

ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

FOGLIO DI ESERCIZI 3

Esercizio 1. Scrivere in forma algebrica, cioè $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, i seguenti numeri complessi:

$$i^{427}, (1 - \sqrt{3}i)^9 - (1 + i)^6, \frac{1}{i(\sqrt{2} - i)}, (1 - i)^3 + \frac{1}{3 + i}.$$

Esercizio 2. Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

$$1 - i, -1 - i\sqrt{3}, \frac{1 + i}{1 - i}, 7i, \frac{1}{1 + i} + \frac{1}{-1 + i}.$$

Esercizio 3. Trovare tutte le radici in \mathbb{C} dei seguenti polinomi:

$$x^2 - 4x + 5, \quad x^2 - 2ix - 5, \quad x^3 + 1, \quad 27x^3 + 125, \quad 32x^5 - 1$$

Esercizio 4. Determinare un polinomio a coefficienti reali che abbia tra le sue radici $1, 1 - 3i, -2i$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ la funzione definita da $f(x) = (x^3, x^4)$.

- (1) Stabilire se f è iniettiva e/o surgettiva.
- (2) Determinare $f^{-1}(i, i)$.

Esercizio 6. Disegnare nel piano i seguenti insiemi di numeri complessi:

- (1) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;
- (2) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3 \text{ e } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$;
- (3) $C = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 6\}$;
- (4) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = 0\}$;
- (5) $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) = 0\}$.

Esercizio 7. Dire se vero o falso, dove z, w denotano numeri complessi:

- (1) $\operatorname{Re}(z) = 0 \implies \operatorname{Re}(z^3) = 0$;
- (2) $\operatorname{Re}(z) = 0 \iff \operatorname{Re}(z^{-1}) = 0$;
- (3) $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$.

Esercizio 8. Siano A, B due insiemi e $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ due funzioni. Provare che:

- (1) se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva;
- (2) se $g \circ f$ è surgettiva allora g è surgettiva.

Esibire un controesempio per mostrare che:

- (a) $g \circ f$ iniettiva non implica g iniettiva;
- (b) $g \circ f$ surgettiva non implica f surgettiva.