Logica — 2-7-2019

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le risposte corrette:

(a) Sia P la formula proposizionale $(A \to (\neg A \to A)) \to \neg A$

- ☐ P è soddisfacibile.
- ☐ $\neg P$ è soddisfacibile.
- ☐ P è vera se e solo se A è vera.
- ☐ Il valore di verità di P non dipende dal valore di verità di A.

(b) Sia $\mathcal{L} = \{R, f, c\}$, con R simbolo relazionale binario, f simbolo funzionale binario, c simbolo di costante. Sia

$$\varphi : \exists c(\forall y R(f(t, y), c) \wedge (R(c) \to f(c, c) = c))$$

- ☐ φ è una $\mathcal{L}$-formula.
- ☐ $(\mathbb{R}, \leq, \cdot, \sqrt{\pi})$ è una $\mathcal{L}$-struttura.
- ☐ Ogni $\mathcal{L}$-enunciato soddisfacibile ha come conseguenza logica ogni $\mathcal{L}$-enunciato valido.
- ☐ Ogni $\mathcal{L}$-enunciato valido è logicamente equivalente a ogni $\mathcal{L}$-enunciato soddisfacibile.

2. Si considerino le formule proposizionali

$$P : \neg A \wedge (A \to B), \qquad Q : A \to \neg B$$

Si determini se:

(a) $P \models Q$

(b) $Q \models P$

(c) $P \equiv Q$

3. Sia $\mathcal{L} = \{D, M, S, A, C\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove D, M, S sono simboli relazionali unari e A, C sono simboli relazionali binari. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $D(x)$: x è un docente;
- $M(x)$: x è mediocre;
- $S(x)$: x è uno studente;

- $A(x, y)$: x apprezza y;
- $C(x, y)$: X è collega di y.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. I docenti che apprezzano qualche studente mediocre sono mediocri.
2. I docenti che hanno solo colleghi mediocri sono mediocri.
3. I colleghi di un docente che apprezza solo i mediocri sono mediocri.

4. Sia $\mathcal{L} = \{f, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f è simbolo funzionale unario e g è simbolo funzionale binario. Si considerino gli enunciati

$$\varphi : \forall x \exists y \; f(x, x) = g(y), \qquad \psi : \exists x \forall y \; f(x, y) = g(y)$$

Si definisca una $\mathcal{L}$-struttura

$$\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$$

tale che $\mathcal{A}$ soddisfi esattamente uno tra φ e ψ.

Svolgimento

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le risposte corrette:

(a) Sia P la formula proposizionale $(A \to (\neg A \to A)) \to \neg A$

- ■ P è soddisfacibile.
- ■ $\neg P$ è soddisfacibile.
- □ P è vera se e solo se A è vera.
- □ Il valore di verità di P non dipende dal valore di verità di A.

(b) Sia $\mathcal{L} = \{R, f, c\}$, con R simbolo relazionale binario, f simbolo funzionale binario, c simbolo di costante. Sia

$$\varphi : \exists c(\forall y R(f(t,y),c) \wedge (R(c) \to f(c,c) = c))$$

- □ φ è una $\mathcal{L}$-formula.
- ■ $(\mathbb{R}, \leq, \cdot, \sqrt{\pi})$ è una $\mathcal{L}$-struttura.
- ■ Ogni $\mathcal{L}$-enunciato soddisfacibile ha come conseguenza logica ogni $\mathcal{L}$ enunciato valido.
- □ Ogni $\mathcal{L}$-enunciato valido è logicamente equivalente a ogni $\mathcal{L}$-enunciato soddisfacibile.

2. (a) Sia i un'interpretazione tale che $i(P) = 1$; in particolare, $i(\neg A) = 1$, cioè $i(A) = 0$. Pertanto $i(Q) = 1$.
Quindi $P \models Q$.

(b) Sia i un interpretazione tale che $i(A) = i(B) = 1$. Allora $i(Q) = 1, i(P) = 0$.
Quindi $Q \not\models P$.

(c) Poiché $Q \not\models P$, si ha $P \not\equiv Q$.

3.
1. $\forall x(D(x) \wedge \exists y(S(y) \wedge M(y) \wedge A(x,y)) \to M(x))$
2. $\forall x(D(x) \wedge \forall y(C(x,y) \to M(y)) \to M(x))$
3. $\forall x(\exists y(C(x,y) \wedge D(y) \wedge \forall z(A(y,z) \to M(z))) \to M(x))$

4. Si osservi che c'è un'imprecisione nel testo: f è simbolo funzionale binario, g è simbolo funzionale unario.

Interpretati in una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$:

- L'enunciato φ asserisce che la restrizione della funzione $f^{\mathcal{A}}$ alla diagonale $\{(a,a) \mid a \in |\mathcal{A}|\}$ ha immagine contenuta nell'immagine della funzione $g^{\mathcal{A}}$.

- L'enunciato ψ asserisce che per qualche $a \in |\mathcal{A}|$ la funzione $v \mapsto f^{\mathcal{A}}(a, v)$ coincide con la funzione $g^{\mathcal{A}}$.

Sia $A = \{0, 1\}$. si definiscano:

- $f^{\mathcal{A}}(0, 0) = f^{\mathcal{A}}(1, 1) = 0$,
  $f^{\mathcal{A}}(0, 1) = f^{\mathcal{A}}(1, 0) = 1$
- $g^{\mathcal{A}}(0) = g^{\mathcal{A}}(1) = 0$

Allora l'immagine della restrizione di $f^{\mathcal{A}}$ a $\{(0, 0), (1, 1)\}$ e l'immagine di $g^{\mathcal{A}}$ coincidono, perché sono entrambe uguali a $\{0\}$.

Inoltre né la funzione $v \mapsto f^{\mathcal{A}}(0, v)$, né la funzione $v \mapsto f^{\mathcal{A}}(1, v)$ coincidono con la funzione $g^{\mathcal{A}}$, perché

$$f^{\mathcal{A}}(0, 1) \neq g^{\mathcal{A}}(1) \quad \text{e} \quad f^{\mathcal{A}}(1, 0) \neq g^{\mathcal{A}}(0)$$

Quindi

$$\mathcal{A} \models \varphi, \qquad \mathcal{A} \not\models \psi$$