Soluzioni - W2

E2.1 Si supponga che il 60% degli studenti che si presentano ad un esame abbiano preparazione sufficiente. L'esame viene superato dal 95% degli sutdenti preparati e dal 10% degli studenti impreparati. Si calcolino:
a) la probabilitá che uno studente scelto a caso superi l'esame;
b) la probabilitá che uno studente che ha passato l'esame sia in effetti impreparato.

Soluzione
Poiché il 60% degli studenti che si presentano ad un esame ha preparazione sufficiente possiamo dire che considerando l'esperimento aleatorio *"uno studente si presenta all'esame"*, l'evento $E = \{studentepreparato\}$ ha probabilitá pari a $P(E) = 0,6$.

Definiamo poi gli ulteriori eventi:

$$I = \{\text{studente impreparato}\} \text{ e } \Omega = \{\text{studente supera l'esame}\}. \tag{1}$$

Quindi:
a)per il teorema della probabilitá totale si ha:

$$P(\Omega) = P(\Omega|E)P(E) + P(\Omega|I)P(I) = 0,61 \tag{2}$$

b) per la formula di Bayes si ha:

$$P(I|\Omega) = \frac{P(\Omega|I)P(I)}{P(\Omega)} = 0.065 \tag{3}$$

E2.2 Al tiro a segno, tra coloro che sparano il 10% hanno probabilitá $p_1 = 0,8$ di colpire il bersaglio (tipo 1); il 40% hanno probabilitá $p_2 = 0,5$ di colpire il bersaglio (tipo 2),; il 50% hanno probabilitá $p_3 = 0,1$ di colpire il bersaglio (tipo 3). Si calcoli:
a) Si calcoli la probabilitá che un cliente colpisca il bersaglio in un singolo tiro. b) Un cliente spara 5 volte: le prime 4 manca il bersaglio ed alla quinta volta lo colpisce. Qaul é la probabilitá che il cliente sia di tipo 1? Di tipo 2? Di tipo 3?

Soluzione
a) Definiamo il seguente evento:

$$\mathcal{C} = \{\text{Il cliente fa centro in una prova}\} \tag{4}$$

Indicando con T_1, T_2 e T_3 il tipo del cliente, in base al teorema della probabilitá totale possiamo scrivere:

$$P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{C}|T_1)P(T_1) + P(\mathcal{C}|T_2)P(T_2) + P(\mathcal{C}|T_3)P(T_3) \tag{5}$$

$$= p_1 \cdot 0,1 + p_2 \cdot 0,4 + p_3 \cdot 0,5 = 0,33 \tag{6}$$

dove si é notato che il fatto he il 10% delle persone é di tipo 1 significa che $P(T_1) = 0,1$ (e similmente per $P(T_2)$ e $P(T_3)$)) e, ovviamente, $P(\mathcal{C}|T_i) = p_i, i = 1,2,3$.
b) Definiamo il seguente evento:

$$\Omega = \{\text{Il cliente fa centro al quinto tiro}\} \tag{7}$$

$$= \{4 \text{ insuccessi nelle prime prove ed 1 successo alla quinta prova}\} \tag{8}$$

Applicando il teorema della probabilitá totale possiamo scrivere:

$$P(\Omega) = P(\Omega|T_1)P(T_1) + P(\Omega|T_2)P(T_2) + P(\Omega|T_3)P(T_3) \tag{9}$$

$$= (1-p_1)^4 p_1 \cdot 0,1 + (1-p_2)^4 p_2 \cdot 0,4 + (1-p_3)^4 p_3 \cdot 0,5 \simeq 0,045433 \tag{10}$$

A questo punto, applicando il teorema di Bayes, possiamo concludere:

$$P(T_1|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_1)P(T_1)}{P(\Omega)} \simeq 0,0028 \tag{11}$$

$$P(T_2|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_2)P(T_2)}{P(\Omega)} \simeq 0,2751 \tag{12}$$

$$P(T_3|\Omega) = \frac{P(\Omega|T_3)P(T_3)}{P(\Omega)} \simeq 0,720 \tag{13}$$

A questo punto, possiamo cocnludere che, dato che un cliente che spara 5 volte le prime 4 manca il bersaglio ed alla quinta volta lo colpisce, é piú probabile che sia di tipo 3.

E2.3 Un test di laboratorio rileva la presenza di una patologia il 95% delle volte. L'1% delle volte il test rileva la presenza erroneamente. Se la patologia affligge lo 0.5% della popolazione con quale probabilità un individuo positivo al test è affetto dalla patologia?

Soluzione
Se indichiamo con D l'evento "l'individuo è affetto dalla patologia" e con E l'evento "l'individuo è risultato positivo al test", hai $P(E|D) = 95\%$, $P(E|D^c) = 1\%$ e $P(D) = 0.5\%$ per cui applicando la formula di Bayes ottieni

$$P(D|E) = \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995} \approx 0.323.$$

E2.4 Un'urna contiene due monete di tipo A e una moneta di tipo B. La probabilità di ottenere testa è $1/4$ lanciando una moneta di tipo A e $3/4$ lanciando una moneta di tipo B. Se ottieni testa dal lancio di una moneta estratta a caso dall'urna, con quale probabilità è una moneta di tipo A?

Soluzione
L'odds ratio prima dell'estrazione è 2:1 poiché $P(A) = 2/3$ e $P(B) = 1/3$. Dal fatto che $P(testa|A) = 1/4$ e $P(testa|B) = 3/4$ l'odds ratio dopo l'estrazione vale 2/3. Pertanto hai che $P(A|testa) = 2/(2+3) = 2/5$.

E2.5 Due eventi independente possono essere mutualmente esclusivi? Spiega la tua risposta.

Soluzione
Se due eventi sono mutuamente esclusivi la realizzazione di uno impedisce la realizzazione dell'altro ($P(AB) = 0$) mentre se due eventi sono indipendenti la realizzazione di uno non influenza la realizzazione dell'altro ($P(AB) = P(A)P(B)$). Due eventi indipendenti sono anche mutualmente esclusivi se almeno uno dei due ha probabilità nulla.

E2.6 Un cassetto contiene due dadi onesti e otto dadi con $P(1) = P(2) = P(3) = 1/9$ e $P(4) = P(5) = P(6) = 2/9$. Pescando un dado a caso dal cassetto e lanciandolo, qual è la probabilità di ottenere 1 o 2? E di ottenere 2 o 6?

Soluzione
Chiamiamo evento A l'estrazione del dado onesto ed evento B l'estrazione del dado disonesto. Abbiamo:

$$P(i) = P(i|A)P(A) + P(i|B)P(B) = \frac{1}{6}\frac{2}{10} + \frac{1}{9}\frac{8}{10} \approx 0.12,$$

con $i = 1$ o 2.

$$P(6) = P(6|A)P(A) + P(6|B)P(B) = \frac{1}{6}\frac{2}{10} + \frac{2}{9}\frac{8}{10} \approx 0.21.$$

Quindi

$$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = 2P(1) \approx 0.24, \quad P(1 \cup 6) = P(1) + P(6) \approx 0.33.$$