Es

- 4.21.1 (note)

Monete A, B, C

$P_A(T) = \frac{1}{2}$ $P_B(T) = \frac{3}{5}$ $P_C(T) = \frac{9}{10}$

Cassetto $\{2A, B, C\}$ $H = \{A, B, C\}$

$P(H) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$ probabilità a priori delle singole var. aleatorie

$$P(H|T_1) = \frac{P(T_1|H)P(H)}{P(T_1)} = \frac{P(T_1|H)P(H)}{\sum_i P(T_1|H_i)P(H_i)}$$

$i = 1\ 2\ 3$

$H_i = A\ B\ C$

massima a posteriori

massima verosomiglianza

Se non avessi n° monete nel cassetto, penso $P(H)$ come uniforme e solo dopo il lancio posso aggiornare la probabilità

Supposto venga fatto un secondo lancio, come si aggiornano le probabilità

$$P(H|T_2T_1) = \frac{P(T_2T_1|H)\,P(H)}{P(T_2T_1)}$$

T_2 e T_1 sono indipendenti (due lanci separati) posso dividere la probabilità

$$= \frac{P(T_2|H)\,P(T_1|H)\cdot P(H)}{P(T_2)\,P(T_1)}$$

che corrisponde a:

$$\frac{P(T_2|H)}{P(T_2)} P(H|T_1)$$

ovvero $P(H|T_2 T_1)$, secondo il princ. bayesiano, la nuova priori è aggiornata con la posteriori precedente

H	post 1	post 2	prob 2
A	0,25	0,125	0,233
B	0,15	0,03	0,216
C	0,2025	0,2025	0,485

$P(T_2|H) \cdot P(H|T_1)$

normalizzato applicando il denominatore $P(T_2)$

• 10.1

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{4}{\theta^2} & 0 \leq x \leq \theta/2 \\ \frac{4}{\theta^2}(\theta - x) & \theta/2 < x \leq \theta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\theta > 0$

→ data var continua. f è pmf? → $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)\, dx$

$$= \frac{4}{\theta^2}\int_0^{\theta/2} x\, dx + \frac{4}{\theta^2}\underbrace{\int_{\theta/2}^{\theta} (\theta - x)\, dx}_{\text{spezzo}}$$

$$= \frac{4}{\theta^2} \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\theta/2} + \frac{4}{\theta} x \Big|_{\theta/2}^{\theta} - \frac{4}{\theta^2}\frac{x^2}{2}\Big|_{\theta/2}^{\theta}$$

$$= \cancel{\frac{4}{\theta^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{\theta^2}}{\cancel{4}} + \frac{4}{\cancel{\theta}} \cdot \frac{\cancel{\theta}}{2} - \frac{4}{2\theta^2}\left(\theta^2 - \frac{\theta^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \cancel{2} - \cancel{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Preso lo stimatore (campione) di θ casuale su $D \overset{iid}{=} \{x_1, \dots, x_n\}$

$T_\theta = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ è corretto? significa che $E(T) \to \theta$

deve stimare bene θ

$E(X) = \theta/2$

$E[aX+b]$ dove $a = n$ moltiplico la var casuale X

$E(T) = E[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{2}{n} E[\sum_i^n X_i]$ lineare (ho una somma) si decompone

$\to \frac{2}{n} \sum_i^n E[X] = \frac{2}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot E[X]$

$= 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$ ✓

- 10.2

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{18\theta^4} e^{-\frac{\sqrt{x}}{3\theta^2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(assumiamo che sommi a 1)

Voglio stimare θ usando il p. di max verosimiglianza

↓

$D \overset{iid}{=} \{x_1, \dots, x_n\}$ funzione detta $L(\theta; X)$

$$L(\theta; X) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{1}{(18\theta^4)^n} e^{-\frac{\sum_i \sqrt{x_i}}{3\theta^2}}$$

↑ n normalizzazioni

↓ somma degli esponenti facendo e · e

per semplificare si applica il log

$$\to \log L = -n \log 18 - 4n \log \theta - \frac{1}{3\theta^2} \sum_i \sqrt{x_i}$$

derivata →

$$\frac{d}{d\theta} \log L(\theta, X) = 0$$

↳ osservo dove ha max (d=0)

$$\to -\frac{4n}{\cancel{\theta}} + \frac{2}{3\theta^{\cancel{3}2}} \sum_i \sqrt{x_i} = 0$$

eq. a 2 soluzioni

moltiplica tutto per θ (o faccio mcm)

$$\theta^2 = \frac{1}{6n} \sum_i \sqrt{x_i}$$

$$\theta^* = +\sqrt{\frac{1}{6n} \sum_i \sqrt{x_i}}$$

perché $\theta > 0$

- $Y = \sqrt{X}$ $\quad f_\theta(y)$? relativo al precedente

$$F_Y(y) = P(Y = y) = P(\sqrt{X} \le y) = P(X \le y^2)$$
$$= F_X(y^2)$$

$$\frac{d}{dy} F_X(y^2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{der dell'arg.}}}{2y} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{der di } F_X}}{f_X(y^2)} \longrightarrow f_Y(y)$$

corrisponde alla f_θ originale

$$\rightarrow f_Y(y) = \frac{y}{8\theta^4} e^{-y/3\theta^2}$$

- Se # di crash di un pc segue una distribuzione di Poisson con pari λ

$$\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\} \sim P_\lambda^n \quad \text{estratta da P lambda}$$

Costo riparazione: $Y_n = 3\overline{X}_n + \overline{X}_n^2$

con $\overline{X}_n$ media campionaria

$$E[Y_\infty] = \lim_{x \to \infty} E[Y_n] \quad ?$$

$$E[Y_n] = E[3\bar{X}_n + \bar{X}_n] = 3E[\bar{X}_n] + E[\bar{X}_n^2]$$

$$E[\bar{X}_n] = E[\mu_n] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu \quad (\lambda)$$

$$E[\bar{X}_n^2] = \underbrace{Var(\bar{X})}_{= \lambda/n} + \left(E[\bar{X}_n]\right)^2$$

espettazione della media empirica è la media (pesata)

↳ $\frac{1}{n} \sum x_i$

$$\rightarrow E[Y_n] = 3\lambda + \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \text{costo riparazione} = \lim_{n \to +\infty} 3\lambda + \underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\to 0} + \lambda^2$$

$$= 3\lambda + \lambda^2$$