Esercizio 1

lunedì 19 ottobre 2020 13:58

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti relazioni sono funzioni tra gli insiemi specificati:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+3}$;
(2) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(a,b) = a \cdot b$;
(3) $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $h(p/q) = p - q$;
(4) $k : \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $k(X) = X \cap \mathbb{N}$;
(5) $\alpha : \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ data da $\alpha(1) = a$, $\alpha(2) = b$;
(6) $\gamma : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ data da $\gamma(n) = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è un divisore di } n\}$;
(7) $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta(x) = \sqrt{x}$;
(8) $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\delta(x) = \sqrt{x}$.

NON VIENE MANDATO DA ALCUNA PARTE

1) Falso. Non ho y per $x = -3$ (denominatore assume valore zero) ✓

2) Vero. Vi sono numeri $\in \mathbb{Z}$ risultato di una moltiplicazione fra altri due numeri. ✓

3) Falso, non vale $\forall x \in \mathbb{Q}$ ✓ es. per $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ $h(\frac{4}{2}) = 4-2 = 2 \neq h(\frac{2}{1}) = 2-1 = 1$

Sono diverse, condiz. non rispettata (stessa x, y diverse)

4) Vero. $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, quindi l'intersezione è contenuta in $\mathbb{Z}$ ✓

5) Falso. Una x (3) non ha y. ✓

6) Vero. ✓

7) Falso. Non ho y reali per $x < 0$ $(\sqrt{-x})$ ✓

8) Vero. Sono sicuro che $x > 0$, quindi $\forall x \; \exists ! \, y \in \mathbb{R}$ ✓

Esercizio 2

lunedì 19 ottobre 2020 14:14

cerco le x (le immagini sono $f(x)$)

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $f(x) = x^2 + 1$. Determinare le seguenti controimmagini:

$$f^{-1}(0), \quad f^{-1}(1), \quad f^{-1}(2), \quad f^{-1}(3).$$

"IMMAGINE : y
DELL'IMMAGINE" $) = x$

ovvero le x

$= \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2+1 = 0\}$

valore dominio ($\mathbb{Z}$)

immagine

1) $f^{-1}(0) \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow f^{-1}(0) = \emptyset$ ✓ $\nexists x$ t.c. $x^2+1=0 \quad x \in \mathbb{Z}$

2) $f^{-1}(1) \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow f^{-1}(1) = \{0\}$ ✓ solo $x=0$ che $x^2+1=1 \rightarrow 0+1=1$

3) $f^{-1}(2) \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow f^{-1}(2) = \{1, -1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 1\}$

4) $f^{-1}(3) \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow f^{-1}(3) = \emptyset$ ✓

Esercizio 3

martedì 20 ottobre 2020 11:46

Esercizio 3. Definire un'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diversa dall'identità e tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $f(3n) = 3n$.

$f(3n) = 3n$ è identità, devo costruire un'applicazione equivalente

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$3\mathbb{N} = \{3n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 6, 9 \dots\}$

$f|_{3\mathbb{N}} = Id_{3\mathbb{N}}$

$A = \{3n+1 : n \in \mathbb{N}\}$

$B = \{3n+2 : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow$ Sono una PARTIZIONE DI $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = (3\mathbb{N}) \cup (A) \cup (B)$

L'unione è $\mathbb{N}$ e gli insiemi sono disgiunti

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in 3\mathbb{N} \Rightarrow f(3n) = 3n \\ 0 & \text{se } x \in A \cup B \quad (\text{scelto}) \end{cases}$$

$f \neq Id_{\mathbb{N}}$ perché $\underset{\substack{\downarrow \\ 3n+2 \\ \text{perché } 2 \in B}}{f(2) = 0} \neq \underset{\substack{\downarrow \\ 3n}}{Id(2)}$

Esercizio 4

martedì 20 ottobre 2020 12:04

Esercizio 4. Calcolare $f(5)$ dove $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è l'applicazione definita da:

$$f(0) = 1, \; f(n) = n \cdot f(n-1) \; \forall n > 0.$$

Secondo la definizione data: $f(n) = n \cdot f(n-1) \quad \forall n > 0$

$n = 5$ è > 0 allora $f(5) = 5 \cdot f(4)$

ma $f(4) = 4 \cdot f(3)$ quindi $f(5) = 5 \cdot 4 \cdot f(3) \dots$

La funzione non rappresenta altro che l'operatore fattoriale:

$$f(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{120} \in \mathbb{N}$$

Esercizio 5

martedì 20 ottobre 2020 12:09

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $f(x,y) = x - y$ e siano
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}.$$
Determinare $f(A)$ e $f(B)$.

- $f(A)$ significa che presa una coppia $(x,y) \to x = y$

dunque $f(A) = f(x,y) = x - y$ dove $x = y$ allora $\to f(x,y) = x - y = \{0\}$

- $f(B)$ significa che presa una coppia $(x,y) \to x > y$

dunque $f(B) = f(x,y) = x - y$ dove $x > y$ allora

$$f(x,y) = x - y = \begin{cases} \text{valore positivo} & \text{se } x \geq 0 \to \text{se } x = 0 \to y < 0 : \quad x - (-y) = x + y \\ \text{valore negativo} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Correzione

$$f(A) = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x,y) \in A \quad z = f(x,y)\} = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x,y) \in A \quad z = x - y\}$$
$$= \{z \in \mathbb{R} \mid \exists \underbrace{(x,x)}_{1° \text{el.} = 2° \text{el.}} \in A \quad z = x - x\} = \{z \in \mathbb{R} \mid z = 0\} = \{0\}$$

$$f(B) = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > y, \ z = x - y\}$$

- $\mathbb{R}_+ \subseteq f(B)$ $\quad z \in \mathbb{R}_+ \quad z = z - 0 = f(z,0) \quad (z,0) \in B$ perché $z > 0$
- $0 \in f(B)$? $\quad 0 = x - y$ con $x > y$ NO $\quad \underbrace{x - y}_{= z} > 0 \to z > 0 \to f(B) = \mathbb{R}_+$

Sia $z \in f(B)$, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in B \to z = x - y$, $x > y \to z > 0 \to f(B) = \mathbb{R}_+$

(no $\mathbb{R}_-$, non posso scriverli come differenza fra due numeri : es. $(3,-1) \to z = 4 > 0$

Esercizio 6

martedì 20 ottobre 2020 12:08

Esercizio 6. Sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 - y^2$ e sia $M = \{(\sqrt{5}, \sqrt{5}), (7,7)\}$. Determinare $h^{-1}(h(M))$.

$y = h(x,y)$ elementi codominio

(soddisfano)

CONTROIMMAGINE : valori di M che hanno immagine in $\mathbb{R}$ secondo la funzione $h(x,y) = x^2 - y^2$

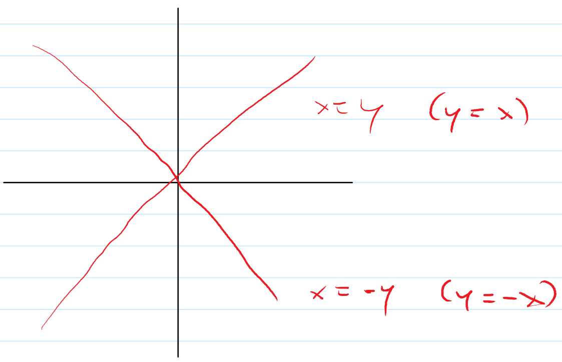
IMMAGINE $h(M) = \{ \underbrace{(5-5), (49-49)}_{h(\sqrt{5},\sqrt{5}),\ h(7,7)} \} = \{0\} = \{ z \in \mathbb{R} \mid \exists (x,y) \in M \ \ \underbrace{h(x,y)}_{x^2-y^2} = z \}$

$$h^{-1}(h(M)) = h^{-1}(\overbrace{\{0\}}^{\text{IMMAGINE}}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$$

$$= \{(\sqrt{5},\sqrt{5}), (7,7)\} = M$$

$\to x^2 = y^2 \iff (x = y) \vee (x = -y)$ soddisfano l'equazione

La controimmagine $h^{-1}(0) \subseteq M$ e inoltre e' costituita da tutto M.



Esercizio 7

mercoledì 21 ottobre 2020 08:26

Esercizio 7. Siano $f : A \to B$ una funzione e $X, Y \subseteq A$ due sottoinsiemi. Provare che:

(1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

(2) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Esibire un esempio in cui $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

$f: A \to B = \{ \forall a \in A \ \exists! b \in B . \ y = f(x) \}$

1) $f(X \cup Y) = \{ \forall a \in (X \cup Y) \subseteq A \ \exists! b \in B . \ y = f(X \cup Y) \}$

$f(X) = \{ \forall a \in X \subseteq A \ \exists! b \in B . \ y = f(X) \}$

$f(Y) = \{ \forall a \in Y \subseteq A \ \exists! b \in B . \ y = f(Y) \}$

Nel caso $f(X \cup Y)$ sto individuando tutte le ordinate degli elementi contenuti in X e Y.

Nel caso $f(X) \cup f(Y)$, individuo prima le ordinate degli elementi in ciascun insieme, poi le unisco in un unico insieme che quindi contiene tutte le ordinate degli elementi contenuti in X e Y.

Dunque $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ $\square$

"$\subseteq$" $z \in f(X \cup Y) \Rightarrow \exists x \in X \cup Y \quad f(x) = z$

$\Rightarrow (x \in X) \vee (x \in Y)$

se $x \in X$ $\quad f(x) = z \Rightarrow z \in f(X)$

se $x \in Y$ $\quad f(x) = z \Rightarrow z \in f(Y)$

$\Big) \ z \in f(X) \cup f(Y)$

"$\supseteq$" $z \in f(X) \cup f(Y) \Leftrightarrow (z \in f(X)) \vee (z \in f(Y))$ TESI

se $z \in f(X) \Rightarrow \exists x \in X \quad f(x) = z \quad x \in X \cup Y \quad z \in f(X \cup Y)$

se $z \in f(Y) \Rightarrow \exists y \in Y \quad f(y) = z \quad y \in X \cup Y \quad z \in f(X \cup Y)$

$\Big) \vee$ $\square$

2) $f(X \cap Y) = \{ \forall a \in (X \cap Y) \subseteq A \ \exists! b \in B . \ y = f(X \cap Y) \}$

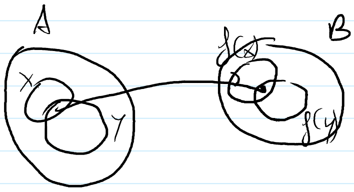
$f(X) = \{ \forall a \in X \subseteq A \ \exists! b \in B . \ y = f(X) \}$

$f(Y) = \{ \forall a \in Y \subseteq A \ \exists! b \in B . \ y = f(Y) \}$

Nel caso $f(X \cap Y)$ sto eseguendo l'intersezione degli elementi del dominio e dell'insieme degli elementi comuni a X e Y sto individuando le ordinate $y = f(X \cap Y)$

Nel caso $f(X) \cap f(Y)$ sto individuando le ordinate di $f(X)$ e $f(Y)$ e poi ne sto facendo l'intersezione, ovvero raggruppo le ordinate comuni (di ugual valore).

Dunque con $f(X \cap Y)$ sto individuando le ordinate di solo alcuni elementi del dominio, ordinate che sono contenute nell'insieme più grande di tutte le ordinate comuni $f(X) \cap f(Y)$.



Dunque vi sono dei casi in cui

$f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$

ad esempio quando non vi sono elementi uguali nel dominio fra X e Y ($X \cap Y = \emptyset$), ma ho comunque delle ordinate (STESSE) per i singoli elementi (diversi) contenuti in X e Y.

"$\subseteq$" $z \in f(X \cap Y) \iff \exists x \in X \cap Y$ t.c. $f(x) = z$

$\rightarrow$ $x \in X$ $f(x) = z$ $\rightarrow z \in f(X)$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$)) $z \in f(X) \cap f(Y)$

$x \in Y$ $f(x) = z$ $\rightarrow z \in f(Y)$

"$\supseteq$" mi blocco, perché appunto non è vera l'eguaglianza. Mi basta un esempio.

$f(X) \cap f(Y) \not\subseteq f(X \cap Y)$

$z \in f(X) \cap f(Y) \rightarrow \exists x \in X, \exists y \in Y$ t.c. $f(x) = z = f(y)$

prendiamo $X \cap Y = \emptyset$ $\quad f(X \cap Y) = f(\emptyset) = \emptyset$

$X = \{1,2\}$ $\quad Y = \{3,4\}$ $\quad A = X \cup Y$ $\quad f: A \rightarrow \{a,b,c\}$

$1 \mapsto a$
$2 \mapsto b$
$3 \mapsto b$
$4 \mapsto c$

$f(X) = \{a,b\}$
$f(Y) = \{b,c\}$

STESSO ORDINATA

$f(X) \cap f(Y) = \{b\}$

$f(X \cap Y) = \emptyset$

insiemi di elementi diversi

→ elementi codominio associati al dominio

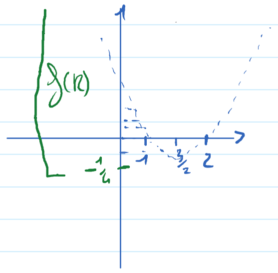
Esercizio 8. Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o surgettive e determinarne l'immagine:

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$;
(2) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=5x$;
(3) $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=5x$;
(4) $f:\mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $f(X)=\mathbb{N}\setminus X:=\{x\in\mathbb{N}:\ x\notin X\}$;
(5) $f:\mathscr{P}(X)^2\to\mathscr{P}(X)$, $f(A,B)=A\cup B$, dove X è un insieme.
(6) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^2$, $f(x)=(2x,x-1)$.

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ $\qquad$ $f(x)$ esiste $\forall x$ $\qquad$ IMMAGINE: tutto $\mathbb{R}$

$(x-1)(x-2)=0$
$x=1,\ x=2$

- NO INIETTIVA (per $f(x)=0$ ho $x=1$ e $x=2$ soluzioni) $1\neq 2$ ma $f(1)=0=f(2)$
- NO SURGETTIVA: l'asse y non è raggiunto completamente



parabola di vertice $x=\frac32$

PUNTO PIÙ BASSO DELLA PARABOLA
$f(\frac32)=(\frac32-1)(\frac32-2)=\frac12(-\frac12)=-\frac14$

$f(\mathbb{R})=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geq -\frac14\}$

2) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=5x$ $\qquad$ $f(x)$ esiste $\forall x$ $\qquad$ IMMAGINE: multipli di 5

$10=5x\to x=2$

- INIETTIVA
- NO SURGETTIVA (non tutti gli interi sono raggiunti, come $f(x)=1,2$ ecc...)

• INIETTIVA? sì se $x,y\in\mathbb{Z}$ t.c. $f(x)=f(y)\to 5x=5y\to \frac55 x=\frac55 y\to x=y$

• SURGETTIVA? f surgettiva $\iff \forall y\in\mathbb{Z}\ \exists x\in\mathbb{Z}$ t.c. $y=f(x)=5x$

Per ogni n intero ho un n intero pari al quintuplo del primo ✓

ma ogni numero intero non è quintuplo di un altro!

NO $2\notin f(\mathbb{Z})$ INFATTI $\nexists x\in\mathbb{Z}$ t.c. $2=5\cdot x$ (dovrebbe valere $\forall x\in\mathbb{Z}$, nel dominio e codominio)

$f(\mathbb{Z})=5\mathbb{Z}=\{5k\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{$MULTIPLI DI 5$\}$

3) $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=5x$ $\qquad$ $f(x)$ esiste $\forall x$

$25=5\cdot x\to x=5$
ma anche $25=5\cdot\frac{10}{2}$
STESSI NUMERI

- ~~NO~~ INIETTIVA (~~più valori di x raggiungono stessi f(x)~~)
- SURGETTIVA (i numeri precedenti sono raggiunti: $1=5\cdot\frac15$, $2=5\cdot\frac{4}{10}$ ecc...)

• INIETTIVA? sì, stessa dim. di 2)

• SURGETTIVA? sì, dato $y\in\mathbb{Q}$ $\exists ?\ x\in\mathbb{Q}$ t.c. $\overset{=5x}{f(x)}=y$?

scegliamo $x=\frac{y}{5}\in\mathbb{Q}$ allora $f(x)=5\cdot\frac{y}{5}=y$ $\qquad$ valido per ogni $n\in\mathbb{Q}$

4) $f:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f(X)=\mathbb{N}\setminus X=\{x\in\mathbb{N}:x\notin X\}$

$X\to\mathbb{N}\setminus X$ $\qquad$ $\mathbb{N}\setminus X$

Se $x\notin X$ ma $x\in\mathbb{N}$ significa che l'insieme X non contiene i numeri naturali, dunque

$f(X)$ non può dare soluzioni perché riferite a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ di cui X non fa parte (e nemmeno i suoi elementi)

$f(X)$ non può dare soluzioni perché riferita a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ di cui X non fa parte (e nemmeno i suoi elementi)

Quindi $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \underset{\text{IMMAGINE}}{\emptyset}$ NO INIETTIVA NO SURIETTIVO

INIETTIVA $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $X \neq Y$ TESI $f(x) \neq f(y)$

$X \neq Y \Rightarrow (\exists x \in X, x \notin Y) \vee (\exists y \in Y, y \in X)$

SUPPONIAMO $\exists x \in X, x \notin Y$ $f(x) = \mathbb{N} \setminus X$ $x \notin X$ $x \in \mathbb{N} \setminus X = f(x)$

$f(y) = \mathbb{N} \setminus Y$ $x \notin Y$ $x \in \mathbb{N} \setminus Y = f(y)$

Se $\exists y \in Y, y \notin X$ si procede ANALOGAMENTE

SURGETTIVA Sia $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ($\Leftrightarrow X \subseteq \mathbb{N}$ sottoinsieme) TESI $\exists y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ t.c. $f(y) = X$

$f(y) = \mathbb{N} \setminus Y$

Scelgo $Y = \mathbb{N} \setminus X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

allora $f(y) = f(\mathbb{N} \setminus X) = \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus X) = X$ $\square$

f BIGETTIVA

5) $f: \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$, $f(A, B) = A \cup B$, dove X è un insieme

?

Ovvero associo i quadrati alle loro radici quadrate. A contiene i quadrati degli elementi di B.

Per X insieme generico: - IMMAGINE: $A \cup B$ $\forall x \in X$

- ~~INIETTIVA~~ (il quadrato ha una sola radice)

- SURGETTIVA, tutti gli elementi $\in X$ generico vengono raggiunti

f NON INIETTIVA

Scelgo $A \neq B$ $(A, B) \neq (B, A)$ in $\mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(x)$

MA $f(A, B) = A \cup B = B \cup A = f(B, A)$

f SURIETTIVA sì dato $A \in \mathcal{P}(x)$ scelgo $(A, \emptyset) \in \mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(x)$

$f(A, \emptyset) = A \cup \emptyset = A$

$\operatorname{Im} f = \mathcal{P}(x)$

6) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $f(x) = (2x, x-1)$. $\forall x$ $f(x)$ esiste

$x = 0$ $f(1) = (2, -1)$ • INIETTIVA ogni coppia di $f(x)$ è raggiunta da un solo x

6) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $f(x) = (2x, x-1)$. $\forall x$ $f(x)$ esiste

$x=0$	$f(x) = (0,-1)$
$x=1$	$f(x) = (2,0)$
$x=-1$	$f(x) = (-2,-2)$
$x=2$	$f(x) = (4,1)$

- INIETTIVA, ogni coppia di $f(x)$ è raggiunta da un solo x
- NO SURIETTIVA, non tutte le coppie $\in \mathbb{Z}^2$ vengono raggiunte.
- IMMAGINE: $f(x) = (2x, x-1)$

Esercizio 9

mercoledì 21 ottobre 2020 09:26

Esercizio 9. Costruire delle funzioni che soddisfino le richieste seguenti:

(1) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ iniettiva e non surgettiva;
(2) $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ surgettiva e non iniettiva;
(3) $r:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ surgettiva e tale che $r(x,x)=0\ \forall x\in\mathbb{Z}$;
(4) $h:\mathbb{N}\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$ iniettiva e tale che $\emptyset,\mathbb{N}\in h(\mathbb{N})$;
(5) $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ bigettiva.

1) $f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=3x$ dove $x\in\mathbb{Z}$ (vengono raggiunti solo i multipli di 3 (>0 e <0)) ✓

$f(x)=5x$

2) $g: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g(x)=x\cdot y$ dove $x,y\in\mathbb{N}$ (uno stesso prodotto può avere più di due fattori diversi)

NON SI LAVORA SU COPPIE! ↳ giusto se $g(x,y)$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & \text{se } x \text{ pari}\\ \frac{x-1}{2} & \text{se } x \text{ dispari}\end{cases}$$

$g(x)$	0	0	1	1	2	2	...
x	0 (pari)	1	2	3	4	5	

$g(x)$ non è INIETTIVA $g(0)=0=g(1)$

$g(x)$ è SURIETTIVA, dato $y\in\mathbb{N}$ (el. codominio), $\exists ?\ x\in\mathbb{N}$ t.c. $y=g(x)$

Scelgo come $x = 2y$ (pari) $\in\mathbb{N}$ $\quad g(x)=\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=y$ (ogni y raggiunto)

va bene anche: $f(x)=\begin{cases} f(x)=0 & \text{se } x=0\\ f(x)=x-1 & \text{se } x>0\end{cases}$

3) $r: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $r(x,x)=0\ \forall x\in\mathbb{Z}$, $r(x,y)=x-y$ dove $y\in\mathbb{Z}$

↳ tutti i valori di $\mathbb{Z}$ raggiunti
↳ se metto $r(x,x)=x-x=0$ ✓ } non basta

$$r(x,y):\begin{cases}0 & \text{se } x=y\\ x & \text{se } y=0\\ 1 & \text{se } y\neq 0,\ x\neq y\end{cases}$$

r surgettiva: dato $a\in\mathbb{Z}$ scelgo $(a,0)\in\mathbb{Z}^2$, $r(a,0)=a$

4) $h: \mathbb{N}\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$. $\emptyset,\mathbb{N}\in h(\mathbb{N})$, $f(x)=x+y$ dove $y=x+1\in\mathbb{N}$ se $x>0$
$y\in\mathbb{N}: y=x\in\mathbb{N}$ se $x=0$

↳ solo un modo per ottenere la somma

Definiamo $h(n)=\begin{cases}\emptyset & \text{se } n=0\\ \mathbb{N} & \text{se } n=1\\ \{n\} & \text{se } n\geq 2\end{cases}$

↳ singoletto

Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$

- se $n=0$ e $m \neq 0$ allora $h(n) = \emptyset \neq h(m)$ ✓
- se $n=1$ e $m \neq 1$ allora $h(n) = 1 \neq h(m)$ $\begin{cases} \emptyset \\ \text{singoletto} \end{cases}$ ✓
- se $n, m \geq 2$, $n \neq m$ allora $h(n) = \{n\} \underset{n \neq m}{\neq} \{m\} = h(m)$

5) $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ BIGETTIVA, $f(x) = x \cdot y$ dove $y \in \mathbb{Z} : y < x$

(vista a lezione: "equipotenza" $\left(\begin{array}{l} \text{PARI} \to \text{POSITIVI} \\ \text{DISPARI} \to \text{NEGATIVI} \end{array} \right)$)

Esercizio 10

mercoledì 21 ottobre 2020 09:40

Esercizio 10. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni date da $f(x) = x - 2$ e $g(x) = 1 + x^2$.

(1) Come sono definite le funzioni $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(2) Esistono numeri reali x per cui $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

(3) Le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono uguali?

1) $f \circ g = f(g(x)) = f(1+x^2) = 1+x^2-2 = x^2-1$

$g \circ f = g(f(x)) = g(x-2) = 1+(x-2)^2 = x^2+2-4x+1 = x^2-4x+3$

) esistono $\forall x$

2) Sì, ad esempio $x = 1$; $\to 1-1=0$; $\to 1-4+3=0$

3) Poiché sto associando elementi appartenenti a $\mathbb{R}$ da dominio e da codominio, ritrovo gli stessi elementi in entrambe le funzioni, dunque in questo caso $f \circ g = g \circ f$

$$\mathbb{R} \xrightarrow[g]{f} \mathbb{R} \xrightarrow[f]{g} \mathbb{R}$$

ottengo sempre elementi di $\mathbb{R}$ (ed esistono $\forall x$, quindi nessuna restrizione)

Esercizio 11

mercoledì 21 ottobre 2020 09:47

Esercizio 11. Determinare un insieme A e un'applicazione (funzione) $f : A \to A$ tale che $f \circ f = f$, ma $f \neq \mathrm{Id}_A$.

Dato $x \in A$ es. Id_A : $f(x) = x \to f \circ f = f(\overset{x}{\widehat{f(x)}}) = f(x) = x$

$f(x) = x^2/x^2 = 1$

$f(f(x)) = \dfrac{(x^2/x^2)^2}{(x^2/x^2)^2} = 1$) $= f(x)$ $\underline{\underline{\text{NO}}}$ è sempre IDENTITÀ!

sintatticamente ~~diversa da~~ $f(x)$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x| \quad f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ perché $f(-1) = 1 \neq -1 = \mathrm{Id}(-1)$
  $(f \circ f)(x) = f(|x|) = ||x|| = |x| = f(x)$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2 \quad f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ perché $f(-1) = 2 \neq -1 = \mathrm{Id}(-1)$
  $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (funzione costante)

Esercizio 12

mercoledì 21 ottobre 2020 09:57

Esercizio 12. Siano $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ data da $f(n) = |n|$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ data da $g(x) = -x$.

(1) Provare che f e g non sono invertibili (cioè non bigettive) e verificare che $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, ma $g \circ f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

(2) Determinare un'applicazione $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ diversa da g e tale che $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

(3) Determinare una funzione $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ diversa da f e tale che $t \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

1) • f non e' INIETTIVA perche' numeri opposti si associano a stessi numeri naturali

Es: $f(1) = |1| = 1 = |-1| = f(-1)$

Quindi NO BIGETTIVA

• g non e' SURGETTIVA perche' associa x solo ai numeri $\leq 0 \in \mathbb{Z}$, quindi NO BIGETTIVA

Es: $g(1) = -1$, $g(0) = 0$, $g(2) = -2 \dots$

• $f \circ g = f(g(x)) = f(-x) = |-x| = x \in \mathbb{N}$ e' lo stesso numero naturale di partenza $= \mathrm{Id}_{\mathbb{N}} = f\, \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

• $g \circ f = g(f(x)) = g(|x|) = -|x| = -x \notin \mathbb{N} \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

2) Det. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \neq g$ t.c. $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

Detta $h(x) = x$ $\quad f \circ h = f(h(x)) = f(x) = |x| = x \underset{\in \mathbb{Z}}{\in \mathbb{N}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

3) Det $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \neq f$ t.c. $t \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

Detta $t(x) = -x$ $\quad t \circ g = t(g(x)) = t(-x) = -(-x) = +x \underset{\in \mathbb{Z}}{\in \mathbb{N}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

$\boxed{\text{N.B.}}$ Vale solo per $x > 0$! Ma $\mathbb{Z}$ contiene anche $x < 0$

Allora:

Detta $t(x) = \sqrt{x^2}$ $\quad t \circ g = t(g(x)) = t(-x) = \sqrt{(-x)^2} = +x \underset{\in \mathbb{Z}}{\in \mathbb{N}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

vale sia per $x \geq 0$ che per $x < 0$

Es 1 TUT

giovedì 29 ottobre 2020 11:48

Esercizio 1.9. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione. Siano $A, B \subset X$ e $C, D \subset Y$. Provare o confutare le seguenti affermazioni:

1. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
5. $\complement_X(f^{-1}(C)) = f^{-1}(\complement_Y(C))$.
6. $\complement_Y(f(A)) = \complement_Y(f(A))$.

1) $\underbrace{f^{-1}(C \cup D)}_{1} \overset{?}{=} \underbrace{f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)}_{2}$

1 $f^{-1}(C \cup D) = \{x \in X \mid f(x) \in (C \cup D)\}$

$f(x) \in C$

o

$f(x) \in D$

2 $\left.\begin{array}{l} f^{-1}(C) = \{x \in X \mid f(x) \in C\} \\ f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\} \end{array}\right) \cup$

significa prendere o l'uno o l'altro

ovvero gli elementi $f(x) \in C$ o $f(x) \in D$

che è uguale a 1

2) $\underbrace{f^{-1}(C \cap D)}_{1} \overset{?}{=} \underbrace{f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)}_{2}$

3) $f(A \cup B) \overset{?}{=} f(A) \cup f(B)$

Es 2 TUT

giovedì 29 ottobre 2020 11:59

Esercizio 1.10. Siano

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x,y)=\frac{|x|+|y|}{2},$$
$$g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad g(x,y)=\frac{|x|-|y|}{2},$$
$$h\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad h(x,y)=[x]-[y], \qquad ([x],[y] \text{ sono le parti intere di } x \text{ e } y).$$

Dire se f, g e h sono iniettive e trovare le immagini $f(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $h(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

→ n° intero che il valore reale assume (pt. int di 1,2 è 1)
Lo più piccolo e più vicino (per difetto)

1) f non è INIETTIVA, infatti sostituendo $(2,2)$ e $(-2,2)$ ho uno stesso valore di y.

$$\left.\begin{array}{l} x,y = \mathbb{R}^+ \\ x,y = \mathbb{R}^- \end{array}\right) \Rightarrow f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$$

intervallo

$$f(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+) = [0,+\infty)$$

i moduli infatti mi rendono i valori negativi positivi. Dunque ho solo elementi $\in \mathbb{R}$ positivi.

3) $h: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x,y) = [x] - [y]$

No INIETTIVA se $x=1$ e $y=1$ $\to h(x,y)=0$

se $x=-1$ e $y=-1$ $\to h(x,y)=0$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{6x+3}{2x}$ Per $x=0$ non è definita (dunque non vale $\forall x$)

Se $f ; \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sarebbe una funzione ($x=0$ non $\in$ al dominio, quindi f è definita per tutti gli elementi del dominio)

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f \neq Id$

$f(3n) = 3n$

$f = ?$

So che $n = 0, 1, 2 \ldots$

$f(0) = 0$

$f(3 \cdot \overset{n}{1}) = 3$

$f(3 \cdot \overset{n}{2}) = 6$

Bisogna riscriverla con l'idea di scrivere un'applicazione che prende tanti numeri e fra questi i multipli di 3.

Id sarebbe $n \to n$

$0 \mapsto 0$

$1 \mapsto 1$

$2 \mapsto 2$

$\to f(n) = n$

Posso considerare quindi $f(n)$ definendola per parti

$$f(n) : \begin{cases} n & \text{se } n \% 3 = 0 \\ 0 & \text{se } n \% 3 != 0 \end{cases} \neq f(n) = n$$

alcuni valori sono infatti diversi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

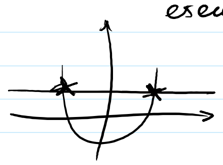
$f(x) = x^2 - 3x + 2$

iniett? surriett?

è una parabola con concavità verso l'alto, non rispetta l'iniettività

no suriettiva (non tutto $\mathbb{R}$ è coperto)

esempio



(se fosse $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ tutto il codominio è coperto)

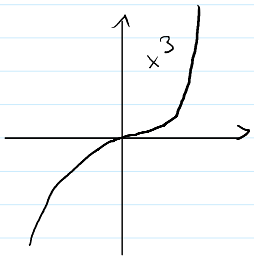
Y Vertice $= -\frac{3}{2}$

$Im(f)$: $[\, Y(\text{Vertice}), +\infty]$ $\to$ sono i valori di ordinata

CODOMINIO

- Immagine di $f(x) = x^3$, è tutto $\mathbb{R}$ e corrisponde col codominio

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$



Funzioni composte

$f : A \to B$

$g : B \to C$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ l'operazione di composizione mi permette di passare direttamente da A a C : $g \circ f$

$g \circ f = g(f(x))$ "FUNZIONE DI FUNZIONE"

$f \circ g = f(g(x))$

Se g e f sono iniettive e/o suriettive, le proprietà vengono prese da $g \circ f$ (o $f \circ g$)

Es $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x - 2$

$g(x) = 1 + x^2$

- $f \circ g = ?$, $g \circ f = ?$
- esistono degli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

al posto di x

$f \circ g = f(g(x)) = g(x) - 2 = (1 + x^2) - 2 = x^2 - 1$

$g \circ f = g(f(x)) = 1 + (x-2)^2$

Ora osservo se esistono x che soddisfano la condizione (costruisco un'equazione)

$\cancel{x^2} - 1 = \cancel{x^2} - 4x + 5 \to 4x = 6 \to x = \frac{3}{2}$

valore per cui c'è uguaglianza

- $f \circ g$ e $g \circ f$ sono uguali? No, sono due funzioni diverse, • l'uguaglianza vale per una certa x, non per tutte (no $\forall x$)
- $f \circ g$ è iniettiva? No, è una parabola e per x opposte ho stessi valori di y.

• N.B. Se $f : A \to B$

$g : B \to C$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $\underbrace{A \to C}_{g \circ f}$

può non valere $f \circ g$, in base a come sono definite le funzioni definite le funzioni

$$f \circ g : \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\not\ f \circ g"'] & C \arrow[r, "?"] & A \end{tikzcd}$$

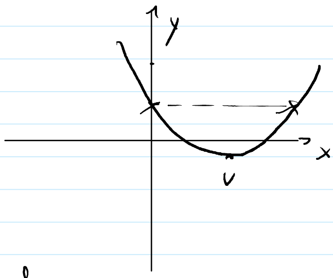
non ho una f diretta che va da C ad A

non posso definirla

n° 8] Stabilire se le funzioni sono iniettive, suriettive e det. l'immagine.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ parabola di vertice $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



NO INIETTIVA: per certe y ho più di una x

NO SURIETTIVA: il codominio è $\mathbb{R}$, ovvero tutti i valori sull'asse y.
Ma i valori sotto $-\frac{1}{4}$ non li prendo.

$Im(f) = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ ovvero i valori che assume la f

- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ iniettiva perché per ogni x ho una sola y (retta)

$f(x) = 5x$ NO SURIETTIVA, perché prese delle x non riesco a trovare tutti gli elementi del codominio (tutti gli interi)

$f(0) = 0 \;,\; f(1) = 5$

1, 2, 3, 4 non li ho presi, potrei prenderli se x fosse una frazione (dominio $\mathbb{Q}$)

- $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ INIETTIVA

$f(x) = 5x$ SURIETTIVA: posso associare in x una frazione e posso descrivere ogni elemento di $\mathbb{Q}$

$x = 1 \qquad f(1) = 5$

$x = \frac{1}{5} \qquad f\left(\frac{1}{5}\right) = 5$

N.B. Scrivere $x = \frac{3}{3}$ e $x = 3$ è lo stesso cosa, anche se una è una frazione (per non essere iniettiva le x devono essere numeri diversi)

- $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$f(x) = \underbrace{\mathbb{N} \setminus X} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin X\}$ $\to$ X è sottoinsieme di $\mathbb{N}$, posso sceglierlo arbitrariamente

allora INIETTIVA
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Non esiste un altro insieme X che permette} \\ \text{di descrivere la differenza } \mathbb{N} \setminus X \\ \text{es. con } X = \{1,2,3,4\} \quad \mathbb{N} \setminus X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1,2,3,4\} \\ \text{posso prendere solo } X = \{1,2,3,4\} \text{ per ottenere} \end{array} \right.$

es. posso scegliere $X_1 = \{a,b,c,d\}$ $\quad a,b,c,d \in N$

allora $f(X_1) = N \setminus \{a,b,c,d\}$

NON ESISTE $X_2 \neq X_1 = \{d,e,f\}$

$f(X_2) = N \setminus \{d,e,f\} = f(X_1)$ infatti $\neq f(X_1)$

- ma anche togliendo qualche elemento da N ottengo un insieme (elemento $\in P(N)$) che possiede tutti gli $n \in N$ meno quei quattro sopra. N.B. $P(N) = \{N, \emptyset, \{\ldots\}, \{\ldots\}\ldots\}$
- $N \setminus \emptyset = N$
- cambiando l'insieme di partenza giungo sempre a un elemento di $P(N)$; SURIETTIVA

"Preso ogni volta un X diverso copro gli elementi del codominio?"

$X = \emptyset \xrightarrow{\text{ottengo}} N \in P(N)$

$X = N \rightarrow \emptyset \in P(N)$

- $f : \underbrace{P(X)^2}_{P(X) \times P(X)} \rightarrow P(X)$

$f(A,B) = A \cup B$

INIETTIVA? Preso $\begin{cases} A_1 = \{a,b,c,d\} \in P(X) \\ B_1 = \{e,f,g,h\} \in P(X) \end{cases}$ (A e B elementi)

$\neq$ $\begin{cases} A_2 = \{a_2, b_2, c_2, d_2\} \\ B_2 = \{e_2, f_2, g_2, h_2\} \end{cases}$

coppie diverse

$f(A_1,B_1) \neq f(A_2,B_2)$

ma $\begin{cases} A_1 = \{1,2\} \\ B_1 = \{3,4\} \end{cases} \Rightarrow \cup = \{1,2,3,4\}$

$\begin{cases} A_2 = \{1\} \\ B_2 = \{2,3,4\} \end{cases} \Rightarrow \cup = \{1,2,3,4\}$

$f(A_1,B_1) = f(A_2,B_2)$

NON è INIETTIVA

SURIETTIVA: presi qualunque A e B raggiungo tutti gli elementi di $P(X)$?

fornisco esempi

$P(X) = \{\emptyset, X, \{\ldots\}, \{\ldots\}\}$

lo raggiungo per $A = B = \emptyset$

si con varie combinazioni

tramite l'unione posso raggiungere ogni elemento del codominio (SURIETTIVA) n° 3] $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Costruisce una funzione bigettiva

$\alpha(x) = x$ andrebbe bene solo per $\mathbb{Z}^+$

$x \in \mathbb{N}$

$= -x$ posso costruirla per punti, associando x e $-x$

- $\alpha(x) = x \cdot (-1)^x$ $\to$ no non prendo i negativi

- $\alpha(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ PARI} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ DISPARI} \end{cases}$