

空気力学第 2C 学期末レポート課題

学籍番号:03-170313

飯山敬大

2017/11/30

1 差分法による境界層流れの数値解析

1.1 問題設定

条件として定常 2 次元非圧縮流性層流流れを仮定する。また計算のための諸条件は、以下のように定める。

$$\rho = 1.225 [kg/m^3] \quad (\text{空気密度}) \quad (1.1)$$

$$T_0 = 293.0 [K] \quad (\text{温度}) \quad (1.2)$$

$$\mu = 1.458e - 06 [Pa \cdot s] \quad (\text{粘性係数}) \quad (1.3)$$

$$U_\infty = 20.0 [m/s] \quad (\text{ポテンシャル流速度} (x=0)) \quad (1.4)$$

$$L = 500 [mm] \quad (x \text{ 方向長さ}) \quad (1.5)$$

1.2 解法/数値計算の流れ

1.2.1 計算領域

計算領域は、現象を十分に含む広さでなくてはならない。y 軸軸方向については与えられた条件からブラウジウス解により後縁での境界層厚さを予想し、その 2 倍の大きさ (6.4mm) 取ることにした。x 軸方向については、L=500mm に設定した。

1.2.2 解くべき方程式、スキームの作成

解くべき方程式は、境界層内部において、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

である。(未知変数 u,v)。質量保存の式 (1.6) 運動量保存の式 (1.7) とを x 方向空間 1 次精度、y 方向空間 2 次精度で差分近似する。各格子点の座標を (i,j) とすると、

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\Delta x}{u_{i,j}} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} - v_{i,j} \cdot \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right] \quad (1.8)$$

$$v_{i+1,j+1} = v_{i+1,j} + \left[\left(-\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) + \left(-\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) \right] \cdot \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \quad (1.9)$$

以上の式が、i 列の u,v が分かれれば、i+1 列の u,v が決まるスキームである。(今回の数値計算においては、 $\frac{\partial p}{\partial x} = const$ とする。

1.2.3 境界条件

計算は $+x$ の方向、及び $+y$ の方向に進んで行くので、 u, v の計算に関して、それぞれ $x = L, y = 2\delta_L$ での境界条件は不要である。よって求める境界条件は、

$$u = 0, v = v_{wall} \quad (j = 0) \quad (1.10)$$

$$u = U_\infty \quad (j = NY) \quad (1.11)$$

$$u = U_\infty, v = v_{wall} \quad (i = 1) \quad (1.12)$$

となる。ただし、 v_{wall} は壁からの湧き出しである。なお、圧力勾配がある流れにおいて境界層厚さを計算する際、各 i における主流速度 $U(i)$ を求める必要があるが、式 (1.11) より、 $U(i) = u[i][NY] \approx u[i][NY - 1]$ であると考えられるため、計算によって求めたその x での y 最上部の流速 $u[i][NY-1]$ を使って計算することにする。以上式 (1.8) から式 (1.12) に基づいてプログラムを作成し、シミュレーションを行った。

1.3 境界層のシミュレーション結果

湧き出し/吸い込み、圧力勾配の有無を考えたそれぞれの流れについて、99.5% 境界層厚さ、排除厚さ、運動量厚さ、エネルギー厚さ、表面摩擦係数 C_f をそれぞれグラフにプロットした。

1.3.1 湧き出しなし、圧力勾配なしの場合

結果は以下の図のようになった。

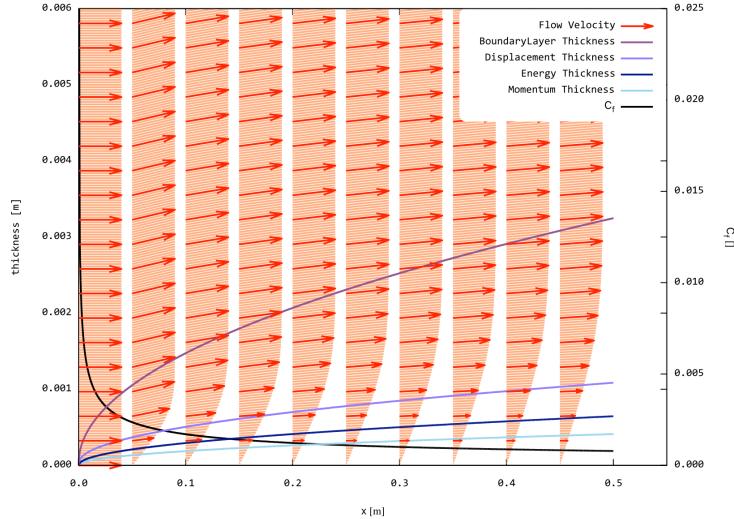


図 1 平板境界層

1.3.2 圧力勾配ありの場合

次に、1.3.1 節に加えて、それぞれ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0.0008 [atm/m]$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -0.0015 [atm/m]$ の正負の圧力勾配を加えた。

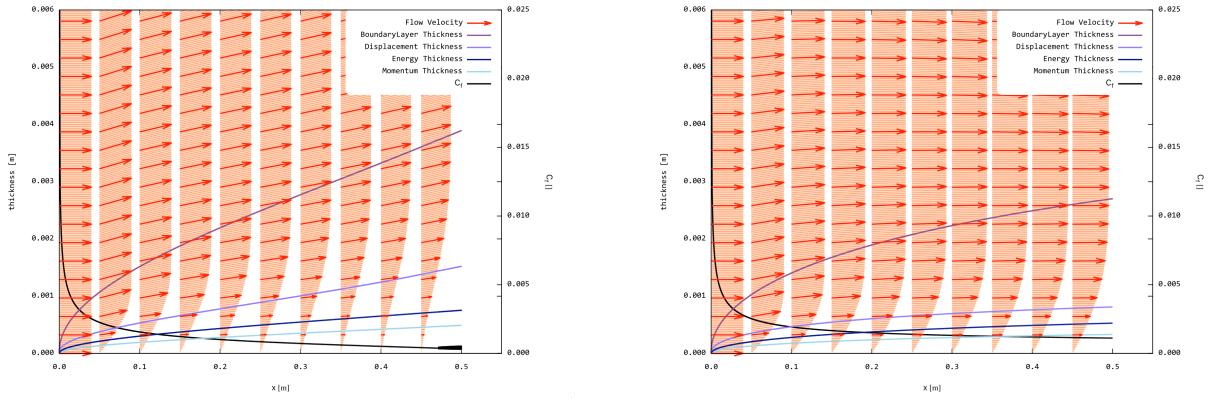


図 2 圧力勾配ありの平板境界層

正の圧力勾配(逆圧力勾配)が存在するとき、99.5% 境界層厚さ、及び排除厚さはないときに比べて大きくなつた。もともと境界層内部では粘性によるエネルギー散逸により次第に速度が減少して行くのに加え、逆圧力勾配により外部ポテンシャル流の速度が減速してしまうことで外部からの運動量供給も減ることで、($U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ が成り立つ)、さらに境界層内部の流れが遅くなつてしまつたことが原因である。

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0.00082$ まで圧力勾配をあげると、流れは後縁にて剥離するようになつてしまつた。

1.3.3 吹き出し/吸い込みありの場合

今度は、1.3.1 節に加えて、それぞれ $v_{wall} = +0.008[m/s]$, $v_{wall} = -0.015$ の境界層の吹き出し/吸い込みを条件に加えた。

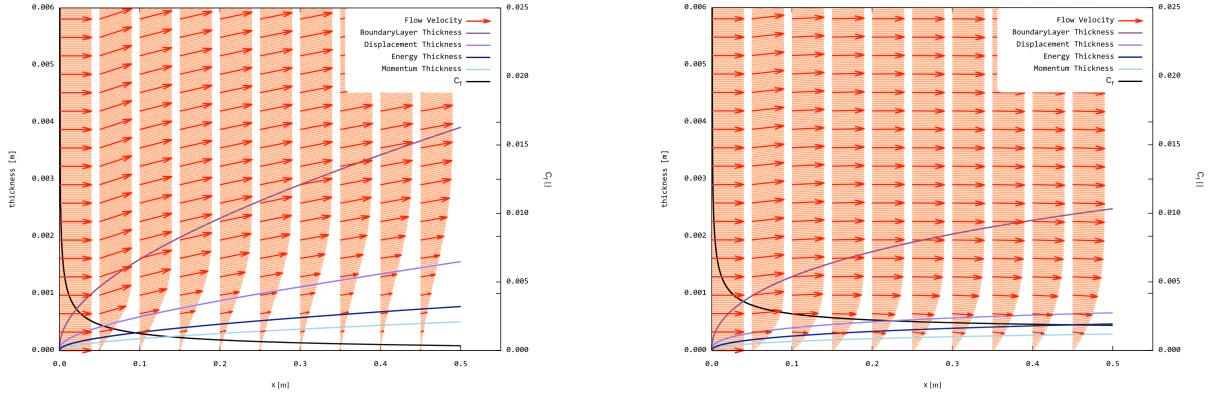


図 3 吸い込み/吹き出しありの平板境界層

境界層の吸い込みが存在する ($v_{wall} < 0$) とき、99.5% 境界層厚さ、及び排除厚さはないときに比べて小さくなつた。境界層内部へ外部から流れが流入することにより、外部から運動量が供給され、粘性による運動量減少を抑えることができるのが原因である。

この結果から、境界層の吸い込みによって外部から運動量を供給することで、1.3.2 節で見たような逆圧力勾配が存在するような流れにおいても、流れの剥離を遅らせることができると考えられる。それを $\frac{\partial p}{\partial x} = 0.0015$ の逆圧力勾配がある流れで再現した。境界層の吸い込みがなければ、図 4-[1] のように境界層は $x = 0.28[m]$ 付近で剥離するが、 $v_{wall} = -0.015[m/s]$ の吸い込みを加えると、境界層は剥離しなくなることがわかる。

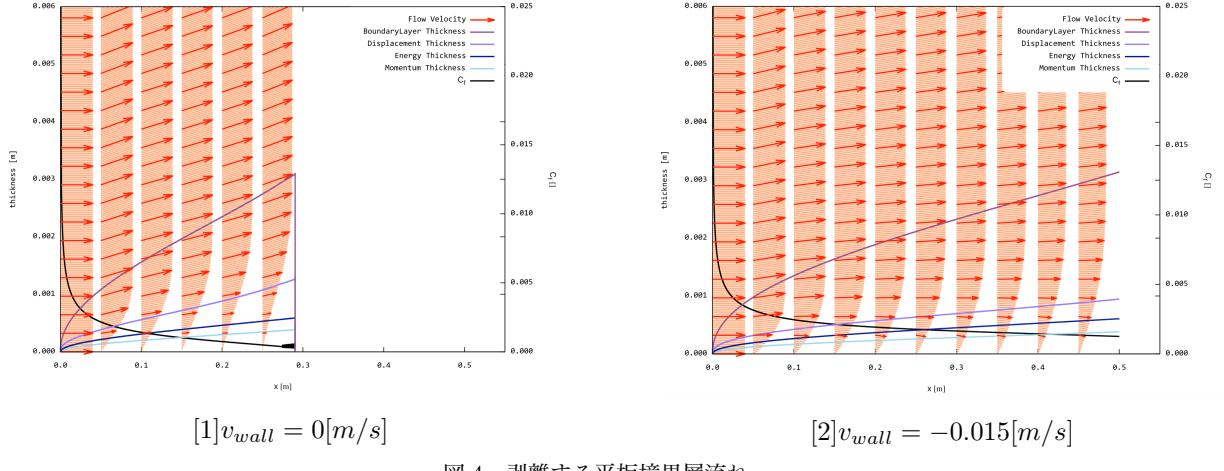


図 4 剥離する平板境界層流れ

なお、流れを乱流にすることでも運動量が外部から補充され、同じように剥離を遅らせることができると考えられる。

1.4 形状係数 H_{12}, H_{23}

形状係数 H_{12}, H_{23} は排除厚さを δ^* , と運動量厚さ θ , エネルギー厚さ Θ を用いて、次のように定義される。

$$H_{12} = \delta^*/\theta \quad (1.13)$$

$$H_{23} = \theta/\Theta \quad (1.14)$$

形状係数は層流、乱流、剥離など様々な境界層に関する現象を予測する指標としてしばしば利用される。以下の 5 条件の流れについてそれぞれ形状係数を測定したところ、表 1 のようになった。

名称	$\frac{\partial p}{\partial x} [atm/m]$	$v_{wall} [m/s]$
Standard	0	0
Pressure gradient plus	0.0008	0
Pressure gradient minus	-0.0015	0
Divergence plus	0	0.008
Divergence minus	0	-0.015

表 1 5 つの流れ

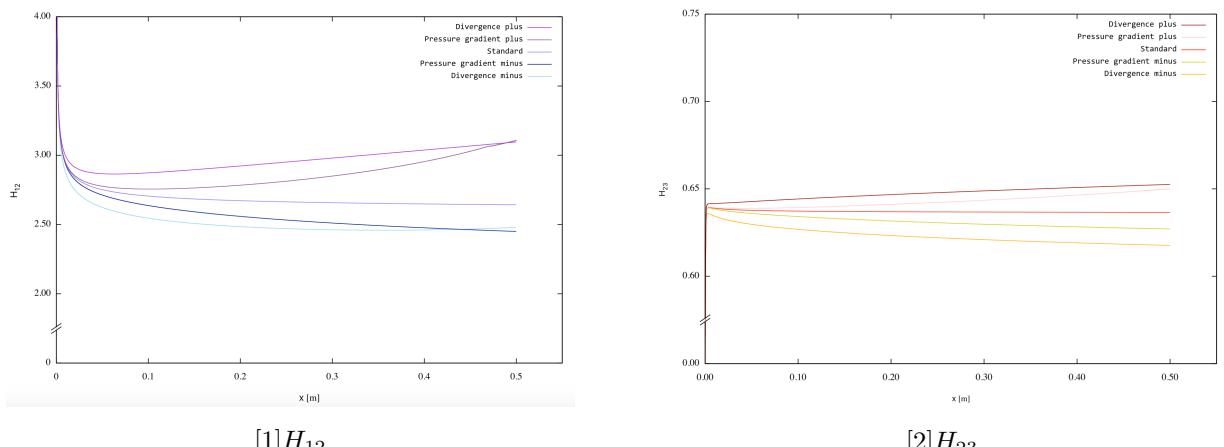


図 5 H_{12}, H_{23}

同じ流れであっても、形状係数は境界層の発達に伴い、Standard から離れて行く方向に値を変化させていくことが分かる。また H_{12}, H_{23} どちらの Shape Factorにおいても、大きさは Divergence plus, Pressure gradient plus > Standard > Pressure gradient minus, Divergence minus となった。特に H_{12} では、圧力勾配がある流れにおいて Standard と大きな差が現れたことから、 H_{12} は境界層の剥離を判断するためのパラメータとして使えそうである。実際に圧力勾配を上げていって実験したところ、 $H_{12} = 3.12$ 以上で、流れが剥離し始めた。

2 圧縮性境界層における壁温度条件について

通常粘性や熱伝導がある流れ場では、エントロピーは保存されない。しかしながら、断熱壁条件での圧縮性境界層内 ($dp/dx=0$) では、 $Pr=1$ の時、粘性による散逸によって生成されるエントロピーと熱伝導によって流体内部に生成されるエントロピー(互いに逆符号)が打ち消し合う。速度境界層厚さと温度境界層厚さが等しいため、内部が動的平衡状態に保たれてるとも言える。また、断熱壁のため、境界を通して流入する熱量によるエントロピーの変化も 0 となる。このため y 軸方向に関して事実上断熱かつ定常になるとみなせることから等エントロピーと同じ形になり、

$$T = T_p + \frac{1}{2C_p} \cdot (U_e^2 - u^2) \quad (2.1)$$

が成り立つ。このことを式によって示す。粘性領域内の流れについてのエネルギー式により、 $\frac{dp}{dx} = 0$ とすると

$$\rho C_p(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = k(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) + \mu(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \quad (2.2)$$

ここで $T = T(u)$ を仮定すると、

$$C_p T_u \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) = T_u \cdot \frac{\partial}{\partial y}(k \frac{\partial u}{\partial y}) + (T_{uu}k + \mu)(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \quad (2.3)$$

これを変形すると、

$$(Pr - 1) \cdot T_u \cdot \frac{\partial}{\partial y}(k \frac{\partial u}{\partial y}) = (T_{uu}k + \mu)(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \quad (2.4)$$

$Pr = 1$ であるから、

$$T(u) = -\frac{u^2}{2C_p} + C_1 \cdot u + C_2 \quad (2.5)$$

とおける。断熱壁なので

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{wall} = k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial u} \right|_{wall} \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{wall} = 0 \quad (2.6)$$

よって $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{wall} > 0$ より、

$$T = T_e + \frac{1}{2C_p} \cdot (u_e^2 - u^2) \quad (2.7)$$

となり、 y 方向の T に関して等エントロピー圧縮と同じ形になっている。

3 乱流と渦粘性

単位面積あたりを通過する熱量 q を求める。

$$|q| = \rho C_p |\Delta T| \times r |\omega| = \rho C_p \cdot \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right| r \times r \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \left| -K_t \frac{\partial T}{\partial y} \right| \quad (3.1)$$

となる。よって乱流熱伝導係数 k_t は、

$$k_t = \rho C_p r^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (3.2)$$

またこのとき、プラントル数 P_r は、

$$P_r = C_p \frac{\mu_t}{k_t} = C_p \frac{\rho r^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|}{\rho C_p r^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} = 1 \quad (3.3)$$

となる。