# Assiomi della probabilità / 04 - 03

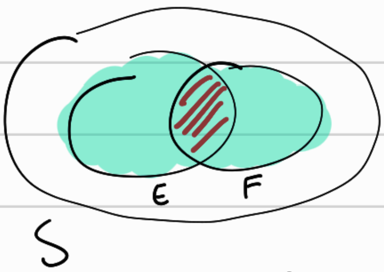
- SPAZIO CAMPIONARIO $S$: insieme dei risultati possibili di un esperimento

es lancio dado $\rightarrow$ $S$ è l'insieme dei numeri da 1 a 6

- EVENTO $E \subset S$ : sottoinsieme dei risultati di uno spazio campionario

es lancio dado $\rightarrow$ $E$ è un numero minore di 3, oppure 1 (più valori)

- NOZIONI SUGLI INSIEMI $E, F \subset S$




DIAGR. DI VENN

- unione $E \cup F$
- intersezione $E \cap F = EF$
- disgiunti $EF = \emptyset$
- complemento $E^c$ tutto ciò che non è $E$

- ASSIOMI

"$S$ è la torta, $E$ la fetta, Probabilità $P$ è la grandezza di torta e fetta"

P è la mappa sullo spazio degli eventi di un insieme campionario

1) $P(S) = 1$ quanto vale "tutto"

2) $0 \leq P(E) \leq 1$ un evento può essere "grande" fra zero e S

3) $E_i \subset S; \quad i = 1, \dots, n \qquad E_i E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$P(\cup E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

PROPRIETA' ADDITIVA

P dell'unione di insiemi disgiunti è la somma delle singole P

• PROPRIETA'

a) $P(\emptyset) = 0$

$$\rightarrow P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$$

$$1 = P(S)$$

ma allora è $1 + 0$

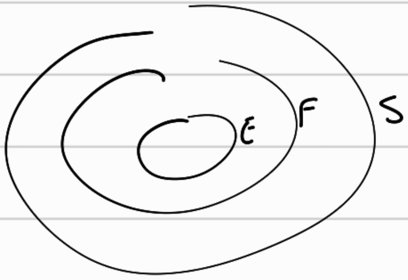
b) $E \subset S$

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

$$1 = P(S) = P(\underbrace{E \cup E^c}_{\text{trattiamo ins. disgiunti}}) = P(E) + P(E^c)$$

$\hookrightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$

c) $E \subset F \subset S$ $\qquad P(E) \leq P(F)$




$$P(F) = P(E) + P(E^c) - P(F^c)$$

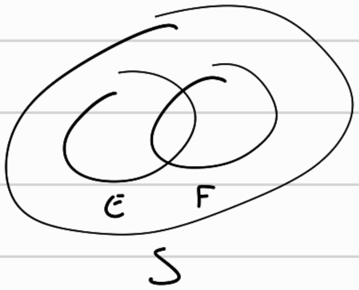
$$\rightarrow P(E) \leq P(E) + \underbrace{P(E^c) - P(F^c)}_{\text{al più peggio è zero (F coincide con E)}}$$

$$\rightarrow P(E) \leq P(F)$$

* soluzione alternativa in fondo

d) $\forall E, F \subset S$ $\qquad P(E \cup F) = P(E) + P(F) - \underbrace{P(EF)}_{\text{per non violare l'assioma}}$

sarebbe contato 2 volte




$$E \cup F = E \cup (E^c \cap F)$$
$$F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$$

↳ seno fra eventi disgiunti

$$\rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(E^c \cap F)$$
$$\rightarrow P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$$

sostituisco

$$\rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

## Eventi equiprobabili

$S \qquad \underset{\text{CARD.}}{\#} S = N \qquad S = \{1, 2, 3, \dots, N\}$

$P(i) = 1/N$ per $1, \dots, N$ $\qquad$ ogni elemento (evento) ha stesso probabilità

$E \subset S$, $P(E) = \frac{\# E}{N}$

perché eventi disgiunti, ognuno di probabilità $1/N$, che poi vado a sommare intendendo l'unione dei vari E

"casi favorevoli su casi possibili"

$E = \{s1, s2, s3\}$

$P(E) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3)$

senza ulteriori conti perché equiprobabili

## Esercizio

Probabilità di fare 7 lanciando 2 dadi?

$N = 36$ (risultati possibili)

$E = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$

$\downarrow$

Che può fare 7 $\rightarrow \# E = 6$

$\rightarrow P(E) = 6/36 = 1/6$

## Esercizio con combinazioni

Un'urna con palline 6 bianche, 5 nere. Probabilità di 1b e 2n?
(estraggo 3 palline)

N = quanti modi (senza ordine) di estrarre 3 palline su 11 $= \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,8!} = 165$

$* E = \binom{6}{1} \binom{5}{2} = \frac{6!}{1!\,5!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!} = 60$

modi di estrarre una bianca da 6 bianche

"2 nere da 5 nere

$P(E) = 4/11$

Alternativa con le disposizioni

$N = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ dopo le varie estrazioni, n° modi di estrarre

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| BNN | 6 · 5 · 4 | 120 (modi di estrarre BNN) | | |
| NBN | 5 6 4 | + 120 | = 360 | $P(E) = \frac{360}{990} = 4/11$ |
| NNB | 5 4 6 | + 120 | | |

↳ contando tutti i possibili ordini → somma fra i casi

(per il principio base

BNN, NBN, NNB sono eventi disgiunti, dunque P(unione degli eventi) = Sommatoria delle varie P)

↳ 3 · 120

permutazioni $\frac{3!}{2!} \to 2\text{ n}'$

Keywords:

Spazio campionario

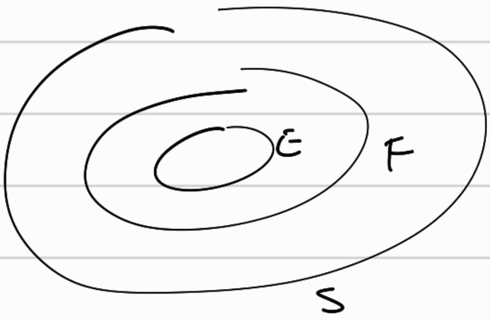
Evento

Probabilità

Eventi equiprobabili

## * c) Soluzione alternativa

$\forall E, F \subset S$ se $E \subseteq F$ allora $P(E) \leq P(F)$




$$F = E \cup (E^c F)$$

disgiunti

$$\rightarrow P(F) = P(E) + \underbrace{P(E^c F)}_{\text{alla peggio zero}}$$

ne segue $P(F) \geq P(E)$