Relazione di equivalenza

martedì 1 dicembre 2020 12:00

DEF $R \subseteq A \times A$, A insieme, R è detta RELAZIONE DI EQUIVALENZA se soddisfa 3 proprietà:

- RIFLESSIVA $\forall a \in A \quad (a,a) \in R$
- SIMMETRICA $(a,b) \in R \longrightarrow (b,a) \in R$ per tutte le coppie
- TRANSITIVA $((a,b) \in R) \wedge ((b,c) \in R) \longrightarrow (a,c) \in R$

Es

- $R = A \times A$ è RELAZIONE DI EQUIVALENZA (tutti gli elementi $\in$ relazione)
- $R = \underset{\text{DIAGONALE}}{\Delta_A} := \{(a,a) \mid a \in A\}$ è relazione di equiv. dove $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$

Dim Δ_A

- RIFLESSIVA: $(a,a) \in \Delta \quad \forall a \in A$ per definizione di Δ
- SIMMETRICA: $(a,b) \in \Delta \overset{?}{\longrightarrow} (b,a) \in \Delta$

  $\searrow a = b$ perché Δ $\quad$ " $(a,a) \in \Delta$
- TRANSITIVA: $(a,b) \in \Delta$, $(b,c) \in \Delta \overset{?}{\longrightarrow} (a,c) \in \Delta$

  $a = b \quad b = c \longrightarrow (a,c) = (a,a) \in \Delta$

dunque Δ è relazione di equivalenza $\square$

NOTAZIONE: $(a,b) \in R \longleftrightarrow a \underset{R}{\sim} b$

$\sim$ → TILDE

R → se si vuole specificare la relazione

Es Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, poniamo una relazione di equiv. su $\mathbb{Z}$

$\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad x \sim y \longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,.\, x - y = k \cdot n$ (solo k varia)

- R. $x \in \mathbb{Z} \quad x \sim x \longleftrightarrow x - x = 0 \cdot n$ (esiste per $k = 0$)
- S. $x,y \in \mathbb{Z} \quad x \sim y \overset{?}{\longleftrightarrow} \overbrace{y \sim x}$

  $x \sim y \longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,.\, x - y = kn$ $\qquad$ TESI: $\exists h \in \mathbb{Z}$ t.c. $y - x = kn$ (da dimostrare: $= x - y$)

  Scelto $h = -k$: $y - x = -(x-y) = -kn = h \cdot n = x - y$

- T. $x,y,z \in \mathbb{Z} \quad x \sim y,\ y \sim z \overset{?}{\longrightarrow} x \sim z$

  $x \sim y \longleftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad x - y = k_1 \cdot n$

  $y \sim z \longleftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad y - z = k_2 \cdot n$ $\qquad$ TESI: $\exists k_3 \in \mathbb{Z} \quad x - z = k_3 \cdot n$

  $x - z = x - y + y - z = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n = (k_1 + k_2)\, n = k_3 \cdot n$

$$x - z = \underbrace{x - y + y}_{\text{aggiungo e tolgo uno stesso valore}} - z = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n = (\underbrace{k_1 + k_2}_{\text{interi}})\, n = k_3\, n$$

scelto $k_3 = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$

($\exists k_3$ (scelto) che soddisfa la relazione)

Tale relazione $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} .\ x - y = kn$

è spesso denotata $x \equiv y \mod n$ ovvero "x congruo a y modulo n"

(y è resto della divisione di un numero per n)

Def Sia $R \subseteq A \times A$ relaz. d'eq.

Data $a \in A$, la CLASSE DI EQUIVALENZA di a è:

$$\bar{a} := [a] := \{ b \in A \mid a \sim b \}$$
$(b \sim a)$

Es. Si definiscono CLASSI DI CONGRUENZA (sono particolari classi d'eq.) MOD 3:

$(a=2)$ $[2] = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv \overbrace{2 \mod 3}^{\text{insieme dei numeri che divisi per 3 danno resto 2}} \} = \{2, 5, 8, 11, -1, -4, \dots\} = \{ 3k+2 \mid k \in \mathbb{Z} \}$ nella forma

$(a=0)$ $[0] = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \mod 3 \} = \{3, 6, 9, 12, 0, -3, -6, \dots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

↳ sono proprio i numeri divisibili per 3 (multipli)

$(a=1)$ $[1] = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \mod 3 \} = \{1, 4, 7, 10, -2, -5 \dots\} = \{ 3k+1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$

N.B. Abbiamo solo 3 CLASSI DISTINTE

infatti: $(a=4)$ $[4] = [1] \leftarrow 4 \in [1]$ poiché transitiva, è inclusa in 1

allora $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$ UNIONE DISGIUNTA (a due a due gli elementi hanno $\cap$ vuoto)

posso scrivere tutti gli elementi di $\mathbb{Z}$ con le 3 classi

$\bar{0} \cap \bar{1} = \emptyset$ $\quad \bar{0} \cap \bar{2} = \emptyset$ $\quad \bar{1} \cap \bar{2} = \emptyset$

N.B. Poiché la relazione d'equivalenza è per definizione RIFLESSIVA, anche il rappresentante della classe $\in$ alla classe stessa.
Vale per qualsiasi relazione.

es. $2 \in [2]$ $\quad [2] = \{\dots, 2, \dots\}$ ↳ rappresentante

In generale le classi di equivalenza sono una partizione dell'insieme $A = \bigcup [a]$

$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [n-1]$ → sono classi di CONGRUENZA MOD n, ovvero legate ai numeri interi

Def Data $R \subseteq A \times A$

Si definisce l'insieme $A/_{\sim} := A/_{R} := \{[a] \mid a \in A\}$ insieme delle classi di equivalenza detto INSIEME QUOZIENTE

Es

1) $R \subseteq A \times A$ RELAZIONE TOTALE $x \sim y$ $\forall x, y \in A$ $A \neq \emptyset$

$A/_{\sim} = \{[a] \mid a \in A\} = \{[a]\} = \{*\}$ abbiamo una sola classe

infatti $\forall b \in A$ abbiamo $a \sim b$ $b \in [a]$

2) $A = \mathbb{Z}$, $R =$ rel. congruenza mod n

$A/_{\sim} = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$ contiene tutti i resti $< n$ (se $= n$ avrei multipli)

si denota $\mathbb{Z}/_{\underset{\text{mod}}{n}}$ oppure $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ oppure $\mathbb{Z}_n$

3) $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$

numeri pari numeri dispari

Def $R \subseteq A \times A$ rel. eq. $\pi : A \longrightarrow A/_{\sim}$ è detta MAPPA QUOZIENTE

$a \longmapsto [a]$ (sempre suriettiva)

Es $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\} \longleftarrow \mathbb{Z} : \pi$

$[x] \longleftarrow\!\shortmid\ x$

$\pi(4) = [1] = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\pi(6) = [0] = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Es $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definiamo la rel. di equivalenza $(x,y) \sim (z,t) \Longleftrightarrow xt = yz$

1• Dimostra che è rel. d'equiv.

2• Cos'è l'insieme quoziente?

1] - RIFLESSIVA $\forall a \in A$ $(a,a) \in R$

$\longrightarrow x, y \in \mathbb{R}$ $x \sim y$, $x \sim y \Longleftrightarrow xy = yx$ ✓

$(x,y) \sim (z,t) \Longleftrightarrow xt = yz$

- SIMMETRICA $(x,y) \sim (z,t) \longrightarrow (z,t) \sim (x,y)$

$[xt = yz] \overset{?}{=} [zy = tx]$ sì ✓ per la proprietà commutativa del $\cdot$

- TRANSITIVA $X, Y, Z \in \mathbb{Z}$ $X \sim Y, Y \sim Z \longrightarrow X \sim Z$

Hp $\left[\begin{array}{lllll} \bullet\ \underset{X}{(x,y)} \sim \underset{Y}{(z,t)} & \longrightarrow & X \sim Y : & xt = y\cdot z & (1) \\ \bullet\ \underset{Y}{(z,t)} \sim \underset{Z}{(u,v)} & \longrightarrow & Y \sim Z : & zv = tu & (2) \end{array}\right.$

TESI $\underset{X}{(x,y)} \sim \underset{Z}{(u,v)} \longrightarrow X \sim Z : \quad x\cdot v = y \cdot u \quad (3)$

se $x \neq 0$] 1] $xt = yz \longrightarrow z/t = x/t \longrightarrow u/v = x/y \to y\cdot u = x \cdot v \to \underline{x\cdot v = y \cdot u}$ 3] ✓

2] $z/t = u/v$

Quindi vale $\forall\, x, y, v \neq 0$ (altrimenti ho errore nel divisore al denominatore)

con relazione $Z = (y, x)$

se $x = 0$] $\underset{0}{x}\underset{\neq 0}{t} = \underset{\neq 0}{y}z$ ma allora $z = 0$ (uguale prodotto)

per definizione di A

$\underset{0}{z}\underset{\neq 0}{v} = \underset{\neq 0}{t}u \longrightarrow u = 0$

dunque $\underset{0}{x}v = y\underset{0}{u}$ e tesi verificata

2] $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ e' una RELAZIONE DI EQUIVALENZA

$A/\sim$? scelta $\theta : A/\sim \longrightarrow \mathbb{Q}$ BIGETTIVA

$[(x,y)] \longmapsto x/y$

$x/y,\ z/t \in \mathbb{Q}$ $\quad x, y, z, t \in \mathbb{Z}, \quad x, t \neq 0$ quindi $(x,y) \sim (z,t) \in A$

$x/y,\ z/t$ in $\mathbb{Q} \longleftrightarrow xt = zy \longleftrightarrow (x,y) \sim (z,t) \longleftrightarrow [(x,y)] = [(z,t)]$

in $A/\sim$

Ho quindi rappresentato l'insieme $\mathbb{Q}$

! N.B. Ogni affermazione relativa a un insieme quoziente $A/\sim$ enunciata tramite dei rappresentanti di una classe di equivalenza deve essere INDIPENDENTE dalla scelta dei rappresentanti

Es $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots [n-1]\} = \mathbb{Z}/\sim \qquad x \sim y \Longleftrightarrow x \equiv y \mod n$

$\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \longrightarrow$ ovvero danno stesso resto divisi per $n = 6$

$\underset{\text{classe}}{\bar{x}} \longmapsto \underset{\text{classe}}{\overline{x+1}}$

$\varphi(\bar{2}) = 2 + 1 = 3$

$\varphi(\bar{8}) = 8 + 1 = 9$ $\quad \#$

$\bar{0} = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{2} = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$=$

$\bar{8} = \{6k + 8 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ✓

$= 6(k+1) + 2$

ho due elementi uguali nel DOMINIO

$= \{6k+8 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$= 6(k+1) + 2$

φ non e' una funzione $=$ $\begin{cases} \text{ho due elementi uguali nel DOMINIO} \\ \text{ma DIVERSI nel CODOMINIO} \\ (\text{stessa } x \text{ a } \underline{\text{due}}\ y) \end{cases}$

Es $\psi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$ funzione BEN DEFINITA

$[x]_6 \mapsto [x]_3$

Dobbiamo verificare che presi $x, y \in \mathbb{Z}$ t.c. $[x]_6 = [y]_6$ in $\mathbb{Z}_6$

allora $\psi([x]_6) = \psi([y]_6)$

$[x]_6 = [y]_6 \iff x \equiv y \bmod 6 \longrightarrow x = 6k + \underset{\text{RESTO}}{r} \quad 0 \le r < 6,\ k \in \mathbb{Z}$

$y = 6k' + r \quad$ " $\quad , k' \in \mathbb{Z}$

allora $[x]_6 = [r] = [y]_6$

$\psi([x]_6) = \psi([r]_6) = [r]_3 \to r \bmod 3$

$\psi([y]_6) = \psi([r]_6) = [r]_3$

possibili resti della divisione per 6

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$6k'+3$ $\quad 6k+4$

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$3n+2$

ogni elemento e' associato (ho una funzione)

Ovvero: se $n \% 6$ ha $r=0$ e che 6 e' multiplo di 3, anche $n \% 3$ ha $r = 0$.

es. $12 \% 6 \quad r=0$, $12 \% 3 \quad r=0$

ENUNCIATI

a) **PRINCIPIO DI INDUZIONE** $A \subseteq \mathbb{N}$ t.c.
- $0 \in A$ (elemento più piccolo in A) — PASSO BASE
- $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ (lo il suo successivo) — PASSO INDUTTIVO

Allora $A = \mathbb{N}$

b) **PRINCIPIO DELLA DISCESA INFINITA** $A \subseteq \mathbb{N}$ t.c.
- 0 (elem. più piccolo in A) $\notin A$
- $n \in A \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $k < n$ — dato n ne esiste uno più piccolo

Allora $A = \emptyset$

c) **PRINCIPIO DEL MINIMO** $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ Allora $\exists k_0 \in A$ t.c. $\forall x \in A$, $x \geq k_0$ (k_0 è il minimo di A)

[a) <=> b) <=> c) i tre enunciati sono equivalenti]

Applicazioni

ES $0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

se voglio sommare i numeri fino a n

Dimostra con l'induzione

PROPRIETA'

$P(n) = 0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Big| \quad A = \{ n \in \mathbb{N} \quad P(n) \text{ vera} \}$

N.B. Non è un insieme, si applica su elementi

OBIETTIVO $A = \mathbb{N}$

1) PASSO BASE $0 \in A$?

$P(0) = \underset{\text{SOMMA NUMERI}}{0} = \frac{0(0+1)}{2} = 0 \quad P(0)$ vera

2) PASSO INDUTTIVO $P(n)$ vera $\Rightarrow P(n+1)$ vera

assumiamo che $n \in A$, cioè $P(n)$ vera   TESI: $P(n+1)$ vera

$P(n) = \overset{\text{veri } n}{0+1+2+\dots+n} = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(n+1) = 0+1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Aggiungo $n+1$ a entrambi i membri (l'uguaglianza rimane uguale)

$$0+1+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P(n+1)$$

VERA $\square$

==Osservazione== Si può usare induzione con un passo base $n_0 > 0$ al posto di 0, in tal caso si ottiene che $A = \mathbb{N}_{\geq n_0}$

Data una proposizione P che dipende da n : $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad P(n) = n \cdot (n+1)$

① Se P è vera per $n=0$ (numero più piccolo), si dice BASE DI INDUZIONE

se verificata
↓
② se P è vera per n generico $\Rightarrow$ allora anche per $n+1$

allora P è vera $\forall n \in \mathbb{N}$ (sempre)

Es La somma dei primi n dispari è n^2

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) \overset{?}{=} n^2$$

① n più basso è $n=1$ ($n=0$ non è dispari)

$$\left.\begin{aligned} P(1) &= 1 \\ P(n) &= n^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow P(n=1) = 1^2 = 1 \quad \checkmark$$

BASE DI INDUZIONE VERIFICATA

② $P(n+1) = (n+1)^2 = \underline{n^2 + 2n + 1}$ ↗ sostituisco a $n \rightarrow n+1$

$$\text{e } P(n+1) = \underbrace{1+3+5 \dots + (2n-1)}_{P(n)} + (2n+1)$$

↗ aggiungo "$n+1$", ovvero il numero dispari successivo (che è $2n+1$)

$$= n^2 + (2n+1) = \underline{n^2 + 2n + 1}$$

↓
aggiungere a sx e dx $(2n+1)$ non cambia il valore dell'uguaglianza

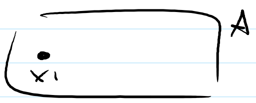
uguali, dunque $P(n+1)$ è uguale a $P(n)$ + "$n+1$"

ovvero ho dimostrato che se vale $P(n)$, vale anche $P(n+1)$

Es • insieme finito → n elementi ha 2^n sottoinsiemi

$$N_{SOTT}(A_n) = 2^n \qquad \text{se } n=0 \text{ ho } \emptyset$$

se $n=1$ graficamente

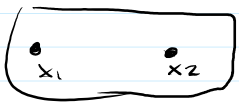


ho $\{x_1\}, \{\emptyset\}$ = 2 sott.

$N_S(A_1) = 2^1 = 2$ sottoinsiemi ✓
↓
A con 1

elemento

se $n=2$ graficamente ho $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}, \{\emptyset\}$ $= 4$ sott.



A

possibili insiemi

$N_S(A_2) = 2^2 = 4$ ✓

Sembra essere vero, dunque lo dimostro

$N_S(A_n) = 2^n$

Se gli elementi diventa $n+1$ il numero dei sott. raddoppia:

$N_S(A_{n+1}) = N_S(A_n) \cdot 2 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

// coincidono, allora è dimostrato □

• $P(n+1) \to N_S(A_{n+1}) = 2^{(n+1)}$ sostituendo a $n \to n+1$