatrix} + \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y_3} = \begin{bmatrix} 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ {q_0}^2 - {q_1}^2 - {q_2}^2 + {q_3}^2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{v} \end{cases} \tag{11}$$

となる. 観測ノイズベクトル $\boldsymbol{v}$ については, 条件 2 より, 共分散を $\boldsymbol{R}$ として,

$$E(\boldsymbol{v}) = 0 \tag{12}$$

$$E[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}] = R \tag{13}$$

が成り立つ. ただし,

$$R = \begin{bmatrix} {\sigma_v}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\sigma_v}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\sigma_v}^2 \end{bmatrix}, \sigma_v = 0.01 \tag{14}$$

の分布に従う. これを $\boldsymbol{x}$ の時と同様に線形化すると, 観測方程式は,

$$\boldsymbol{z_i} = \boldsymbol{H_i}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, i = 1, 2, 3 \tag{15}$$

となる. ただし, $\boldsymbol{z}$ は観測された DCM 列ベクトルと, システムが推定する (Quartanion を元にした) DCM ベクトルの差である.
また $\boldsymbol{H}$ はどの列ベクトルの観測量が得られたかに基づいて 3 通りの H があり, それらは

$$\begin{cases} \boldsymbol{H_1} = \begin{bmatrix} 2q_0 & 2q_1 & -2q_2 & -2q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2q_3 & 2q_2 & 2q_1 & 2q_0 & 0 & 0 & 0 \\ -2q_2 & 2q_3 & -2q_0 & 2q_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{H_2} = \begin{bmatrix} -2q_3 & 2q_2 & 2q_1 & -2q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 2q_0 & -2q_1 & 2q_2 & -2q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2q_1 & 2q_0 & 2q_3 & 2q_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{H_3} = \begin{bmatrix} 2q_2 & 2q_3 & 2q_0 & 2q_1 & 0 & 0 & 0 \\ -2q_1 & -2q_0 & 2q_3 & 2q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2q_0 & -2q_1 & -2q_2 & 2q_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{16}$$

のようになる.