**Esame scritto ALAN 21-01-2022, prima parte.**

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

a) calcolare $\mathrm{rk}(A)$.

b) determinare, se esistono, le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

2) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6-\lambda \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A$ è invertibile.
b) Esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = B$ non ammette soluzioni?
c) Nel caso in cui $\lambda = 1$, determinare la lunghezza del vettore $A \cdot B \in \mathbb{R}^3$.

3) Date due matrici triangolari superiori $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ (cioè $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i > j$), dimostrare le seguenti affermazioni:
a) $A + B$ è triangolare superiore.
b) $A \cdot B$ è triangolare superiore.
c) $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$.

4) Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$,

a) individuare i sottoinsiemi $A \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tali che i vettori $v_i$ con $i \in A$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.
b) $v_1, v_2, v_5$ formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$?

**Corso di Laurea in Informatica**
**Algebra Lineare e Analisi Numerica**
**Esame del 21/1/2022 (6 CFU + seconda parte per 9 CFU)**

Cognome....CATTANEO..... Nome....KEVIN.............. Email...54344382@studenti.unige.it

1. Si supponga di dover calcolare $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1} - \dfrac{x-2}{x+2}$ per valori di $x$ *molto grandi*.

   (a) Determinare (e discutere) il condizionamento del problema del calcolo di $f(x)$.

   (b) Studiare l'errore di arrotondamento nei seguenti algoritmi per il calcolo di $f(x)$:

   (b1): $\quad x \mapsto f1 := \dfrac{2x-1}{2x+1},\ f2 := \dfrac{x-2}{x+2} \mapsto y1 := f1 - f2$

   (b2): $\quad x \mapsto n := 6x,\ d := 2x^2 + 5x + 2 \mapsto y2 := n/d$

2. Determinare una sequenza di rotazioni di Givens che porti il vettore $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $\gamma$ opportuno (esplicitare le matrici di rotazione). Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

3. Determinare i parametri $a, b, c$ della funzione scritta nella forma

$$g(x) = a\,|x| + b\,x + c$$

che approssima ai minimi quadrati i seguenti dati:

| $x$ | $-3$ | -2 | -1 | 0 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 5 | 3 | -5 | -2 |

Dare inoltre un'interpretazione geometrica dell'esercizio svolto.

4. Verificare che $\lambda = 0$ è un autovalore di molteplicità 2 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcolare, se esiste, una diagonalizzazione di $A$.

Calcolare le prime 3 iterazioni del metodo delle potenze a partire dal vettore iniziale $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dire se il metodo delle potenze è convergente.

5. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -100 & 0 & 101 \end{pmatrix}$ e i vettori

$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = A \cdot x$ e $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ -10^{-2} \\ 10^{-2} \end{pmatrix}$.

(i) Verificare che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 101 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Calcolare i condizionamenti $\mu_1(A)$ e $\mu_\infty(A)$ relativi alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente.

(iii) Calcolare le norme $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ per ognuno dei vettori $x$, $b$ e $\delta b$.

(iv) Calcolare una maggiorazione dell'errore $\|\tilde{x} - x\|_\infty$ per la soluzione del sistema lineare perturbato $A\tilde{x} = b + \delta b$.