Esercizio 1

sabato 28 novembre 2020 10:16

Esercizio 1. Sia $A = \{2,4,8,10,14,16\}$ e si consideri la seguente associazione

$$a * b = \text{resto della divisione di } ab \text{ per } 18.$$

Stabilire se $*$ è un'operazione binaria sull'insieme A.

$*$ corrisponde all'operatore "k mod h", ovvero la restituzione del resto della div. di k per h

Preso $k = a \cdot b$ e $h = 18$ si può facilmente vedere che $* = \text{mod}$ e' un' operazione binaria.

$$A \times A \longrightarrow A \qquad \text{e' operazione binaria su } A$$

$$(a, b) \longrightarrow ab \,\%\, 18$$

es. $2, 4 \longrightarrow 8 \,\%\, 18 \longrightarrow \frac{8}{18} = 0$, resto $8 \in A$ ✓

$10, 10 \longrightarrow 100 \,\%\, 18 \longrightarrow \frac{100}{18} = 5$, resto $10 \notin A$ ✓

$*$ e' definita su tutto l'insieme A!

(in A ho tutti i pari < 18, dunque le divisioni per 18 non danno resto (<18) dispari).

Esercizio 2

sabato 28 novembre 2020 10:26

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti operazioni binarie sull'insieme A indicato, stabilire se è associativa, commutativa, se esiste un elemento neutro e in tal caso se ogni elemento di A ha inverso.

(1) $A=\mathbb{Q}$, $x*y=x-y$;
(2) $A=\mathbb{Z}$, $x*y=\max\{x,y\}$;
(3) $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$;
(4) $A=\mathbb{N}$, $x*y=x+y+xy$;
(5) $A=\mathbb{Z}$, $x*y=x^2+y^2$;
(6) $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $(a,b)*(c,d)=(ac,bd)$;
(7) $A=\mathbb{R}$, $x*y=x(x+y)$;
(8) $A=\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $X*Y=X\cap Y$;
(9) $A=\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $X*Y=X\cup Y\setminus X\cap Y=\{x\in X\cup Y \mid x\notin X\cap Y\}$.

1) comm?, $x*y=y*x \to x-y=y-x \to$ es. $3-2=2-3 \to 1\neq -1$ no

Ass.?, $(x*y)*z=x*(y*z) \to (x-y)-z = x-(y-z) \to (3-2)-1=3-(2-1)$
$0 \neq 2$
no ass. dove $x=3, y=2, z=1$

el. neutro? $a*u=u*a=a$ $u=0$; $3-0=0-3\overset{?}{=}3$
$3-0=-3=3$ no

non esistono altri candidati, no el. neutro

se non ho el. neutro non ho $a*b=u$, cioè non ho inversi.

2) C?, $\max\{x,y\}=\max\{y,x\}$ sì

A?, $(x \max y)\max z = x\max(y\max z)$
$\max\{\max\{x,y\},z\}=\max\{x,\max\{y,z\}\}$

es. $\max\{\max\{3,2\},1\}$ = 3
3, 1
$\max\{3,\max\{2,1\}\}=3$
3, 2

sì

el. neutro $\max\{x,\lambda\}=x$
$\lambda=\forall k\in\mathbb{Z}\mid k\leq x$

el. inv. $a*b=\lambda$, $\max\{a,b\}$ da a o b, può dare λ solo quando $\lambda=a$ o $\lambda=b$
dunque ogni elemento di A ha inverso (sx e dx),
in quanto riesco sempre a ottenere λ (= a o b)

3) c? $(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ $\overset{a=1,b=2,c=3,d=4}{=}(3-8,4+6)=(-5,10)$
$(c,d)*(a,b)=(ca-db,cb+da)=(3-8,6+4)=(-5,10)$ sì

A? $((a,b)*(c,d))*(z,t) \overset{\text{presi } z=2,\ t=2}{=} (-5,10)*(2,2)=(-10-20,-10+20)=(-30,0)$
$(a,b)*((c,d)*(z,t))=(1,2)*((3,4)*(2,2))=(1,2)*(6-8,6+8)$ $\neq$ <u>no</u>
$=(-2-28,14+(-4))=(-30,10)$

el. neutro?, $(0,0)$ non presente nell'insieme
- $(a,b)*(1,1)=(a,b) \to (a-b,a+b)\neq(a,b)$
- $(a,b)*(1,0) \to (a-0,0+b)=a,b$ ✓ $u=(1,0)$

$(0,1) \to (-5,0)$ no

Posso sicuramente ottenere $(a,b)*(c,d) = u$ per qualche (a,b) e (c,d)
ma non per tutti ottengo u, quindi non tutti gli el. $\in A$ hanno inverso.

4) c? $x*y = x+y+xy$ sì, non cambia anche se
$y*x = y+x+yx$ scambio le posizioni

A? $(x*y)*z = (x+y+xy)*z = \underbrace{x+y+xy}_{\text{"}x\text{"}} + \underbrace{z}_{\text{"}y\text{"}} + \underbrace{(x+y+xy)(z)}_{\text{"}x\cdot y\text{"}}$ ∘

$x*(y*z) = x*(y+z+yz) = x+y+z+yz + x(y+z+yz)$ ×

∘ → $x+y+xy+z+zx+zy+zxy$
$=$ sì
× → $x+y+z+yz+xy+xz+xyz$

λ? $x*\lambda = \lambda*x = x$

$\lambda=0$: $x+0+0 = 0+x+0 = x$ ✓

$\lambda=1$: $x+1+x = 1+x+x \neq x$

inv? $x*y = u$

es. $0*0 = u$ ✓ ma non tutti gli el. $\in A$ hanno inverso

5) c? $x*y = x^2+y^2 \overset{?}{=} y^2+x^2$ sì

A? $(x*y)*z = (x^2+y^2)^2+z^2$
$\neq$
$x*(y*z) = x^2+(y^2+z^2)^2$

λ? $x*\lambda = \lambda*x = x$ $\lambda=0$: $x^2 = x^2 \neq x$

$\lambda=-\sqrt{2}x$: $x^2+(-\sqrt{2}x)^2$ non ho el. neutro

x^2+2x^2 !

dunque non ho inv: $a*b = \lambda$

6) c? $(a,b)*(c,d) = (ac,bd)$
$=$ sì ✓ (per la commutatività della moltiplicazione)
$(c,d)*(a,b) = (ca,db)$

A? $((a,b)*(c,d))*(z,t) = (\underbrace{ac}_{\text{"}a\text{"}},\underbrace{bd}_{\text{"}b\text{"}})*(\underbrace{z}_{\text{"}c\text{"}},\underbrace{t}_{\text{"}d\text{"}}) = (acz,bdt)$
$=$ sì ✓
$(a,b)*((c,d)*(z,t)) = (a,b)*(cz,dt) = (acz,bdt)$

λ? $\quad (a,b) * \lambda = \lambda * (a,b) = (a,b)$

$\lambda = (1,1)$: $\quad (a,b) * (1,1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a,b)$ ✓

inv.? $\quad (a,b) * (c,d) = \overset{\lambda}{(1,1)}$

ottengo λ solo per $(c,d) = (1/a, 1/b)$, dunque non ho inv. per tutti gli el. di A

7) c? $\quad x * y = x(x+y)$ $\quad \neq$ generalmente: $x = 3$, $y = 4$

$y * x = y(y+x)$ $\quad 3(7) \neq 4(7)$

A? $\quad (x * y) * z = (x(x+y)) * z = \overset{\text{“}\lambda\text{”}}{x}\overset{\text{“}(x+y)\text{”}}{(x+y)}[x(x+y) + z]$ $\quad$ espr. gr. = 3

$x * (y * z) = x * (y(y+z)) = x(x + y(y+z))$ $\quad \neq$ $\quad$ espr. gr. = 2

λ? $\quad x * \lambda = \lambda * x = x$

$\lambda = 1$: $\quad x(x+1) = 1(1+x) \neq x$

$\lambda = 0$: $\quad x(x+0) = 0 \neq x$

N.B. Non vale la commutatività, difficile che valga $x * \lambda = \lambda * x$

no inv.

8) c? $\quad X * Y = X \cap Y$

$Y * X = Y \cap X$ $\quad =$ sì

A? $\quad (X \cap Y) \cap Z$ $\quad$ sì per la proprietà associativa di $\cap$

$X \cap (Y \cap Z)$

λ? $\quad X * \lambda = \lambda * X = X$

preso $\lambda = X$: $\quad X \cap X = X$ ✓

inv? $\quad X * Y = \lambda \ (= X)$ $\quad$ ogni el. $\in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ha inverso (avere ho sempre un insieme Y che $\cap X$ dà X (inv. dx) (e viceversa)

9) c? $\quad X * Y = X \cup Y \setminus X \cap Y = \{x \in X \cup Y \mid x \notin X \cap Y\}$ $\quad =$ per la comm. di $\cap$ e $\cup$

$Y * X = Y \cup X \setminus Y \cap X =$ "

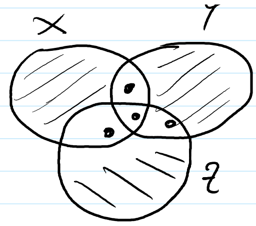
unione senza intersez.

A? $\quad (X * Y) * Z = (X \cup Y / X \cap Y) * Z = (X \cup Y / X \cap Y) \cup Z \setminus [(X \cup Y / X \cap Y) \cap Z]$

sì $\quad X * (Y * Z) = X * (Y \cup Z \setminus Y \cap Z) = X \cup (Y \cup Z \setminus Y \cap Z) \setminus [X \cap (Y \cup Z \setminus Y \cap Z)]$

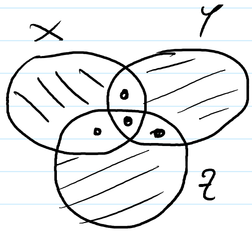
1) 

2) 

1) 

o = non preso

=

2) 

λ? $\quad X * \lambda = \lambda * X = X$

- $\lambda = X$: $\quad X \cup X \setminus X \cap X$

$$X \setminus X = \emptyset \neq X$$

- $\underline{\lambda = \emptyset}$: $\quad X \cup \emptyset \setminus \overset{\text{non hanno el. in comune}}{X \cap \emptyset} = \emptyset \cup X \setminus \emptyset \cap X$

$$\rightarrow X \setminus \emptyset = X \quad \checkmark$$

inv? $\quad X * Y = \lambda \quad$ ogni insieme (elemento) $\in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ha inverso (ovvero ho sempre un insieme t.c. ottengo λ, da $X * Y$, è proprio l'insieme $\emptyset$)

Esercizio 3

sabato 28 novembre 2020 12:08

Esercizio 3. Sia A un insieme di s elementi. Quante sono le operazioni binarie su A?

Se:

- $s = 0, 1$, non ho op binarie su A
- $s \geq 2$ (potenzialmente ho infinite operazioni binarie su A)

ma ritorno sulle stesse:

$$A \times A \longrightarrow A$$

op binarie $\rightarrow s \rightarrow$ n elementi di A

$$(A^2)^{\# A} \text{ operazioni diverse}$$

$$= \underline{A^{2s}}$$

Esercizio 4. Si determini quali delle seguenti operazioni su $\mathbb{R}$ sono associative e quali commutative:

$$x*y=\min\{x,y\};\quad x*y=\frac{x+y}{|xy|+1};\quad x*y=e^{x+y}.$$

1) $x*y=\min\{x,y\}$ comm ✓

$y*x=\min\{y,x\}$

es. $x=1,\ y=5,\ z=0$

$(x*y)*z=\min\{\min\{x,y\},z\}$ $\qquad \min\{\min\{1,5\},0\}=0$ ✓ ASS.

$x*(y*z)=\min\{x,\min\{y,z\}\}$ $\qquad \min\{1,\min\{5,0\}\}=0$

2) $x*y=\dfrac{x+y}{|xy|+1}$ $\qquad y*x=\dfrac{y+x}{|yx|+1}$

es. $x=-3 \quad y=1$

NO: $x+y=-2=1-3=-2$

N.B. È commutativa anche se x e y sono discordi

ASS? $(x*y)*z=\left(\dfrac{x+y}{|xy|+1}\right)*z=\left(\dfrac{x+y}{|xy|+1}+z\right)\Big/\left|\dfrac{x+y}{xy+1}\cdot z\right|+1$ ○

$x*(y*z)=x*\left(\dfrac{y+z}{|yz|+1}\right)=\left(x+\dfrac{y+z}{|yz|+1}\right)\Big/\left|x\cdot\dfrac{y+z}{|yz|+1}\right|+1$ ×

○: $\dfrac{x+y+zxy+z}{|xy|+1}\Big/\left|\dfrac{zx+zy}{xy+1}\right|+1$

$\neq$

×: $\dfrac{y+z+xyz+x}{|yz|+1}\Big/\left|\dfrac{xy+xz}{|yz|+1}\right|+1$

3) $x*y=e^{x+y}$ $\qquad y*x=e^{y+x}$ comm ✓

$(x*y)*z=(e^{x+y})*z=e^{e^{x+y}+z}$

$\neq$ $\qquad$ NO ASS

$x*(y*z)=x*(e^{y+z})=e^{x+e^{y+z}}=e^x\cdot e^{e^{y+z}}$

Esercizio 5

sabato 28 novembre 2020 12:27

Esercizio 5. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ con la seguente operazione:

$$f * g = h, \text{ dove } h \text{ è definita da } h(n) = f(n) + g(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(1) Si dimostri che $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un monoide commutativo.
(2) Qual è l'elemento neutro?
(3) Quali elementi di $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ hanno inverso? $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un gruppo?

1) E' monoide commutativo se $*$ è commutativa;

$$\left.\begin{aligned} f * g = h &= h(n) = f(n) + g(n) \ \forall n \in \mathbb{Z} \\ g * f = h &: h(n) = g(n) + f(n) \ \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right] = \text{ commutativa}$$

2) λ? $\quad f * \lambda = \lambda * f = f$

$\underline{\lambda = 0}$; $h(n) = f(n) + 0$ $\qquad f(n) * 0 = h(n) = f(n)$ ✓

$h(n) = 0 + f(n)$ $\qquad 0 * f(n) = h(n) = f(n)$ ✓

3) Ogni elemento di $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ ha un inverso (cioè ottengo $\lambda = 0$ data f qualsiasi e $g = 0$ e viceversa)

la qualsiasi sia $f(n)$ ha un $g(n)$ che da $* = 0$

Perché ogni elemento ha inverso, ho un <u>gruppo abeliano</u>.

Esercizio 6

sabato 28 novembre 2020 12:38

Esercizio 6. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ con la seguente operazione:

$$f * g = h, \text{ dove } h \text{ è definita da } h(n) = f(n) \cdot g(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(1) Si dimostri che $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un monoide commutativo.
(2) Qual è l'elemento neutro?

(3) Quali elementi di $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ hanno inverso? $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un gruppo?

1) E' monoide commutativo se $*$ è commutativa;

$f * g = h = h(n) = f(n) \cdot g(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$
$g * f = h : h(n) = g(n) \cdot f(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad =$ commutativa

per essere monoide devo dimostrare l'associatività;

$f, g, h \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \quad (f * g) * h \overset{?}{=} f * (g * h)$

sia $n \in \mathbb{Z}$ $\quad ((f*g) * h)(n) = (f * g)(n) * h(n) = (f(n) g(n)) h(n) = f(n) g(n) h(n)$

$(f * (g * h))(n) = f(n) \cdot (g(n) \cdot h(n)) = f(n) g(n) h(n)$ $\quad =$

2) $\underline{\lambda = 1}$ infatti $f * \lambda = h(n) = f(n) \cdot 1 = f(n)$

$\to \lambda(n) = 1$ $\quad \lambda * f = h(n) = 1 \cdot f(n) = f(n)$

N.B. λ è una funzione! $\quad \lambda \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ t.c. $\lambda * f = f * \lambda = f \quad \underline{\underline{\forall f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}}} \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Sia $n \in \mathbb{Z}$ $\quad (f * \lambda)(n) = (\lambda * f)(n) = f(n)$ $\quad$ vale comunque per ogni f

$f(n) \cdot \lambda(n) \quad \lambda(n) \cdot f(n) = f(n)$ $\quad$ scelgo $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ t.c. $f(n) \neq 0$ e esplicito per $f(n)$

$\Rightarrow \lambda(n) = \lambda(n) = 1$

$\lambda(n) = 1$ funz. cost. $\quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ elemento neutro $\quad (\text{N.B. } \lambda \neq Id_{\mathbb{Z}})$

$a * b = \lambda$

3) $f(n) = 1$ ha inverso; $f(n) \cdot g(n) = 1$ per $g(n) = 1$ (e gli opposti)

non ci sono altri elementi invertibili, infatti:

se $f(n) \geq 2$ o $f(n) \leq -1$ non ho alcun elemento $g(n)$ t.c. ottengo $\lambda = 1$

$2 \cdot 1 \neq 1 \quad , \quad -1 \cdot 1 \neq 1$

$(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ $\underline{\text{non}}$ è quindi un gruppo. $\quad$ es. $f(x) = 2 \ \forall x \in \mathbb{Z}$ non è invertibile

siccome $f(n), g(n) \in \mathbb{Z}$ l'unica possibilità è che $f(n) \in \{-1, +1\} \ \forall n \in \mathbb{Z}$

λ invertibile $\longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} f \subseteq \{-1, 1\}$ $\quad$ | (ovviamente essendo $g(n)$ inverso siccome $f(n), g(n) \in \mathbb{Z}$ l'unica possibilità è che $f(n) \in \{-1,+1\}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

f invertibile $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, f \subseteq \{-1,1\}$

(ovviamente essendo $g(n)$ inverso di $f(n)$ $\rightarrow$ $g(n) \in \{-1,+1\}$)

non lo specifico perché mi sto interessando di $\underline{\text{tf}}$ $\exists g \rightarrow f(n) \cdot g(n) = 1$

Esercizio 7

sabato 28 novembre 2020 13:18

Esercizio 7. Sia G un gruppo. Provare che $(aba^{-1})^n = ab^na^{-1}\ \forall\, a,b \in G, \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Se G e' un gruppo, allora $a \in G$ e' invertibile.

$(aba^{-1})^n = ab^na^{-1}$ applico le proprietà delle potenze

$a^n b^n a^{-n} = ab^n a^{-1}$

$\cancel{a^n} b^n \frac{1}{\cancel{a^n}} = \cancel{a} b^n \frac{1}{\cancel{a}} \rightarrow \underline{b^n = b^n}$ $\square$

$a \neq 0 \notin G$

l'elemento zero non deve appartenere a G per avere uguaglianza verificata

Esercizio 8

sabato 28 novembre 2020 13:22

Esercizio 8. Sia $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ la funzione data da $f(n,m) = (n-m, m+2)$. Stabilire se f ha inversa sinistra, se ha inversa destra e se è invertibile.

$$f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(n,m) \mapsto (n-m, m+2)$$

- f inv. sx $\iff$ f. iniettiva

f. e' iniettiva ✓, $\forall\, n,m \in \mathbb{Z}$: $(2,3) \mapsto (-1,5)$, $(3,4) \mapsto (-1,6)$

in particolare $m+2$ fa in modo che ottengo coppie sempre diverse

f ha inversa sx

$(n,m),(n',m') \in \mathbb{Z}$ t.c. $f(n,m) = f(n',m') \to (n-m, m+2) = (n'-m', m'+2)$

$$\to \begin{cases} n-m = n'-m \\ m+2 = m'+2 \end{cases} \quad \begin{cases} n = n' \\ m = m' \end{cases} \to (n,m) = (n',m') \quad ✓$$

- f. inv. dx $\iff$ f. surgettiva

- $(0,0)$ e' preso? $n-m = 0$, $m+2 = 0$
$\to n = m$, $m = -2$

sì per $(-2,-2) \mapsto (-2+2, -2+2) = (0,0)$

- $(1,0)$ e' preso? $n-m = 1$, $m+2 = 0$
$\to n = m+1$, $m = -2$
$n = ?$, $m = -2$

f raggiunge $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, in quanto riesco a costruirmi delle espressioni per trovare $(n,m) \mapsto (a,b)$

f surgettiva, allora f ha un' inversa dx

Dato $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ $\exists?$ $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ $f(n,m) = (a,b)$

$$\begin{cases} n-m = a \\ m+2 = b \end{cases} \to \begin{cases} n = a+m = a+b-2 \\ m = b-2 \end{cases} \quad f(a+b-2, b-2) = (a,b) \quad ✓$$

- f ha inversa (e' invertibile) se bigettiva.

Ho appena dimostrato che f e' iniettiva e surgettiva, dunque e' bigettiva e f. e' INVERTIBILE.

Esercizio 9

sabato 28 novembre 2020 13:33

Esercizio 9. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione data da $f(x) = x^2$.
(1) Stabilire se f è invertibile.
(2) Determinare tre distinte inverse sinistre per f.
(3) Esistono inverse destre per f?

$\exists \to$ per la composizione

1) f e' invertibile se bigettiva (iniett. + suriett.)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \mapsto n^2$

In $\mathbb{N}$, n^2 e' raggiunto solo una volta $\forall n \in \mathbb{N}$

es. $3 \to 9$
$4 \to 16$

INIETTIVA

↳ ha inverse sx

ma non e' surgettiva, in quanto vengono raggiunti solo i quadrati in $\mathbb{N}$ (e non tutto $\mathbb{N}$) $\to$ no inv. dx

es. $f^{-1}(3) = \emptyset$

quindi NO BIGETTIVA $\to$ no invertibile

2) Inv. sx: $(g * f)(x) = x^2$

$g(f(x)) = x^2$

se f iniettiva

si, perche' $f(x) = f(y)$

$\to x^2 = y^2 \xrightarrow{x,y \geq 0} x = y$

- $g(x) = |x| \to g(|x^2|) = x^2$ ✓
- $g(x) = Id\,x \to g(x^2) = x^2$ ✓
- $g(x) = (x^2 - x) \to g(x^4 - x^2) = x^2$ ✓

g e' inversa sx di f se $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ (applico f e compongo con g) ↗ lavora sull'immagine di f

$$g_1(x) = \begin{cases} y & \text{se } x = y^2 \text{ con } y \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} y & x = y^2,\ y \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} y & \text{se } x = y^2 \text{ con } y \in \mathbb{N} \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i = 1,2,3$ $\quad (g_i \circ f) = g_i(f(x)) = g_i(x^2) = x$

3) Perche' f non e' surgettiva, $\nexists$ inverse dx di f.

Esercizio 10

sabato 28 novembre 2020 13:55

Esercizio 10. (1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x) = x^3$. Stabilire se f ha inversa sinistra, se ha inversa destra e se è invertibile.

(2) Sia $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione data da $g(x) = x^3$. Stabilire se g ha inversa sinistra, se ha inversa destra e se è invertibile.

1) $f(x) = x^3$ • e' iniettiva, in quanto ogni cubo e' raggiunto da un solo elemento, ossia la sua radice terza:

es. $1 = \sqrt[3]{1} = 1$, $-1 = \sqrt[3]{-1}$, $8 = \sqrt[3]{8} = 2$ ecc...

• e' surgettiva, perche' ogni elemento in $\mathbb{R}$ e' raggiunto:

es. $n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$
raggiunto da $m = \sqrt[3]{1} \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[3]{4} \quad \dots \Big] \in \mathbb{R}$

• iniett. + surgett. = BIGETTIVA, allora f ha inv. sx, dx ed e' quindi invertibile.

2) $g(x) = x^3$ • es. 2 ha radici terze:

$$\sqrt[3]{2}\left(\frac{0+2k\pi}{3} - i\cdot 0\right) \quad \text{per } k = 0 \dots n-1$$

quindi una soluzione ha più radici che la raggiungono

no INIETTIVA

• Ogni elemento in $\mathbb{C}$ e' raggiunto (inoltre $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$)
SURGETTIVA ✓ $\qquad f$ surg.

• no BIGETTIVA perche' no iniettiva

→ Ha inversa dx, non inversa sx e g non e' invertibile.

Esercizio 11

sabato 28 novembre 2020 14:15

Esercizio 11. Per ciascuno dei seguenti monoidi si determini, se esiste, l'inverso dell'elemento x assegnato:

(1) $(\mathbb{N},+,0)$, $x=2$;
(2) $(\mathbb{Z},+,0)$, $x=2$;
(3) $(\mathbb{Z},\cdot,1)$, $x=2$;
(4) $(\mathbb{Z}_{15},+,\overline{0})$, $x=\overline{2}$;
(5) $(\mathbb{Z}_{15},\cdot,\overline{1})$, $x=\overline{2}$;
(6) $(\mathbb{Z}_6,\cdot,\overline{1})$, $x=\overline{2}$;
(7) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},\circ,\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tale che $x(n)=2\ \forall n\in\mathbb{Z}$;
(8) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},\circ,\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tale che $x(n)=n+2\ \forall n\in\mathbb{Z}$;
(9) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},\circ,\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tale che $x(n)=2n\ \forall n\in\mathbb{Z}$;

$\hookrightarrow$ inverso $a * b = \lambda$

1) $(\mathbb{N},+,0)$, $x=2$ — 2 ha un el. t.c. con $*$ ottengo λ? 2 ha b t.c. $+(2,b)=\lambda$ — $\nexists$ n inverso di $x=2$ (non posso ottenere 0 se sommo qualcosa di naturale a 2)

2) $(\mathbb{Z},+,0)$, $x=2$ — $\exists$ n inverso di $x=2$ $\quad (2,-2) = 2-2 = 0 = \lambda$
$(= -2+2 = 0 = \lambda)$

3) $(\mathbb{Z},\cdot,1)$, $x=2$ — $\nexists$ n t.c. $2\cdot n = 1$

4) $(\mathbb{Z}_{15},+,\overline{0})$, $x=\overline{2}$ — $\exists$ n inverso, $n=\overline{-2}$ — controllare

5) $(\mathbb{Z}_{15},\cdot,\overline{1})$, $x=\overline{2}$ — $\nexists$ n inverso t.c. $\overline{2}\cdot\overline{1}=\overline{1}$

6) $(\mathbb{Z}_6,\cdot,\overline{1})$, $x=\overline{2}$ — $\nexists$ n inverso t.c. $\overline{2}\cdot\overline{1}=\overline{1}$

7) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},\circ,\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$ $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ | $x(n)=2\ \forall n\in\mathbb{Z}$
funzione
$\to$ è una f. costante, quindi
- non è iniettiva (2 è raggiunto da n valori in $\mathbb{Z}$)
- non è surgettiva (viene raggiunto solo $2\in\mathbb{Z}$)

quindi no BIGETTIVA = no INVERSO

Controllare: basta verificare la bigettività o devo guardare altro? (es. $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ devo ottenere $x(n)=n$?)

universo, operaz., elemento

8) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},\circ,\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$ $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ | $x(n)=n+2\ \forall n\in\mathbb{Z}$
funzione
$\to$ iniettiva e surgettiva
quindi f è invertibile

9) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}},\circ,\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$ $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ | $x(n)=2n\ \forall n\in\mathbb{Z}$
funzione
$\to$ iniettiva ma non surgettiva
(vengono raggiunti solo i pari)

ho solo inverso dx, f non è invertibile