ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

FOGLIO DI ESERCIZI 10

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $A = \{a,b,c\}$ dotato della seguente operazione:
$$a*a=a,\ \ a*b=b,\ \ a*c=c,$$
$$b*a=b,\ \ b*b=b,\ \ b*c=c,$$
$$c*a=c,\ \ c*b=b,\ \ c*c=a.$$
Si verifichi che $*$ è un'operazione non associativa e non commutativa, ma dotata di un elemento neutro. Si determini tale elemento.

Esercizio 2. Dato il gruppo $(\mathbb{C}^*,\cdot,1)$, e fissato un intero $n \geq 1$ si consideri l'insieme delle radici n-esime dell'unità:
$$U_n = \{z \in \mathbb{C} :\ z^n = 1\}.$$
Si verifichi che U_n è un sottogruppo di $(\mathbb{C}^*,\cdot,1)$.

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{Z}_{100}$.
(1) E' vero che se $\overline{7}\cdot\overline{x} = \overline{7}\cdot\overline{y}$ allora $\overline{x}=\overline{y}$?
(2) E' vero che se $\overline{6}\cdot\overline{x} = \overline{6}\cdot\overline{y}$ allora $\overline{x}=\overline{y}$?

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{Z}_{169}$.
(1) Determinare, se esiste, l'inverso di $\overline{15}$.
(2) Determinare, se esistono, due elementi distinti $\overline{x},\overline{y}$ tali che $\overline{12}\cdot\overline{x} = \overline{12}\cdot\overline{y}$.
(3) Determinare, se esistono, due elementi distinti $\overline{x},\overline{y}$ tali che $\overline{13}\cdot\overline{x} = \overline{13}\cdot\overline{y}$.

Esercizio 5. Calcolare la funzione di Eulero $\varphi(n)$ per $n = 26,32,69,96,343,777$.

Esercizio 6. Calcolare $\overline{9}^{101}$ e $\overline{7}^{1000}$ in $\mathbb{Z}_{26}$.

Esercizio 7. Provare che l'equazione $\overline{x}^2+\overline{y}^2 = \overline{3}$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}_4$

Esercizio 8. Provare che per ogni numero intero dispari n si ha $n^2 \equiv 1 \mod 8$.

Esercizio 9. Calcolare le potenze ottave di tutti gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{15}$.

Esercizio 10. Provare che $\overline{5}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{48}$ e determinare il suo inverso.

Esercizio 11. Calcolare il resto della divisione di 13^{98} per 17.

Esercizio 12. Sia $f : \mathbb{Z}_{1000} \to \mathbb{Z}_{1000}$ la funzione definita da $f(\bar{x}) = \bar{7} \cdot \bar{x}$. Provare che f è surgettiva.

Esercizio 13. Si consideri il gruppo $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Il sottoinsieme $10\mathbb{Z} \cup 15\mathbb{Z}$ è un sottogruppo? E il sottoinsieme $10\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z}$?

Esercizio 14. Dati due interi $a, b > 0$ definiamo

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} : \ n = ar + bs \text{ con } r, s \in \mathbb{Z}\}.$$

Provare che $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +, 0)$ e provare che $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ dove $d = \mathrm{MCD}(a, b)$.

Esercizio 15. Sia G il gruppo delle applicazioni bigettive da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ (l'operazione è la composizione). Si consideri il sottoinsieme $H = \{f \in G : \ f(n) \geq n \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$. Stabilire se H è un sottogruppo di G.

Esercizio 16. Provare che l'insieme delle applicazioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che si possono scrivere come $f(x) = ax + b$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ forma un sottogruppo del gruppo delle applicazioni bigettive da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ (con l'operazione di composizione).