## Definizioni generali

**Aritmetica**
Branca della matematica che studia i numeri.

**Algebra**
Branca della matematica che studia il significato delle operazioni fra i numeri e le proprietà che da esse derivano (es. proprietà commutativa).

**Insieme**
L'insieme è una collezione di elementi tale che la definizione per tutti i suoi elementi può essere stabilita in maniera univoca. E' riconoscibile da lettere maiuscole e da parentesi graffe contenti i suoi elementi.

$1 + 2 = 3$ ARITMETICA

$-1 + 4 = 3$ $\quad 2 + 1 = 3$ ALGEBRA

INSIEMI · $A$ INSIEME $\quad x \in A$ $x$ APPARTIENE AD $A$

$x \notin A$ $x$ NON " " $A$

$A \ni x$ $x$ CONTENUTO IN $A$

$\mathbb{E}$ SUPERINSIEME L'INSIEME DI TUTTI GLI ELEMENTI

$\mathbb{I}$ " " " " DI TUTTI GLI INSIEMI

= INSIEME PIÙ GRANDE

## Come definire un insieme

*Lettere corsive* per identificare le proposizioni (affermazioni generali) o proprietà. Per applicare queste proprietà a un certo dato, si pone una parentesi con il dato dentro.

$\mathcal{P}$ PROPOSIZIONE $\quad \mathcal{P} :=$ "È UN NUMERO PARI"

$\mathcal{P}(x) =$ "$x$ è un numero pari" $\quad \mathcal{P}(2)$ VERA $\quad \top$ VERO

$\mathcal{P}(3)$ FALSA $\quad \bot$ FALSO

$\{x \in \mathbb{E} : \mathcal{P}(x)\ \top\} = \{$numeri pari$\}$

OTTENIBILE

PROPRIETÀ SODDISFATTA SI/NO

SINGOLETTO $\{*\}$

INSIEME FORMATO DA UN SOLO ELEMENTO

## Gli insiemi dei numeri

- Naturali (dibattito sull'appartenenza dello zero)
- Interi
- Razionali (esprimibili in frazioni)
- Reali (anche irrazionali)
- Complessi

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ NUMERI NATURALI $\quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ NUMERI INTERI

$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{MCD}(m, n) = 1,\ n \neq 0\right\}$

$\mathbb{R} :=$ NUMERI REALI $\quad \mathbb{C} :=$ NUMERI COMPLESSI

$3 \in \mathbb{N} \quad 3 \in \mathbb{Z} \quad 3 \in \mathbb{C} \quad \frac{2}{5} \in \mathbb{Q} \quad \frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$

## Operazioni fra affermazioni (connettivi) e fra elementi degli insiemi

DEF $\mathcal{P}$ E $Q$ DUE AFFERMAZIONI

| | | |
|---|---|---|
| CONGIUNZIONE | $\mathcal{P} \wedge Q$ | "SIA $\mathcal{P}$ CHE $Q$" |
| DISGIUNZIONE | $\mathcal{P} \vee Q$ | "$\mathcal{P}$ O $Q$" "$\mathcal{P}$ OPPURE $Q$" |
| NEGAZIONE | $\neg \mathcal{P}$ | "NON $\mathcal{P}$" |
| IMPLICAZIONE | $\mathcal{P} \Rightarrow Q$ | "$\mathcal{P}$ IMPLICA $Q$" |
| EQUIVALENZA | $\mathcal{P} \Leftrightarrow Q$ | "$\mathcal{P}$ SE E SOLO SE $Q$" |

NON ESCLUSIVO, NE BASTA ALMENO UNA VERA (POSSONO ESSERLO ENTRAMBE)

esempio
$\neg \mathcal{P}(3)$ VERA

Es $\quad \mathcal{P} =$ "ESSERE UN TRIANGOLO" $\quad Q =$ "ESSERE UN POLIGONO REGOLARE"

$\mathcal{P} \vee Q$ (QUADRATO) $\quad \top$

$\mathcal{P} \wedge Q$ ( " " ) $\quad \bot$

$\mathcal{P} \wedge Q$ (TRIANG. EQUILATERO) $\quad \top$

## Quantificatori

DEF QUANTIFICATORI   $A$ INSIEME   $\mathcal{P}$ AFFERMAZIONE

$\forall$ "PER OGNI"   $\forall x \in A \ \mathcal{P}(x)$

$\exists$ "ESISTE"   $\exists x \in A \ \mathcal{P}(x)$

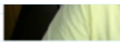
$\exists!$ "ESISTE UNICO"   $\exists! x \in A \ \mathcal{P}(x)$

ES   $\mathcal{P}$ = ESSERE PARI

$A = \mathbb{N}$   $\cancel{\forall x \in \mathbb{N}}\ \mathcal{P}(x)$ FALSO   $\exists x \in \mathbb{N}.\ \mathcal{P}(x)$

$A = \{2,4,6\}$   $\forall x \in A.\ \mathcal{P}(x)$

## Relazioni fra insiemi (appartenenza)



DEF $A, B$ INSIEMI. $A$ CONTENUTO IN $B$, $A$ È SOTTOINSIEME DI $B$ SE

$\forall x \in A.\ x \in B$   $A \subset B$   $A \subseteq B$   $B$ CONTIENE $A$

ES   $A \subseteq A$ PERCHÉ $\forall x \in A.\ x \in A$   T

$A \subsetneq B$ CONTENUTO STRETTAMENTE   $(\forall x \in A.\ x \in B) \wedge (\exists x \in B.\ x \notin A)$

ES   $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$   INSIEMI DEI NUMERI

DEF INSIEME VUOTO $\emptyset$   $\emptyset := \{x \in \mathbb{E} : x \neq x\}$

$\emptyset \subseteq A \quad \forall A \in \mathbb{I}$

## Principio di estensionalità

Per verificare se due insiemi sono uguali osservo che uno contiene l'altro e viceversa (quindi hanno tutti gli elementi comuni, uguali).

PRINCIPIO DI ESTENSIONALITÀ:   $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \implies A = B$

## Insieme delle parti

DEF (INSIEME DELLE PARTI)   $A$ INSIEME,   $\mathcal{P}(A) := \{B \in \mathbb{I} : B \subseteq A\}$

ES   $A = \{1,2,3\}$,   $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, A\}$

$\emptyset, A \in \mathcal{P}(A) \quad \forall A \in \mathbb{I}$

## Relazioni fra insiemi (intersezione, unione e differenza)

DEF   $A$ $B$ INSIEMI

TALE CHE |

INTERSEZIONE   $A \cap B := \{x \in \mathbb{E} : (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x \in A : x \in B\} = \{x \in B : x \in A\}$

$A$ E $B$ DISGIUNTI SE $A \cap B = \emptyset$

PROP
$A \cap B \subseteq A$
$A \cap B \subseteq B$

UNIONE $A \cup B = \{ x \in \mathbb{E} : (x \in A) \vee (x \in B) \}$

$A \subseteq A \cup B$
$B \subseteq A \cup B$

DIFFERENZA $B \setminus A := \{ x \in B : x \notin A \} = \{ x \in \mathbb{E} : (x \in B) \wedge (x \notin A) \}$

↳ COMPLEMENTARE DI A IN B $C_B(A)$

## Proprietà degli insiemi

- Commutativa
- Associativa
- Distributiva
- Leggi di De Morgan

PROP A, B, C INSIEMI. ALLORA

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$ } COMMUTATIVA

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ } ASSOCIATIVA

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ } DISTRIBUTIVA

## Dimostrazione proprietà n.1-2

1) Se $x \in A \cup B$

$(x \in A) \vee (x \in B)$ che e' uguale a

$(x \in B) \vee (x \in A)$ ovvero $\underline{B \cup A}$

2) Se $x \in A \cap B$ allora *

Versione estesa

$= \{ x \in \mathbb{E} : (x \in A) \wedge (x \in B) \}$

e per le proprieta' del connettivo logico $\wedge$

$= \{ x \in \mathbb{E} : (x \in B) \wedge (x \in A) \}$ — allora

* → $(x \in A) \wedge (x \in B)$ che e' uguale a

$(x \in B) \wedge (x \in A)$ ovvero $x \in \underline{B \cap A}$

## Dimostrazione proprietà n.3-4

3) Se $x \in (A \cap B) \cap C$ allora

$(x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)$ che e' uguale a

$x \in A \cap (B \cap C)$

4) Se $x \in (A \cup B) \cup C$ allora

$(x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)$ che e' uguale a

$x \in A \cup (B \cup C)$

$A$ E $B$ SOTTOINSIEMI DI $X$

7) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

8) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

} DE MORGAN

## Dimostrazione proprietà n.5

Nota bene: poiché sinistra è uguale a destra e viceversa, bisogna verificare sia in un senso che nell'altro (doppia inclusione)!

DIM 1) - 4) ESERCIZIO

5) "$\subseteq$" $x \in A \cap (B \cup C)$

$(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$

$(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

"$\supseteq$" $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$

$(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$

$x \in A \cap (B \cup C)$

## Dimostrazione proprietà n.6

6) "$\subseteq$" $x \in A \cup (B \cap C)$

$(x \in A) \vee (x \in B \cap C)$

. SE $x \in A \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

. SE $x \in B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ " $\qquad$ "

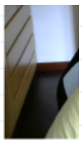
"$\supseteq$" $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$

. SE $x \in A \subseteq A \cup (B \cap C)$ ✓

. SE $x \in B \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$ ✓

. SE $x \in B$ MA $x \notin C$ (O $x \in C$ MA $x \notin B$) ALLORA $x \in A$ E QUINDI $x \in A \cup (B \cap C)$



## Dimostrazione proprietà n.7

7) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ $\qquad A, B \subseteq X$

"$\subseteq$" $x \in X \setminus (A \cap B)$

$x \notin A \cap B$

$(x \notin A) \vee (x \notin B)$

$(x \in X \setminus A) \vee (x \in X \setminus B)$

$x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

"$\supseteq$" $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

$(x \notin A) \vee (x \notin B)$

$x \notin A \cap B$

$x \in X \setminus (A \cap B)$

## Dimostrazione proprietà n.8

8) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

"$\subseteq$" $x \in X \setminus (A \cup B)$

$x \notin A \cup B$

$(x \notin A) \wedge (x \notin B)$

$(x \in X \setminus A) \wedge (x \in X \setminus B)$

$x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

"$\supseteq$" $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

$(x \notin A) \wedge (x \notin B)$

$x \notin A \cup B$

$x \in X \setminus (A \cup B)$ $\qquad \square$

EQUIVALENTE A DIRE "DIMOSTRATO"

## Ordini negli insiemi

$\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{1,3,2\}$ → NON IMPORTA COME VENGONO DISPOSTI!

DEF COPPIA ORDINATA $(a,b) := \{\{a,b\},\{a\}\}$ WIENER KURATOWSKI

SE $a \neq b$ ALLORA $(a,b) \neq (b,a) = \{\{a,b\},\{b\}\}$

## Prodotto cartesiano fra insiemi

DEF PRODOTTO CARTESIANO DI $A, B$ INSIEMI

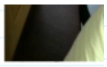
$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

PROP $A \times B = \emptyset \iff (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$

1) $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_1 \times B_2) \cap (A_2 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$

2) $\cup \quad \cup \quad \cup \quad \cup \quad \cup$

DEF $A, B, C$ INSIEMI



$$A \times B \times C := \{(a, b, c) : (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (c \in C)\}$$

$A_1, \dots, A_n$ INSIEMI $\quad A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i \ \forall i = 1, \dots, n\} = \prod_{i=1}^{n} A_i$

$A^2 := A \times A \qquad A^1 := A$

$A^3 := A \times A \times A \qquad (A^0 := \emptyset) \quad \{*\}$

$\vdots$

$A^n := \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ VOLTE}}$

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n\}$ SPAZIO EUCLIDEO

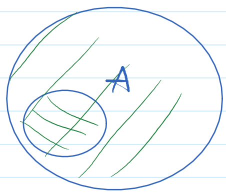
**Esercizi** (da dimostrare)

PROP $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A) \quad , \quad \emptyset = (B \setminus A) \cap (B \cap A)$

1. $A \cap B = A \iff A \subseteq B$
2. $A \cup B = A \iff B \subseteq A$
3. $(B \setminus A) = \emptyset \iff B \subseteq A$
4. $(B \setminus A) = B \iff A \cap B = \emptyset$

ESERCIZIO

1) $B$



L'insieme $A \cap B$ è tutto $A$ se $B \supseteq A$, in quanto ogni elemento $\in A$ è anche $\in B$. E viceversa

Versione estesa:

$A \cap B = A \iff A \subseteq B$ esamino entrambi i sensi:

- "$\Rightarrow$" $\{x \in \mathbb{E} : \underbrace{(x \in A) \wedge (x \in B)}_{A \cap B}\} = \{x \in \mathbb{E} : x \in A\}$

"$\subseteq$" sempre vera
"$\supseteq$"

$A \cap B$ $\subseteq$ $\supseteq$: sempre vera

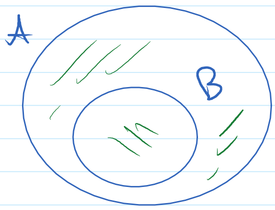
visualizzabile come $x \in A \rightarrow \underbrace{(\cancel{x \in A})}_{\text{TAUTOLOGIA}} \wedge (x \in B)$ $x \in A \rightarrow x \in B$

quindi $A \subseteq B$

- "$\Leftarrow$" $A \subseteq B$

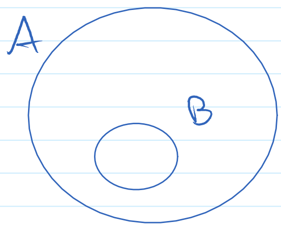
$x \in A \rightarrow x \in B$

$A \cap B = \{x \in E : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ $A = \{x \in E : x \in A\}$

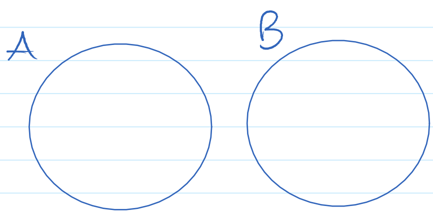
2) 

Se $x \in (A \cup B)$ allora $(x \in A) \vee (x \in B)$, poiché $B \subseteq A$, x è anche dentro A.

E viceversa

3) 

Poiché $B \subseteq A$, se tolgo a B l'insieme A e i suoi elementi, tolgo anche tutti gli elementi di B, rimanendo vuoto $\emptyset$. E viceversa

4) 

Se B senza $x \in A$ è se stesso, allora non interseca A, quindi $A \cap B = \emptyset$

E viceversa