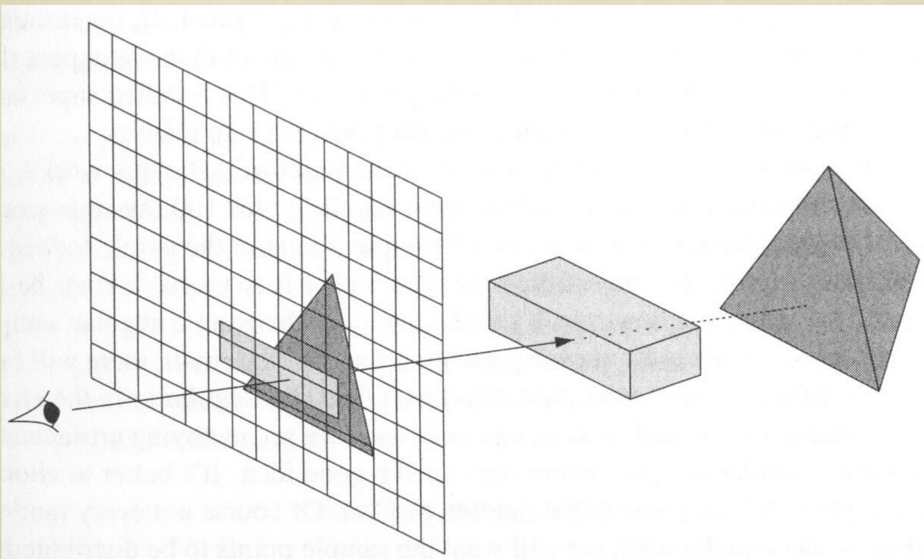
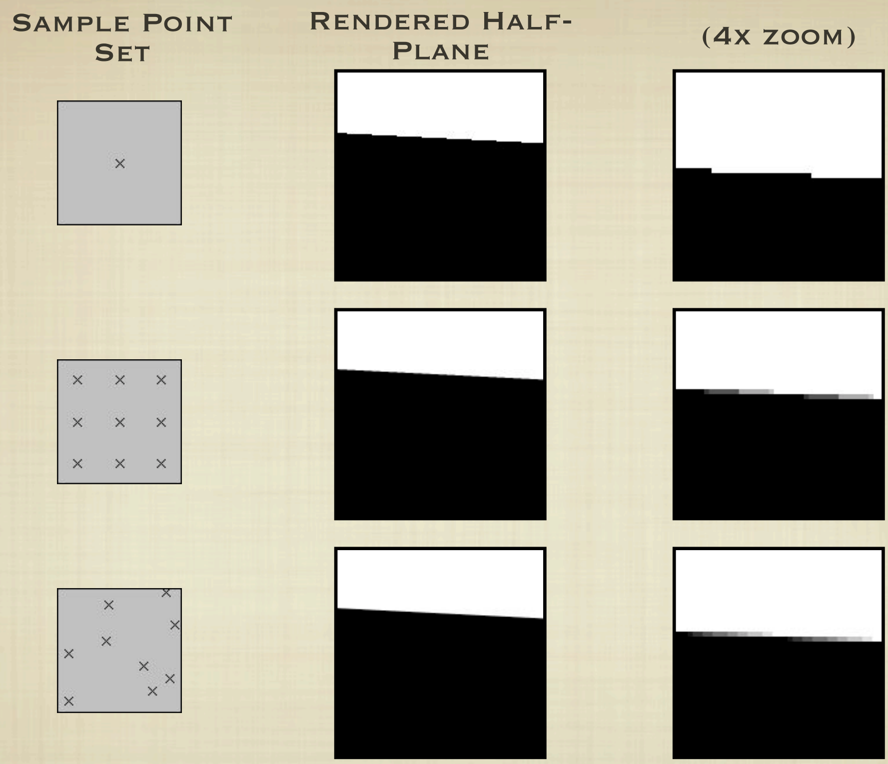
Arranjos e Dualidade

PS. Alguns slides baseadas nas notas de curso de Craig Gotsman e Darius Jazayeri

Ray Tracing x Supersampling





Discrepância

Dado um conjunto S de n pontos dentro do quadrado unitário U= $[0,1]^2$

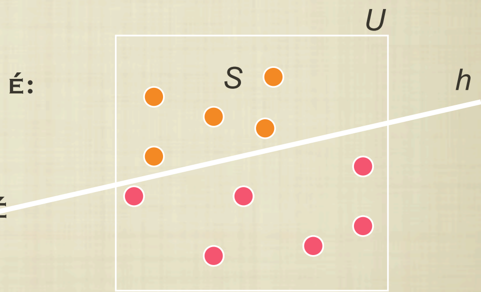
Para um dado hiperplano h, quantos pontos estão abaixo desta linha ?

- Se os pontos são igualmente distribuídos este valor deve estar perto de $n\mu(h)$, onde $\mu(h) = |U \cap h|$. Defina $\mu_S(h) = |S \cap h| / |S|$.
- A *discrepância* de S com respeito a h é:

$$\Delta_S(h) = |\mu(h) - \mu_S(h)|$$

e a discrepância do semi-espaço é

$$\Delta(S) = \sup_h \Delta_S(h)$$



Lema: Para calcular a discrepância de S, é suficiente considerar aqueles semi-espaços que passam por um par de pontos

Algorithm simples: $O(n^3)$

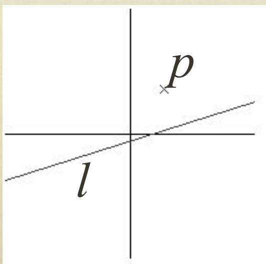
Duality Transforms

- A duality transform is a mapping which takes an element e in the primal plane to element e* in the dual plane.

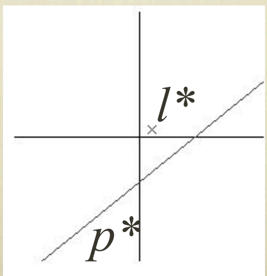
- One possible duality transform:
  point p: (p_x, p_y) ⇔ line p^*: $y = p_x x - p_y$
  line l: $y = mx + b$ ⇔ point l^*: $(m, -b)$

Duality Transforms

- This duality transform takes
  - points to lines, lines to points
  - line segments to double wedges
- This duality transform preserves order
  - Point p lies above line l ⇔ point l^* lies above line p^*

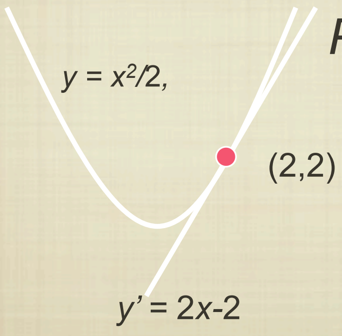


⇔



Parábolas e Dualidade

- A linha dual de um ponto na parábola $y = x^2/2$ é a tangente da parábola neste ponto.
- Usando parábolas encontramos a linha dual de cada ponto no plano.



$$P = (a, a^2/2) \Leftrightarrow P^*: y = ax - a^2/2$$

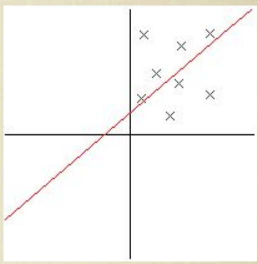
Coeficiente angular da tangente: a

Tangente intercepta: $aa + b = a^2/2 \Rightarrow b = -a^2/2$.

Back to the Discrepancy problem

To determine our discrete measure, we need to:

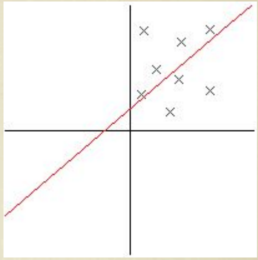
Determine how many sample points lie below a given line (in the primal plane).



Back to the Discrepancy problem

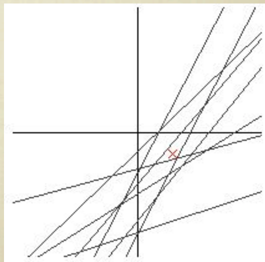
To determine our discrete measure, we need to:

Determine how many sample points lie below a given line (in the primal plane).

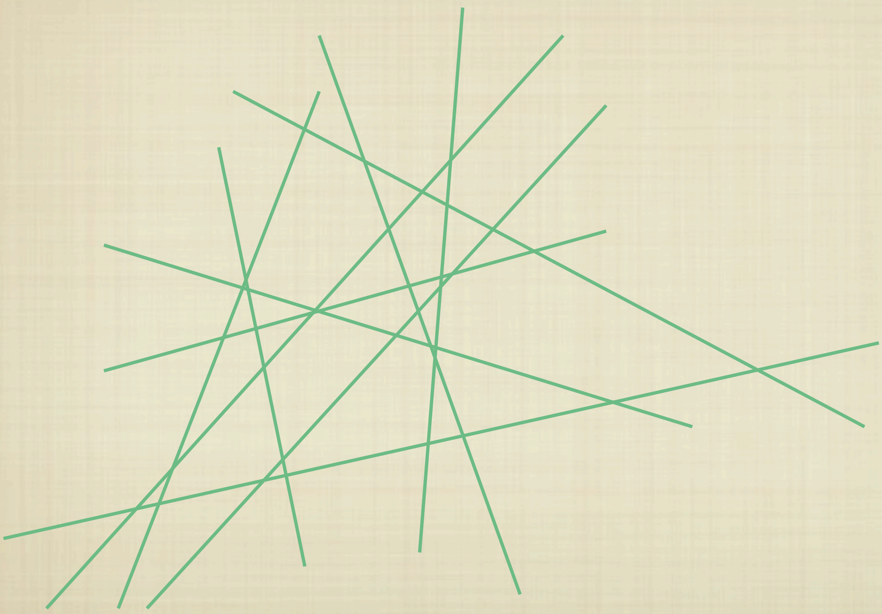


dualizes to

Given a point in the dual plane we want to determine how many sample lines lie above it.



Arranjos de Linhas e Aplicações

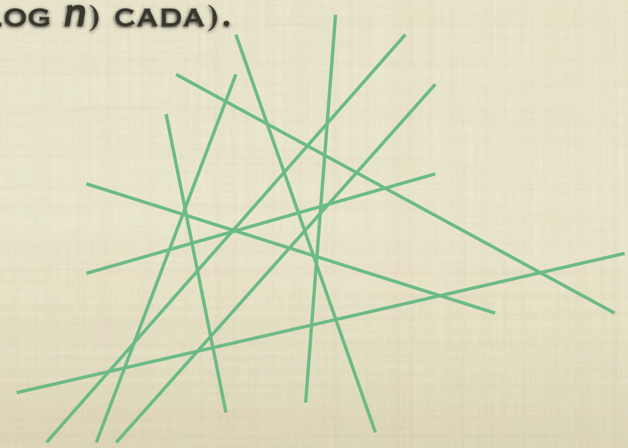


Arranjos de Linhas

- Dado n linhas.
- Número de Vértices ≤ $\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ (cada par de linhas possui interseção).
- Número de arestas ≤ n^2 (cada linha é cortada pelas demais n-1 linhas).
- Número de faces ≤ $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$ (formula de Euler e conectando todos os raios a um ponto no infinito).

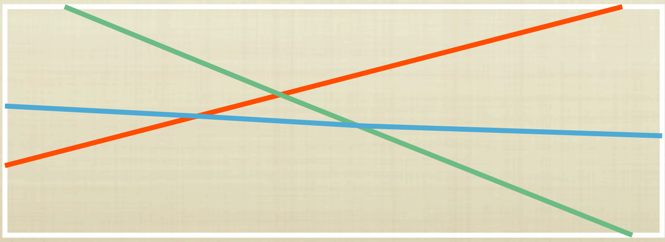
Arranjo de Linhas

- Calcular uma mapa planar (lista de arestas duplamente encadeadas - DCEL).
- Um Plane Sweep rodaria em $O(n^2 \log n)$ ($O(n^2)$ eventos, $O(\log n)$ cada).



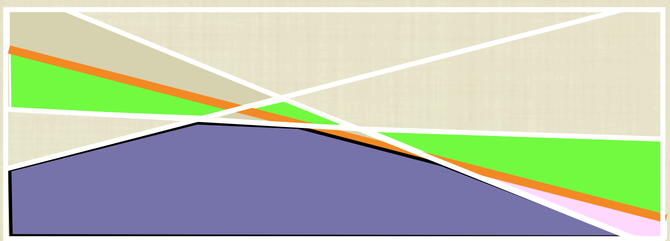
Algoritmo de Arranjo de Linhas

- Entrada: Conjunto L de n linhas no plano.
- Saída: Arranjo DCEL ($A(L)$) para a subdivisão induzida por L em uma bounding box $B(L)$.
- Algoritmo:
  - Calcular uma bounding box $B(L)$, e inicializar DCEL.
  - Inserir uma linha após a outra, e atualizar o arranjo, célula por célula.



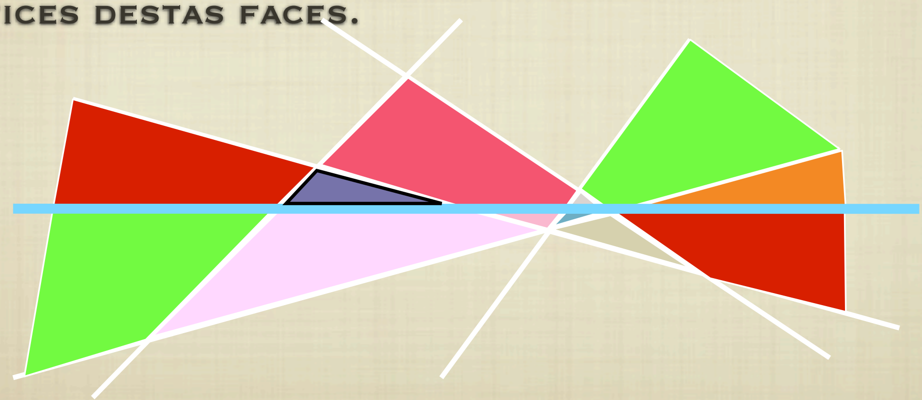
Algoritmo de Arranjo de Linhas

- A complexidade de cada inserção de uma linha depende da complexidade da sua zona.



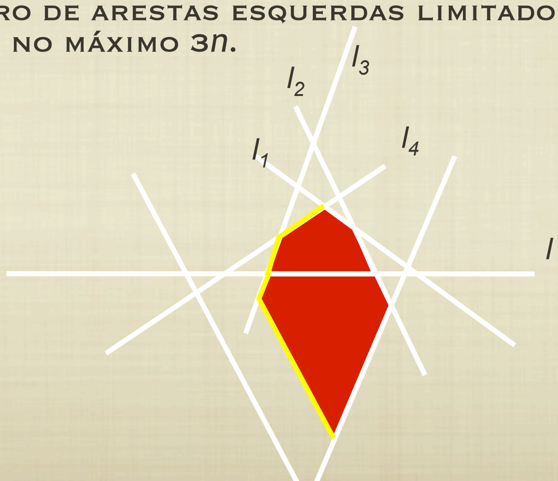
Zona de uma linha

- A **zona** de uma linha no arranjo $A(L)$ é o conjunto de faces de $A(L)$ que interseptam l.
- A complexidade da **zona** de L corresponde a complexidade de todas as faces: soma das arestas e vértices destas faces.



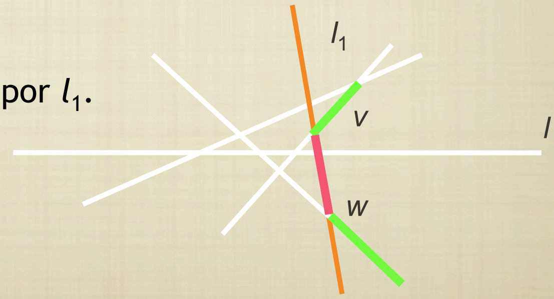
O Teorema da Zona (Zone Theorem)

- **Teorema**: Em um arranjo de n linhas em 2D, a complexidade da zona de uma linha é $O(n)$.
- Prova (idéias):
  - Assumir que L é horizontal (WLOG)
  - Conte o número de arestas esquerdas limitadoras, e prove que este número é no máximo $3n$.



Prova

- Por indução em n.
- Para m=1 – trivial.
- Para m>1:
  - l_1 é a linha mais a direita intersectando l.
- Pela hipótese de indução, a zona de l em $A(L \setminus \{l_1\})$ possui no máximo $3(n-1)$ arestas esquerdas.
- Quando adicionando l_1, o número de arestas aumenta de tal forma:
  - Uma nova aresta em l_1.
  - Duas arestas antigas cortadas por l_1.



Portanto, a complexidade é
$3(n-1)+3 = 3n$

Construindo o Arranjo

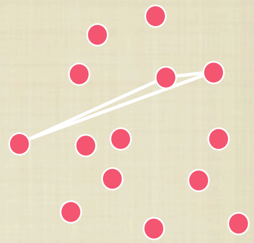
- O tempo necessário para inserir uma linha l_i é linear com a complexidade da zona, a qual é linear no número de arestas. Portanto:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} O(i) = O(n^2)$$

Note que este valor independe da ordem de inserção.

Triângulo de área mínima

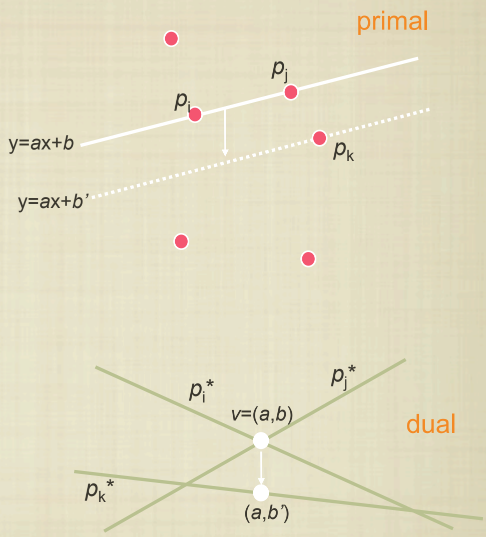
- Dado um conjunto de n pontos, determinar os três pontos que formam o triângulo com a menor área.



- Fácil de resolver em $O(n^3)$.

Algoritmo $O(n^2)$ usando Dual

- Construir arranjo dual em O (n²)
- Para cada par de pontos p_i e p_j (assuma que este é o triângulo base):
  - Identificar o vértice v do arranjo correspondente a linha que passa por estes pontos.
  - Encontra a linha do arranjo mais próxima verticalmente a v.
  - Guarde a melhor linha.
- Emitir ponto correspondendo a melhor linha



Calculando Discrepância

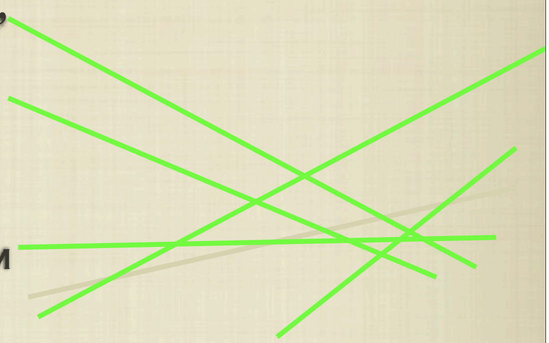
- No plano dual é equivalente a contar o número de linhas sobre o ponto dual.

Calculando Discrepância

- Para cada vértice em $A(S^*)$, calcular o número de linhas acima , sobre e abaixo ele.

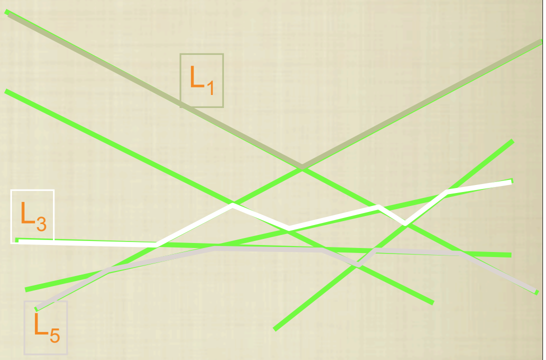
- Estes três números somam n, portanto é suficiente calcular dois deles.

- Da DCEL podemos calcular quantas linhas passam pelo vértice.



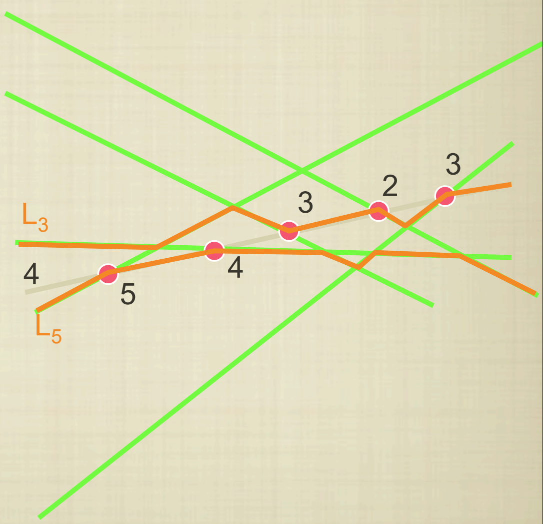
Níveis de um Arranjo

- Um ponto está no nível k de um arranjo de n linhas se exsitem pelo menos *k*-1 linhas sobre este ponto e no máximo *n*-*k* linhas sobre este ponto.
- Existem n níveis em um arranjo de n linhas.
- Um vértice pode estar em múltiplos níveis, dependendo do número de linhas ele intersecta.

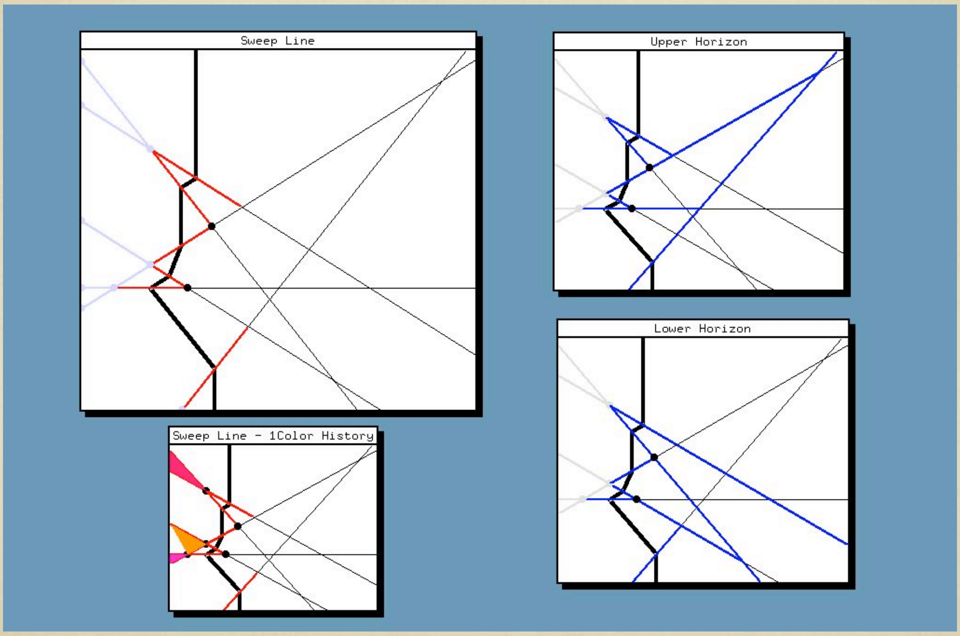


Algoritmo O(*n*²) para Cálculo da Discrepância

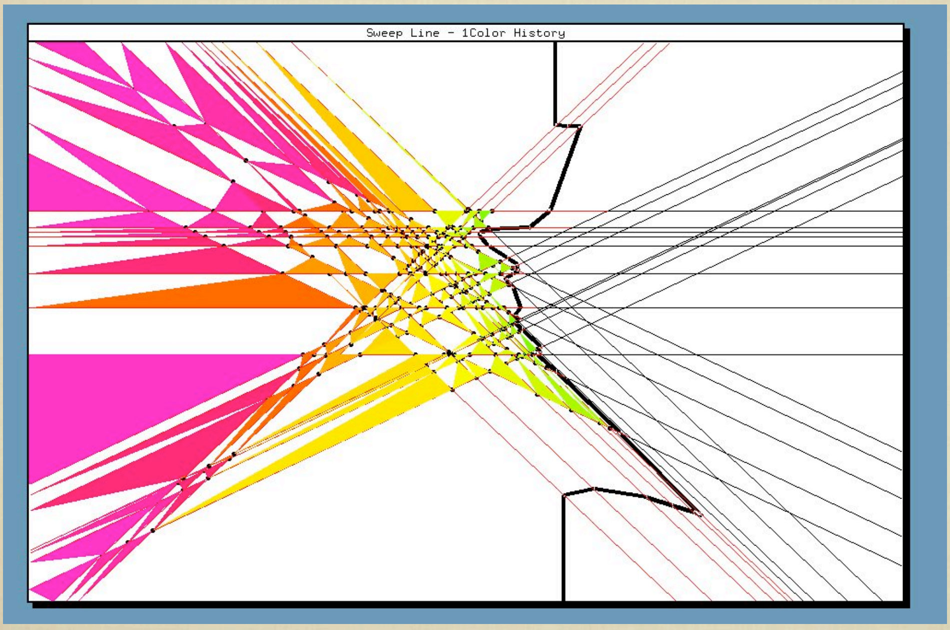
- Constrir o arranjo dual.
- Para cada linha, calcular os níveis de todos os vértices.
- Começando com o vértice mais a esquerda. Calcule seu nível examinando todas outras linhas (O(*n*)).
- Passe para o próximo vértice. Incremente ou decremente o nível, dependendo da direção (coeficiente angular) da linha sendo cruzada.



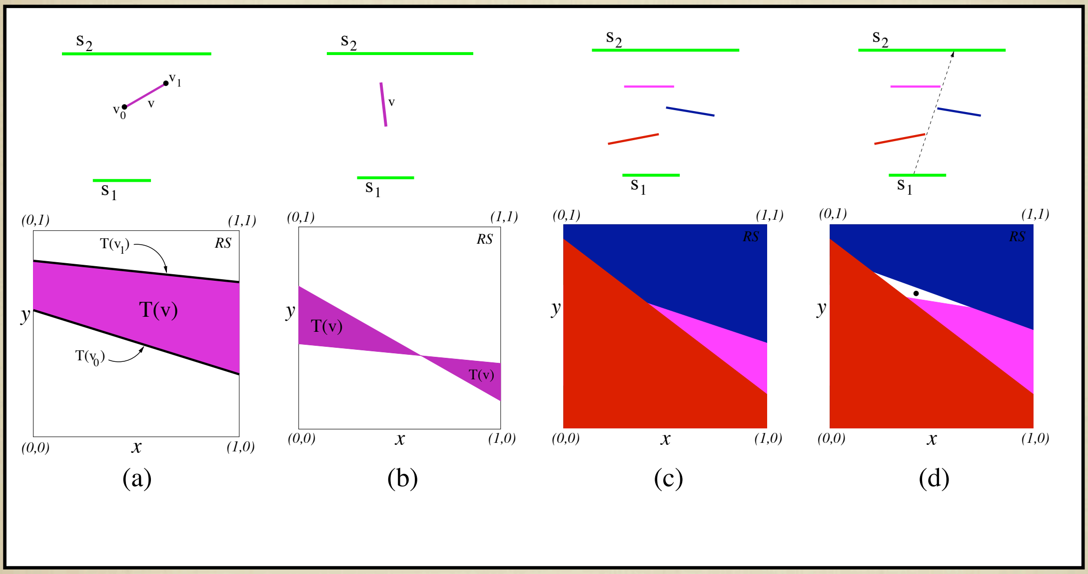
Topological Sweep



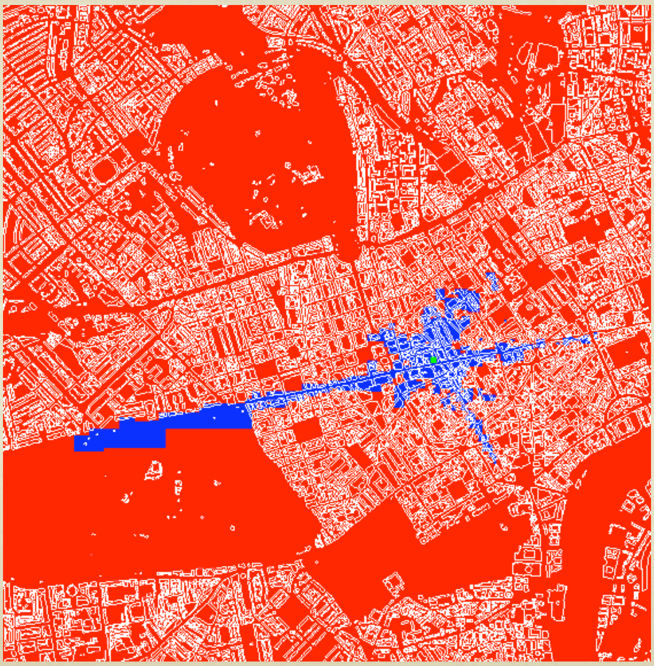
Topological Sweep



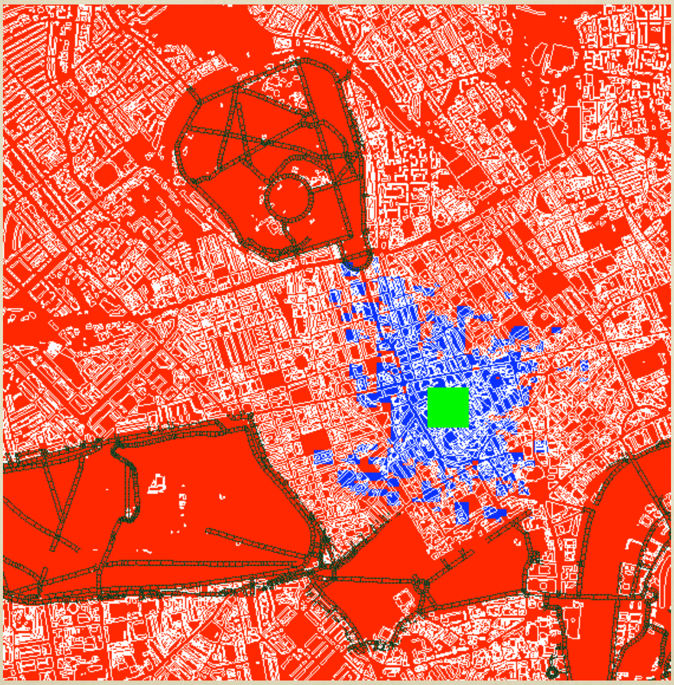
Dual-Ray Space



Dual Ray

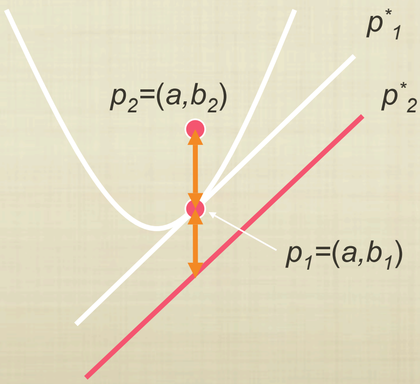


Dual Ray



Parábola e Dualidade: Parte 1

- As linhas duais de dois pontos (a,b_1) e (a,b_2) possuem mesmo coef. angular, e uma distância vertical de $|b_1-b_2|$.



Parábolas e Dualidade: Parte 2

- **Para encontrar a linha dual de um ponto p:**
  - Encontrar duas linhas através de p tangentes a parábola.
  - A linha unindo estes dois pontos de tangência é a linha dual de p.
- ***p* está sobre $l_1 \Leftrightarrow l_1^*$ (=p_1) esta sobre p^*.**