Esercizio 1

sabato 24 ottobre 2020 11:25

Esercizio 1. Scrivere in forma algebrica, cioè $a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$, i seguenti numeri complessi:

$$i^{427},\quad (1-\sqrt{3}i)^9-(1+i)^6,\quad \frac{1}{i(\sqrt{2}-i)},\quad (1-i)^3+\frac{1}{3+i}.$$

- $i^{427} \to z = 0 + i^{427}\cdot 1$ So che $i^2=-1$ $\to z = \underline{-i}$

$427 = 400 + 27 = 200 + 200 + 20 + 5 + 2$

$i^1 \cdot i^1 \cdot i^1 \cdot i^1 \cdot i^1$

$+1 \cdot +1 \cdot +1 \cdot +i \cdot -1$

$i^{200} \to \frac{200}{2} = 100$ significa che ho 100 volte i^2 moltiplicato

$\hookrightarrow (i^2)^{100} = (-1)^{100} = +1$

$\hookrightarrow (-1)(-1)\cdot i = +i$

$(i^2)^{10} = +1$

i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	...
1	i	-1	$-i$	1	i	-1	...

potenze intere di i sono periodiche di periodo 4

$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$

$i^k = e^{\frac{\pi}{2}ki} \quad k\in\mathbb{Z}$

$427 = 106\cdot 4 + 3$ DIVISIONE EUCLIDEA

$i^{427} = (i^4)^{106}\cdot i^3 = (1)^{106}\cdot i^3 = i^3 = -i$

- $\underbrace{(1-\sqrt{3}i)^9}_{z_1} - \underbrace{(1+i)^6}_{z_2}$ Si trasforma in forma trigonometrica o esponenziale (evito di applicare le potenze sulla forma algebrica)

$\to |z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \qquad \theta = \arg(z_1) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \qquad z_1 = 2\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right)$

$\to z_1^9 = 2^9\left(\cos\frac{9}{3}\pi + i\sin\frac{9}{3}\pi\right) \to z_1^9 = 512\,(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$

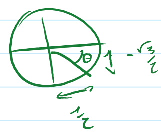
$= 512\,(-1 + i\cdot 0) = -512$

Se non volessi calcolare la tg per trovare θ:

- $\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$ • $\sin = \frac{Im(z)}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ corrisponde a $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$\frac{\text{cateto}}{\text{ipot}}$

$1-\sqrt{3}i = 2\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$



$\to |z_2| = \sqrt{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \qquad z_2^6 = \sqrt{2}^6\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot 6 + i\sin\frac{\pi}{4}\cdot 6\right)$

$= 2^3\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

$= 8\cdot(0 - 1\cdot i) = -8i$

$$= 8 \cdot (0 - 1 \cdot i) = -8i$$

Allora: $z = -512 + 8i$ $\qquad (1+i) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

$\rightarrow (1 - \sqrt{3})^3 - (1+i)^6 = (2 \cdot e^{-\frac{\pi}{3} i})^3 - (\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i})^6$ sfrutto le proprietà delle potenze

$\rightarrow 2^3 \cdot e^{-\frac{3}{3}\pi i} - (\sqrt{2})^6 \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot 6 i}$

$\rightarrow 512\, e^{-3\pi i} - 2^{6/2}\, e^{\frac{3}{2}\pi i} = 512\, e^{\pi i} - 8\, e^{\frac{3}{2}\pi i} = -512 - 8(-i) = -512 + 8i$

$-3\pi = \pi$, senza solo periodicità aggiunte

f. TRIG.

$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$

$e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos(\frac{3}{2}\pi) + i \sin(\frac{3}{2}\pi) = 0 - 1 \cdot i = -i$

- $\dfrac{1}{i(\sqrt{2} - i)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, i - i^2} = \dfrac{1}{i\sqrt{2} + 1}$ so che $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

$= \dfrac{1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rightarrow z = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ $\qquad 2^{1/2} \cdot 3^{-1/2} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

- Posso trasformare in esponenziale
- Posso effettuare una specie di razionalizzazione:

moltiplico e divido per uno stesso numero

$= \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2} - i} = \dfrac{1}{i} \cdot \underbrace{\dfrac{i}{i}}_{=1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2} - i} \cdot \underbrace{\dfrac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} + i}}_{=1}$

$= \dfrac{i}{-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2} + i}{2 - i^2} = -i \cdot \dfrac{\sqrt{2} + i}{2 + 1} = -i \cdot \dfrac{\sqrt{2} + i}{3} = \frac{1}{3}(-i\sqrt{2} - i^2) = \frac{1}{3}(1 - i\sqrt{2})$

- $(1 - i)^3 + \dfrac{1}{3 + i} \rightarrow 1 - i^3 = 1 - (i^2 \cdot i) = 1 + i$

Dunque $\dfrac{(1+i)(3+i) + 1}{3 + i} = \dfrac{1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + i(1 \cdot 1 + 1 \cdot 3) + 1}{3 + i} = \dfrac{3 - \cancel{1} + 4i + \cancel{1}}{i + 3}$

$z = \dfrac{3 + 4i}{3 + i}$ $\qquad$ SOLUZIONE: $\frac{1}{10}(-17 - 21i)$

Esercizio 2

sabato 24 ottobre 2020 12:18

Esercizio 2. Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

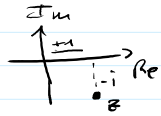
$$1-i,\quad -1-i\sqrt{3},\quad \frac{1+i}{1-i},\quad 7i,\quad \frac{1}{1+i}+\frac{1}{-1+i}.$$

perchè hanno stessa tg

- $1-i \qquad |z| = \sqrt{2} \qquad tg^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ ma attenzione!

$\rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ho $Re(z) > 0$, $Im(z) < 0$

$\rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$



$\rightarrow$ x verificare i valori, controllo se sono uguali all'originale

nel IV quadrante ho $\theta = -\frac{\pi}{4}$

- $-1-i\sqrt{3} \qquad |z| = 2 \qquad tg^{-1}(+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

- $\frac{1+i}{1-i} = 1+i \cdot \frac{1+i}{(1-i)^2} = (1+i)^2/(1-i)^2 = \cancel{1}+\cancel{i^2}+2i \,/\, \cancel{1}+\cancel{i^2}-2i$

$= \frac{\cancel{2i}}{-\cancel{2i}} = -1 \qquad |z| = 1 \qquad tg^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$

$\rightarrow z = 1\left(\cos 0° + i\sin 0°\right)$

$\rightarrow z = 1\cdot e^{i\cdot 0} = 1\cdot e^{0}$

Posso anche sfruttare il numero per il suo coniugato diviso il suo modulo

Scrivo in forma esponenziale:

- $1+i \quad\rightarrow\quad z = 1+i \qquad |z| = \sqrt{2}$

$\theta = arg(z) \qquad \cos = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $1-i \quad\rightarrow\quad z = 1-i \qquad |z| = \sqrt{2}$

$\theta = arg(z) = -\frac{\pi}{4} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Allora: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{\cancel{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{4} - (-i\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

- $7i$ $\qquad |z| = 7$ $\qquad tg\left(\frac{7}{0}\right) = N.E.$ Dove tg non esiste? Per $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$

Ho $z = +7i$, allora $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow z = 7\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow z = 7e^{i\frac{\pi}{2}}$

- $(1-i)^3 + \frac{1}{3+i}$ $\qquad \rightarrow (1-i)^3 = 1 - 3i + 3i^2 - i^3$

$= 1 - 3i - 3 - i$

$= -2 - 4i$

$\rightarrow \frac{1}{3+i} = 1 \cdot \frac{3-i}{(\sqrt{10})^2} = \frac{3-i}{10}$

quindi $\quad -2 - 4i + \frac{3}{10} - \frac{i}{10} = -\frac{17}{10} - i\frac{41}{10}$ $\qquad |z| = \sqrt{\left(-\frac{17}{10}\right)^2 + \left(-\frac{41}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{1970}}{10}$

$tg\left(\frac{41}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{17}\right) \simeq 67° = \vartheta$

$\rightarrow z = \frac{\sqrt{1970}}{10}\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$

Lo non e' preciso, lascio indicato ϑ

$\rightarrow z = \frac{\sqrt{1970}}{10}e^{i\vartheta}$

Esercizio 3

sabato 24 ottobre 2020 12:49

→ = le soluzioni che rendono nullo il polinomio

Esercizio 3. Trovare tutte le radici in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi:

$$x^2-4x+5, \quad x^2-2ix-5, \quad x^3+1, \quad 27x^3+125, \quad 32x^5-1$$

- $x^2-4x+5=0 \to x_{1,2} = \frac{+2\pm\sqrt{4-5}}{1} = \frac{+2\pm\sqrt{-1}}{1}$ $\Delta<0$ $\nexists x\in\mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{C} \to -1=i^2$ $\sqrt{i^2}=i$

$\to x_1 = 2+i$ ✓

$\to x_2 = 2-i$ ✓

Posso verificare:

$(x-(2+i))\cdot(x-(2-i)) = x^2+4x+5$

$(x-x_1)(x-x_2) = $ "

- $x^2-2ix-5=0 \to x_{1,2} = \frac{+i\pm\sqrt{-1+5}}{1} = i\pm 2$ ⟨ $x_1 = 2+i$ ✓, $x_2 = -2+i$ ✓

- $x^3+1=0 \to (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\to x=-1$ ✓

$\to x^2-x+1=0$ $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{i^2\cdot 3}}{2}$ ⟨ $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ✓, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ✓

$\nexists x$ in $\mathbb{R}$

N.B. →

↳ Se eseguo $x=\sqrt[3]{-1}$

considero una parte di soluzioni

(quelle reali, ma non le complesse, ottenibili dalla formula)

↳ questo perché non esistono soluzioni reali date dalla formula relativamente a quell'eq.)

→ non posso scrivere le radici direttamente (ho grado >2)

dunque $x^3=-1=e^{i\pi}$

Le soluzioni sono le radici terze di -1

$\to x_k = e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}i}$

$\to x_0 = e^{\frac{\pi}{3}i}$

$\to x_1 = e^{\frac{\pi}{3}i+\frac{2}{3}\pi i} = e^{\pi i} = -1$

$\to x_2 = e^{\frac{\pi}{3}i+\frac{4}{3}\pi i} = e^{i\frac{5}{3}\pi}$

- $27x^3+125=0 \to (3x+5)(9x^2-15x+25)$

ottenibile da $x=\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}$ ← $x=-\frac{5}{3}$

$9x^2-15x+25=0 \to x_{1,2} = \frac{+15\pm\sqrt{225-900}}{18} = \frac{15\pm\sqrt{-675}}{18}$

oppure trovo le radici terze di $x^3=-\frac{125}{27}$

$x_3 = -\frac{5}{3}$ $x_{1,2} = \frac{15\pm i\sqrt{675}}{18}$

• $32x^5 - 1 = 0$ —▷ Il polinomio si annulla ANCHE per $x = \frac{1}{2}$ $x \in \mathbb{R} = \sqrt[5]{+\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

Divido:

c'è una differenza!

$$
\begin{array}{llll|l}
3x^5 & . \quad . \quad . \quad . & & -1 & x-\frac{1}{2} \\
-3x^5 - \frac{3}{2}x^4 & & & -1 & 3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{16} \\
/ \ -\frac{3}{2}x^4 & & & -1 & \\
+\frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 & & & -1 & \\
/ \ -\frac{3}{4}x^3 & & & -1 & \\
+\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^2 & . & & -1 & \\
/ \ \frac{3}{8}x^2 & . & & -1 & \\
-\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x & & & -1 & \\
/ \ \frac{3}{16}x & & & -1 & \\
-\frac{3}{16}x + \frac{3}{32} & & & & \\
/ \ \frac{-29}{32} & & & &
\end{array}
$$

RESTO

$(\_) \cdot (\_) + \text{Resto} = 3x^5 - 1$

non riducibile

Le uniche soluzioni sono $x \in \mathbb{R}$ (quindi $x \in \mathbb{C}$):

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

UNICA SOLUZIONE

(no radici immaginarie)

$1 = e^{2\pi i}$ $x^5 = \frac{1}{32}$ modulo $|w| = \frac{1}{32}$ $w = \frac{1}{32} + 0i$ $|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{32}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{32}$

$$z_k = \sqrt[5]{|w|} \left[e^{i\frac{0+2k\pi}{5}} \right] \quad \text{per } k = 0, \dots, 4$$

$$z_k = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{5}k\pi i}$$

$k=0$ $z_0 = \frac{1}{2}$

$k=1$ $z_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{5}\pi i}$

$k=2$ $z_2 = \frac{1}{2} e^{\frac{4}{5}\pi i}$

$k=3$ $z_3 = \frac{1}{2} e^{\frac{6}{5}\pi i}$

$k=4$ $z_4 = \frac{1}{2} e^{\frac{8}{5}\pi i}$

Esercizio 4

sabato 24 ottobre 2020 14:07

Esercizio 4. Determinare un polinomio a coefficienti reali che abbia tra le sue radici 1, $1-3i$, $-2i$.

$w_1 \quad w_2 \quad w_3$

So che se un polinomio ha radici complesse w_1, w_2 e w_3 allora anche $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ e $\bar{w}_3$ lo sono.

Quindi $P(x) = (x-w_1)(x-\bar{w}_1)(x-w_2)(x-\bar{w}_2)(x-w_3)(x-\bar{w}_3)$ $\to$ infatti un polinomio è costituito da: $P(x) = (x-a)\cdot(x-b)\dots$ con $a, b\dots$ le sue soluzioni

N.B. $w_1 = \bar{w}_1$ (includo solo una soluzione) perché è sempre la stessa

$$P(x) = (x-1)(x-1+3i)(x-1-3i)(x+2i)(x-2i)$$
$$= (x-1)(x^2 - x - \cancel{3xi} - x + 1 + \cancel{3i} + \cancel{3ix} - \cancel{3i} - 9i^2)(x^2 - 4i^2)$$
$$= (x-1)(x^2 - 2x + 10)(x^2+4)$$
$$= (x^3 - 2x^2 + 10x - x^2 + 2x - 10)(x^2+4)$$
$$= (x^3 - 3x^2 + 12x - 10)(x^2+4)$$
$$= x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 10x^2 + 4x^3 - 12x^2 + 48x - 40$$
$$= x^5 - 3x^4 + 16x^3 - 22x^2 + 48x - 40$$

- 1 è radice (soluzione) di $p(x)$ $\qquad x-1 \overset{\text{DIVIDE}}{\mid} p(x) \iff p(x) = (x-1)\cdot \underbrace{q(x)}_{\text{Lo polinomio}}$
- $1-3i$ " di $p(x)$
- $p(x)$ ha coeff. reali

$\to \overline{1-3i} = 1+3i$ è radice di $p(x)$

$\to p(x) = (x-1)(x-(1-3i))(x-(1+3i))\cdot r(x)$ con $r(x)$ polinomio (pezzo mancante)

- $-2i$ è radice, p ha coeff. reali $\to \overline{-2i} = 2i$ è radice di $p(x)$

$$\to p(x) = (x-1)\underbrace{(x-(1-3i))(x-(1+3i))}_{x^2-2x+10}\underbrace{(x+2i)(x-2i)}_{x^2+4}\cdot \underline{t(x)}$$

Lo l'esercizio non chiede di trovare TUTTI i polinomi con quelle radici, quindi lo scelgo $=1$ (ho diversi polinomi se $t(x) = 2, 3, 4 \dots$ per le radici)

$$= x^5 - 3x^4 + 16x^3 - 22x^2 + 48x - 40$$

Esercizio 5

sabato 24 ottobre 2020 14:25

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ la funzione definita da $f(x) = (x^3, x^4)$.

(1) Stabilire se f è iniettiva e/o surgettiva.

(2) Determinare $f^{-1}(i,i)$.

1) Poiché $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$, $f(x) \subseteq \mathbb{C}$ allora ogni $x \in \mathbb{R}$ ha soluzione in $\mathbb{C}$

~~$f(x)$ è surgettiva~~

SURGETTIVA:

$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2 \quad \exists x \in \mathbb{C}$ t.c. $\underset{(x^3,x^4)}{\overset{}{f(x)}} = (a,b)$

Scegliamo $(0,1) \in \mathbb{C}^2$ supponiamo per assurdo $\exists x \in \mathbb{C}$ t.c. $(x^3, x^4) = (0,1)$

$\Rightarrow (x^3=0) \wedge (x^4=1) \Rightarrow x = 0 \wedge (x \neq 0)$ ↯ NO SURGETTIVA

INIETTIVA f INIETTIVA $\Leftrightarrow (\forall x,y \in \mathbb{C}$ t.c. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

Siano $x,y \in \mathbb{C}$, $x \neq y$ t.c. $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow (x^3, x^4) = (y^3, y^4) \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 \\ \underline{x^4 = y^4} \end{cases}$

$\to x^4 - y^4 = 0 \qquad (x^2-y^2)(\underbrace{x^2+y^2}_{\text{diff. di quadr. in } \mathbb{C}}) = 0 \qquad \cancel{(x-y)}(x+y)(x+iy)(x-iy) = 0$

ma $x \neq y$

Dato che un fattore sia zero, sicuramente non il primo

TRE CASI

1) $\begin{cases} x = -y \\ x^3 = y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ (-y)^3 = y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ -y^3 = y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad x = y$ ↯

2) $\begin{cases} x = -iy \\ x^3 = y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -iy \\ (-iy)^3 = y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = iy \\ -i^3 \cancel{y^3} = \cancel{y^3} \end{cases}$ $y \neq 0$ $\quad \begin{cases} x = iy \\ -i^3 = 1 \end{cases}$ ↯

3) $\begin{cases} x = iy \\ x^3 = y^3 \end{cases}$ in maniera simile ↯

[Se $x \neq y$ non posso avere $f(x) = f(y)$ allora iniettiva]

$f(x)$ iniettiva?

Ogni x costituisce una coppia diversa:

$x = 0 \to (0,0)$

Ogni x costituisce una coppia diversa:

$x=0 \to (0,0)$
$x=\frac{1}{2} \to (\frac{1}{8},\frac{1}{16})$
$x=1 \to (1,1)$
$x=-1 \to (-1,1)$
$x=2 \to (8,16)$

Non ho coppie uguali = INIETTIVA, ogni coppia ha un solo elemento del dominio associato (la sua controimmagine è unica)

$x=i \to (-i,+1)$
$x=i^2 \to (-1,+1)$
$x=-i^2 \to (+1,1)$

2) $f^{-1}(i,i)$:= CONTROIMMAGINE di (i,i)

$x^3=i$, $x^4=i$

$$f^{-1}(i,i)=\{x\in\mathbb{C},\ f(x)=(i,i)\}=\{x\in\mathbb{C},\ (x^3,x^4)=(i,i)\}$$

se $x^3=i=e^{i\frac{\pi}{2}}=x^4$

↳ non può essere uguale anche $i=x^4$

non ho soluzioni, dunque $f^{-1}(i,i)=\emptyset$

$z_k=e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}i}$ $k=0,1,2$

caso di 3

$x_0=e^{i\frac{\pi}{6}}$ $x_0^4=e^{i4\frac{\pi}{6}}=e^{\frac{2}{3}\pi i}\neq i$

$x_1=e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}i}=e^{i\frac{5}{6}\pi}$ $x_1^4=e^{i4\frac{5}{6}\pi}=e^{i\frac{10}{3}\pi}\neq i$

$x_2=e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}i}=e^{\frac{9}{6}\pi i}=e^{\frac{3}{2}\pi i}$ $x_1^4=e^{i\pi 6}=-1\neq i$

quando $x^3=i$ vedo che x^4 non lo è in nessun caso.

Esercizio 6

sabato 24 ottobre 2020 14:43

Esercizio 6. Disegnare nel piano i seguenti insiemi di numeri complessi:

(1) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;

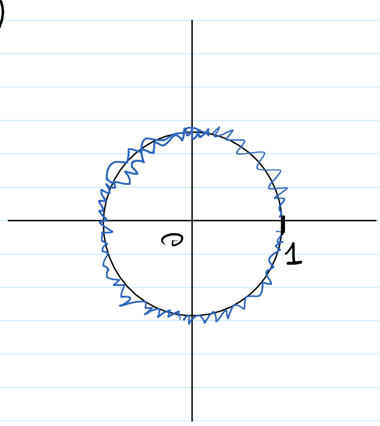
(2) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3 \text{ e } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$;

(3) $C = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 6\}$;

(4) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 0\}$;

(5) $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) = 0\}$.

1)

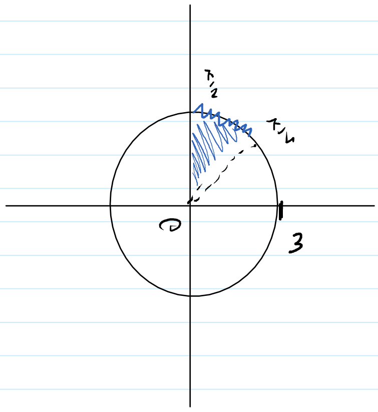


$|z| = 1 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ = raggio circonferenza

Dunque prendo tutti gli 8 che distano r dal centro (quindi tutta la circonferenza)

✓

2)

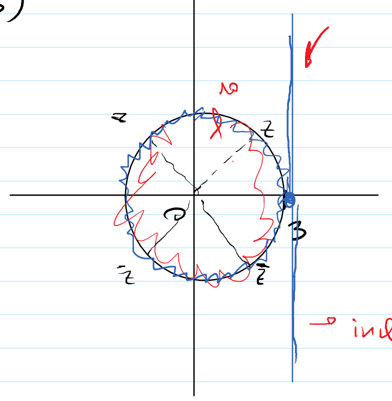


$|z| \leq 3$ = i punti di raggio (modulo) ≤ 3

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

✓

3)



$\to z = a + ib \quad \bar{z} + z = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z) = 6 \to \mathrm{Re}(z) = 3$

$z + \bar{z} = 6 \qquad |z| = |\bar{z}| = 3 \quad (3 + 3 = 6)$

$\sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{|x|^2 + (-y)^2}$

Poiché il raggio rimane invariato solo sui punti della circonferenza, l'insieme che devo considerare rimane limitato alla circonf

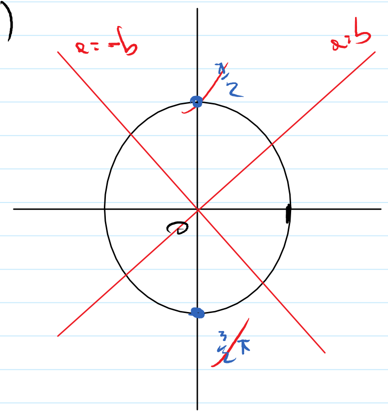
stanno sulla retta

→ includo solo la parte reale! (tutti i n. complessi con Re = 3)
↳ qualsiasi parte im.

$\to \Longleftrightarrow a^2 - b^2 \quad (a+b)(a-b)$

$Re \iff a^2 - b^2 \quad (a+b)(a-b)$

4)



$Re(z^2) = 0$

La parte reale è zero quando $\cos \underset{\uparrow}{2\vartheta}^{n \cdot \vartheta} = 0$

$2\vartheta = 0$ se $\vartheta = \left(\frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{3}{2}\pi\right) + 2k\pi$

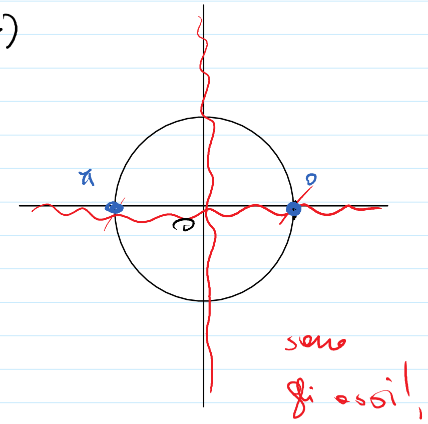
Quindi ho infinite soluzioni (2 x ogni giro)

scrivibile anche come $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$

$\parallel$

Su 2π ho 2 soluzioni

5)



$Im(z^2) = 0$

La parte immaginaria è zero quando $\sin 2\vartheta = 0$

ovvero $\vartheta = 0$ e π $\qquad (\vartheta = k\pi$ con $k \in \mathbb{N})$

2 soluzioni x giro

In 2π ho 2 soluzioni.

Esercizio 7

sabato 24 ottobre 2020 15:31

Esercizio 7. Dire se vero o falso, dove z, w denotano numeri complessi:

(1) $\mathrm{Re}(z) = 0 \implies \mathrm{Re}(z^3) = 0$;
(2) $\mathrm{Re}(z) = 0 \iff \mathrm{Re}(z^{-1}) = 0$;
(3) $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$.

1) $Re(z) \longrightarrow Re(z^3) = 0$ VERO, se $Re(z) = 0$, allora $\cos\vartheta = 0$

come $\cos 3\vartheta = 0$ $\overset{\shortparallel}{u}$

ottenibile per $\vartheta = 0$

2) $Re(z) = 0 \longrightarrow Re(z^{-1}) = 0$ VERO, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{0x + iy}{u}$

$= i\,\frac{y}{u}$

continuo ad avere $Re(z^{-1}) = 0$

3) $(zw)^{-1} = z^{-1} \cdot w^{-1} \longrightarrow \frac{1}{zw} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w}$

$\longrightarrow \frac{\overline{zw}}{|zw|} \overset{?}{=} \frac{\bar{z}}{|z|} \cdot \frac{\bar{w}}{|w|}$

presi $z = 1$ e $w = 1 + i$ $\quad z \cdot w = 1 + i \quad |zw| = \sqrt{2}$

$|z| = 1 \quad |w| = \sqrt{2}$

Allora $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ secondo le proprietà

$|zw| = |z| \cdot |w|$ infatti $\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2}$

Sempre l'uguaglianza è verificata $\longrightarrow$ Le proprietà delle potenze sono comunque soddisfatte (z e w sono sempre dei numeri)

Esercizio 8 (funzioni)

sabato 24 ottobre 2020 15:46

Esercizio 8. Siano A, B due insiemi e $f : A \to B$, $g : B \to C$ due funzioni. Provare che:

(1) se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva;

(2) se $g \circ f$ è surgettiva allora g è surgettiva.

Esibire un controesempio per mostrare che:

(a) $g \circ f$ iniettiva non implica g iniettiva;

(b) $g \circ f$ surgettiva non implica f surgettiva.

1) $g \circ f$ iniettiva $\to$ f INIETTIVA (TESI)

Siano $a \neq a'$, $a \in A$ e $a' \in A$

se $g \circ f$ iniettiva si ha che $\forall c \in C$, $\forall c' \in C$ $((g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a'))$

elementi distinti per elementi distinti

Se $g \circ f$ INIETTIVA allora significa che

$f(a) \neq f(a')$ ovvero f INIETTIVA

a) $g \circ f$ INIETTIVA $\not\Rightarrow$ g INIETTIVA

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ (B, C) non è iniettiva, $g(-1) = g(1) = 1$ ma $-1 \neq 1$

$x \to |x|$

$f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ (A, B) funzione inclusione (iniettiva)

$x \mapsto x$

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = |x| = x$

$x \in \mathbb{N}$

$\underline{g \circ f = Id_{\mathbb{N}} \text{ è INIETTIVA}}$ (anche se g non iniettiva)

2)

TESI g SURIETTIVA $\forall c \in C \; \exists b \in B : g(b) = c$

$g \circ f$ SURIETTIVA $\quad \forall c \in C \ \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$

Sia $\overset{\text{generico}}{c} \in C \underset{g \text{ SURIETTIVA}}{\Longrightarrow} \exists b \in B \underset{\text{TALE CHE}}{.} g(b) = c \underset{f \text{ SURIETTIVA}}{\Longrightarrow} \exists a \in A : f(a) = b$

$\exists a \in A : (g \circ f)(a) = c \Longrightarrow \exists b : g(b) = c$

b) $g \circ f$ SURGETTIVA $\Longrightarrow f$ SURGETTIVA

stesso controes. di a) $\qquad f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ non e' surgettiva $\quad -1 \notin \operatorname{Im} f$

$g \circ f = \operatorname{Id}_{\mathbb{N}}$ SURGETTIVA (e INIETTIVA)

Es TUT 1.8

giovedì 22 ottobre 2020 12:09

Esercizio 1.8. Determinare i seguenti insiemi e disegnarli.

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) = 2\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) = -1\},$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4\}, \qquad D = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \frac{\pi}{4}\},$$
$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}, \qquad F = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\},$$
$$G = \{z \in \mathbb{C} : 3 \leq |z| \leq 5\}, \qquad H = \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z)\Re e(z) > 0\}.$$

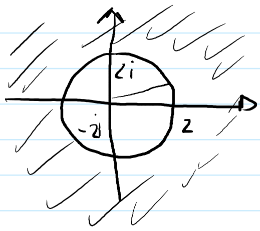
- $A = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) = 2 \}$

Ho solo la parte reale vincolato, la parte immaginaria varia.

$A = \{ 2 \pm ni \}$ dove $n \in \mathbb{R}$

- $E = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2 \}$

$|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = 2$

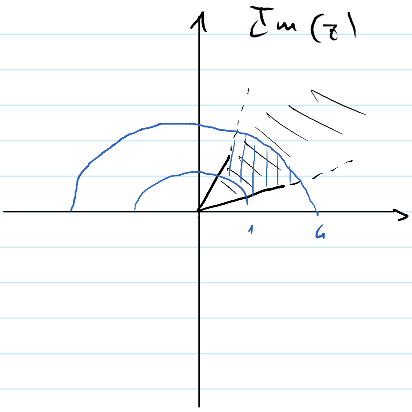


devo prendere gli elementi esterni alla circonf. con $C_0 = (0, 0)$ e raggio 2

- $F = \{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3} \}$

Cerco tutti i complessi con θ compreso fra $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$

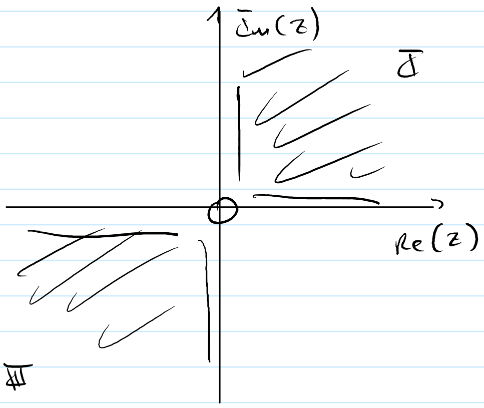
N.B. Non ho restrizioni di raggio (modulo) quindi estendo i raggi all'infinito (spicchio infinito)



Se avessi avuto $1 \leq |z| \leq 4$

ottengo una porzione di corona circolare

- $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid Im(z) \cdot Re(z) > 0 \}$



↳ Secondo $z = x + iy$

Prendo i numeri positivi, ovvero i numeri che hanno come $Im(z) \cdot Re(z)$ uguale segno. Quindi PRIMO e TERZO QUADRANTE.

$+ \cdot + > 0$ $\quad - \cdot - > 0$

N.B. Lo zero e gli assi non sono inclusi (segno un buco)

Es TUT - vari

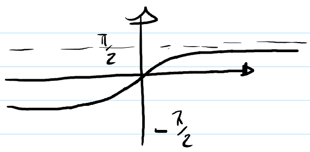
giovedì 5 novembre 2020   11:39

- $i^{427} = (a+ib)$?

$n = 427$ $|z| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1$

$\theta = \arctan(b/a) = \arctan\underbrace{(1/0)}_{\pi/2} = \infty$

graficamente:



oppure: $z = \underbrace{\cos\theta}_{0} + i\underbrace{\sin\theta}_{1}$ $\theta = \arccos(0)$ e $\theta = \arcsin(1)$ $\to \pi/2$

$\qquad\quad Re(z) \qquad Im(z)$

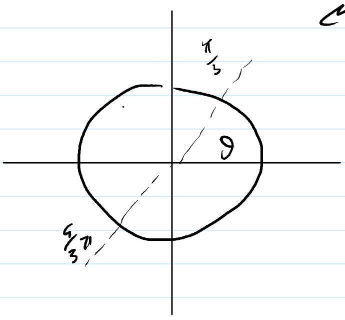
dunque $i^{427} = (1)^{427}\left(\cos\left(\frac{427\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{427\pi}{2}\right)\right)$

- Posso vedere che $427 \% 4 = 0 \to i^{427} = i^4 = +1$ (fare tante volte i^4 fa $+1$) $1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots = 1$

- $z = -1 - i\sqrt{3}$ $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

scrivi in forma trigonometrica $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\theta = \arctan(b/a) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan(\sqrt{3}) \to \frac{\pi}{3}$ no!



ho $Re < 0$ e $Im < 0$, dunque faccio riferimento al III quadrante

dunque $\theta = \frac{4}{3}\pi$

allora $z = 2\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$

(f. esp.: $z = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}$

- $(1-i)^4 + \frac{1}{2+i}$

$|z| = \sqrt{2}$ $n = 4$

$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = 7\frac{\pi}{4}$ (o $-\frac{\pi}{4}$)

$|z| = \sqrt{2}$ $\quad n = 4$

$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = 7\frac{\pi}{4}$ $\quad \left(0 \ -\frac{\pi}{4}\right)$

$(1-i)^4 = (\sqrt{2})^4 \left(\cos\left(-\frac{4}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right) \longrightarrow (1-i)^4 = 4(-1+0) = -4$

$\frac{1}{2+i} \longrightarrow \frac{1}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{2^2+i^3} = \frac{2-i}{4-1} = \frac{2-i}{3}$

equivale alla moltiplicazione sopra e sotto per il coniugato

e vado e sostituire in z

- Trova le soluzioni complesse: $\quad p(x) = x^2 - 4x + 5 \quad x \in \mathbb{C}$

$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4-5}}{1}$ in $\mathbb{R}$ non ho soluzioni

$+2 + (\pm i) \longrightarrow 2 \pm i$

$+2 - (\pm i) \longrightarrow 2 \mp i$

) sono le stesse: $2 \pm i$

d

$\sqrt{-1} = i$ ma $i^2 = -1$

$(-i)^2 = -1$

$x_1 = 2 + i$

$x_2 = 2 - i$

- Trova x per $p(x) = x^2 - 3ix + 6$

$x_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{-8+6}}{2}$ lo scrivo in $\mathbb{C}$ $\sqrt{-3}$

- Trova $p(x)$ con coefficienti $a, b, \ldots \in \mathbb{R}$ t.c. ha soluzioni

$2, \ \underline{5-i}, \ 7$

$p(x) = x^{n=?}$

Per il teorema fond. dell'algebra se ho $\bullet$ (numero complesso) nelle soluzioni, allora anche il suo coniugato fa parte delle soluzioni

quindi $n = 4$

$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$p(x) = (x-2)(x-(5-i))(x-(5+i))(x-7)$

il motivo di ciò è per ottenere coefficienti reali (moltiplicando un n complesso per il suo coniugato)

• $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ $\quad f(x) = (x^3, x^4)$ [Es 5]

a) f iniettiva e/o surgettiva?

$f(x): \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$

INIETTIVITA' $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{C} \quad , x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow$ per iniettiva $\quad f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1 \to f(x_1) = (x_1^3, x_1^4)$

$x_2 \to f(x_2) = (x_2^3, x_2^4)$

abbiamo imposto che $x_1 \neq x_2$, ma allora osservo che $f(x_1) \neq f(x_2)$ (le coppie sono differenti!)

similmente dimostro la SURGETTIVITA'

b) $f^{-1}(i,i)$ CONTROIMMAGINE $= ?$

$f(x) = (\underset{t_1}{x^3}, \underset{t_2}{x^4}) \to f^{-1}(\underset{t_1}{i}, \underset{t_2}{i}) = (\cdot, \cdot) = (\sqrt[3]{i}, \sqrt[4]{i})$

$\begin{cases} t_1 = x^3 \\ t_2 = x^4 \end{cases}$ $\quad \to x = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{i}$
$\quad \to x = \sqrt[4]{t_2} = \sqrt[4]{i}$

ovvero osservo a quali valori del dominio corrispondono

(verifico facendo x^3 e x^4 su $\sqrt[3]{i}$ e $\sqrt[4]{i}$ $= (i,i)$)

Es TUT

giovedì 12 novembre 2020 12:16

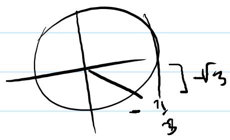
• Scrivi in f. algebrica $(1-\sqrt{3}i)^3 - (1+i)^6$, con $z_1 = 1-\sqrt{3}i$ e $z_2 = 1+i$

a) $z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$z_1 = (2)^3 \left(\cos\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) = (2)^3 (-1+0) = -2^3$

$\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Lo prendo sono nel IV quadr. (vedi eq.)



b) $z_2 = (\sqrt{2})^6 \left(\cos\left(6\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^3 (0 + (-1)i) = -2^3 i$

$\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

e infine $\underbrace{-2^3 + 2^3 i}_{(-2^3(-i))}$ (somma)

n°3)