វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

(ប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១២)

I- (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១-គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$ ។

២-សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយបង្ហាញថា $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

II-(១៥ពិន្ទុ) គេចង់បង្កើតចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសគ្នា ដោយយកចេញពីលេខ 1,2,3,4,5, 6,7,8,9 ។

១-រកចំនួនករណីអាច ។

២-រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះជាពហុគុណនៃ 5 ។

៣-រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ ។

III-(១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ $y=g(x)=xe^{2x}$ ។

១-រកដេរីវេ $g'(x)$ និង $g''(x)$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$ ។

២-រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=g(x)$ ត្រង់ $x=1$ ។

IV-(២០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការ $y''-4y'+5y=0 \quad (E)$ ។

១-រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ (E) ។

២-គេដឹងថា $y_p=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y''-4y'+5y=4\cos x-12\sin x \; (F)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ រកចំនួនពិត a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F) ។

V-(៣០ពិន្ទុ) ១-អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2+16y^2-150x+64y=111$ ។

ក/រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និង កំណុំរបស់អេលីប E ។

ខ/សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។

២-ចំណុច $M(-1,0,1)$; $N(0,1,2)$ និង $P(1,2,-1)$ ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ ។ ប្លង់ α មួយមានសមីការ $x-2y+z-4=0$ ។

ក/រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់ β ដែលកាត់តាមចំណុច M,N និង P ។

ខ/រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាម N ។ តើប្លង់ α ជួបស្វ៊ែ S ឬទេ ?

VI-(៣៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

១-រក $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីតតូតដេកនៃក្រាបC ។

២-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣-សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។ គេឲ្យ $e=2.7\,,\frac{2}{e}=0.7$ ។

៤-គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

(ធ្វើកំរែដោយ លឹម ផល្គុន)

I- (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១-គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$

យើងបាន $A=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})-(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$$=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=0$$

ហើយ $B=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+1$

$$=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=0$$

ដូចនេះ $A=x-y^2=0$ និង $B=x^2+x+1=0$ ។

២-សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយបង្ហាញថា $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត

គេមាន $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})-i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}=\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})$$

និង $y=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{x}=\cos(-\frac{2\pi}{3})-i\sin(-\frac{2\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ ។

ដូចនេះ $x=\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})$ និង $y=\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}$ ។

ហើយ $C=x^{2013}+y^{2013}=(\overline{y})^{2013}+(y)^{2013}=2\operatorname{Re}(y^{2013})$ ដោយ $y^{2013}=\cos 1342\pi+i\sin 1342\pi$ (ដឺមរ័)

គេបាន $C=2\cos 1342\pi=2$ (ព្រោះ $\cos 1342\pi=1$) ។

II-(១៥ពិន្ទុ) គេចង់បង្កើតចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសគ្នា ដោយយកចេញពីលេខ 1,2,3,4,5, 6,7,8,9 ។

១-រកចំនួនករណីអាច ៖

ចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសគ្នា ដោយយកចេញពីលេខ 1,2,3,4,5, 6,7,8,9 ជាតម្រៀបគិតលំដាប់ដែលកំណត់ដោយ $n(S)=A(9,3)=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{6!.7.8.9}{6!}=504$ ។

ដូចនេះចំនួនករណីអាចគឺ $n(S)=504$ ។

២-រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះជាពហុគុណនៃ 5

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ នោះគេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

ចំនួនមានលេខ3ខ្ទង់ជាពហុគុណនៃ5ជាចំនួនដែលមានលេខចុងក្រោយជាលេខ5 ហើយលេខ2ខ្ទង់ខាងមុខជាលេខដែលយកចេញពីលេខ 1,2,3,4,6,7,8,9 ។

គេបានចំនួនករណីស្រប $n(A)=A(8,2)=\frac{8!}{(8-2)!}=\frac{6!.7.8}{6!}=56$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{56}{504}=\frac{1}{9}$ ។

៣-រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ នោះគេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$

ចំនួនមានលេខ3ខ្ទង់ជាចំនួនគូ ជាចំនួនដែលមានលេខចុងក្រោយជាចំនួនគូ ។

ក្នុងចំណោម9ចំនួន 1,2,3,4,5,6,7,8,9 មានចំនួនគូបួនគឺ 2,4,6,8 ។

គេបានចំនួនករណីស្រប $n(B)=A(8,2)\times 4=\frac{8!}{(8-2)!}\times 4=\frac{6!.7.8}{6!}\times 4=224$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{224}{504}=\frac{4}{9}$ ។

III-(១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ $y=g(x)=xe^{2x}$ ។

១-រកដេរីវេ $g'(x)$ និង $g''(x)$ ដោយប្រើរូបមន្ត $(uv)'=u'v+uv'$ គេបាន ៖

$$g'(x)=(xe^{2x})'=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}$$

និង $g''(x)=(2x+1)'e^{2x}+(2x+1)(e^{2x})'=2e^{2x}+2(2x+1)e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$

ដូចនេះ $g'(x)=(2x+1)e^{2x}$ និង $g''(x)=4(x+1)e^{2x}$ ។

ទាញបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$ ៖

ចំពោះ $x=-0.5$ គេមាន $g'(-0.5)=[2(-0.5)+1]e^{2(-0.5)}=(-1+1)e^{-1}=0$

ហើយ $g''(0.5)=4(-0.5+1)e^{2(-0.5)}=2e^{-1}>0$ ។

ដោយ $g'(-0.5)=0$ និង $g''(-0.5)>0$ នោះ អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$ ។

២-រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=g(x)$ ត្រង់ $x=1$

តាមរូបមន្ត $(T): y-y_0=y'_0(x-x_0)$

បើ $x_0=1$ នោះ $y_0=1.e^2=e^2$ ហើយ $y'_0=g'(1)=3e^2$

គេបាន $(T): y-e^2=3e^2(x-1)$ ឬ $(T):\ y=e^2(3x-2)$ ។

IV-(២០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការ $y''-4y'+5y=0$ (E) ។

១-រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ (E)

សមីការសម្គាល់នៃ (E) គឺ $r^2-4r+5=0$

$\Delta'=4-5=-1=i^2$ មានឬស $r_1=2-i$, $r_2=2+i$ នោះ $\alpha=2$, $\beta=1$

តាមរូបមន្ត $y_h=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}$

ដូចនេះ $y_h=(A\cos x+B\sin x)e^{2x}$, $A,B\in IR$ ។

២-រកចំនួនពិត a និង b

គេដឹងថា $y_p=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y''-4y'+5y=4\cos x-12\sin x$ (F)

នោះគេបាន $y''_p-4y'_p+5y_p=4\cos x-12\sin x$ (1)

ដោយ $y'_p=-a\sin x+b\cos x$ និង $y''_p=-a\cos x-b\sin x$

គេបាន $(1): -a\cos x-b\sin x+4a\sin x-4b\cos x+5a\cos x+5b\sin x=4\cos x-12\sin x$

$$(4a-4b)\cos x+(4a+4b)\sin x=4\cos x-12\sin x$$

គេទាញ $\begin{cases}4a-4b=4\\4a+4b=-12\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1$, $b=-2$ ។

ដូចនេះ $a=-1$, $b=-2$ ។

ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

តាមលទ្ធផលខាងលើគេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

$y=y_h+y_p=(A\cos x+B\sin x)e^{2x}-\cos x-2\sin x$ ដែ $A,B\in IR$ ។

V-(៣០ពិន្ទុ) ១-អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2+16y^2-150x+64y=111$ ។

ក/រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និង កំណុំរបស់អេលីប E

សមីការ E អាចសរសេរដូចតទៅ ៖

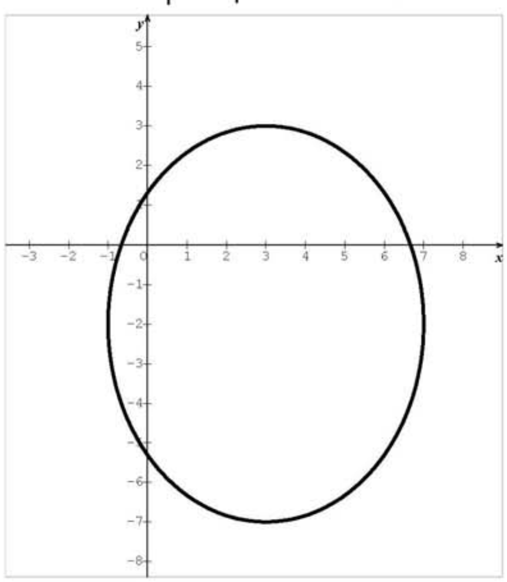
$$25x^2+16y^2-150x+64y=111$$
$$25(x^2-6x+9)+16(y^2+4y+4)-225-64=111$$
$$25(x-3)^2+16(y+2)^2=400$$
$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

មានរាង $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែល $h=3\,,k=-2\,,a=5\,,b=4$ និង $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$

ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិត $(h,k)=(3,-2)$, កំពូល $(h,k-a)=(3,-7)\,;(h,k+a)=(3,3)$

និងកំណុំ $(h,k-c)=(3,-5)\,;(h,k+c)=(3,1)$ ។

ខ/សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ៖



២-ចំណុច $M(-1,0,1)\,;N(0,1,2)$ និង $P(1,2,-1)$ ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ ។ ប្លង់ α មួយមានសមីការ $x-2y+z-4=0$ ។

ក/រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់ β ដែលកាត់តាមចំណុច M,N និង P

គេមាន $\overrightarrow{MN}=(1\,,1\,,1)$; $\overrightarrow{MP}=(2\,,2\,,-2)$

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\2&2&-2\end{vmatrix}=-4\,\vec{i}+4\,\vec{j}+0.\vec{k}$ ។ ដូចនេះ $\vec{n}=(-4,4,0)$ ។

ប្លង់ β ដែលកាត់តាមចំណុច M,N និង P មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(4,4,0)$

តាមរូបមន្ត $\beta: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$-4(x+1)+4(y-0)+0(z-1)=0 \quad \text{ឬ} \quad -x+y-1=0$$

ដូចនេះ $\beta: -x+y-1=0$ ។

ខ/រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាម N ៖

តាមរូបមន្ត $S: (x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=R^2$

$$S: (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=R^2$$

ដោយ $N\in S$ នោះ $(0+1)^2+1^2+(2-1)^2=R^2$ ឬ $R^2=3$

ដូចនេះ $S: (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$ ។

តើប្លង់ α ជួបស្វ៊ែ S ឬទេ ?

យើងគណនាចម្ងាយពីផ្ចិត $M(-1,0,1)$ ទៅប្លង់ $\alpha: x-2y+z-4=0$

$d=\dfrac{|-1-2(0)+1-4|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ដោយកាំរបស់ស្វ៊ែ S គឺ $R=\sqrt{3}$

គេបាន $d=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}<R=\sqrt{3}$ ។

ដោយចម្ងាយពីផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែSទៅប្លង់ α ខ្លីជាងរង្វាស់កាំនោះមានន័យថាប្លង់α ជួបស្វ៊ែ Sបានមុខកាត់ជារង្វង់មួយ ។

VI-(៣៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

១-រក $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\dfrac{2\ln x}{x})=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ។

និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(1-\dfrac{2\ln x}{x})=1$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ។

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីតតូតដេកនៃក្រាបC ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបC ។

២-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$, $x>0$

យើងបាន $f'(x)=-2.\frac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}=-2.\frac{1-\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x^2}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x^2}$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $\ln x-1$ ។

-បើ $f'(x)>0$ គេបាន $\ln x-1>0$ ឬ $x>e$

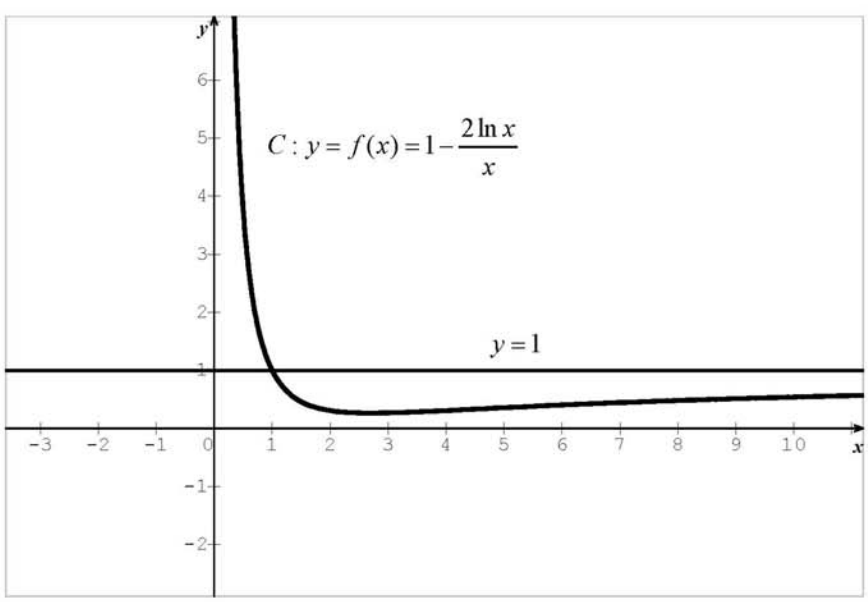
-បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\ln x-1=0$ ឬ $x=e$

-បើ $f'(x)<0$ គេបាន $\ln x-1<0$ ឬ $x<e$

ចំពោះ $x=e$ គេបាន $f(e)=1-\frac{2\ln e}{e}=1-\frac{2}{e}=1-(0.7)=0.3$ ។

x	0		e		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0.3	$\nearrow$	1

៣-សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ៖



៨-គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$

តាង S ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ ដែលត្រូវរក ។

យើងបាន $S=\int_1^e\left[1-(1-\frac{2\ln x}{x})\right].dx$

$$=\int_1^e\frac{2\ln x}{x}.dx=\int_1^e 2\ln x.\frac{dx}{x}$$

តាង $u=\ln x$ នោះ $du=\frac{dx}{x}$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $u=0$ ហើយ $x=e$ នោះ $u=1$

គេបាន $S=\int_0^1 2u.du=\left[u^2\right]_0^1=1^2-0^2=1$

ដូចនេះ $S=1$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)៕

❖❖❖❖❖❖