Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka
WDWR
projekt 20204

Aleksandra Horubała

Problem

Rozważamy następujące zagadnienie planowania produkcji:

- Realizacja umowy wymaga dostawy 1100 sztuk komponentu A oraz 1200 sztuk komponentu B po upływie okresu 3 miesięcy.

- Koszty produkcji komponentów (zł/szt.) określają składowe wektora losowego $R = (R_1, \ldots, R_6)^T$:

	Miesiąc 1 (M1)	Miesiąc 2 (M2)	Miesiąc 3 (M3)
A	R_1	R_2	R_3
B	R_4	R_5	R_6

- Wektor losowy R opisuje 6-wymiarowy rozkład t-Studenta z 5 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału [20; 60]. Parametry μ oraz Σ niezawężonego rozkładu t-Studenta są następujące:

$$\mu = \begin{bmatrix} 55 \\ 40 \\ 50 \\ 35 \\ 45 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 16 & -6 & -6 & -2 & 12 \\ 0 & -6 & 4 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -6 & 2 & 25 & 0 & -17 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 9 & -5 \\ -1 & 12 & -5 & -17 & -5 & 36 \end{bmatrix}.$$

- Firma może składować do 150 sztuk komponentu A z miesiąca na miesiąc nie ponosząc żadnych kosztów. Po przekroczeniu tej liczby koszt składowania komponentów A kształtuje się na poziomie 15% miesięcznych kosztów wytwarzania. Analogicznie dla komponentu B.

- Firma w celu wytworzenia komponentów potrzebuje zasobów pozyskiwanych z zewnątrz. Szczegóły dostępnych dostaw i wymagań są następujące:

Zasób	Potrzebne na sztukę A	Potrzebne na sztukę B	Możliwe dostawy M1	Możliwe dostawy M2	Możliwe dostawy M3
Z1	0,2	0,7	600	700	550
Z2	0,8	0,3	1400	900	1200

1 Zadanie 1

Treść zadania: Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością oczekiwaną jako miarą kosztu. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.

1.1 Interpretacja treści zadania

Cel zadania: Celem zadania jest zaproponowanie jednokryterialnego minimalizującego wartość oczekiwaną funkcji kosztu f:

$$min\{\mathbb{E}(f(\mathbf{X})) \mid \mathbf{X} \in Q\}.$$

Z treści zadania rozumiem, że produkty są dostarczane klientowi po upływie 3 miesięcy. Do tego czasu muszą być składowane w fabryce. Jeżeli na koniec miesiąca liczba wytworzonych produktów jest większa niż wartość maksymalna (150) naliczana jest dodatkowa opłata wynosząca 15% kosztów wytwarzania w danym miesiącu. Rozumiem, że gdyby wytworzono wszystkie produkty w pierwszym miesiącu, trzeba by je składować przez kolejne dwa miesiące i płacić 15% kosztów wytwarzania we wszystkich trzech miesiącach.

1.2 Obliczenie wartości oczekiwanych wielowymiarowego rozkładu studenta

Wartości oczekiwana 6-wymiarowego rozkładu t-Studenta, zawężonego do przedziału [20;60] obliczono zgodnie ze wzorem podanym przez prowadzącego (zachowując oznaczania z materiałów do wykładu)

$$\mathbb{E}(R) = \mu + \sigma \cdot \frac{\Gamma((v-1)/2)(v+a^2)^{-(v-1)/2} - (v+b^2)^{-(v-1)/2} v^{v/2}}{2(F_v(b) - F_v(a))\Gamma(v/2)\Gamma(1/2)}.$$

Dla parametrów z zadania wartości te wynoszą:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_1) &= 54.9735999193,\\
\mathbb{E}(R_2) &= 40.0,\\
\mathbb{E}(R_3) &= 49.9480666349,\\
\mathbb{E}(R_4) &= 35.4816698893,\\
\mathbb{E}(R_5) &= 44.9336086285,\\
\mathbb{E}(R_6) &= 32.3866043203.
\end{aligned}$$

Zakładamy, że tyle wynoszą koszty produkcji w tym punkcie zadania. Zatem koszty produkcji przedstawia tabela:

	Miesiąc 1 (M1)	Miesiąc 2 (M2)	Miesiąc 3 (M3)
A	54.9735999193	40.0	49.9480666349
B	35.4816698893	44.9336086285	32.3866043203

Ze względu na swoją liniowość, wartość oczekiwana całkowitego kosztu produkcji jest sumą iloczynów liczby wytworzonych produktów i wartości oczekiwanych kosztów produkcji i przechowywania w poszczególnych miesiącach. Problem decyzyjny polega na dokonaniu wyboru w którym miesiącu tworzyć jaką liczbę produktów. Problem opisano w języku modelowania AMPL, po czym rozwiązano przy pomocy solvera CPLEX i otrzymano optymalną decyzję.

1.3 Optymalne rozwiązanie problemu

Aby obliczyć optymalne rozwiązanie problemu zaprogramowano kod w języku Python wykorzystujący API do języka AMPL i języka R. Kod programu umieszczono na *githubie* pod adresem https://github.com/keIpie/wdwr. Zdefiniowano model w języku AMPL opisany w Sekcji 1.4, który został wczytany przez program. Zbiory i parametry modelu są dynamicznie wypełniane w programie. Na ich podstawie generowane są układy równań, do rozwiązania których wykorzystano solver *CPLEX*.

Znalezione optymalne rozwiązanie ma minimalny koszt równy 105263.37439251498 zł. Optymalne liczby produktów, które opłacało się wytworzyć prezentuje tabela

	Miesiąc 1 (M1)	Miesiąc 2 (M2)	Miesiąc 3 (M3)
A	0	1100	0
B	415	0	785

Wybór jest zgodny z intuicją: jeśli chodzi o produkt A koszty wytwarzania w drugim miesiącu są zdecydowanie najniższe, różnica kosztów jest większa niż dodatkowy koszt przechowywania w tym miesiącu. W przypadku produktu B koszt wytwarzania w drugim miesiącu jest zdecydowanie największy, warto więc jak najwięcej produktów wytworzyć w miesiącu ostatnim (wtedy koszt przechowywania jest najmniejszy). Ponadto ograniczenia na zasoby pozwalają zrealizować takie decyzje.

1.4 Opis modelu

Model problemu napisano w języku modelowanie AMPL. Poszczególne fragmenty modelu opisano w poniższych podrozdziałach.

1.4.1 Definicja zbiorów

Zdefiniowano trzy zbiory:

- PRODUCTS (P) - zbiór wytwarzanych produktów (produkty A i B),
- MONTHS (M) - zbiór miesięcy (miesiące M1, M2 i M3),
- RESOURCES (R) - zbiór zasobów (zawierający zasoby Z1 i Z2).

1.4.2 Definicja parametrów

Zdefiniowano parametry problemu:

- promised - lista zawierająca liczbę zamówień na produkty A i B ([1100,1200]),
- maxno - maksymalna liczba produktów, która może być przechowywana nie ponosząc dodatkowych kosztów (150),
- percent - procent określający dodatkowy koszt przechowywania produktów, których wybradukowano więcej niż *maxno* (15),
- cost - dwuwymiarowa tablica kosztów, przechowująca koszt wytwarzania danego produktu w danym miesiącu (obliczone wartości oczekiwane),
- demand - dwuwymiarowa tablica, przechowująca zapotrzebowania na zasoby dla poszczeghólnych produktów,
- delivery - dwuwymiarowa tablica, przechowująca możliwe liczności dostaw zasobów w konkretnych miesiącach,
- chronology - dwuwymiarowa tablica, przechowująca wartości binarne, indeksowana miesiącami na obu współrzędnych; opisuje który miesiąc był wcześniej;

1.4.3 Definicja zmiennych

Zdefiniowano następujące zmienne:

- Made - dwuwymiarowa tablica nieujemnych zmiennych całkowitych, przechowująca liczby wytworzonych produktów do danego miesiąca (wartości obliczane przy pomocy danych o chronologii miesięcy),
- Make - dwuwymiarowa tablica nieujemnych zmiennych całkowitych, przechowująca liczby wytworzonych produktów w danym miesiącu,
- cond - dwuwymiarowa tablica zmiennych binarnych, przechowująca wartość 0 jeżeli do danego miesiąca wyprodukowano mniej niż *maxno* danego produktu, a 1 w przeciwnym wypadku,
- extra_stored - nieujemna zmienna całkowita opisująca liczbę produktów, za których przechowywanie trzeba dodatkowo płacić; została wprowadzona, żeby usunąć nieliniowość, którą wprowadza zmienna warunkowa *cond*;

1.4.4 Definicja funkcji celu

Optymalizacja polega na minimalizacji funkcji celu, którą stanowi wartość oczekiwana funkcji kosztu. W tym problemie funkcja kosztu składa się z dwóch części: kosztów produkcji i kosztów przechowywania

$$\sum_{p\in P}\sum_{m\in M} koszt\_produkcji[p,m] + koszt\_przechowywania[p,m] =$$

$$\sum_{p\in P}\sum_{m\in M} cost[p,m] * Make[p,m] + extra\_stored * percent * cost[p,m].$$

Pierwszy człon funkcji stanowi koszt przechowywania liczony jako $cost[p,m] * Make[p,m]$. Jest to liczba wytworzonych produktów w ramach danego miesiąca przemnożona przez koszt wytwarzania w danym miesiącu. Drugi człon stanowi koszt przechowywania liczony jako $extra\_stored * percent * cost[p,m]$. Oznacza liczbę produktów, za przechowywanie których trzeba dodatkowo płacić wymnożoną przez koszt przechowywania, który w każdym miesiącu wnosi tyle ile koszt wytwarzania przeskalowany przez procent opisany zmienną *percent*.

1.4.5 Definicja ograniczeń

Zdefiniowano następujące ograniczenia:

- Sumaryczna liczba wytworzonych produktów musi być większa od obiecanej klientowi
$$\sum_{m\in M} Make[p,m] >= promised[p].$$
- W każdym miesiącu liczba wytworzonych produktów przemnożona przez stopień wykorzystania zasobu na sztukę produktu nie może przekroczyć liczby dostępnych zasobów w zadanym miesiącu:
$$\sum_{p\in P} Make[p,m] * demand[p,r] <= delivery[m,r],$$
- Wytworzone do tej pory produkty obliczane są dzięki zmiennej opisującej chronologię kolejnych miesięcy: wartość wytworzonych produktów *Make* jest dodawana do zmiennej *Made* dla miesięcy wcześniejszych lub równych danemu miesiącowi
$$Made[p,m] = \sum_{n\in M} Make[p,n] * chronology[m,n];$$
- Liczba wytworzonych do tej pory produktów *Made* musi być większa niż wartość *maxno* przemnożona przez zmienną warunkową *cond* opisującą, czy do tej pory wytworzona maksymalną liczbę produktów:
$$Made[p,m] >= maxno * cond[p,m].$$
Jeżeli wytworzono więcej niż *maxno* produktów zmienna *cond* wynosi 1 i dostajemy prawdziwą nierówność
$$Made[p,m] >= maxno.$$

Jeżeli do tej pory nie wytworzono *maxno* produktów zmienna *cond* wynosi 0 i dostajemy prawdziwą nierówność

$$Made[p, m] >= 0.$$

- Liczba wytworzonych do tej pory produktów *Made* musi być mniejsza lub równa wartości

$$Made[p, m] <= maxno + cond[p, m] * (promised[p] - maxno).$$

Jeżeli do tej pory wytworzono więcej niż *maxno* produktów zmienna *cond* wynosi 1 i dostajemy prawdziwą nierówność

$$Made[p, m] <= promised[p].$$

Jeżeli do tej pory nie wytworzono *maxno* produktów zmienna *cond* wynosi 0 i dostajemy prawdziwą nierówność

$$Made[p, m] <= maxno.$$

Na tym etapie pojawia się problem z obliczeniem liczby produktów, za których przechowywanie trzeba dodatkowo płacić. Liczbę tę można by opisać następująco

$$extra\_stored[p, m] = cond[p, m] * (Made[p, m] - maxno)$$

jednak takie ograniczenie nie jest liniowe. Dlatego zastąpiono je ograniczeniami:

- zmienna *extra_stored* musi być większa lub równa zero, nie może też przekroczyć maksymalnej liczby przechowywanych produktów, pomniejszonej o liczbę produktów, które można przechowywać za darmo:

$$0 <= extra\_stored[p, m] <= promised[p] - maxno$$

- kolejne ograniczenie jest postaci

$$(Made[p, m] - maxno) - extra\_stored[p, m] + cond[p, m] * (promised[p] - maxno) <=$$

$$<= promised[p] - maxno.$$

Zauważmy, że jeżeli $cond[p, m] = 1$ (mamy więcej niż *maxno* produktów) to ograniczenie ma postać

$$(Made[p, m] - maxno) <= extra\_stored[p, m],$$

a więc liczba dodatkowo przechowywanych produktów jest mniejsza lub wartości *extra_stored*. Zauważmy, że ze względu na postać minimalizowanej funkcji zawsze wybierana będzie minimalna możliwa wartość zmiennej *extra_stored*, która wynosi dokładnie $Made[p, m] - maxno$, a więc jest równa liczbie nadmiarowych produktów.

Jeżeli $cond[p, m] = 0$ (mamy mniej niż *maxno* produktów) to ograniczenie ma postać

$$Made[p, m] - extra\_stored[p, m] <= promised[p]$$

co jest prawdą dla każdej nieujemnej wartości *extra_stored*, ponieważ zawsze zachodzi $Made[p, m] <= promised[p]$. Zatem ze względu na postać minimalizowanej funkcji zmienna *extra_stored* zawsze otrzyma najmniejszą możliwą wartość czyli 0.

2 Zadanie 2

Treść zadania: Jako rozszerzenie powyższego zaproponować dwukryterialny model kosztu i ryzyka z wartością oczekiwaną jako miarą kosztu i odchyleniem przeciętnym jako miarą ryzyka. Dla decyzji $x \in Q$ odchylenie przeciętne jest definiowane jako $\delta(x) = \sum_{t=1}^{T} |\mu(x) - r_t(x)| \cdot p_t$, gdzie $\mu(x)$ oznacza wartość oczekiwaną, $r_t(x)$ realizację dla scenariusza t, p_t prawdopodobieństwo scenariusza t.

a. Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–koszt.

b. Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i minimalnego kosztu. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko–koszt?

c. Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

2.1 Interpretacja treści zadania

Ponieważ wielowymiarowy rozkład t-Studenta jest rozkładem ciągłym, prawdopodobieństwo dowolnej konkretnej wartości kosztów jest równe 0 (ponieważ prawdopodobieństwo zajścia konkretnego zdarzenia opisane rozkładem ciągłym musi wynosić 0). Za możliwe scenariusze zdecydowano się zatem przyjąć to, że wartości kosztów wpadną do pewnych przedziałów (aproksymacja rozkładu ciągłego odcinkami).

Rozkład z zadania jest obcięty do przedziału [20;60] długości 40. Zdecydowano się rozważać odcinki długości 5, zatem w każdym wymiarze określono 8 przedziałów. Łączna liczba rozpatrywanych scenariuszy wynosi zatem $8^6 = 2^{18}$. Prawdopodobieństwo poszczególnych scenariuszy obliczono przy pomocy metody Monte Carlo. Z wielowymiarowego rozkładu t-Studenta wylosowano 2^{18} wartości, po czym zliczono ile wartości spełnia poszczególne scenariusze. Aby wyznaczyć prawdopodobieństwo scenariuszy, znormalizowano otrzymane wyniki.

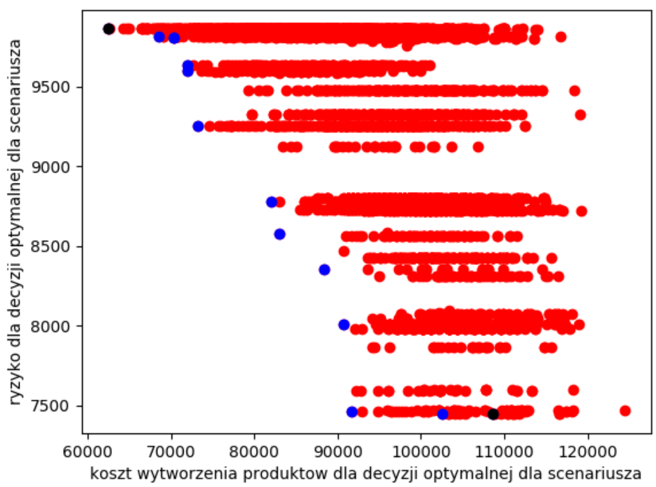
2.2 Wyznaczenie zbioru rozwiązań efektywnych

Zbiór rozwiązań efektywnych wyznaczono obliczając optymalne decyzje produkcyjne dla każdego scenariusza przy pomocy modelu zdefiniowanego w zadaniu pierwszym. Koszty produkcji stanowiły minimalne wartości przedziałów opisujących scenariusze. Następnie dla każdego scenariusza obliczono miarę ryzyka opisaną przez odchylenie przeciętne

$$\delta(x) = \sum_{t=1}^{T} |\mu(x) - r_t(x)| \cdot p_t,$$

gdzie x jest decyzją optymalną dla wybranego scenariusza t, μ oznacza koszt dla decyzji x obliczoną na podstawie wartości oczekiwanych rozkładu t-Studenta, r_t koszt dla decyzji x otrzymany dla parametrów wybranego scenariusza, a p_t prawdopodobieństwo scenariusza obliczone przy pomocy metody Monte Carlo. Nie rozważano scenariuszy, których prawdopodobieńtswo wyniosło 0.

Otrzymany zbiór rozwiązań w przestrzeni ryzyko-koszt przedstawia Rysunek 1



Rysunek 1: Zbiór rozwiązań w przestrzeni ryzyko-koszt. Koszt opisano na osi X, a ryzyko na osi Y. Kolorem czerwonym oznaczono znalezione rozwiązania. Kolorem niebieskim oznaczono rozwiązania efektywne. Kolorem czarnym oznaczono rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka.

Rozwiązania efektywne to rozwiązania niezdominowane przez żadne inne rozwiązanie względem dominacji racjonalnej. Rozwiązanie R_1 racjonalnie dominuje rozwiązanie R_2 jeżeli koszt i ryzyko rozwiązania R_1 są równe lub mniejsze niż koszt i ryzyko rozwiązania R_2. Jeżeli jedno z rozwiązań ma mniejszy koszt, a drugie mniejsze ryzyko żadne z rozwiązań nie jest zdominowane przez drugie. Rozwiązania efektywne oznaczona na Rysunku 1 kolorem niebieskim.

2.3 Rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i kosztu

Rozwiązania efektywne minimalnego kosztu (minimalnego ryzyka), to niezdominowane rozwiązania dla których koszt (ryzyko) jest minimalne. Na Rysunku

1 są to punkty oznaczone kolorem czarnym. Rozwiązanie o minimalnym koszcie znajduje się w lewym górnym rogu rysunku. Rozwiązanie o minimalnym ryzyku znajduje się w prawym dolnym rogu. Konkretne wartości rozwiązań w przestrzeni ryzyko-koszt wynoszą:

- rozwiązanie efektywne minimalnego kosztu ma wartości:

$$(koszt, ryzyko) = (62421.25, 9860.474178003471)$$

- rozwiązanie efektywne minimalnego ryzyka ma wartości:

$$(koszt, ryzyko) = (108625.0, 7446.509389530245)$$

2.4 Dominacja stochastyczna pierwszego rzędu

Do zbadania stochastycznej dominacji wybrano trzy rozwiązania efektywne: rozwiązanie minimalnego kosztu, rozwiązanie minimalnego ryzyka i trzecie, przypadkowo wybrane rozwiązanie. Wybrane rozwiązania mają następujące wartości w przestrzeni koszt-ryzyko:

1. R_1 - rozwiązanie efektywne minimalnego kosztu ma wartości:

$$(koszt, ryzyko) = (62421.25, 9860.474178003471)$$

2. R_2 - rozwiązanie efektywne minimalnego ryzyka ma wartości:

$$(koszt, ryzyko) = (108625.0, 7446.509389530245)$$

3. R_3 - trzecie rozwiązanie efektywne:

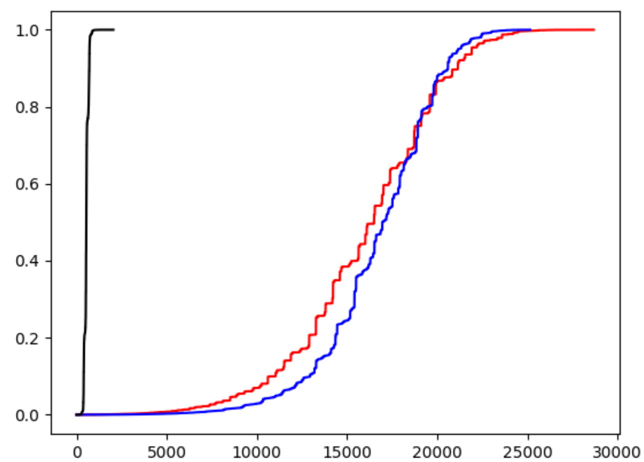
$$(koszt, ryzyko) = (71990.75, 9631.726681847718)$$

Zgodnie ze skryptem z wykładu dominację stochastyczną pierwszego rzędu opisuje Definicja 2.1.

Definicja 2.1 (Dominacja stochastyczna pierwszego rzędu)**.** *Zmienna losowa Y' dominuje zmienną losową Y'' w sensie dominacji stochastycznej pierwszego rzędu jeżeli dla każdego $v \in R$ prawdziwa jest nierówność dystrybuant $F_{Y'}(v) \leqslant F_{Y''}(v)$ i dla przynajmniej jednej wartości v jest to nierówność ostra.*

Napisano program obliczający dystrybuanty dla trzech wybranych rozwiązań efektywnych. Dystrybuanty obliczono po uporządkowaniu wartości kosztów od malejąco, ponieważ rozważamy problem minimalizacji. Następnie porównano wartości dystrybuant we wszystkich punktach odpowiadających możliwym kosztom. Otrzymano następujące wnioski:

- Występuje dominacja stochastyczna pierwszego rzędu pomiędzy rozwiązaniami R_3 i R_2
$$R_3 >_{FSD} R_2.$$



Rysunek 2: Dystrybuanty rozwiązań R_1 (kolor czerwony), R_2 (kolor niebieski) i R_3 (kolor czarny).

- Pomiędzy pozostałymi rozwiązaniami nie otrzymano dominacji w żadną stronę.

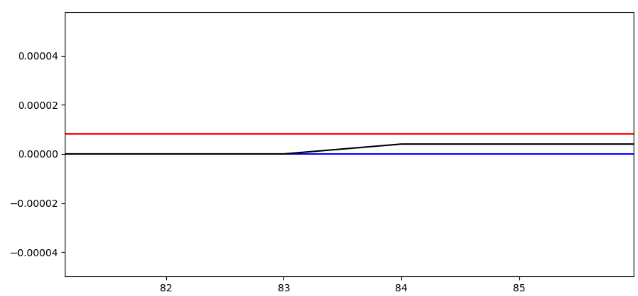
Wykres dystrybuant zaprezentowano na Rysunku 2.

Dystrybuanta zmiennej R_3 rośnie dużo szybciej niż pozostałe, jednak dominuje tylko zmienną R_2 - początkowe wartości dystrybuanty F_{R_1} są większe niż wartości dystrybuanty F_{R_3} co widać na Rysunku 3.

3 Testy poprawności implementacji

Stworzono jednostkowe testy poprawności implementacji:

- sprawdzanie czy dla wybranej decyzji wszystkie ograniczenia są spełnione,
- test obliczania wartości oczekiwanej (zgodnie z wektorem testowym podanym dla trójwymiarowego rozkładu t-Studenta w materiałach do projektu),
- test sprawdzający czy prawdopodobieństwa scenariuszy sumują się do jedynki.



Rysunek 3: Dystrybuanty rozwiązań R_1 (kolor czerwony), R_2 (kolor niebieski) i R_3 (kolor czarny) - zbliżenie.