

Esercizi introduttivi

martedì 6 ottobre 2020 09:14

Esercizi presi dalle slide 5b e 7a

$$\rho_1: \underbrace{((\neg A) \wedge \neg B)}_{R_1} \rightarrow \underbrace{A \vee B}_{R_2}$$

A	B	C	$C \rightarrow A$	$\neg B$	R_1	R_2	$R_1 \rightarrow R_2$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

✓

$$\rho_2: \neg(A \leftrightarrow B) \vee A$$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$	ρ_2
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

✓

$$\rho_3: B \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	ρ_3
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1

1	0	0	1	1	1	1	✓
1	1	0	0	0	0	0	

$$P_4: (\underbrace{A \vee \neg(B \rightarrow C)}_{R_1}) \wedge (\neg C \vee B)$$

A	B	C	$\neg C$	$B \rightarrow C$	$\neg(B \rightarrow C)$	R_1	$\neg(C \vee B)$	P_4
0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1

$$P_5: A \wedge (\underbrace{A \rightarrow \neg(\neg A \vee A)}_{R_1})$$

A	$\neg A$	$\neg A \vee A$	$\neg(\neg A \vee A)$	R_1	$\neg R_1$	P_5
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1

$$P_6: ((\underbrace{A \wedge B}_{R}) \wedge (A \vee B)) \wedge (A \rightarrow B)$$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	R	$A \rightarrow B$	$R_1 (A \rightarrow B)$
0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Svolgimento Es2 - slide 5bN18

lunedì 28 settembre 2020 15:30

$$\neg A \vee \neg B \models \neg A \rightarrow \neg B$$

quando è vero R_1 è vero anche R_2

$$A \quad B$$

$$\neg A \quad \neg B$$

$$R_1 \quad R_2$$

non vale $\vdash \times$ tutti i
contesti!

0

1

1

1

1

0

1

1

0

1

0

0

1

0

1

1

1

0

$$A \rightarrow B \models A \vee B$$

non vale! \ddagger

$$A \quad B$$

$$R_1 \quad R_2$$

0

0

1

0

0

0

1

1

1

0

1

0

0

1

1

1

1

1

0

$$\neg B \rightarrow \neg A \models \neg A \vee B$$

vale

$$A \quad B$$

$$\neg A \quad \neg B$$

$$\neg B \quad \neg \neg A$$

$$\neg A \vee B$$

0

1

1

1

1

0

0

1

0

1

1

0

1

0

0

0

1

0

✓

$$\neg A \wedge \neg B \models \neg A \rightarrow \neg B$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$	<u>val</u>
0	0	1	1	1	1	.
0	1	1	0	0	0	.
1	0	0	1	0	1	.
1	1	0	0	0	1	.

✓

$$A \vee B \models A$$

A	B	$A \vee B$	<u>non vale x tutti i contesti.</u>
0	0	0	.
0	1	1	.
1	0	1	.
1	1	1	.

✓

$$A \vee B \models B$$

non vale x tutti i contesti

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

✓

Svolgimento Es3 - slide 5bN24

lunedì 28 settembre 2020 16:48

$$P \models Q \vee \neg Q$$

P	Q	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$	valido
0	0	1	1	✓
0	1	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	

$$P \wedge \neg P \models Q$$

P	Q	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

vale sempre

Poiché in ogni riga in cui $P \wedge \neg P$ è vera (nessuna), anche Q è vera

consistenza

consistenza

✓

$$P, Q \models P \wedge Q$$

valido ✓

$$P \wedge Q \models P$$

valido ✓

$$P \wedge Q \models Q$$

valido ✓

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$P \models P \vee Q \quad \text{valida} \quad \checkmark$$
$$Q \models P \vee Q \quad \text{valida} \quad \checkmark$$

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Svolgimento Es3 - slide5bN24 (R)

mercoledì 30 settembre 2020 15:36

Verificare utilizzando le tavole di verità la validità delle seguenti leggi logiche.

$$P \models Q \vee \neg Q$$

Quando è vera P è vera anche $Q \vee \neg Q$

P	Q	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$	Valida
0	0	1	1	✓
0	1	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	

$$P \wedge \neg P \models Q$$

P	Q	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Valida ✓

Quando $P \wedge \neg P$ è vera
(mai) allora Q vera
(x conseguenze logiche)

$$P, Q \models P \wedge Q$$

Quando P e Q sono vere allora è vero $P \wedge Q$
(entrambi)

P	Q	$P \wedge Q$	Valida
0	0	0	✓

1	1	1	$P \wedge Q$
0	0	0	valide ✓
0	1	0	
1	0	0	
0	1	1	

$$P \wedge Q \models P$$

$$P \wedge Q \models Q$$

P	Q	$P \wedge Q$	valide	✓
0	0	0	valide	✓
0	1	0		
1	0	0		
1	1	1	• •	

$$P \models P \vee Q$$

$$Q \models P \vee Q$$

P	Q	$P \vee Q$		
0	0	0		
0	1	1	valide	✓
1	0	1	valide	✓
0	1	1	•	
1	1	1	•	

Svolgimento Es4 - slide 5bN29

mercoledì 30 settembre 2020 18:50

Verificare mediante le tavole di verità quali delle seguenti equivalenze logiche valgono.

$$\neg A \wedge \neg B \equiv \neg A \rightarrow \neg B$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

non equivalenti
(non uguali
in tutti i
contatti)

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

equivalenti

$$\neg B \rightarrow \neg A \equiv \neg A \vee B$$

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

equivalenti

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

A	B	$\neg B$	ℓ_1	$\neg R_1$	$A \wedge \neg B$	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	1	0	0	
1	0	1	0	1	1	
1	1	0	1	0	0	

equivalent
 \equiv

$$A \rightarrow B \equiv B \rightarrow A$$

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	
0	0	1	1	
0	1	1	0	
1	0	0	1	
1	1	1	1	

\neq

$$(A \rightarrow B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

\overbrace{A} \overbrace{B}

A	B	C	$A \rightarrow B$	R_1	$B \rightarrow C$	R_2	
0	0	0	1	0	1	1	
0	0	1	1	1	1	1	
0	1	0	1	0	0	1	
0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	1	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

\neq

Svolgimento Es5 - slide5bN36

mercoledì 30 settembre 2020 19:18

Utilizzando le tavole di verità, dimostrare la proprietà distributiva di \wedge rispetto a \vee : $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$\widetilde{R_1}$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	R_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

\equiv

Svolgimento Es6 - slide5bN37

mercoledì 30 settembre 2020 19:04

Utilizzando le tavole di verità, dimostrare le due leggi di De Morgan:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0

legge
dimostrata

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0

legge
dimostrata

Svolgimento Es7 - slide5bN40

mercoledì 30 settembre 2020 19:08

Utilizzando le tavole di verità dimostrare le seguenti leggi logiche:

$$P \equiv \neg\neg P$$

P	$\neg P$	$\neg\neg P$	\equiv
0	1	0	
1	0	1	

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	\equiv
0	0	1	1	0	1	0	
0	1	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	1	0	0	1	0	1	

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	\equiv
0	0	1	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	1	
1	0	0	1	1	0	1	
1	1	0	0	1	0	1	

$$P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \rightarrow Q)$
0	0	1	1	0	1

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1

$$P \leftrightarrow Q \equiv \underbrace{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)}_{l_2}$$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	l_1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Svolgimento Es8 - slide5bN45

mercoledì 30 settembre 2020 19:16

Dimostrare che: $\vdash (\neg A \leftrightarrow B) \vee (\neg \neg A \leftrightarrow B)$

A	B	$\neg A$	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \leftrightarrow B$	R_1	scopre vero;
0	0	1	1	0	{ 1 0 }	vero x ogni contesto
0	1	1	0	1	{ 1 1 }	
1	0	0	0	1	{ 1 0 }	= tautologia
1	1	0	1	0	{ 1 1 }	

$R_1 \quad R_2 \quad R_3$
 Mostrare che la formula $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B \wedge C) \wedge \neg B \wedge (C \rightarrow A \wedge \neg A)$ è una contraddizione.

A	B	C	$\neg B$	R_1	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	R_3	$\neg B \wedge R_3$	$A \vee B \vee C$	$\neg B \wedge C$	R_2	$R_1 \wedge R_2 \wedge R_3$
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0

FALSO IN 000
 CONTRAD
 = CONTRADDIZIONE

Svolgimento Es10 - slide5bN49

mercoledì 30 settembre 2020 19:27

Mostrare che la formula $(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg A)$ è soddisfacibile (almeno un contesto in cui sia vera).

A	B	C	$\neg A$	$C \rightarrow \neg A$	$A \wedge B$	R_1	f
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

SODDISFACIBILE
X S
CONTRSTI

Svolgimento Es11 - slide5bN52

mercoledì 30 settembre 2020 19:28

Si consideri la formula $\underbrace{(\neg A \vee B)}_{P} \rightarrow (A \wedge B)$. È soddisfacibile? È una tautologia? È una contraddizione?

	A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge B$	P	e.
0	0	1	1	1	0	0	SODDISF.
0	1	0	1	1	0	1	X 3 contrasti
1	0	0	0	0	1	1	
1	1	0	0	1	0	1	

- non tutti i contrasti sono veri \rightarrow no TAUTLOGIA

- " sono falsi \rightarrow no CONTRADDIZIONE

\hookrightarrow è soddisfacibile (almeno una volta vera)

Svolgimento Es 1 - slide 7aN1

mercoledì 30 settembre 2020 10:41

Verificare quali delle seguenti stringhe sono formule (secondo la definizione, senza la convenzione sulle parentesi) utilizzando l'algoritmo dell'albero sintattico.

$((A) \rightarrow ((B) \vee (\neg(C))))$

$$((A) \underset{1}{\underset{2}{\rightarrow}} ((B) \underset{1}{\underset{2}{\vee}} (\neg(C))))$$



$$\underline{(A)} \quad ((B) \underset{1}{\underset{2}{\vee}} (\neg(C)))$$



$$\begin{array}{ccc} (B) & & (\neg(C)) \\ \text{è una} & \leftarrow & \\ \text{formula} & & \\ (\text{ottenuta le f. atomiche}) & & \\ \text{---} & & \\ (C) & & \end{array}$$

$((\neg(A)) \wedge (B)) \vee (C)$

$$((\neg(A)) \underset{1}{\underset{2}{\wedge}} (B)) \underset{2}{\underset{1}{\vee}} (C)$$



$$(\neg(A)) \underset{\text{---}}{\underset{1}{\wedge}} (B) \quad (C)$$

non è una formula

$(\neg(\neg((A) \rightarrow (B))))$

$$(\neg \neg ((A) \rightarrow (B)))$$

- niente le parentesi.

non è una
formula

$$(((A) \rightarrow (B)) \wedge (A)) \rightarrow (B)$$

$$((((A) \rightarrow (B)) \wedge (A)) \rightarrow (B))$$

1 2 3 4 4 3 2 3 2 1 2 1 0
 ——————

$$(((A) \rightarrow (B)) \wedge (A)) \rightarrow (B)$$

1 2 3 2 3 2 1 2 1 0
 ——————

$$((A) \rightarrow (B)) \quad (A)$$

$$(A) \quad (\underline{B})$$

e' una formula

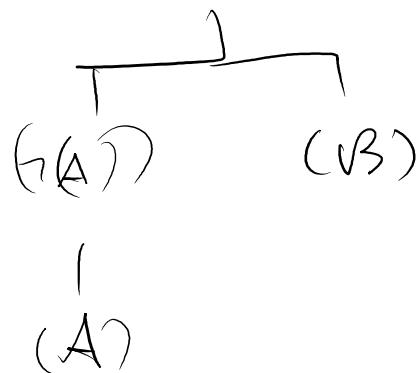
$$(((\neg(A)) \wedge (B)) \vee (C))$$

$$(((\neg (A)) \wedge (B)) \vee (C))$$

1 2 3 4 3 2 3 2 1 2 1 0
 ——————

$$((\neg (A)) \wedge (B)) \quad (C)$$

e' una
formula



$(\neg(\neg A))$

$$\begin{array}{c}
 (\neg(\neg A)) \\
 | \\
 (\neg A) \quad \text{non e' una formula} \\
 \text{meno le } 2^{\text{e}} \text{ parentesi } (A)
 \end{array}$$

$((A) \wedge (B) \wedge (C))$

$$\begin{array}{ccc}
 \stackrel{1 \ 2 \ 1}{((A))} \wedge \stackrel{2 \ 1}{((B))} \wedge \stackrel{2 \ 1 \ 0}{((C)))} & & \text{non e'} \\
 & & \text{una} \\
 & & \text{formula} \\
 \text{mancano delle} & & \\
 & & \text{parentesi}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \diagdown & \\
 & (A) & (\vee B) \wedge (C) \\
 & | & \\
 & - & - \quad \text{rimane il perso}
 \end{array}$$

Svolgimento Es 2 - slide 7aN2

mercoledì 30 settembre 2020 13:45

Reintrodurre le parentesi nelle seguenti stringhe in modo da ottenere, ove possibile, delle formule.

$$A \rightarrow B \vee \neg C$$

$$((A) \rightarrow ((B) \vee (\neg(C)))) \quad \text{e' una formula}$$

$$A \wedge (\rightarrow C \vee A)$$

$$(A) \wedge (\rightarrow ((C) \vee (A))) \quad \text{non e' una formula}$$

$$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$$

$$(((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow (B)) \quad \text{e' una formula}$$

$$A \rightarrow B \wedge A \rightarrow B$$

$$\underline{A} \rightarrow B \wedge \underline{A} \rightarrow B \quad \text{non e' una formula}$$

2 connettori di priorità più bassa

$$A \vee B \wedge C \rightarrow \neg A$$

$$((A \vee B) \wedge C) \rightarrow (\neg(A)) \quad \text{non e' una formula}$$

$$A \wedge B \wedge C \vee \neg C$$

$$(A \wedge B) \wedge C \vee (\neg(C)) \quad \text{non e' una formula}$$

$$\neg\neg A$$

$$(\neg \neg(A)) \quad \text{e' una formula}$$

$$\neg A \wedge B \vee C$$

$$\neg(A) \wedge (\neg B), C \quad \text{non e' una formula}$$

$\neg(A) \wedge (\neg B) \vee C$ non è una formula

$$A \vee \neg B \rightarrow \neg A \vee B$$

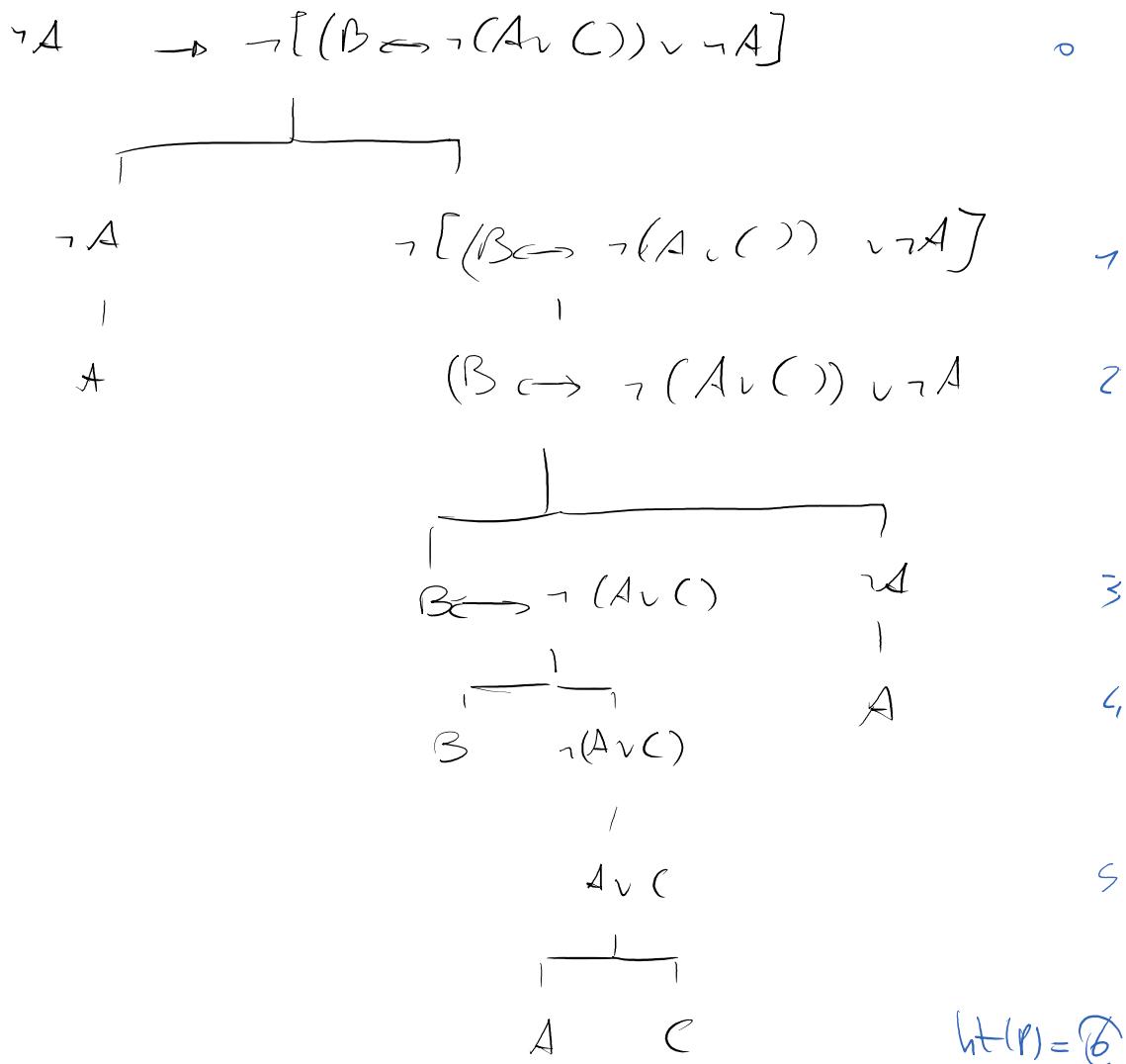
$((A \vee \neg B) \rightarrow (\neg A \vee B))$ è una formula

Svolgimento Es 3 - slide 7aN5

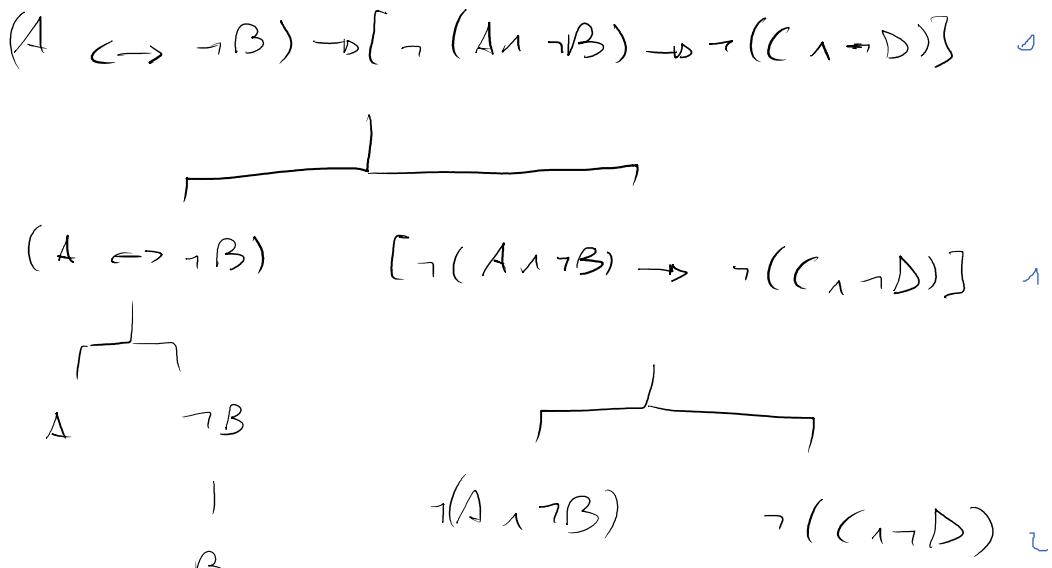
mercoledì 30 settembre 2020 14:09

Costruire l'albero sintattico delle seguenti formule e calcolarne l'altezza.

$$\neg A \rightarrow \neg[(B \leftrightarrow \neg(A \vee C)) \vee \neg A]$$



$$(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow [\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(C \wedge \neg D)]$$



$A \quad \neg B$ $\neg(A \wedge \neg B)$ $\neg(C \wedge \neg D)$ $\neg(\neg C \vee D)$
 B $C \wedge \neg B$ $C \wedge \neg D$ $\neg D$
 $A \quad B$ $C \quad \neg D$
 $\neg C \vee D$ $S = ht(P)$