Esercizi di probabilità

E1 Si supponga di avere un mazzo di 45 carte di cui 35 blu e 10 rosse. Si estrare una carta: se è blu si lancia una moneta, altrimenti due dadi onesti. Si calcolino le probabilitá che:

a) esca testa;

b) esca il numero 6 (in somma).

Soluzione:

Indichiamo con B l'evento "esce carta blu", con T = "esce testa nel lancio della moneta" e con D_i , "esce somma i nel lancio dei dadi" , i = 2, 3, 4,.... a) Per calcolare la probabilit'a dell'evento E = "esce testa nel gioco" osserviamo che E = B ∩ T , pertanto:

$$P(E) = P(T|B)P(B) = 1/2 \cdot 35/45 = 35/90 \approx 0.39$$

b) la probabilit'a dell'evento F = "la somma dei dadi sia 6" si calcola in modo analogo al caso precedente notando che $F = D_6 \cap B^c$ (avendo due dadi dobbiamo calcolare correttamente la molteplicità):

$$P(F) = P(D_6|B^c)P(B^c) = 5/36 \cdot 10/45 = 5/162 \approx 0.031$$

E2 Un'urna contiene 6 palline bianche e 4 rosse. Si estraggono 3 palline. Qual è la probabilità che venga estratta 1 pallina bianca e 2 rosse?

Soluzione:

$$\#\{\text{estrazioni di 3 palline da } 10\} = \binom{10}{3}$$
$$\#\{\text{estrazioni di 1 pallina da } 6\} = \binom{6}{1}$$
$$\#\{\text{estrazioni di 2 palline da } 4\} = \binom{4}{2}$$
$$P\{\text{estrarre 1 pallina bianca e 2 rosse}\} = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}$$

E3 Consideriamo una sequenza infinita di prove indipendenti. Sia S lo spazio campione di ogni prova. Fissiamo in esso un particolare evento E. In ogni prova, diciamo che si ha un $successo$ se si verifica E, il che accade con probabilità $p = P(E)$, e insuccesso altrimenti (con probabilità $1 - p$). Indichiamo con S_n il numero di successi su n prove. Vogliamo la probabilità dell'evento $A_n = \{\text{almeno un successo nelle prime } n \text{ prove}\} = \{S_n \geq 1\}$.

Soluzione:

$P(A_n) = 1 - P(A_n^{\complement})$
$P(A_n^{\complement}) = P\{S_n = 0\}$
$\{S_n = 0\} = \{$nessun successo nelle prime n prove$\}$
$I_i := \{$insuccesso all'i-esima prova$\}$

$$\{S_n = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$$

$$P\{S_n = 0\} = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} I_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(I_i) = (1-p)^n$$

E4 Calcola il valore atteso della variabile Y = 4X + 3, dove X è la variabile aleatoria che descrive il lancio di un dado onesto a sei facce.

Soluzione:
$E[Y] = E[4X + 3] = 4E[X] + 3 = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 4 \cdot 3.5 + 3 = 17$.

E5 Tre scatole uguali (A, B e C) contengono palline verdi e rosse. La scatola A contiene il doppio di palline verdi rispetto alle rosse; la scatola B contiene la metà di palline verdi rispetto alle rosse; la scatola C contiene un numero uguale di palline verdi e rosse. Scegliendo una scatola a caso, si estrae da essa una pallina verde. Qual è la probabilità che la scatola scelta sia la B?

Soluzione:
Definiamo gli eventi

$$A = \{\text{scelta della scatola A}\}, \quad B = \{\text{scelta della scatola B}\},$$
$$C = \{\text{scelta della scatola C}\}, \quad V = \{\text{estrazione della pallina verde}\}.$$

Per la formula di Bayes si ha:

$$P(B|V) = \frac{P(V|B)P(B)}{P(V)} = \frac{P(V|B)P(B)}{P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) + P(V|C)P(C)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{9}.$$

E6 Sia X una variabile casuale distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, 2]$. Calcola:

a) la pdf di e^X;

b) $\mathbb{E}[e^X]$ e $\mathrm{Var}[e^X]$.

Soluzione:
Definita la trasformazione $y = f(x) = e^x$, si ha che:

a) $P_Y(y) = P_X(f^{-1}(y))\frac{df^{-1}(y)}{dy} = P_X(\ln y)\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\frac{1}{y}$.
Oppure tramite la cdf $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^x \le y) = P(x \le \log y) = F_X(\log y) = \frac{1}{2}\log y$. Calcolando la derivata si ottiene infine $P_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{\log y}{2} = \frac{1}{2y}$.
La nuova pdf è definita in $[e^0, e^2]$.

b) $\mathbb{E}[e^X] = \int_0^2 \frac{1}{2} e^x dx = \frac{e^2-1}{2}$.
$\mathbb{E}[(e^X)^2] = \frac{e^4-1}{4}$.
$\text{Var}[e^X] = \frac{e^2-1}{2}$.
Gli stessi risultati si ottengono usando la pdf $P_Y(y)$.

E7 Se X e Y sono due variabili casuali discrete con $P(X=2, Y=3) = 1/3, P(X=3, Y=3) = 1/4, P(X=3, Y=4) = 1/4$ e $P(X=2, Y=1) = 1/6$ calcola:

a) le probabilità marginali;

b) le media di X e Y;

c) $\mathbb{E}[XY]$;

d) la covarianza $\text{Cov}(X, Y)$.

e) le variabili X e Y sono indipendenti?

f) calcolare $P(X \leq 3, Y \leq 3)$

Soluzione:

a) le probabilità marginali;
Poiché per v.a. discrete si ha che:

$$p_X(x) = P\{X = x\} = \sum_{y|p(x,y)>0} p(x, y)$$

nel nostro caso si ha che $X \in \{2, 3\}$ e che $Y \in \{1, 3, 4\}$ possiamo scrivere:

$$p_X(X=2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad p_X(X=3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p_Y(Y=1) = \frac{1}{6}, \quad p_Y(Y=3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}, \quad p_Y(Y=4) = \frac{1}{4}$$

b) le media di X e Y;

$$E(X) = \sum_{x|p(x)>0} xp(x) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{35}{12}$$

c) $E[XY]$;

$$E(XY) = \sum_{x,y} g(x, y)p(x, y) = 2 \times 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times 3 \times \frac{1}{4} + 3 \times 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times 2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{12}$$

d) la covarianza $\text{Cov}(X, Y)$.
$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{91}{12} - \frac{5}{2} \times \frac{35}{12} = \frac{182-175}{24} = \frac{7}{24}$

e) le variabili X e Y sono indipendenti?
Due variabili casuali sono indipendenti se per ogni coppia di insiemi A e B vale: $P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$.
Nel nostro caso subito si vede che:
$P(X = 2, Y = 3) = 1/3 \neq \frac{1}{2} \times \frac{7}{12}$.

f) calcolare $P(X \leq 3, Y \leq 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$