ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

FOGLIO DI ESERCIZI 4

Esercizio 1. Sia $A = \{0,1,2,3\}$ e sia $R \subseteq A \times A$ la seguente relazione:
$$R = \{(0,0),(0,1),(0,3),(1,1),(1,0),(2,3),(3,3)\}.$$
Stabilire se R è una relazione d'equivalenza oppure no.

Esercizio 2. Sia dato l'insieme $A = \{1,2,3\}$. Esibire un esempio di una relazione R su A tale che:
(1) R è riflessiva e transitiva, ma non simmetrica;
(2) R è simmetrica e transitiva, ma non riflessiva

Esercizio 3. Determinare se le seguenti sono relazioni d'equivalenza nell'insieme A:
(1) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \Longleftrightarrow x < y$;
(2) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \Longleftrightarrow x \leq y$;
(3) $A = \mathbb{R}^2$, $(x,y) \sim (u,v) \Longleftrightarrow xu > 0$ oppure $xu = 0$;
(4) $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \Longleftrightarrow$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x = y^n$.

Esercizio 4. In $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ poniamo $z \sim w \iff \dfrac{z}{w} \in \{+1,-1\}$.
(1) Provare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
(2) Determinare gli elementi della classe $[-i]$.

Esercizio 5. In $\mathbb{C}$ poniamo $z \sim w \Longleftrightarrow z^4 = w^4$.
(1) Provare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
(2) Determinare la classe di 3.
(3) Determinare se l'assegnazione $\varphi : \mathbb{C}/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi([x]) = x^2$ definisce una funzione.
(4) Determinare se l'assegnazione $\psi : \mathbb{C}/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\psi([x]) = x^8$ definisce una funzione.

Esercizio 6. Sia data la relazione d'equivalenza in $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \sim (u,v) \Longleftrightarrow x = u$.
(1) Determinare le classi $[(0,0)]$, $[(-1,-2)]$.
(2) Stabilire se $f : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f([x,y]) = 2x^2$ è una funzione.
(3) Stabilire se $g : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g([x,y]) = x^2 - y^2$ è una funzione.
(4) Trovare una funzione bigettiva $\varphi : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio 7. Sia data in $\mathbb{Z}$ la relazione d'equivalenza $x \sim y \Longleftrightarrow |x| = |y|$. Provare che il quoziente $\mathbb{Z}/\sim$ è in corrispondenza biunivoca[1] con $\mathbb{N}$.

---

[1] Due insiemi A e B si dicono in corrispondenza biunivoca se esiste una funzione bigettiva $f : A \to B$. In altre parole A e B sono in corrispondenza biunivoca se e soltanto se sono equipotenti.

Esercizio 8. Sia data in $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ la relazione d'equivalenza
$$(x,y) \sim (a,b) \Longleftrightarrow x = a \text{ e } y - b \text{ è pari.}$$
Provare che il quoziente $A/\sim$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N} \times \{0,1\}$. E con $\mathbb{N}$?