Es - informazione #1 / 30-04

1)

$x_1, \dots, x_n$ misure altezza μ ; x_i indipendenti
media μ
dev. std $\sigma = 1$ cm   la media $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i$ è una stima di μ

STIMATORE

Usando Chebyshev calcolo il n° di misure n necessarie per determinare μ con precisione 0,5 cm e confidenza 90%

è la probabilità di ottenere una stima che supera la soglia

Chebyshev: $\forall \epsilon > 0, \; P\{|X-\mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{(n)\epsilon^2}$

$\rightarrow \; P\{|X-\mu| > 0,5\} \leq \frac{1}{n \cdot 0,25}$

$\leq 4/n$

$\mu_n = \frac{1}{n}\sum^{n} x_i$

$\hookrightarrow P\{|\mu_N - \mu| \geq 0,5\} \leq \frac{1}{0,25} = 4 \cdot \frac{\sigma^2}{n}$

STIMATORE

$Var(\mu_N) = \frac{\sigma^2}{n}$

Se confidenza = probabilità

$\underbrace{1 - 0,90}_{}$ $\geq 4/n \rightarrow n \geq \frac{4}{0,1} = 40$ necessarie

si vuole una precisione $\leq 0,5$ (1-p sopra)

$P = 10\%$ quindi $n = 40\sigma^2$

2) 27 palline uguali, una di peso più leggero
Quale strategia x individuarla con 3 pesate?

Raggruppo per 9

→ 1ª pesata equilibrio, 1 ... 18 escluse
rimangono 19 ... 27

↳ raggruppo per 3
→ 2ª pesata equilibrio, 19 ... 24 escluse
rimangono 25, 26, 27

↳
→ 3ª pesata equilibrio 25 26
allora 27 L
→ 3ª pesata non equilibrio, 27 esclusa, quella che si solleva è L

→ 2ª pesata non equi, 25 ... 27 escluse
rimane 19 20 21 o 22 23 24 (il gruppo sollevato)

↳
→ 3ª pesata equilibrio : 19 20
21
→ 3ª non equi o 19 o 20

→ 1ª pesata non equi, rimane il gruppo sollevato
1 ... 9
↳ raggruppo per 3
→ 2ª pesata in equi, rimane 7 8 9
→ 3ª riconosco quella L

→ 2ª pesata non equi, rimane il gruppo leggero
→ 3ª pesata fra due palline e riconosco la leggera

3) $P(bb) = 0{,}57$ $P(ll) = 0{,}06$ $P(altro) = 0{,}01$
$P(nn) = 0{,}21$ $P(cc) = 0{,}03$
$P(gg) = 0{,}03$ $P(zz) = 0{,}03$

Calcola info shannon x ogni stato. Entropia di shannon e grezza

- $info(bb) = \log_2 \frac{1}{0{,}57}$ [0,81] • $info(ll) = \log_2 \frac{1}{0{,}06}$ [4,06]
- $info(nn) = \log_2 \frac{1}{0{,}21}$ [2,25] • $info(cc) = \log_2 \frac{1}{0{,}03}$ [5,05]
- $info(gg) = \log_2 \frac{1}{0{,}03}$ [3,47] • $info(zz) = info(cc)$ [5,05]
- $info(altro) = \log \frac{1}{0{,}01}$ [6,64]
- $H(X) = \sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$

$$= 0{,}57 \cdot 0{,}81 + 0{,}21 \cdot 2{,}25 + 0{,}03 \cdot 3{,}47 + 0{,}06 \cdot 4{,}06$$
$$+ 0{,}03 \cdot 5{,}05 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 6{,}64 = 1{,}86$$
1,73

- $H_0 = \log_2 |V_x| = \log_2 (7) = 2{,}81$ <

↳ quantità di casi x_i

infatti ci sono valori più probabili ("so di più") (abbassano l'entropia)

4) $H(X)=4$, $H(Y)=3$ e $H(X,Y)=5$
Calcola H condizionate

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$
$$= H(Y) + H(X|Y)$$

$$H(Y|X) = 5-4 = 1$$
$$H(X|Y) = 5-3 = 2$$

5) X,Y indip. Dimostra che $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$

Se X,Y indip $\rightarrow$ $H(X|Y) = H(X)$

$$\underset{\parallel}{H(X,Y)} = H(Y) + H(X|Y) = \underline{H(Y) + H(X)}$$

$$= -\sum_i \sum_j p(x_i,y_j) \log(x_i,y_j) \overset{\text{indep.}}{=} \sum_i \sum_j p(x_i)\, p(y_j) \left(\log p(x_i) + \log p(y_j)\right)$$

$$= -\sum_i \left(\sum_j\right) p(x_i) \left\{ \sum_j \overset{=1}{p(y_j)} \lg p(x_i) + \underbrace{\sum_j p(y_j) \lg(y_j)}_{H(Y)} \right\}$$

$$= -\underbrace{\sum_i p(x_i) \lg(x_i)}_{=H(X)} + \sum_i \overset{=1}{\left(p(x_i)\right)} H_Y = H(X) + H(Y)$$

6) Perché non è possibile dati X, Y, $H(X)=3$, $H(Y)=4$ e $H(X,Y)=8$?
E se $H(X,Y)=7$?

In generale $H(X,Y) = H(X) + \overset{\text{se } X,Y \text{ indip.} \; = H(Y)}{H(Y|X)}$

$\rightarrow$ $H(Y|X) = 8-3 = 5$

$\rightarrow$ $H(X|Y) = 8-4 = 4$

Per la disuguaglianza fondamentale $H(X|Y) \leq H(X)$

perché la conoscenza di un evento accaduto riduce l'aspettazione

ma si nota che $\quad H(X|Y) \leq H(X) \rightarrow 4 \not\leq 3$

$H(Y|X) \leq H(Y) \rightarrow 5 \not\leq 4$

- se $H(X,Y) = 7$

  $\rightarrow H(X|Y) = 7-4 = 3 \quad$ e $\quad 3 \leq 3$ ✓

  $\rightarrow H(Y|X) = 7-3 = 4 \quad$ e $\quad 4 \leq 4$ ✓