Appunti del corso di Calcolo Differenziale e Integrale

A.A. 2016/2017

Queste note sono state ottenute riadattando in parte le dispense della prof. Elena Muselli, che ringrazio per la disponibilità a fornirmi "il sorgente"dei files.
V. Del Prete

Indice

CAPITOLO 1

Nozioni di base

Introduzione. In questo capitolo vengono trattati argomenti preliminari al corso: richiamo al sistema dei numeri reali, estremo superiore e inferiore, massimo e minimo di un insieme numerico.

1. I numeri reali

In questa sezione introduciamo gli insiemi numerici che sono alla base del calcolo differenziale ed integrale. Useremo tre parole chiave della teoria degli insiemi: *insieme*, *elemento*, *appartenenza*, che spiegheremo in maniera informale ed esplicito senza darne una definizione. La nozione di insieme viene assunta come primitiva. Un insieme è determinato dai suoi *elementi*, cioè è definito quando si conoscono tutti gli oggetti che ne fanno parte, e si dice che "un oggetto appartiene a un insieme". Per indicare un insieme si usano lettere maiuscole

$$A, B, X, Y, Z, \dots .$$

Per specificare di quali elementi è composto un insieme A si scrive $A = \{\dots\dots\}$ dove al posto dei puntini si elencano gli elementi separati da una virgola, ad esempio la scrittura

$$A = \{2, 5, 7, 9, 12\} \tag{1.1}$$

significa che gli elementi di A sono i numeri $2, 5, 9, 12$ (ossia sono elementi dell'insieme e non ce ne sono altri). Per denotare che un elemento x appartiene ad un insieme A si scrive $x \in A$.
In alcuni testi si usa una scrittura simile alla (1.1) anche per gli insiemi formati da infiniti elementi, ad esempio per indicare i numeri con cui si conta (*numeri naturali*), si scrive

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

dove i puntini stanno a indicare che la sequenza continua indefinitamente. Quando si sceglie questa scrittura deve essere chiaro quali sono gli elementi dell'insieme che non sono scritti esplicitamente; ad esempio per indicare l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri dispari, invece delle scritture

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8 \dots\}, \qquad D = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

sono preferibili rispettivamente le seguenti

$$P = \{n \in \mathbb{N} : n = 2m\,,\ m \in \mathbb{N}\}, \qquad D = \{n \in \mathbb{N} : n = 2m + 1\,,\ m \in \mathbb{N}\}$$

nelle quali si esprimono i due insiemi "*mediante una proprietà caratteristica dell'insieme*".
Introduciamo ora i simboli per i principali insiemi numerici. Per denotare l'insieme dei numeri naturali diversi da zero scriveremo $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
Come noto, questi numeri sono scritti secondo la cosiddetta *notazione posizionale a base 10* che permette di rappresentare gli infiniti numeri naturali con un numero finito di cifre, come ad esempio

$$572 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2.$$

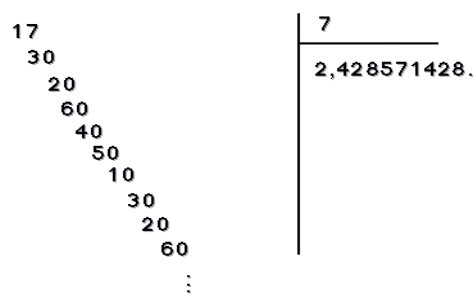
La successione di cifre che rappresenta un numero si chiama *allineamento*; in un allineamento è essenziale l'ordine con cui sono scritte le cifre. Una diversa base, molto usata in informatica è la base 2.

Con $\mathbb{Z}$ si denota l'insieme dei *numeri interi relativi*: $0, -1, +1, -2, +2, \ldots$ numeri interi che, ad esclusione dello 0, sono dotati di un segno $+$ (*numeri positivi*) o $-$ (*negativi*). Nella scrittura dei numeri positivi è consentito tralasciare il segno.
I numeri interi relativi diventano insufficienti quando si ha a che fare con grandezze che possono essere suddivise in parti all'infinito; per misurare tali grandezze è necessario ricorrere a sottomultipli dell'unità. A tale scopo si introducono i *numeri razionali* che si rappresentano usualmente come frazioni (oltre che ovviamente con la rappresentazione decimale), come $\frac{m}{n}$ dove m, n sono due interi relativi e $n \neq 0$. L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$. Esempi di numeri razionali, scritti sia in forma frazionaria che decimale sono

$$\frac{1}{4} = 0,25 \qquad\qquad \frac{7}{3} = 2,3333\ldots = 2,\overline{3};$$

si noti che il primo ha un numero finito di cifre dopo la virgola, mentre il secondo presenta un numero infinito di cifre dopo la virgola, tutte uguali a 3 (*numero periodico*). Questi due esempi esauriscono tutte le eventualità per l'allineamento di un numero razionale, cioè ogni $q \in \mathbb{Q}$ ha una rappresentazione decimale limitata o illimitata periodica.

Esempio 1.1. Il procedimento che segue mostra che ad ogni numero razionale $p = m/n \geq 0$ si può associare un allineamento limitato o un allineamento illimitato periodico. Premettiamo un esempio: eseguendo i primi nove passi della divisione 17 : 7 si ha



Procedimento Dividendo m e n, si ottengono due numeri naturali q_0 (*quoziente*) e r_0 (*resto*) tali che

$$m = n\,q_0 + r_0,$$

dove $0 \leq r_0 < n$. Se $r_0 = 0$ il procedimento termina, altrimenti si effettua una nuova divisione

$$10\,r_0 = n\,q_1 + r_1.$$

dove $0 \leq r_1 < n$. Se $r_1 = 0$ il procedimento termina, altrimenti si effettua una nuova divisione:

$$10\,r_1 = nq_2 + r_2$$

con $0 \leq r_2 < n$ e così via. Con questo procedimento iterativo si ottengono due sequenze di numeri: $q_0, q_1, q_2, \ldots$ e $r_0, r_1, r_2, \ldots$ questi ultimi maggiori o uguali a zero e minori di n.
Possono accadere solo due casi:

1 ad un certo punto si trova un resto uguale a zero. In tal caso il procedimento termina dopo un numero finito di passi.
2 tutti i resti sono diversi da zero. In tal caso, poichè si possono avere solo un numero finito di resti r_k (nell'esempio solo 6) le sequenze dei resti e quindi dei q_k si ripeteranno periodicamente.

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} &= q_o + \frac{r_o}{n} \\ &= q_o + \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10\,n} \\ &= q_o + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100\,n}\end{aligned}$$

e così via. Il numero q_o è detto *parte intera* di p e $q_1, q_2, q_3, \ldots$ sono le cifre decimali

$$p = \frac{m}{n} = q_0, q_1\, q_2\, q_3 \ldots$$

Abbiamo così visto che ad ogni numero razionale si associa un allineamento limitato o illimitato periodico.

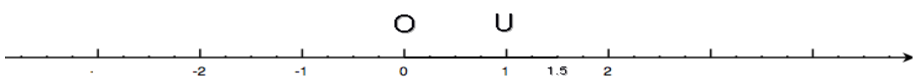


FIGURA 1. La retta cartesiana, l'origine O e il punto di ascissa unitaria U

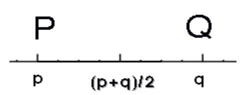


FIGURA 2. Fra due punti P e Q ad ascissa razionale ci sono infiniti altri punti ad ascissa razionale

L'insieme $\mathbb{Q}$ si può visualizzare attraverso la seguente rappresentazione geometrica: consideriamo una retta e fissiamo su essa due punti, O ed U; si conviene che il primo rappresenti lo zero e il secondo il numero razionale 1 (vedi la Figura 1). Una tal retta viene chiamata *retta cartesiana*; si vede facilmente (con elementari considerazioni geometriche) che ad ogni numero razionale q corrisponde un punto P sulla retta, e q si chiama *ascissa* di P.
I numeri razionali godono di questa importante proprieà: data una coppia di razionali q ed s esiste sempre un altro numero razionale p tale che $q < p < s$: basta prendere $p = (q + s)/2$, vedi la Figura 2. Iterando questo procedimento possiamo concludere che nello "spazio"compreso fra due numeri razionali esistono infiniti numeri razionali.
Ci si può chiedere:

è vero che ogni punto sulla retta cartesiana ha una ascissa razionale? La risposta è no.

Come esempio scegliamo il punto P avente come ascissa la lunghezza d della diagonale del quadrato di lato OU (vedi la Figura 3); per il teorema di Pitagora si ha $d^2 = 2$. Il numero d non è razionale, infatti il Teorema 1.2 più sotto mostra che non esiste un numero razionale il cui quadrato è due; per provarlo premettiamo il seguente

LEMMA 1.1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha: se n è dispari allora n^2 è dispari.*

DIMOSTRAZIONE. Sia n un numero naturale dispari; allora si può scrivere $n = 2k + 1$ dove $k \in \mathbb{N}$. Elevando al quadrato si ha

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1;$$

abbiamo così provato che che n^2 è un numero dispari. □

Si noti: dal Lemma segue subito che

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n^2 \text{pari} \Longrightarrow n \ \text{ pari.} \tag{1.2}$$

Teorema 1.2. *Non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2.*

Dimostrazione. Supponiamo esista un numero $r \in \mathbb{Q}$ tale che

$$r^2 = 2;$$

sia $r = m/n$ con n e $m \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ e possiamo supporre che questa frazione sia già ridotta ai minimi termini, cioè m e n non hanno fattori comuni. Elevando al quadrato si ha

$$m^2 = 2n^2. \tag{1.3}$$

Quindi m^2 è un numero pari; allora, per la (1.2) si ha che anche m è pari e perciò possiamo scrivere $m = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Allora la relazione (1.3) si può riscrivere

$$\begin{aligned} 4k^2 &= 2n^2 \\ 2k^2 &= n^2 \\ n^2 &= 2k^2. \end{aligned}$$

Questo mostra che n^2 è pari e quindi per (1.2) anche n è pari. Abbiamo così trovato che sia m che n sono pari, ma questo è assurdo perchè abbiamo supposto che la frazione fosse ridotta ai minimi termini. Da questo ragionamento si deduce che l'ipotesi che r è un numero razionale è falsa e il teorema è dimostrato. □

Figura 3. Il punto P ha ascissa uguale alla lunghezza della diagonale del quadrato

Abbiamo visto che il punto P sulla retta avente ascissa d con $d^2 = 2$ non è il rappresentante di alcun numero razionale. Ciò significa che, dopo aver "occupato" i punti della retta con i numeri razionali, su di essa rimangono ancora dei posti vuoti; per riempire questi posti è necessario considerare anche numeri che hanno una rappresentazione decimale illimitata non periodica. Questi numeri vengono detti *irrazionali.* Esempi di numeri irrazionali sono

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880\ldots \qquad \pi = 3.14159265358979323846\ldots$$

L'unione dei numeri razionali e degli irrazionali viene detto insieme dei numeri reali e si indica con $\mathbb{R}$. L'insieme $\mathbb{R}$ può dunque essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti della retta cartesiana; spesso in matematica si usa l'espressione "retta reale"per indicare $\mathbb{R}$, identificando così l'insieme numerico con la sua rappresentazione geometrica. Denoteremo con $\mathbb{R}^+$ e con $\mathbb{R}^-$ gli insiemi

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \qquad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

Sui numeri reali sono definite due operazioni: l'addizione (o somma), un prodotto (o moltiplicazione) che soddisfano proprietà ben note (associativa, commutativa e distributiva). Oltre alla somma e al prodotto si definiscono la differenza $x - y$ e il rapporto x/y se $y \neq 0$. Se $x \neq 0$ si definisce potenza di base x e esponente $n \in \mathbb{N}^+$

$$\underbrace{x^n = x \cdot \dots \cdot x.}_{\text{n-volte}}$$

Se $x \neq 0$ si pone per definizione $x^0 = 1$ e $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Ricordiamo le seguenti proprietà delle potenze

$$x^n x^m = xn + m$$
$$(x^n)^m = x^{nm}$$
$$x^n\, y^n = (xy)^n$$

si noti che con la scrittura x^{n^m} si intende $x^{(n^m)}$ e non $(x^n)^m$.
Sui numeri reali è inoltre definita una *relazione d'ordine* $\leq$ che gode delle seguenti proprietà: per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

1) se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$,
2) se $a \leq b$ e $c > 0$ allora $ac \leq bc$; se $a \leq b$ e $c < 0$ allora $ac \geq bc$,

Infine ricordiamo le sguenti importanti proprietà di $\mathbb{R}$:

1) $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}\ \ \exists\, q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$ (*densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$)
2) $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}\ \ \exists\, z \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tale che $x < z < y$ (*densità di* $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$)
3) Dato $x \in \mathbb{R}$, $\exists$ un *unico* elemento $m \in \mathbb{Z}$ tale che $m \leq x < m + 1$. Tale numero m è detto "parte intera" di x e si denota $m = [x]$.

$\mathbb{R}^2$ e sua rappresentazione grafica. Denotiamo con $\mathbb{R}^2$ l'insieme $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Consideriamo due rette ortogonali tra loro (una orizzontale e una verticale) dette *assi cartesiani*, denotiamo con O il punto intersezione, detto *origine degli assi*, e su ognuna delle due rette rappresentiamo $\mathbb{R}$ scegliendo dei punti-unità di misura. L'asse orizzontale è detto *asse delle ascisse* e quello verticale *asse delle ordinate.*
Associamo ad ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ il punto P ottenuto intersecando la retta perpendicolare all'asse delle ascisse nel punto a con la retta perpendicolare all'asse delle ordinate nel punto b. I numeri a e b sono le coordinate di P, rispettivamente ascissa ed ordinata.
La bisettrice del primo e terzo quadrante è il sottoinsieme: $\{(x, y) : y = x,\ x \in \mathbb{R}\}$ ossia $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. La Figura 4 mostra il piano cartesiano, l'origine $O = (0, 0)$ e due punti $P(a, b)$ e $Q(c, d)$ con a, b, c, d numeri reali positivi.

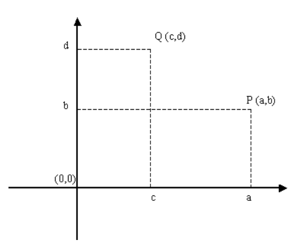


FIGURA 4. Il piano cartesiano, l'origine O e due punti P e Q.

Simmetrie. Si verifica facilmente che data una coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si hanno le seguenti simmetrie (vedi la Figura 5):

il punto $(-a, b)$ è simmetrico di (a, b) rispetto all'asse delle ordinate;
il punto $(a, -b)$ è simmetrico di (a, b) rispetto all'asse delle ascisse ;
il punto $(-a, -b)$ è simmetrico di (a, b) rispetto all'origine;
il punto (b, a) è simmetrico di (a, b) rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

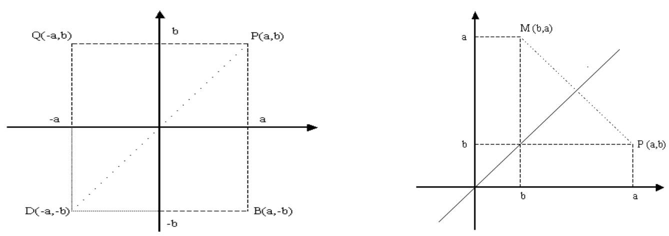


Figura 5. Simmetrie rispetto ai due assi (a sinistra), simmetria rispetto alla bisettrice (a destra).

Intervalli. Assegnati due numeri reali a, b, $a < b$, si definiscono *intervalli* gli insiemi seguenti:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, & [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}, & (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} \\
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}, \\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}.
\end{aligned}$$

Gli intervalli (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ sono detti *aperti*, l'intervallo $[a, b]$, è detto *chiuso*. L'intervallo $(a, b]$ non è nè aperto nè chiuso.

1.1. Valore assoluto.

Definizione 1.1. Il **valore assoluto** o **modulo** di un numero reale x, si denota con $|x|$ ed è definito da

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Le seguenti proprietà, di immediata verifica, discendono direttamente dalla Definizione 1.1.

proprietà 1. Siano x e y in $\mathbb{R}$; si ha

$$|x| \ge 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}; \tag{1.5}$$

$$|x| = 0 \text{ se e solo se } x = 0; \tag{1.6}$$

$$-|x| \le x \le |x|; \tag{1.7}$$

$$|x\,y| = |x|\,|y|. \tag{1.8}$$

Dalla definizione di valore assoluto segue subito che se $a > 0$ si ha

$$\boxed{|x| = a \Longleftrightarrow x = a \quad \text{oppure} \quad x = -a.} \tag{1.9}$$

Le proprietà del valore assoluto elencate nel seguente teorema sono di fondamentale importanza, soprattutto nella soluzione di disequazioni contenenti il valore assoluto (vedi il Libretto degli esercizi, Sezioni 1 e 2).

Teorema 1.3. *Siano $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, si ha*

$$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a, \tag{1.10}$$

$$|x| > a \Longleftrightarrow x < -a \text{ oppure } x > a. \tag{1.11}$$

Dimostrazione. Mostriamo l'implicazione da sinistra a destra in (1.10). Supponiamo dapprima che $x \geq 0$; allora la disuguaglianza di sinistra (cioè $-a < x$) è ovvia; per la Definizione 1.1 (di valore assoluto), si ha $|x| = x$ e quindi la relazione $|x| < a$ si riscrive $x < a$. La tesi è così provata se $x \geq 0$.
Sia ora $x < 0$; si ha subito che la diseguaglianza di destra (cioè $x < a$) è ovvia. Poichè $|x| = -x$, la relazione $|x| < a$ si scrive $-x < a$, cioè $x > -a$.
Mostriamo ora l'implicazione da destra a sinistra, cioè mostriamo che $-a < x < a \Longrightarrow |x| < a$. Se $x \geq 0$, allora $|x| = x$ e quindi per l'ipotesi si ha $|x| < a$. Se invece $x < 0$, si ha $|x| = -x$ e quindi dall'ipotesi si ottiene che $a > -x = |x|$ ossia $|x| < a$. La dimostrazione della (1.10) è così conclusa. La (1.11) si dimostra in maniera analoga. □

Si noti che la (1.10) e la (1.11) si possono scrivere anche

$$|x| < a \Longleftrightarrow x \in (-a, a)$$
$$|x| > a \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty).$$

Si verifica facilmente, utilizzando le (1.9) (1.10) e (1.11), che valgono anche le relazioni seguenti

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a, \tag{1.12}$$

$$|x| \geq a \Longleftrightarrow x \leq -a \text{ oppure } x \geq a. \tag{1.13}$$

Teorema 1.4. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \tag{1.14}$$

(disuguaglianza triangolare).

Dimostrazione. Da (1.7) si ha

$$-|x| \leq x \leq |x| \qquad - |y| \leq y \leq |y|;$$

sommiamo membro a membro, ottenendo

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|).$$

Usando la formula (1.10) con $a = |x| + |y|$ si ha la tesi. □

Osservazione 1. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b| \tag{1.15}$$

$$|a| \leq |a - b| + |b| \tag{1.16}$$

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a - b| \tag{1.17}$$

le tre formule sono *altre forme della disuguaglianza triangolare.*

Dimostrazione. La (1.15) si ottiene scrivendo $a-b$ come segue $a-b=(a-c)+(c-b)=x+y$ e usando dalla diseguaglianza triangolare (1.14).
La (1.16) si ottiene in maniera analoga scrivendo questa volta $a=(a-b)+b$.
Mostriamo ora (1.17); per la disuguaglianza triangolare

$$a = a-b+b \Longrightarrow |a| \le |a-b|+|b| \Longrightarrow |a|-|b| \le |a-b|$$
$$b = b-a+a \Longrightarrow |b| \le |b-a|+|a| \Longrightarrow -|a-b| \le |a|-|b|$$

Utilizzando ora la (1.12) si ha tesi. □

Esercizio 1.1. Verificare che

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{se } x \le 3 \\ -3+x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Soluzione Dalla definizione di valore assoluto (1.4) scrivendo $3-x$ al posto di x, si ottiene

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{se } 3-x \ge 0 \\ -(3-x) & \text{se } 3-x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 1.2. Verificare che

$$|2x-x^2| = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ -2x+x^2 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

Esercizio 1.3. Sia x_0 un punto della retta reale e sia r un numero reale positivo. Utilizzando la (1.10) verificare che l'intervallo (x_0-r, x_0+r) può essere descritto al seguente modo

$$(x_0-r, x_0+r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < r\}.$$

2. Massimi, minimi, estremi superiori, estremi inferiori.

Definizione 1.2. Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{R}$; E si dice *limitato superiormente* se esiste un numero M per cui risulti $x \le M$ per ogni x in E e il numero M si dice un *maggiorante* di E. L'insieme E si dice *limitato inferiormente* se esiste un numero m per cui risulti $m \le x$ per ogni x in E, e il numero m è detto un *minorante* per E. Se sono verificate entrambe le condizioni cioè $m \le x \le M$ per ogni x in E, allora l'insieme si dice *limitato*.

Nel seguito denoteremo con $M(E)$ l'insieme dei maggioranti di un insieme E e con $m(E)$ l'insieme dei minoranti.
È evidente che un insieme numerico è limitato se è contenuto in un intervallo (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.2. Alcuni esempi

a) gli intervalli $(0,1]$ e $(-1,2)$ sono esempi di insiemi limitati, mentre $(-\infty,1)$ è limitato superiormente ma non inferiormente e l'intervallo $(0,+\infty)$ viceversa è limitato inferiormente ma non superiormente;
b) l'insieme $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ è limitato;
c) l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$ non è limitato nè superiormente nè inferiormente;
d) l'insieme dei numeri naturali pari è limitato inferiormente ma non superiormente;
e) l'insieme seguente è limitato

$$D = \left\{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^+\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}.$$

Definizione 1.3. (*Massimo*) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Diremo che E ammette *massimo* se esiste un elemento $x_M \in E$ tale che $x \leq x_M$ per ogni $x \in E$. L'elemento x_M di E (necessariamente unico) si dice il massimo dell'insieme E e si denota con $\max E$.

Definizione 1.4. (*Minimo*) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Diremo che E ammette *minimo* se esiste un elemento $x_m \in E$ tale che $x_m \leq x$ per ogni $x \in E$. L'elemento x_m di E (necessariamente unico) si dice il minimo dell'insieme E e si denota con $\min E$.

Esempio 1.3. Riprendiamo gli insiemi nel precedente esempio cercando eventuali massimi e minimi.

a) l'intervallo $I = (0, 1]$ ha massimo uguale a 1. Non ha minimo. Infatti se esistesse il minimo, sia esso a, dovrebbe appartenere all'insieme I, cioè $0 < a < 1$; ma allora scegliendo ad esempio $a/2$, poichè $0 < a/2 < a < 1$ avremmo trovato un numero dell'insieme I più piccolo del minimo a.
Con ragionamenti simili si verifica che l'intervallo $(-1, 2)$ non ha nè massimo è minimo e che l'insieme $(-\infty, 1)$ non ha massimo e $(0, +\infty)$ non ha minimo.
b) l'insieme
$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$
ha massimo (uguale a 1). Ma non ha minimo: se ci fosse il minimo, sia esso $1/\overline{n}$, si avrebbe
$$1/\overline{n} \leq 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \text{cioè} \qquad \overline{n} \geq n \ \forall \ n \in \mathbb{N}^+$$
e questo non può essere perchè $\mathbb{N}^+$ è non limitato.

d) L'insieme P dei numeri pari ha minimo, uguale a 0;
e) Come abbiamo visto negli Esempi 1.2, l'insieme
$$D = \left\{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^+\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}.$$
è limitato. Ha ovviamente minimo (che è zero), ma non ha massimo. Questo si verifica scrivendo
$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$
e poi ragionando come in b).

Esercizio 1.4. Verificare che se A e B sono due insiemi di numeri reali tali che $A \subset B$ e B è superiormente limitato, allora anche A è superiormente limitato. Inoltre mostrare che se A e B hanno entrambi massimo allora si ha maxA $\leq$ maxB.
Cosa si può dire di analogo riguardo alla limitatezza inferiore?

Come abbiamo visto, ci sono degli insiemi che, pur essendo inferiormente limitati (o superiormente limitati) sono privi di minimo (o di massimo). Introduciamo ora i concetti di *estremo inferiore* e *estremo superiore*, che in questi casi sono sostitutivi dei concetti di minimo e massimo rispettivamente.
Partendo dalla definizione di numero reale come allineamento decimale abitrario (come fatto in queste note), si può dimostrare che

se un insieme non vuoto è superiormente limitato, l'insieme dei suoi maggioranti ha minimo.

se un insieme non vuoto è inferiormente limitato, l'insieme dei suoi minoranti ha massimo.

Omettiamo questa dimostrazione che è tutt'altro che semplice e ci limitiamo a fare un semplice esempio: si consideri l'intervallo $(0, 1)$ (che è privo di massimo); l'insieme dei suoi maggioranti è l'intervallo $[1, +\infty)$ il cui minimo è 1.

Definizione 1.5. Sia E un sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di $\mathbb{R}$. Il minimo dell'insieme dei maggioranti di E si chiama *estremo superiore* di E e si denota con $\sup E$.
Sia E un insieme inferiormente limitato. Il massimo dei suoi minoranti si chiama *estremo inferiore* di E e si denota con $\inf E$.

Si noti che l'estremo superiore, se esiste, è unico (vedi la definizione di massimo). Lo stesso vale per l'estremo inferiore.
Si può provare che il massimo, se esiste, è anche estremo superiore e il minimo, se esiste è anche estremo inferiore. Omettiamo queste verifiche.
Non è difficile verificare che

Un insieme non vuoto e superiormente limitato ha massimo se e solo se il suo estremo superiore appartiene all'insieme.

Un insieme non vuoto e inferiormente limitato ha minimo se e solo se il suo estremo inferiore appartiene all'insieme.

Questo risultato, di cui omettiamo la verifica, è utile nella ricerca del massimo e del minimo di un insieme (vedi gli esempi qui sotto).

Esempio 1.4. Cerchiamo gli estremi inferiore e superiore e i massimi e minimi di alcuni insiemi.

1) Sia $E = [-1, 3)$. L'insieme dei maggioranti di E è $[3, +\infty)$ il minimo di questo insieme è 3. Quindi 3 è l'estremo superiore di E (e non è massimo). L'insieme dei minoranti di E è $(-\infty, -1]$ il massimo di questo insieme è -1, che quindi è l'estremo inferiore; è anche minimo perchè appartiene ad E.
2) Sia $B = (-2, 0] \cup (1, 3)$.
L'insieme dei maggioranti è $M(B) = [3, +\infty)$ quindi l'estremo superiore è 3, poichè non appartiene a B il massimo non esiste. L'insieme dei minoranti è $m(B) = (-\infty, -2]$. Quindi l'estremo inferiore di B è 2; poichè non appartiene a B il minimo non esiste.
3) Sia $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$. Abbiamo già visto che ha massimo, che è 1, ma non ha minimo. Mostriamo che l'insieme dei minoranti è $(-\infty, 0]$. È ovvio che ogni elemento di $(-\infty, 0]$ è un minorante. Non ce ne sono altri: se $a > 0$ fosse un minorante si avrebbe
$$0 < a \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \qquad \text{e quindi} \qquad n \leq \frac{1}{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$
ma questo non è possibile perchè $\mathbb{N}^+$ non è limitato. Abbiamo così mostrato che l'insieme dei minoranti è $(-\infty, 0]$; possiamo concludere che 0 è l'estremo inferiore.

Esercizi assegnati: tutta la Sezione 1 del Libretto degli esercizi.

CAPITOLO 2

Funzioni

1. Il concetto di funzione

Definizione 2.1. Siano A e B due insiemi non vuoti, una *funzione f di dominio A a valori in B* (detto *codominio*) è una legge che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B. Scriveremo:

$$f : A \to B$$

(che si legge "f definita da A a B"). La scrittura

$$f : x \mapsto f(x)$$

(che si legge "f associa $f(x)$ ad x") indica come la funzione f agisce sugli elementi. Il simbolo $f(x)$ indica il valore che f associa a x e si chiama "immagine di x mediante f".

L'insieme dei valori assunti da f:

$$\operatorname{Im} f = f(A) := \{f(x) : \ x \in A\}$$

è detto *immagine* o *rango* di f. Se D è un sottoinsieme di A, l'insieme

$$f(D) := \{f(x) \ : x \in D\}$$

è detto *immagine di f* in D .

Definizione 2.2. (Prolungamenti e restrizioni) Sia $f : A \to B$. Se C è un insieme tale che $A \subset C$ una qualunque funzione $g : C \to E$ tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$ è detta *prolungamento* di f a C. Se D è un sottoinsieme di A con $D \neq A$, allora la funzione $f_{|D} : D \to B$ tale che

$$f_{|D}(x) = f(x) \qquad \forall x \in D$$

è detta *restrizione* di f a D.

Definizione 2.3. (*Iniettività, surgettività, bigettività*) Una funzione $f : A \to B$ è detta *iniettiva* se per ogni coppia $x_1 \neq x_2$ di A si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$ (equivalentemente se $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$), ossia se punti distinti hanno immagini distinte.
La funzione f è detta *surgettiva* se per ogni $y \in B$ esiste un $x \in A$ tale che $y = f(x)$; ossia ogni elemento del codominio B è immagine di qualche punto di A.
La funzione f è detta *bigettiva* se è sia iniettiva che surgettiva.

Si noti che, dalla definizione di $f(A)$ si ha:

$$f : A \to B \ \text{ iniettiva} \qquad \Longrightarrow \qquad f : A \to f(A) \ \text{ bigettiva.}$$

Le funzioni di cui ci occuperemo in questo corso sono le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (funzioni reali di una variabile reale)

2. Funzioni reali di variabile reale

Nel precedente paragrafo abbiamo introdotto il concetto generale di funzione. Le funzioni di cui ci occuperemo d'ora in poi sono le *funzioni reali di variabile reale,* cioè le funzioni in cui sia il dominio che il codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$f : D \to \mathbb{R} \qquad D \subseteq \mathbb{R}$$

Le funzioni più comuni hanno come dominio e come immagine un intervallo (limitato o illimitato), oppure *l'unione di un numero finito di intervalli.* Si definisce *grafico* di f il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito

$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in D\};$$

vedi la Figura 1 (a sinistra).

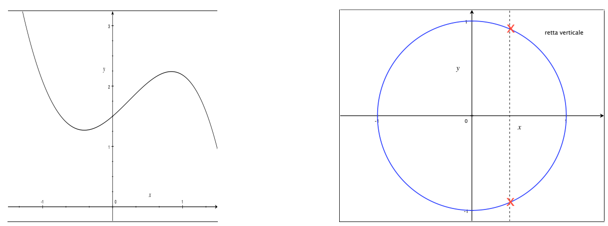


FIGURA 1. A sinistra: grafico di una funzione di dominio $[-1.5, 1.5]$, a destra: test della retta verticale.

OSSERVAZIONE 2. Si noti che la proprietà fondamentale che fa di $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione, ossia il fatto che ad ogni $x \in D$ corrisponde uno e un sol numero $f(x) \in \mathbb{R}$ ha il seguente significato geometrico: *ogni retta parallela all'asse delle ordinate che "taglia" l'asse delle ascisse in un punto x del dominio D interseca il grafico in uno ed un sol punto.*

ESEMPIO 2.1. La circonferenza in Figura 1 non è il grafico di una funzione, perchè ad ogni valore di $x \in (-1, 1)$ corrisponde più di un valore di y (due in questo caso). Ricordiamo che si può verificare graficamente se una curva è una funzione, facendo il *test delle rette verticali*: se una retta verticale interseca il grafico in più di un punto, allora la curva non è il grafico di una funzione.

Il grafico di una *equazione* (o di una *disequazione)* che coinvolge le variabili x e y è l'insieme dei punti (x, y) del piano che soddisfano l'equazione (o la disequazione). Ad esempio il grafico della disequazione $x^2 + y^2 \leq 4$ è il cerchio di centro l'origine e raggio 2. Il grafico della equazione $y^2 = x + 1$ è una parabola, il grafico della disequazione $|y| \leq x^2$ è in Figura 2.

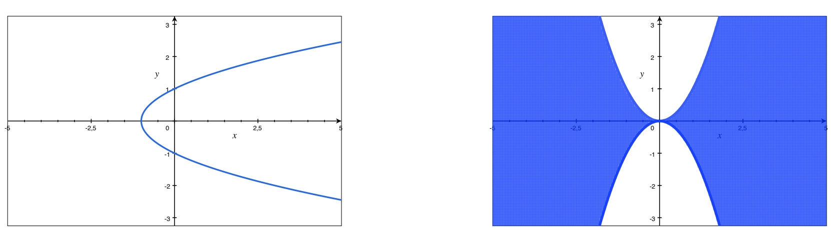


FIGURA 2. Grafico della equazione $y^2 = x+1$ (a sinistra), grafico : della disequazione $|y| \leq x^2$ (destra).

Funzioni limitate. Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice *limitata superiormente* se l'immagine $f(D)$ è limitata superiormente cioè esiste un $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in D$. Si noti che in tal caso il grafico della funzione è contenuto nel semipiano dei punti (x, y) tali che $y \leq M$.

Una funzione f si dirà *inferiormente limitata* l'insieme immagine $f(D)$ è limitato inferiormente cioè se esiste un m tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in D$. Si noti che in tal caso il grafico della funzione è contenuto nel semipiano dei punti (x, y) tali che $y \geq m$.
Infine una funzione f si dice *limitata* se è limitata sia superiormente che inferiormente cioè esistono m, M tali che

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{per ogni } \; x \in D.$$

Sia $f : A \mapsto \mathbb{R}$, un punto x_M in cui la funzione f assume il suo valore massimo, viene detto *punto*

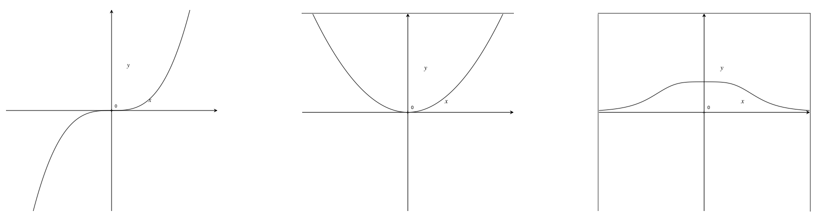


Figura 3. Da sinistra a destra: Funzioni x^3, x^2 e $1/(1 + x^4)$

di massimo assoluto; un punto x_m viene detto *punto di minimo assoluto* se in esso la funzione assume il suo valore minimo, dunque

$$f(x_M) = \max f(A) \qquad\qquad f(x_m) = \min f(A).$$

Funzioni pari e funzioni dispari. Una funzione f reale, definita in un insieme A simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, si dice una funzione *pari* se si ha

$$f(x) = f(-x)$$

per ogni $x \in A$. Il grafico di una tal funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
Una funzione si dice *dispari* se

$$f(x) = -f(-x)$$

per ogni $x \in A$; i grafici di tali funzioni sono simmetrici rispetto all'origine. La prima funzione nella Figura 3 è dispari, mentre le altre due sono pari.

Funzioni monotone. Una funzione f si dice *crescente* se per ogni coppia di punti x_1, x_2 nel dominio di f si ha

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \; f(x_1) \leq f(x_2); \tag{2.1}$$

Se l'implicazione vale con il segno di minore al posto di minore o uguale la funzione si dice *strettamente crescente*.
Una funzione è detta *decrescente* se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$ si ha

$$x_1 < x_2 \;\; \Longrightarrow \;\; f(x_1) \geq f(x_2); \tag{2.2}$$

Se l'implicazione vale con il segno di maggiore al posto di maggiore o uguale, la funzione si dice *strettamente decrescente* (vedi la Figura 4). Se una funzione f verifica uno dei quattro casi precedenti (crescente, decrescente, strettamente crescente o strettamente decrescente viene detta *monotona*. La funzione $f(x) = x^2$ non è nè crescente nè decrescente nel suo dominio. La funzione costante è sia crescente che decrescente.

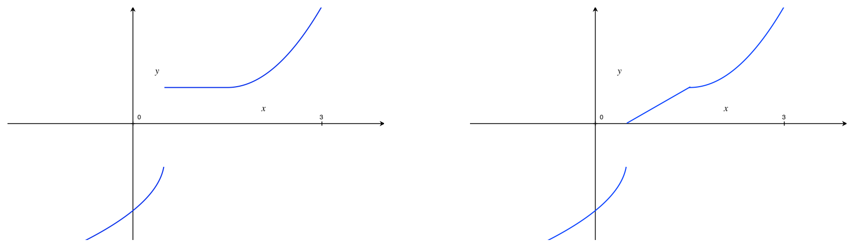


FIGURA 4. A sinistra: una funzione crescente, a destra una funzione strettamente crescente

3. Alcune funzioni elementari.

In questa sezione esaminiamo alcune elementari funzioni di variabile reale, illustrandone le proprietà e fornendo il loro grafico.

Funzioni lineari.

$$f(x) = m\,x + q \qquad m,\, q \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

Sono chiamate *lineari* ma sarebbe più appropriato chiamarle *affini* riservando l'aggettivo *lineari* esclusivamente al caso $q = 0$. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$; se $m = 0$ la funzione è costante e il grafico è una retta parallela all'asse delle ascisse. Se $m \neq 0$ il grafico è una retta non verticale passante per i punti $(0, q)$ e $(-q/m, 0)$. L'angolo che tale retta forma con l'asse delle ascisse è: *acuto* se $m > 0$, *ottuso* se $m < 0$ (vedi Figura 5).
Il numero m è detto *coefficiente angolare* della retta: se $m > 0$ la funzione è strettamente crescente, se $m < 0$ la funzione è strettamente decrescente (vedi Figura 5 a sinistra). Ricordiamo che m è la tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle x.

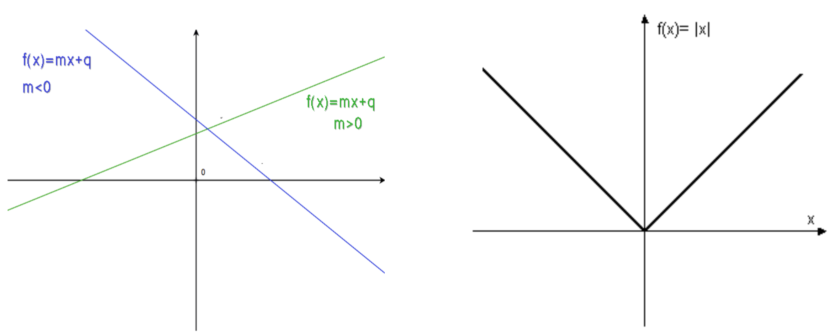


FIGURA 5. A sinistra: $f(x) = mx + q$ strett. crescente se $m > 0$, strett. decrescente se $m < 0$; a destra: $f(x) = |x|$.

Funzione modulo. La funzione definita da

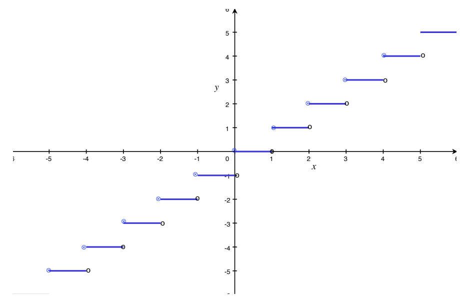
$$f(x) = |x| \tag{3.2}$$

è detta *funzione modulo* (vedi il suo grafico in Figura 5, a destra); è pari e inoltre è strettamente decrescente in $\mathbb{R}^-$ e strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$.

Funzione parte intera. La funzione

$$f(x) = [x], \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

è detta *funzione parte intera* (ricordiamo che $[x]$ denota il più grande intero minore o uguale ad x). La funzione ha dominio $\mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}$. È costante a tratti e crescente (vedi il grafico nella figura a lato.



Funzione potenza intera. Sia $n \in \mathbb{N}$; è detta *funzione potenza* la funzione

$$f(x) = x^n \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

se $n > 0$ e $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se $n = 0$. Le proprietà della funzione dipendono da n.
Se *n dispari*:

$f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$
f è dispari: $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$
f è strettamente crescente
l'immagine di f è $\mathbb{R}$

Le prime due proprietà sono immediate. Verifichiamo che è strettamente crescente. Se $x_1 < 0 < x_2$ si ha $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Se $0 < x_1 < x_2$, moltiplicando entrambi i membri per x_1 e poi per x_2 si ha $x_1^2 < x_1 x_2 < x_2^2$. Quindi $x_1^2 < x_2^2$. Iterando il procedimento si ottiene $(x_1)^n < (x_2)^n$. Se $x_1 < x_2 < 0$ si ha

$$-x_1 > -x_2 > 0 \Longrightarrow (-x_1)^n > (-x_2)^n \Longrightarrow (-1)^n (x_1)^n > (-1)^n (x_2)^n \Longrightarrow (x_1)^n < (x_2)^n.$$

Per quanto riguarda la quarta proprietà, si dimostra che per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste un $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$; rimandiamo questa verifica ai capitoli successivi.
Se *n pari*:

$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;
f è pari : $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$
f è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e è strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$
l'immagine di f è $[0, +\infty)$.

Le prime tre proprietà si verificano in modo a nalogo a quanto visto per n dispari. Rimandiamo la verifica della quarta proprietà ai capitoli successivi.
I grafici di alcune funzioni potenza si trovano in Figura 6.

Funzione potenza intera negativa Sia $n > 0$ si definisce

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad x \neq 0.$$

Questa funzione ha lo stesso segno e la stessa parità di x^n. Inoltre se *n è dispari* f è strettamente decrescente su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.
Se *n è pari* f è strettamente crescente su $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$. La verifica di queste proprietà è lasciata per esercizio. Rimandiamo la verifica dei seguenti fatti: l'immagine di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se n è dispari ed è $(0, +\infty)$ se n è pari. I grafici di alcune funzioni potenza negativa si trovano in Figura 7.

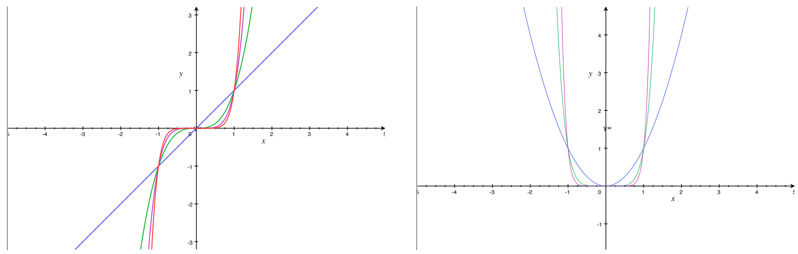


FIGURA 6. Funzioni x^n con n dispari (a sinistra) e pari (a destra)

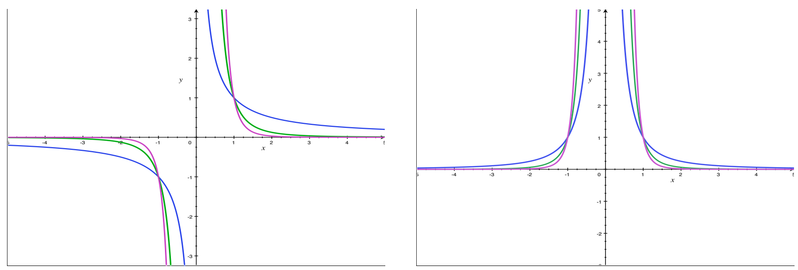


FIGURA 7. Funzioni $1/x^n$ con vari valori di n dispari (a sinistra) e pari (a destra)

Polinomi e funzioni razionali. In questo paragrafo introduciamo le funzioni polinomiali di grado n.

DEFINIZIONE 2.4. Sia $n \geq 0$ un intero e siano $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dei numeri reali, la funzione

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{3.5}$$

è detta *polinomio*. I numeri $a_0, \ldots, a_n$ si dicono coefficienti del polinomio. Se $n \neq 0$ e $a_n \neq 0$ il numero n si dice *grado* del polinomio.

È evidente che la somma, la differenza e il prodotto di polinomi è ancora un polinomio. La funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ dove $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (polinomio di grado 2), ha per grafico una parabola.

DEFINIZIONE 2.5. Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi, con Q polinomio non nullo, allora la funzione

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{3.6}$$

è detta *funzione razionale*. $R(x)$ è definita in tutti i punti che non annullano il denominatore.

Sono funzioni razionali tutti i polinomi e tutte le funzioni potenza intera negativa viste al punto precedente.

ESEMPIO 2.2. Tre esempi di funzioni razionali

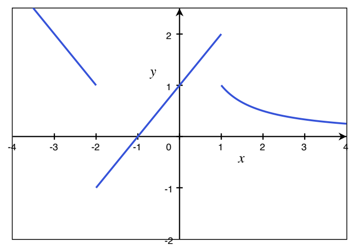
$$\frac{x^2 + 3x + 10}{x^4 + 1}; \qquad \frac{x^3 + 1}{(x^2 - 1)(x + 3)}; \qquad \frac{x(x-2)}{(x^2 + 2x + 5)}.$$

La prima e la terza sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$ la seconda per $x \neq -1, 1, 3$.

Funzioni definite a tratti. Un funzione può essere *definita a tratti*, ossia con espressioni diverse in intervalli diversi del suo dominio. Un esempio di funzione definita a tratti è il valore assoluto. Qui di seguito forniamo un altro esempio.

Esempio 2.3. La funzione f qui sotto ha grafico nella figura a lato.

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x \in (-\infty, -2] \\ x+1 & \text{se } x \in (-2, 1) \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$



4. Simmetrie, traslazioni, compressioni e dilatazioni di grafici.

Sia f una funzione reale di variabile reale (si consideri ad esempio la funzione in Figura 8, a sinistra). Mediante delle semplici trasformazioni geometriche possiamo tracciare il grafico delle funzioni seguenti:

$$y_1 = -f(x)\ , \qquad y_2 = f(-x)\ , \qquad y_3 = |f(x)|; \qquad y_4 = f(|x|)$$
$$y_5 = f(x) + c; \qquad y_6 = f(x+c); \qquad y_7 = f(cx),\ c > 0 \quad c \neq 1.$$

1. Il grafico di $-f(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ cambiando segno ai valori di f quindi "riflettendo" il grafico di f rispetto all'asse delle ascisse (vedi la Figura 8 a destra).
2. Il grafico di $f(-x)$ è il riflesso del grafico di f rispetto all'asse delle ordinate; infatti questa funzione è composta mediante la f e la funzione che porta x in $-x$ (vedi la Figura 9a sinistra).
3. Grafico di $|f(x)|$. Ricordiamo che $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$. Quindi nel passare dal grafico di f a quello di $|f|$ i punti con ordinata non negativa rimangono inalterati, mentre quelli a ordinata negativa vengono trasformati nel loro simmetrico rispetto all'asse delle x. Quindi il grafico di $|f|$ si ottiene da quello di f ribaltando rispetto all'asse delle ascisse la parte di grafico che sta nel semipiano delle ordinate negative e lasciando invariato il resto. Vedi la Figura 9 (a destra).
4. Grafico di $f(|x|)$. Questa funzione è pari, inoltre il suo grafico coincide con quello di f su $[0, +\infty)$. Vedi la Figura 10 (a sinistra).
5. Grafico di $f(x) + c$. Se $c > 0$ il grafico si ottiene traslando verso l'alto di una quota c il grafico di f; se $c < 0$ la traslazione sarà verso il basso; vedi la Figura 10 (a destra).
6. Grafico di $f(x+c)$. Se $c > 0$ il grafico di questa funzione si ottiene *traslando* a sinistra il grafico di f lungo l'asse delle ascisse di c unità (se $c < 0$ la traslazione è a destra). Per questa trasformazione vedi la Figura 11, dove sono rappresentate le funzioni $f(x) = 1/(1+x^2)$ (blu) e $f(x-1)$ (in rosso).
7. Grafico di $f(cx)$. Se $c > 0$ il grafico di $f(cx)$ si ottiene effettuando un cambiamento di scala sull'asse delle ascisse. Se $c > 1$ si ha che cx cresce più rapidamente di x, perciò si tratta di una "compressione"; se $0 < c < 1$ si tratta di una "dilatazione". Si veda ad esempio la Figura 12 dove sono rappresentati i grafici delle funzioni $f(x) = 1/(1+x^2)$ (blu) e della sua compressa $f(3x) = 1/(1+9x^2)$ (in rosso).

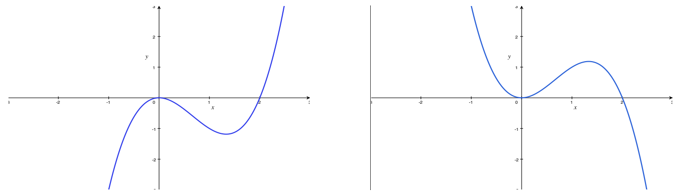


FIGURA 8. Grafico di $f(x) = x^3 - 2x^2$ (a sinistra); grafico di $-f(x)$ (destra)

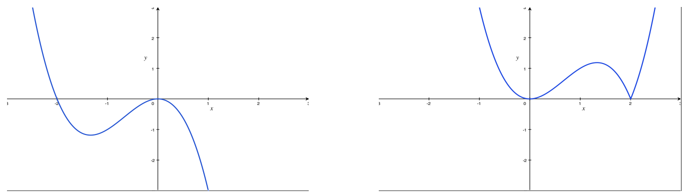


FIGURA 9. Grafico di $f(-x)$ (sinistra), e di $|f(x)|$(destra)

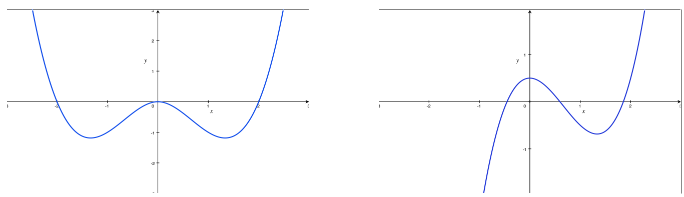


FIGURA 10. Grafico di $f(|x|)$ (sinistra) e grafico di $f(x) + 1/2$ (destra).

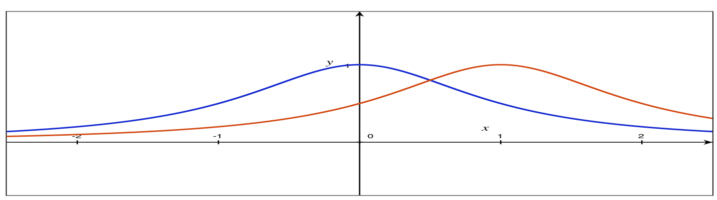


FIGURA 11. Grafico di $f(x) = 1/(1 + x^2)$ (blu) Grafico di $f(x) = 1/(1 + (x-1)^2)$ (rosso).

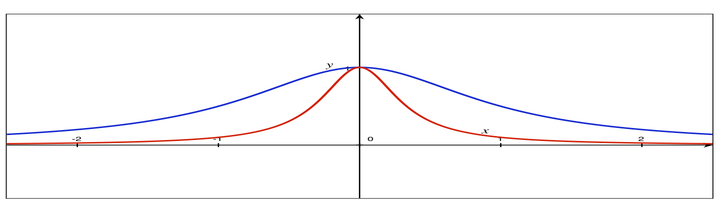


FIGURA 12. Grafico di $f(x) = 1/(1 + x^2)$ (blu) e della sua compressa $f(3x)$ (in rosso).

5. Funzione composta

Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ due funzioni. Se per ogni $x \in A$ si ha $f(x) \in B$ (cioè $f(A) \subset B$), allora ha senso $g(f(x))$ per $x \in A$:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)).$$

La funzione $h : A \to \mathbb{R}$ così definita è detta *funzione composta* di f e g o semplicemente *composizione di f e g* e si denota $g \circ f$. Quindi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in A.$$

In questa scrittura è molto importante l'ordine in cui si scrivono i simboli: la prima funzione che opera sulla variabile indipendente è quella che sta a destra del simbolo $\circ$.

Se $f(A) \not\subset B$ ma $f(A) \cap B$ è non vuoto, la funzione composta $g \circ f$ avrà come dominio l'insieme $\operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in A : f(x) \in B\}$.

Può accadere che siano definite entrambe le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$, ma in generale queste due funzioni saranno diverse.

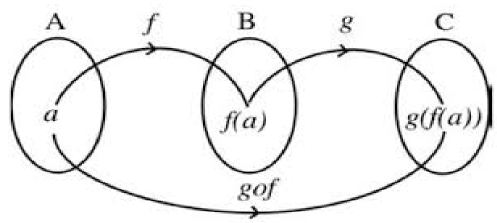


FIGURA 13. Funzione composta

ESEMPIO 2.4. Siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$. In questo caso si possono definire entrambe le funzioni composte, il loro insieme di definizione è $\mathbb{R}$ e si ha

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

ESEMPIO 2.5. Siano $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = |x|$. Anche in questo caso l'insieme di definizione di entrambe le funzioni è $\mathbb{R}$; si ha

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 - 1) = |x^3 - 1|,$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^3 - 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. I grafici delle due funzioni composte sono in Figura 14.

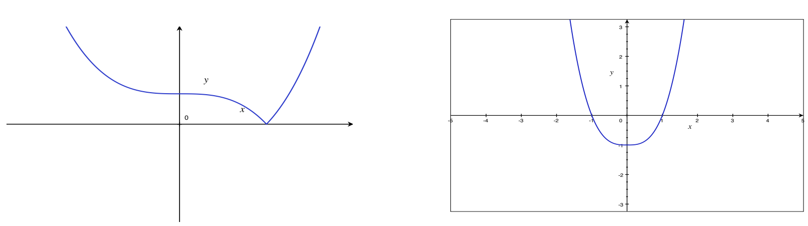


FIGURA 14. Funzioni $g \circ f$ (a sinistra) e $f \circ g$ (a destra) dove $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = |x|$

6. Funzione inversa e sue proprietà.

Questa sezione descrive un importante metodo che è spesso usato per costruire nuove funzioni a partire da funzioni date. Cominciamo con un semplice esempio.

ESEMPIO 2.6. Sia f la funzione, definita sull'intervallo $[0, 2]$ dall'equazione $f(x) = 2x + 1$. La sua immagine (rango) è l'intervallo $[1, 5]$ e, ad ogni punto $x \in [0, 2]$, f associa un sol valore y in $[1, 5]$, precisamente

$$y = 2x + 1. \tag{6.1}$$

Viceversa, per ogni y in $[1, 5]$ esiste esattamente un x in $[0, 2]$ tale che $y = f(x)$. Per trovare questo x risolviamo l'equazione (6.1) ottenendo

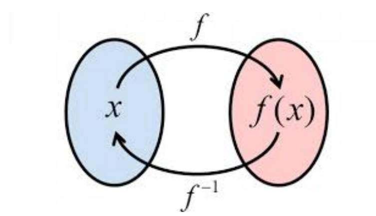
$$x = \frac{1}{2}(y - 1)$$

Questa equazione definisce x come funzione di y; se denotiamo questa funzione con g si ha

$$g(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$$

per ogni y in $[1, 5]$.

Consideriamo ora una funzione f più generale, con dominio A e immagine $B = f(A)$. Per ogni $x \in A$ c'è esattamente un $y \in B$ tale che $y = f(x)$. Per ogni $y \in B$ c'e almeno un $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Supponiamo ora *che ce ne sia esattamente uno solo*, cioè che f sia iniettiva; allora possiamo definire una nuova funzione g su B come segue



$$\boxed{g(y) = x \qquad \text{significa} \qquad y = f(x).}$$

In altre parole il valore di g in ogni $y \in B$ è quell'unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Questa funzione g viene chiamata *inversa* di f e il processo viene chiamato *inversione*. Si noti che

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A, \qquad\qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

In simboli

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = x \qquad\qquad y \xrightarrow{g} g(y) \xrightarrow{f} f(g(y)) = y$$

DEFINIZIONE 2.6. - Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ *iniettiva* è detta **invertibile**. La funzione

$$f^{-1} : f(A) \to A$$

che ad ogni $y \in f(A)$ associa l'unico elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$ è detta *funzione inversa* di f. La funzione f^{-1} è (iniettiva e quindi) invertibile e si ha $(f^{-1})^{-1} = f$.

La Figura 15 mostra i grafici di una funzione non invertibile e di una funzione invertibile.

TEOREMA 2.1. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile e sia f^{-1} la sua inversa; si ha:*

a) $\operatorname{dom} f^{-1} = f(A)$;
b) $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$;
c) $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall\, x \in A \qquad e \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y\,, \forall\, y \in f(A)$;
d) G_f *e* $G_{f^{-1}}$ *sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.*

Dimostrazione. Le prime tre discendono immediatamente dalla definizione. Verifichiamo l'ultima proprietà. Sia $(x, y) \in G_f$; dalla definizione di G_f si ha $y = f(x)$ da cui, per la b), otteniamo $(x, y) = (f^{-1}(y), y)$ che è il punto simmetrico, rispetto alla bisettrice del I^o e III^o quadrante, di $(y, f^{-1}(y)) \in G_{f^{-1}}$. $\square$

La Figura 16 illustra il punto d) del teorema precedente, cioè che il grafico della funzione inversa di f si ottiene dal grafico di f, ribaltando quest'ultimo rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Osserviamo che, al contrario, il problema di trovare l'espressione esplicita dell'inversa è difficile, spesso impossibile. Talvolta quando si riesce a trovare questa espressione, nella forma $x = f^{-1}(y)$ è conveniente cambiare il nome delle variabili x, y in y, x rispettivamente, scrivendo $y = f^{-1}(x)$.Questo permette di tracciare il grafico di f e della sua inversa su uno stesso sistema di assi cartesiani.

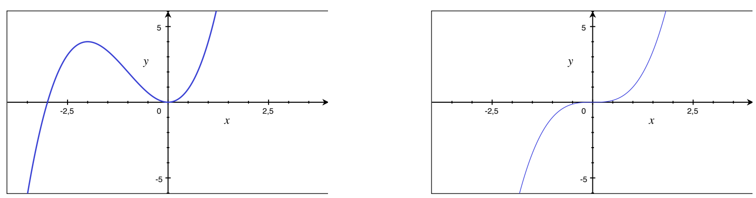


Figura 15. Funzione non invertibile (sinistra), funzione invertibile (destra)

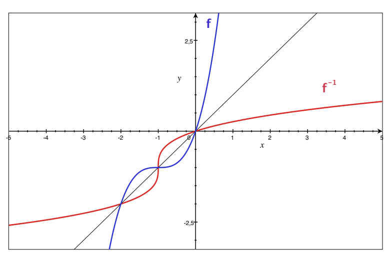


Figura 16. I grafici di $f = (x + 1)^3 - 1$ e della sua inversa sono simmetrici rispetto a $y = x$.

Il teorema seguente mostra che la stretta monotonia è condizione sufficiente per l'invertibilità.

Teorema 2.2. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Allora f è invertibile e f^{-1} ha la stessa monotonia.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia strettamente crescente, nel caso strettamente decrescente si procede maniera analoga.
Siano $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. Se $x_1 < x_2$, dalla stretta crescenza di f, si ha $f(x_1) < f(x_2)$ quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$; la stessa conclusione si ottiene se $x_1 > x_2$. Quindi f è iniettiva e perciò invertibile.
Proviamo ora che l'inversa è strettamente crescente. Siano $y_1, y_2 \in f(A)$ con $y_1 < y_2$; per l'iniettività di f^{-1} si ha $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$. Se fosse $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ si avrebbe, per la stretta crescenza di f,

$$f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2)) \quad \text{cioè} \quad y_1 > y_2$$

che contraddice la scelta fatta $y_1 < y_2$. Allora deve essere $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ cioè f^{-1} è strettamente crescente. $\square$

Osservazione 3. La stretta monotonia non è una condizione necessaria perchè una funzione sia invertibile, infatti ci sono funzioni invertibili non strettamente monotone, come mostra il seguente esempio

Esempi 2.1. La funzione nella Figura 17 a sinistra è invertibile perchè iniettiva; ma non è monotona. Un secondo esempio è la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{6.2}$$

che non è strettamente monotona. Come sappiamo il suo dominio e la sua immagine sono l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vedi grafico in Figura 17). È immediato rendersi conto che è iniettiva nel suo dominio. Allora ogni elemento di $\mathrm{Im}\, f$ è immagine di un unico elemento di $\mathrm{Dom} f$. La funzione f è quindi invertibile. L'inversa è la funzione stessa: dalla equazione $y = \frac{1}{x}$ ricaviamo x in funzione di y ottenendo $x = \frac{1}{y}$ e quindi l'inversa è

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y}.$$

Si noti inoltre che, come enunciato punto d) del Teorema 2.1 il grafico G_f di f, è simmetrico rispetto alla bisettrice del I^o e III^o quadrante e $G_f = G_{f^{-1}}$.

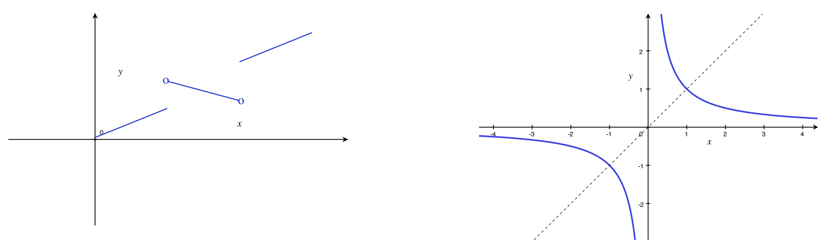


Figura 17. Due funzioni invertibili ma non monotone (a destra $f(x) = 1/x$ e la retta $y = x$).

7. Altre funzioni elementari

Il teorema sulla funzione inversa ci permette ora di considerare altre funzioni elementari e le loro inverse, quando queste esistono.

Funzioni radici n-esime

Sia n *dispari*. La funzione potenza intera (3.4) con n dispari è invertibile su $\mathbb{R}$, perchè strettamente crescente. L'inversa è definita su $\mathbb{R}$ e per il Teorema 2.2 è strettamente crescente; è detta *funzione radice n-esima*, è indicata con la notazione

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \tag{7.1}$$

Dalla proprietà c) del Teorema 2.1 si ha

$$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\sqrt[n]{x})^n = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \text{(n dispari).}}$$

Se n è pari la funzione potenza non è invertibile su $\mathbb{R}$, però è invertibile la sua restrizione $f_{/[0,+\infty)}$ all'intervallo $[0, +\infty)$ che ha immagine su $[0, +\infty)$. L'inversa è dunque definita su $[0, +\infty)$ e per il Teorema 2.2 è strettamente crescente; è detta *funzione radice n-esima* ed è indicata con la notazione (7.1). Per la c) del Teorema 2.1 si ha

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \forall x \in [0, +\infty) \qquad\qquad (\sqrt[n]{x})^n = x \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

per n pari. Mostriamo ora che la prima di queste relazioni può essere estesa anche ai valori di $x < 0$ infatti se n pari e $x < 0$

$$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{(-x)^n} = -x$$

Si ha così

$$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\sqrt[n]{x})^n = x \quad \forall\, x \in [0, +\infty) \qquad (\text{n pari})}$$

Il grafico della funzione radice, ottenuto per simmetria da quelli delle funzioni potenza n-esima sono in Figura 18.

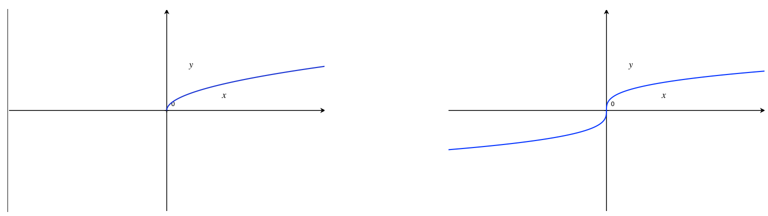


FIGURA 18. Funzioni radice pari ($n = 2$) e dispari ($n = 3$)

L'operazione di elevamento a potenza razionale Abbiamo sopra definito la radice n-esima di un numero reale, cioè la potenza con esponente $1/n$ con $n \neq 0$. Possiamo facilmente estendere l'operazione di elevamento a potenza ad ogni esponente *razionale* q; supponiamo che questo esponente sia della forma $q = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^+$ dove m e n sono primi fra loro. Se la base a è positiva:

$$a^q := (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Se la base a è negativa a^q si definisce allo stesso modo *purchè non sia m dispari ed n pari* . Ad esempio

$$(-2)^{3/5} = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8} \tag{7.2}$$

$$(-2)^{2/5} = \sqrt[5]{(-2)^2} = \sqrt[5]{4} \tag{7.3}$$

$$(-2)^{3/4} = \sqrt[4]{-8} \qquad \text{non esiste} \tag{7.4}$$

Le proprietà principali delle potenze sono .

PROPRIETÀ 2. Siano a, b numeri reali positivi e c, d due numeri razionali, si ha

- E_1 $\quad a^0 = 1 \quad 1^c = 1$
- E_2 $\quad a^c > 0$
- E_3 $\quad a^{c+d} = a^c \cdot a^d$
- E_4 $\quad (ab)^c = a^c \cdot b^c$
- E_5 $\quad (a^b)^c = a^{bc}$
- E_6 $\quad$ se $c < d \Longrightarrow a^c \lesseqgtr a^d$ se $a \gtreqless 1$
- E_7 $\quad$ se $c > 0$ allora $0 < a \leq b \Longrightarrow a^c \leq b^c$.

La verifica di queste proprietà è lasciata per esercizio. Nel paragrafo seguente estenderemo l'operazione di elevamento a potenza agli esponenti reali e definiremo la funzione potenza con esponente reale.

7.1. Funzioni esponenziali e logaritmiche. Nel precedente paragrafo abbiamo definito a^q con $q \in \mathbb{Q}$. Ci proponiamo ora di definire a^x con $a > 0$, per ogni x reale. Iniziamo con il seguente esempio.

Esempio 2.7. Vogliamo definire il numero 2^π. Un tentativo naturale potrebbe essere il seguente. Consideriamo l'allineamento decimale di π, le prime 20 cifre sono

$$\pi = 3.14159265358979323846\dots$$

(se ne conoscono migliaia di miliardi). Denotiamo con q_k il numero (razionale) ottenuto ritenendo k cifre decimali ($k = 0, 1, 2, \dots$) e costruiamo la sequenza 2^{q_k} con k via via più grande. Nella prima colonna della seguente tabella compaiono le potenze 2^{q_k} con gli esponenti razionali q_k ($k = 0, 1, 2 \dots, 7 \dots$) e nella seconda i corrispondenti valori (troncati a 7 cifre dopo la virgola)

2^{q_k}	*valore troncato*
2^3	$8.0000000\dots$
$2^{3.1}$	$8.5741877\dots$
$2^{3.14}$	$8.8152409\dots$
$2^{3.141}$	$8.8213533\dots$
$2^{3.1415}$	$8.8244110\dots$
$2^{3.14159}$	$8.8249615\dots$
$2^{3.141592}$	$8.8249738\dots$
$\vdots$	$\vdots$

Si vede che le cifre decimali nella colonna di destra via via "si stabilizzano". Si intuisce che se si conoscessero tutte le cifre decimali di π (e quindi tutta la infinita sequenza $q_k, k \in \mathbb{N}$) e se fosse possibile iterare il procedimento infinite volte potremmo individuare un numero decimale illimitato. Questo numero reale potrebbe essere assunto come definizione di 2^π. La seguente definizione di potenza con esponente reale evita queste difficoltà.

Definizione 2.7. (Potenza ad esponente reale di un numero positivo) Sia $a > 0$ e x numero reale. Se $a > 1$ poniamo

$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\, q \le x.\} \tag{7.5}$$

Se $0 < a < 1$ definiamo

$$a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}.$$

Verifichiamo che la definizione ha senso perchè l'insieme $A = \{a^q : q \in \mathbb{Q},\, q \le x\}$ è limitato superiormente. Scegliamo un qualunque numero razionale $s > x$ e mostriamo che $M = a^s$ è un maggiorante di A. Sia $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q \le x$, allora si ha $q < s$ e quindi, per la $E6$,

$$a^q < a^s = M \qquad \forall q \in \mathbb{Q},\, q \le x.$$

Abbiamo provato che A è limitato superiormente e perciò ha estremo superiore finito (che è unico, come sappiamo). Abbiamo così definito la potenza ad esponente reale di un numero positivo. Si può verificare (verifica tutt'altro che immediata) che valgono le proprietà delle potenze elencate in Proprietà 2; qui sotto trascriviamo alcune di queste proprietà:

PROPRIETÀ 3. Dati $a\,,\,b > 0\,,\ a\,,\,b \neq 1\,,$

(1) $a^x\, a^y = a^{x+y} \qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \forall\, x\,,y \in \mathbb{R}$

(2) $(a\,b)^x = a^x\, b^x \qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(3) $(a^x)^y = a^{x\,y} \qquad \forall\, x\,,y \in \mathbb{R}$

(4) $x < y \Longrightarrow a^x \lesseqgtr a^y$ se $a \gtreqless 1$

L'uguaglianza (7.5) definisce una funzione su $\mathbb{R}$ detta *funzione esponenziale* di *base a*. Dalla (4) delle proprietà su elencate si ha che la funzione è strettamente crescente se $a > 1$, è strettamente decrescente se $0 < a < 1$. Se $a = 1$ la funzione è costante. Si può provare che l'immagine di f è $(0, +\infty)$, rimandiamo la verifica di questo fatto ai successivi capitoli.
La Figura 19 mostra il grafico di alcune funzioni esponenziali con diverse basi, minori di 1 (a sinistra) e maggiori di 1 (a destra). La funzione $f(x) = a^x$ si indica anche con $\exp_a(x)$. Un caso importante si ha quando la base è uguale al *numero di Nepero*, un numero irrazionale che si indica con la lettera **e**. Un'approssimazione di tale numero è: $\mathbf{e} \simeq 2.71828...$

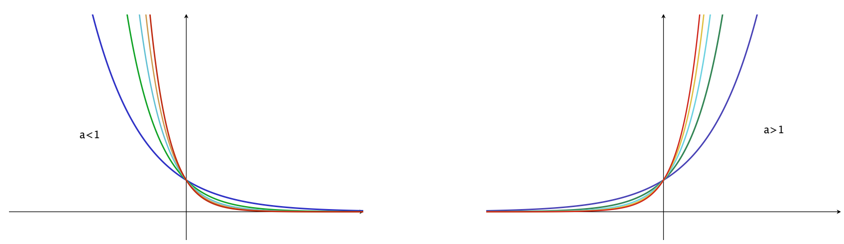


FIGURA 19. Funzioni a^x, con vari valori di $a < 1$ (a sinistra) e $a > 1$ (a destra).

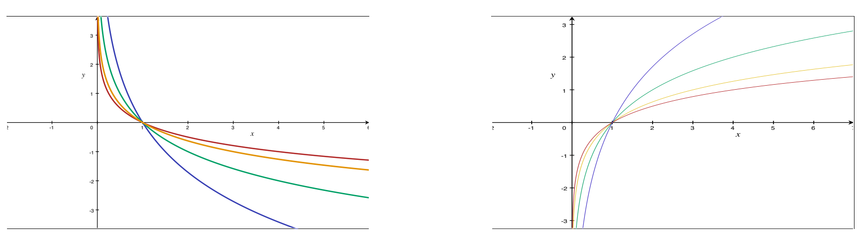


FIGURA 20. Funzioni $\log_a(x)$, con vari valori di $a > 0$: $0 < a < 1$(a sinistra), $a > 1$ (a destra).

Funzioni logaritmiche di base $a > 0$, $a \neq 1$.
La funzione esponenziale (7.5) con base $a \neq 1$ è invertibile perchè è strettamente monotona. La funzione inversa, che è definita su $(0, +\infty)$ si denota con $\log_a x$ ed è detta *funzione logaritmo*, se la base è il numero di Nepero e si denota anche con $\ln(x)$. La sua immagine è $\mathbb{R}$. Per il Teorema 2.2 si ha che $\log_a(x)$ è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$.
I grafici delle funzioni logaritmo si ottengono da quelli delle funzioni esponenziali (per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante). La Figura 20 mostra le funzioni $\log_a x$, con

vari valori di a: $0 < a < 1$ a sinistra e $a > 1$ a destra. Per il logaritmo in *base naturale* e si usano le notazioni: $\log_e x$ oppure $\log x$ o $\ln x$. Le seguenti proprietà del logaritmo si possono dedurre dalle proprietà delle funzioni inverse e dalle proprietà delle potenze.

PROPRIETÀ 4. *Siano a e b numeri positivi diversi da 1 e x un numero reale; si ha:*

(1) $\log_a(a^x) = x, \quad \forall x \qquad a^{\log_a x} = x\,, \quad \forall\, x > 0$

(2) $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall\, x\,,\, y > 0$

(3) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y \qquad \forall\, x\,,\, y > 0$

(4) $\log_a(x^y) = y \log_a x \qquad \forall\, x > 0\,,\, y \in \mathbb{R}$

(5) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \forall\, x > 0$ *(cambiamento di base)*

Dalla (1) si ha in particolare

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a(\frac{1}{a}) = -1$$

e dalla (5)

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x \quad \forall\, x > 0$$

DIMOSTRAZIONE. Le (1) si deducono immediatamente dalla proprietà (c) del Teorema 2.1 sulle funzioni inverse. Le proprietà 2,3,4,5 discendono dalle Proprietà 3 delle potenze. ☐

ESERCIZIO 2.1. Siano f e g due funzioni definte in A e B rispettivamente e sia insieme, e sia $f(A) \subseteq B$. Mostrare che

i) f e g sono entrambe crescenti (decrescenti) allora $g \circ f$ è crescente
ii) se una delle due è crescente e l''altra decrescente la composta è decrescente
ii) lo stesso vale per la stretta monotonia.

ESERCIZIO 2.2. Trovare dominio e immagine della funzione $f(x) = e^{x^3+2}$ e disegnarne il grafico. Trovare un intervallo in cui è invertibile e disegnare il grafico dell'inversa.

ESERCIZIO 2.3. Trovare dominio e immagine della funzione $f(x) = e^{x^3+2}$ e disegnarne il grafico. Trovare un intervallo in cui è invertibile e disegnare il grafico dell'inversa.

Soluzione Si può riscrivere $f(x) = e^2 e^{x^3}$. La funzione f è composta mediante le funzioni $g(x) = e^2 e^x$ e $h(x) = x^3$; è definita in tutto $\mathbb{R}$ e la sua immagine è $\mathbb{R}^+$. Poichè le due funzioni componenti sono strettamente crescenti, la funzione f è strettamente crescente (vedi esercizio precedente). Quindi è invertibile in tutto il suo dominio. L'inversa ̀ha dominio $\mathbb{R}^+$ e immagine $\mathbb{R}$. L'espressione dell'inversa è $y = \ln(x) - 2$; il suo grafico si disegna facilmente a partire da quello del logaritmo, oppure dal grafico di f simmetrizzando rispetto alla bisettrice. I grafici della funzione e dell'inversa sono in Figura 21 più avanti.

ESERCIZIO 2.4. Stabilire dominio e immagine della funzione $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Trovare un intervallo in cui è invertibile precisando l'espressione esplicita dell'inversa, se possibile.

La funzione g è definita in $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, la sua immagine è $[0, +\infty)$. Il suo grafico è in Figura 22 (a sinistra). La funzione è pari e quindi non è iniettiva in D. Nell'intervallo $[2, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente perchè composta mediante funzioni strettamente crescenti. Quindi è invertibile per il Teorema 2.1. Consideriamo la restrizione $h(x) = g_{/[2,+\infty)}$: la sua inversa avrà dominio $[0, +\infty)$ e immagine $[2, +\infty)$. L'espressione di h^{-1} si ottiene ricavando x nell'equazione che esprime f:

$$y = \sqrt{x^2 - 4} \quad \Longrightarrow \quad |x| = \sqrt{y^2 + 4};$$

delle due espressioni trovate quella con il segno "+" è quella cercata, perchè ha immagine $[2, +\infty)$. Concludendo: abbiamo trovato che l'inversa di h è $h^{-1}(y) = \sqrt{y^2 + 4}$ con dominio $[0, +\infty)$.
Il grafico di h e della sua inversa sono Figura 22.
Il lettore studi la restrizione di g all'intervallo $(-\infty, -2]$.

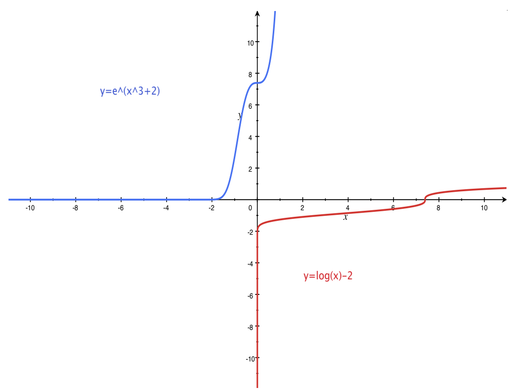


FIGURA 21. Grafico di e^{x^3+2}, della sua inversa e della bisettrice $y = x$.

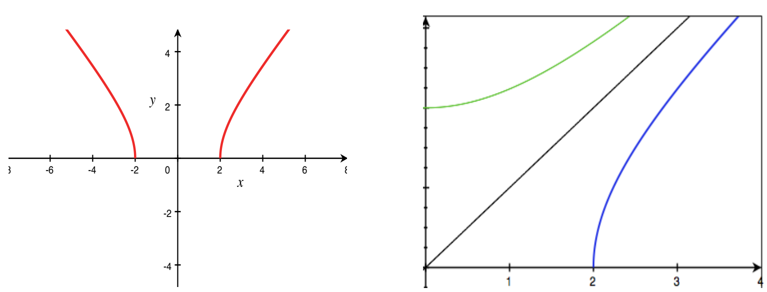


FIGURA 22. A sinistra: grafico di $\sqrt{x^2 - 4}$. A destra: grafico di di $g_{[2,+\infty)}$, della sua inversa e della bisettrice $y = x$.

ESERCIZIO 2.5. Stabilire l'invertibilità della funzione $f(x) = x^2 - 2x$. Trovare l'espressione dell'inversa di $f_{\big|(-\infty,1]}$ e l'espressione dell'inversa di $f_{\big|[1,+\infty)}$. Tracciare i grafici delle due inverse.
Soluzione: La funzione non è invertibile perchè non è iniettiva. Scrivendo $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ si vede immediatamente che le restrizioni di f agli intervalli $(-\infty, 1]$ e $[1, -\infty)$ sono strettamente monotone e quindi invertibili. L'immagine di tali restrizioni è $[-1, +\infty)$.

Poniamo $g = f\big|_{(-\infty,1]}$ e $h = f\big|_{[1,+\infty)}$. Risolvendo l'equazione $y = x^2 - 2x$ rispetto a x si trova

$$x = 1 - \sqrt{1+y} \qquad\qquad x = 1 + \sqrt{1+y}.$$

Queste sono le espressioni esplicite di g^{-1} e di h^{-1} rispettivamente che sono definite in $[-1,+\infty)$. La funzione g^{-1} ha rango $(-\infty,1]$ mentre h^{-1} ha rango $[1,+\infty)$ ed è l'inversa di h. Il loro grafico si ottiene immediatamente dal grafico di f per simmetria rispetto alla retta di equazione $y = x$. In alternativa si può disegnare il grafico delle due inverse in quanto semplici funzioni elementari.

Esercizio 2.6. Determinare dominio e immagine di $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$. Dire se f è invertibile. In caso positivo trovare l'espressione dell'inversa f^{-1}. Tracciare i grafici di f e dell'inversa.

Osservazione 4. Come abbiamo già accennato nella precedente sezione, non è sempre possibile esprimere in maniera esplicita la funzione inversa. Ciò accade ad esempio con le funzioni $f(x) = xe^{x^2}$, $g(x) = x + 2^x$ e $h(x) = x^3 + \log(x)$. Per esercizio si studi l'invertibilità di queste funzioni nel loro dominio e si disegni il grafico delle funzioni inverse.

8. Funzioni trigonometriche e loro inverse.

In questa sezione ci limitiamo a definire le principali funzioni trigonometriche. Rimandiamo, per approfondimenti, ai testi della scuola superiore oppure al testo di P. Ciamparelli *Appunti di trigonometria* il link al testo si trova nella pagina web di questo corso.
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta *periodica di periodo* T, $T > 0$ se

$$f(x + T) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

È semplice verificare che se una funzione è periodica di periodo T allora è periodica di periodo nT con $n \in \mathbb{N}^+$. Il più piccolo T, se esiste, si chiama *periodo minimo*; una funzione costante è periodica di ogni periodo, quindi non ha periodo minimo. La caratteristica fondamentale delle funzioni periodiche è *che i suoi valori si ripetono dopo intervalli di ampiezza* T; dunque per conoscere le proprietà di una funzione di minimo periodo T basta conoscere le proprietà di una sua restrizione ad un qualunque intervallo di lunghezza T. Ad esempio per tracciarne il grafico, basta tracciare il grafico di f ristretta ad un intervallo di ampiezza T e poi ripeterlo traslandolo orizzontalmente, vedi la Figura 23.

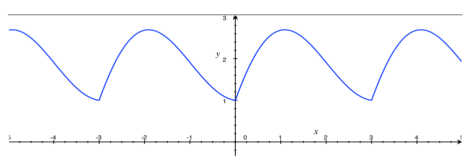


Figura 23. Grafico di una funzione periodica.

Le funzioni seno e coseno.

Sia γ una circonferenza di raggio 1 (detta *circonferenza goniometrica*) il cui centro O è anche l'origine di un sistema di assi cartesiani e sia A il punto $(1,0)$. Partendo da A percorriamo la circonferenza, in senso antiorario oppure in senso orario. Sia x un numero reale, denotiamo con P_x il punto su γ che si ottiene percorrendo la circonferenza a partire dal punto A per un arco di lunghezza $|x|$, in senso antiorario se $x \geq 0$, oppure in senso orario se $x < 0$. Il punto P_x individua un *angolo* nel piano avente vertice O e delimitato dalle semirette nel piano uscenti da O e passanti per A e per P_x (vedi la Figura 24). Il numero reale x rappresenta la misura dell'angolo in radianti.

Osserviamo che l'incremento della lunghezza x di 2π corrisponde a compiere un intero giro sulla circonferenza in senso antiorario ritornando al punto P_x (così come decrementare di 2π la lunghezza x corrisponde a compiere sempre un intero giro ma in senso orario). Lo stesso discorso vale se incrementiamo di un multiplo di 2π. Quindi si ha

$$P_{x \pm k2\pi} = P_x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

Indichiamo con $\cos x$ e con $\sin x$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P_x. Le funzioni $y = \cos x$ e $y = \sin x$ sono definite su $\mathbb{R}$ a valori nell'intervallo $[-1, 1]$, sono periodiche di minimo periodo 2π e soddisfano la relazione

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{8.1}$$

Per la periodicità di seno e coseno ci basta studiarne le proprietà nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Dalle definizioni segue subito che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari; inoltre la funzione coseno è strettamente decrescente in $[0, \pi]$ e strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$. La funzione seno è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ e strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$. I grafici sono raffigurati nella Figura 25 .

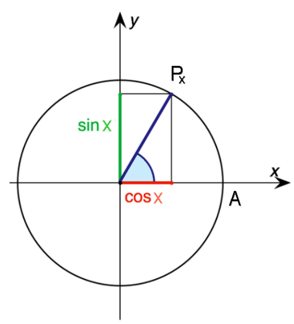


FIGURA 24. $\cos x$ (ascissa di P_x) e $\sin x$ (ordinata di P_x

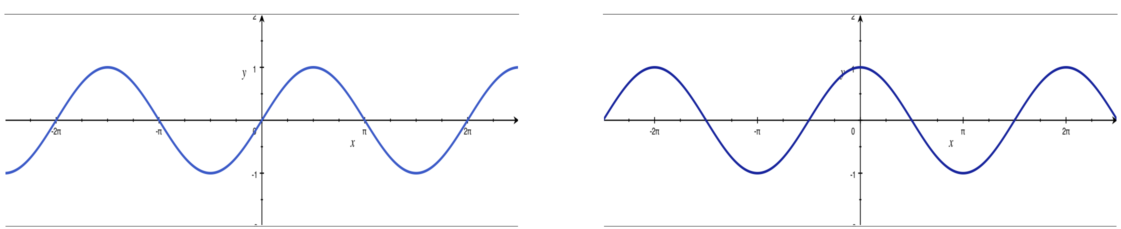


FIGURA 25. Grafico delle funzioni seno (sinistra) e coseno (destra).

Trascriviamo qui le principali formule trigonometriche.
Formule di addizione e sottrazione:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Formule di duplicazione:

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x\,\cos x \qquad \cos(2\,x) = 2\,\cos^2 x - 1$$

Formule di prostaferesi:

$$\sin x - \sin y = 2\,\sin(\frac{x-y}{2})\,\cos(\frac{x+y}{2}) \tag{8.2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\,\sin(\frac{x-y}{2})\,\sin(\frac{x+y}{2}) \tag{8.3}$$

Infine

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x \tag{8.4}$$

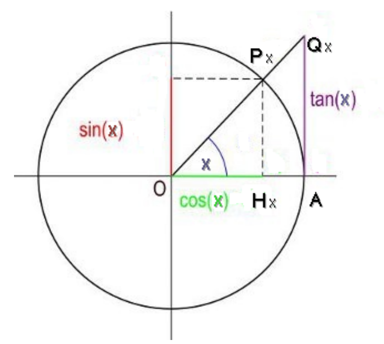
$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x \qquad \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \tag{8.5}$$

La funzione tangente e la funzione cotangente.

La funzione tangente è

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

è definita nei punti di $\mathbb{R}$ diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e, come vedremo in seguito, ha immagine $\mathbb{R}$.
Il significato geometrico della tangente si ottiene subito dall'esame della Figura qui a sinistra: indichiamo con Q_x il punto intersezione tra la retta parallela all'asse delle ordinate passante per A e la retta che congiunge O e P_x. Usando la similitudine fra i triangoli OP_xH_x e OQ_xA si vede che $\tan(x)$ è l'ordinata del punto Q_x.



Dalle (8.4) si ottiene che $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$ per $k \in \mathbb{Z}$ cioè $\tan(x)$ è periodica di minimo periodo $T = \pi$.

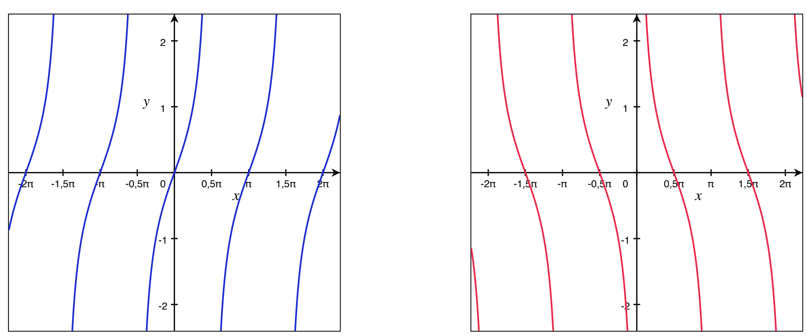


Figura 26. Grafici delle funzioni tangente (a sinistra), e della cotangente (a destra).

Dalle proprietà di simmetria delle funzioni coseno e seno si deduce che la funzione tangente è dispari; infatti è il rapporto di una funzione pari e di una funzione dispari. Il grafico compare in Figura 26. Inoltre

$$\tan(\pi - x) = -\tan x; \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione tangente è strettamente crescente in ogni intervallo $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

La funzione cotangente è la funzione

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

definita in tutti i punti di $\mathbb{R}$ diversi da $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, è periodica di minimo periodo π, ha immagine $\mathbb{R}$ (sarà visto in seguito). Lasciamo al lettore la verifica di proprietà analoghe a quelle viste per la tangente.
Stabiliamo ora una disuguaglianza per la funzione seno che sarà molto utile nel seguito

Teorema 2.3. *Per ogni x in $\mathbb{R}$ si ha*

$$|\sin x| \le |x|, \tag{8.6}$$

dove l'uguaglianza vale solo se $x = 0$.

Dimostrazione. L'uguaglianza è ovvia se $x = 0$. Poichè entrambe le funzioni sono pari, basta provare la disuguaglianza per $x > 0$. Proviamo che è vera se x è in $(0, \frac{\pi}{2}]$; per la relazione fra corda ed arco di una circonferenza (vedi la Figura 27), si ha

$$2\sin(x) = \overline{PQ} < 2x$$

e quindi

$$0 < \sin(x) < x \qquad \forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}],$$

che si può riscrivere

$$0 < |\sin x| < |x| \qquad \forall\, x \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big].$$

Se $x > \frac{\pi}{2}$ si ha:

$$|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} < x.$$

La (8.6) è così provata. $\square$

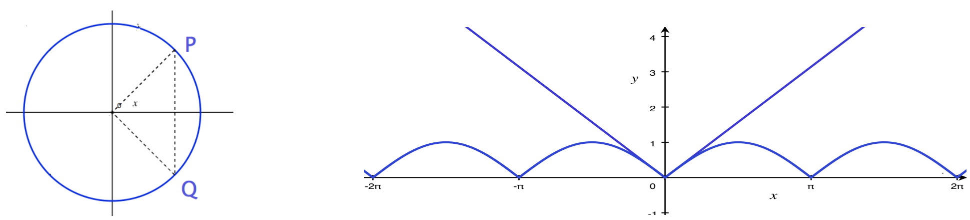


Figura 27. A destra: funzioni $|\sin(x)|$ e $|x|$.

8.1. Funzioni: arcseno, arccoseno, arctangente. Le funzioni seno, coseno e tangente non sono iniettive sul loro dominio, quindi non sono invertibili; per definire delle funzioni inverse dobbiamo scegliere degli intervalli in cui sono strettamente monotone e considerare le restrizioni delle funzioni a tali intervalli. Come abbiamo visto, le tre restrizioni

$$\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \qquad \cos\big|_{[0,\pi]} \qquad \tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})};$$

sono strettamente monotone e quindi invertibili. Le loro funzioni inverse si denotano rispettivamente con

$$\arcsin \qquad \arccos \qquad \arctan$$

e sono dette rispettivamente *arcseno*, *arccoseno* e *arctangente*. Dalle restrizioni deduciamo immediatamente dominio, immagine, monotonia e grafico delle inverse; si ha

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \qquad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

I grafici di arcoseno e arcocoseno sono in Figura 28, il grafico dell'arcotangente è in Figura 29.

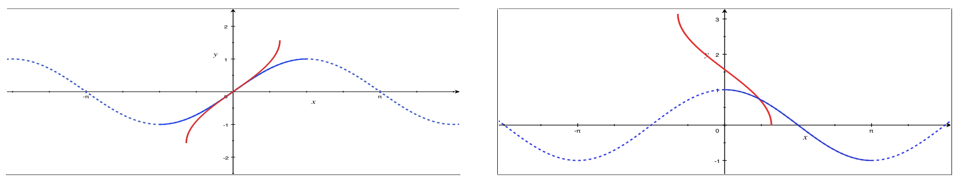


Figura 28. Funzioni: seno(blu a tratti), arcoseno in rosso a sinistra e funzione coseno (blu a tratti) e arcoseno in rosso a destra.

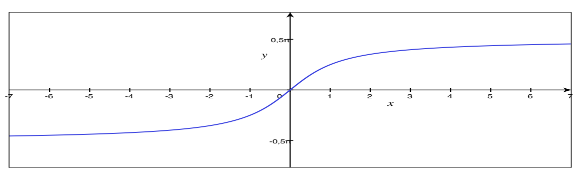


Figura 29. Funzione $y = \arctan(x)$

Esercizio 2.7. Stabilire per quali x vale ciascuna delle due dentità

$$\arcsin(\sin(x)) = x \qquad\qquad \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Esercizi assegnati per il Capitolo 2: la Sezione 2 del libretto degli esercizi.

CAPITOLO 3

Limiti e continuità

1. Limiti di funzioni

In questa sezione ci occupiamo di stabilire il comportamento di una generica funzione $y = f(x)$ quando x si avvicina ad un punto fissato x_o di $\mathbb{R}$. Il concetto di limite costituisce la pietra miliare del calcolo differenziale dove compare, talvolta nascosto, nella definizione della maggior parte dei concetti, dalla continuità alla derivazione e ancora agli integrali ed alle serie (somme di infiniti numeri).

DEFINIZIONE 3.1. *(Intorno)* Sia $x_o \in \mathbb{R}$ e sia $r > 0$ un numero reale. Chiameremo *intorno di* x_o *di raggio* r l'intervallo aperto

$$I_r(x_o) = (x_o - r, x_o + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_o| < r\}$$

Gli intervalli aperti $(x_o, x_o + r)$ e $(x_o - r, x_o)$ si dicono *intorno destro* e *intorno sinistro* di x_o, di raggio r.

In alcune situazioni non è necessario specificare il raggio dell'intorno, in tal caso scriveremo $I(x_o)$ al posto di $I_r(x_o)$. Spesso sarà necessario considerare intorni di un punto x_o *privati del punto* x_o stesso. In tali casi si parlerà di *intorno bucato* di x_o.
Come abbiamo visto nel precedente capitolo, esistono funzioni definite in un intorno di un punto x_o ma non nel punto x_o. Per tali funzioni è importante sapere se esiste un modo naturale per assegnare un valore anche nel punto x_o. Facciamo alcuni semplici esempi: le funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; \qquad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}; \qquad h(x) = \sin\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

sono tutte definite in tutto $\mathbb{R}$ tranne un punto, precisamente $x_o = 1$, $x_o = 0$, $x_o = 0$ rispettivamente. Il grafico di $g(x)$ è in Figura 1 il grafico di h è nella Figura 2. Per le prime due di queste funzioni, dal grafico si intuisce che c'è un modo naturale per definire la funzione nel punto x_o: basta porre $f(1) = 2$ e $g(0) = 1$. Nel terzo caso non c'è un valore naturale che possiamo associare ad h nel punto zero.

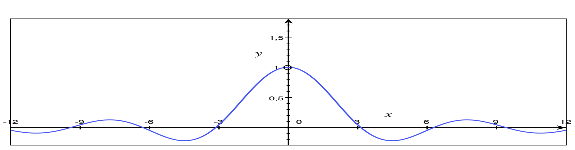


FIGURA 1. $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

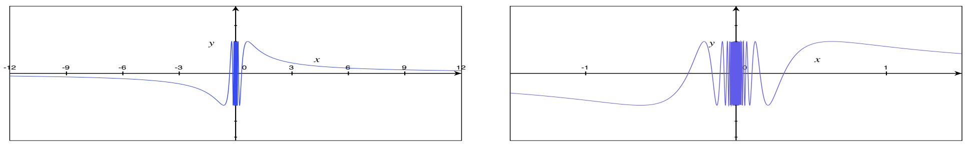


FIGURA 2. Funzione $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$ (sinistra) zoom della stessa funzione (destra)

Possiamo descrivere a parole situazioni come quelle dei primi due esempi: nel primo caso è possibile rendere il valore di $f(x)$ vicino quanto si vuole a 2 pur di prendere x abbastanza vicino a 1, ma diverso da 1. Nel secondo caso è possibile rendere il valore di $g(x)$ vicino a 1 quanto si vuole, pur di prendere x vicino a zero, ma diverso da zero. In generale, data una funzione definita in un intorno di x_o tranne che eventualmente in x_o, si dice che il limite di $f(x)$ per x tendente ad x_o è l, se è possibile rendere $f(x)$ vicino a l quanto si vuole pur di prendere x abbastanza vicino a x_o, ma diverso da x_o.
Con la seguente definizione precisiamo in termini quantitativi le espressioni "vicino quanto si vuole" e "abbastanza vicino".

DEFINIZIONE 3.2. (*Limite finito*) Sia f una funzione definita in un intorno di $x_o \in \mathbb{R}$ tranne eventualmente che nel punto x_o. Si dice che f **ha limite** $\ell \in \mathbb{R}$ **per** x **tendente a** x_o e si scrive

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \tag{1.1}$$

se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in \mathrm{dom} f, \quad 0 < |x - x_o| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Con il linguaggio degli intorni la Definizione 3.2 si scrive:
$\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I_\delta(x_o)$ di x_o tale che

$$\forall x \in \mathrm{dom} f, \quad x \in I_\delta(x_o) \setminus \{x_o\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ricordiamo inoltre che $|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \iff f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

La Figura 3 più sotto illustra la definizione di limite. Il seguente teorema stabilisce che il limite di una funzione, se esiste, è unico. La dimostrazione, che omettiamo, viene fatta per assurdo cioè supponendo che esistano due limiti diversi e arrivando ad una contraddizione.

TEOREMA 3.1. *(Unicità del limite) Se f ammette limite per x tendente a x_o esso è unico.*

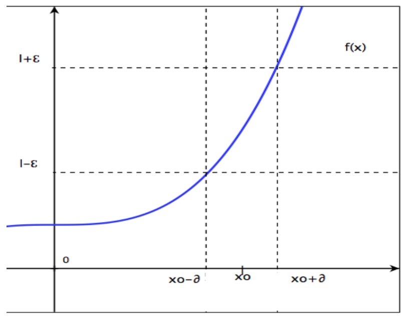
PROPOSIZIONE 3.2. *Sono fatti equivalenti*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \tag{1.2}$$

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) - \ell) = 0 \tag{1.3}$$

$$\lim_{x \to x_o} |f(x) - \ell| = 0 \tag{1.4}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è immediata. □



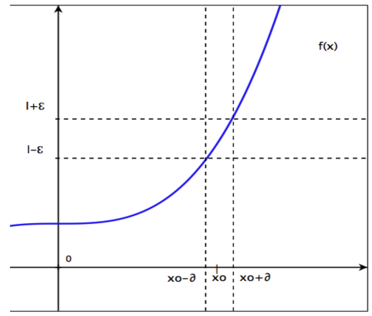


FIGURA 3. ϵ grande(a sin.) e piccolo (a destra). Si noti come varia l'intervallo $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ corrispondente.

ESEMPIO. Si ha

$$\lim_{x\to c} c = c \qquad\qquad \lim_{x\to c} x = c.$$

La verifica, immediata, viene lasciata al lettore.

Nelle sezioni successive stabiliremo diversi metodi per il calcolo dei limiti.
Il seguente teorema stabilisce una relazione fra il segno del limite in x_o e il segno della funzione in un intorno del punto x_o.

TEOREMA 3.3. *(Permanenza del segno) Se una funzione f ammette limite $\ell \neq 0$ per x tendente a $x_o \in \mathbb{R}$ allora esiste un intorno $I(x_o)$ di x_o tale che la funzione f ha lo stesso segno di ℓ in $I(x_o) \setminus \{x_o\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema nel caso $\ell > 0$, se $\ell < 0$ la dimostrazione è analoga. Per la definizione di limite, scelto $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ si ha che esiste un $\delta > 0$ tale che se $x \in \mathrm{dom}f$ e $0 < |x - x_o| < \delta$ si ha

$$|f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2} \quad \text{cioè} \quad \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2}$$

e quindi $f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$. Da ciò segue la tesi. $\square$

Il seguente teorema permette di trovare il limite della somma, prodotto e quoziente di due funzioni f e g conoscendo i loro limiti, se questi sono finiti.

TEOREMA 3.4. *(Operazioni con i limiti) Siano f e g due funzioni e sia $x_o \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \qquad\qquad \lim_{x\to x_o} g(x) = m$$

dove ℓ e m sono numeri reali. Allora si ha:

$$\lim_{x\to x_o} \big[f(x) + g(x)\big] = \ell + m$$

$$\lim_{x\to x_o} \big[f(x)\, g(x)\big] = \ell\, m.$$

Inoltre se $m \neq 0$ si ha

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima. Sia $\varepsilon > 0$ assegnato. Per l'ipotesi, in corrispondenza di $\dfrac{\varepsilon}{2}$, esiste un intorno $I'(x_o)$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \quad x \in I'(x_o) \setminus \{x_o\} \quad \Rightarrow \quad \big|f(x) - \ell\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

inoltre esiste un intorno $I''(x_o)$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} g, \quad x \in I''(x_o) \setminus \{x_o\} \quad \Rightarrow \quad \big|g(x) - m\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Scegliamo $I(x_o) = I'(x_o) \cap I''(x_o)$; allora se $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ e appartiene a $I(x_o) \setminus \{x_o\}$ valgono entrambe le relazioni e dunque si ha

$$\begin{aligned}\big|\big(f(x) + g(x)\big) - \big(\ell + m\big)\big| &= \big|\big(f(x) - \ell\big) + \big(g(x) - m\big)\big| \\ &\leq \big|f(x) - \ell\big| + \big|g(x) - m\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

La tesi è così provata. □

Il seguente teorema è una diretta conseguenza del Teorema della permanenza del segno.

Teorema 3.5. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni e sia $x_o \in \mathbb{R}$ tale che esistano i limiti*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x \to x_o} g(x) = m.$$

Se $\ell < m$ allora esiste un intorno $I = I(x_o)$ di x_o tale che per ogni $x \in I(x_o) \setminus x_o$ si ha

$$f(x) < g(x).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata: basta applicare il teorema della permanenza del segno alla funzione differenza $F(x) = g(x) - f(x)$: poichè il limite di $F(x)$ in x_o è $m - \ell > 0$, deve essere $F(x) > 0$ in un intorno di x_o. □

Limite infinito in un punto Torniamo al concetto di limite. Una funzione f definita in un intorno di x_o, tranne che eventualmente in x_o, può assumere valori via via più grandi quando la variabile x si avvicina ad x_o. Si consideri ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \qquad x \neq 1.$$

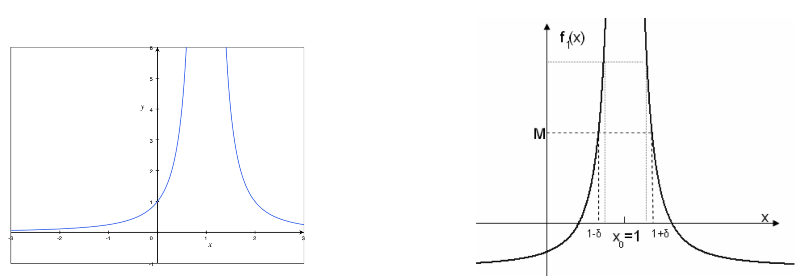


Figura 4. A sinistra: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. A destra: visualizzazione limite $+\infty$ in $x_o = 1$

il cui grafico è in Figura 4. Si può verificare che se fissiamo un numero $M > 0$, possiamo sempre trovare un intorno I del punto 1 tale che per tutti i punti di I eccetto 1, si ha $f(x) > M$; vedi in Figura 4, a destra una visualizzazione del grafico, della retta $y = M$ e del corrispondente intorno del punto 1. Queste considerazioni conducono alla seguente

Definizione 3.3. (*Limite infinito in un punto*) Sia f una funzione definita in un intorno del punto x_o, tranne che eventualmente nel punto x_o. Si dice che f ha limite $+\infty$ (o che tende a $+\infty$) per x tendente a x_o, e si scrive

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty \tag{1.5}$$

se per ogni $M > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \quad 0 < |x - x_o| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

In maniera analoga si definisce il limite

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty \tag{1.6}$$

basta sostituire la condizione $f(x) > M$ con $f(x) < -M$.

Naturalmente anche per definite i due limiti infinito possiamo in alternativa usare il linguaggio degli insiemi. Un esempio di funzione che ha limite $-\infty$ si ottiene immediatamente cambiando segno alla funzione del precedente esempio $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ $x \neq 1$. Con la scrittura

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty$$

si intende $\lim_{x \to x_o} |f(x)| = +\infty$. Ad esempio la funzione $f(x) = 1/x$ nell'origine verifica questa condizione. Infatti il suo modulo tende a $+\infty$; si noti però che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \text{non esiste}$$

infatti quando x si avvicina a 0 da sinistra la funzione assume valori arbitrariamente grandi in modulo, ma negativi, mentre se x si avvicina a 0 da destra assume valori arbitrariamente grandi.

Limite destro, limite sinistro. Come abbiamo visto nel precedente esempio, una funzione può avere un comportamento diverso a seconda che la variabile indipendente si avvicini ad x_o da sinistra o da destra.

Definizione 3.4. (*Limiti destro e sinistro*) Sia f una funzione definita in un intorno destro di $x_o \in \mathbb{R}$, tranne eventualmente che nel punto x_o. Si dice che f **ha limite destro** $\ell \in \mathbb{R}$ per x tendente a x_o o **che tende a** ℓ per x tendente a x_o da destra, e si scrive

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \quad 0 < x - x_o < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Il limite sinistro si definisce in maniera analoga e si denota

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell$$

Analoghe definizioni valgono per il limite a $+\infty$ o a $-\infty$ per x tendente a x_o da destra:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = -\infty$$

o da sinistra:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to x_o^-} f(x) = -\infty.$$

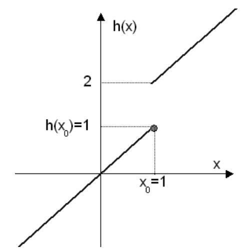
Facciamo ora due esempi.

La funzione $h(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ ha i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2,$$

dunque entrambi finiti ma diversi fra loro (vedi il grafico nella figura a lato).

Un secondo esempio è costituito dalla funzione parte intera (3.3), si ha $\lim_{x\to n^-}[x] = n-1$ mentre $\lim_{x\to n^+}[x] = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.



Il seguente teorema afferma che una funzione ha limite (finito o infinito) in un punto se e solo se esistono i limiti destro e sinistro e sono uguali. La dimostrazione è immediata.

Teorema 3.6. *(Legame tra limite e limiti destro e sinistro) - Una funzione ha limite ℓ (finito o infinito) in x_o se e soltanto se in x_o esistono entrambi i limiti destro e sinistro e sono uguali a ℓ.*

Se una funzione f ha per x tendente a x_o entrambi i limiti destro e sinistro finiti ma diversi fra loro, si dice che x_o è un punto di *salto* e il *salto* si definisce come la differenza fra il limite destro e sinistro: $\lim_{x\to x_o^+} f(x) - \lim_{x\to x_o^-} f(x)$. Nel precedente esempio il salto della funzione è 1.

Limiti all'infinito. Vogliamo ora descrivere il comportamento di una funzione il cui dominio contiene un intervallo $(a,+\infty)$ oppure un intervallo $(-\infty,a)$ con $a \in \mathbb{R}$. Procederemo in maniera analoga alle precedenti situazioni con limite in un punto $x_o \in \mathbb{R}$ (o come si usa dire "al finito"). Iniziamo con la definizione

Definizione 3.5. *(Intorno di infinito)* Si dice **intorno di** $+\infty$ un intervallo aperto della forma $(a,+\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. Analogamente si dice **intorno di** $-\infty$ un intervallo aperto della forma $(-\infty,a)$.

Definizione 3.6. Sia f una funzione definita in un intorno di $+\infty$. Si dice che f **tende a** $\ell \in \mathbb{R}$ o **che ha limite** ℓ per x tendente a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \tag{1.7}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $b \in \mathbb{R}$ tale che $\quad \forall\, x \in \operatorname{dom} f,\ x > b \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$

Definizione 3.7. Sia f una funzione definita in un intorno di $+\infty$. Si dice che f tende a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \tag{1.8}$$

se per ogni $M > 0$ esiste un $b \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, x \in \operatorname{dom} f \quad x > b \implies f(x) > M.$$

Il limite di f a $-\infty$ per $x \to +\infty$ di definisce in maniera analoga e si denota

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \tag{1.9}$$

Analogamente alle tre definizioni precedenti si definisce il limite, per x **tendente a** $-\infty$ di una funzione a $\ell \in \mathbb{R}$, a $+\infty$ e a $-\infty$, che si scrivono rispettivamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \tag{1.10}$$

OSSERVAZIONE 5. *Le funzioni oggetto dei nostri studi sono funzioni reali di variabile reale e quindi non sono definite in $\pm\infty$ e non assumono come valori $+\infty$ o $-\infty$. Pertanto scritture come $f(+\infty)$ o $f(a) = +\infty$ non sono ammesse.*

ESEMPIO 3.1. Verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che se $x > b$ si ha $\frac{1}{x} < \varepsilon$ (si noti: la funzione è positiva per $x > 0$). Ma

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow \ x > \frac{1}{\varepsilon}$$

quindi basta scegliere $b = \frac{1}{\varepsilon}$. Il limite è così verificato.

Se $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty. \tag{1.11}$$

Sia $a > 1$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0. \tag{1.12}$$

Se $0 < a < 1$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty. \tag{1.13}$$

Soluzione Verifichiamo solo il primo limite, la verifica degli altri è simile. Dobbiamo verificare che per ogni $M > 0$ esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che se $x > b$ si ha $a^x > M$. Ma

$$a^x > M \Leftrightarrow x > \log_a M.$$

Scegliamo allora $b = \log_a M$; ciò garantisce che nell'intervallo $(b, +\infty)$ si ha $a^x > M$. Il limite è così verificato.

Si ha

$$\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } a > 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

La verifica è lasciata per esercizio.

Nelle tre verifiche precedenti abbiamo usato la definizione di limite impostando e risolvendo una disequazione dipendente dal parametro ϵ. Osserviamo che questo metodo è possibile solo per funzioni dalla espressione piuttosto semplice, ma utilizzando strumenti che introdurremo nelle prossime sezioni, sarà possibile usare molti altri metodi più efficaci e immediati.

ESEMPIO 3.2. Sia f una funzione periodica non costante, allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \qquad \text{non esiste.}$$

Non dimostriamo questo importante fatto che si applica in particolare alle funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

OSSERVAZIONE 6. Per rendere più sintetici gli enunciati, si usa talvolta inglobare in una sola tutte le notazioni riguardanti i limiti (sia al finito che all'infinito) di funzioni (tendenti a limiti sia finiti che infiniti). Questo si realizza introducendo l'insieme

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Geometricamente possiamo pensare a $-\infty$ e a $+\infty$ come a due punti che vengono aggiunti alla retta reale e che soddisfano la relazione

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Così con la notazione

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \qquad \text{con } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad x_o \in \overline{\mathbb{R}}$$

vengono rappresentate tutte le notazioni di limite viste in precedenza.

OSSERVAZIONE 7. Il *Teorema sulla unicità del limite* (Teorema 3.1) e il *Teorema sulla permanenza del segno* (Teorema 3.3) valgono nell'ipotesi più generale che il punto x_o e il limite ℓ siano in $\overline{\mathbb{R}}$. Il Teorema 3.5 vale se $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ e i limiti ℓ e $m \in \overline{\mathbb{R}}$

ESEMPIO. Siano $f(x) = \dfrac{10x}{x^2+1}$ e $g(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$. Poichè per $x \to +\infty$, f tende a 0 e g tende a 1 il Teorema 3.5 garantisce l'esistenza di un intorno di $+\infty$ cioè un intervallo $(a, +\infty)$, tale che $f(x) < g(x)$.

Concludiamo questa sezione con tre tabelle riassuntive e schematiche sui limiti introdotti.

Definizione	$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$		
se $l \in \mathbb{R}$	$\iff$	$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $0 < \lvert x - x_o \rvert < \delta$ e $x \in \operatorname{dom} f \implies$	$\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$
se $l = +\infty$	$\iff$	$\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $0 < \lvert x - x_o \rvert < \delta$ e $x \in \operatorname{dom} f \implies$	$f(x) > M$
se $l = -\infty$	$\iff$	$\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $0 < \lvert x - x_o \rvert < \delta$ e $x \in \operatorname{dom} f \implies$	$f(x) < -M$

Definizione	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$		
se $l \in \mathbb{R}$	$\iff$	$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, x > b$ e $x \in \operatorname{dom} f \implies$	$\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$
se $l = +\infty$	$\iff$	$\forall\, M > 0 \quad \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\ x > b$ e $x \in \operatorname{dom} f \implies$	$f(x) > M$
se $l = -\infty$	$\iff$	$\forall\, M > 0 \quad \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\ x > b$ e $x \in \operatorname{dom} f \implies$	$f(x) < -M$

Definizione	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$		
se $l \in \mathbb{R}$	$\iff$	$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, x < b$ e $x \in \operatorname{dom} f$	$\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$
se $l = +\infty$	$\iff$	$\forall\, M > 0 \quad \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, x < b$ e $x \in \operatorname{dom} f$	$f(x) > M$
se $l = -\infty$	$\iff$	$\forall\, M > 0 \quad \exists \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, x < b$ e $x \in \operatorname{dom} f$	$f(x) < -M$.

2. Teoremi del confronto

Abbiamo visto nella precedente sezione che "relazioni di minore fra i limiti" hanno come conseguenza analoghe relazioni fra le funzioni (vedi il Teorema 3.5 e la fine dell'Osservazione 7).

I seguenti due teoremi mostrano che, viceversa, relazioni di "maggiore o uguale " tra funzioni permettono di ottenere analoghe relazioni tra i limiti, quando questi esistono. I grafici nella Figura 5 illustrano gli enunciati nel caso di limite in un punto.

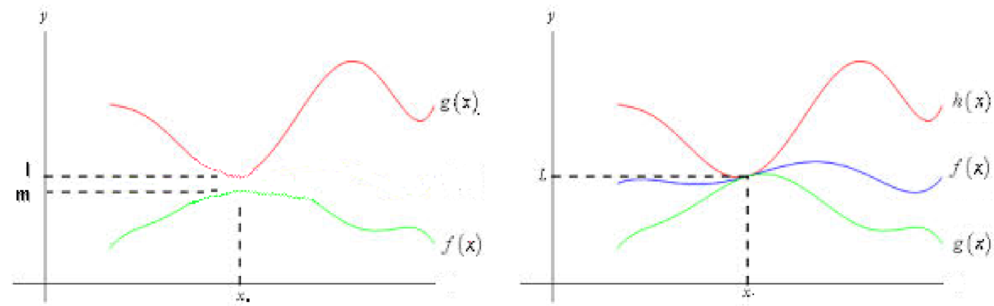


FIGURA 5. Primo e secondo teorema del confronto, x_o numero reale

TEOREMA 3.7. *(Primo Teorema del confronto - caso limite finito) Siano* $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$, f *e* g *due funzioni e* $I(x_o)$ *un intorno di* x_o *tale che*

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in I(x_o) \setminus \{x_o\}.$$

Se esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \to x_o} g(x) = m,$$

allora si ha $\ell \leq m$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema solo nel caso x_o, m e $\ell \in \mathbb{R}$, negli altri casi si procede in modo analogo. Ragioniamo per assurdo: se fosse $l > m$, per il Teorema 3.5 si avrebbe $f(x) > g(x)$ in un intorno di x_o, e questo contraddice l'ipotesi. $\square$

TEOREMA 3.8. *(Secondo Teorema del confronto - caso limite finito) Siano* f, g *ed* h *tre funzioni e* $I(x_o)$ *un intorno di* $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ *tale che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I(x_o) \setminus \{x_o\}. \tag{2.1}$$

Se

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} h(x) = \ell$$

con $\ell \in \mathbb{R}$, *allora si ha*

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = \ell.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema nel caso $x_o \in \mathbb{R}$, se $x_o = \pm\infty$ si ragiona in modo analogo. Poichè h e g hanno limite ℓ in x_o, assegnato ϵ esiste un intorno $I'(x_o)$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \quad x \in I'(x_o) \setminus \{x_o\} \quad \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$$

ed esiste un intorno $I''(x_o)$ tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} g, \quad x \in I''(x_o) \setminus \{x_o\} \quad \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$$

Scegliamo l'intorno di x_o: $V(x_o) = I(x_o) \cap I'(x_o) \cap I''(x_o)$. Allora, se $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ appartiene a $V(x_o)$, valgono entrambe le relazioni e inoltre vale la (2.1). In particolare avremo

$$l - \varepsilon \ < \ f(x) \ \leq \ g(x) \ \leq h(x) \ < l + \varepsilon$$

da ciò segue la tesi. $\square$

Il Teorema 3.8, detto anche *del confronto bilatero* è particolarmente utile perchè non occorre sapere in partenza se la funzione g ha limite. I due esempi seguenti sono due applicazioni di questo teorema, il primo con $x_o \in \mathbb{R}$, il secondo con $x_o = +\infty$.

Esempio. Mostriamo che $\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$.
Dalla disuguaglianza (vedi Figura 6)

$$-x^2 \ \leq \ x^2 \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) \ \leq \ x^2 \qquad\qquad x \neq 0$$

applicando il teorema del confronto bilatero si ha che il limite è zero. Si noti che questo limite si può calcolare anche utilizzando il Corollario 3.9 nella pagina seguente.

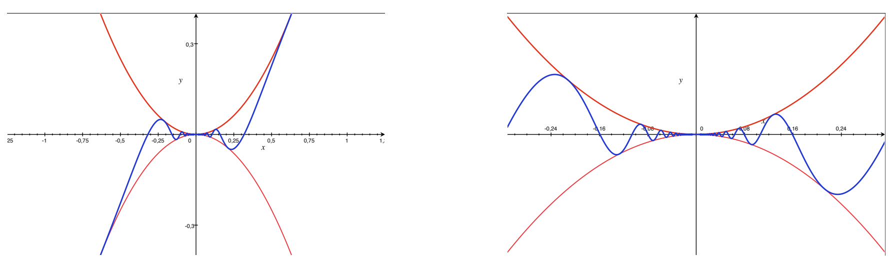


Figura 6. Le funzioni $f(x) = x^2$ e $h(x) = -x^2$ (rosso) e la funzione $g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ (blu)

Esempio. Mostriamo il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

Si ha per x diverso da zero,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Da ciò, facendo il limite per $x \to +\infty$ per il teorema del confronto bilatero la tesi segue subito. La Figura 7 mostra le tre funzioni in un intorno dell'origine. Si noti che questo limite si può calcolare anche utilizzando il Corollario 3.9 nella pagina seguente.

Il seguente corollario fornisce un metodo utile per il calcolo del limite del prodotto di due funzioni quando una ha limite zero e l'altra è limitata (quindi non ha necessariamente un limite). È una conseguenza immediata del secondo Teorema del confronto (caso finito).

Corollario 3.9. *Sia f una funzione limitata in un intorno bucato di $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$. Sia inoltre g una funzione tale che $\lim_{x \to x_o} g(x) = 0$. Allora si ha*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) g(x) = 0.$$

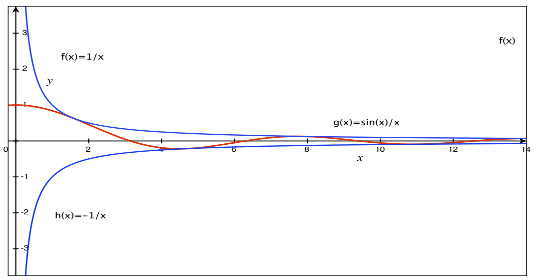


FIGURA 7. Le funzioni $f(x) = 1/x$ e $h(x) = -1/x$(blu) e $g(x) = \sin(1/x)$ nel semipiano $x \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per l'ipotesi esistono un intorno $I(x_o)$ e un numero positivo M tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni x in $I(x_o)$ eccetto eventualmente x_o. Quindi si ha

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|g(x)| \qquad \forall x \in I(x_o) \setminus \{x_o\}.$$

Ma g ha limite zero e quindi per il Teorema del confronto bilatero si ha la tesi. □

ESERCIZIO. Usando il Corollario 3.9 provare i limiti dei precedenti due esempi:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0;$$

e i seguenti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$$

.

TEOREMA 3.10. *(Primo Teorema del confronto-caso limite infinito) Siano $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$, f e g due funzioni e $I(x_o)$ un intorno di x_o tale che*

$$\begin{array}{llll} & f(x) \leq g(x) & & \forall x \in I(x_o) \setminus \{x_o\}. \\ \textit{Se} & \lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty & \textit{allora} & \lim_{x\to x_o} g(x) = +\infty \\ \textit{se} & \lim_{x\to x_o} g(x) = -\infty & \textit{allora} & \lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty \end{array}$$

La dimostrazione è lasciata al lettore.

ESERCIZIO. Mostrare che $\lim_{x\to+\infty}\big(x + \sin(x)\big) = +\infty$.
Dalla relazione $x - 1 \leq x + \sin(x) \quad x \in \mathbb{R}$, poichè $x - 1$ tende a $+\infty$, per il teorema del confronto si ha la tesi. Si ricordi che la funzione seno non ha limite all'infinito. Provare che il limite a $-\infty$ è uguale a $-\infty$.

Operazioni con i limiti, estensione a $\overline{\mathbb{R}}$, forme indeterminate. Nella Sezione 1 di questo capitolo abbiamo visto che se due funzioni f e g hanno limite finito in $x_o \in \mathbb{R}$, hanno limite finito anche la loro somma e i loro prodotto e rapporto (quest'ultimo se il limite di g è diverso da zero). Vogliamo ora estendere questo risultato, per quanto possibile, sia ai casi in cui il punto $x_o = \pm\infty$ che ai casi in cui le funzioni hanno limite infinito. A tale scopo cominciamo con l'estendere le operazioni aritmetiche ai simboli $+\infty$ e $-\infty$.

Definizione 3.8. Sia $a \in \mathbb{R}$. Poniamo

$a + (+\infty) = +\infty$; $\qquad a + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $\qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$$a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}; \qquad a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \qquad (+\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$$\frac{a}{\infty} = 0; \qquad \frac{a}{0} = \infty, \quad a \neq 0$$

$| \pm \infty| = +\infty$

Le forme seguenti non sono definite e vengono dette *forme indeterminate*

$$(2.2) \qquad +\infty - \infty \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, è una generalizzazione del Teorema 3.4 sia al caso in cui x_o è infinito sia al caso in cui il limite è infinito.

Teorema 3.11. *(Operazioni con i limiti - caso generale: punto x_o e limiti finiti o infiniti.) Sia $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano f e g due funzioni tali che*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_o} g(x) = m$$

dove l e m sono finiti o infiniti. Allora si ha:

$$\lim_{x \to x_o} \big[f(x) + g(x)\big] = l + m,$$

$$\lim_{x \to x_o} \big[f(x)\, g(x)\big] = l\, m,$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m},$$

ogni volta che l'espressione al secondo membro risulta definita.

Esempio 3.3. $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \infty$; possiamo essere più precisi e analizzare il segno della funzione a sinistra e a destra di 1. Poichè a sinistra di 1 si ha $\frac{x}{x-1} < 0$ mentre a destra di 1 si ha $\frac{x}{x-1} > 0$ i limiti sinistro e destro sono

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty.$$

Esempio 3.4. Calcoliamo il limite della funzione tangente in $\pi/2$. Per il precedente teorema si ha

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0} = \infty;$$

Poichè la funzione tangente è positiva in un intorno sinistro di $\pi/2$ e negativa in un intorno destro si ha $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$. Poichè è periodica di periodo π si ha anche

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\,\pi)^-} \tan x = +\infty \qquad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\,\pi)^+} \tan x = -\infty \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo che il Teorema 3.11 non fornisce nessuna indicazione sul limite di una funzione quando questo si presenta in una delle forme (2.2), in questi casi **nulla si può dire a priori sul limite**: può accadere che esso sia infinito, finito o che non esista.
È semplice fare esempi: sia $f(x) = x$ e consideriamo la differenza fra f e ciascuna delle quattro funzioni $g_1(x) = x - 1$, $g_2(x) = x^2$, $g_3(x) = -x^2$, $g_4(x) = x + \sin(x)$; in tutti e quattro i casi il limite della differenza si presenta come forma indeterminata $\infty - \infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - g_1(x)] = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - g_2(x)] = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - g_3(x)] = +\infty,$$

mentre il limite di $(f - g_4)$ non esiste. Il lettore produca simili semplici esempi per il prodotto e per il rapporto di due funzioni.

Esempi 3.1. (*Limiti di Funzioni polinomiali e funzioni razionali*)

1) Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$ un polinomio. Si ha il seguente limite all'infinito

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} P(x) = a_n \cdot (+\infty) \qquad \text{cioè} \qquad \lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}}$$

Infatti raccogliendo x^n si ha

$$P(x) = x^n\big(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \ldots \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\big).$$

Si ha $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ mentre la funzione in parentesi tende a a_n; ne segue la tesi.
In maniera analoga si prova il limite

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} P(x) = (-1)^n a_n \cdot (+\infty)}$$

2) La funzione razionale

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_o}, \qquad a_n \neq 0, b_m \neq 0$$

che pensiamo già ridotta ai minimi termini, è definita nei punti $x \in \mathbb{R}$ che non annullano il denominatore. I limiti per $x \to \pm\infty$ danno luogo ad una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}.$$

3) Tre esempi di limite infinito, finito diverso da zero e zero.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^2 + x}{x - 2} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 2x} = \frac{5}{3}; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2 - x}{3x^3 + 5} = 0.$$

Il seguente teorema stabilisce il limite della somma di due funzioni quando una delle due tende a infinito e l'altra è limitata

TEOREMA 3.12. *Siano $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$, f e g due funzioni definite in un intorno bucato I_{x_o} di x_o ed f limitata in I_{x_o}. Si ha*

$$\text{se} \quad \lim_{x\to x_o} g(x) = +\infty \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to x_o} \big[f(x) + g(x)\big] = +\infty$$
$$\text{se} \quad \lim_{x\to x_o} g(x) = -\infty \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to x_o} \big[f(x) + g(x)\big] = -\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè f è limitata nell'intorno I_{x_o}, esiste un numero M tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in I_{x_o}$, quindi

$$-M + g(x) \leq f(x) + g(x) \leq M + g(x) \qquad x \in I_{x_o}$$

Supponiamo che $\lim_{x\to x_o} g(x) = +\infty$; allora per il Teorema 3.11 il primo membro $-M + g(x)$ tende a $+\infty$. Ne segue per il Teorema 3.10 del confronto che anche $f(x) + g(x)$ tende a $+\infty$. La dimostrazione della seconda parte del teorema è analoga. □

ESERCIZIO 3.1. Mostrare i seguenti limiti

$$[a] \quad \lim_{x\to+\infty} (\sin(x) + \sqrt[n]{x}) = +\infty, n \in \mathbb{N}^+ \qquad [b] \quad \lim_{x\to\pm\infty} \Big[\frac{x^2-1}{x^2+1} + x\Big] = \pm\infty$$

Il seguente teorema è importante sia per la teoria che per le applicazioni. Mostra che una funzione monotona in un intervallo ammette sempre limite. La dimostrazione è omessa.

TEOREMA 3.13. *(Limite di funzioni monotone) Sia f una funzione crescente in un intorno destro $I_+(c)$ di un punto c, escluso al più il punto c. Allora esiste, finito o infinito, il limite di f per $x \to c^+$ e si ha*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I_+(c), x > c\}.$$

Analogamente se f è una funzione crescente in un intorno sinistro $I_-(c)$ di un punto c, escluso al più il punto c. Allora esiste, finito o infinito, il limite di f per $x \to c^-$ e si ha

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I_-(c), x < c\}.$$

L'enunciato vale anche con $c = \pm\infty$.

Un analogo risultato vale se la funzione è decrescente in un intorno destro o in un intorno sinistro di c, in tal caso si ha rispettivamente

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I_+(c), x > c\} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I_-(c), x < c\}$$

e vale anche $c = \pm\infty$.

In Figura 8 sono rappresentate funzioni monotone in un intorno sinistro (o destro) di un punto.

ESEMPI. 1) Mostriamo che

$$(2.3) \qquad \lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to -1^+} \arcsin(x) = -\frac{\pi}{2};$$

$$(2.4) \qquad \lim_{x\to 1^-} \arccos x = 0; \qquad \lim_{x\to -1^+} \arccos x = \pi.$$

Verifichiamo solo il primo, la verifica degli altri limiti è analoga. La funzione $\arcsin(x)$ è crescente ed ha immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi per il Teorema 3.13 il limite per $x \to 1^-$ è uguale al sup di questo

intervallo, cioè $\pi/2$.
2) Nel seguente esempio i punti c sono $\pm\infty$: verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2} \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

La funzione arcotangente è crescente ed ha immagine $(-\pi/2, \pi/2)$. Allora per il Teorema 3.13 si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \sup\Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = \inf\Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) = -\frac{\pi}{2}$$

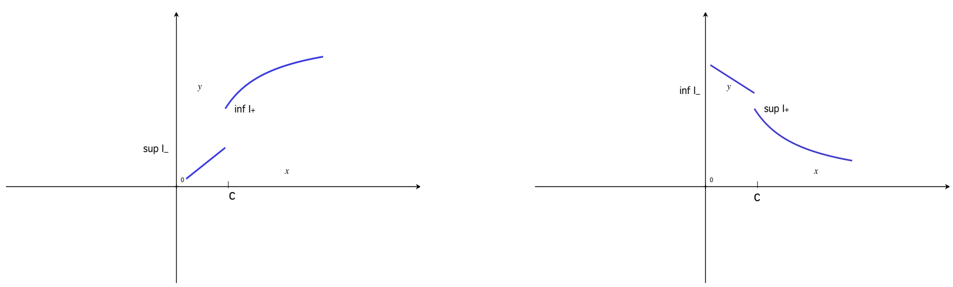


Figura 8. Funzioni monotone in un intorno sinistro o destro di un punto c.

Proposizione 3.14. *(Numero di Nepero) Il limite della funzione* $(1+1/x)^x$ *per* x *tendente all'infinito esiste finito, si chiama numero di Nepero e si denota con* e

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = e$$

La dimostrazione di questo risultato, che omettiamo, è basato sul Teorema 3.13 del limite delle funzioni monotone. Il numero di Nepero è un numero irrazionale e una sua approssimazione razionale è $2,718$.

3. Limiti notevoli.

1) Si ha il fondamentale limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{3.1}$$

Poiché la funzione è pari, ci basta far vedere che il limite da destra è uguale a 1. Ci serviamo della relazione

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}); \tag{3.2}$$

la cui verifica rimandiamo per il momento. Facciamo ora il limite per x tendente a zero da destra. Poichè $\lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$, per il teorema del confronto bilatero, si ha la tesi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Rimane da dimostrare la relazione (3.2). Per $x \in (0, \pi/2)$ si ha

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x)$$

(vedi nel Capitolo 2 il significato geometrico della tangente). Dividendo per $\sin(x)$ (che è maggiore di zero) si ha

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Da questa relazione, passando ai reciproci segue la (3.2). La verifica del limite è così conclusa.
Dal limite precedente segue subito che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1. \tag{3.3}$$

2) Proviamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

La seguente tabella raccoglie alcuni fondamentali limiti di funzioni elementari. Alcuni (vedi il (1), (2), (3), (6)) sono già stati visti ; i limiti (7) (8) (9) (10) e (11) saranno verificati per esercizio (vedi Esercizio 3.3 nella Sezione 6); rimandiamo la verifica dei rimanenti.

LIMITI NOTEVOLI

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$ (5) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1;$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$ (7) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$

(8) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e\ ;$ (9) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\log_a x}{x-1} = \log_a e; \quad a>0\ a\neq 1$

(10) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a), a>0, a\neq 1;$ (11) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a, \quad a\in\mathbb{R}$

inoltre :

(12) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty\ a>1, \alpha>0$ (13) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} (-x)^\alpha\, a^x = 0\ a>1, \alpha>0$

(14) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0,\ a>0, a\neq 1$ (15) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0 \quad \alpha>0\ \ a\neq 1$

4. Continuità

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_o \in A$; si dice che x_o è *interno* ad A se esiste un intorno $I(x_o)$ di x_o tale che $I(x_o) \subset A$.

DEFINIZIONE 3.9. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia x_o un punto interno ad A. Si dice che f è continua in x_o se esiste il limite di f in x_o ed è uguale a $f(x_o)$:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o).$$

Si dice che f è continua in un punto x_o, estremo sinistro o estremo destro del suo dominio, se si ha rispettivamente

$$\lim_{x \to x_o{}^+} f(x) = f(x_o) \qquad \lim_{x \to x_o{}^-} f(x) = f(x_o).$$

Una funzione è detta *continua* se è continua in ogni punto del suo dominio.
Si dice che una funzione è *discontinua* in un punto x_o se non è continua in tal punto.

OSSERVAZIONE 8. Per il Teorema 3.4 funzioni somma, differenza, prodotto di funzioni continue in un punto x_o sono continue in x_o. Anche il rapporto f/g di due funzioni continue in x_o è continuo, purchè $g(x_o)$ sia diverso da zero.

La maggior parte delle funzioni elementari sono funzioni continue:

TEOREMA 3.15. *Tutte le funzioni elementari (le funzioni polinomiali, le funzioni razionali, funzioni elevamento a potenza, le funzioni esponenziali, le funzioni trigonometriche e le loro inverse) sono continue nel loro dominio.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo solo la continuità della funzione seno. Basta verificare che per ogni $x_o \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x \to x_o} |\sin x - \sin x_o| = 0$.
Usiamo la formula di prostaferesi (8.2), il Teorema 2.3 e il fatto che il coseno è limitato:

$$0 \le |\sin x - \sin x_o| = 2|\sin(\frac{x - x_o}{2})||\cos(\frac{x + x_o}{2})| \le 2|\frac{x - x_o}{2}| = |x - x_o|.$$

Ne segue la tesi, per il teorema del confronto bilatero. □

Per esercizio provare continuità delle funzioni polinomiali, della funzione coseno e delle funzioni tangente e cotangente (che sono rapporto di funzioni continue).

Prolungamento per continuità e discontinuità eliminabile. Nello studio dei grafici si usa classificare i punti di discontinuità. Si dice che f ha in un punto x_o una *discontinuità di prima specie* se in x_o esistono finiti i limiti destro e sinistro ma sono diversi:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) \ne \lim_{x \to x_o^-} f(x).$$

In tutti gli altri casi dice che f ha una *discontinuità di seconda specie*.
Un esempio di funzione con discontinuità di prima specie è la funzione parte intera (3.3). Un esempio di funzione con discontinuità di seconda specie è la funzione $f(x) = 1/x$, che nell'origine ha limite $-\infty$ da sinistra, $+\infty$ da destra.
Si dice che una funzione f ha in x_o una *discontinuità eliminabile* se esiste finito il limite di f in x_o ma è diverso dal valore $f(x_o)$ della funzione nel punto.

$$\lim_{x \to x_o} f(x) \ne f(x_o).$$

In questo caso è possibile ridefinire la funzione nel punto eliminando la discontinuità.
Può accadere che una funzione **non sia definita in un punto** x_o ma esista finito il suo limite nel punto, sia esso ℓ; in tal caso è possibile definire una nuova funzione f^* come segue:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \text{dom} f \\ \ell & \text{se } x = x_o \end{cases} \tag{4.1}$$

che risulta definita e continua in x_o e viene chiamata *prolungamento per continuità* o *prolungamento continuo* di f in x_o. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ che non è definita in 1 può essere prolungata ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

Un secondo esempio è la funzione $s(x) = \sin(x)/x$ che nell'origine non è definita, ma tende a 1; la funzione

$$s^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Continuità della funzione composta. Il seguente teorema fornisce una regola molto utile nel calcolo di certi limiti. Omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA 3.16. *(Sostituzione o cambiamento di variabile) Supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = y_o, \tag{4.4}$$

con x_o e y_o finiti o infiniti. Sia inoltre g una funzione definita in un intorno di y_o (escluso al più il punto y_o) e tale che

a) se $y_o \in \mathbb{R}$, g è continua in y_o

b) se $y_o = +\infty$ oppure $y_o = -\infty$, esiste (finito o infinito) il limite $\lim\limits_{y \to y_o} g(y)$.

Allora esiste il limite per $x \to x_o$ della funzione composta $g \circ f$ e si ha

$$\lim_{x \to x_o} g(\,f(x)) = \lim_{y \to y_o} g(y). \tag{4.5}$$

L'enunciato continua a valere se nel caso a) l'ipotesi g continua in y_o è sostituita da: g è prolungabile per continuità in y_o.
Si noti che se $y_o \in \mathbb{R}$ la (4.5) può essere scritta

$$\lim_{x \to x_o} g(\,f(x)) = g(\lim_{x \to x_o} f(x)).$$

ESEMPI. Un metodo pratico per calcolare il limite $\lim\limits_{x \to x_o} g(f(x))$ utilizzando il precedente teorema è il seguente: si calcola prima il limite (4.4) poi si pone $y = f(x)$ e mediante la (4.5)si trasforma il limite dato nel limite di g nella variabile y. Seguono qui sotto alcuni esempi:
1) Ponendo $y = x^2 + x + \frac{\pi}{2}$ si ha immediatamente

$$\lim_{x \to 0} \sin(x^2 + x + \frac{\pi}{2}) = \lim_{y \to \frac{\pi}{2}} \sin(y) = 1.$$

2) Si ha

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$$

infatti basta operare il cambiamento di variabili $y = f(x) = x - 1$ e ricordare che la funzione $\sin(x)/x$ è prolungabile per continuità nell'origine.
3) Utilizzando il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

4) Utilizzando il cambio di variabili $y = \frac{1}{x^2}$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \arctan(\frac{1}{x^2}) = \lim_{y\to +\infty} \arctan(y) = \pi/2$$

5) Siamo ora in grado di mostrare che il limite $\lim_{x\to 0^+} \sin(\frac{1}{x})$, visto all'inizio di questo capitolo, non esiste. Supponiamo per assurdo che questo limite esista, allora con il cambiamento di variabili $y = 1/x$ si ha che esiste anche $\lim_{y\to +\infty} \sin(y)$. Ma, come sappiamo, una funzione periodica non costante non ha limite all'infinito (vedi l'Esempio 3.2). In maniera analoga si verifica che non esiste neanche il limite a zero da sinistra.

Esercizio 3.2. Utilizzando il metodo di sostituzione verificare che a partire dal limite (6) nella tavola dei limiti notevoli, da ogni limite si può ottenere il successivo fino al limite (10). L'esercizio si trova nella Sezione 6, completamente risolto.

Dal Teorema 3.16 segue che la composta di funzioni continue è continua:

Teorema 3.17. *(Continuità della funzione composta) Sia f una funzione continua in un punto x_o e si ponga $y_o = f(x_o)$. Sia poi g una funzione continua in y_o. Allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_o.*

Forme indeterminate di tipo esponenziale $1^\infty, 0^0, +\infty^0$. Concludiamo questa sezione descrivendo una tecnica, basata sul Teorema 3.16, per calcolare i limiti del tipo

$$\lim_{x\to x_o} f(x)^{g(x)} \tag{4.6}$$

(con x_o finito o infinito); ricordiamo che funzione $h = f^g$ è definita nell'insieme $\{x \in \operatorname{dom} g : f(x) > 0\}$ ed è positiva. Facciamo ricorso all'identità $h(x) = e^{\ln h(x)}$ (vedi la Proprietà (1) del logaritmo nella Sezione 2) e riscriviamo h come segue

$$h(x) = e^{\ln(h(x))} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x)\ln(f(x))};$$

allora, per calcolare il limite (4.6) basta calcolare il limite dell'esponente

$$\lim_{x\to x_o} g(x) \ln(\, f(x)\,) \tag{4.7}$$

con x_o finito o infinito, e poi fare il limite della funzione esponenziale.
Diremo che il limite (4.6) è una forma indeterminata se lo è il limite (4.7); mostriamo che in tal caso il limite (4.6) si presenta in una delle forme

$$1^{+\infty} \qquad 0^0 \qquad (+\infty)^0 :$$

- se $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \infty$ allora (4.7) è una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$
- se $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ allora (4.7) è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot (-\infty)$
- se $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to 0$ allora (4.7) è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot (+\infty)$.

Esempio 3.5. Si ha $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$ $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1.$

Il primo limite si presenta nella forma indeterminata 0^0 e si ottiene scrivendo $x^x = e^{x\ln(x)}$ e usando il limite (15) della tabella dei limiti notevoli.
Il secondo limite è una forma indeterminata del tipo $+\infty^0$ e si ottiene scrivendo $x^{1/x} = e^{\log(x)/x}$ e usando il limite (14) della stessa tabella.

5. Proprietà globali delle funzioni continue

Sia data una funzione reale f; un punto x_o del suo dominio in cui la funzione si annulla si chiama *zero* della funzione. Ad esempio la funzione seno ha gli infiniti zeri nei punti $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. La ricerca degli zeri di una funzione è strettamente legata alla ricerca delle soluzioni di equazioni: le soluzioni di una equazione $f(x) = 0$ sono proprio gli zeri della funzione f. È quindi importante conoscere risultati e metodi per determinare gli zeri di una funzione.
Sia f una funzione, definita su un intervallo $[a, b]$, che assume un valore negativo in a e un valore positivo in b, così che il punto $A = (a, f(a))$ si trova sotto l'asse delle ascisse e il punto $B = (b, f(b))$ si trova sopra. Ci chiediamo se passando da A a B il grafico di f deve necessariamente attraversare l'asse delle x. Si consideri ad esempio la funzione $h(x) = x - 1$ se $x \in [-1, 0]$ e uguale a $x + 1$ in $(0, 1]$, che di fatto "salta" l'asse delle x. Il seguente teorema mostra che se la funzione è continua questo non può accadere. La sua importanza è teorica e pratica. Non dimostriamo il teorema ma forniamo vari esempi.

Teorema 3.18. *(Teorema degli zeri) Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se f assume valori discordi agli estremi dell'intervallo allora esiste uno zero di f nell'intervallo aperto (a, b).*

Osservazione 9. Il teorema degli zeri può essere usato per provare che i grafici di due funzioni "si incontrano" in un punto. Siano f e g sono due funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ tali che

$$f(a) < g(a) \qquad f(b) > g(b),$$

come in Figura 9 (a sinistra). Allora la funzione differenza $h(x) = f(x) - g(x)$ soddisfa il teorema degli zeri e quindi ha uno zero nell'intervallo (a, b); cioè esiste un punto x_o tale che $h(x_o) = 0$, vale a dire si ha $f(x_o) = g(x_o)$. Quindi i grafici delle due funzioni f e g si incontrano nel punto di ascissa x_o, vedi la Figura 9.

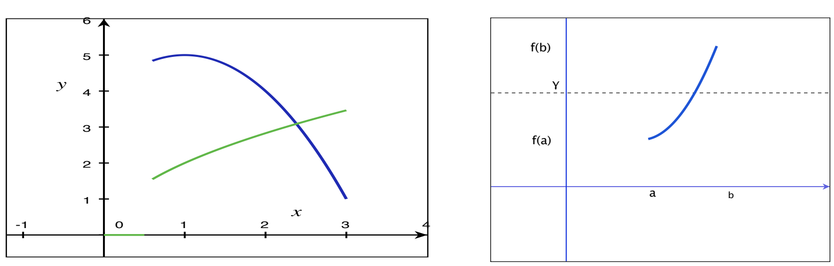


Figura 9. Sin: funzioni f e g, $h = f - g$ ha uno zero. Destra:: Teorema dei valori intermedi

Una importante e immediata conseguenza del teorema degli zeri è il seguente

TEOREMA 3.19. *(Valori intermedi) Sia f una funzione continua su un intervallo che assume i valori distinti α e β, allora assume tutti i valori compresi fra α e β*

DIMOSTRAZIONE. Sia I l'intervallo in cui f è continua e siano a e b due punti di I tali che $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$; supponiamo, per fissare le idee, che $a < b$ e che $\alpha < \beta$. Sia ora γ strettamente compreso fra α e β. La funzione $g(x) = f(x) - \gamma$ è continua e inoltre

$$g(a) = f(a) - \gamma < 0 \qquad g(b) = f(b) - \gamma > 0.$$

Quindi per il teorema degli zeri si annulla in un punto cioè esiste un punto $\overline{x} \in (a, b)$ tale che $g(\overline{x}) = c$; cioè $f(\overline{x}) = 0$.

□

Il seguente teorema è una importante conseguenza del precedente; il teorema può essere usato per trovare l'immagine di funzioni, come negli Esempi 3.6.

TEOREMA 3.20. *Sia f una funzione continua nell'intervallo I allora la sua immagine $f(I)$ è un intervallo.*

ESEMPIO 3.6. 1) Mostriamo che la funzione $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$ ha per immagine l'intervallo $(0, +\infty)$.
Supponiamo $a > 1$, nel caso $0 < a < 1$ la dimostrazione è analoga. Ricordiamo che la funzione è crescente e che per il Teorema 3.13 sui limiti delle funzioni monotone

$$\sup\{a^x : x \in \mathbb{R}\} = \lim_{x\to+\infty} a^x; \qquad \inf\{a^x : \ x \in \mathbb{R}\} = \lim_{x\to-\infty} a^x.$$

Ma, come abbiamo visto

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

(vedi la (1.12)). Quindi

$$\inf\{a^x : \ x \in \mathbb{R}\} = 0 \qquad sup\{a^x : x \in \mathbb{R}\} = +\infty;$$

ne segue che l'immagine, che per il Teorema 3.20 è un intervallo, è $(0, +\infty)$.
2) Mostriamo che l'immagine della funzione tangente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è $\mathbb{R}$. Ricordiamo che in questo intervallo la funzione è crescente e che per il Teorema 3.13 sui limiti delle funzioni monotone l'estremo inferiore e l'estremo superiore della tangente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sono i limiti negli estremi di $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, precisamente:

$$\inf_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \tan(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \qquad \sup_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$$

ne segue che l'immagine, che per il Teorema 3.20 è un intervallo, è $\mathbb{R}$.

Sia f una funzione limitata superiormente sul suo dominio D, cioè l'estremo superiore $s = \sup_{x\in D} f(x)$ dell'insieme immagine è finito. In generale non è detto che esista un punto in cui f assume tale valore (vedi ad esempio la funzione arcotangente che ha estremo superiore $\pi/2$). Se però esiste un punto in cui f assume valore s allora si dice che *s è il massimo (o il massimo assoluto) di f*. Un punto x_o tale che $f(x_o) = s$, si dice un punto di massimo per f. In maniera analoga si definisce il minimo di f. Il teorema seguente fornisce le ipotesi che garantiscono l'esistenza del massimo e del minimo di una funzione.

Teorema 3.21. *(Del massimo e del minimo o di Weierstrass) Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora f assume massimo e minimo*

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

e quindi

$$f([a,b]) = [m, M].$$

Verifichiamo, con tre esempi, l'importanza delle tre ipotesi del teorema: *continuità* della funzione, *intervallo chiuso*, *intervallo limitato*. Mostriamo con degli esempi che se una delle tre viene a mancare non è più garantita la tesi, cioè non è detto f abbia il massimo e il minimo.

Esempi. 1) La funzione definita nell'intervallo $[-1,1]$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in (-1,1) \\ 1 & x = \pm 1. \end{cases}$$

non è continua negli estremi ± 1 dell'intervallo perchè $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$. L'immagine di f è $\mathrm{Im} f = f([-1,1]) = (0,2)$ e dunque f non ha nè massimo nè minimo.

2) Sia $f(x) = x+1$ con $x \in (-1,1)$. La funzione è continua ma l'intervallo $(-1,1)$ è aperto. L'immagine di f è $\mathrm{Im} f = f((-1,1)) = (0,2)$ e la funzione non ammette nè massimo nè minimo.
3) Sia $f(x) = x+1$ con $x \in [-1,+\infty)$. La funzione è continua ma l'intervallo non è limitato. Si ha: $\mathrm{Im} f = f([-1,+\infty)) = [0,+\infty)$ che non è limitato e quindi non esiste un valore massimo per la f.

Osservazione 10. - È importante sottolineare che ci possono essere funzioni che, pur non verificando nessuna delle tre ipotesi, ammettono sia massimo che minimo, come mostra il seguente

Esempio. Sia $f : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$; definita da $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [0,2] \\ 2 & -1 < x < 0 \text{ e } x > 2 \end{cases}$
non è continua in $x = 0$ e $x = 2$. Infatti non esistono i limiti in questi due punti. L'intervallo $(-1,+\infty)$ non è chiuso nè limitato quindi nessuna delle tre ipotesi del teorema di Weierstrass è verificata. Mostriamo però che ha massimo e minimo: $Im\, f = f((-1,+\infty)) = [1,3]$; quindi $\max(Im\, f) = 3$, quindi $x = 2$ è un punto di massimo per f, mentre $\min(Im\, f) = 1$ quindi $x = 0$ è un punto di minimo per f.

Osservazione 11. Abbiamo visto, nel Capitolo 2 (Sezione 2) esempi di funzioni invertibili ma non strettamente monotone (vedi gli Esempi 2.1). Si può dimostrare che se il dominio della funzione è un intervallo e se la funzione è continua allora le due condizioni sono equivalenti. Cioè: *Sia f una funzione continua su un intervallo. Allora è iniettiva se e solo se è strettamente monotona.*

Il seguente teorema fornisce le condizioni affinché la funzione inversa, se esiste, sia continua. in particolare garantisce la continuità delle funzioni $\log_a(x)$ e delle funzioni trigonometriche inverse.

Teorema 3.22. *Sia f una funzione continua e iniettiva nell'intervallo I allora la funzione inversa f^{-1} è continua su $J = f(I)$.*

6. Esercizi di ricapitolazione sui limiti

ESERCIZIO 3.3. Utilizzando il metodo di sostituzione verificare che a partire dal limite (6)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

nella tavola dei limiti notevoli, da ogni limite si può ottenere il successivo fino al limite (10). L'esercizio è nella Sezione 5.

Soluzione Da (6) proviamo (7), ponendo $y = 1/x$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

Da (7) proviamo (8),

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$$

Da (8) proviamo (9) con il cambiamento di variabile $y = x-1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_a(x)}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y} = \log_a e$$

Da (9) proviamo (10) con il cambio di variabile $y = a^x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y-1}{\log_a(y)} == \log a.$$

Da (10) proviamo (11) con il cambio di variabile $a\log(1+x) = t$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{a(log(1+x)}-1}{a\log(1+x)}\cdot\frac{a\log(1+x)}{x}\\ &= a\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = a.\end{aligned}$$

ESERCIZI. 1) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{2x-x^2}$$

Si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{2x-x^2} &= \lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{2x-x^2}\,\frac{1+\sqrt{x^2-3}}{1+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to 2}\frac{1-x^2+3}{(2x-x^2)\,(1+\sqrt{x^2-3})}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x\,(2-x)\,(1+\sqrt{x^2-3})} = \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{x\,(2-x)\,(1+\sqrt{x^2-3})}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{2+x}{x\,(1+\sqrt{x^2-3})} = 1\end{aligned}$$

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{|2x-x^2|}$$

Si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Vogliamo eliminare il modulo: osserviamo che $2x-x^2$ cambia segno in un intorno del punto $x_o = 2$ (è positivo per $0 < x < 2$, negativo all'esterno di $(0,2)$); quindi calcoliamo separatamente i limiti destro e sinistro. Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{|2\,x-x^2|} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{-2\,x+x^2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{-2\,x+x^2}\,\frac{1+\sqrt{x^2-3}}{1+\sqrt{x^2-3}}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{1-x^2+3}{(-2\,x+x^2)\,(1+\sqrt{x^2-3})} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(2-x)(2+x)}{x\,(x-2)\,(1+\sqrt{x^2-3})}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{-(2+x)}{x\,(1+\sqrt{x^2-3})}\\ &= -1.\end{aligned}$$

Per il limite sinistro, con conti analoghi ai precedenti si ottiene

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{|2\,x-x^2|} = \lim_{x\to 2^-}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{2\,x-x^2} = \cdots = 1.$$

Si conclude che il limite dato non esiste perchè il limite destro è diverso dal limite sinistro.

3) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4\,x^2-3}\right) = -\infty.$$

Si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$.

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4\,x^2-3} \;=\; \sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}-\sqrt{x^2(4-\frac{3}{x^2}} \;=\; |x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}\right)$$

Quindi il limite è $=+\infty\cdot(-1)=-\infty$.

4) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{2\,x}$$

Si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Utilizziamo il limite notevole $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{2\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\,\frac{x^2+x}{2\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\,\frac{x+1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

infatti, posto $y=x^2+x$ si ha $y\to 0$ per $x\to 0$ e quindi dal Teorema 3.9 del cambiamento di variabile

si ottiene $\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\to 1$ per $x\to 0$ perchè $\frac{\sin y}{y}\to 1$ per $y\to 0$.

5) Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{\sin^2(x)}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per x^2 e utilizziamo i limiti notevoli (1) e (8) della Tavola Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,\frac{x^2}{\sin^2(x)} = 1$$

6) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-x^2)}{e^{\sqrt{x}}-1}$$

Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Riconduciamoci a limiti notevoli moltiplicando e dividendo per x^2 e per $\sqrt{x}$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^2)}{e^{\sqrt{x}}-1} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^2)}{-x^2}\,(-x^2)\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^2)}{-x^2}\,\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\,(-x\sqrt{x}) \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}\cdot\frac{t}{e^t-1} \to 1 = 1\cdot 1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $y=-x^2$ nel primo limite e $t=\sqrt{x}$ nel secondo.

Esercizi. (*Sulla continuità*)

1) Determinare il dominio D della funzione seguente e stabilire se è continua.

$$f(x) = \frac{\log\left(\sqrt{|x^3-1|}\right)}{x^2}$$

Si ha $D=\mathbb{R}\setminus\{\{0\}\cup\{1\}\}$. La funzione è continua in D perchè composta e rapporto di funzioni continue.

2) Determinare il dominio D della funzione seguente e stabilire se è continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{se } x\le 0 \\ e^{-x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Si ha $D=\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutti i punti di D eccetto l'origine, dove il limite da sinistra è 3, mentre il limite da destra è 1. Quindi si tratta di una discontinutità di prima specie.

3) Dire se esistono valori di a per i quali la funzione seguente è continua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{se } x\le 0 \\ x^2+e^x & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Sol: Si ha $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$. Per $x\neq 0$ è continua perchè somma di funzioni continue. Per $x_o=0$ si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x)=a=f(0)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$. Allora, perchè f sia continua anche in $x_o=0$, deve essere $a=1$. Concludendo per $a\neq 1$, f è continua solo nei punti diversi da zero, mentre per $a=1$ è continua dappertutto.

4) Dire se le seguenti funzioni sono prolungabili per continuità a tutto $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{\sin^2(2x)}{x^2}; \qquad g(x) = \frac{\sin^2(2x)}{x^3}$$

Si ha $\operatorname{dom} f=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$ ed f è continua in tale insieme perchè rapporto di funzioni continue. Il limite di f limite in zero è

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 4\frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} = 4.$$

Ne segue che f è prolungabile per continuità a tutto $\mathbb{R}$, ed il prolungamento continuo è:

$$\tilde{f} = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(2x)}{x^2} & x\neq 0 \\ 4 & x=0 \end{cases}$$

Per la g si ha: $\operatorname{dom} g=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$ e g continua nel suo dominio perchè rapporto di funzioni continue.

Il limite di g in zero:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2\,x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} 4\Big(\frac{\sin(2\,x)}{2\,x^2}\Big)^2\,\frac{1}{x},$$

quindi il limite per x tendente a zero è $+\infty$ da destra $-\infty$ da sinistra. Ne segue che la funzione non è prolungabile per continuità in 0.

4) Trovare il dominio della seguente funzione e studiarne la continuità.

$$f(x) = \arccos\sqrt{x^2-1}$$

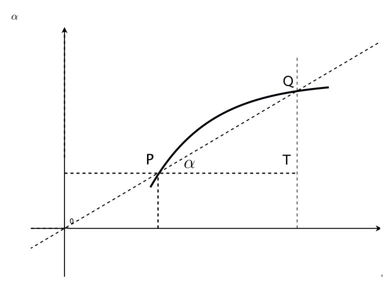
La funzione è definita per x tale che $-1 \leq \sqrt{x^2-1} \leq 1$ cioè per x tale che $1 \leq |x| \leq \sqrt{2}$ quindi dom f $= [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$. La funzione è continua perchè composta mediante funzioni continue (ricordiamo che sia la funzione radice che la funzione arcocoseno sono continue perch inverse di funzioni continue).

CAPITOLO 4

Derivate

1. Derivata, definizione e significato geometrico

In questa sezione introduciamo la *derivata* di una funzione. Questo concetto è strettamente legato al problema di trovare la *tangente al grafico* di una funzione in un punto assegnato e al problema di definire il concetto di *velocità istantanea*.



Problema della tangente Data una funzione f definita su un intervallo (a, b), fissiamo un punto del grafico, sia $P = (x_o, f(x_o))$ dove $x_o \in (a, b)$. Consideriamo ora un numero h, tale che $x_o + h$ appartiene ad (a, b) e il punto del grafico $Q = Q_h = \big(x_o + h, f(x_o + h)\big)$, si veda la figura a lato. La retta secante al grafico passante per i punti P e Q ha equazione

$$y - f(x_o) = m_h(x - x_o) \tag{1.1}$$

$$m_{\text{sec}} = m_h = \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}. \tag{1.2}$$

Infatti, con riferimento al triangolo rettangolo di vertici P, Q, T si ha che il membro destro di (1.2) è il rapporto tra le misure dei cateti QT e PT e cioè la tangente $\tan(\alpha)$ dell'angolo α, che, come è noto, è il coefficiente angolare della retta secante. Se, al tendere di h a 0, e quindi di Q_h a P, la retta secante tende a una posizione limite, il coefficiente angolare tende al limite di (1.2) per h tendente a zero. La retta che occupa tale posizione limite è detta *retta tangente al grafico di f nel punto P*; il suo coefficiente angolare e la sua equazione sono

$$\boxed{m_{\tan} = m_0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.}$$

$$y - f(x_o) = m_{\tan}(x - x_o). \tag{1.3}$$

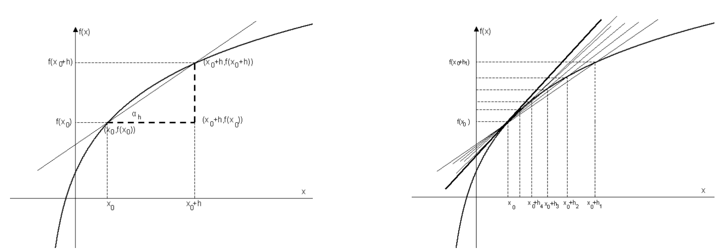


Figura 1. Sin: significato geometrico del rapporto incrementale. Dx: rette secanti

Problema della velocità Stabiliamo cosa si intende con i termini *velocità* e *velocità istantanea*. Supponiamo che un oggetto si muova lungo una linea retta; per descriverne il moto introduciamo un sistema di coordinate sulla retta fissando un punto origine e un punto unità. Indicheremo la variabile indipendente, che è il tempo, con la lettera t. Per ogni istante t denotiamo con $f(t)$ la coordinata (ascissa) della posizione occupata dal punto mobile in questo istante; una tal funzione è generalmente chiamata *legge oraria del moto*. Fissati due istanti t_o

FIGURA 2. Usain Bolt, 8 volte campione del mondo in sprinting.

e $t_o + h$ si consideri la differenza $f(t_o + h) - f(t_o)$; essa rappresenta lo spostamento effettuato nell'intervallo $(t_o, t_0 + h)$ (si noti: non indica la lunghezza del cammino percorso). La velocità media nell'intervallo di tempo $(t_o, t_o + h)$ è :

$$v_{\text{med}} = \frac{f(t_o + h) - f(t_o)}{h};$$

(rapporto fra lo spostamento e il tempo trascorso) e può essere negativa, se la posizione all'istante finale ha ascissa minore della posizione iniziale, o nulla se le due posizioni coincidono. È naturale allora definire come velocità istantanea all'istante t_o il limite

$$v_{\text{ist}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_o + h) - f(t_o)}{h}$$

Le precedenti considerazioni conducono alla seguente

DEFINIZIONE 4.1. Sia f una funzione e siano x_o interno al suo dominio e il rapporto

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \tag{1.4}$$

dove h è tale che $x_o + h$ è nel dominio di f, è detto *rapporto incrementale* di f fra x_o e $x_o + h$. Si dice che f è derivabile in x_o se esiste finito il limite del rapporto incrementale, che si indica con $f'(x_o)$:

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \tag{1.5}$$

e si chiama *derivata* di f in x_o.

Per denotare la derivata in x_o si usano anche i simboli:

$$Df(x_o) \qquad \frac{df}{dx}(x_o).$$

Si noti che, operando il cambiamento di variabile $x = x_o + h$, il limite (1.5) si può anche scrivere

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_o};} \tag{1.6}$$

Useremo indifferentemente l'una o l'altra espressione del rapporto incrementale.
Ritornando al problema della tangente possiamo dire che *se una funzione f è derivabile in un punto x_o allora esiste la retta, non verticale, tangente al grafico di f nel punto $(x_o, f(x_o))$, ed ha equazione*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0). \tag{1.7}$$

In alcuni testi, se il limite del rapporto incrementale (1.5) in x_o è $\pm\infty$ si dice che *la retta tangente è verticale.*

TEOREMA 4.1. *Se una funzione f è derivabile in un punto x_o allora è continua in x_o.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\lim_{x\to x_o} \big[f(x) - f(x_o)\big] = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\,(x - x_o) = f'(x_o) \lim_{x\to x_o} (x - x_o) = 0.$$

□

Osserviamo che da questo teorema segue che se f non è continua in un punto allora non può essere derivabile in quel punto. Si noti anche che il viceversa non vale, cioè la continuità non implica la derivabilità. Come esempio si veda la funzione $f(x) = |x|$ che nell'origine è continua ma non derivabile (discussa nel punto [c] qui sotto) .

ESEMPI. [a] Sia $f(x) = c$ una funzione costante e x_o un punto di $\mathbb{R}$. Allora $f'(x_o) = 0$. Infatti il rapporto incrementale di f in x_o è identicamente zero.

[b] Sia $f(x) = x$; allora $f'(x) = 1$ in ogni punto di $\mathbb{R}$. Infatti, sia x_o un unto fissato

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{x - x_o}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} 1 = 1$$

[c] Sia $f(x) = |x|$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad \text{cioè} \quad f'(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Infatti, sia x_o un punto fissato; se in $x_o = 0$ i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono finiti ma diversi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

quindi la funzione non è derivabile nell'origine.

DEFINIZIONE 4.2. (*Derivate destra e sinistra*) Sia $[x_o, x_o + \delta) \subset \mathrm{dom} f$. Si definisce **derivata destra** di f in x_o il limite, se esiste finito,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0).$$

Analogamente si definisce la derivata sinistra che si indica con $f'_-(x_0)$.

Se una funzione ha derivata destra (o sinistra) si parla di retta *tangente destra* (o di retta *tangente sinistra*). Se le derivate destra e sinistra in un punto x_o sono (finite e) diverse, allora si dice che in x_o la funzione ha un punto angoloso. Ad esempio la funzione modulo $|x|$ ha in 0 tangente destra e la sinistra. Un esempio di funzione non derivabile a destra è $f(x) = \sqrt{x}$ nell'origine.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

Osserviamo infine che una funzione è derivabile se e solo se esistono le derivate destra e sinistra e sono uguali.

2. Derivata di funzioni elementari e regole di calcolo

[1] Per $n \in \mathbb{N}^+$ e $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$D(x^n) = n\, x^{n-1}$$
Fissiamo $c \in \mathbb{R}$, si ha
$$\lim_{x\to c} \frac{x^n - c^n}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{(x-c)\big(x^{n-1} + x^{n-2}\, c + \ldots + x\, c^{n-2} + c^{n-1}\big)}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\Big(x^{n-1} + x^{n-2}\, c + \ldots + x\, c^{n-2} + c^{n-1}\Big) = nc^{n-1}.$$

[2] Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x > 0$ si ha
$$D(x^\alpha) = \alpha\, x^{\alpha-1} \tag{2.1}$$
Omettiamo la dimostrazione, che fa uso del limite notevole (11) (vedi Tavola dei limiti notevoli nel Capitolo 3)). Si ha la derivabilità anche in zero (almeno da destra) quando $\alpha \geq 1$ e si ha $f'(0) = 0$. Possiamo dunque dire che la funzione $f(x) = x^\alpha$ è derivabile in tutti i punti in cui l'espressione $x^{\alpha-1}$ è definita. Concludiamo scrivendo l'espressione della derivata in due casi particolarmente interessanti: $\alpha = -n$ e $\alpha = 1/n$ con n intero positivo:
$$D\big(\frac{1}{x^n}\big) = -n\frac{1}{x^{n+1}} \qquad\qquad x \neq 0 \tag{2.2}$$
$$D\big(\sqrt[n]{x}\big) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{x^{(n-1)/n}} \qquad\qquad x \neq 0 \tag{2.3}$$

[3] Per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$D(\sin(x)) = \cos(x), \qquad\qquad D(\cos(x)) = -\sin(x)$$
Verifichiamo la prima, la seconda è analoga. Fissiamo $c \in \mathbb{R}$, si ha
$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} \frac{\sin(x) - \sin(c)}{x-c} &= \lim_{x\to c} 2\frac{\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c} \frac{\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)}{\frac{x-c}{2}}\,\cos(\frac{x+c}{2})\\ &= \cos c\end{aligned}$$

[4] Sia $a > 0$, $a \neq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:
$$D(a^x) = a^x\, \log a$$
Fissiamo $c \in \mathbb{R}$, usando il limite notevole (10) si ha
$$\lim_{x\to c} \frac{a^x - a^c}{x-c} = \lim_{x\to c} a^c\, \frac{a^{x-c}-1}{x-c} = a^c \lim_{x\to c} \frac{a^{x-c}-1}{x-c} = a^c\, \log a.$$

[6] Sia $a>0$ e $a\neq 1$, per ogni $x>0$ si ha

$$D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

Fissiamo $c\in\mathbb{R}$, usando il limite notevole (8) si ha

$$\lim_{x\to c}\frac{\log_a x-\log_a c}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{\log_a(\frac{x}{c})}{c\,(\frac{x}{c}-1)} = \frac{1}{c}\log_a e$$

Il teorema seguente permette di calcolare le derivate di somme e prodotti di due funzioni f e g quando si conoscono le derivate f' e g'. Anche per il rapporto vale lo stesso risultato purchè il denominatore non si annulli.

Teorema 4.2. *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni derivabili in x_o anche la loro somma e il loro prodotto sono derivabili in x_o e valgono le seguenti formule:*

$$(f+g)'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o)$$

$$(f\cdot g)'(x_o) = f'(x_o)\cdot g(x_o)+f(x_o)\cdot g'(x_o). \tag{2.4}$$

Inoltre, se $g(x_o)\neq 0$, allora il rapporto f/g è derivabile e si ha

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_o) = \frac{f'(x_o)\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot g'(x_o)}{g^2(x_o)}. \tag{2.5}$$

Esempi. 1.Sia $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ la sua derivata è

$$P'(x)=n\,a_n\,x^{n-1}+(n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2}+\ldots+2\,a_2\,x+a_1$$

2. Per ogni $x\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ si ha

$$\boxed{D(\tan(x)) = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} \tag{2.6}$$

Per verificare questa formula basta scrivere $\tan(x)=\sin(x)/\cos(x)$ e fare la derivata del rapporto usando la formula del Teorema 4.2.

Il seguente teorema afferma che la funzione composta di due funzioni derivabili è derivabile e fornisce una formula per il calcolo della derivata. La dimostrazione è omessa.

Teorema 4.3. *(Formula di derivazione della funzione composta) Siano f e g due funzioni e sia x_o un punto interno a $\operatorname{dom} f$ e $y_o=f(x_o)$ un punto interno a $\operatorname{dom} g$. Se f è derivabile in x_o e g è derivabile in y_o, allora la funzione composta $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_o e si ha:*

$$(g\circ f)'(x_o) = g'(f(x_o))\cdot f'(x_o).$$

Applicando il teorema alla funzione composta $f(ax)$ si ha che se f è derivabile si ha

$$\boxed{D(f(\alpha x)) = \alpha f'(\alpha x)}$$

per x tale che $\alpha x\in\operatorname{dom} f$.

Esempi. Verifichiamo le due formule

$$[a] \qquad D\big(\log(|x|)\big) = \frac{1}{x} \quad x\neq 0$$

$$[b] \qquad D(e^{\sin^2(x)}) = e^{\sin^2(x)}2\cos(x)\sin(x).$$

Sol:

[a] Sia $g(x) = \log(x)$ e $f(x) = |x|$; ricordiamo che

$$D\log(y) = \frac{1}{y} \qquad\qquad D\big(|x|\big) = \frac{|x|}{x} \qquad\qquad x \neq 0$$

e quindi per $x \neq 0$ si ha

$$D\big(\log(|x|)\big) = D\big(\log(|x|)\big)\frac{|x|}{x} = \frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$$

[b] $D(e^{\sin^2(x)}) = e^{\sin^2(x)}D(\sin^2(x)) = e^{\sin^2(x)}2\cos(x)\sin(x)$.

Esempio 4.1. Derivata della funzione $h(x) = f(x)^{g(x)}$.
Si ha dom $h = \{x \in \operatorname{dom} g, f(x) > 0\}$.
Scriviamo la funzione nella forma

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\,\log(f(x))}$$

e poi deriviamo utilizzando le formule di derivazione della funzione composta, si ottiene

$$D\big(f(x)^{g(x)}\big) = e^{g(x)\,\log(f(x))}\left(g'(x)\,\log(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

e quindi

$$\boxed{D\big(f(x)^{g(x)}\big) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\,\log(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).}$$

Esempio.

$$D\big((1+x^2)^{\sin(x)}\big) = (1+x^2)^{\sin(x)}\left[\cos(x)\log(1+x^2) + \sin(x)\frac{2x}{1+x^2}\right]$$

Ci chiediamo ora: se una funzione f è derivabile, la sua inversa f^{-1}, se esiste, è derivabile? La risposta è data dal seguente

Teorema 4.4. *(Formula di derivazione funzione inversa) Sia f continua e invertibile in un intervallo I e sia x_o un punto interno ad I tale che $f'(x_o) \neq 0$. Allora f^{-1} è derivabile in $y_o = f(x_o)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_o)}. \tag{2.7}$$

La formula (2.7) si può anche scrivere

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_o)\big)}.} \tag{2.8}$$

Osservazione. Interpretazione geometrica della formula (2.7). Sia f una funzione invertibile e $P = (x_o, y_o)$, $y_o = f(x_o)$ un punto del suo grafico, $P'(y_o, x_o)$ e r e r' le rette tangenti ai grafici di f e e della sua inversa nei punti P e P' rispettivamente, come in Figura 3. Come accade per i grafici di f e dell'inversa, anche le due rette r e r' sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Si può verificare geometricamente che la formula (2.7) esprime il fatto che i coefficienti angolari, m e m', delle due rette sono uno il reciproco dell'altro, cioè $m = 1/m'$.

Infine osserviamo che se fosse $f'(x_o) = 0$, cioè la retta r è orizzontale, si avrebbe una retta r' verticale, che corrisponde al fatto che f^{-1} non è derivabile in y_o.

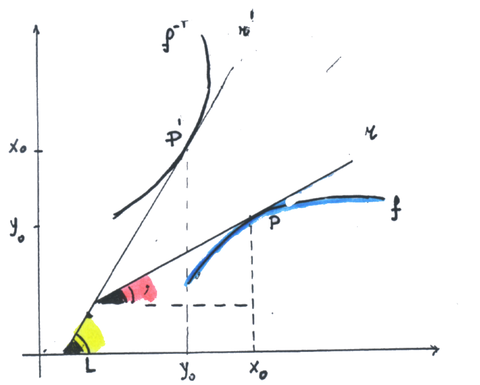


FIGURA 3. Una funzione e la sua inversa, rette tangenti r e r'

ESEMPI. [1] Sia $f(x) = x^3$. Mostriamo che la derivata dell'inversa è

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3} y^{-2/3} \qquad y \neq 0.$$

La funzione inversa $f^{-1}(y)$ è definita in ogni $y \in \mathbb{R}$ ed è derivabile in ogni $y_o \neq 0$ e per la (2.7) posto $y_o = x_o^3$ si ha

$$f^{-1}(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{3x_o^2},$$

esprimendo x_o in termini di y_o:

$$f^{-1}(y_o) = \frac{1}{3({y_o}^{1/3})^2} = \frac{1}{3{y_o}^{2/3}}$$

Osserviamo che per la funzione x^3 è già nota l'espressione della inversa, che poteva essere anche calcolata usando la formula (2.3) .
[2] La derivata della funzione arctangente si ottiene dalle formule di derivazione della funzione tangente

$$\boxed{D(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2},}$$

Siano x_o un punto fissato e $y_o = \tan(x_o)$, per la formula (2.7) si ha

$$D \arctan(y_o) = \frac{1}{D \tan(x_o)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x_o)} = \frac{1}{1 + y_o^2}.$$

[3] Le derivate delle funzioni arcseno e arccoseno si ottengono in maniera analoga dalle formule di derivazione delle funzioni seno e coseno rispettivamente

$$\boxed{\begin{aligned} D(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1), \\ D(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}}$$

La verifica di queste due formule è lasciata al lettore.

Osservazione. È utile la seguente regola mnemonica per la formula (2.7): dalla ben nota identità

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

deriviamo, e usando la formula di derivazione della funzione composta si ottiene

$$f'\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \big(f^{-1}(y)\big)' = 1$$

Di qui, dividendo per $f'\big(f^{-1}(y)\big)$ si ottiene la (2.7).

Derivate di ordine superiore. Diremo che una funzione f è derivabile in un insieme $A \subset \mathrm{d}omf$ se è derivabile in ogni punto di A. In questo caso resta definita la funzione $f' : A \to \mathbb{R}$ data da $f' : x \mapsto f'(x)$ che è detta **funzione derivata** . Supponiamo che la derivata esista almeno in un intorno di un punto x_o, e che questa funzione a sua volta sia derivabile in x_o, allora la sua derivata si chiama *derivata seconda* di f o *derivata di ordine due* di f in x_o. Si dice anche che f è derivabile due volte in x_o. Per la derivata seconda si usano le notazioni

$$f''(x_o), \qquad D^2 f(x_o), \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Se il processo di derivazione può continuare n volte, sono definite le derivate: **terza**, **quarta**, $\cdots$, $n-$**esima** di f indicate con i simboli f''', $f^{(4)}$, $\cdots$, $f^{(n)}$. La derivata $f^{(n)}$ è anche detta *derivata di ordine* n di f. Per convenzione si pone $f^{(0)} = f$.

3. Massimi e minimi relativi

Un punto $x_o \in \mathrm{dom}f$ è un punto di *minimo assoluto* [di massimo assoluto] se $f(x_o) \leq f(x)$ [$f(x_o) \geq (f(x)$] per ogni $x \in \mathrm{dom}f$. Diamo ora una definizione di minimo e massimo “locale”.

Definizione 4.3. Sia f una funzione e sia $x_o \in \mathrm{dom}f$

a) il punto x_o è detto *punto di massimo relativo* se esiste un intorno $I_\delta(x_o) = (x_o - \delta, x_o + \delta)$ tale che
$$f(x_o) \geq f(x) \qquad \forall x \in \mathrm{dom}f \cap I_\delta(x_o).$$
In tal caso il valore $f(x_o)$ viene detto un massimo relativo per f

b) il punto x_o è detto *punto di minimo relativo* se esiste un intorno $I = (x_o - \delta, x_o + \delta)$ tale che
$$f(x_o) \leq f(x) \qquad \forall x \in \mathrm{dom}f \cap I_\delta(x_o)$$
In tal caso il valore $f(x_o)$ viene detto un minimo relativo per f.

Si dice che x_o è un *estremo relativo* se è un massimo o un minimo relativo. Al posto del termine *relativo* si usa anche il termine *locale*. In Figura 4 appare il grafico di una funzione che ha tre massimi relativi, uno di questi è un massimo assoluto, e due minimi relativi, entrambi sono minimi assoluti.

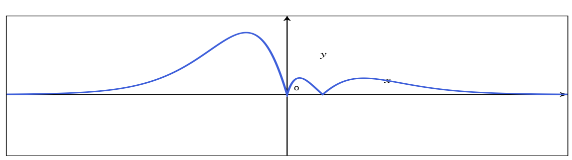


Figura 4. Funzione con tre estremi relativi

DEFINIZIONE 4.4. Un punto x_o *interno* al dominio di f si dice un punto critico di f se f è derivabile in x_o e si ha $f'(x_o) = 0$.

Un punto critico è dunque un punto in cui la tangente al grafico della funzione è orizzontale. La funzione che ha grafico in Figura 4 ha tre punti critici. Se f è la legge oraria di un moto rettilineo, e quindi f' rappresenta la velocità, i punti critici corrispondono agli istanti in cui la velocità è nulla. Per questa ragione i punti critici vengono detti anche *punti stazionari*.
Il seguente teorema fornisce una condizione necessaria di estremo relativo.

TEOREMA 4.5. *(di Fermat) Sia f definita in un intorno del punto x_o e derivabile in x_o. Se x_o è un punto di estremo relativo per f allora $f'(x_o) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x_o un punto di minimo relativo, allora esiste un intorno $I = (x_o - \delta, x_o + \delta)$ tale che $f(x) \geq f(x_o)$ per ogni $x \in I$. Allora per $x \in I$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x > x_o \\ \leq 0 & \text{se } x < x_o \end{cases}$$

Ne segue, per il Primo Teorema del confronto 3.7

$$f'_+(x_o) = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$$

$$f'_-(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0.$$

Ma le derivate desta e sinistra devono essere uguali perchè f è derivabile in x_o. Da ciò si ha subito che $f'(x_o) = 0$. Se x_o è un punto di massimo relativo la dimostrazione è analoga. □

Il teorema di Fermat assicura che se una funzione f è derivabile, i punti di estremo relativo *interni* vanno ricercati fra i punti critici di f. In generale non è vero invece che ogni punto in cui si annulla la derivata è un punto di estremo relativo, si pensi alla funzione $f(x) = x^3$ la cui derivata è zero nell'origine, che però non è un punto di estremo relativo.
Conviene precisare anche che si possono avere estremi relativi in punti che non sono critici. Per esempio in punti non interni al dominio di definizione, si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = x^3$ su $[-1, 1]$ che ha come punto di minimo $x = -1$ e come punto di massimo $x = 1$ (che sono anche assoluti). Oppure si possono avere estremi relativi in punti in cui la funzione non è derivabile, come accade per la funzione $f(x) = |x|$ nell'origine. Da queste considerazioni segue che che i punti di estremo relativo vanno cercati fra i punti del dominio di una funzione che sono

a) punti critici,
b) punti estremi del dominio di f,
c) punti in cui f non è derivabile.

4. Teoremi del calcolo differenziale

TEOREMA 4.6. *(Teorema di Rolle) Sia f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, derivabile nell'intervallo aperto (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste un punto x_o nell'intervallo (a, b) t.c. $f'(x_o) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette minimo e massimo, siano m e M e siano x_o e x_1 tali che

$$f(x_o) = m \qquad f(x_1) = M.$$

Se x_o e x_1 coincidono entrambi con gli estremi dell'intervallo $[a,b]$ allora la funzione è costante e quindi la derivata si annulla in tutti i punti dell'intervallo $[a,b]$. Se uno dei due è interno, sia x_o, allora è un punto di estremo relativo e quindi per il Teorema di Fermat deve essere $f'(x_o) = 0$. □

Se ne sono soddisfatte le ipotesi, il Teorema di Rolle ha la seguente interpretazione geometrica: esiste un punto x_o nell'intervallo (a,b) tale che il grafico della funzione ha tangente orizzontale nel punto $(x_o, f(x_o))$, si veda la Figura 5.

Teorema 4.7. *(Teorema di Lagrange) Sia f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a,b). Allora esiste un punto x_o nell'intervallo aperto (a,b) tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(x_o)(b-a). \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

ottenuta sottraendo ad $f(x)$ l'equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

che è la retta passante per gli estremi del grafico (vedi la Figura 5). Questa funzione soddisfa il teorema di Rolle, infatti è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e si ha $h(a) = h(b) = 0$. Quindi esiste un punto x_o tale che $h'(x_o) = 0$, cioè

$$f'(x_o) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

La tesi del teorema di Lagrange ha la seguente interpretazione geometrica: esiste almeno un $x_o \in (a,b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_o, f(x_o))$ *è parallela alla retta passante per i punti* $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (vedi la Figura 5).

Teorema 4.8. *Se f è derivabile su un intervallo I e se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$ allora f è costante in I.*

Dimostrazione. Supponiamo $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Siano a e b due punti in I, per il teorema di Lagrange, in I esiste un punto c tale che $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$; per l'ipotesi ne segue che $f(b) = f(a)$. Quindi f è costante. □

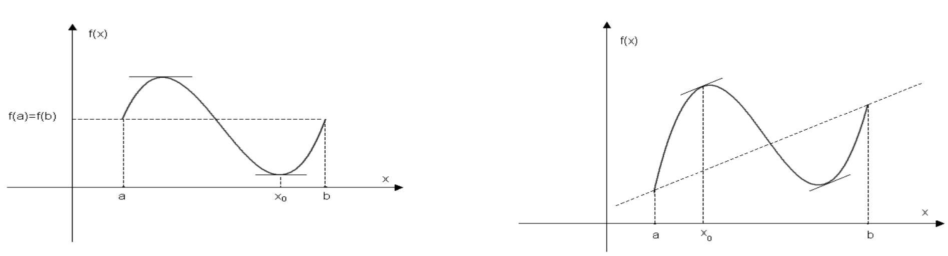


Figura 5. Interpretazione geometrica dei Teoremi di Rolle (sinistra) e di Lagrange (destra)

5. Regole di de l'Hôpital

Il seguente teorema riduce il calcolo di un limite della forma indeterminata $0/0$ al calcolo del limite del rapporto delle derivate nel caso quest'ultimo sia finito. Il risultato è utile nel calcolo di numerosi limiti.

Teorema 4.9. *(primo teorema di de l'Hôpital, forma indeterminata $0/0$ per x tendente a x_o finito) Siano f e g derivabili in un intorno destro $(x_o, x_o + \delta)$ di x_o supponiamo inoltre che*

$$\lim_{x \to x_o+} f(x) = \lim_{x \to x_o+} g(x) = 0$$

e che g' non si annulli in $(x_o, x_o + \delta)$. Se esiste (finito o infinito)

$$\lim_{x \to x_o+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

allora esiste anche

$$\lim_{x \to x_o+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ed è uguale a ℓ. Questo risultato è valido anche nel caso di limite sinistro o limite completo.

Il teorema vale anche nell'ipotesi che f e g siano due funzioni derivabili in un intervallo $(a, +\infty)$e $x_o = +\infty$ oppure due funzioni derivabili in $(-\infty, a)$ e $x_o = -\infty$.

Esempi. 1 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$

2 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x) + x}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x) + 1}{12x^2} = \frac{1}{24}$

Tutti i limiti notevoli da (1) a (11) della forma $0/0$ si possono calcolare con la regola di de l'Hôpital.

Teorema 4.10. *(Secondo teorema di de l'Hôpital, forma indeterminata ∞/∞ e x_o finito) Siano f e g derivabili in un intorno destro $(x_o, x_o + \delta)$ di x_o supponiamo inoltre che*

$$\lim_{x \to x_o+} f(x) = \lim_{x \to x_o+} g(x) = +\infty$$

e che g' non si annulli in $(x_o, x_o + \delta)$. Se esiste (finito o infinito)

$$\lim_{x \to x_o+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

allora esiste anche

$$\lim_{x \to x_o+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ed è uguale a ℓ. Questo risultato è valido anche nel caso di limite sinistro o limite completo.

Il teorema vale anche nell'ipotesi che f e g siano due funzioni derivabili in un intervallo $(a, +\infty)$ e $x_o = +\infty$ [o $(-\infty, a)$ e $x_o = -\infty$].

Esempi. I seguenti limiti sono ottenuti usando la regola di de l'Hôpital

1. Limiti infiniti per x tendente a $x_o \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\alpha} x^\alpha = 0.$$

dove $\alpha > 0$. Abbiamo così verificato il limite (15) della tavola dei limiti notevoli.

2. Limiti infiniti per x tendente a $+\infty$
Usando la regola di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty. \tag{5.1}$$

È evidente che se al posto di x compare x^n con n intero basta applicare la regola di de l'Hôpital n volte. Possiamo ora mostrare il limite più generale e già noto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad\qquad \alpha > 0$$

che compare nelle tavole dei limiti notevoli (12); moltiplicando e dividendo per α si ha

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha}\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^\alpha = \frac{1}{\alpha^\alpha}\left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^\alpha$$

Con il cambiamento di variabile $y = x/\alpha$ e usando il limite (5.1) si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^\alpha = \frac{1}{\alpha^\alpha}\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{e^y}{y}\right)^\alpha = +\infty$$

3. Sia $\alpha > 0$, proviamo la formula già nota

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$$

Deriviamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{D\log(x)}{D(x^\alpha)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha} = 0$$

4.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1-e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-e^x} = -1.$$

5.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+x}(e^x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1$$

Osserviamo che il teorema di de l'Hôpital afferma che se esiste il limite del rapporto delle derivate f'/g' allora esiste il limite del rapporto f/g delle funzioni. Ma può accadere non esista il limite f'/g' mentre il limite di f/g esiste.

Esempio. Usando il Corollario 3.9 si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{2x+\cos(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{2+\frac{\cos(x)}{x}} = \frac{1}{2}$$

Mentre, ricordando che le funzioni periodiche non hanno limite all'infinito (vedi Esempio 3.2),

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{D(x+\sin(x))}{D(2x+\cos(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x))}{2-\sin(x)} = \nexists$$

Le considerazioni precedenti mostrano che il comportamento corretto nel calcolo dei limiti con la regola di de l'Hôpital **dovrebbe** essere di procedere **prima** al calcolo del limite del rapporto delle derivate e poi, se questo esiste, dedurne il limite del rapporto delle funzioni.
Il teorema seguente è una conseguenza del primo teorema de l'Hôpital; l'importanza del suo utilizzo nelle applicazioni è messo in evidenza nella successiva Osservazione 12.

TEOREMA 4.11. *(limite della derivata) Sia f continua in (a,b), derivabile in (a,b) eccetto al più il punto x_o. Se esiste finito o infinito*

$$\lim_{x\to x_o} f'(x) = \ell$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell.$$

Un analogo risultato si ha anche per i soli limite destro e limite sinistro.

DIMOSTRAZIONE. Poichè f è continua in x_0, il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$; inoltre la funzione $g(x) = x - x_0$ verifica l'ipotesi (i) del primo teorema di de l'Hôpital. Allora, applicando tale teorema si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{D(f(x)-f(x_0))}{D(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell.$$

□

ESEMPIO. Stabilire se esistono dei valori del parametro a tali che la funzione seguente sia derivabile nell'origine.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax & \text{se } x \le 0 \\ e^x + 2x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = 0 = f(0)$, cioè la funzione è continua nell'origine. Calcoliamo i limiti della derivata, poichè

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & \text{se } x \le 0 \\ e^x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = a \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 3,$$

da qui si deduce per il Teorema 4.11 che f è derivabile nell'origine se $a = 3$ e $f'(0) = 3$.

OSSERVAZIONE 12. Dal Teorema 4.11 segue che se una funzione f è continua in x_o ed esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f'(x) = \ell$, si ha

a) se $l \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile in x_o e si ha $f'(x_o) = \ell$.
b) se $\ell = \pm\infty$ allora f non è derivabile in x_o.

Una analoga affermazione si ha per i soli limiti destro e sinistro della derivata. Ad esempio consideriamo la funzione $f(x) = \arcsin(x)$ che, come noto è continua in $(-1,1)$. Si ha $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e quindi $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty$ da cui segue subito che $f'(\pm 1)$ non esiste. Una analogo risultato si ha per la funzione arcocoseno.

6. Monotonia e segno della derivata. Condizioni sufficienti per estremi relativi.

TEOREMA 4.12. *(criterio di monotonia) Sia f una funzione derivabile su un intervallo I. Allora si ha*

a) se f è crescente [decrescente] in I allora $f'(x) \ge 0$ [$f'(x) \le 0$] per ogni x in I.
b) se $f'(x) \ge 0$ [$f'(x) \le 0$] in I allora f è crescente [decrescente] su I.
c) se $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] in I allora f è strettamente crescente [decrescente] su I.

Dimostrazione. Proviamo la a). Sia f una funzione crescente e sia $x_o \in I$; per ogni $x \in I$ si ha

$$\begin{array}{ll} f(x) \leq f(x_o) & \text{se } x \leq x_o \\ f(x) \geq f(x_o) & \text{se } x \geq x_o \end{array},$$

e quindi

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0 \quad \forall\, x \in I \setminus \{x_o\};$$

allora per il Teorema del confronto 3.7 si ha

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad \text{cioè} \qquad f'(x_0) \geq 0.$$

Proviamo la b). Sia $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Scegliamo due punti x_1, x_2 in I con $x_1 < x_2$, per il Teorema di Lagrange esiste un $x_o \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)\,(x_2 - x_1).$$

Di qui, per l'ipotesi $f'(x_o) \geq 0$ segue subito che $f(x_2) \geq f(x_1)$. Abbiamo così provato che f è crescente. La dimostrazione di c) è analoga a quella di b).
Il caso f decrescente si mostra in maniera del tutto analoga □

Si noti che per i punti a) e b) del teorema precedente se f è *derivabile nell'intervallo I* si ha

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in\ I \quad \Longleftrightarrow f \quad \text{è crescente su } I. \\ f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in\ I \quad \Longleftrightarrow f \quad \text{è decrescente su } I. \end{array}}$$

Mentre non è possibile rovesciare la c), per esempio la funzione $f(x) = x^3$ che è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, non ha derivata positiva su $\mathbb{R}$. Il seguente teorema mostra come lo studio del segno della derivata è utile per individuare gli estremi relativi.

Teorema 4.13. *(condizioni sufficienti per estremi relativi) Sia f continua in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e derivabile in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$. Se*

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 & \textit{in } \ (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) \leq 0 & \textit{in } \ (x_0, x_0 + \delta), \end{cases}$$

allora x_0 è punto di massimo relativo. Se

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0 & \textit{in } \ (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) \geq 0 & \textit{in } \ (x_0, x_0 + \delta), \end{cases}$$

allora x_0 è un punto di minimo relativo.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima affermazione. Sia $x \in (x_o - \delta, x_o)$, per il teorema di Lagrange esiste un punto $\overline{x}$, interno all'intervallo di estremi x e x_o, tale che

$$f(x) - f(x_o) = f'(\overline{x})(x - x_o).$$

Ma per l'ipotesi $f'(\overline{x}) \geq 0$ e quindi il secondo membro è ≤ 0. Ne segue che $f(x) \leq f(x_o)$ se $x \in (x_o - \delta, x_o)$. In maniera analoga si mostra che $f(x) \leq f(x_o)$ se $x \in (x_o, x_o + \delta)$. E quindi abbiamo provato che x_o è un punto di massimo relativo. □

Esempio 4.2. La funzione $f(x) = xe^{-2x^2}$ ha derivata $f'(x) = e^{-2x^2}(1 - 4x^2)$. Ha due punti critici $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. La derivata è positiva in $I = (-1/2, 1/2)$ e negativa in $\mathbb{R} \setminus I$ quindi i due punti critici $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ sono rispettivamente minimo e massimo relativo.

Il seguente teorema permette di individuare gli estremi relativi utilizzando le derivate di ordine superiore al primo (la dimostrazione è omessa).

Teorema 4.14. - *Data* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *derivabile n volte in (a,b),* $n \geq 2$*, sia* $x_0 \in (a,b)$ *t.c.*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad e \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora si ha

$$n \text{ pari} \quad \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ è punto di min relativo} \\ \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ è punto di max relativo} \end{cases}$$

$$n \text{ dipari} \quad \implies x_0 \text{ non è estremo relativo.}$$

Un semplice esempioè la funzione potenza ad esponente intero $f(x) = x^n$.

Definizione 4.5. (convessità e concavità in un punto) Sia f una funzione derivabile in x_o. Si dice che f è convessa in x_o se esiste un intorno $I_\delta(x_o)$tale che

$$f(x) \geq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \qquad \forall x \in I_\delta(x_o). \tag{6.1}$$

Si dice che f è concava in x_o se esiste un intorno $I_\delta(x_o)$ tale che

$$f(x) \leq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \qquad \forall x \in I_\delta(x_o). \tag{6.2}$$

Si dice che f ha un flesso in x_o se esiste un intorno $I_\delta(x_o)$ tale che

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \qquad \forall x \in I_\delta(x_o),\ x < x_o \\ f(x) &\geq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \qquad \forall x \in I_\delta(x_o),\ x > x_o. \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \qquad \forall x \in I_\delta(x_o),\ x < x_o \\ f(x) &\leq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \qquad \forall x \in I_\delta(x_o),\ x > x_o. \end{aligned}$$

Quindi se una funzione è convessa in un punto x_o si ha che in un intorno del punto il grafico della funzione è al di sopra della retta tangente al grafico in x_o, al contrario se è concava il grafico si trova al di sotto di tale retta.
Si verifica facilmente che la funzione $f(x) = x^2$ è convessa in ogni punto del suo dominio. Un punto x_o è un punto di flesso per f quando il grafico attraversa la retta tangente.

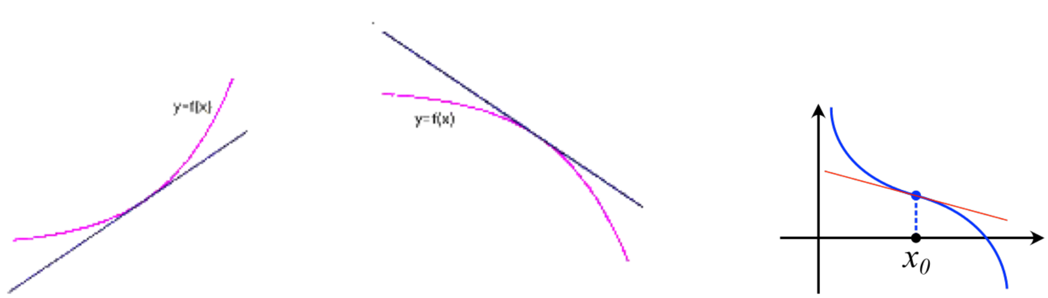


Figura 6. Funzione convessa, funzione concava, flesso

7. Esercizi

ESERCIZI. [1] Dire se le seguenti funzioni sono derivabili nei punti indicati

a) $f(x) = |x-2|+2, \quad x_o = 2;$ *b)* $g(x) = e^{|x-1|}, \quad x_o = 1;$

c) $h(x) = \sqrt{x^3-1}, \quad x_o = 1;$ *d)* $\ell(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad x_o = 0.$

[2] Trovare l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità delle funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \log(|\sin(x)|)$$

[3] Determinare dominio e insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & x \leq 0 \\ -(x^2+1)\cos x & x > 0 \end{cases}$$

Si ha $dom f = \mathbb{R}$. Per $x \neq 0$ la funzione f è (continua e) derivabile perchè somma e prodotto di funzioni (continue e) derivabili. Per $x = 0$ si ha $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = -1 = f(0)$, quindi f è continua su $\mathbb{R}$. Discutiamo la derivabilità in $x = 0$: osserviamo che, per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ -2\,x\,\cos x + (x^2+1)\,\sin x & x > 0 \end{cases} ;$$

e per l'Osservazione 12 $f'(0)$ non esiste perchè

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \implies f'_-(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \implies f'_+(0) = 0.$$

Concludendo l'insieme di continuità è $\mathbb{R}$ e l'insieme di derivabilità è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

[4] Trovare l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2\arcsin(x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x-1} + \pi x & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

[5] Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^x + b\,x + a & x \leq 0 \\ -(x^2+1)\cos x & x > 0 \end{cases}$$

a) determinare tutti gli a e b reali tali che f sia continua su $\mathbb{R}$
b) determinare tutti gli a e b reali tali che f sia derivabile su $\mathbb{R}$
Si ha $dom\, f = \mathbb{R}$. Per $x \neq 0$ la funzione f è (continua e) derivabile perchè somma e prodotto di funzioni (continue e) derivabili. Per $x = 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a = f(0), \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \iff a = -1$$

.
E quindi la funzione f è continua su $\mathbb{R}$ per $a = -1$ e $\forall\, b \in \mathbb{R}$; se $a \neq -1$ la funzione f è continua solo per $x \neq 0$ qualunque sia $b \in \mathbb{R}$.
Stabiliamo la derivabilità. Osserviamo che se $a \neq -1$ la funzione f non è derivabile in 0 perchè

non è continua in tale punto.
Sia ora $a = -1$; avremo

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + b & x < 0 \\ -2\,x\,\cos x + (x^2+1)\,\sin x & x > 0 \end{cases}$$

e dall'Osservazione 12 (poichè per $a = -1$ la f è continua in $x = 0$) si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 + b \implies f'_-(0) = 1 + b \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \implies f'_+(0) = 0$$

La funzione f è derivabile quindi sul $dom\, f = \mathbb{R} \iff a = -1$ e $b = -1$.

[6] È data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-x}.$$

1) Disegnare il grafico individuando eventuali estremi relativi
2) Dire se f è crescente nell'intervallo $[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.
3) Dire se f è invertibile in $(2, +\infty)$. In caso positivo determinare dominio e immagine della inversa, disegnarne il grafico e trovare la derivata di $\big(f/(2,+\infty)\big)^{-1}$ nel punto $-\sqrt[3]{e}/2$.

CAPITOLO 5

Integrali

Nelle prime sezioni di questo capitolo definiamo la primitiva di una funzione e successivamente l'integrale definito di Riemann. La determinazione di una primitiva di una funzione assegnata gioca un ruolo importante nel problema del calcolo dell'area di una regione piana e, in cinematica, nel problema della determinazione dello spostamento quando sia nota la velocità di un mezzo in moto.

1. Primitiva, integrale indefinito

Definizione 5.1. Sia f una funzione definita sull'intervallo aperto finito o infinito I. Una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è detta una primitiva di f in I se è derivabile in I e si ha

$$F'(x) = f(x) \qquad x \in I.$$

Esempi 5.1.

a) la funzione $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$ è una primitiva di $f(x) = x^2 + 2x$ su $\mathbb{R}$. Anche $G(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$ è una primitiva di f su $\mathbb{R}$.
b) La funzione $F(x) = -\cos(x)$ è una primitiva di $\sin(x)$ su $\mathbb{R}$.
c) La funzione $F(x) = \log(x)$ è una primitiva di $1/x$ in $(0, +\infty)$ mentre in $(-\infty, 0)$ una primitiva di $1/x$ è $\log(-x)$.
d) Le funzioni $F(x) = \sin(2x)$ e $F(x) = (\sin(x) + \cos(x))^2$ sono due primitive di $f(x) = 2\cos(2x)$ su $\mathbb{R}$.
e) La funzione $h(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ non ha primitiva su $\mathbb{R}$.

Come mostrano questi esempi, non tutte le funzioni hanno una primitiva sul loro dominio. Una classe importante di funzioni che ammettono primitiva è l'insieme delle funzioni continue. Infatti si può dimostrare che *ogni funzione continua su un intervallo ammette primitiva.* Questo fatto è una conseguenza del *Teorema fondamentale del calcolo integrale* enunciato più avanti.

Teorema 5.1. *Sia f una funzione che ammette una primitiva F su un intervallo I. Allora la funzione*

$$F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

è una primitiva di f in I. Viceversa se F e G sono due primitive di f sull'intervallo I allora esiste una costante c tale che $G(x) - F(x) = c$.

Dimostrazione. La prima parte è immediata. Proviamo la seconda parte. Siano F e G due primitive di f in I. Consideriamo $h(x) = G(x) - F(x)$, derivando si ha

$$h'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

ne segue, per il Teorema 4.8, che $h(x)$ è costante su I, cioè $G(x) = F(x) + c$ con c numero reale. $\square$

DEFINIZIONE 5.2. L'insieme di tutte le primitive di f in un intervallo I si chiama *integrale indefinito* di f sull'intervallo I e si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx.$$

La funzione f è detta *funzione integranda.* La variabile x è detta *variabile d'integrazione.*

Se f ha una primitiva F su I, per il Teorema 5.1 l'integrale indefinito di f è l'insieme delle funzioni $F(x) + c$:

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c : \; c \in \mathbb{R}\}.$$

In questa scrittura, per semplificare, spesso si omettono le parentesi graffe e si scrive più semplicemente

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

questa scelta non deve generare confusione sul significato dell'integrale indefinito. Infine osserviamo che il simbolo dx è puramente formale e non ha un significato. Come vedremo più avanti, è utile nei cambi di variabile e quando ci sono più variabili indipendenti in gioco perchè indica rispetto a quale variabile si intende integrare.

ESEMPI.

$$\text{a)} \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c; \qquad \text{b)} \int \cos(3x)dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + c;$$

$$\text{c)} \int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + c; \qquad \text{d)} \int \frac{1}{x}\,dx = \log(|x|) + c;$$

OSSERVAZIONE 13. Riguardo all'integrale di $1/x$ in d) ricordiamo che l'integrale indefinito è $\log(x) + c$ in $(0, +\infty)$ ed è $\log(-x) + c$ in $(-\infty, 0)$ ma è uso comune dire che la generica primitiva di è $\log(|x|) + c$.

Primitive di alcune funzioni. Dalle formule di derivazione della funzioni elementari seguono immediatamente gli integrali seguenti:

TAVOLA 1.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\,, \quad \alpha \neq -1 \qquad \int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c\,, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c\,,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c\,,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c\,, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c.$$

2. Regole di integrazione indefinita

Teorema 5.2. *(linearità dell'integrale indefinito) Siano f e g due funzioni integrabili su un intervallo I. Allora per ogni α e $\beta \in \mathbb{R}$ la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile in I e si ha*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Se F e G sono due primitive di f e g rispettivamente allora per le proprietà della derivata

$$\Big(\alpha F(x) + \beta G(x)\Big)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Questo significa che $\alpha F(x) + \beta G(x)$ è una primitiva di $\alpha f(x) + \beta g(x)$. Per la definizione di integrale indefinito questo equivale alla (2.1).

Esempio 5.1. Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\int P(x)\, dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} + \ldots + a_2 \frac{x^3}{3} + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

□

I Teoremi 5.3 e 5.4 che seguono forniscono due importanti metodi di integrazione.

Teorema 5.3. *(integrazione per parti) Siano f e g due funzioni derivabili in un intervallo I. Allora si ha*

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x) dx. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Sia $H(x)$ una primitiva di $f'(x)g(x)$ su I. Per la formula di derivazione del prodotto di due funzioni (vedi (2.4) Capitolo 4) si ha

$$\begin{aligned}\Big(f(x)g(x) - H(x)\Big)' =& f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x)\\ =& f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\\ =& f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Questo mostra che $f(x)g(x) - H(x)$ è una primitiva di $f(x)g'(x)$, cioè $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ è $\int f(x)g'(x)dx$. La (2.2) è così dimostrata. □

La formula (2.2) è detta *formula di integrazione per parti*; nella pratica, per calcolare l'integrale indefinito di un prodotto di due funzioni si sceglie uno dei due fattori come fattore non derivato ($f(x)$) e l'altro come la derivata $g'(x)$ di una funzione $g(x)$ che si deve determinare (la primitiva di $g'(x)$). Una volta trovata g si applica la formula (2.2) e per concludere si deve trovare una primitiva di $f'(x)g(x)$.

Esempi 5.2. Calcoliamo i seguenti integrali

1) $\displaystyle\int x \cos(x)\, dx.$

È opportuno scegliere $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos(x)$, quindi $g(x) = \sin(x)$:

$$\int x \cos(x)\, dx = x \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + c$$

Si noti: la scelta $f(x) = \cos(x)$, $g'(x) = x$ avrebbe condotto a

$$\int x\cos(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cos(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot(-\sin(x))dx$$

che non risolve il calcolo dell'integrale.

2) $\displaystyle\int \log(x)\,dx.$

L'integranda è integrabile per parti. Scegliamo $f(x) = \log(x)$ e $g'(x) = 1$:

$$\int \log(x)\,dx = x\log(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\log(x) - x + c.$$

Teorema 5.4. *(Regola di integrazione per sostituzione) - Siano f una funzione integrabile su un intervallo I e sia F una sua primitiva su I. Sia inoltre $\varphi : J \to I$ una funzione derivabile. definita su un intervallo J a valori nell'intervallo I. Allora la funzione $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ è integrabile su J e $F(\varphi(x))$ è una sua primitiva cioè*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c; \tag{2.3}$$

questa formula può anche essere scritta:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \;=\; \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=\varphi(x)}. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f, per la formula di derivazione della funzione composta

$$D\left(F(\varphi(x))\right) \;=\; f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Da cui segue subito (2.3). □

La formula (2.3) può essere usata per trasformare un integrale che è nella forma del primo membro, in un integrale nella forma del secondo membro, spesso più semplice.

Esempi.

1) Si vuole calcolare l'integrale $\displaystyle\int (1+x^2)^5 2x\;dx.$

La funzione integranda si può scrivere $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ dove $f(t) = t^5$ e $\varphi(x) = 1 + x^2$. Per la (2.4) si ha

$$\int (1+x^2)^5\,2x\;dx = \left[\int t^5\,dt\right]_{t=1+x^2} = \left[\frac{t^6}{6}\right]_{t=1+x^2} = \frac{1}{6}(1+x^2)^6 + c$$

2) Si vuole calcolare l'integrale $\displaystyle\int \sin^2(x)\,\cos(x)\,dx$

La funzione integranda si può scrivere $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ dove $f(t) = t^2$ e $t = \sin(x)$. Per la (2.4) si ha

$$\int \sin^2(x)\,\cos(x)\,dx = \left[\int t^2\,dt\right]_{t=\sin(x)} = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=\sin(x)} = \frac{\sin^3(x)}{3} + c$$

3) Allo stesso modo si trova

$$\int f^n(x)\,f'(x)\,dx = \left[\int t^n\,dt\right]_{t=f(x)} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=f(x)} = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \tag{2.5}$$

Osservazione 14. La presenza del simbolo dx consente di rendere un po' più automatica la tecnica di sostituzione nel calcolo dell'integrale in (2.3). Poniamo $t = \varphi(x)$ e dunque $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, che scriviamo al seguente modo, come se si trattasse di un quoziente:

$$\varphi'(x)\,dx = dt.$$

A questo punto per passare dal primo membro al secondo nella (2.3) basta sostituire ai vari termini in x i vari termini in t :

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \;=\; \Big[\int f(t)\,dt\Big]_{t=\varphi(x)}. \tag{2.6}$$

Ad esempio, calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{\log^2(x)}{x}\,dx$$

su $(0, +\infty)$; ponendo $t = \log(x)$ si ha $dt = \frac{1}{x}dx$ e quindi

$$\int \log^2(x)\,\frac{1}{x}dx = \Big[\int t^2\,dt\Big]_{t=\log(x)} = \frac{\log^3(x)}{3} + c.$$

Nell'integrale qui sotto ponendo $t = x - 1$ si ha $dt = dx$ e dunque

$$\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx \;=\; \Big[\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\Big]_{t=(x-1)} \;=\; \arctan(x-1) + c.$$

Si tratta di una procedura puramente formale, che in realtà fa uso della formula (2.3). Il successo del metodo dipende dalla abilità nell'individuare quale parte dell'integranda va sostituita con simbolo t.

Esempi.

1) Si ha

$$\boxed{\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx \;=\; \frac{1}{b}\,\arctan(\frac{x-a}{b}) + c.} \tag{2.7}$$

infatti usando il cambiamento di variabile $t = (x - a)/b$ si ha

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx \;=\; \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{(\frac{x-a}{b})^2+1}\,dx \;=\; \frac{1}{b}\Big[\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\Big]_{t=(x-a)/b} \;=\; \frac{1}{b}\,\arctan(\frac{x-a}{b}) + c.$$

Infine mostriamo

$$\boxed{\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\log\big((x-a)^2+b^2\big) + \frac{1}{b}\,a\arctan(\frac{x-a}{b}) + c.} \tag{2.8}$$

Infatti: al numeratore aggiungiamo e sottraiamo a e moltiplichiamo e dividiamo per 2, poi spezziamo l'integrale

$$\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \int \frac{a}{(x-a)^2+b^2}\,dx$$

Ora per il primo integrale poniamo $t = x - a$, mentre il secondo è noto (vedi la (2.7)):

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}\,dx &= \frac{1}{2}\Big[\int \frac{2t}{t^2+b^2}\,dt\Big]_{t=x-a} + \frac{a}{b}\arctan\big(\frac{x-a}{b}\big)+c \\ &= \frac{1}{2}\big[\log\big(t^2+b^2\big)\big]_{t=x-a} + \frac{a}{b}\arctan\big(\frac{x-a}{b}\big)+c \\ &= \frac{1}{2}\log\big((x-a)^2+b^2\big) + \frac{a}{b}\arctan\big(\frac{x-a}{b}\big)+c\end{aligned}$$

2) Calcolare

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \tag{2.9}$$

Il denominatore ha radici complesse che sono $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Quindi si tratta di un integrale del tipo (2.7). Scriviamo il denominatore come $(x-a)^2+b^2$:

$$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2.$$

Usando la formula risolutiva (2.7) con $a = 1/2$ e $b = \sqrt{3}/2$,

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1/2)\big)+c.$$

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I. Gli integrali seguenti si risolvono in modo immediato, con la sostituzione $t = f(x)$.

Tavola 2.

$a)$ $\displaystyle\int \big(f(x)\big)^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{\big(f(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{se } \alpha \neq -1$

$b)$ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$

$c)$ $\displaystyle\int \sin(f(x))\,f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + c$

$d)$ $\displaystyle\int \cos(f(x))\,f'(x)\,dx = \sin(f(x)) + c$

$e)$ $\displaystyle\int e^{f(x)}\,f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

$f)$ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \arctan(f(x)) + c$

Verifichiamo solo il primo , gli altri si ottengono in modo analogo.

$$\int (f(x))^{\alpha} f'(x)\,dx = \Big[\int t^{\alpha}\,dt\Big]_{t=f(x)} = \Big[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\Big]_{t=f(x)} = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$$

Esempio 5.2. 1) Se $a \in \mathbb{R}^+$ per la b) nella Tavola 2

$$\boxed{\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a| + c} \tag{2.10}$$

2) se $a \in \mathbb{R}^+$ e $p \neq 1$ per la a) nella Tavola 2

$$\boxed{\int \frac{1}{(x-a)^p}\, dx = \frac{1}{1-p} \frac{1}{(x-a)^{p-1}} + c.} \tag{2.11}$$

Concludiamo questa sezione fornendo una seconda versione della formula di integrazione per sostituzione (2.4); se la funzione φ nell'enunciato del teorema è invertibile, dalla (2.4) componendo con φ^{-1} e scambiamo l'ordine dei due membri si ha

$$\boxed{\int f(t)\, dt = \Big(\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dt \Big)_{x=\varphi^{-1}(t)}} \tag{2.12}$$

Come vedremo in seguito questa formula è particolarmente utile per risolvere certi integrali di funzioni razionali di funzioni trigonometriche (vedi la Sezione 4 di questo capitolo).

3. Integrali di funzioni razionali

Abbiamo visto nella precedente sezione integrali di funzioni che sono rapporti di polinomi (ad esempio (2.7), (2.8), (2.10), (2.11)). Vogliamo ora affrontare il problema più generale del calcolo di integrali di funzioni razionali cioè di funzioni

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{3.1}$$

dove P e Q sono due polinomi di grado n e m rispettivamente. e il cui dominio è l'unione di un numero finito di intervalli (l'insieme dei punti in cui il denominatore non si annulla). Vogliamo risolvere gli integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

dove P e Q polinomi di grado n e m rispettivamente e l'integrazione è intesa su intervalli contenuti nel dominio della funzione integranda.
Possiamo ridurci a considerare solo i casi in cui il grado $n < m$; infatti se $n \geq m$, dividendo P per Q si ha

$$P(x) = Q(x)T(x) + R(x)$$

dove $T(x)$ è un polinomio di grado $n-m$ e il resto $R(x)$ è un polinomio di grado $\leq m-1$. Allora per la linearità dell'integrale indefinito (vedi (2.1)) si ha

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int T(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

dove il primo integrale è di immediata soluzione. Il problema è perciò ricondotto al calcolo di integrali di funzioni razionali in cui il numeratore ha grado inferiore al grado del denominatore. La procedura per il calcolo di integrali di tali funzioni razionali si basa sul seguente

Teorema 5.5. *Ogni funzione razionale $P(x)/Q(x)$ con grado di P minore del grado di Q è la somma di costanti per funzioni razionali della forma*

$$(a)\frac{1}{(x-a)^k}, \qquad (b)\frac{1}{\big((x-a)^2+b^2\big)^k}, \qquad (c)\frac{x}{\big((x-a)^2+b^2\big)^k}$$

che sono dette fratti semplici.

L'espressione di P/Q garantita dal teorema è detta *decomposizione di P/Q in fratti semplici*;

sull'argomento si vedano anche le note di EML1 *Polinomi* di E. Carletti.
Rimandiamo per un momento il problema di determinare una tale decomposizione per una generica funzione razionale P/Q e osserviamo che, se è nota la sua decomposizione in fratti semplici, per la linearità dell'integrale indefinito, l'integrale di P/Q è uguale alla somma di costanti per gli integrali dei suoi fratti semplici che, come vedremo più avanti, sono noti.
Un semplice esempio è fornito dalla funzione $\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$ la cui decomposizione è

$$\frac{3x-5}{x^2-3x+2} = \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)}$$

e quindi per la (2.10)

$$\int \frac{3x-5}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{2}{(x-1)}\ dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx = 2\log|x-1| + \log|x-2|.$$

Gli integrali delle funzioni (a) sono in (2.11), gli integrali di (b) e (c) per $k = 1$, sono in (2.7) e in (2.8); per $k > 1$ sono note delle formule risolutive iterative rispetto al parametro k e si trovano sulle tavole di integrali. Da queste considerazioni segue che possiamo calcolare l'integrale di ogni funzione razionale se conosciamo la sua decomposizione in fratti semplici. .

Ora ci occupiamo di rispondere alla domanda: *come si trova la decomposizione in fratti semplici di una assegnata funzione razionale* $\frac{P}{Q}$ *dove il grado di* P *è minore del grado di* Q*?*
Si eseguono i seguenti passi
1) si scrive il denominatore Q come prodotto di fattori "irriducibili ", cioè del tipo

$$(x-a)^k \qquad \left((x-a)^2 + b^2\right)^k$$

dove a e $a \pm bi$ sono le radici di Q e k la loro molteplicità; questa operazione è detta "fattorizzazione in fattori irriducibili". Salvo che nei casi più semplici, negli esercizi supporremo che sia già nota la fattorizzazione del polinomio Q.
2) si scrive $\frac{P(x)}{Q(x)}$ come somma di fratti semplici per delle costanti (da determinare)
3) si scrive il secondo membro come un'unica frazione avente per denominatore comune $Q(x)$.
4) si trovano le costanti della decomposizione in fratti semplici utilizzando il Principio di identità dei polinomi (vedi le note di EML1 *Polinomi*) che qui ricordiamo

(Principio di identità dei polinomi) Siano M *e* N *due funzioni polinomiali su* $\mathbb{R}$*. Si ha* $M(x) = N(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ *se e soltanto i termini di ugual grado di* M *ed* N *hanno gli stessi coefficienti.*

Esempi 5.3. 1. Q ha radici reali e semplici $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$.

Cerchiamo le due costanti A e B tali che

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Riducendo allo stesso denominatore e uguagliando i numeratori si ottiene $1 = (A + B)x + (A - B)$ per ogni x; per il Principio di identità dei polinomi si ottiene $A + B = 0$ e $A - B = 1$, e quindi $A = 1/2$ e $B = -1/2$. Allora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\log(|x-1|)\, dx - \frac{1}{2}\log(|x+1|) \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.\end{aligned}$$

2. Q ha radici reali e multiple. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx.$

Esistono tre costanti A, B e C t.c,

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2},$$

da tale uguaglianza, riducendo allo stesso denominatore e uguagliando i numeratori si ha

$$x+2 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B$$

per il Principio di identità dei polinomi si ottiene

$$A+C=0, \qquad -2A+B=1, \qquad -2B=2.$$

Si ottiene così un sistema di tre equazioni in tre incognite che ha soluzione: $A = B = -1$ e $C = 1$. Possiamo quindi scrivere l'integrale assegnato come somma dei tre integrali

$$\int \frac{x+2}{x^2(x-2)}\,dx = -1\int \frac{1}{x}\,dx - 1\int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx$$
$$= -\log|x| + \frac{1}{x} + \log|x-2| + c.$$

3. Q è un trinomio di secondo grado con radici complesse e P ha grado zero.

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx.$$

Abbiamo già risolto questo integrale (vedi (2.9)) che è del tipo (2.7).

4. Q ha radici complesse semplici e P ha grado 1.

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx$$

Il denominatore ha radici complesse coniugate, $1 \pm i$ e si può scrivere $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$. Questo integrale è stato già risolto, vedi la (2.8), da cui ponendo $a = b = 1$ si ha

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\log((x-1)^2+1) + \arctan(x-1) + c.$$

4. Altri esempi di integrazione per parti e per sostituzione

I - Altri esempi di integrazione per parti. In questo paragrafo risolviamo per parti alcuni integrali; l'integrazione per parti può essere applicata anche più volte di seguito se necessario. Le integrande che considereremo saranno tutte continue sul dominio e questo garantisce l'esistenza dei vari integrali indefiniti su intervalli del dominio.

[1] Siano $p \in \mathbb{N}^+$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gli integrali

$$\boxed{\int x^p \cos(a\,x)\,dx\;; \qquad \int x^p \sin(a\,x)\,dx\;; \qquad \int x^p e^{a\,x}\,dx\;;}$$

si calcolano utilizzando la formula di integrazione per parti (2.2) con il fattore non derivato $f(x) = x^p$ e la funzione trigonometrica come fattore derivato.

Esempio. Calcolare
$$\int x^2 \, \sin(3\,x)\,dx.$$
Soluzione Usiamo la formula (2.2) con $f(x) = x^2$ e $g'(x) = \sin(3x)$, quindi $g(x) = -\cos(3\,x)/3$. Si ha
$$\int x^2 \, \sin(3\,x)\,dx \;=\; -x^2\,\frac{\cos(3\,x)}{3} + \frac{2}{3}\int x\,\cos(3\,x)\,dx$$
Possiamo calcolare l'integrale a secondo membro integrando ancora per parti $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos(3\,x)$, e quindi $g(x) = \sin(3\,x)/3$; si ha
$$\int x\cos(3x)dx = \frac{1}{9}\big(3x\sin(3x) + \cos(3x)\big) + c$$
e quindi
$$\int x^2 \, \sin(3\,x)\,dx = -\frac{1}{3}\,x^2\,\cos(3\,x) + \frac{2}{9}\,x\,\sin(3\,x) + \frac{2}{27}\cos(3\,x) + c.$$

[2] Gli integrali del tipo
$$\boxed{\begin{gathered}\int\cos(ax)\sin(bx)dx\;;\quad \int\cos(ax)\cos(bx)dx;\quad \int\sin(ax)\sin(bx)dx;\\ \int e^{ax}\sin(bx)dx;\quad \int e^{ax}\cos(bx)dx;\end{gathered}}$$
$a,\, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, si integrano per parti; in questo caso si possono scegliere entrambe le funzioni come fattore derivato. Bisogna osservare, però, che questi integrali non si determinano in modo immediato ma in tutti è necessario un passaggio finale opportuno, come nell'esempio seguente.

Esempio. Calcolare $\displaystyle\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx.$

Soluzione Scegliamo $f(x) = e^{2\,x}$ e $g'(x) = \sin x$, e quindi $g(x) = -\cos x$. Si ha
$$\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx \;=\; -e^{2\,x}\,\cos x + 2\int e^{2\,x}\,\cos x\,dx \tag{4.1}$$
Calcoliamo per parti l'integrale a secondo membro scegliendo : $f(x) = e^{2x}$ e $g'(x) = \cos x$, da cui $g(x) = \sin x$
$$\int e^{2x}\,\cos x\,dx = e^{2x}\,\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx.$$
Osserviamo che, dopo due integrazioni per parti, ritroviamo l'integrale da cui siamo partiti; sostituiamo in (4.1)
$$\int e^{2x}\,\sin x\,dx = -e^{2x}\,\cos x + 2\,e^{2x}\,\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx$$
e ricaviamo l'integrale assegnato
$$\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx \;=\; \frac{1}{5}\,e^{2\,x}\,(-\cos x + 2\,\sin x) + c$$

Esempio. Mostriamo che
$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,x - \frac{\sin(2\,x)}{4} + c \qquad\qquad \int \cos^2 x\,dx \;=\frac{1}{2}\,x + \frac{\sin(2\,x)}{4} + c$$

Utilizzando le formule di duplicazione si ha

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2\,x)\,dx = \frac{1}{2}\,x - \frac{\sin(2\,x)}{4} + c$$
$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2\,x)\,dx = \frac{1}{2}\,x + \frac{\sin(2\,x)}{4} + c$$

II - Altri esempi di integrazione per sostituzione. Nei calcoli seguenti il simbolo $\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=\varphi(x)}$ è sostituito da $\int f(t)\,dt\,\Big]_{t=\varphi(x)}$.

[1] Calcolare l'integrale seguente usando la sostituzione $t = \cos(x)$

$$\int \sin(x)\left(4\cos^3(x) + 6\cos^2(x) - 8\right)\,dx$$

Soluzione Con la sostituzione $t = \cos(x)$ si ha $dt = -\sin(x)dx$ e quindi

$$\int \sin(x)\big(4\cos^3(x) + 6\cos^2(x) - 8\big)\,dx = -\Big[\int \left(4t^3 + 6t^2 - 8\right)\,dt\Big]_{t=\cos(x)}$$
$$= -\big[t^4 + 2t^3 - 8t\big]_{t=\cos(x)} = -\cos^4(x) - 2\cos^3(x) + 8\cos(x) + c.$$

[2] Calcolare $\displaystyle\int \frac{-x+1}{2x^2+2x+1}dx.$

Soluzione Il trinomio a denominatore ha radici complesse. Un integrale di questo tipo è già stato calcolato (vedi (2.8)), ma si può calcolare anche con il metodo di sostituzione.
In generale l'integrale

$$\int \frac{A\,x + B}{a\,x^2 + b\,x + c}\,dx$$

con $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$ si calcola anche con la sostituzione $t = x + \frac{b}{2\,a}$ come è suggerito da

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4b^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4b^2}\Big) = a\Big[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\Big].$$

Qui di seguito calcoliamo l'integrale assegnato
Osserviamo che $\Delta = 4 - 8 < 0$; consideriamo allora la sostituzione $t = x + \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = t - \frac{1}{2}$
da cui $dx = dt$ e sostituendo si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{-x+1}{2\,x^2 + 2\,x + 1}\,dx &= \int \frac{-t + \frac{1}{2} + 1}{2\,(t^2 + \frac{1}{4} - t) + 2\,t - 1 + 1}\,dt\,\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} \\
&= \int \frac{-2\,t + 3}{4\,t^2 + 1}\,dt\,\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} \\
&= \int \frac{-2\,t}{4\,t^2 + 1}\,dt + \int \frac{3}{4\,t^2 + 1}\,dt\,\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{8\,t}{4\,t^2 + 1}\,dt + 3\int \frac{1}{4\,t^2 + 1}\,dt\,\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{4}\log|4\,t^2 + 1| + \frac{3}{2}\arctan(2\,t) + c\,\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{4}\log(4\,x^2 + 4\,x + 2) + \frac{3}{2}\arctan(2\,x + 1) + c \\
&= -\frac{1}{4}\log(2\,x^2 + 2\,x + 1) + \frac{3}{2}\arctan(2\,x + 1) + cost
\end{aligned}$$

[3] Gli integrali di funzioni razionali di e^x

$$\boxed{\int R(e^x), dx} \tag{4.2}$$

Si risolvono con la sostituzione $t = e^x$; tal modo l'integrale assegnato diventa un integrale di una funzione razionale.

Esempio 5.3. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$ usando la sostituzione $t = e^x$.

Soluzione Da $t = e^x$ si ha $x = \log t$ da cui $dx = \frac{1}{t}\, dt$ e sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t}\, dt \Big]_{t=e^x} = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt \Big]_{t=e^x} = \arctan(e^x) + c$$

[4] Gli integrali di funzioni razionali in $\sin(x)$ e $\cos(x)$

$$\boxed{\int R(\sin(x), \cos(x)) dx} \tag{4.3}$$

risolvono per sostituzione usando la formula (2.12) che qui riscriviamo scambiando i nomi delle due variabili x e t

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \Big(\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt\Big)_{t=\varphi^{-1}(x)}}.$$

Usando la sostituzione

$$x = 2\arctan(t) \tag{4.4}$$

questi integrali si trasformano in integrali di funzioni razionali. Si noti che $\varphi = 2\arctan(t)$ è una funzione derivabile ed invertibile. Analizziamo questo cambiamento di variabili. Da (4.4) si ha

$$t = \tan(\frac{x}{2}) \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt. \tag{4.5}$$

Occorrere ora esprimere l'integranda in (4.3) in termini di t, per questo possiamo utilizzare le formule di duplicazione per seno coseno e tangente, e si ottiene

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad & \sin x &= \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \\ \tan(x) &= \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad & \cot(x) &= \frac{\cot^2(\frac{x}{2})-1)}{2\cot(\frac{x}{2})} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Si ottengono così le formule

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}} \tag{4.7}$$

ESEMPI. [4.1] Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$.
Soluzione Usiamo la sostituzione $x = 2\arctan(t)$. Si ha $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, $t = \tan(\frac{x}{2})$; per le (4.7)

$$\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})} = 2\int \frac{1}{-t^2+2t+1}\,dt\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}} + c.$$

[4.2] Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ usando la sostituzione $t = \tan(\frac{x}{2})$.
Soluzione Da $t = \tan(\frac{x}{2})$ $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$. Sostituiamo nell'integrale usando le (4.7)

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}dt\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})} = \int \frac{2}{(1-t)(1+t)}dt\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})}$$

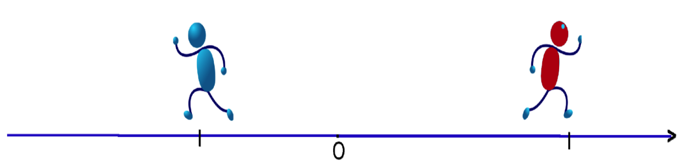
scrivendo l'integrando come somma di fratti semplici si ha

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1-t}\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})}$$
$$= -\log|1-t| + \log|1+t|\,\big]_{t=\tan(\frac{x}{2})} + c$$
$$= -\log|1-\tan(\frac{x}{2})| + \log|1+\tan(\frac{x}{2})| + c.$$
$$= \log\Big|\frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})}\Big| + c.$$

5. Integrale definito di Riemann

5.1. Il problema della velocità. Si consideri un punto che si muove lungo una retta orientata in un intervallo di tempo $[0,T]$. Supponiamo di conoscere la velocità istantanea $v(t)$ per $t \in [0,T]$, che per semplicità supponiamo continua. Ci chiediamo se è possibile determinare lo spostamento s, cioè la differenza fra la posizione finale e quella iniziale, nell'intervallo di tempo $[0,T]$. Se la velocità è costante, diciamo c, allora lo spostamento è il prodotto della velocità per il tempo trascorso

$$s = c \times T.$$



source:clker.com.

Osserviamo che lo spostamento sarà positivo, negativo o nullo a seconda che sia positivo negativo o nullo c. Se la velocità è costante a tratti: ad esempio in $[0, t_1]$ sia 60 Km/ora in $[t_1, t_2]$ sia 100 km/ora e in $[t_2, T]$ sia 40 km/ora. Allora per trovare lo spostamento totale basta sommare gli spostamenti in ciascuno di questi intervalli:

$$s = 60 \times t_1 + 100 \times (t_2 - t_1) + 40 \times (T - t_2).$$

Se la velocità non è costante a tratti possiamo dividere l'intervallo in sottointervalli e in ciascuno di essi approssimare $v(t)$ con una costante. Più precisamente dividiamo $[0, T]$ in n sottointervalli di uguale lunghezza mediante i punti

$$x_0 = 0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1},\ x_n = T.$$

In ogni intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ con $k = 0, \dots, n-1$ approssimiamo la velocità con una costante c_k, allora lo spostamento in questo intervallo è approssimato da $c_k(x_{k+1} - x_k)$ e lo spostamento totale da

$$\text{spostamento} \simeq \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k).$$

Quale costante c_k scegliere per approssimare la velocità nel generico intervallo $[x_k, x_{k+1}]$? Possiamo prendere ad esempio il valore di v in uno degli estremi (destro o sinistro) dell'intervallo oppure il valore di v nel suo punto medio, come in Figura 1, oppure possiamo fare altre scelte, come esposto qui di seguito.

In ciascun sottointervallo $[x_k, x_{k+1}]$ scegliamo il minimo m_k e il massimo M_k di $v(t)$ e costruiamo *entrambe* le somme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \qquad\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

che sono approssimazioni per difetto e per eccesso dello spostamento; si noti che dipendono da n, vedi la Figura 3. Osserviamo che si ha

$$s_n \leq S_n.$$

Se ora raffiniamo la suddivisione aumentando il numero n, i sottointervalli saranno via via più piccoli e la differenza fra il minimo e il massimo di v in ciascun intervallo diventerà via via più piccola. Di conseguenza le somme s_n e S_n si avvicineranno. Se le somme s_n e S_n, $n \in \mathbb{N}$ individuano un unico numero reale, questo numero *sarà interpretato come lo spostamento nell'intervallo di tempo* $[0, T]$ *quando la velocità è* $v(t)$.

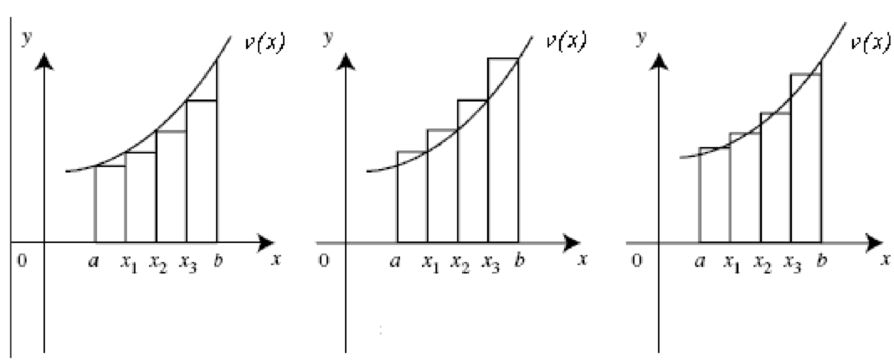


FIGURA 1. Tre differenti scelte della costante

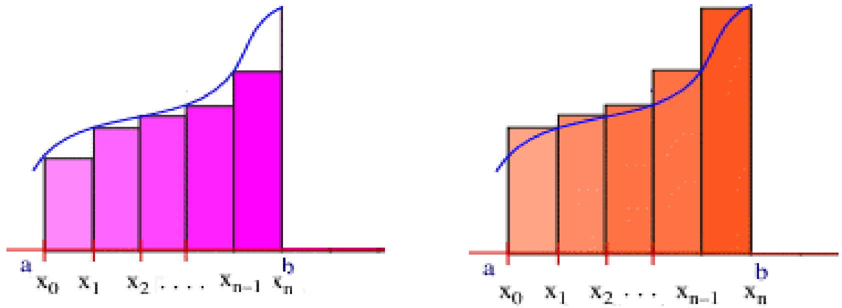


FIGURA 2. Somma inferiore s e somma superiore S

5.2. Integrale di Riemann.

DEFINIZIONE 5.3. - Un insieme di punti $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ di intervallo $[a, b]$ tali che

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{5.1}$$

è detto **partizione di** $[a, b]$ e verrà denotata con $P(x_0 \cdots x_n)$ o semplicemente con P.

Sia f una funzione limitata sull'intervallo $[a, b]$ e siano m e M l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[a, b]$, in simboli:

$$m = \inf_{[a,b]} f(x) \qquad M = \sup_{[a,b]} f(x).$$

Sia ora $P(x_0 \cdots x_n)$ una partizione di $[a, b]$. Per ogni $k = 1, \cdots, n$ siano m_k e M_k gli estremi di f su $[x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{array}{ll} m_1 = \inf\limits_{[x_o, x_1]} f(x) & M_k = \sup\limits_{[x_o, x_1]} f(x) \\ m_2 = \inf\limits_{[x_1, x_2]} f(x) & M_2 = \sup\limits_{[x_1, x_2]} f(x) \\ \vdots & \vdots \\ m_n = \inf\limits_{[x_{n-1}, x_n]} f(x) & M_n = \sup\limits_{[x_{n-1}, x_n]} f(I_k). \end{array}$$

Le somme

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}) \qquad S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}) \tag{5.2}$$

sono dette *somma inferiore* e *somma superiore* di Riemann di f, relativa alla partizione P. Si noti che $(x_k - x_{k-1})$ è la lunghezza dell'intervallo I_k.

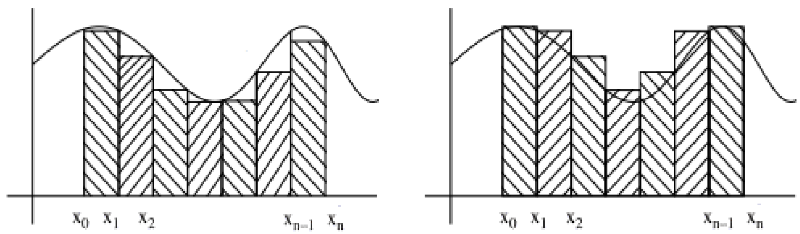


FIGURA 3. Scelta degli estremi di f in ciascun intervallo della partizione

PROPOSIZIONE 5.6. *Sia f tale che $m \le f(x) \le M$ in $[a,b]$. Date due partizioni P e Q di $[a,b]$ si ha*

$$m\,(b-a) \;\le\; s(f,P) \;\le\; S(f,Q) \;\le\; M\,(b-a)\,. \tag{5.3}$$

Per la proposizione dunque se$f$ è limitata **ogni** somma inferiore di Riemann è minore di **ogni** somma superiore.

DEFINIZIONE 5.4. Una funzione f limitata sull'intervallo $[a,b]$ è detta **integrabile** in $[a,b]$ se esiste un **unico** numero reale I tale che per ogni partizione P di $[a,b]$ si ha

$$s(f,P) \le I \le S(f,P)$$

e tale numero è detto **integrale definito** di f su $[a,b]$, e si denota con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

La funzione f è detta *integranda*; l'intervallo $[a,b]$ è detto *intervallo d'integrazione*, e a e b sono detti *estremi di integrazione*. Sottolineamo subito che l'integrale definito di f in $[a,b]$ è un **numero**, che dipende da f da a e da b ma non dalla variabile x che è una variabile "muta "e può essere sostituita da una qualunque altra variabile, cioè si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(t)\,dt \;=\; \int_a^b f(y)\,dy.$$

OSSERVAZIONE 15. La verifica della integrabilità di funzioni attraverso la definizione non è facile neanche per funzioni che hanno una espressione analitica semplice. Nel seguente esempio mostriamo che la funzione $f(x) = x^2$ è integrabile nell'intervallo $[0,b]$ calcolando le somme di Riemann e usando la definizione di integrale definito.
Successivamente affronteremo il problema di stabilire condizioni sufficienti per l'integrabilità e di calcolarne l'integrale definito (vedi il Teorema 5.7 e il Corollario 5.11).

ESEMPIO 5.4. Mostriamo che la funzione $f(x) = x^2$ è integrabile in $[0,b]$ e

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b}{3}.$$

Mostreremo la formula per $b = 1$, per b generico la verifica è simile. Sia $n \in \mathbb{N}^+$ e sia P_n la partizione dell'intervallo $[0,1]$ in parti uguali mediante gli n punti

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Calcoliamo le somme inferiori e superiori relative a P. Poichè l'ampiezza di ogni intervallino è $1/n$ si ha

$$s(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k-1}{n}\Big)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$

$$S(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Ma ricordiamo che

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

per ogni numero naturale n. Sostituendo nelle espressioni di s e S otteniamo

$$s(f,P_n)=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \qquad S(f,P_n)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2};$$

abbiamo così trovato l'espressione delle somme inferiori e superiori di Riemann di f relative alla partizione di $[0,1]$ in n parti uguali. Si puó verificare che se n cresce la prima somma cresce mentre la seconda somma decresce ed entrambe tendono a $1/3$ (si veda la Figura 4). Questo ci permette di concludere, per definizione di integrale, che l'integrale assegnato è $1/3$.

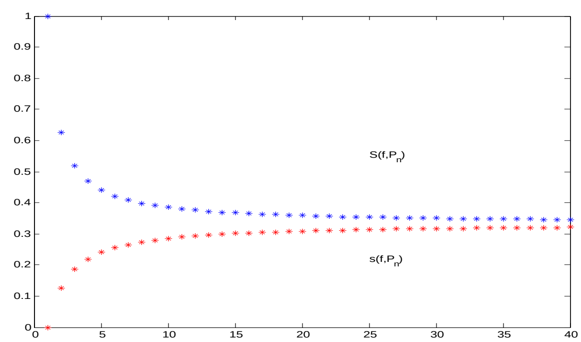


FIGURA 4. Somme inferiori $s(f,P_n)$ (rosso) e somme superiore $S(f,P_n)$ (blu) con $n\le 40$.

ESERCIZIO. Calcolando le somme di Riemann relative a partizioni in intervalli di uguale ampiezza mostrare che $\displaystyle\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

Interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann. Se $f\ge 0$, la regione T del piano definita da

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$$

si dice trapezoide di f su $[a,b]$. Osserviamo che le somme di Riemann (5.2) per una data partizione P rappresentano *l'area del poligono inscritto* e l'area del *poligono circoscritto* al trapezoide T (vedi la Figura 3). Se la funzione f è integrabile su $[a,b]$, il suo integrale è dunque l'unico numero reale compreso fra le aree dei poligoni inscritti e quelle dei poligoni circoscritti. In tal caso si dice che il trapezoide T è misurabile e, per definizione, si pone

$$\boxed{\text{Area } T=\int_a^b f(x)\,dx.} \tag{5.4}$$

Se $f(x) \leq 0$ in $[a,b]$ si pone

$$\boxed{\text{Area } T = -\int_a^b f(x)\,dx.} \tag{5.5}$$

Se f non ha segno costante si definisce trapezoide di f su $[a,b]$ la regione T del piano definita da

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\ \vee\ f(x) \leq y \leq 0\}$$

vedi la Figura 5 (a sinistra). In tal caso si definisce area del trapezoide

$$\text{Area } T = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.6}$$

Si noti che questa formula comprende anche i due precedenti casi in cui f è positiva o negativa. Estendiamo ora l'integrale definito:

DEFINIZIONE 5.5. Se f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, definiamo

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \qquad e \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{5.7}$$

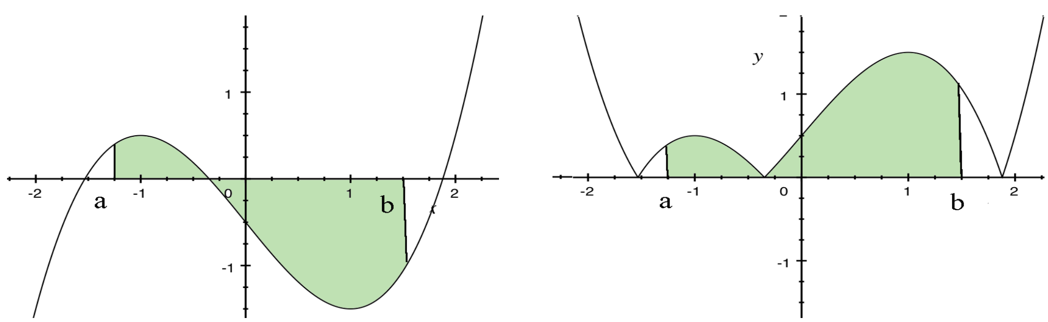


FIGURA 5. Regione T, f segno non costante (sinistra), trapeziode di $|f(x)|$ (destra).

5.3. Alcune classi di funzioni integrabili e proprietà dell'integrale definito. Il teorema seguente fornisce alcune classi di funzioni integrabili.

TEOREMA 5.7. *Sono integrabili sull'intervallo limitato I*

a) le funzioni limitate in I che hanno al più un numero finito di punti di discontinuità.
b) le funzioni monotone limitate su I.

ESEMPIO. La funzione $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ x+2 & \text{se } \quad 0 < x \leq 1, \end{cases}$ è continua tranne che in 0 dove ha una discontinuità di prima specie, quindi è integrabile in $[-1,1]$.

Teorema 5.8. *(proprietà degli integrali definiti) - Siano f e g integrabili secondo Riemann in $[a, b]$. Allora valgono le proprietà:*

(1) *(linearità dell'integrale definito) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; si ha*
$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx \;=\; \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) *(additività rispetto al dominio di integrazione) ; se $c \in (a, b)$ si ha*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \,+\, \int_c^b f(x)\,dx$$

(3) *(positività dell'integrale definito) se $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [a, b]$ si ha*
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

(4) *(confronto fra integrali definiti) se $f(x) \leq g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$ allora*
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(5) *(maggiorazione dell'integrale definito)*
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,dx$$

5.4. Teorema della media integrale. Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[a, b]$. Il numero
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
è detto **media integrale di f su** $[a, b]$. L' interpretazione geometrica della formula è la seguente: denotiamo con c il valore della media integrale di f su $[a, b]$ e con γ la funzione costante uguale c su $[a, b]$. Allora si ha
$$\int_a^b \gamma(x)\,dx = c(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$
(vedi la Figura 6). Il seguente teorema mostra che se la funzione è continua, la media integrale è uguale al valore di f in un punto di $[a, b]$.

Teorema 5.9. *(Teorema della media integrale) Sia f una funzione integrabile sull'intervallo (a, b), e siano*
$$m = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \qquad\qquad m = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$
allora si ha
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M. \tag{5.8}$$
Se inoltre f è continua in $[a, b]$, allora esiste un c nell'intervallo (a, b) tale che
$$f(c) \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.9}$$

DIMOSTRAZIONE. Da $m \leq f(x) \leq M$ si ha

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$$

e quindi, dividendo per $b-a$ si ha la (5.8). Supponiamo ora che f sia continua in $[a,b]$; allora da (5.8) per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori compresi fra m e M, cioè esiste un c in (a,b) tale che si ha (5.9) (vedi la Figura 6). □

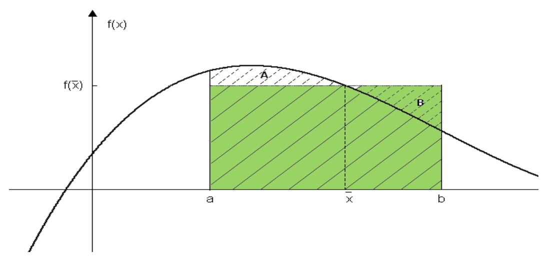


FIGURA 6. Media integrale e teorema della media integrale

5.5. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia f una funzione integrabile su un intervallo I; chiameremo *funzione integrale* di f su I ogni funzione della forma

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

dove e x appartiene a I e a è un punto fissato in I.

TEOREMA 5.10. *(Teorema fondamentale del calcolo integrale) - Sia f una funzione continua su un intervallo limitato I e sia a un punto fissato in I allora la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f, ossia $F'(x) = f(x)$ per ogni x in I.

La dimostrazione è omessa. Questo teorema mostra che i concetti di derivazione e di integrazione sono fortemente connessi: se f è una funzione continua si ha che *la derivata della sua funzione integrale è f*. Il seguente corollario, conseguenza del Teorema fondamentale del calcolo integrale, permette di calcolare l'integrale definito di una funzione conoscendone una primitiva

COROLLARIO 5.11. *(Formula fondamentale del calcolo integrale) Sia f continua su $[a,b]$ e sia G una primitiva di f. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a). \tag{5.10}$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f deve esistere una costante c tale che $G(x) = F(x) + c$, cioè $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt\, + c$. Valutando questa relazione in $x = a$ si ha $G(a) = c$ e poi in $x = b$ si ottiene

$$G(b) = \int_a^b f(x)\,dx + c = \int_a^b f(x)\,dx + G(a)$$

da cui segue la tesi. $\square$

La differenza $G(b) - G(a)$ è denotata con il simbolo: $\Big[G(x)\Big]_a^b$ oppure con $G(x)\Big|_a^b$

Esempi. Usando la formula (5.10) si calcolano i seguenti integrali definiti

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(t)\ dt = -\big[\cos(x)\big]_0^{\frac{3}{2}\pi} = -[\cos(\frac{3}{2}\pi) - \cos(0)] = 1$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(\pi/4) - \tan(0) = 1$$

.

Esempio 5.5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,dx$, dove $\quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < -1 \\ -1 & \text{se } x = -1 \\ 2x+3 & \text{se } x > -1. \end{cases}$

La funzione è continua in tutti i puni di $[-2, 0]$ eccetto che in $x = -1$ infatti

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1.$$

È limitata quindi integrabile per il Teorema 5.7. Possiamo usare la proprietà di additività degli integrali definiti e poi applicare la (5.10) in ciascuno dei due intervalli e si ha

$$\int_{-2}^0 f(x)\,dx \ = \ \int_{-2}^{-1} (x+1)\,dx \ + \ \int_{-1}^0 (2\,x+3)\,dx \ = \ \cdots \ = \ \frac{3}{2}$$

Ritorno al problema della velocità. Sia $s = s(t)$ la legge oraria del moto di un punto lungo una linea retta. Allora la funzione $v(t) = s'(t)$ è la funzione velocità istantanea. Se v è continua, per la formula fondamentale del calcolo integrale, l'integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

è la differenza fra la posizione finale e la posizione iniziale del punto, quindi rappresenta lo lo spostamento, nell'intervallo $[t_1, t_2]$. Si noti che lo spostamento può essere positivo, negativo o nullo. Il cammino percorso dal punto mobile è invece rappresentato da

$$c_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$$

ed è sempre positivo (se v non identicamente nulla). Se la velocità non ha segno costante, cioè il punto in moto cambia direzione tornando verso il punto di partenza, questo integrale diverso dallo spostamento.

Esempio 5.6. Sia la velocità espressa da $v(t) = \sin(t)$, con $t \in [0, \frac{3}{2}\pi]$. Lo spostamento complessivo è $\int_0^{3\pi/2} \sin(t)\ dt = 1$: il punto si muove nella direzione delle t positive nell'intervallo $[0, \pi]$ e in questo intervallo lo spostamento è $\int_0^{\pi} \sin(t)\ dt = 2$. nel successivo intervallo $[\pi, 3/2\pi]$ si sposta di 1 ma *nella direzione opposta.* Pertanto lo spostamento complessivo è $2-1=1$. Invece il cammino percorso è $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} |\sin(t)|\, dt = 3$.

Supponiamo di debba calcolare un integrale definito $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, la via ovvia è trovare una primitiva G di f e poi usare la formula (5.10). Se per trovare G si vuole usare l'integrazione per parti o per sostituzione esistono anche delle formule ad hoc per l'integrale definito, vedi le (5.11) e (5.12) qui sotto, che sono una via alternativa. Le dimostrazioni sono analoghe a quelle viste per gli integrali indefiniti e sono omesse.

TEOREMA 5.12. *(integrazione per parti per integrali definiti) Siano f e g due funzioni derivabili con derivata prima continua in $[a,b]$. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \;=\; \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx. \tag{5.11}$$

TEOREMA 5.13. *(integrazione per sostituzione per integrali definiti) - Siano f una funzione continua su $[a,b]$ e φ una funzione definita in $[c,d]$ a valori nell'intervallo $[a,b]$, derivabile con derivata continua. Allora si ha*

$$\int_c^d f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \;=\; \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt. \tag{5.12}$$

ESEMPI 5.4.

1. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos(2\,x)\,dx$.

Integriamo per parti considerando: $f(x)=x$ e $g'(x)=\cos(2\,x)$, da cui $g(x)=\frac{\sin(2\,x)}{2}$. Si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos(2\,x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\,x\,\sin(2\,x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\,x)\,dx \;=\; \frac{1}{4}\,\cos(2\,x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

2. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

Integriamo con la sostituzione $t=e^x$ si ha: $x=\log(t)$ da cui $dx=\frac{1}{t}\,dt$ ed inoltre, per quanto riguarda gli estremi, osserviamo che $x=-1 \Rightarrow t=\frac{1}{e}$, $x=1 \;\Rightarrow\; t=e$. Si ha

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}\,dx \;=\; \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{t}\,dt \;=\; \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan e - \arctan(\frac{1}{e}).$$

ESERCIZIO 5.1. Sia f una funzione integrabile su $[-a,a]$ con $a>0$. Se f è dispari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \;=0.$$

Se f è pari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \;=\; 2\int_0^a f(x)\,dx$$

.

Soluzione Per l'additività dell'integrale definito rispetto al dominio si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Sia f dispari; operando nel primo integrale la sostituzione $t = -a$ avremo

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) = \int_{a}^{0} -f(t)(-\,dt) = \int_{a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt,$$

da cui la tesi. Se f è pari, la dimostrazione della seconda formula è simile.

6. Calcolo di aree mediante l'integrale definito.

Siano f e g due funzioni integrabili sull'intervallo $[a,b]$ e tali che $f(x) \le g(x)$ per $x \in [a,b]$. Si vuole calcolare l'area della regione T definita da

$$T = \{(x,y) : \ a \le x \le b\,, \ \ g(x) \le y \le f(x)\} \tag{6.1}$$

vedi Figura 7. Si ha

$$\boxed{\mathrm{Area}(T) = \int_{a}^{b} (\,f(x) - g(x)\,)\,dx;} \tag{6.2}$$

La formula è ovvia se le funzioni sono non negative e quindi la regione si trova nel semipiano superiore. Altrimenti basterà operare una traslazione in modo che la regione T si trovi tutta nel semipiano superiore (si veda l'esempio 2 più avanti).

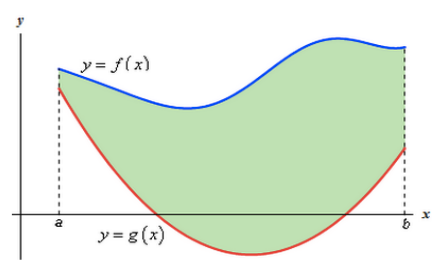


Figura 7. Regione T

1. Calcolare l'area della regione (6.1) dove

$$a = -1, \ b = 3, \qquad g(x) = 2x^2 + 10, \quad f(x) = 4x + 16.$$

I grafici delle due funzioni f e g si incontrano nei punti $(-1, 12)$ e $(3, 28)$. vedi Figura 8. La regione di cui dobbiamo calcolare l'area è la differenza fra il trapezoide di f e quello di g relativi all'intervallo $[-1, 3]$, quindi

$$\mathrm{Area}(T) = \int_{-1}^{3} (\,f(x) - g(x)\,)\,dx = \int_{-1}^{3} \left(4x + 16 - 2x^2 - 10\right) dx =$$

$$\int_{-1}^{3} \left(-2x^2 + 4x + 6\right) dx = \Big[4x + 16 - 2x^2 - 10\Big]_{-1}^{3} = \frac{64}{3}.$$

2. Calcolare l'aerea della regione T compresa fra i grafici delle funzioni $g(x) = x^2 - 1$ e $f(x) = 1 - x$.

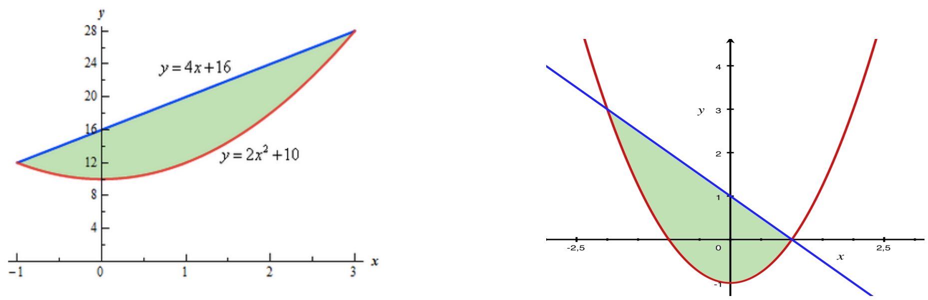


FIGURA 8. Calcolo dell'area di T negli Esercizi 1 e 2

Il grafico della regione T è in Figura 8 (a destra). I due grafici si intersecano nei punti $A = (-2, 3)$ e $B = (1, 0)$.

$$\text{Area}(T) = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

ESEMPIO 5.7. Calcolare l'area della parte di piano T in Figura 9.
Osserviamo che l'insieme T è limitato: lateralmente dalle rette $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$ inferiormente da e superiormente dalle due funzioni

$$g(x) = x - 1 \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -x + 2 & \text{se } 1 < x \le \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Data l'espressione della f, dividiamo l'insieme T nei due sottoinsiemi A e B come in Figura 9. Avremo:

$$A = \{(x, y) :\ 0 \le x \le 1\,, x - 1 \le y \le x^2\} \qquad B = \{(x, y)\ :\ 1 \le x \le \frac{3}{2}\,, x - 1 \le y \le -x + 2\}$$

e dall'osservazione 7.5

$$\begin{aligned} \text{Area(T)} = \text{Area}(A) + \text{Area}(B) &= \int_0^1 (x^2 - x + 1)\, dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (-x + 2 - x + 1)\, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[-x^2 + 3\,x\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

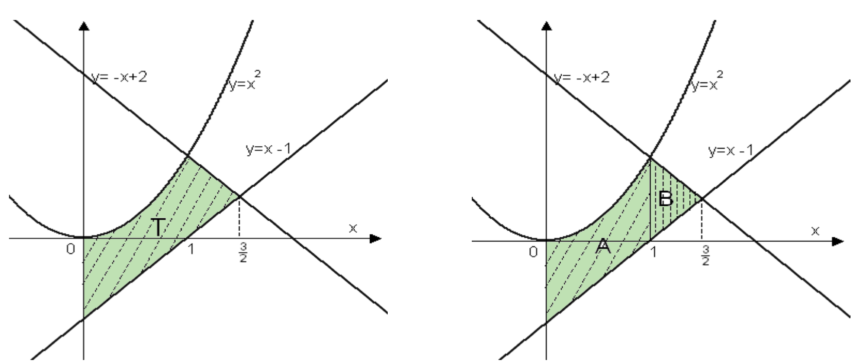


FIGURA 9. Calcolo dell'area di T dell'Esercizio 3

7. Esercizi

1.Calcolare la media integrale della funzione $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^3 - (x-1)^2 + 3$ nell'intervallo $[0,5]$. Disegnare il grafico della funzione e trovare graficamente il punto c garantito dal teorema della media integrale.

2. Calcolare la derivata della funzione $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Denotiamo con F la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$. La funzione G è la composta di $F(x)$ e $\varphi(x) = x^3$, cioè $G(x) = F(\varphi(x))$. Sia F che φ sono derivabili. Per la regola di derivazione delle funzioni composte e poichè $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ha

$$G'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^6}3x^2.$$

In generale se f è una funzione continua e φ è derivabile si ha

$$\Big(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\Big)' = f(\varphi(x))\varphi'(x). \tag{7.1}$$

3. Calcolare la derivata della funzione

$$G(x) = \int_0^{\sin(x)} t(1-t^2)\,dt$$

Si ha

$$G'(x) = \Big[t(1-t^2)\Big]_{t=\sin(x)}\cos(x) = \sin(x)\big(1-\sin^2(x)\big)\cos(x)$$

4. Fra tutte le primitive di $\sin^2(x)\cos(x)$ trovare quella che passa per il punto $P = (\pi/2, 4/3)$.
Soluzione Le primitive della funzione data sono tutte e sole le funzioni

$$F_c(x) = \frac{\sin^3(x)}{3} + c;$$

poichè $F_c(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3} + c$ si ha $F_c(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{3}$ se e solo se $c = 1$; la primitiva cercata è perciò

$$F_1(x) = \frac{\sin^3(x)}{3} + 1.$$

Alternativamente possiamo di rispondere alla domanda utilizzando il *Teorema fondamentale del calcolo integrale*: la funzione cercata è

$$F(x) = \int_{\pi/2}^x \sin^2(x)\cos(x)dx + \frac{4}{3} = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2})}{3} + \frac{4}{3} = \frac{\sin^3(x)}{3} + 1.$$

5. Calcolare l'area della regione $T1$ compresa fra le funzioni $f(x) = x+1$, $g(x) = xe^{-x^2}$ e le rette $x = 0$ e $x = 2$.
Soluzione Occorre innanzitutto disegnare correttamente il grafico delle due funzioni. Calcolando i limiti della funzione g all'infinito e la sua derivata si trova che ha un massimo relativo in $1/\sqrt{2}$ e tende a zero all'infinito. È una funzione dispari, questo basta a disegnarne il grafico. La Figura 10 (a sinistra) mostra la regione $T1$ di cui dobbiamo calcolare l'area.

$$\text{Area}(T1) = \int_0^2 (x+1-xe^{-x^2})\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^2 = \frac{7}{2} + \frac{e^{-4}}{2}.$$

6. Calcolare l'area della regione $S1$ compresa fra le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ e le rette $x = 0$ e $x = 1$.

Soluzione La regione è rappresentata nella Figura 10 (a destra).

$$\text{Area}S1 = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{1}{3}.$$

7. Calcolare l'area della regione R compresa fra i grafici delle funzioni $g(x) = 2x^2 + 10$, $f(x) = 4x + 16$ e le rette $x = -2$ e $x = 5$.
Soluzione Abbiamo già calcolato l'area compresa fra le funzioni ma relativa ad un diverso intervallo (vedi l'Esercizio 1 nella precedente sezione). La regione è rappresentata nella Figura 11 a sinistra..

$$\text{Area}(R) = \int_{-2}^{-1} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{-2}^{-1} (g(x) - f(x)\,)\,dx =$$
$$= \int_{-2}^{-1} \left(2x^2 - 4x - 6\right)dx + \int_{-1}^{3} \left(-2x^2 + 4x + 6\right)dx + \int_{3}^{5} \left(2x^2 - 4x - 6\right)dx = \frac{142}{3}.$$

8.Calcolare l'area della regione S compresa fra le funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$ e le rette $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.
Soluzione La regione è rappresentata nella Figura 11 (a destra).

$$\text{Area} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x))\,dx \; + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - \cos(x))\,dx$$
$$= \Big[\sin(x) - \cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos(x) - \sin(x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2.$$

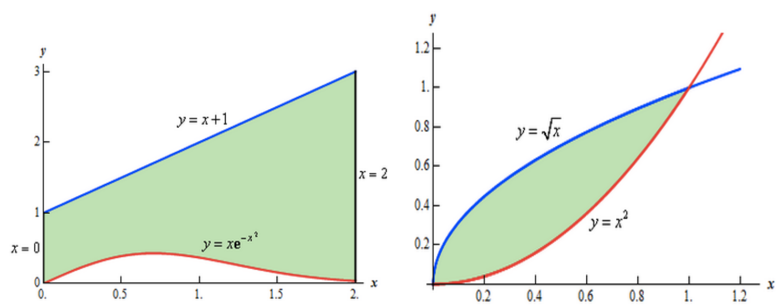


FIGURA 10. Regione $T1$, Esercizio 1 (sinistra). Regione $S1$, Esercizio 2 (destra)

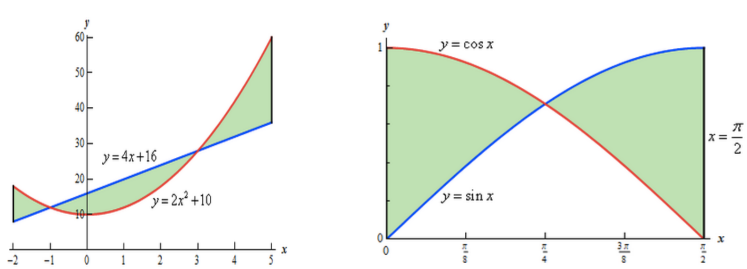


FIGURA 11. Regione R (sinistra) e regione S (destra).