ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

SOLUZIONI ESERCITAZIONE GUIDATA - 17/11/2020

Esercizio 1. Siano dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $B = \{a,b,c,d,e\}$. Si determini la cardinalità dei seguenti insiemi:

(1) $A \times B^2$;
(2) $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$;
(3) $\{f : A \to B \text{ funzione}\}$;
(4) $\{f : \mathscr{P}(A) \to B \text{ funzione}\}$;
(5) $\{f : \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A) \text{ funzione}\}$;
(6) $\{f : A \to B \text{ funzione} : \ f(1) = f(2) = f(3) = f(4)\}$;
(7) $\{f : A \to B \text{ funzione} : \ |f(\{1,2,3,4\})| = 2\}$;
(8) $\{f : A \to B \text{ funzione iniettiva}\}$.

Soluzione. Denotiamo con $|X|$ la cardinalità di un insieme X. Ricordiamo che se X e Y sono insiemi finiti, allora $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$, $|X \times Y| = |X| \times |Y|$, e $|X^Y| = |X|^{|Y|}$.

(1) $|A \times B^2| = |A| \cdot |B|^2 = 7 \cdot 5^2 = 175$.
(2) $|\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^7 \cdot 2^5 = 2^{12} = 4096$.
(3) $|B^A| = |B|^{|A|} = 5^7 = 78125$.
(4) $|B^{\mathscr{P}(A)}| = |B|^{2^{|A|}} = 5^{128}$.
(5) $|\mathscr{P}(A)^{\mathscr{P}(B)}| = 128^{32}$.
(6) Abbiamo 5 possibili scelte per il valore $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$, poi abbiamo 5 possibili scelte per il valore $f(5)$, 5 per $f(6)$, e 5 per $f(7)$. In totale abbiamo 5^4 funzioni che soddisfano le richieste.
(7) Siccome $|f(\{1,2,3,4\})| = 2$, ci sono $\binom{5}{2}$ possibili sottoinsiemi $f(\{1,2,3,4\})$ di 2 elementi di B. Una volta fissato un tale sottoinsieme $C \subset B$ di cardinalità 2, ci sono $2^4 - 2$ possibili modi di assegnare a $f(1), \dots, f(4)$ i valori di C. Notare che il "-2" è dovuto al fatto che non si può avere $f(1) = \cdots = f(4)$ altrimenti $f(\{1,2,3,4\})$ avrebbe cardinalità 1. Una volta fatto ciò, rimangono da assegnare i valori per $f(5), f(6), f(7)$. Per ciascuno di essi possiamo scegliere liberamente uno dei 5 elementi di B. In totale abbiamo
$$\big|\{f : A \to B : \ |f(\{1,2,3,4\})| = 2\}\big| = \binom{5}{2} \cdot (2^4 - 2) \cdot 5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 14 \cdot 125 = 17500.$$
(8) Siccome $|A| > |B|$, non ci sono funzioni iniettive da A a B, quindi $\big|\{f : A \to B \text{ iniettiva}\}\big| = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:
$$(a,b) \sim (c,d) \iff a^b = c^d.$$

(1) Si verifichi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
(2) Esibire tre elementi distinti che appartengono alla classe $[(3,6)]$ e tre elementi distinti che appartengono alla classe $[(1,1)]$.

(3) Qual è la cardinalità della classe $[(2,3)]$?
(4) Esistono classi di equivalenza aventi cardinalità uguale a 1? Se sì, si determini almeno una tale classe.
(5) * Si determini la cardinalità del quoziente $A/\sim$.

Soluzione. (1) La proprietà riflessiva è soddisfatta siccome abbiamo $(a,b) \sim (a,b)$ poichè $a^b = a^b$. Allo stesso modo la proprietà simmetrica segue dalla proprietà simmetrica dell'uguaglianza di numeri naturali. Infine, siano $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ tali che $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$. Questo implica $a^b = c^d$ e $c^d = e^f$, pertanto anche $a^b = e^f$, cioè $(a,b) \sim (e,f)$. Questo verifica la proprietà transitiva.
(2) Abbiamo $3^6 = 729^1 = 9^3$, quindi $(3,6),(729,1),(9,3) \in [(3,6)]$. Poi, abbiamo $1^1 = 1^2 = 1^3$, quindi $(1,1),(1,2),(1,3) \in [(1,1)]$.
(3) Per definizione $[(2,3)] = \{(a,b) \in A : \ a^b = 2^3 = 8\}$. La fattorizzazione di 8 in fattori primi è $8 = 2^3$, pertanto 8 si può scrivere come potenza di due numeri interi positivi soltanto nei seguenti due modi: $8 = 8^1 = 2^3$. Quindi $[(2,3)] = \{(8,1),(2,3)\}$ ha cardinalità 2.
(4) Sì, tali classi esistono. Ad esempio, siccome il numero 2 è primo si può scrivere come potenza di due numeri interi positivi soltanto nella maniera triviale $2 = 2^1$. Quindi $[(2,1)] = \{(2,1)\}$ ha cardinalità 1. Lo stesso è vero per le classi $[(p,1)]$ dove p è un numero primo.
(5) Dimostriamo che $A/\sim$ ha cardinalità numerabile esibendo una bigezione tra $A/\sim$ e $\mathbb{N}^*$. Consideriamo la funzione

$$\varphi : A/\sim \to \mathbb{N}^*$$
$$[(a,b)] \mapsto a^b$$

Siccome φ è definita utilizzando i rappresentanti delle classi di equivalenza, dobbiamo dimostrare che φ non dipende dalla scelta del rappresentante. Siano $(a,b),(c,d) \in A$ nella stessa classe di equivalenza, cioè $(a,b) \sim (c,d)$, e dimostriamo che $\varphi(a,b) = \varphi(c,d)$. Questo è vero perchè $(a,b) \sim (c,d)$ implica $\varphi(a,b) = a^b = c^d = \varphi(c,d)$. Quindi φ è ben definita.
Surgettività. Sia $x \in \mathbb{N}^*$, scelgo $[(x,1)] \in A/\sim$. Si ha $\varphi([(x,1)]) = x^1 = x$. Quindi φ è surgettiva.
Iniettività. Siano $[(a,b)],[(c,d)] \in A/\sim$ tali che $\varphi([(a,b)]) = \varphi([(c,d)])$ e dimostriamo che $[(a,b)] = [(c,d)]$. L'uguaglianza $\varphi([(a,b)]) = \varphi([(c,d)])$ implica $a^b = c^d$ che vuol dire $(a,b) \sim (c,d)$ e cioè $[(a,b)] = [(c,d)]$.

Esercizio 3. Sia dato il numero complesso

$$z = \frac{2^9(1+2i)(1+3i)}{5(\sqrt{3}+i)^9}.$$

(1) Scrivere z in forma $a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$ e in forma esponenziale.
(2) Disegnare nel piano di Gauss le radici cubiche di z (anche senza determinarle esplicitamente).

Soluzione. (1) Calcoliamo prima il numeratore $(1+2i)(1+3i) = -5+5i$. Per calcolare la potenza al denominatore, scriviamo $\sqrt{3}+i$ in forma esponenziale. Abbiamo $|\sqrt{3}+i| = 2$ e $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$. Quindi otteniamo

$$(\sqrt{3}+i)^9 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^9 = 2^9 e^{9i\frac{\pi}{6}} = 2^9 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2^9 i.$$

Pertanto abbiamo

$$z = \frac{5 \cdot 2^9(-1+i)}{-5 \cdot 2^9 i} = \frac{-1+i}{-i} = i(-1+i) = -1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

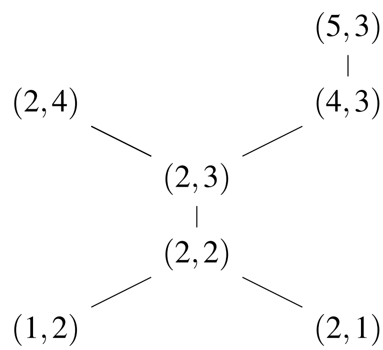
(2) Abbiamo $|z| = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ e $\arg(z) = \frac{5}{4}\pi$. Pertanto le radici terze di z saranno i vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[3]{|z|} = |z|^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$. La prima radice avrà argomento $\frac{5}{4}\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}\pi$, cioè 75 gradi.

Esercizio 4. Sia dato l'insieme $A = \{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,3),(5,3)\}$.

(1) Si consideri A come sottoinsieme del poset $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \times \leq)$ e si determinino (se esistono) massimo, minimo, estremo inferiore, ed estremo superiore di A. Determinare l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti di A.

(2) Si consideri A come sottoinsieme del poset $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathrm{LEX})$ e si determinino (se esistono) massimo, minimo, estremo inferiore, ed estremo superiore di A. Determinare l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti di A.

Soluzione. (1) Abbiamo il seguente diagramma che rappresenta la struttura del poset A (dove l'ordine $\leq \times \leq$ procede dal basso verso l'alto):



Si vede che A ha due elementi minimali $(1,2)$ e $(2,1)$ che non sono confrontabili. Quindi A non ammette minimo. Analogamente, A ha due elementi massimali non confrontabili $(2,4)$ e $(5,3)$. Pertanto A non ammette massimo. L'insieme dei maggioranti di A è

$$\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : \ x \geq 5 \text{ AND } y \geq 4\},$$

che ha minimo $(5,4)$. Pertanto $\sup A = (5,4)$. Analogamente, l'insieme dei minoranti di A è

$$\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : \ x \leq 1 \text{ AND } y \leq 1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},$$

che ha massimo $(1,1)$. Pertanto $\inf A = (1,1)$.

(2) Sappiamo che $(\mathbb{N}, \leq)$ è totalmente ordinato, e quindi anche $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathrm{LEX})$ è totalmente ordinato. Pertanto anche A è totalmente ordinato. Più precisamente, A è la catena seguente:

$$(1,2) \leq (2,1) \leq (2,2) \leq (2,3) \leq (2,4) \leq (4,3) \leq (5,3).$$

Quindi abbiamo $\min A = \inf A = (1,2)$ e $\max A = \sup A = (5,3)$. I maggioranti di A sono

$$\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : \ x > 5 \text{ OR } (x = 5 \text{ AND } y \geq 3)\}.$$

I minoranti di A sono

$$\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : \ x < 1 \text{ OR } (x = 1 \text{ AND } y \leq 2)\} = \{(0,x) : \ x \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,0),(1,1),(1,2)\}.$$