Esame scritto ALAN 22-01-2021, prima parte. Prof. Rossi

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\mathrm{rk}(A)$.

b) determinare le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

2) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, si considerino le matrici reali $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A_λ è invertibile.

b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $A_\lambda X = B$ ammette infinite soluzioni? In caso affermativo determinarli.

c) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema omogeneo $A_\lambda X = 0$ ammette soluzioni non nulle?

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) Se A una matrice nilpotente (ossia esiste un intero positivo n tale che $A^n = 0$), allora $\det A = 0$.

b) Se A una matrice simmetrica, allora A^2 è simmetrica.

c) Sia $A \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ di rango 2, allora il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni comunque si scelga la matrice B dei termini noti.

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$, sia $V = \langle v_1, v_2 \rangle$.

a) Stabilire se v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2 e, in caso affermativo, determinare i coefficienti della combinazione lineare.

b) Dire se $V = \langle v_1, v_3 \rangle$ e se $V = \langle v_1, v_4 \rangle$.

c) Completare una base di V a base di $\mathbb{R}^3$.