

ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

ESERCITAZIONE GUIDATA - 15/12/2020

Esercizio 1. Si consideri la seguente funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_{22} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_{22} \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto (\bar{3} \cdot \bar{x}, \bar{3} \cdot \bar{y}) \end{aligned}$$

- (1) Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva.
- (2) Trovare (se esiste) l'inversa di f nel monoide $(X^X, \circ, \text{Id}_X)$, dove $X = \mathbb{Z}_{35} \times \mathbb{Z}_{22}$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x, y) = 7x + 9y$.

- (1) Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva.
- (2) Determinare $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(f(-1, 2))$.
- (3) Trovare (se esiste) una funzione $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ tale che $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Esercizio 3. Si consideri \mathbb{Z}_{25} .

- (1) Calcolare $\bar{6}^{303}$.
- (2) Determinare l'ordine dei seguenti elementi del gruppo degli elementi invertibili $(U(\mathbb{Z}_{25}), \cdot, \bar{1})$:
 $\bar{6}, \bar{24}, \bar{11}, \bar{7}$.

Esercizio 4. Si consideri il gruppo $G = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ bigettiva}\}$ con l'operazione di composizione. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, definiamo il sottoinsieme

$$H_k = \{f \in G : f(3) = k\}.$$

- (1) Determinare per quali $k \in \mathbb{Z}$ il sottoinsieme H_k è un sottogruppo di G .

Sia $f \in G$ la funzione definita da $f(x) = x + 1 \ \forall x \in \mathbb{Z}$.

- (2) Per ciascuno dei $k \in \mathbb{Z}$ determinati in (1), trovare un elemento $h \in G$ diverso da f e appartenente alla classe laterale sinistra $f \circ H_k$.
- (3) Per ciascuno dei $k \in \mathbb{Z}$ determinati in (1), trovare un elemento $g \in G$ tale che $g \circ H_k \neq f \circ H_k$.