Logica — 29-1-2019

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le risposte corrette:

(a) Sia P la formula proposizionale $A \wedge (\neg A \to B) \to \neg A$

☐ P è soddisfacibile.
☐ $\neg P$ è soddisfacibile.
☐ P è vera se e solo se B è vera.
☐ Il valore di verità di P non dipende dal valore di verità di B.

(b) Sia $L = \{U, f, c\}$, con U simbolo relazionale unario, f simbolo funzionale binario, c simbolo di costante. Sia

$$\varphi : \exists t(\forall y U(f(t, y)) \wedge (U(c) \to f(c, c) = c))$$

☐ φ è una L-formula.
☐ φ contiene variabili libere.
☐ $ht(\varphi) = 3$.
☐ Nell'argomento di $\forall y$ compare il simbolo c.

2. Si considerino le formule proposizionali

$$P : \neg A \to \neg B, \quad Q : \neg B \to \neg A, \quad R : \neg A \wedge \neg B$$

Si determini se:

(a) $P, Q \models R$
(b) $Q, R \models P$
(c) $P \wedge R \equiv Q$

3. Sia $\mathcal{L} = \{S, A\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove S è simbolo relazionale unario e A è simbolo relazionale binario. Si consideri la seguenze interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $S(x)$: x è uno studente.
- $A(x, y)$: x è amico di y.

Si formalizzino in $\mathcal{L}$ le seguenti frasi:

1. Ogni studente è amico di qualche studente.

2. Ogni studente è amico di qualche altro studente.
3. C'è uno studente che è amico di ogni altro studente.

4. Sia $\mathcal{L} = \{R, f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove R è un simbolo relazionale binario e f è un simbolo funzionale binario. Sia

$$\varphi : \forall t \exists w R(f(t,w), u)$$

Si considerino le strutture

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq, +), \qquad \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \geq, \cdot)$$

- Determinare quali sono le occorrenze libere di variabili in φ.
- Determinare se $\mathcal{A} \models \varphi[t/2, w/5, u/0]$.
- Determinare l'insieme di verità $\varphi(\mathcal{B})$.

Svolgimento

1. (a)
- $\star$ P è soddisfacibile.
- $\star$ $\neg P$ è soddisfacibile.
- $\star$ Il valore di verità di P non dipende dal valore di verità di B.

(b)
- $\star$ φ è una L-formula.
- $\star$ $ht(\varphi) = 3$.

2. (a) $P, Q \not\models R$. Infatti, se A e B sono entrambe vere, allora P e Q sono entrambe vere, ma R è falsa.

(b) $Q, R \models P$. Infatti, dalla verità di R segue che $\neg B$ è vera, quindi P è vera.

(c) $P \wedge R \not\equiv Q$. Infatti, se A e B sono entrambe vere, allora $\neg A$ e $\neg B$ sono entrambe false, quindi Q è vera, ma R è falsa e pertanto anche $P \wedge R$ è falsa.

3.
1. $\forall x(S(x) \to \exists y(S(y) \wedge A(x, y)))$
2. $\forall x(S(x) \to \exists y(S(y) \wedge y \neq x \wedge A(x, y)))$
3. $\exists x(S(x) \wedge \forall y(S(y) \wedge y \neq x \to A(x, y)))$

4.
- L'unica occorrenza libera di variabile in φ è l'unica occorrenza di u.
- $\mathcal{A} \not\models \varphi[t/2, w/5, u/0]$, perché non è vero che per ogni numero naturale t esiste un numero naturale w tale che $t + w \leq 0$.
- $\varphi(\mathcal{B}) = \{u \in \mathbb{Z} \mid u \leq 0\}$. Infatti:
  - $*$ se $u \leq 0$, dato un qualunque $t \in \mathbb{Z}$, si considerino due casi:
    Se $t = 0$, allora $tw = 0$ per ogni $w \in \mathbb{Z}$ e quindi $tw \geq u$.
    Se $t \neq 0$, preso w concorde con t si ha $tw \geq 0$, e quindi $tw \geq u$.
    Quindi $u \in \varphi(\mathcal{B})$.
  - $*$ se invece $u > 0$, preso $t = 0$, si ha $tw = 0$ per ogni w, quindi $tw \not\geq u$.
    Quindi $u \notin \varphi(\mathcal{B})$.