Logica — 9-1-2020

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le affermazioni corrette:

(a) Si considerino le formule proposizionali:

$$\begin{aligned} P :& A \vee (\neg A \wedge B) \\ Q :& A \vee B \end{aligned}$$

- $\square$ $P \models Q$.
- $\square$ $Q \models P$.
- $\square$ $P \equiv Q$.
- $\square$ $\models P \wedge Q$.

(b) Sia $L = \{P, Q, f, a\}$, dove:

P è simbolo relazionale unario
Q è simbolo relazionale binario
f è simbolo funzionale binario
a è simbolo di costante

Quali delle seguenti espressioni sono formule?

- $\square$ $Q(a, f(a, a))$
- $\square$ $P(x) \vee P(f(a))$
- $\square$ $\neg Q(x, a) \wedge \exists a Q(y, a)$
- $\square$ $f(a, f(a, a))$

2. Stabilire se il ragionamento seguente è corretto:

Se Pino ha guidato l'auto, Gino è innocente. Se Lino ha sparato, allora Gino non è innocente.
Quindi, se Lino non ha sparato, allora Pino non ha guidato l'auto.

3. Sia $\mathcal{L} = \{A, C, M\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove A, C sono simboli relazionali unari, M è simbolo relazionale binario. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $A(x)$: x abbaia;
- $C(x)$: x è un cane;

- $M(x, y)$: x morde y.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. Can che abbaia non morde.
2. Cane non morde cane.
3. Nessuno morde un cane che non morde nessuno.

4. Si consideri l'enunciato

$$\varphi : \exists x(P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \vee Q(x))$$

φ è soddisfacibile?

φ è valido?

Svolgimento

1. Per ognuna delle seguenti domande segnare TUTTE le affermazioni corrette:

(a) Si considerino le formule proposizionali:

$$P : A \vee (\neg A \wedge B)$$
$$Q : A \vee B$$

- ■ $P \models Q$.
- ■ $Q \models P$.
- ■ $P \equiv Q$.
- □ $\models P \wedge Q$.

(b) Sia $L = \{P, Q, f, a\}$, dove:

P è simbolo relazionale unario
Q è simbolo relazionale binario
f è simbolo funzionale binario
a è simbolo di costante

Quali delle seguenti espressioni sono formule?

- ■ $Q(a, f(a, a))$
- □ $P(x) \vee P(f(a))$
- □ $\neg Q(x, a) \wedge \exists a Q(y, a)$
- □ $f(a, f(a, a))$

2. Si definiscano le lettere proposizionali:

- P: Pino ha guidato l'auto.
- G: Gino è innocente.
- L: Lino ha sparato.

Il ragionamento è allora:

$$P \to G, L \to \neg G \models \neg L \to \neg P$$

Si costruisce la tavola di verità

P	G	L	$P \to G$	$\neg G$	$L \to \neg G$	$\neg L$	$\neg P$	$\neg L \to \neg P$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0

Arrivati a questo punto, anche senza completare la costruzione della tavola di verità, si riconosce che la valutazione v tale che $v(P) = v(G) = 1, v(L) = 0$ si estende a un'interpretazione i tale che

$$i(P \to G) = i(L \to \neg G) = 1, \qquad i(\neg L \to \neg P) = 0$$

Pertanto

$$P \to G, L \to \neg G \not\models \neg L \to \neg P$$

Il ragionamento proposto non è corretto.

3. 1. $\forall x(C(x) \wedge A(x) \to \neg \exists y M(x,y))$
2. $\neg \exists x \exists y(C(x) \wedge C(y) \wedge M(x,y))$
3. $\neg \exists x \exists y(C(y) \wedge \neg \exists z M(y,z) \wedge M(x,y))$

4. Una struttura $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}})$ soddisfa φ se e solo se

$$\mathcal{A} \models \exists x(P(x) \vee \neg Q(x)) \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \models \forall x(P(x) \vee Q(x))$$

Inoltre si ha che

- $\mathcal{A} \models \exists x(P(x) \vee \neg Q(x))$ se e solo se esiste $a \in A$ tale che $a \in P^{\mathcal{A}}$ o $a \notin Q^{\mathcal{A}}$, cioè $P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ o $Q^{\mathcal{A}} \neq A$.
- $\mathcal{A} \models \forall x(P(x) \vee Q(x))$ se e solo se, per ogni $a \in A$ si ha che $a \in P^{\mathcal{A}}$ o $a \in Q^{\mathcal{A}}$, cioè se e solo se $P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} = A$.

Quindi una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi$ si trova prendendo

$$A = \{0\}, \quad P^{\mathcal{A}} = \{0\}, \quad Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$$

Quindi φ è un enunciato soddisfacibile.

Per trovare una struttura $\mathcal{B} = (B, P^{\mathcal{B}}, Q^{\mathcal{B}})$ tale che $\mathcal{B} \not\models \varphi$, è sufficiente che $P^{\mathcal{B}} \cup Q^{\mathcal{B}} \neq B$. Per esempio:

$$B = \{0\}, \quad P^{\mathcal{B}} = Q^{\mathcal{B}} = \emptyset$$

Quindi φ non è un enunciato valido.