Catene di Markov / 26-05

Supponiamo che in una città C un giorno c'è il sole o piove

matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P(\text{domani sole} \mid \text{oggi sole}) = \frac{3}{5}$

Frazione dei giorni in cui piove vs quelli col sole
Queste dipendono da cosa succede al primo giorno

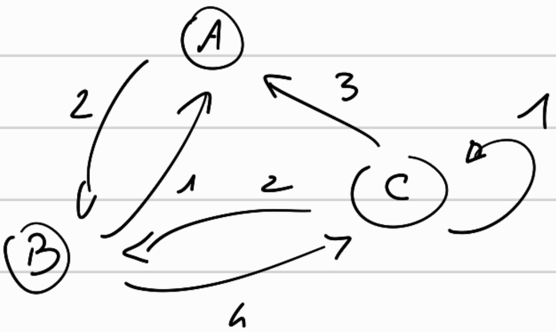
$$\begin{array}{l} 0\$ \to \\ \\ \\ 4\$ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \\ \vdots \\ \\ \\ \end{array}$$

vince 1 \$ se passa allo stato successivo
−1 \$ " " precedente

2 stati assorbenti — sbancato
— rovina

(ha diag = 1, sono in rovina se parto senza soldi)
non ne posso uscire

es



- internet è il grafo
- un nodo è una pagina

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \Sigma = 1 \\ \to \text{deve} \\ \text{ 5 o' somma pesi} \\ \end{array}$$

che descrive le prob. di visitare le varie pagine partendo da una es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ modello a interruttore

Detto $S = \{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$ spazio degli stati

Detta P $n \times n$ una matrice di transizione

$$(P)_{ij} = P(S_{t+1} = s_j \mid S_t = s_i)$$

passo a questo stato dato (ovvero "se sono" nello stato s_i all'istante t)

$$0 \leq P_{ij} \leq 1 \qquad \sum_j P_{ij} = 1$$

Il tempo è invariante: qualsiasi sia l'istante su cui si definisce, si fa sempre riferimento al domani rispetto a oggi

$$\rightarrow (P)_{ij} = P(s_j \mid s_i)$$ tempo di domani sapendo che oggi è x

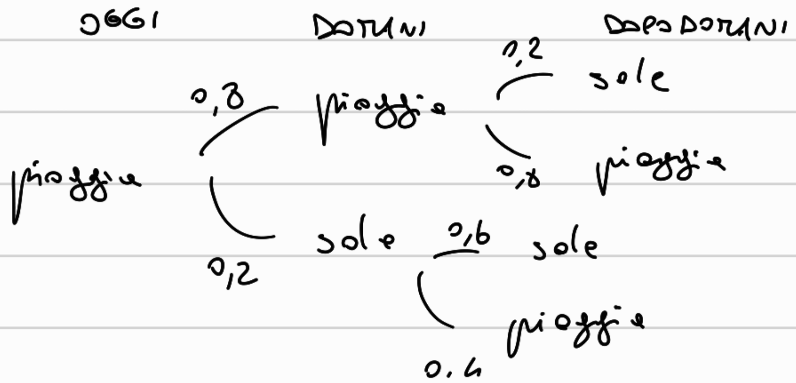
I processi sono senza memoria, sapendo di oggi descriviamo il domani, cosa è successo ieri o prima non influenza e non è di interesse. Con spazi più grandi potrei inglobare anche il modello con memoria (ieri -> oggi, oggi -> domani).

$s_t \rightarrow s_{t+1}$

$P(s_j$ al tempo $t+2 \mid s_i$ al tempo $t)$
descrive la domanda

Cosa succede dopodomani?

$$\begin{array}{c|cc} & s & p \\ \hline s & 0{,}6 & 0{,}4 \\ p & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}$$



$p \to p$ a t_{+2}
$= 0{,}64 + 0{,}08 = 0{,}72$ ho 2 modi per avere pioggia dopodomani

$p \to s$ a t_{+2} $= 1 - p$ sopra $\quad \sum p = 1$ ✓ è più probabile pioggia
$= 0{,}16 + 0{,}12 = 0{,}28$

$$P(s_j \mid s_i \text{ in due passi}) = \sum_k P(\overset{t+2}{s_j} \mid \overset{t+1}{s_k} \cancel{s_i})\, P(\overset{t+1}{s_k} \mid \overset{t}{s_i})$$

$\downarrow$ P dopodomani $\qquad \downarrow$ P domani

e somma su tutte

dipende solo dal t del giorno prima

$$= \sum_k P_{kj} P_{ik}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}56 \\ 0{,}28 & 0{,}72 \end{pmatrix}$$

pioggia sole risultati uguali a quelli sopra

tra 3 giorni? Vi sarà un'altra P_{ij}

Irriducibilità e Regolarità

una mat. di tr. è irriducibile se $\forall i j \; \exists \, t(i,j)$

t.c. $\underbrace{(P^{t(i,j)})}_{\text{potenza}}{}_{ij} > 0$

se oggi piove, è possibile che fra "27" giorni piova? Ovvero è garantito che ho una transizione dallo stato i allo stato j? (x l'es. di prima sì, perché tutti i valori > 0)

" " regolare se riesco a trovare $t(i,j) = t$ ovvero che non dipende da i e j, per cui posso giungere ovunque — soglia min. che vale x tutti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

acceso → acceso $t = 2$ (passi)
acceso → spento $t = 1$
e viceversa

eventi diversi con t diversi

è irriducibile ma non è regolare

la matrice sole-pioggia è regolare e irriducibile (non importa i e j); se regolare → irriducibile

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

moltiplico pari volte = cambia
dispari volte = identità

27-05

$$\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 \\ 6 & 0 & 24 \\ 15 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

è regolare? Più complicato → sse riesco a raggiungere tutti con stesso t

$s_1 \to s_1$ $t=1$ no

$s_2 \to s_2$ $t=1$ no → ho zero

Se moltiplicando $P \cdot P$ ottengo tutti valori > 0 è regolare

$$\frac{1}{900}\begin{pmatrix} 180 & 0 & 720 \\ 360 & 420 & 120 \\ 135 & 500 & 265 \end{pmatrix}$$

Se $P \cdot P \cdot P$ ho tutti positivi quindi significa che posso giungere ovunque, ottengo regolarità

Distribuzioni

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

P oggi

$$\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{sole} \\ \text{pioggia} \end{matrix}$$

$P(\text{sole domani}) = P(\text{sole domani} \mid \text{sole oggi}) \cdot P(\text{sole oggi})$
$+ P(\text{sole domani} \mid \text{pioggia oggi}) \cdot P(\text{pioggia oggi})$

Il prodotto $= \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,58 \end{pmatrix}$ P sole e pioggia il domani

$\Sigma = 1$

E 2 gg dopo? 1 giorno le P "attuali" (rispetto al giorno prima, a priori)

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,58 \end{pmatrix}$$ che corrisponde a una potenza di matrici

Posso sfruttare gli autovettori (i prodotti su autovettori danno multipli di autovettori)

$$\begin{pmatrix} p & (1-p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$$

di cui sole domani

$\rightarrow \quad 0,6\,p + 0,2(1-p) = p \qquad p = \frac{1}{3}$ distribuzione

$\rightarrow \quad 0,4\,p + 0,8(1-p) = (1-p) \qquad 1-p = \frac{2}{3}$ stazionaria

se $\vec{\pi} P = \vec{\pi}$

autovettore con autovalore 1

Se P è regolare $\lim_{t \to \infty} P_{ij}^t = \lambda_j$ Con $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$

fermi sulle righe leggo sempre lo stesso vettore λ

$\bar{X} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ DISTRIBUZIONE LIMITE

Moltiplicando P più volte, per tempi grandi

$$P \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0,33 & 0,66 \\ 0,33 & 0,66 \end{pmatrix}$$

se regolare $\rightarrow$ $\exists$ dis limite $\rightarrow$ $\exists$ dis stazionaria

$\pi_j P_{ji} = \pi_i P_{ij} \quad \forall i j \qquad \pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)^T$

CONDIZIONE DI REVERSIBILITA'

$\boxed{\sum_j \pi_j P_{ij} = \pi_j}$

$\sum_j \pi_j P_{ji} = \pi_i \longrightarrow \vec{\pi}^T P = \vec{\pi}$ è una distribuzione stazionaria

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

es.

$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N) \qquad \sum \pi_i = 1$

matrice H regolare scelta

Vado in s_j con probabilità H_{ij} ①

calcolo $a_{ij} = \min \left\{ 1, \dfrac{\pi_j H_{ji}}{\pi_i H_{ij}} \right\}$ ②

estraggo a caso u in $[0,1]$ ③
unif.

se $u < a_{ij}$ $\quad X_{t+1} = s_j$ accetto la transizione

else $X_{t+1} = s_i$ rimango fermo sullo stato corrente

Se vedo eventi per tempi lunghi, la mia distr. limite tende a π

ricavo infatti $\pi_i P_{ij} = \pi_i \dfrac{\pi_j}{\pi_i} H_{ji} = \pi_j H_{ji} = \pi_j P_{ji}$

Ising

$$E[S] = E[S_1, \dots, S_A] = -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{A}\sum_{t \in I(a)} S_a S_t$$

spin: up 1, down -1

$\downarrow$

2 valori possibili

Fissata la temperatura all'equilibrio il sistema si troverà in uno stato a energia minima

una matrice $32 \times 32 = 1024$

conta $N = 2^{1024}$, spazio dimensionalmente e computazionalmente intrattabile

Cambiando uno spin alla volta posso comunque valutare il rapporto