Es note / 17-03

1) Calcola valore atteso e varianza di X se
$p(1) = 1/2$, $p(2) = 1/4$, $p(3) = 1/8$, $p(4) = 1/8$
Disegnare il grafico della cdf

- $E[X] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1,875$

- $Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

$\downarrow$

fatto rispetto alla media
(osserva quanto i valori si discostano da essa)

$E[X^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{8} = 4,675$

$(E[X])^2 = (1,875)^2 = 3,517$

$Var(X) = 4,675 - 3,517 = 1,158$

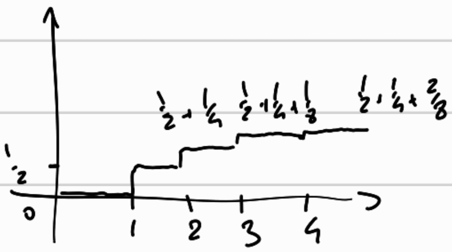


grafico cdf, la crescita è ridotta man mano che x aumenta

2) Lancio dado onesto 3 volte, X = n° di 6 usciti
Determina pmf e cdf. P almeno un 6? P n° pari di 6?

$X = \{1, 2, 3\}$ = n° di 6
Casi possibili $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ casi

$$pmf = F(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i) \qquad cdf = \sum_{x_i \leq a} x_i\, p(x_i)$$

$\downarrow$
parte $a=1$

Ogni lancio ho una sequenza di 3 risultati
detto s l'uscita del 6 e i l'uscita di non 6
(successo) (insuccesso)
suddivise in: sii, isi, iis

$$P(sii) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

cioe' P che esca una delle 3 possibili sequenze che hanno esattamente un s

$\binom{3}{1}$ = n° di combinaz. di sequenze possibili con un s
= 3 (da cui il risultato sopra: sii, isi, iis)

$X=1$

$$\rightarrow P(1) = \frac{25}{216} \cdot 3 = \frac{75}{216}$$

$P(1)$ $\downarrow$ esattamente un 6

$\frac{25}{216}$ $\downarrow$ P una sequenza con un s

3 $\hookrightarrow$ seq. td.

$\rightarrow X=2$ anche qui ho ssi, iss, sis td. 3
infatti:
$\binom{3}{2} = 3$

$$P(ssi) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216} \qquad P(2) = \frac{5}{216} \cdot 3 = \frac{15}{216}$$

$\rightarrow X=3$ ho solo una possibilita': 6, 6, 6
(e una sola sequenza cioe' tre 6 di fila)

$$P(3) = \frac{1}{216}$$

$\rightarrow X = 0$ ovvero i i i   n° di comb.: 1 (solo una combinazione di "insuccessi" ≠ numeri che appaiono)

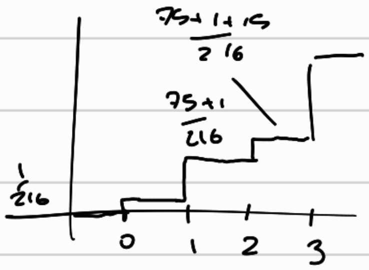
$$P(iii) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

↳ cioè tre i di fila

Quindi $P(0) = \frac{125}{216}\cdot 1 = \frac{125}{216}$

• $pmf = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = 1$ ✓

• $cdf = \sum_{x_i \leq a} p(x_i)$



$P(\text{almeno un } 6) =$ (sommo) unisco le P degli eventi per cui

→ è uscito una volta
→ " 2 "
→ " 3 "

} perché "almeno" una volta è uscito in più eventi

$$= P(1) + P(2) + P(3)$$
$$= \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{81}{216}$$

$$P(\text{n° pari di } 6) = P(0) + P(2)$$ (considerando zero pari)
$$= \frac{1}{216} + \frac{15}{216} = \frac{2}{27}$$

3) $E[X]$ e $Var(X)$ di 2)

$$E[X] = 0\cdot\frac{125}{216} + 1\cdot\frac{75}{216} + 2\cdot\frac{15}{216} + 3\cdot\frac{1}{216} = 0{,}5$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E(X))^2$$

$$= 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 4 \frac{15}{216} + 9 \frac{1}{216} - 0{,}25 = 0{,}42$$

ancora contano da 2, 3 } (i valori sono molto vicini alla media attesa)

Es note / 18-03

1) Conto il n° $\underbrace{\text{di}}_{\text{n° di successi}}$ 6 con 3 lanci di dado. $E[X]$ e $Var(X)$.

Ho una variabile casuale binomiale (n° di successi)

$P(6) = \frac{1}{6}$ x lancio (tot $n = 3$ lanci)

$$E[X] = n \cdot p = \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = np(1-p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Per verificare: osservo il n° di 6 che posso aspettarmi

$$E[X] = \underset{\text{n° di 6}}{0} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)}_{p \text{ non } 6} + 1\left(\underset{\text{modi binomiale}}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) + 2\left(\underset{3}{} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)$$

$$= 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{3 \cdot 25}{216} + \frac{3 \cdot 10}{216} + \frac{3}{216} = 0{,}5$$

→ come ottenuto dalla var binomiale

2) Un alg risponde correttamente il 50% delle volte.
Quante volte devi lanciarlo x ottenere un ris corretto di $P > 99,9\%$?

Si vogliono contare il n° di lanci falliti prima di ottenere un successo.
X var geometrica

$P(\text{corretto}) = 50\%, = \frac{1}{2}$ data $P = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ dove $n-1 = $ n° scorretti

$P(\text{n-esimo corretto dopo } \underset{=9}{n-1} \text{ scorretti}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 99,8\%$ con 9 lanci ho questa P di fare corretto

Quindi più di 9 lanci $\rightarrow$ 10 lanci ho $P > 99,9\%$ di fare corretto

(n° lanci è ottenibile come formule inversa (log))

3) In media un libro contiene 1 err x pagina.
$P(2 \text{ errori x pagina})$?

contesto implicito, i valori trovati saranno riferiti sempre a una pagina

So una media e voglio sapere un evento successivo
$\rightarrow$ variabile poissoniana casuale X

$P(X=2) = \frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu}$ dove il valor medio μ degli eventi è 1err x pagina

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \approx 0,184 \simeq 18\%$

Es week 3 / 21-03

1) $P(\text{COLPIRE}) = 33\%$ singolo tiro

ogni tiro costa 1€
ogni centro guadagno 5€

$P(\text{colpire}) = 33\%$ colpire con singolo tiro

$P(X=-1) = P(\text{mancare}) = 67\%$
$P(X=4) = P(\text{colpire}) = 33\%$
↳ max guadagno

Bernoulli (p è $P(\text{colpire})$
$1-p$ è $P(\text{mancare})$)

$E[X] = -1 \cdot 0{,}67 + 4 \cdot 0{,}33 = 0{,}65$ (65 centesimi guadagnati in media)

2) Un'urna contiene 2V, 3R, 5B. Estraggo 3 palline no rimessa

Guadagno
1€ x pallina V
0€ x pallina B
−1€ x pallina R

- PMF? Valore atteso?
- caso di 2V, 2R, 6B ?

prob di ogni caso X

Dato X = guadagno
tot palline = 10
Max guadagno 2€ (2V)

2 CASI POSSIBILI

$$P(X=0) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot 6 + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0{,}25 + 0{,}08 = 33\%$$

V + R + B   possibili ordini   B + B + B

$$P(X=1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot 3 + 3 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{120}{720} + \frac{18}{720} = 0{,}19 \simeq 19\%$$

V B B   V R V

$$P(X=2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot 3 = 0{,}04 \simeq 4\%$$

V V B

Supposto che possa andare in rosso: $\xrightarrow{x}$ fare $\sum p = 1$

$$P(X=-1) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot 3 + \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot 3 = \frac{36}{720} + \frac{180}{720} = 0,3$$

R R V   R B B $\simeq 30\%$

$$P(X=-2) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot 3 = 0,125 \simeq 13\%$$

R R B

$$P(X=-3) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} = 0,008 \simeq 0,8\%$$

R R R

Verifico $\sum p = \% (30+33+13+4+13+0,8) \simeq 100\%$ ✓

$$E[X] = -1\cdot 0,3 - 2\cdot 0,125 - 3\cdot 0,008 + 0\cdot 0,33 + 1\cdot 0,13 \cdot 2\cdot 0,04$$
$$= -0,304 \quad \text{(in media perdo 30 centesimi)}$$

Caso 2 V, 2 R, 6 B

$$P(X=0) = \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot 6 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} = 0,37 \simeq 37\%$$

V + R + B   B + B + B

$$P(X=1) = \frac{2}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot 3 + 3\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} = 0,27 \simeq 27\%$$

V B B   V R V

$$P(X=2) = \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot 3 = 0,05 \simeq 5\%$$

V V B

$$P(X=-1) = \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot 3 + \frac{2}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot 3 = 0,27 \simeq 27\%$$

R R V   R B B

$P(X=-2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} \cdot 3 = 5\%$

R R B

Non avendo 3R, non posso andare sotto i -2€

$\sum p \neq 0$ ✓ $E[X] = 0 \cdot 0{,}37 + 1 \cdot 0{,}27 + 2 \cdot 0{,}05 - 1 \cdot 0{,}27 - 2 \cdot 0{,}05$

$= 0$ (in media non perdo ne' vinco nulla)

dove Y assume le x_i

3) $P(X=-1) = 0{,}3$ Calcolo $E[2X^2 - 1]$ $P(x_i) = P(i)$

$P(X=0) = 0{,}5$

$P(X=1) = 0{,}2$ per poi fare la sommatoria di $y_i \cdot P(i)$

oppure posso prendere $Y = 2X^2 - 1$ e scrivere le probabilita' P rispetto Y

$E[2x^2 - 1] = E[2x^2] - E[1] = 2E[x^2] - 1$

$E[x] = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 = -0{,}1$

$E[x^2] = 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}5$

$E[2x^2 - 1] = 2 \cdot 0{,}5 - 1 = 0$

4) P(laurea) = 0,7 su tot.

$\left.\begin{array}{l} P(\text{no laurea}) \\ P(\text{uno solo laurea}) \\ P(\text{almeno uno laurea}) \end{array}\right\}$ su 8 studenti

8 studenti e' il mio totale (la P non cambia)

P(laurea) è sempre 70%.

$P(\text{no laurea}) = (1 - P(\text{laurea}))^8 = (1-0{,}7)^8 = (0{,}3)^{8}$ ← P no laurea x tutti gli studenti

$P(\text{una solo laurea}) = 8 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^7$ (Binomiale)

8 → possibili "set" di studenti: LNNNNNNN

$P(\text{almeno uno laurea}) = 1 - (0{,}3)^8 = 1 - P(\text{no laurea})$

$(0{,}3)^8$ → P nessuno si laurei

5) Dimostra che $Var(X) = (1-p)/p^2$ è varianza di var casuale geo X

$p(i) = (1-p)^{i-1} \cdot p$ e $E[X] = 1/p$

Var (X) in generale è equivalente alla scrittura:

$E[x^2] - (E[x])^2$, $(E[x])^2 \hookrightarrow 1/p^2$; $E[x] = \sum_{i=1}^{\infty} i\,(1-p)^{i-1} p = 1/p$

$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 (1-p)^{i-1} \cdot p = \sum_{i=0}^{\infty} (\underbrace{i-1}_{a} + \underbrace{1}_{b})^2 (1-p)^{i-1} p$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \{ \underbrace{(i-1)^2}_{a^2} (1-p)^{i-1} p + \underbrace{2(i-1)}_{2ab} (1-p)^{i-1} p + \underbrace{1}_{b^2} \underbrace{(1-p)^{i-1} p}_{1} \}$

detta $j = i-1$: $\sum_{j=\cancel{0}\,1}^{\infty} j^2 (1-p)^j p + 1 + 2\sum_{j=\cancel{0}\,1} \cancel{p}\, j\,(1-p)^j p$

$= (1-p)\,E(x^2) + 2(1-p)\,E(x) + 1$

$\rightarrow E(\cancel{x^2}) - (\cancel{1}-p)\, E(x^2) = 2(1-p)\, E(x) + 1$

$$\rightarrow \cancel{p}\, E(x^2) = \frac{\frac{2(1-p)}{p} + 1}{p} = \frac{\frac{2}{p} - 2 + 1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

Quindi $Var(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$ ✓

6) P (passare) x tentativo $= 0{,}6$ $\quad P$ (passare) al 3° tentativo?

X come var casuale geo $\rightarrow$ n° insuccessi e poi successo

$$p(3) = (1-p)^{3-1}\, p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096 \simeq 9{,}6\%$$

ovvero P di fallire 1° e 2° tentativo e P di passare al 3°