ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

FOGLIO DI ESERCIZI 2

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti relazioni sono funzioni tra gli insiemi specificati:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+3}$;
(2) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(a,b) = a \cdot b$;
(3) $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $h(p/q) = p - q$;
(4) $k : \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $k(X) = X \cap \mathbb{N}$;
(5) $\alpha : \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ data da $\alpha(1) = a$, $\alpha(2) = b$;
(6) $\gamma : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ data da $\gamma(n) = \{x \in \mathbb{N} : \ x \text{ è un divisore di } n\}$;
(7) $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta(x) = \sqrt{x}$;
(8) $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\delta(x) = \sqrt{x}$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $f(x) = x^2 + 1$. Determinare le seguenti controimmagini:

$$f^{-1}(0), \quad f^{-1}(1), \quad f^{-1}(2), \quad f^{-1}(3).$$

Esercizio 3. Definire un'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diversa dall'identità e tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $f(3n) = 3n$.

Esercizio 4. Calcolare $f(5)$ dove $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è l'applicazione definita da:

$$f(0) = 1, \ f(n) = n \cdot f(n-1) \ \forall n > 0.$$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $f(x,y) = x - y$ e siano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\}, \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > y\}.$$

Determinare $f(A)$ e $f(B)$.

Esercizio 6. Sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 - y^2$ e sia $M = \{(\sqrt{5}, \sqrt{5}), (7,7)\}$.
Determinare $h^{-1}(h(M))$.

Esercizio 7. Siano $f : A \to B$ una funzione e $X, Y \subseteq A$ due sottoinsiemi. Provare che:

(1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
(2) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Esibire un esempio in cui $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Esercizio 8. Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o surgettive e determinarne l'immagine:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

(2) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=5x$;
(3) $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=5x$;
(4) $f:\mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $f(X)=\mathbb{N}\setminus X:=\{x\in\mathbb{N}:\ x\notin X\}$;
(5) $f:\mathscr{P}(X)^2\to\mathscr{P}(X)$, $f(A,B)=A\cup B$, dove X è un insieme.
(6) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^2$, $f(x)=(2x,x-1)$.

Esercizio 9. Costruire delle funzioni che soddisfino le richieste seguenti:
(1) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ iniettiva e non surgettiva;
(2) $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ surgettiva e non iniettiva;
(3) $r:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ surgettiva e tale che $r(x,x)=0\ \forall x\in\mathbb{Z}$;
(4) $h:\mathbb{N}\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$ iniettiva e tale che $\emptyset,\mathbb{N}\in h(\mathbb{N})$;
(5) $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ bigettiva.

Esercizio 10. Siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ due funzioni date da $f(x)=x-2$ e $g(x)=1+x^2$.
(1) Come sono definite le funzioni $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$?
(2) Esistono numeri reali x per cui $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$?
(3) Le funzioni $f\circ g$ e $g\circ f$ sono uguali?

Esercizio 11. Determinare un insieme A e un'applicazione $f:A\to A$ tale che $f\circ f=f$, ma $f\neq \mathrm{Id}_A$.

Esercizio 12. Siano $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ data da $f(n)=|n|$ e $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ data da $g(x)=-x$.
(1) Provare che f e g non sono invertibili (cioè non bigettive) e verificare che $f\circ g=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, ma $g\circ f\neq\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.
(2) Determinare un'applicazione $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ diversa da g e tale che $f\circ h=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
(3) Determinare una funzione $t:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ diversa da f e tale che $t\circ g=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.