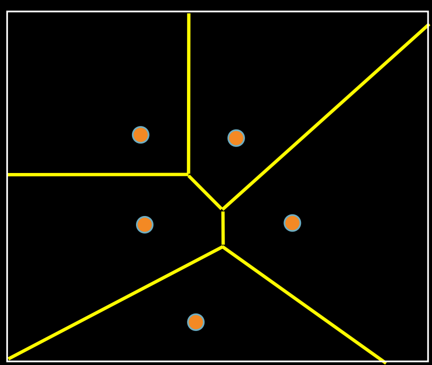
Diagrama de Voronoi

João Comba

Diagrama de Voronoi

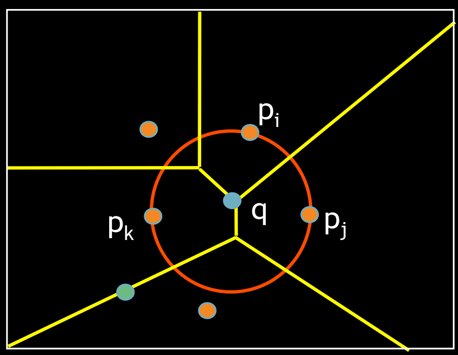


Voronoi (1907)
Tesselagens de Dirichlet (1850)
Descarte (1644)
Brown (1954): Area Potentially available to a tree
Mead (1966): plant polygons

- Sítios: $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
- Métrica: $dist(p,q) = sqrt((p_x-q_x)^2 + (p_y-q_y)^2)$
- Voronoi(P) : subdivisao do plano em n celulas V(pi), uma para cada sitio em P, tal que a ponto q pertence a celula de um sitio p_i se e somente se dist(q, pi) < dist(q, pj) (all pj, j!=i)

Teorema

Um ponto q e' um vertice de Vor(P) se e somente se o seu maior circulo vazio Cp(q) contem 3 ou mais sitios na sua fronteira



Teorema

O bissetor entre os sitios pi e pj define uma aresta de Vor (P) se e somente se existe um ponto q tal que Cp(q) contem ambos pi e pj na sua fronteira, e mais nenhum sitio

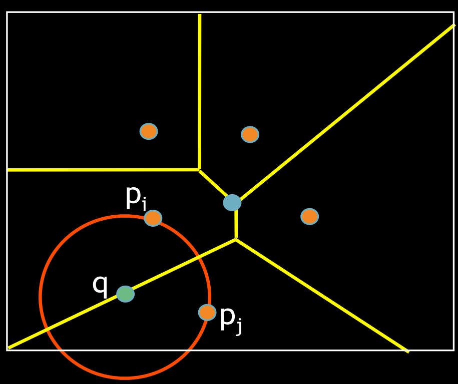
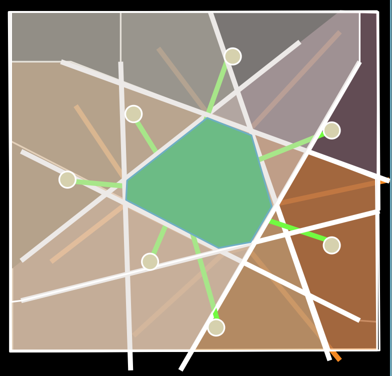


Diagrama de Voronoi - Construcao

- Construir o bissetor entre um sítio e todos os outros
- Uma célula de Voronoi é a interseção de todos semi-espaços definidos pelos bissetores.
- Complexidade: O(*n*log*n*) para cada célula.



Corolário: Cada célula em um diagrama de Voronoi é um polígono convexo, possivelmente não fechado

Computar diagrama de Voronoi

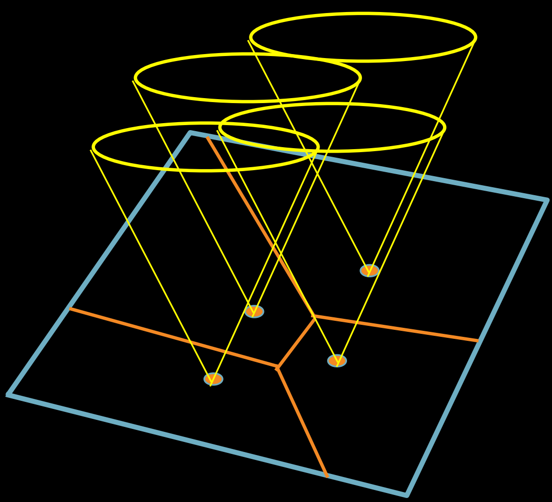
- Usar observacao que as celulas sao intersecoes de semi-espacos
- Calculo de Intersecoes de semi-espaco:
  - O(nlogn) para cada célula
- Calculo de Voronoi (n^2logn)

- Pode-se fazer melhor ?
  - Sim, Algoritmo de Fortune (nlogn)

Sweep de Plano

- Reduz um problema n dimensional para um (n-1) dinamico
- Varrer um espaco nD por um hiperplano (n-1)D
- Manter as intersecoes do hiperplano com um subconjunto de elementos (conjunto ativo)
- Intersecoes atualizam-se continuamente com tempo, com execao de quando um evento discreto acontece, novos elementos tornam-se ativos ou deixam de ser
- Estrutura de dados:
  - Priority queue: fila de eventos futuros
  - Representacao do conjunto ativo

Algoritmo de Fortune

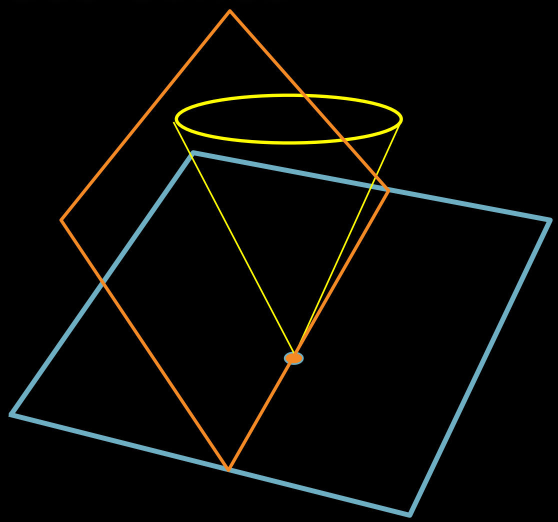


OBS:

• A intersecao de dois cones (referentes ao sitios p e q) e' uma curva (uma hipérbola) contida num plano vertical

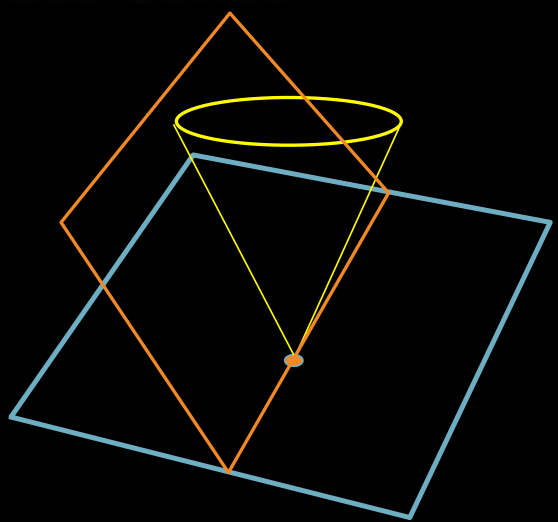
• Se projetada no plano que contem p e q, e' igual ao bissetor de p e q

Sweep dos Cones



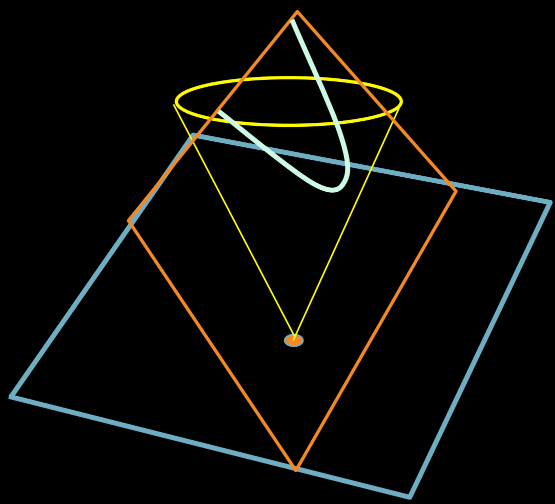
Varrer os cones com um plano de mesma orientacao que os cones

Sweep dos Cones



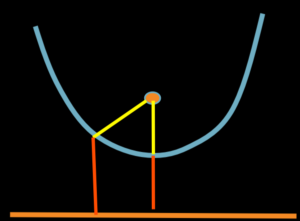
A intersecao do plano de sweep com o cone e’ vazia ate’ o plano passar pelo ponto

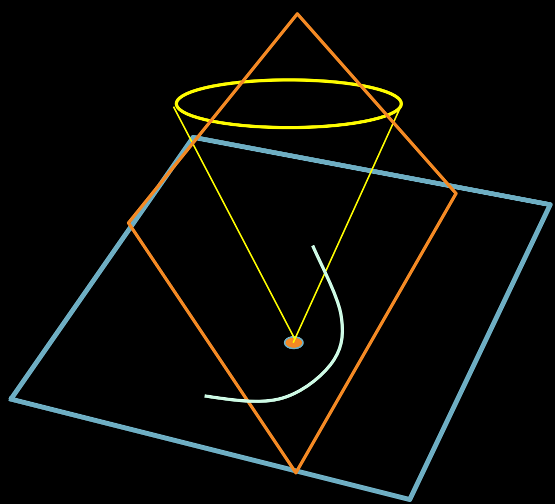
Sweep dos Cones



Ao passar do sitio, a intersecao do plano e do cone e’ uma parabola

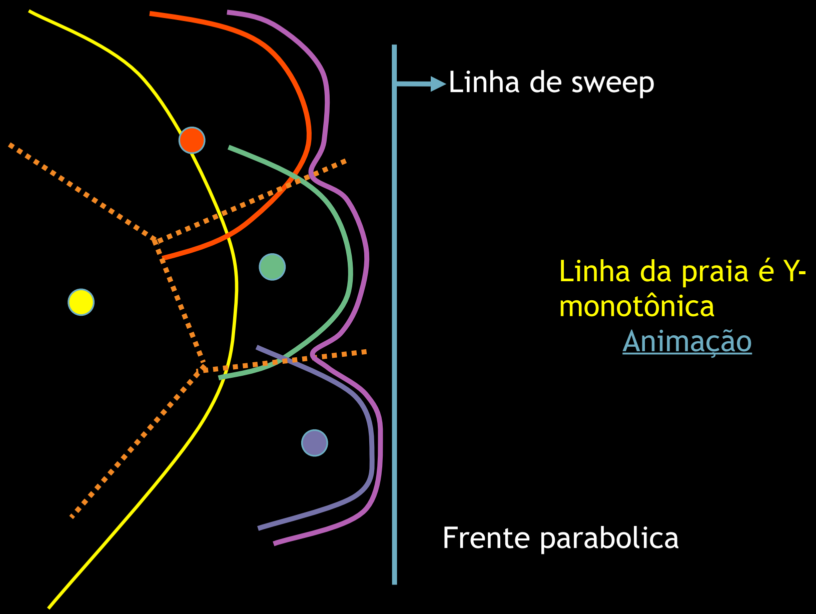
Sweep dos Cones



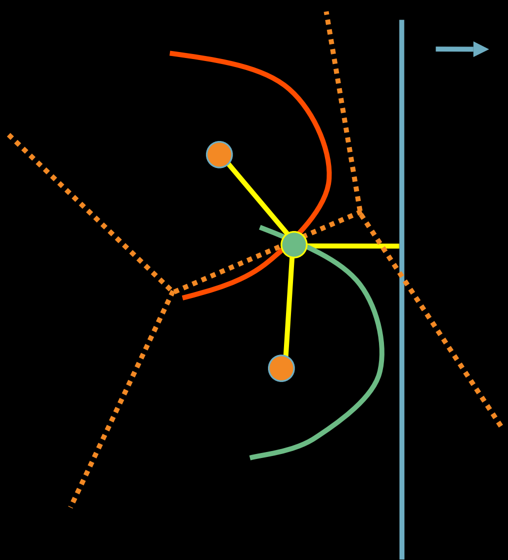


A projecao da parabola no plano possui o sitio como foco e a linha de sweep como diretriz da parabola

Fronte parabolica

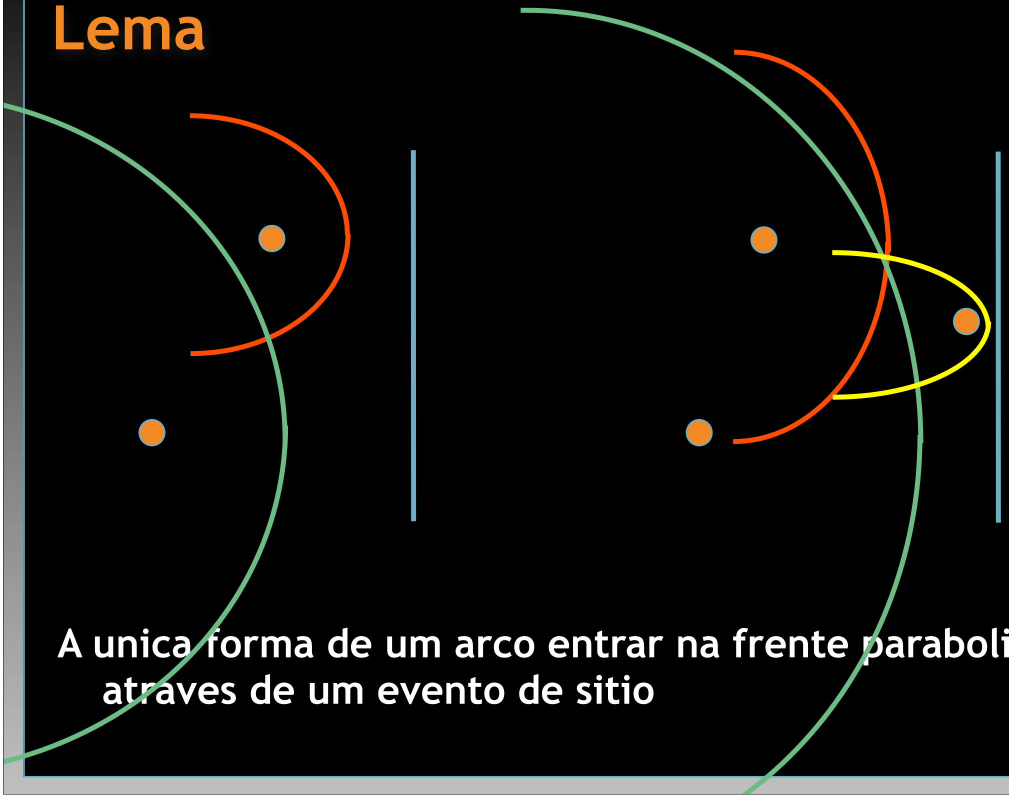


Lema



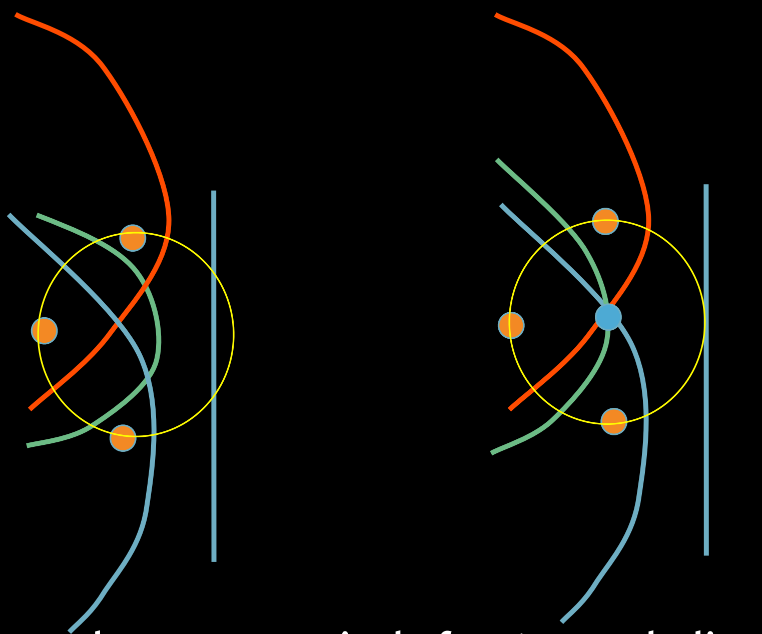
Cada ponto de cada aresta do diagrama de Voronoi e' um ponto de quebra da frente parabolica em algum momento do sweep

Lema



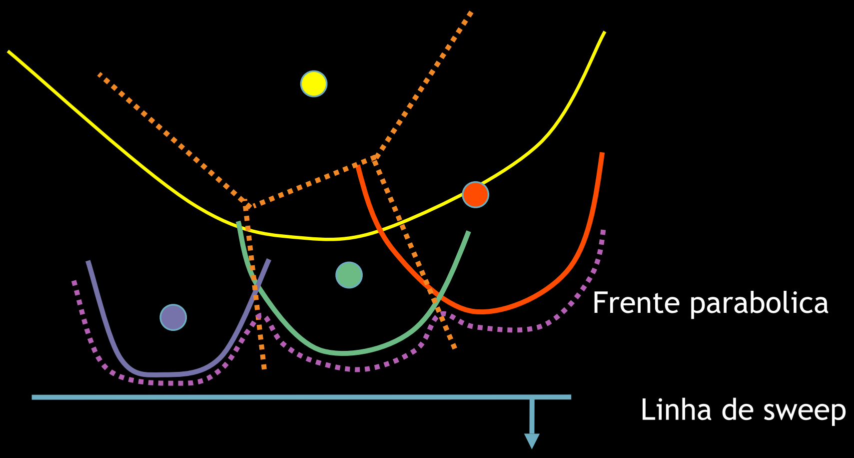
A unica forma de um arco entrar na frente parabolica e atraves de um evento de sitio

Lema

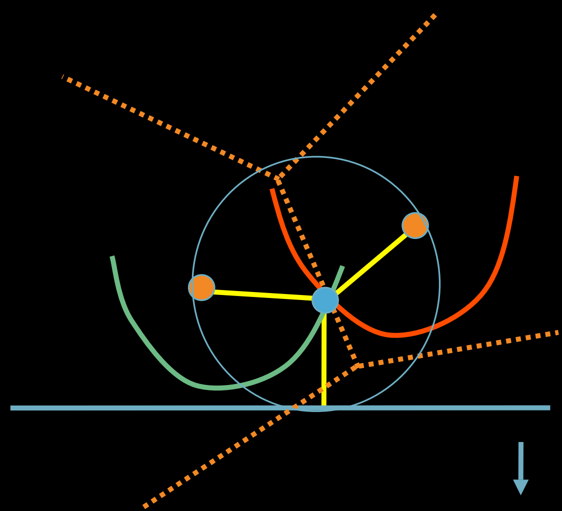


A unica forma de um arco sair da frente parabolica e atraves de um evento de circulo

Frente parabolica

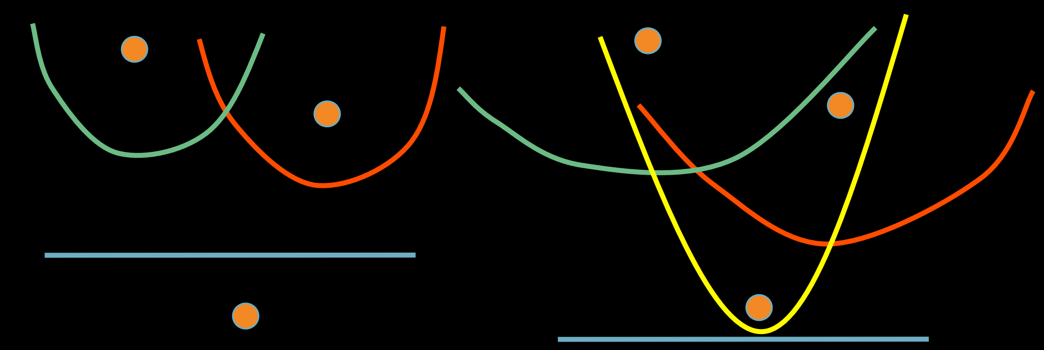


Lema 1



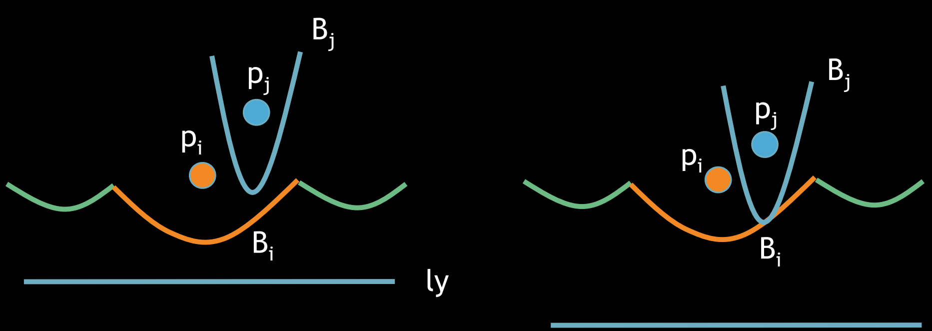
Cada ponto de cada aresta do diagrama de Voronoi e’ um ponto de parada da frente parabolica em algum momento do sweep

Lema 2



A unica forma de um arco entrar na frente parabolica e atraves de um evento de sitio (prova por contradicao)

Primeiro Caso: Entrar pelo meio de um arco de parabola

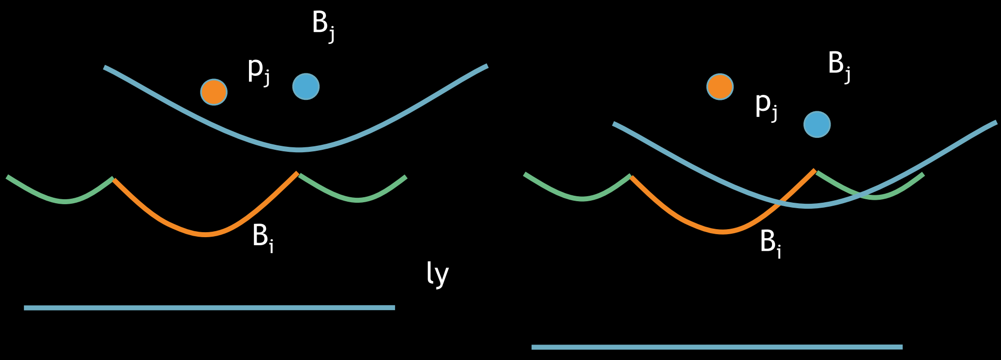


Curvatura de B_j maior que a curvatura de B_i

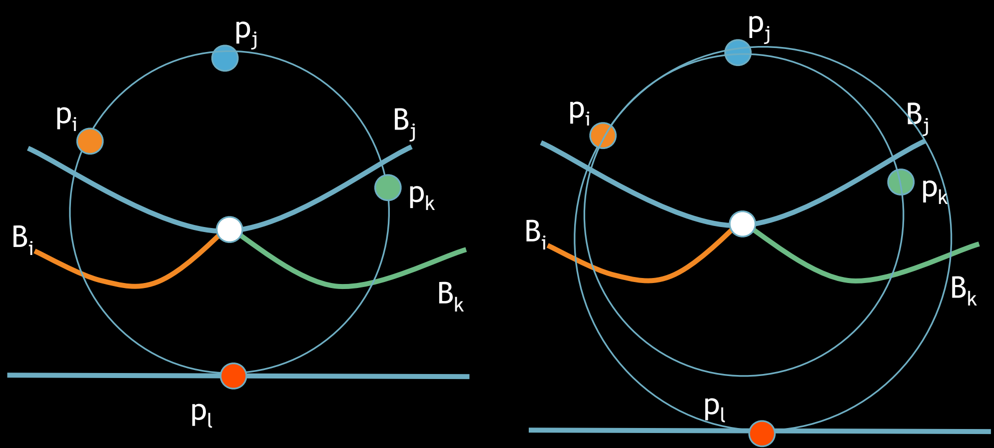
$$Bj := y = 1 / [2(p_j,y-l_y)] * (x^2 - 2p_{j,x}x + p^2_{j,x} + p^2_{j,y} - l^2_y$$

duas raízes se $p_j,p_i > l_y$

Segundo Caso: Entrar pelo meio de dois arcos de parabola

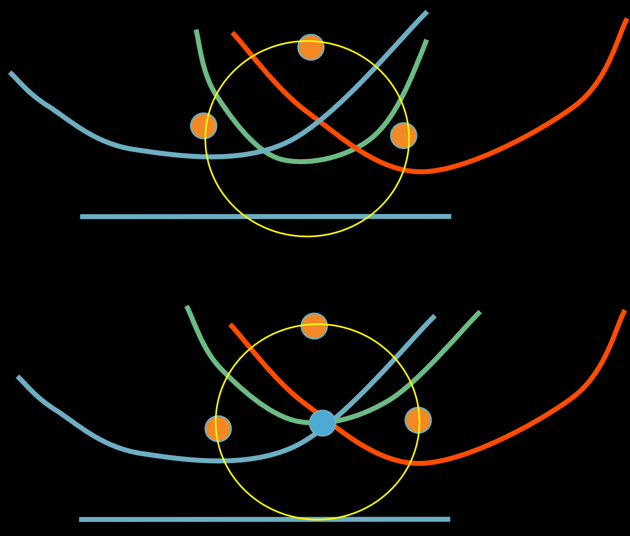


Segundo Caso: Entrar pelo meio de dois arcos de parabola



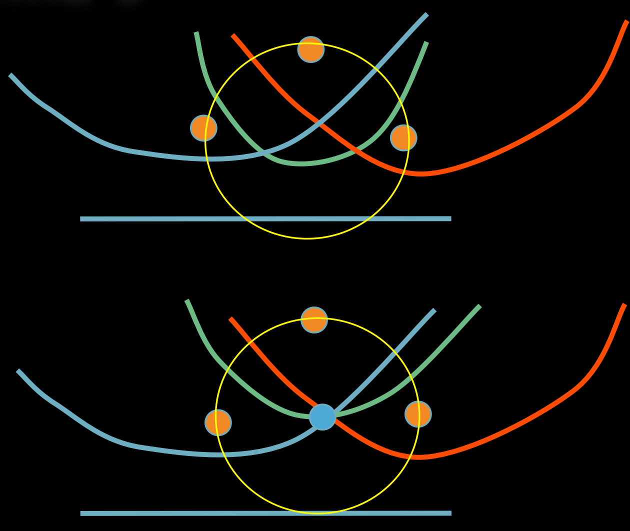
Frente Parabolica: 2n - 1 arcos parabolicos

Lema 3



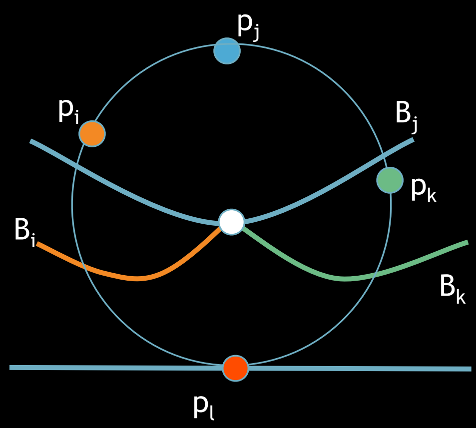
A unica forma de um arco sair da frente parabolica e atraves de um evento de circulo

Prova Lema 3



O arco a esquerda e a direita daquele que desaparece nao pode ser o mesmo arco

Prova Lema 3



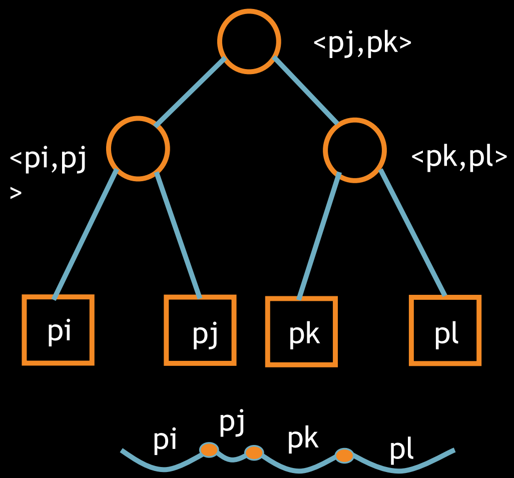
O arco a esquerda e a direita daquele que desaparece nao pode ser o mesmo arco

Estrutura de Dados Algoritmo de Fortune

- **Armazenar diagrama de Voronoi:**
  - Lista de aresta duplamente encadeada
  - Usar uma "bounding box" para limitar regioes
- **Armazenar frente parabolica:**
  - Arvore binaria balanceada T (arcos sao folhas, pontos de parada sao nodos)
- **Armazenar eventos:**
  - Priority queue (eventos de sitio, circulo)

Armazenar frente parabolica

- Arvore binaria balanceada T (arcos sao folhas, pontos de parada sao nodos)



Armazenar Eventos

Priority queue:

- eventos de sitio (classificar pontos em y)
- eventos de circulo

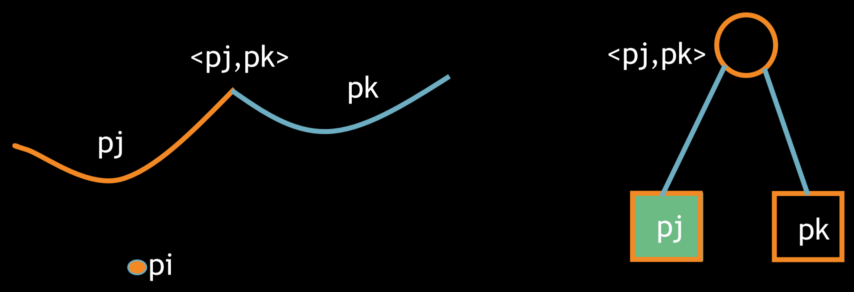
Como definir Eventos de Circulo?

- Sejam tres arcos a,b,c consecutivos na frente parabolica
  - Definir um evento de circulo(a,b,c) se o circulo intersecta a sweep line e nao possui nenhum outro ponto dentro dele

Eventos de Sitio

HandelSiteEvent(pi)

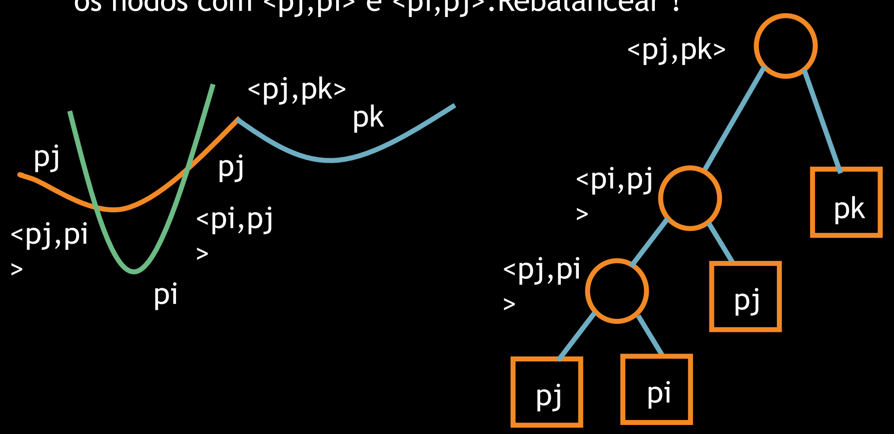
1. Buscar em T o arco a verticalmente acima de pi, e deletar todos eventos de circulo associados a ele (ponteiros para a priority queue)



Eventos de Sitio

HandleSiteEvent(pi)

1. Buscar em T o arco p verticalmente acima de pi, e deletar todos eventos de circulo associados a ele (ponteiros para a priority queue)
2. Trocar a folha pj que representa p em T representando a por tres folhas. A folha do meio contem o sitio pi, e as outras duas contem pj. Atualizar os nodos com <pj,pi> e <pi,pj>.Rebalancear !



Eventos de Sitio

HandelSiteEvent(pi)

1. Buscar em T o arco p verticalmente acima de pi, e deletar todos eventos de circulo associados a ele (ponteiros para a priority queue)
2. Trocar a folha pj que representa p em T representando a por tres folhas. A folha do meio contem o sitio pi, e as outras duas contem pj. Atualizar os nodos com <pj,pi> e <pi,pj>.Rebalancear !
3. Criar registros na estrutura que contem o diagrama de voronoi para as duas semi-arestas que serao tracadas pelos 2 novos pontos de parada
4. Checar as triplas de arcos consecutivos involvendo um dos tres novos arcos. Inserir o evento de circulo correspondente se o circulo intersecta a linha de sweep e nao contem nenhum ponto

Eventos de Circulo

HandelCircleEvent(pl)

1. Buscar em T o arco p verticalmente acima de pl que esta prestes a disaparecer, e deletar todos eventos de circulo associados a ele (ponteiros para a priority queue)
2. Deletar a folha que representa p em T. Atualizar as tuplas representando os nodos internos. Rebalancear !
3. Adicionar o centro do circulo causando o evento como um vertice de Voronoi, e criar duas semi-arestas correspondentes a este ponto de parada. Atualizar os ponteiros.
4. Checar as triplas de arcos consecutivos involvendo o desaparecimento de do arco. Inserir o evento de circulo correspondente se o circulo intersecta a linha de sweep e nao contem nenhum ponto

Algoritmo

Algoritmo VORONOIDIAGRAM(P)
ENTRADA: Um conjunto de pontos P {p1, p2, …, pn} no plano
SAIDA: O diagrama de Voronoi VOR(P) dentro de uma bounding box numa lista de arestas duplamente encadeadas

1. Inicializar a lista de eventos Q com todos eventos de sitio
2. WHILE Q nao e’ vazia
3. DO Considere o evento com maior coordenada y
4. IF evento e um evento de sitio, ocorrendo em pi
5. HandleSiteEvent(pi)
6. ELSE HandleCircleEvent(pl), one pl e’ o ponto mais baixo do circulo causando o evento
7. Calcular uma bounding box que contem todos os vertices do diagrama de voronoi, e fechar as semi-arestas que estao abertas
8. Percorrer a lista de semi-arestas para adicionar os registros de adjacencia de/para por celula

Complexidade

LEMA: O algoritmo roda em O(nlogn) e usa O(n) de memoria

- **Classificacao em Y: O(nlogn)**
- **Estrutura de dados**
  - Operacoes em T: O(logn)
  - Operacoes na lista de aresta: constante
  - Operacoes na fila de eventos: O(logn)
  - Operacoes em eventos: constante
- **Custo de um evento: O(logn)**
- **n eventos de sitio**
- **numero de eventos de circulo: 2n-5 no maximo**

Eixo Medial

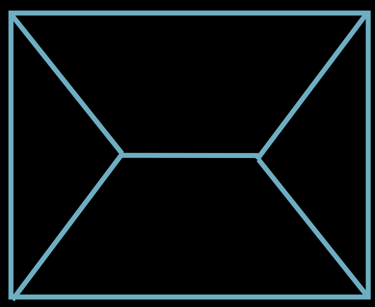
Diagrama de Voronoi: Conjunto de pontos que o sitio mais proximo nao e' unico (2 ou mais)

Eixo Medial de um poligono P: Conjunto de pontos que e' equidistante a mais de um ponto na fronteira de P

(centros dos circulos maximais)

Aplicações

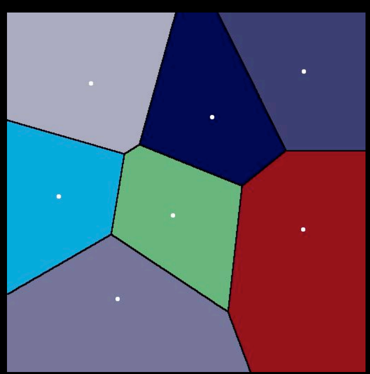
Eixo Medial



Ordinario

Sitios sao pontos

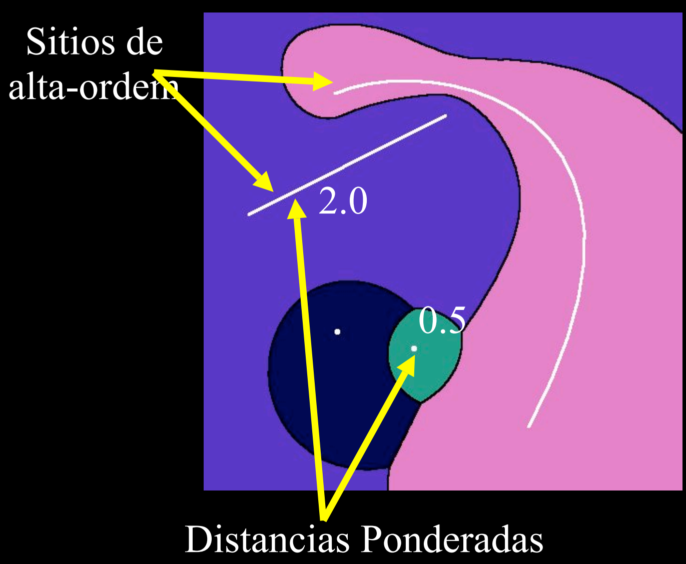
Distancia Euclideana



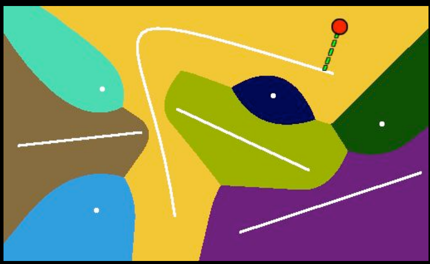
Generalizado

Sitios com geometria de alta-ordem

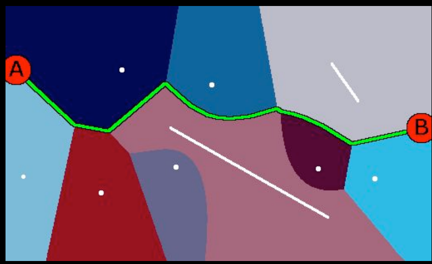
Métricas de distância variadas



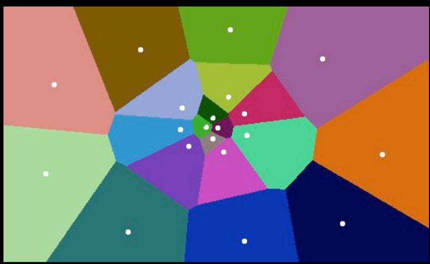
Aplicacoes: Informacoes de Proximidade



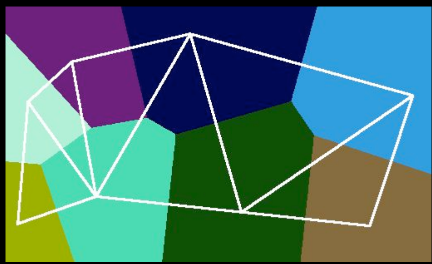
Sitio mais proximo



Caminhos limpos maximos



Estimativa de Densidade



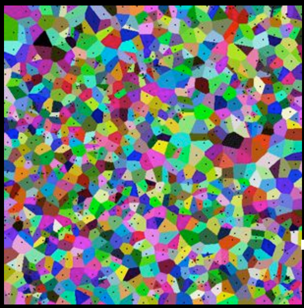
Vizinhos mais proximos

Planejamento de Movimento

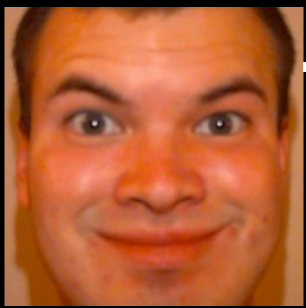
Planejamento de movimento

Buffer de distancia usado como campo de atracao

Mosaicos Dinamicos



1000 pontos



Fonte

Mosaico Dinamicos