Logica — 3-6-2019

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le risposte corrette:

(a) Sia P la formula proposizionale $(A \to (\neg A \to B)) \to \neg A$

- ☐ P è soddisfacibile.
- ☐ $\neg P$ è soddisfacibile.
- ☐ P è vera se e solo se B è vera.
- ☐ Il valore di verità di P non dipende dal valore di verità di B.

(b) Sia $L = \{R, f, c\}$, con R simbolo relazionale binario, f simbolo funzionale binario, c simbolo di costante. Sia

$$\varphi : \exists c(\forall y R(f(x,y), c) \wedge (R(c,x) \to f(c,c) = c))$$

- ☐ φ è una L-formula.
- ☐ $(\mathbb{N}, \leq, +, 1)$ è una L-struttura.
- ☐ Non esiste alcun L-enunciato soddisfacibile.
- ☐ Non esiste alcun L-enunciato valido.

2. Si considerino le formule proposizionali

$$P : \neg A, \qquad Q : (A \to B) \wedge (A \to \neg B)$$

Si determini se:

(a) $P \models Q$

(b) $Q \models P$

(c) $P \equiv Q$

3. Sia $L = \{D, M, S, A\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove D, M, S sono simboli relazionali unari e A è simbolo relazionale binario. Si consideri la seguente interpretazione di L:

- $D(x)$: x è un docente;
- $M(x)$: x è mediocre;
- $S(x)$: x è uno studente;
- $A(x,y)$: x apprezza y.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio L:

1. I docenti mediocri apprezzano gli studenti mediocri.
2. Gli unici studenti apprezzati dai docenti mediocri sono quelli mediocri.
3. I docenti mediocri non apprezzano alcuno studente.

4. Sia $L = \{P, Q\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove P è simbolo relazionare unario e Q è simbolo relazionale binario. Si considerino gli enunciati

$$\varphi : \forall x \forall y (Q(x, x) \wedge P(y)), \qquad \psi : \forall x \forall y (Q(x, y) \wedge P(y))$$

Si definisca una L-struttura

$$\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}})$$

tale che $\mathcal{A}$ soddisfi esattamente uno tra φ e ψ.

Svolgimento

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le risposte corrette:

(a) Sia P la formula proposizionale $(A \to (\neg A \to B)) \to \neg A$

- ■ P è soddisfacibile.
- ■ $\neg P$ è soddisfacibile.
- □ P è vera se e solo se B è vera.
- ■ Il valore di verità di P non dipende dal valore di verità di B.

(b) Sia $L = \{R, f, c\}$, con R simbolo relazionale binario, f simbolo funzionale binario, c simbolo di costante. Sia

$$\varphi : \exists c(\forall y R(f(x,y),c) \wedge (R(c,x) \to f(c,c) = c))$$

- □ φ è una L-formula.
- ■ $(\mathbb{N}, \leq, +, 1)$ è una L-struttura.
- □ Non esiste alcun L-enunciato soddisfacibile.
- □ Non esiste alcun L-enunciato valido.

2. (a) Sia i un'interpretazione tale che $i(P) = 1$. Allora $i(A) = 0$, quindi $i(A \to B) = i(A \to \neg B) = 1$; pertanto $i(Q) = 1$.

Quindi $P \models Q$.

(b) Sia i un'interpretazione tale che $i(Q) = 1$. Allora $i(A \to B) = i(A \to \neg B) = 1$. Se fosse $i(A) = 1$, allora dal fatto che $i(A \to B) = 1$ segue che $i(B) = 1$, e dal fatto che $i(A \to \neg B) = 1$ segue che $i(\neg B) = 1$, cioè che $i(B) = 0$. Quindi non può essere che $i(A) = 1$, cioè $i(\neg A) = 1$.

Pertanto $Q \models P$.

(c) Poiché $P \models Q$ e $Q \models P$, si ha $P \equiv Q$.

3.
1. $\forall x \forall y(D(x) \wedge M(x) \wedge S(y) \wedge M(y) \to A(x,y))$
2. $\forall x(D(x) \wedge M(x) \to \forall y(S(y) \wedge A(x,y) \to M(y)))$
3. $\forall x(D(x) \wedge M(x) \to \neg \exists y(S(y) \wedge A(x,y)))$

4. Interpretate nella struttura $\mathcal{A}$:

- φ asserisce che $Q^{\mathcal{A}}$ contiene tutte le coppie (a,a), qualunque sia $a \in A$, e $P^{\mathcal{A}}$ contiene tutti gli elementi di A
- ψ asserisce che $Q^{\mathcal{A}}$ contiene tutte le coppie di elementi di A, e $P^{\mathcal{A}}$ contiene tutti gli elementi di A

Pertanto ogni struttura che soddisfa ψ, soddisfa anche φ; una struttura come richiesta deve quindi soddisfare φ ma non ψ. Un esempio è:

- $A = \{0, 1\}$
- $P^{\mathcal{A}} = A$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{(0, 0), (1, 1)\}$