Logica — 10-1-2019

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Provare che
$$\neg P \to Q \models R \wedge \neg Q \to P \vee \neg R.$$

2. Stabilire se l'insieme di formule
$$\{\neg A \wedge B, \neg(\neg A \to \neg C), C \to A \vee \neg B\}$$
è soddisfacibile.

3. Sia $\mathcal{L} = \{C, S, U\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove C, S sono simboli relazionali unari, U è simbolo relazionale binario. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $C(x)$: x è un computer;
- $S(x)$: x è uno studente;
- $U(x, y)$: x usa y.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. C'è un computer che non è usato da alcuno studente.
2. C'è un computer usato da almeno due studenti.
3. Gli studenti che usano un computer ne usano almeno due.

4. Sia $\mathcal{L} = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f è un simbolo funzionale unario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$, dove:

- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi;
- $f^{\mathcal{A}}$ è l'operazione di opposto, cioè $f^{\mathcal{A}}(u) = -u$ per ogni $u \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di raddoppio, cioè $f^{\mathcal{B}}(u) = 2u$, per ogni $u \in \mathbb{Z}$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Svolgimento

1. Sia i un'interpretazione tale che $i(\neg P \to Q) = 1$, al fine di dimostrare che $i(R \wedge \neg Q \to P \vee \neg R) = 1$.

Poiché $i(\neg P \to Q) = 1$ si hanno due possibilità:

1) $i(\neg P) = 0$.
Allora $i(P) = 1$, quindi $i(P \vee \neg R) = 1$ e finalmente $i(R \wedge \neg Q \to P \vee \neg R) = 1$.

2) $i(Q) = 1$.
Allora $i(\neg Q) = 0$, quindi $i(R \wedge \neg Q) = 0$ da cui anche in questo caso $i(R \wedge \neg Q \to P \vee \neg R) = 1$.

2. Se i è un'interpretazione tale che

$$i \models \{\neg A \wedge B, \neg(\neg A \to \neg C), C \to A \vee \neg B\}$$

in particolare deve aversi che $i(\neg A \wedge B) = 1$, quindi $i(\neg A) = i(B) = 1$ e anche $i(A) = i(\neg B) = 0$. Segue che $i(A \vee \neg B) = 0$.

Poiché $i(C \to A \vee \neg B) = 1$, deve quindi aversi che $i(C) = 0$. Allora $i(\neg C) = 1$, per cui $i(\neg A \to \neg C) = 1$ e finalmente $i(\neg(\neg A \to \neg C)) = 0$, contraddicendo il fatto che i soddisfa l'insieme dato.

Pertanto un'interpretazione che soddisfi l'insieme dato non può esistere, cioè tale insieme è insodddisfacibile.

3.
1. $\exists x(C(x) \wedge \neg\exists y(S(y) \wedge U(y,x)))$
2. $\exists x\exists y\exists z(C(x) \wedge S(y) \wedge S(z) \wedge y \neq z \wedge U(y,x) \wedge U(z,x))$
3. $\forall x(S(x) \wedge \exists y(C(y) \wedge U(x,y)) \to \exists z\exists w(C(z) \wedge C(w) \wedge z \neq w \wedge U(x,z) \wedge U(x,w)))$

4. Sull'insieme $\mathbb{Z}$, la funzione opposto è suriettiva, la funzione di raddoppio no:

$$\varphi : \forall y \exists x f(x) = y$$