Logica — 12-9-2019

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le risposte corrette:

(a) Sia P la formula proposizionale $(A \vee (\neg A \to A)) \to \neg A$

- ☐ P è soddisfacibile.
- ☐ $\neg P$ è soddisfacibile.
- ☐ P è vera se e solo se A è vera.
- ☐ Il valore di verità di P non dipende dal valore di verità di A.

(b) Sia $L = \{R, f, c\}$, con R simbolo relazionale binario, f simbolo funzionale binario, c simbolo di costante. Sia

$$\varphi : \exists c(\forall y R(f(t, y), c) \wedge (R(c, c) \to f(c, c) = c))$$

- ☐ φ è una L-formula.
- ☐ $(\mathbb{Z}, <, -, 7)$ è una L-struttura.
- ☐ $(\mathbb{Z}, <, -, 7) \models R(c, f(c, c))$.
- ☐ $(\mathbb{Z}, <, -, 7) \not\models \exists x\ R(x, f(x, c))$.

2. Stabilire se l'insieme di formule

$$\{A \wedge (A \to B), A \to B, \neg B\}$$

è soddisfacibile.

3. Sia $\mathcal{L} = \{D, M, P, S\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove D, M, P sono simboli relazionali unari, S è simbolo relazionale binario. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $D(x)$: x è un dentista;
- $M(x)$: x è mediocre;
- $P(x)$: x è un paziente;
- $S(x, y)$: x spaventa y.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. I dentisti mediocri spaventano i loro pazienti.
2. Qualche paziente è spaventato da tutti i dentisti mediocri.

3. I dentisti che spaventano i loro pazienti sono mediocri.

4. Sia $\mathcal{L} = \{R, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove R è simbolo relazionale binario e g è simbolo funzionale unario. Si considerino gli enunciati

$$\varphi : \forall x \exists y\ R(f(f(x)), f(y)), \qquad \psi : \exists x \forall y\ R(y, f(x))$$

Si definisca una $\mathcal{L}$-struttura

$$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}})$$

tale che l'universo di $\mathcal{A}$ sia l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e $\mathcal{A}$ soddisfi esattamente uno tra φ e ψ.

Svolgimento

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le risposte corrette:

(a) Sia P la formula proposizionale $(A \vee (\neg A \to A)) \to \neg A$

- ■ P è soddisfacibile.
- ■ $\neg P$ è soddisfacibile.
- □ P è vera se e solo se A è vera.
- □ Il valore di verità di P non dipende dal valore di verità di A.

(b) Sia $L = \{R, f, c\}$, con R simbolo relazionale binario, f simbolo funzionale binario, c simbolo di costante. Sia

$$\varphi : \exists c(\forall y R(f(t,y), c) \wedge (R(c,c) \to f(c,c) = c))$$

- □ φ è una L-formula.
- ■ $(\mathbb{Z}, <, -, 7)$ è una L-struttura.
- □ $(\mathbb{Z}, <, -, 7) \models R(c, f(c,c))$.
- ■ $(\mathbb{Z}, <, -, 7) \not\models \exists x \ R(x, f(x,c))$.

2. Sia i un'interpretazione tale che

$$i(A \wedge (A \to B)) = i(A \to B) = i(\neg B) = 1$$

Si ha quindi anche che $i(A) = 1$. Da questo e da $i(A \to B) = 1$ segue $i(B) = 1$, ma da $i(\neg B) = 1$ segue $i(B) = 0$. Contraddizione.

Quindi l'insieme non è soddisfacibile.

3.
1. $\forall x(D(x) \wedge M(x) \to \forall y(P(y) \to S(x,y)))$
2. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \wedge M(y) \to S(y,x)))$
3. $\forall x(D(x) \wedge \forall y(P(y) \to S(x,y)) \to M(x))$

4. (Si noti un refuso nel testo: il linguaggio è $\mathcal{L} = \{R, f\}$, dove f è simbolo funzionale unario.)

Se $R^{\mathcal{A}}$ è la relazioni d'uguaglianza e $f^{\mathcal{A}}$ è la funzione identità (cioè $f^{\mathcal{A}}(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$), allora:

- $\mathcal{A} \models \varphi$, perché per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(a)) = f^{\mathcal{A}}(b)$: basta prendere $b = a$
- $\mathcal{A} \not\models \psi$, perché non esiste alcun $a \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $b \in \mathbb{R}$ si abbia $b = f^{\mathcal{A}}(a)$ (cioè $b = a$), in quanto $\mathbb{R}$ ha più di un elemento