Variabili aleatorie continue / 24-03

Distribuzione continua non è discreta, ho una serie di valori
In un punto la densità sarà nulla, in una zona ho una certa densità (di probabilità).

Riassunto variabili discrete

$X.\ (S, P) \to X \subseteq \mathbb{R}$

$X = \{ x_1, \dots, x_N, \dots \}$

↳ per la geometrica non è noto quanto "aspetterò"

pmf $\quad p(x_i) \dots p(x_n)$. Dato $E \subset X \quad p(E) = \sum_{\substack{x_i \leq E \\ i=1\dots}} p(x_i)$

cdf $\quad F(a) = \sum_{\substack{x \leq a \\ i=1\dots}} p(x_i)$

$E[X] = \sum_{i=1} x_i\, p(x_i)$, $\quad Var(X) = E[(X - E[X])^2]$

scostamenti dalla media

Variabili continue

$X.\ (S, P) \to X \subseteq \mathbb{R}$

Funzione di densità di probabilità (pmf x le discrete)

$p: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ qualunque valore mappato in un positivo

$\forall B \subseteq \mathbb{R}$ misurabile $\quad P(B) = \int_B p(x)\, dx$ es B unione di più intervalli se $B = [-b, b]$ intervallo

$$p(B) = \int_{-b}^{b} p(x)\, dx$$

(pdf)

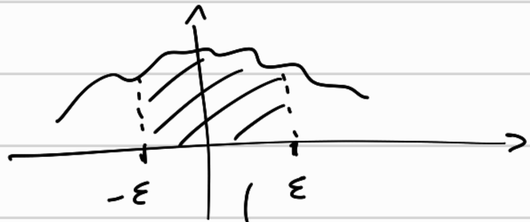
$\sum_i p(i)$ → $\int p(x)\, dx$

discreta → continua

ciò che cambia

$B = [-\varepsilon, \varepsilon]$

$$p(B) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p(x)\, dx$$



area sotto la curva

se l'intervallo diventa più piccolo, l'area si riduce fino ad ottenere $p(x) = 0$ ($p(57) = 0$, ma p(zona con 57) = probabilità)

Nota:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1 \qquad \text{somma } p = 1$$

intervallo più grande

es. $p(x) = \begin{cases} 4x - 2x^2 & , x \in (0, 2) \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

è una densità di probabilità? Osservo se la somma p è 1

$$1 \overset{?}{=} \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 = 0 - \left(8 - \frac{16}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3} \quad \text{non lo è}$$

Per farla diventare densità di probabilità?

$8/3 = c$ e la funzione $\begin{cases} \dfrac{4x - 2x^2}{c} & '' \\ 0 & '' \end{cases}$ dove c è una costante

e quindi otterrò $c/c = 1$ densità di probabilità

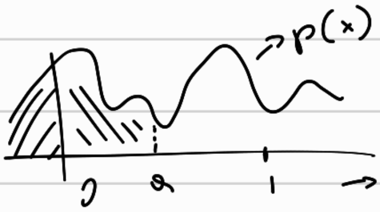
Funzione di probabilità cumulata

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)\, dx \qquad F: \mathbb{R} \to [0,1]$$

tutti i valori fino ad a (partendo dal più basso)

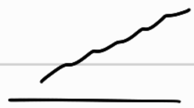
↓ max valore ottenibile dalla somma di p

funzione crescente



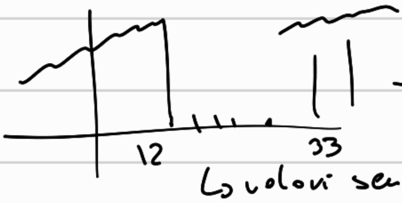
→ mi fermo a un $a \in (0,1)$

$F(a)$



aggiungere area ogni volta non riduce la somma
↳ probabilità sempre positiva

ad esempio



→ riprende a crescere

↳ valori senza probabilità non aggiungo niente } in questo caso non è funzione crescente (nel totale)

$$f: \begin{cases} g(x) & x \leq 12 \\ 0 & 12 < x < 33 \\ h(x) & x > 33 \end{cases}$$

$F(a)$

Valore atteso $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$, $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 p(x)\, dx$

↳ in tutti i valori

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$G(a) = \int_{-\infty}^{a} g(x)\, dx$$

DERIVATA DI G

$$\frac{dG}{dx}(a) = g(a)$$ torni alla funzione di partenza

- densità $p \xrightarrow{\text{integrale}}$ p cumulata
- p cumulata $\xrightarrow[\text{derivata}]{}$ densità p

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad X \quad p_X$ o F_X

$Y = g(X)$ $\quad P_Y ?\ F_Y ?$ Ovvero come descrivo la trasformazione?

es. $Y = X^n$ $\quad p_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)\, dx = P([-\infty, a]) = P(x \leq a)$$

$$F_Y(\overset{\text{qualunque valore}}{y}) = P(Y \leq y) = P(X^n \leq y)$$

(se avessi $P(X \leq y)$ avrei la cumulata di $X \to F_X(y)$)

ma allora $\longrightarrow$ $P(x \leq y^{1/n}) = F_X(y^{1/n})$

quindi $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} 1 \cdot p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} 1\, dx = x \Big|_0^a = a$

altra sei è 1

in questo caso p minima è zero: $p \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

valore in un punto (cresce al crescere di a)

costante

dunque $F_X(\overbrace{y}^{}{}^{1/n}) = y^{1/n}$

$P_Y(a) = (y^{1/n})' = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} \Big|_{y=a}$ valuto la derivata per a

$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, p(x)\, dx$

es. $g(x) = e^x$ $\quad p_x(x) \begin{cases} 1 & , x \in (0,1) \\ 0 \end{cases}$

$E[e^x] = \int_0^1 e^x \cdot 1\, dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$ *

posso prendere anche valori fuori $(0,1)$ ma saranno zero

Posso verificarlo:

f di var aleatoria

es. $Y = e^x$ $\quad p_x(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 \end{cases}$

$F_Y(Y) = P(Y \leq y) = P(e^x \leq y) = P(X \leq \ln y) = \ln y$

$P_Y(Y) = (\ln y)' = 1/y$ che vale solo per $x \in (0,1)$ ovvero

Dunque come si trasforma l'intervallo? $y \in [1, e]$ (e^0, e^1)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\, dx$$

$$E[Y] = \int_1^e \cancel{y} \cdot \frac{1}{\cancel{y}}\, dy = y\Big|_1^e = e - 1 \quad *$$

equivalente

in questo caso valuto la trasformazione di y nella y, nel precedente applico direttamente i pesi su x e poi trasformo

25-03

	DISCRETE	CONTINUE
valori	$x_1, \dots, x_n, \dots$ (infiniti ma discreti)	$I \subseteq \mathbb{R}$
pmf	$p(x_1), p(x_2) \dots \mid \sum_i p(x_i) = 1$ $p(E) = \sum_{x_i \in E} p(x_i)$ con E sottoins. di eventi	densità: $\forall E \subseteq I$ $P(I) = \int_E p(x)\,dx$ $\int = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$ si restringe a I
cdf	$F(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i)$ al variare di a ho valori diversi	$F(a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx$ $\left(p(x) = \frac{dF}{dx}\right)$
val. atteso	$E[X] = \sum_i x \cdot p(i)$ $E[g(X)] = \sum_i g(x) \cdot p(i)$ funz. di var. aleatoria	$E[X] = \int x \cdot p(x)\,dx$ $E[g(X)] = \int g(x) \cdot p(x)\,dx$
Varianza	$Var(X) = E[\underbrace{(X - E[X])^2}_{\text{funzione}}]$	$Var(x) = \int (x - E[X])^2 \cdot p(x)\,dx$

Es

• $p(x) = \begin{cases} x + 3x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ è pdf?

sì se $p(x) \begin{cases} \frac{x+3x^3}{c} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ con $1 = \cancel{c} = \int_0^1 \frac{(x+3x^3)}{c}\,dx$

• $p(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $E[X] = ?$

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = 2\,\frac{1}{3}\,x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

• 

$p(x) \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $g(x) = x^n$

$$F_X(X) = \int_0^{1 \to a} 1 \, dx = x$$

$F_Y(y) = P(Y \le y)$ dal fatto che $F_X(a) = P((-\infty, a]) = P(X \le a)$

$= P(X^n \le y) = P(X \le y^{1/n}) = F_X(y^{1/n}) = y^{1/n}$

perché ho identità $F_X(X) = x$ qui

Distribuzione Gaussiana (Normale)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

Integrazione per parti

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = \overbrace{\frac{df}{dx}}^{f'} g + f \overbrace{\frac{dg}{dx}}^{g'}$$

applico integrale e ottengo

$$f(x) g(x) \, dx = \int f'(x) g(x) \, dx + \int f(x) g'(x) \, dx$$

$$\rightarrow \int f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx$$

funzione simmetrica rispetto all'asse verticale

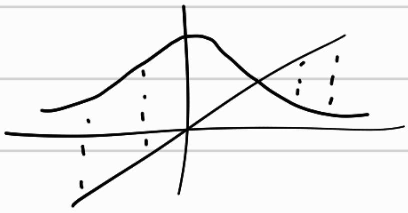
- μ è dove cade l'asse di simmetria (media della distribuzione)
- σ è la varianza
- l'area sottesa vale 1 (totale probabilità)
- definita su tutto $\mathbb{R}$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, dx$$ divido in due passi

$\rightarrow$ caso $\mu = 0$, $\sigma = 1$ gaussiana (o normale) standard

Indicata con Z

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$



prendo un valore positivo e uno negativo ogni volta e li sommo

quindi $$E[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = 0$$

$$Var(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1$$

Infatti

Ponendo $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$g(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} \longrightarrow g'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx}$$

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

valutata nell'intervallo

(ho applicato l'integrale)

per qualsiasi μ e σ, l'area e' 1

$$= (0 + 0) + 1 = 1$$

Data una gaussiana standard, come ottengo una gaussiana qualsiasi?

Es

Sia X gaussiana con parametri μ e σ

Applico una trasformazione: $Y = aX + b$, e' ancora una gaussiana?

Di che parametri?

$E[X]$? $Var(X)$?

$$F_Y(Y) = P(Y \leq y) = P(aX+b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right)$$

$$= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

e' proprio la densita'

$$f_Y(y') = \frac{dF_Y(y')}{dy} = \frac{dF_X\left(\frac{y'-b}{a}\right)}{dy} = p_X\left(\frac{y'-b}{a}\right)\frac{1}{a}$$

y' → punto in cui valuto la derivata

$\frac{1}{a}$ → der dell'arg (f composta)

detta x la y' →
$$\frac{1}{a}\, p\left(\frac{x-b}{a}\right) \underset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma \cdot a} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma \cdot a} \cdot e^{-\frac{(x-\overbrace{b-\mu a}^{-(b+\mu a)})^2}{2\sigma^2 a^2}}$$

a^2 → porto sotto

ottengo una nuova gaussiana i cui parametri sono

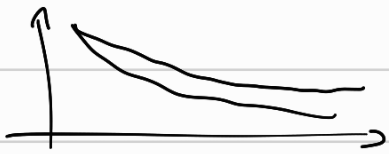
$\mu' = b + \mu a$

$\sigma' = \sigma a$

→ se inverto riottengo la normale $N(0,1)$

Distribuzioni esponenziali: / 31-03

$$p(x) = \underbrace{\lambda}_{\text{COSTANTE POSITIVA}} e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$



} x diversi λ

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} = \cancel{\lambda}\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\cancel{\lambda}}\right)\Big|_0^{+\infty} = 1 \qquad \left[\int e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]$$

$$= 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

per l'integrale x parti

$$f(x)\,g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \lambda \underset{f}{x}\, \underset{g'}{e^{-\lambda x}}\,dx$$

$$= \cancel{\lambda}\, \underbrace{-x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\cancel{\lambda}}\Big|_0^{+\infty}}_{\to 0} + \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{\lambda} e^{-\lambda x}}{\cancel{\lambda}}\,dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (\underbrace{E[X]}_{\to 1/\lambda})^2$$

per avere $E[X]$ moltiplico e divido

$$E[X^2] = \int_0^{+\infty} \lambda \underset{f}{x^2}\, \underset{g'}{e^{-\lambda x}} = \underbrace{-x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{\to 0} + \frac{1}{\lambda} 2 \int_0^{+\infty} \underbrace{\lambda x e^{-\lambda x}\,dx}_{E[X] = 1/\lambda}$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribuzione smemorata : sappiamo che $x > t$

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$$

cond.

non porta memoria di questo passaggio

contenuto

infatti

$$= \frac{P((X > s+t) \cap (X > t))}{P(x > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(x > t)}$$

la cumulata e'

$$F(a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \cancel{\lambda}\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\cancel{\lambda}}\right)\Big|_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$\parallel$$

$P(X \leq a)$ → ma allora $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$ perché tot $= 1$

$= e^{-\lambda a}$

quindi

$$\frac{P(X > s+t)}{P(x > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda s} \cdot \cancel{e^{-\lambda t}}}{\cancel{e^{-\lambda t}}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$