Es note

1) Per quale C è una pdf per $x \in [0,2]$?

$$f(x) = \begin{cases} Cx & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ C & \text{altrimenti} \end{cases}$$

pdf: $\int_0^1 Cx \, dx + \int_1^2 C \, dx \overset{?}{=} 1$

$= \frac{1}{2}Cx^2 \Big|_0^1 + Cx \Big|_1^2 = \frac{1}{2}C + \cancel{2}C - \cancel{C}$

$= \frac{3}{\cancel{2}}C = 1 \cdot \frac{2}{3}$

Infatti $\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}x^2 \Big|_0^1 + \frac{2}{3}x \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ ✓

2) Data pdf: Calcola cdf e $E[x]$

$$f(x) \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$P(X) = \int_0^1 1 \cdot dx = x \Big|_0^1 = 1$

$F_X(a) = \int_0^a 1 \, dx = x \Big|_0^a = a$

$$F(\overset{\text{valore}}{x}) \begin{cases} x & \overset{\text{origine}}{0 \leq x \leq 1} \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p(x) = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$Var(X) = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \cdot 1 \, dx = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{4} - 2x \quad dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x - x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

3) Data $Y = X^n$, calcola $E[Y]$ da 2) | dove $P(y)dy = P(x)dx$

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)$ $\quad * \; P(Y) = P(x) \frac{dx}{dy} \to \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}}$ x in funz. di y

$x \in (0,1) \to y \in (0^n, 1^n) = y \in (0,1)$ $\quad$ perché $F_x(X) = x$

$F_Y(Y) = P(Y \leq y) = P(x^n \leq y) = P(x \leq y^{1/n}) = y^{1/n}$

$P_Y(Y) = (y^{1/n})' = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$ (oppure calcolo pdf con cambio der. e poi F) *

$E[Y] = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} dy = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}+1} y^{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{n+1} y^{\frac{1}{n}+1} \Big|_0^1$

$\to \frac{1}{n+1}$

per n grandi il valore atteso diminuisce: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

oppure $E[X^n] = \int_0^1 x^n \cdot \underbrace{1}_{p(x)} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1$

extra) $Y = \frac{X-1}{2}$, calcola $E[Y]$ da 2)

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)$ $\quad p(x) \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad$ ho IDENTITA'

$x \in (0,1) \to y \in (-\frac{1}{2}, 0) = y \in (-\frac{1}{2}, 0)$ | $F_X(X) = x$

$F_Y(Y) = P(Y \leq y) = P(\frac{x-1}{2} \leq y) = P(x \leq 2y+1) = 2y+1$

$P_Y(Y) = (2y+1)' = 2$ (valore irreale)

$E[Y] = \int_0^1 y \cdot 2\, dy = 2y \Big|_0^1 = 2$

extra) $Y = \frac{X}{2}$, calcola $E[Y]$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x) \qquad p(x) \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

① $x_1 \in (1,2] \to y \in (\frac{1}{2}, 1]$
② $x_2 \in [0,1] \to y \in [0, \frac{1}{2}]$

$$F_{x_1}(a) = \int_0^a \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}x \quad \Big| \quad F_{x_2}(a) = \int_1^a \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}x$$

$$F_{Y_1}(Y_1) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X}{2} \leq y\right) = P(X \leq 2y) = F_X(2y)$$

In questo caso $F_X = \frac{1}{2}x$, non l'identità $\to \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}y) = y$

$$F_{Y_2}(Y_2) = F_{Y_1}(Y_1) = F_X(2y) = y$$

$$P_{Y_1} = (F_{Y_1})' = (y)' = 1 = P_{Y_2}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y \cdot 1\, dy + \int_1^2 y \cdot 1\, dy = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}y^2\Big|_1^2 = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^2$$
$$= \cancel{\frac{1}{2}} + 2 - \cancel{\frac{1}{2}} = 2$$

Es - w4

1) Data X con pdf $f(x) = Cx^3$ su $0 \leq x \leq 3/2$
a) Det C b) Data C prec det $P\{\frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$ c) $E[X^2]$ e $Var(X)$?

a] Per essere pdf $P(tot) = 1$ Quindi:

$$\int_0^{3/2} Cx^3\,dx = \frac{C}{4}x^4\Big|_0^{3/2} = \frac{C}{4}\cdot\frac{81}{16} = \boxed{\frac{81}{64}}C$$

Allora $C = \frac{64}{81} \longrightarrow \frac{81}{64}\cdot\frac{64}{81} = 1$ ✓

b] Sappiamo $F(x) = P(X \leq x)$ "fino a x"
ma allora
$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ "fino a b, meno la parte fino ad a"

X valutato fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$

Allora $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}) = \int_0^{3/2} \frac{64}{81}x^3\,dx - \int_0^{1/2}\frac{64}{81}x^3 = \int_{1/2}^{3}\frac{64}{81}x^3\,dx$

$= \frac{64}{81}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_{1/2}^{3/2} = \frac{\cancel{64}}{\cancel{81}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\cancel{81}}{16} - \frac{\cancel{64}}{81}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{16}} \simeq 38{,}8\%$
"1 (infatti e' Area massima ($\frac{3}{2}$ ultimo valore))"

c] $E[X^2] \rightarrow E[Y]$ dove $Y = X^2$

$$E[Y] = \frac{64}{81}\int_0^{3/2} x^2 \cdot \overset{g(x)\ \text{pdf}}{x^3} = 1{,}5$$

$$E[X] = \int_0^{3/2} x\cdot\frac{64}{81}x^3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{64}{81}x^5\Big|_0^{3/2} = 1{,}2$$

$$Var(X) = \int_0^{3/2}\left(E[x^2] - (E[X])^2\right)\cdot 1\,dx$$

$$= 1{,}5 - 1{,}2 = 0{,}3$$

2) Mostra che per a e b costanti: $E[aX+b] = aE[X]+b$

$Var[aX+b] = a^2 Var(X)$

- $E[aX+b] = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) \cdot p(x)\, dx = \int ax\, p(x)\, dx + \int b\, p(x)\, dx$

$$= a \underbrace{\int x\, p(x)\, dx}_{E[X]} + b \int p(x)\, dx$$

= area totale su tutto l'intervallo e' 1 (ovvero somma di tutte le p(x))

$$= a E[X] + b \quad \checkmark$$

- $Var[aX+b] = \overset{\text{integrale}}{E}\left[(aX+b - E[aX+b])^2\right]$

$$= \int \left[(aX+\cancel{b} - aE[X] - \cancel{b})^2\right] dx\ p(x)$$

raccogliendo a (costante), applicandone il quadrato, posso farlo uscire da E

$$\rightarrow \quad a^2 \int \left[(x - E[X])^2\right] p(x)\, dx = a^2 Var(x)$$

3) Sia X var casuale su $[0,2]$. Calcola $E[2^X]$ e $Var(2^X)$
uniformemente

$P: \int_0^2 c\, dx = cx\Big|_0^2 = 2c \overset{?}{=} 1 \rightarrow c = \frac{1}{2}$

perche' uniforme e' costante

Detta $Y = 2^x \rightarrow E[Y] = \int g(x) \cdot p(x)\, dx = \int_0^2 2^x \frac{1}{2}$

$Y \in [1,4]$

posso scrivere 2^x come $(e^{\ln 2})^x$

$$\left(e^{x\ln 2}\right)' = \ln 2 \underbrace{e^{x\ln 2}}_{\text{cerco di isolarlo}} \Rightarrow 2^x = \frac{e^{x\ln 2}}{\ln 2} \xrightarrow{\text{der}} \frac{\cancel{\ln 2}\, e^{x\ln 2}}{\cancel{\ln 2}}$$

$\Leftarrow$ INTEGRALE

allora $E[Y] = \int_0^2 2^x \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 = \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$

detto $Z = 2^{2x} \rightarrow E[Z] = \int_0^2 2^{2x} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \frac{2^{2x}}{2\ln 2}\Big|_0^2 = \frac{4}{\ln 2}$

similmente al caso precedente

$\mathrm{Var}(2^x) = \frac{4}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$

4) Data $X \sim N(3,16)$ det a e b per cui $Y = aX + b$ risulta avere $N(0,1)$

Applicando una trasformazione lineare come Y so per certo che:

$\mu' = a\mu + b$
$\sigma' = a\sigma$

di una gaussiana di $N(\mu, \sigma^2)$

Allora $\begin{cases} a3 + b = 0 \\ a4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{3}{4} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$

5) Un autobus passa ogni 15 min dalle 8 in poi | distribuzione uniforme

$P(x<5)$ minuti e $P(x>10)$ minuti arrivando tra le 8 e le 9

X su [ore 8, ore 9] | cioè un'ora di intervallo

[0 minuti, 60 minuti]

Soluzione

Un possibile svolgimento è il seguente:

se il tempo di arrivo alla fermata è distribuito uniformemente tra le 8 e le 9, aspetti meno di 5 minuti arrivando dopo le 8.10, 8.25, 8.40 o 8.55 e più di 10 arrivando prima delle 8.5, 8.20, 8.35 o 8.50. Dunque:

$$P\{8.10 < x < 8.15\} + P\{8.25 < x < 8.30\} + P\{8.40 < x < 8.45\} + P\{8.55 < x < 9\} =$$

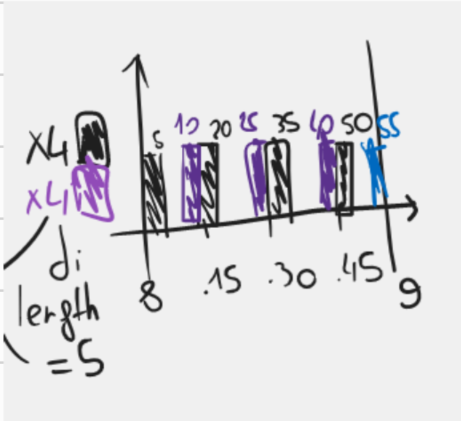
$$P\{8.0 < x < 8.5\} + P\{8.15 < x < 8.20\} + P\{8.30 < x < 8.35\} + P\{8.45 < x < 8.5\} = 1/3.$$

$\} \ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$= 66\%$

$$8\int_0^5 \frac{1}{60}\,dx = 66\% \quad \text{(sommate)}$$

Questo perché



ho 0 - 5 4 volte

10 - 15 4 volte