Logica — 30-6-2020

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. (a) Scrivere una formula proposizionale la cui altezza sia uguale al numero di occorrenze di connettivi nella formula.

(b) Scrivere una formula proposizionale la cui altezza sia minore del numero di occorrenze di connettivi nella formula.

(c) Determinare se le formula ottenute ai punti (a) e (b) sono soddisfacibili, e se sono valide.

2. Si consideri il linguaggio del prim'ordine dell'aritmetica $\mathcal{L} = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$, dove:

- $<$ è simbolo relazionale binario
- $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari
- $0, 1$ sono simboli di costante

(a) Scrivere un termine di altezza 2 e un termine di altezza 3 di $\mathcal{L}$

(b) Scrivere una formula atomica di $\mathcal{L}$ in cui occorrano i termini ottenuti al punto (a)

(c) Scrivere un enunciato di $\mathcal{L}$ che contenga la formula del punto (b) come sottoformula

3. Sia $\mathcal{L} = \{T, A, H, i, p\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove T è simbolo relazionale unario, A, H sono simboli relazionali binari, i, p sono simboli di costante. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $T(x)$: x ha un tesoro;
- $A(x, y)$: x è amico di y;
- $H(x, y)$: x aiuta y;
- i: io.
- p: Pino.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. Gli amici dei miei amici sono miei amici.
2. Aiuto tutti i miei amici, tranne Pino.

3. Chi ha un amico, ha un tesoro.

4. Si consideri l'enunciato del prim'ordine

$$\varphi : \quad \exists x(P(x) \land \neg Q(x)) \land \forall x(P(x) \lor Q(x))$$

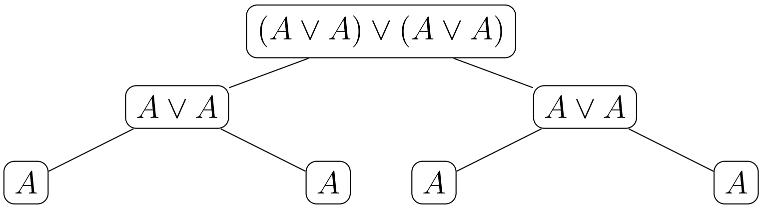
È soddisfacibile?

È valido?

Svolgimento

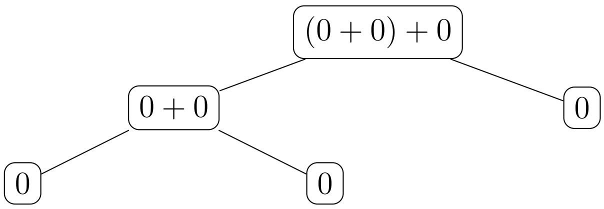
1. (a) La formula A ha altezza 0 e nessuna occorrenza di connettivi

(b) La formula $(A \vee A) \vee (A \vee A)$ ha altezza 2 e tre occorrenze di connettivi:

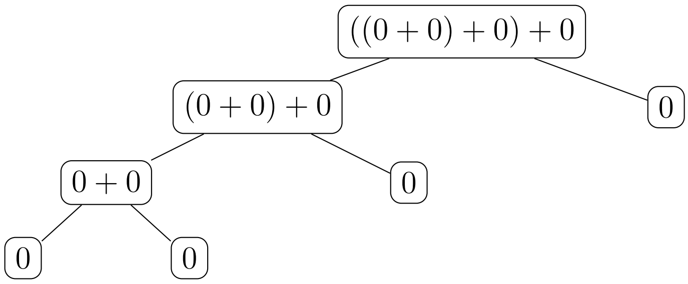


(c) Entrambe le formule sono soddisfacibili ma non valide, essendo equivalenti alla lettera proposizionale A

2. (a) $(0 + 0) + 0$ è un $\mathcal{L}$-termine di altezza 2:



$((0 + 0) + 0) + 0$ è un termine di altezza 3:



(b) $(0 + 0) + 0 = ((0 + 0) + 0) + 0$

(c) La formula in (b) non contiene variabili, dunque è essa stessa un enunciato

3.
1. $\forall x \forall y (A(x, i) \wedge A(y, x) \to A(y, i))$
2. $\forall x (A(x, i) \wedge x \neq p \to H(i, x))$
3. $\forall x (\exists y\ A(x, y) \to T(x))$

4. L'enunciato φ è la congiunzione degli enunciati:

$$\psi : \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)), \quad \theta : \forall x(P(x) \vee Q(x))$$

Una struttura per il linguaggio di φ è del tipo $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\dashv})$, dove

- A è un insieme non vuoto
- $P^{\mathcal{A}} \subseteq A$
- $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A$

Affinché $\mathcal{A} \models \varphi$ si deve avere che

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \mathrm{e} \mathcal{A} \models \theta$$

cioè:

- esista un elemento di A che appartiene a $P^{\mathcal{A}}$ ma non a $Q^{\mathcal{A}}$
- ogni elemento di A appartenga a $P^{\mathcal{A}}$ o a $Q^{\mathcal{A}}$, cioè $P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} = A$

Si può allora definire

$$A = \{a\}, \quad P^{\mathcal{A}} = \{a\}, \quad Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$$

(dove a è un qualunque oggetto) e le condizioni sono verificate, cioè $\mathcal{A} \models \varphi$. Quindi l'enunciato φ è soddisfacibile.

Affinché una struttura $\mathcal{B} = (B, P^{\mathcal{B}}, Q^{\mathcal{B}})$ non soddisfi φ, basta che $\mathcal{B}$ soddisfi la negazione di almeno uno tra ψ, θ. Per esempio, se $P^{\mathcal{B}} = \emptyset$, allora $\mathcal{B} \models \neg\psi$. Si può allora definire

$$B = \{b\}, \qquad P^{\mathcal{B}} = Q^{\mathcal{B}} = \emptyset$$

e si ha che $\mathcal{B} \models \neg\psi$, quindi $\mathcal{B} \not\models \varphi$. Pertanto l'enunciato φ non è valido.