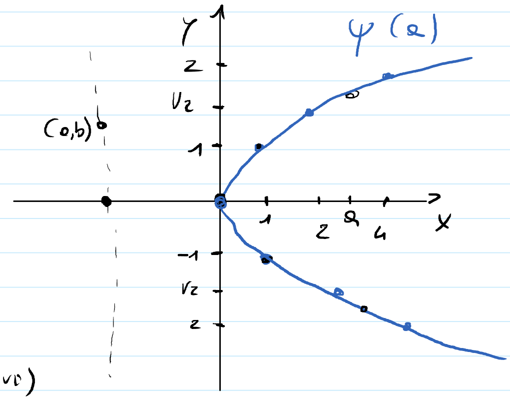
- Cerca l'insieme di verità di $\varphi(x): \exists y\ \underbrace{f(y,y)} = x$ $\qquad L = \{f\}$

$\rightarrow \varphi(x): \exists y\ \psi(x,y) \quad , \quad \psi(x,y): f(y,y) = x$

Data $A = \{\mathbb{R}, \bullet\}$

$\psi(A) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \cdot b = a\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Quando un $a \in \varphi(A)$

sse esiste un b t.c. (sarebbe $\exists y \rightarrow \exists b$)

$(a,b) \in \psi(A)$

$\rightarrow$ no per a negativi (i quadrati sono tutti positivi)

(modalità grafica)

$\varphi(A)$ è la proiezione di $\psi(A)$ sull'asse delle ascisse

$\varphi(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$

- $\exists y\ \underbrace{f(x,x) = g(y)}_{\psi(x,y)}$

f simb. funz. binario

g simb funz. unario

$A = (\mathbb{R}, f^A, g^A)$

$f^A: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$(a,b) \mapsto a \cdot b$

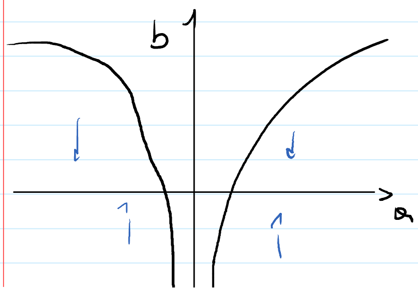
$g^A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$a \mapsto e^a$

$\varphi(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid A \models \varphi[x/a]\}$

Calcolo prima $\psi(A) = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid A \models \psi[x/a, y/b]\} =$

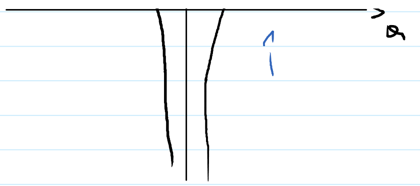
$= \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 = e^b\} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a = \pm\sqrt{e^b}$



$\varphi(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid A \models \varphi[x/a]\}$

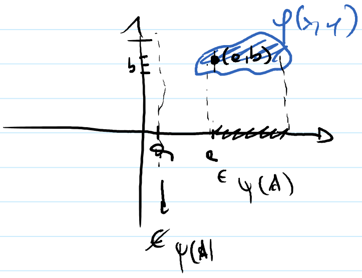
proiettando la curva sull'asse x

ottengo: $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$



ottengo : $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

MOTIVO DELLA PROIEZIONE



$\varphi(x,y)$

$A = (\mathbb{R}, \dots)$

$\varphi(A) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (l'insieme delle coppie x e y che rendono vere φ)

Chiamo $\psi(x) : \exists y \; \varphi(x,y)$

unica var libera

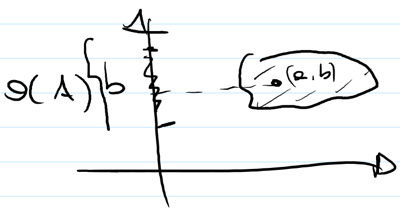
allora $\psi(A) \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \psi(A) = \{ a \in \mathbb{R} \mid A \models \psi[x/a] \}$

$= \{ a \in \mathbb{R} \mid$ esiste $b \in \mathbb{R}$ t.c. φ è vera quando $A \models \varphi[x/a, y/b] \}$ con $\underbrace{A \models \varphi[x/a, y/b]}_{\varphi(A)}$

ma allora gli elementi che soddisfano $\psi(A)$ devono avere un b associato ai valori di $\varphi(A)$ (vedi grafico)

Ma allora gli elementi di $\psi(A)$ sono proprio i punti che hanno "sopra" dei valori di b tali che (è valida φ), ma allora sono la proiezione (insieme dei punti) di $\varphi(A)$ sull'asse delle ascisse

se avessi avuto $\theta : \exists x \; f(x,x) = g(y)$ avrei proiettato sull'asse y (quantifico sulle x)



Es_Slide1_17a

lunedì 16 novembre 2020 08:16

Sia $L = \{f, g, c\}$, con:

- f, g simboli funzionali binari
- c simbolo di costante

Sia $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$. → rispetta l'ordine

Interpretare in $\mathcal{A}$ mediante l'assegnazione $x/\frac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}$ i termini

- $t_1 : f(g(z,z), y)$
- $t_2 : g(f(c,c), g(c,c))$
- $t_3 : f(c, f(g(x,c), y))$

$$t_1^{\mathcal{A}}[x/\tfrac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}] = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + (-2) = 0$$

$$t_2^{\mathcal{A}}[x/\tfrac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}] = (0+0)\cdot(0\cdot 0) = 0$$

$$t_3^{\mathcal{A}}[x/\tfrac{2}{3}, y/-2, z/\sqrt{2}] = 0 + (\tfrac{2}{3}\cdot 0 + (-2)) = -2$$

(posso tenermi anche x e y in variabili e assegnare alla fine i valori)

Siano

- $L = \{f, g, c\}$, con:
  - f, g simboli funzionali binari
  - c simbolo di costante
- $\varphi(x, y)$ la formula

$$\exists z\ f(f(g(z,z), g(x,z)), y) = c$$

- $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$
- Stabilire se $\mathcal{A} \models \varphi[x/-2, y/-1]$
- Stabilire se $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/1]$
- Determinare l'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$ e disegnarlo

(parentesi non necessarie, . ha priorità rispetto a +)

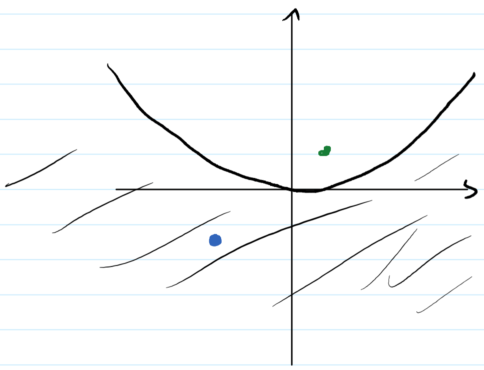
$\varphi(x,y)$: esiste $z \in \mathbb{R}$ t.c. $z^2 + x \cdot z + y = 0$

se ha soluzione z equivale a dire che il discriminante d quello della formula (coefficienti) $x^2 - 4y \geq 0$ ma nel linguaggio non abbiamo '−' e '≥' (non posso assegnare io i valori)

- insieme di verità (tutte le coppie che soddisfano la formula)

$\varphi(\mathcal{A}) : \{(x,y) \mid x^2 - 4y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

↳ $y \leq \frac{1}{4}x^2$ ($y = \frac{1}{4}x^2$ solo parabola) ovvero tutti i punti che hanno y pari all'equazione (punti parabola) o minore alla parabola



$\varphi(\mathcal{A})$

- $\mathcal{A} \models \varphi[x/-2, y/-1]$

sarebbe il punto di coord: $(-2,-1)$

sì

- $(1,1)$ $\mathcal{A} \models \varphi[x/1, y/1]$

ma $(1,1) \notin \varphi(\mathcal{A})$

$\mathcal{A} \not\models \varphi[x/1, y/1]$

NO

NB. Posso anche sostituire la coppia nell'eq.: (o nel discriminante)

$(-2,-1) \rightarrow z^2 - 2z - 1 = 0$ e vedere se $\exists z \in \mathbb{R}$ (almeno uno)

Es_Slide6_17a

lunedì 16 novembre 2020 08:37

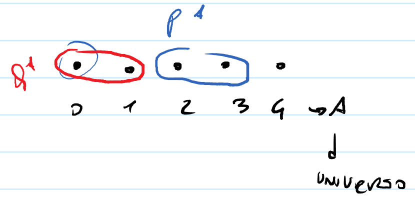
Siano:

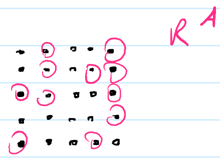
- $L = \{P, Q, R\}$, dove
  - P, Q sono simboli relazionali unari
  - R è simbolo relazionale binario
- $\varphi(x, y) : R(x, y) \to \neg P(x) \vee Q(y)$
- $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$, dove

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$P^{\mathcal{A}} = \{0, 2, 3\}$$
$$Q^{\mathcal{A}} = \{0, 1\}$$
$$R^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (0,2), (1,2), (1,3), (1,4), (3,0), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

Determinare l'insieme di verità di φ in $\mathcal{A}$, e stabilire se $\mathcal{A} \models \forall x \forall y \varphi$.

Disegno la relazione





tutti i punti non presi da $R(x,y)$

$$\varphi(x,y) \equiv \neg R(x,y) \vee \neg P(x) \vee Q(y)$$

ovvero;

A^2

$\varphi(A) \subseteq A^2$

corrisponde a:

$$\varphi(A) = A^2 - \{(0,2), (3,3)\}$$

dunque non vale $\forall x \forall y \varphi$, perché ho due coppie per cui i valori assegnati rendono falsa φ.

$$A \not\models \forall x \forall y \varphi$$

Es_Slide8_17a

lunedì 16 novembre 2020 08:48

Si consideri il linguaggio del prim'ordine $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$, dove $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari. Siano $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ l'insieme dei naturali pari, $\mathbb{D} = \{1, 2, 3, 5, \dots\}$ l'insieme dei naturali dispari.

a Determinare quali tra

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot), \quad \mathcal{P} = (\mathbb{P}, +, \cdot), \quad \mathcal{D} = (\mathbb{D}, +, \cdot)$$

sono $\mathcal{L}$-strutture, dove i simboli $+, \cdot$ sono interpretati come le usuali operazioni d'addizione e moltiplicazione.

b Per ognuna delle strutture determinate al punto a) trovare un $\mathcal{L}$-enunciato soddisfatto da tale struttura e da nessuna delle altre.

a) $\mathcal{N}$ e $\mathcal{P}$ sono $\mathcal{L}$ strutture. $\mathcal{D}$ no, perché mentre $\cdot$ fra coppie di valori dispari restituisce dispari, lo stesso non vale per $+$ che restituisce pari.

b) • Cerco φ t.c. $\mathcal{N} \models \varphi$, $\mathcal{P} \not\models \varphi$

φ: esiste un elemento neutro per il prodotto (quindi un numero moltiplicato per se stesso, lascia il risultato invariato)

↳ ovvero $\varphi: \exists x \exists y \; x \cdot y = y$

↳ N ha 1

• Cerco ψ t.c. $\mathcal{N} \not\models \psi$, $\mathcal{P} \models \psi$

N.B. se è stato trovato φ non valido per $\mathcal{P}$ ma per $\mathcal{N}$, basta ora prendere la sua negazione:

Basta dire $\psi: \neg\varphi$, dunque ψ sarà falso in $\mathcal{N}$ e vero in $\mathcal{P}$

sarebbe "non esiste un elemento neutro per il prodotto"

falso per $\mathcal{N}$ ma vero per $\mathcal{P}$

	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$
φ	1	0
$\neg\varphi = \psi$	0	1

Es_Slide10_17a

martedì 17 novembre 2020 14:44

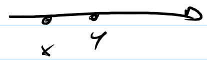
Determinare, se esiste, una struttura $\mathcal{A}$ che soddisfi l'enunciato

$$\forall y \exists x\ \neg R(y,x) \wedge \underbrace{\forall x\ (\exists y\ R(y,x) \to \exists z \exists w\ (w \neq z \wedge R(x,z) \wedge R(x,w)))}_{\psi}$$

e si disegni tale struttura.

$(\mathbb{R}, <) \models \varphi$?

$(\mathbb{R}, <) \models \forall y \exists x\ \neg R(y,x)$ ⇝ dato y (n° reale) riesco a trovare un x non maggiore di y?

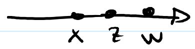


sì

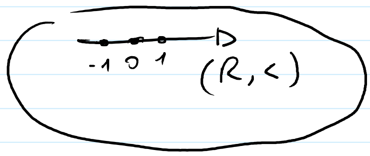
$(\mathbb{R}, <) \models \psi$

guardo la formula e l'implicazione al suo interno (guardo il conseguente)

↳ esistono z e w diversi t.c. x è $<$ di loro?



sì



il disegno corrisponde alla retta reale orientata

Sia φ l'enunciato

$$\forall x \, \exists y \, S(x, y) \wedge \neg S(a, a) \rightarrow S(a, b).$$

Trovare, se esistono, un modello per φ il cui universo sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, e un modello per $\neg\varphi$ il cui universo sia l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

$L = \{ S, \underbrace{a, b}_{\text{simboli di costante}} \}$

S: simbolo rel. bin.

- $\mathfrak{A} (\mathbb{N}, S^{\mathfrak{a}}, a^{\mathfrak{a}}, b^{\mathfrak{a}})$

$S^{\mathfrak{a}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a^{\mathfrak{a}}, b^{\mathfrak{a}} \in \mathbb{N}$ → è una possibilità (posso scegliere di falsificare l'antecedente)

$\mathfrak{A} \models \varphi$ ciò che voglio. Basta che il conseguente $S(a, b)$ sia vero (implicazione)

ovvero che $\mathfrak{A} \models S(a, b)$ cioè $(a^{\mathfrak{a}}, b^{\mathfrak{a}}) \in S^{\mathfrak{a}}$

SCELGO: $S^{\mathfrak{a}} = \{(0,0)\}$, $a^{\mathfrak{a}} = 0$ e $b^{\mathfrak{a}} = 0$

insieme formato da una sola coppia → conseguenza $S(a,b) = S(0,0)$

- $\mathfrak{B} = (\mathbb{C}, S^{\mathfrak{B}}, a^{\mathfrak{B}}, b^{\mathfrak{B}})$ $S^{\mathfrak{B}} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $a^{\mathfrak{B}}, b^{\mathfrak{B}} \in \mathbb{C}$

$\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ cioè $\begin{cases} \mathfrak{B} \models \forall x \exists y \; S(x, y) \\ \mathfrak{B} \models \neg S(a, a) \\ \mathfrak{B} \not\models S(a, b) \end{cases}$

vero l'antecedente, falso il conseguente

scelgo $a^{\mathfrak{B}} = 0 = b^{\mathfrak{B}}$; $(0, 0) \notin S^{\mathfrak{B}}$

→ per ogni n° complesso ne esiste un altro t.c. la coppia $\in S^{\mathfrak{B}}$

$S^{\mathfrak{B}} = \{ (u, u+1) \mid u \in \mathbb{C} \}$

Altri es slide 17a

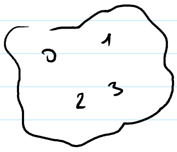
lunedì 16 novembre 2020 09:04

Sia φ l'enunciato

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(y,x) \wedge P(y)) \wedge \neg R(x,c)),$$

dove P è simbolo relazionale unario, R è simbolo relazionale binario, c è simbolo di costante. Trovare, se esistono, un modello per φ con esattamente 4 elementi e un modello per $\neg\varphi$ con esattamente 3 elementi.

modello = struttura



$A = \{0,1,2,3\}$ $\qquad \mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$

$P^{\mathcal{A}} \subseteq A \qquad R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A \qquad c^{\mathcal{A}} \in A$

(1,2,3,4)

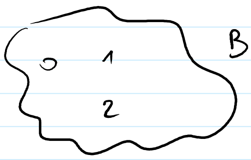
Poiché ho $\forall x$ significa che per tutte le assegnazioni per x rendono vera l'implicazione.

$\mathcal{A} \models \varphi$

sia $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$, sicuramente l'implicazione è vera, qualsiasi sia il valore di $R^{\mathcal{A}}$ e $c^{\mathcal{A}}$

es. $R^{\mathcal{A}} = \emptyset$ e $c^{\mathcal{A}} = \emptyset$

Ora cerco una struttura di 3 elementi, ovvero di un universo;



$B = \{0,1,2\}$ $\qquad \mathcal{B} = (B, P^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$

cerco $P^{\mathcal{B}} \in B$, $R^{\mathcal{B}} \subseteq B \times B$ $\quad c^{\mathcal{B}} \in B$

t.c. $\mathcal{B} \models \neg\varphi$

$\neg\varphi \equiv \exists x\, \neg(\ldots \to \ldots)$ $\qquad$ ovvero per un elemento non vale l'implicazione

$\equiv \exists x\, (P(x) \wedge \neg[\exists y\, (\ldots) \wedge \neg R(x,c)])$

non vale il conseguente

per la legge di De Morgan $\qquad \equiv \exists x\, (P(x) \wedge \underbrace{[\neg\exists y\, (\ldots) \vee \cancel{\neg}\neg R(x,c)]})$ $\quad$ per rendere falso $\wedge$

Posso introdurre un enunciato differente (tolgo "o non esiste (...)")

Sia ψ: $\exists x\, (P(x) \wedge R(x,c))$. Oss $\psi \models \neg\varphi$, cioè

se $\underline{\mathcal{B} \models \psi}$ allora $\underline{\mathcal{B} \models \neg\varphi}$

$P^{\mathcal{B}} = \{0\} \qquad R^{\mathcal{B}} = \{(0,0)\} \qquad c^{\mathcal{B}} = 0$

Sia φ l'enunciato

PRINC.

$$\forall x\ P(x) \land \exists x\ (Q(x) \to \neg P(x)) \to \forall x\ \neg Q(x)$$

Trovare, se esistono, un modello per φ con esattamente 4 elementi e un modello per $\neg\varphi$ con esattamente 3 elementi.

$\mathfrak{A} \models \varphi$ $\quad \mathfrak{A} = \{A, P^{\mathfrak{a}}, Q^{\mathfrak{a}}\}$ $\quad P^{\mathfrak{a}} \subseteq A$ $\quad Q^{\mathfrak{a}} \subseteq A$

scelto: $A = \{a, b, c, d\}$ $\quad Q^{\mathfrak{a}} = \emptyset$ $\quad$ e $P^{\mathfrak{a}} = \emptyset$ (qualsiasi)

$\Downarrow$

allora $\mathfrak{A} \models \forall x\ \neg \underbrace{Q(x)}_{=\text{ tutti gli elementi}}$

$\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ $\quad \mathfrak{B} = \{B, P^{\mathfrak{a}}, Q^{\mathfrak{B}}\}$ $\quad P^{\mathfrak{B}} \subseteq B$ $\quad Q^{\mathfrak{B}} \subseteq B$

scelto: $B = \{a, b, c\}$

$$\neg\varphi \equiv \underbrace{\forall x\ P(x)}_{\psi_1} \land \underbrace{\exists x\ (Q(x) \to \neg P(x))}_{\psi_2} \land \underbrace{\exists x\ Q(x)}_{\psi_3}$$

ovvero se vale l'antecedente non vale il conseguente

Dunque, per soddisfare $\neg\varphi$ (formula legata da $\land$ — CONGIUNZIONE), mi basta che $\mathfrak{B}$ soddisfi separatamente ψ_1 ψ_2 e ψ_3

$\mathfrak{B} \models \psi_1$ $\quad P^{\mathfrak{B}} = B$

$\mathfrak{B} \models \psi_2$ $\quad \psi_2 \equiv \exists x\ (\underbrace{\neg Q(x)}_{\text{NEG. ANT.}} \lor \underbrace{\neg P(x)}_{\text{CONS.}})$ $\quad$ ma P deve soddisfare tutto B (da ψ_1)

$\mathfrak{B} \models \psi_3$ $\quad Q^{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$

non posso avere un elemento per cui non vale P ($\neg P(x)$ sicuramente falso!) non esistono elementi che lo soddisfano

allora bisogna che esista un elemento per cui non valga Q, ovvero sia vera $\neg Q(x)$ (cosicché la disgiunzione sia vera)

$\Downarrow$

allora devo prendere un Q $Q^{\mathfrak{B}} \neq B$, ma un sottoinsieme di B (altrimenti tutti gli elementi soddisfano Q e $\exists x\ \neg Q x$ sarebbe falsa)

es. preso $P^{\mathfrak{B}} = \{a, b, c\}$

$Q^{\mathfrak{B}} = \{a\}$

[RAGIONAMENTO NON MECCANICO, non esiste algoritmo per la logica del primo ordine]

Altri es slide 17b

lunedì 16 novembre 2020 09:55

Esercizi in lezione - 7

martedì 17 novembre 2020 14:26

• $L = \{f\}$ f simb. funzionale unario

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}})$ $f^{\mathcal{A}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\varphi : \exists x\, (f(x) = -x)$ è lecito?   Per capirlo non importa la struttura o l'assegnazione usata, ma la sintassi.

Il simbolo "$-$" non appartiene al linguaggio!

• Es. esame 23/01/2019

$L = \{R, f\}$ $\varphi : \forall t\, \exists w\, R(f(t,w), u)$ $FV(\varphi) = \{u\}$

Date $A = (\mathbb{N}, \overset{R}{\le}, \overset{f}{+})$ e $B = (\mathbb{Z}, \ge, \cdot)$

$A \models \varphi[t/2, w/5, u/0]$ cioè $A \models \varphi[u/0]$

Lo è lecito, ma il valore assegnato a t e w non interessa, in quanto variabili vincolate, la formula non parla di loro

↳ "Dato a naturale esiste b naturale t.c. $A \models R(f(t,w),u)[t/a, w/b, u/0]$"

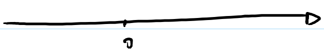
t.c. $a + b \le 0$ NO   es. $a = 1$ non $\exists b$ che soddisfa la condizione

• Det. insieme di verità di B, ovvero:

$\varphi(B) = \{a \in \mathbb{Z} \mid B \models \varphi[u/a]\}$

tutti gli elementi per cui B soddisfa φ (a cui assegno n valori a u, var libera)

$\to$ dato $z \in \mathbb{Z}$, esiste $z' \in \mathbb{Z}$, t.c. $z \cdot z' \ge a$



per $a = 0$, trovo un z' t.c. che $z \cdot z' = a = 0$? sì $z' = 0$ $0 \in \varphi(B)$

se $a > 0$, per $z = 0$ non ottengo a

se $a < 0$, per qualunque z ho uno z' tale da ottenere un valore $\ge a$ sì

allora $\varphi(B) = \{a \in \mathbb{Z}$ t.c. $a \le 0\}$ ↳ qui $z = 0$ va bene $(0 > -1)$

un valore $\geq a$

allora $\varphi(B) = \{ a \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } a \leq 0 \}$

vale per assegnazioni di a pos e neg.

qui $z=0$ va bene $(0 > -7)$

es. $z \cdot z' \geq -7$ sì

$z \cdot z' \geq 10$ **NO**

per $z=0$ ad esempio

φ è valido se: per ogni $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$.

concetto sintattico (riguarda l'enunciato non la struttura → serve per testare la validità dell'enunciato)

$\varphi: \quad \psi \wedge \theta \to \psi$

$\forall x\, R(x) \to \exists x\, R(x)$

L'insieme delle strutture non è proprio un insieme: per ogni cardinalità posso costruire una struttura con quella cardinalità, perché le cardinalità sono una classe propria, anche l'insieme delle strutture non è un insieme ma una CLASSE PROPRIA

• Rif esame: 10/01/2019

$\mathcal{L} = \{ f \}$ $\quad f$ simb. funz. unario

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}})$ $\quad f^{\mathcal{A}}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f^{\mathcal{A}}(u) = -u$ $\quad$ VERO

$\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$ $\quad f^{\mathcal{B}}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f^{\mathcal{B}}(u) = 2u$ $\quad$ FALSO (vero solo per zero)

Trovare φ t.c. $\mathcal{A} \models \varphi$ e $\mathcal{B} \not\models \varphi$

$\varphi_1: \forall x\ f(f(x)) = x$

$\varphi_2: \forall y\ \exists x\ f(x) = y$

• Rif esame: 10-3-2020

$\mathcal{L} = \{ <, +, \cdot, 0, 1 \}$ $\quad$ simboli

$\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ $\quad$ interpretazioni

[N.B. Un enunciato può essere $0<1$ o $0=1$] ($0=1$: sempre falso in campo aritmetico)

a] Scrivere $\varphi(x, y)$ t.c. $FV(\varphi) = \{x, y\}$

b] Determinare se $\mathcal{R} \models \varphi\,[x/4,\ y/3]$

c] Determinare insieme verità della formula e disegnarlo

a)
- $\forall z\ (z = x \cdot y)$
- $x = y$ (più facile)
- $x + y < x \cdot y$
- $\exists w\ \ x + y = w$

b) • es preso $4+3 < 4 \cdot 3$ sì • $4=3$ no

• σ esiste w t.c. $w = 4+3$ sì, $w=7$ $\rightarrow \forall x \forall y \ \varphi$

c) $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi^{\mathbb{R}} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a+b < ab\}$

$ab - a > b$

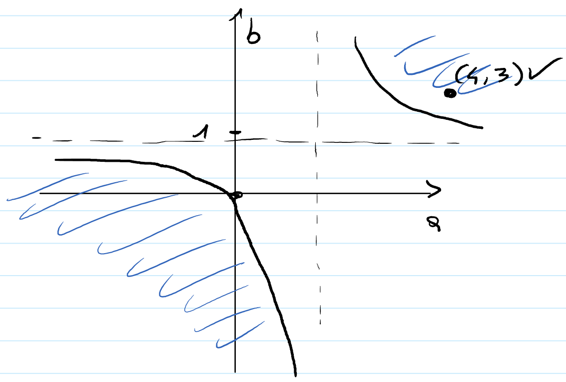
$a(b-1) > b$

$a > \frac{b}{b-1}$ per $b > 1$

$a < \frac{b}{b-1}$ per $b < 1$

iperbole

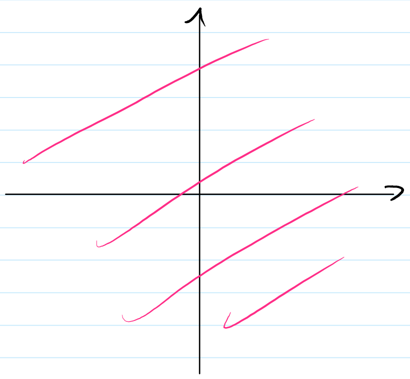
soluzioni

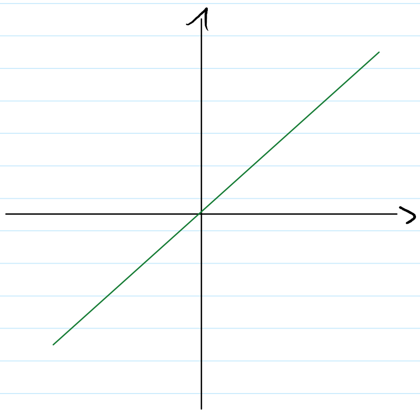


tutte le coppie (a,b) che rendono vera φ

$\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$

tutto il piano è soluzione





• $\varphi(\mathbb{R}) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (x=y)[x/a, y/b]\}$

ovvero l'insieme delle coppie che soddisfano φ, nonché l'insieme delle soluzioni dell'equazione

è la retta BISETTRICE $y = x$
$(a=b)$

Es_Slide10_19a

martedì 24 novembre 2020 08:15

Sia $L = \{f\}$, con f simbolo funzionale binario, e sia φ l'enunciato

$$\forall x \exists y \forall z \; f(f(x,y),z) = z$$

- Mostrare che φ è soddisfacibile
- Mostrare che φ non è valido
- Stabilire se $(\mathbb{Q}, \cdot) \models \varphi$

Parto dal terzo punto (eventualmente verifico uno dei punti sopra)

Per ogni $a \in \mathbb{Q}$, esiste un numero $b \in \mathbb{Q}$ t.c. per ogni $c \in \mathbb{Q}$

$$(ab)\,c = c$$

$\rightarrow \quad abc = c$ se $c \neq 0$ ovvero $ab = 1$ ma è FALSO:

$a = 0 \rightarrow 0bc = 0$

Allora $(\mathbb{Q}, \cdot) \not\models \varphi$. In particolare φ non è un enunciato VALIDO.

Rimane il 1° punto:

$\mathfrak{A} = (A, f^{\mathfrak{A}})$ prendo $A = \{a\}$ → universo con un solo elemento (assegnato dunque a tutte le variabili)

$f^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a,a), a) = a$ cioè lavoro solo con un elemento

$f^{\mathfrak{A}}: A \times A \rightarrow A$ $\quad \rightarrow f^{\mathfrak{A}}(a,a) = a \quad \rightarrow a = a$ ✓

$(a,a) \rightarrow a$ unico modo per esprimere la relazione binaria su un solo elemento

$\mathfrak{A} \models \varphi$ Quindi φ è soddisfacibile.

Es_Slide12_19a

martedì 24 novembre 2020 08:29

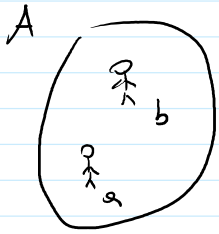
Sia $L = \{R\}$, con R simbolo relazionale binario. Mostrare che

$$\forall x \exists y R(x, y) \not\models \exists y \forall x R(x, y)$$

Troviamo una struttura $\mathfrak{A} = (A, R^{\mathfrak{a}})$, $R^{\mathfrak{a}} \subseteq A \times A$ tale che

$\mathfrak{A} \models \forall x \exists y R(x,y)$ ma $\mathfrak{A} \not\models \exists y \exists x R(x,y)$

A



scelgo

$R^{\mathfrak{a}} = \{(a,a), (b,b)\}$ R: a offre da bere a b

↳ a offre da bere a qualcuno (se stesso)
/b ''

ma per b non vi è a che gli paga da bere;
/a '' b ''

infatti in $R^{\mathfrak{a}}$ non vi è la coppia (a,b) né (b,a).

Es_Slide14_19a

martedì 24 novembre 2020 08:41

Sia $L = \{P, Q\}$, con P, Q simboli relazionali unari. Mostrare che

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \not\models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

Cerchiamo $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}})$, $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A$, $Q^{\mathfrak{A}} \subseteq A$ t.c.

- $\mathfrak{A} \models \exists x (P(x) \to Q(x))$ ma $\mathfrak{A} \not\models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$

$\mathfrak{A} \models \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$ $\qquad$ $\mathfrak{A} \models \exists x P(x) \land \neg(\exists x Q(x))$

ma abbiamo osservato che $Q^{\mathfrak{A}} = \emptyset$
allora $\mathfrak{A} \models \exists x (\neg P(x))$ ovvero esiste qualche elemento che soddisfa $\neg P(x)$

ovvero $\mathfrak{A} \models \exists x P(x)$ $\to P^{\mathfrak{A}} \neq \emptyset$

e $\mathfrak{A} \not\models \exists x Q(x)$ $\to Q^{\mathfrak{A}} = \emptyset$

non c'è struttura che la soddisfi

Deve esistere $a \in A$ t.c. $a \notin P^{\mathfrak{A}}$, cioè che $P^{\mathfrak{A}} \neq A$

Sia $A = \{a, b\}$, scelgo $P^{\mathfrak{A}} = \{b\}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \emptyset$, allora

almeno due elementi (uno solo avrebbe come risultato $\{a, \emptyset\}$, cioè tutto o niente (ma $P^{\mathfrak{A}} \neq$ tutto)

$\mathfrak{A}$ ha le proprietà richieste •

(in $P^{\mathfrak{A}}$ non è presente un elemento di A)
($P^{\mathfrak{A}}$ ha un elemento ma Q no)

Es_Slide17_19a

martedì 24 novembre 2020 09:01

Sia $L = \{f, c\}$, dove:

- f è simbolo funzionale binario
- c è simbolo di costante

Trovare un enunciato φ tale che

$$(\mathbb{N}, \cdot, 17) \models \varphi, \qquad (\mathbb{N}, \cdot, 12) \not\models \varphi$$

φ: "c e' un numero primo" e' soddisfatta dalla prima struttura e non dalla seconda.

Devo però usare la moltiplicazione per dirlo:

φ: Per ogni x, y, se $xy = c$ allora $x = 1$ o $y = 1$ (il n. primo non e' prodotto di due fattori dove entrambi sono $\neq 1$)

$x \odot y$

non c'e in L

$\varphi: \forall x \forall y (f(x,y) = c \longrightarrow x = 1 \lor y = 1)$ ma L non ha "1"

ma 1 e' neutro in $\mathbb{N}$, allora riscrivo in termini di L.

$\forall z (f(x,z) = z)$

$\forall z (f(y,z) = z)$

x non fa cambiare z anche se moltiplicato ad esso (solo 1 può farlo)

y "

Allora $\varphi: \forall x \forall y \, (f(x,y) = c \longrightarrow \forall z (f(x,z) = z) \lor \forall z (f(y,z) = z))$

Sia $L = \{R, f, c\}$, con

- R simbolo relazionale binario
- f simbolo funzionale binario
- c simbolo di costante

Dimostrare che l'enunciato

$$\varphi : \forall x R(f(x,x), c)$$ → vale $\forall x$, ovvero per tutti gli elementi

è soddisfacibile, ma non valido

$\mathfrak{A} = (A, R^a, f^a, c^a)$ $R^a \subseteq A \times A$, $f^a \subseteq A$, $c^a \in A$

un elemento (qualsiasi)

Se scelgo $A = \{0\}$ $R^a = \{(0,0), \cancel{\;}\}$

no! perché non soddisfa φ

$f^a : A \times A \to A$

$f^a(0,0) = 0$

$c^a = 0$

↓ relazione di uguaglianza

$\mathfrak{A} \models \varphi$

$\mathfrak{B} = (B, R^B, f^B, c^B)$

$B = \{0\}$ $R^B = \emptyset$

$f^B : B \times B \to B$

$f(0,0) \to 0$ (unica poss. con un solo el. in una rel. binaria)

$c^B = 0$

$\mathfrak{B} \not\models \varphi$ perché $f^B(0,0) = 0$, $c^B = 0$ ma la coppia $(0,0)$ non è in R

φ non è valido

Es_Slide3_19b

martedì 24 novembre 2020 09:27

Sia $L = \{R\}$, con R simbolo relazionale binario.
Per ogni numero naturale positivo k, sia $Div(k)$ l'insieme dei divisori di k. Sia $|$ la relazione di divisibilità tra naturali positivi, cioè

$$n|m \Leftrightarrow n \text{ è un divisore di } m$$

Determinare per quali k, con $1 \leq k \leq 10$ si ha che

$$(Div(k), |) \models \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$$

$Div(1) = \{1\}$ $1|1$ $| = \{(1,1)\}$

$Div(2) = \{1,2\}$ $1|1,\ 1|2,\ 2|2$ $2 \nmid 1$ $| = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

$Div(4) = \{1,2,4\}$

Si ha che $(Div(k), |) \models \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$ se e solo se dati due divisori di k, uno dei due è divisore dell'altro. Questo equivale a dire che o $k = 1$, o nella decomposizione in fattori primi di k:

$$k = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

$p_1, p_2 \in Div(k)$

LUNGHEZZA

se $r \geq 2$, allora $p_1 \nmid p_2$, $p_2 \nmid p_1$ perché entrambi fattori primi

$(Div(k), |) \not\models \ldots$

se $k = p^n$ (uno solo), $Div(k) = \{1, p, p^2, \ldots, p^n\}$ presi due elementi p^m, p^j allora $(m \leq j)$ $p^m | p^j$

quindi $(Div(k), |) \models \ldots$

i k sono $1, 2, 3, 4, 5, (\overset{no}{6}), 7, \overset{2^3}{8}, \overset{3^2}{9}, (\overset{no}{10})$

$2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $4 = 2^2$, $5 = 5^1$, $6 = 2^1 \cdot 3^1$ → potenze di 2 n primi, $10 = 5^1 \cdot 2^1$

n primo potenza di n primo

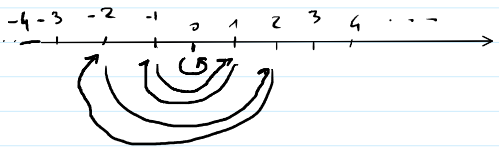
Es_Slide5_19b

martedì 24 novembre 2020 09:43

Sia $\mathcal{L} = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f è un simbolo funzionale unario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$, dove:

- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi;
- $f^{\mathcal{A}}$ è l'operazione di opposto, cioè $f^{\mathcal{A}}(u) = -u$ per ogni $u \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di raddoppio, cioè $f^{\mathcal{B}}(u) = 2u$, per ogni $u \in \mathbb{Z}$.

Determinare, se esiste, un enunciato φ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.



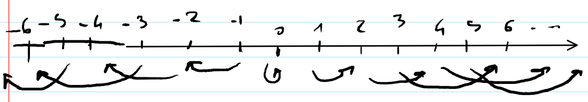
$(\mathbb{Z}, f^a) = \mathcal{A}$

la operazione di opposto

opposto di 0 è 0
di 2 è -2
-2 è 2
...

per ogni intero $u \in \mathbb{Z}$, $f^a(f^a(u)) = u$

non vero per tutti i numeri per



$(\mathbb{Z}, f^B) = \mathcal{B}$

la operazione di raddoppio

esiste $u \in \mathbb{Z}$ t.c. $f^B(f^B(u)) \neq u$

applico due volte il raddoppio
(solo $u = 0$ ha questa proprietà)
(rimane zero)

torna al valore di partenza

Scelgo $\varphi : \forall x\, f(f(x)) = x$

$\mathcal{A} \models \varphi$ e $\mathcal{B} \not\models \varphi$

oppure $f^a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $f^B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

suriettiva (ogni n. è opposto di qualcun altro)

ma suriettiva (non tutti sono doppi di interi)

$(\forall x \exists y\, f(y) = x)$

$\to \forall y \exists x\, f(x) = y$ cioè la suriettività

$\mathcal{A} \models$! $\quad \mathcal{B} \not\models$!

(N.B. Preso un enunciato φ t.c. $\mathcal{A} \not\models \varphi$ e $\mathcal{B} \models \varphi$ basta prendere $\neg\varphi$ per avere: $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ e $\mathcal{B} \not\models \neg\varphi$)

Altri 3 es slide 19b

martedì 24 novembre 2020 09:58