Logica — 10-1-2019

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Provare che
$$Q \to R \models \neg P \wedge \neg R \to \neg Q \vee P.$$

2. Stabilire se l'insieme di formule
$$\{B \wedge \neg A, \neg(\neg A \to C), \neg C \to A \vee \neg B\}$$
è soddisfacibile.

3. Sia $\mathcal{L} = \{C, G, M\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove C, G sono simboli relazionali unari, M è simbolo relazionale binario. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $C(x)$: x è un cane;
- $G(x)$: x è un gatto;
- $M(x, y)$: x morde y.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. C'è un gatto che non è morso da alcun cane.
2. Se un cane morde un gatto, allora è morso da almeno due gatti.
3. I cani che si mordono da soli sono morsi da tutti i gatti.

4. Sia $\mathcal{L} = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f è un simbolo funzionale unario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$, dove:

- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi;
- $f^{\mathcal{A}}$ è l'operazione di successore, cioè $f^{\mathcal{A}}(u) = u+1$ per ogni $u \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di elevamento al quadrato, cioè $f^{\mathcal{B}}(u) = u^2$, per ogni $u \in \mathbb{Z}$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Svolgimento

1. Sia i un'interpretazione tale che $i(Q \to R) = 1$, al fine di dimostrare che anche $i(\neg P \wedge \neg R \to \neg Q \vee P) = 1$. Poiché $i(Q \to R) = 1$, si hanno due possibilità:

1) $i(Q) = 0$.
Allora $i(\neg Q) = 1$ e quindi $i(\neg Q \vee P) = 1$ e pertanto $i(\neg P \wedge \neg R \to \neg Q \vee P) = 1$.

2) $i(R) = 1$.
Allora $i(\neg R) = 0$ e quindi $i(\neg P \wedge \neg R) = 0$; pertanto anche in questo caso $i(\neg P \wedge \neg R \to \neg Q \vee P) = 1$.

2. Sia assuma che esista un'interpretazione i che soddisfa l'insieme di enunciati dato.

In particolare, $i(B \wedge \neg A) = 1$, da cui $i(B) = i(\neg A) = 1$, cioè $i(A) = i(\neg B) = 0$. Quindi $i(A \vee \neg B) = 0$.

Poiché $i(\neg C \to A \vee \neg B) = 1$, segue allora che $i(\neg C) = 0$, cioè $i(C) = 1$. Pertanto, $i(\neg A \to C) = 1$ e di conseguenza $i(\neg(\neg A \to C)) = 0$, contro l'ipotesi che i soddisfa l'insieme dato.

Un interpretazione che soddisfa l'insieme dato non può quindi esistere, e tale insieme è insoddisfacibile.

3.
1. $\exists x(G(x) \wedge \neg \exists y(C(y) \wedge M(y, x)))$
2. $\forall x(C(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge M(x, y)) \to \exists z \exists w(G(z) \wedge G(w) \wedge z \neq w \wedge M(z, x) \wedge M(w, x)))$
3. $\forall x(C(x) \wedge M(x, x) \to \forall y(G(y) \to M(y, x)))$

4. Sull'insieme $\mathbb{Z}$, la funzione successore è suriettiva, il quadrato no:

$$\varphi : \forall y \exists x f(x) = y$$