Logica — 10-1-2019

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Provare che

$$\neg R \to Q \models P \land \neg Q \to R \lor \neg P.$$

2. Stabilire se l'insieme di formule

$$\{\neg(A \to \neg B), \neg(\neg A \to \neg C), C \to \neg B \lor A\}$$

è soddisfacibile.

3. Sia $\mathcal{L} = \{P, S, M\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove P, S sono simboli relazionali unari, M è simbolo relazionale binario. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $P(x)$: x è un professore;
- $S(x)$: x è uno studente;
- $M(x, y)$: x morde y.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. C'è un professore che non è morso da alcuno studente.
2. I professori mordono gli studenti che li mordono.
3. Gli studenti che mordono un professore sono morsi da almeno due professori.

4. Sia $\mathcal{L} = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f è un simbolo funzionale unario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$, dove:

- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi;
- $f^{\mathcal{A}}$ è l'operazione di opposto, cioè $f^{\mathcal{A}}(u) = -u$ per ogni $u \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di successore, cioè $f^{\mathcal{B}}(u) = u+1$, per ogni $u \in \mathbb{Z}$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Svolgimento

1. Sia i un'interpretazione tale che $i(\neg R \to Q) = 1$, al fine di provare che $i(P \wedge \neg Q \to R \vee \neg P) = 1$.

Poiché $i(\neg R \to Q) = 1$, si hanno due possibilità:

1) $i(\neg R) = 0$.
Quindi $i(R) = 1$. Segue $i(R \vee \neg P) = 1$ e quindi $i(P \wedge \neg Q \to R \vee \neg P) = 1$.

2) $i(Q) = 1$.
Allora $i(\neg Q) = 0$, da cui $i(P \wedge \neg Q) = 0$ e quindi anche in questo caso $i(P \wedge \neg Q \to R \vee \neg P) = 1$.

2. Si supponga che esista un'interpretazione i che soddisfa l'insieme dato.

In particolare, $i(\neg(A \to \neg B)) = 1$, quindi $i(A \to \neg B) = 0$, da cui in particolare $i(A) = 1$.

Inoltre $i(\neg(\neg A \to \neg C)) = 1$, cioè $i(\neg A \to \neg C) = 0$, da cui in particolare $i(\neg A) = 1$ e quindi $i(A) = 0$. Ma questo contraddice il valore $i(A) = 1$ trovato prima.

Un'interpretazione che soddisfa l'insieme dato non può pertanto esistere, e tale insieme è insoddisfacibile.

3.
1. $\exists x(P(x) \wedge \neg \exists y(S(y) \wedge M(y, x)))$
2. $\forall x(P(x) \to \forall y(S(y) \wedge M(y, x) \to M(x, y)))$
3. $\forall x(S(x) \wedge \exists y(P(y) \wedge M(x, y)) \to \exists z \exists w(P(z) \wedge P(w) \wedge z \neq w \wedge M(z, x) \wedge M(w, x)))$

4. L'opposto dell'opposto di un numero intero è il numero di partenza, mentre il successore del successore di un numero intero non è il numero di partenza:

$$\forall x f(f(x)) = x$$