Logica — 1-6-2020

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. (a) Sia $L = \{A\}$ un linguaggio proposizionale contentente A quale unica lettera proposizionale. Scrivere, una formula proposizionale di L di altezza 4.

(b) Determinare se la formula ottenuta al punto (a) è soddisfacibile, e se è valida.

2. Disegnare l'albero sintattico della formula del prim'ordine

$$\neg\exists x\ (R(x,y) \wedge P(z)) \vee P(x)$$

Determinare l'altezza della formula, elencarne le sottoformule atomiche, le variabili che occorrono libere, e le variabili che occorrono vincolate.

3. Sia $\mathcal{L} = \{D, N, R, A, C\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove D, N, R sono simboli relazionali unari, A, C sono simboli relazionale binari. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $D(x)$: x dorme;
- $N(x)$: x è nervoso;
- $R(x)$: x si riposa;
- $A(x, y)$: x è aggressivo verso y.
- $C(x, y)$: x, y sono colleghi.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. Chi dorme si riposa, ma c'è chi si riposa senza dormire.
2. Chi dorme senza riposarsi è nervoso.
3. Chi non si riposa è aggressivo verso i propri colleghi.

4. Si consideri l'enunciato del prim'ordine

$$2 + 2 = 4$$

È soddisfacibile?

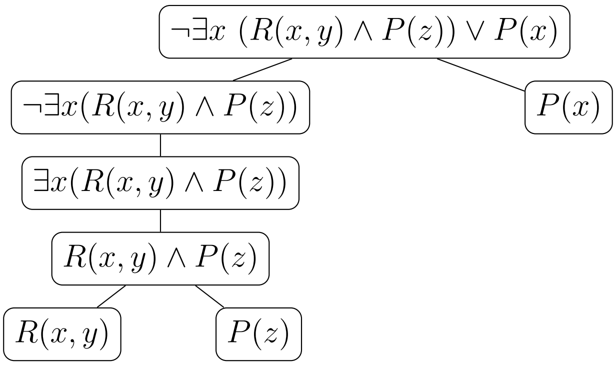
È valido?

Svolgimento

1. (a) Un elemento di $Prop(L)$ di altezza 4 è $\neg\neg\neg\neg A$.

(b) Poiché $\neg\neg\neg\neg A \equiv A$, si tratta di una formula soddisfacibile, ma non valida.

2. L'albero sintattico della formula è



L'altezza della formula è 4. Le sottoformule atomiche sono $R(x,y), P(z), P(x)$. Le variabili che occorrono libere sono x, y, z. L'unica variabile che occorre vincolata è x.

3.
1. $\forall x(D(x) \to R(x)) \wedge \exists x(R(x) \wedge \neg D(x))$
2. $\forall x(D(x) \wedge \neg R(x) \to N(x))$
3. $\forall x(\neg R(x) \to \forall y(C(x,y) \to A(x,y)))$

4. L'enunciato è soddisfacibile, perché è vero nella struttura standard dell'artimetica $(\mathbb{N}, +, 2, 4)$.

L'enunciato non è valido. Infatti, se $\mathcal{A}$ è la struttura che ha

- come universo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi
- come interpretazione del simbolo funzionale $+$ l'operazione di sottrazione
- come interpretazione dei simboli di costante $2, 4$, i numeri $2, 4$, rispettivamente

allora $\mathcal{A} \not\models 2 + 2 = 4$.