

宇宙機制御工学

< 課題 1 >

人工衛星の姿勢運動のシミュレーションプログラムの作成

学籍番号 03-170313

飯山敬大

2018 年 3 月 1 日

1 問題設定及び解法

無重力場でのスピン衛星の姿勢運動をコンピュータでシミュレートする．シミュレーションのソースコードは付録にまとめた．

1.1 条件

条件は以下のように設定する

1. 姿勢表現は Quaternian を用いることとし、初期条件は $\mathbf{q} = (1, 0, 0, 0)^T$ とする．
2. x,y,z 軸は principle axis に一致しているとする． I_x, I_y, I_z をそれぞれ $1.9, 1.6, 2.0[kgm^2]$ とする．
3. y 軸周りにノミナルの角速度 ω_s ($=17rpm$) のスピン角速度があるとする．
4. 外乱トルク, 制御トルクをそれぞれ $\mathbf{M}_D, \mathbf{M}_C$ とする．今回のシミュレーションではそれらを 0 とおく．
5. Gravity Gradient その他の外乱トルクは考えず、重力の影響やエネルギー散逸もないとする．
6. $\boldsymbol{\omega}^b$ の初期値は $(0.1, \omega_s + 0.1, 0.0)^T$ とする．

1.2 解くべき方程式

オイラーの運動方程式は,x,y,z を慣性主軸に取れば,

$$\mathbf{M}_D + \mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \\ I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (1)$$

今回は, $\mathbf{M}_D = \mathbf{M}_C = 0$ であるから, $\boldsymbol{\omega}^b$ について解くべき方程式は,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^b = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} \omega_y \omega_z \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_z \omega_x \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる．よって, Quaternian \mathbf{q} について解くべき方程式は,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

1.2.1 数値解法

式 2 と式 3 を 4 次のルンゲクッタ法で数値積分することにより, $\boldsymbol{\omega}^b, \mathbf{q}$ の時間変化を求める．

2 結果

シミュレーション結果は以下の図のようになった。

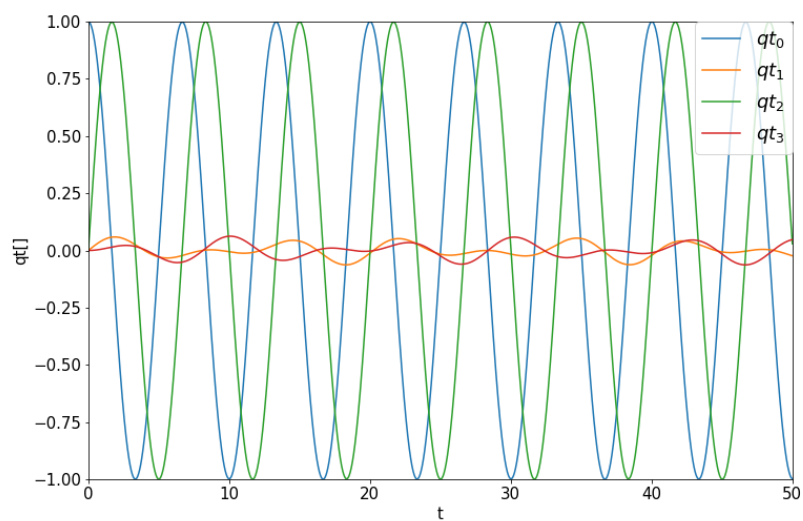


図 1: qt の時間履歴

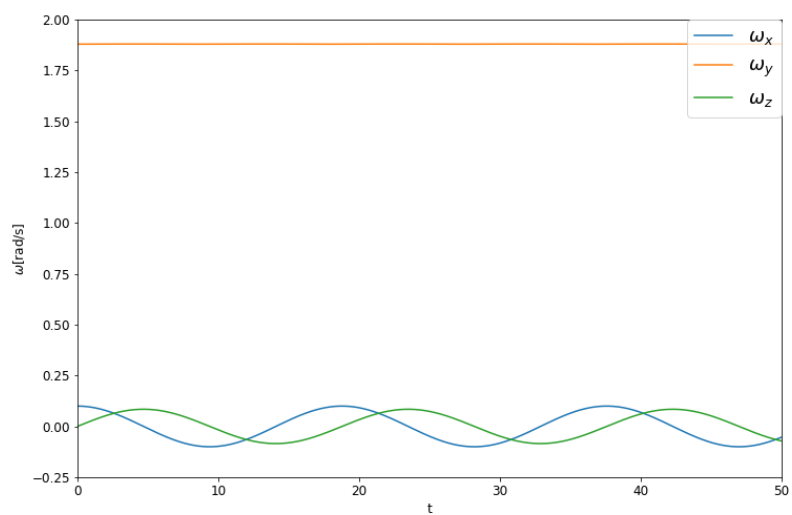


図 2: ω の時間履歴

quaternion では衛星の向きがわかりにくいので, quaternion を DCM へと変換し, Body frame の各軸の変化を慣性座標系でプロットしたところ, 以下の図のようになった.

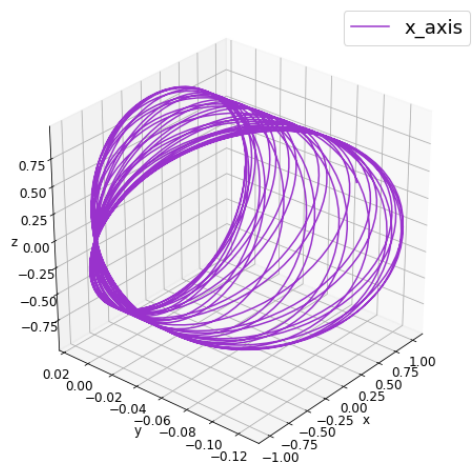


図 3: Body-Frame x 軸の慣性座標系表示

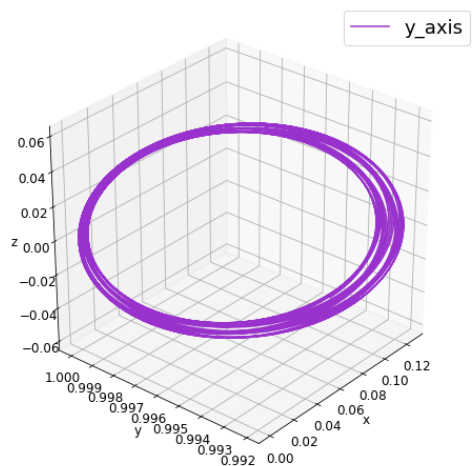


図 4: Body-Frame y 軸の慣性座標系表示

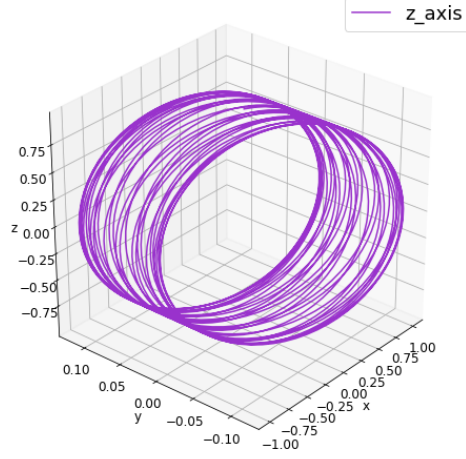


図 5: Body-Frame z 軸の慣性座標系表示

以上の図から、衛星が y 軸周りにほぼ一定の角速度で安定して回っていることが読み取れる。これは衛星をある軸の周りに回転させてやると、衛星の姿勢を安定させてやることができることを示唆している。これについてもう少し踏み込んで考察する。

今, y 軸をスピン軸とし, $\omega_y = \omega_s + \epsilon$ で回転しているスピン衛星について考える。ただし,

$$\epsilon, |\omega_x|, |\omega_y| \ll 1 \quad (4)$$

と仮定し, これを Euler の方程式に代入すると,

$$I_x \dot{\omega}_x = (I_y - I_z) \omega_s \omega_z \quad (5)$$

$$I_y \dot{\epsilon} = 0 \quad (6)$$

$$I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_s \omega_z \quad (7)$$

という線形の運動方程式になる。

これを解くと, y 軸の動きは独立しており,

$$\epsilon = \text{const.} \quad (8)$$

となる一方,

$$a = \frac{(I_y - I_z)(I_x - I_y)}{I_z} \omega_s^2 \quad (9)$$

とおくと,

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_x + a\omega_x = 0 \\ \ddot{\omega}_z + a\omega_z = 0 \end{cases} \quad (10)$$

となり, x 軸と y 軸がカップリングしていることがわかる. また x 軸と z 軸について, 解が発散しないための必要十分条件は,

$$a > 0 \Leftrightarrow I_y > I_x, I_z \text{ or } I_y < I_x, I_z \quad (11)$$

である. 今回シミュレートした衛星は, 条件 (4) を満たしているとみなせ,

$$I_y = 1.6 < I_x = 1.9, I_z = 2.0 \quad (12)$$

なので, 式 (11) もみたしている. よって, 図 3 で得られた結果が示すように, x,z 軸周りの回転も安定している. また, 式 (10) を解くと, ω_x と ω_z が 90 度ずれた位相で振動することが導かれ, 結果もそのようになっている. もし, 条件 (11) を満たさないとどのような姿勢運動を行うのか, 試してみることにした. $I_x = 1.9, I_y = 1.95, I_z = 2.0$ としてプロットしてみたところ, 下図のようになった. この場合 $a < 0$ になるので解が発散すると考えたが, 発散はせず, ω については 3 つの要素が同じ周期で, また ω_x と ω_z がほぼ同じ振幅で周期的に運動し, 正負が同じになるときと逆になるときが交互に現れた. また quartanion については 4 つの要素が 2 つセットで交互に振幅を変えながら振動するパターンが見られた. 発散しなかった理由としては, $\omega_x = 0$ ではないことから, 完全に y と x,z の運動を切り離すことができなかったためであると考えた. いずれにせよ, single spin stabilization においては, I_x, I_y, I_z の大小関係が運動を決定するのに重要な要素となることは言えそうである.

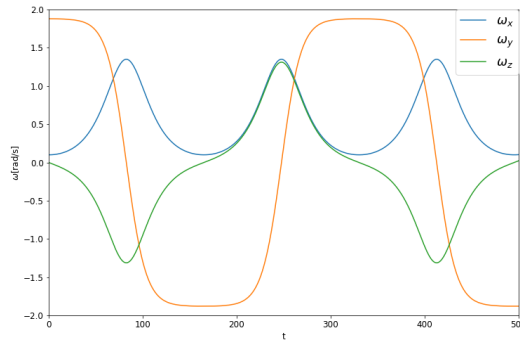


図 6: $I_y = 1.95$ とした場合の ω の時間履歴

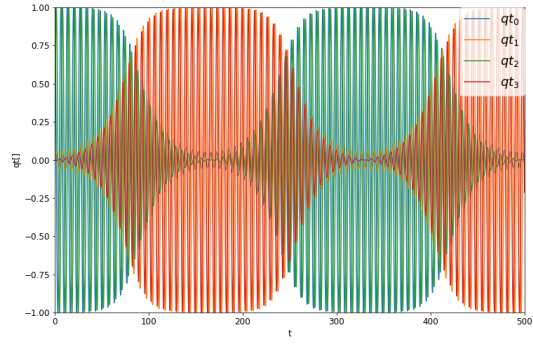


図 7: $I_y = 1.95$ とした場合の quartanion の時間履歴