Insieme dei numeri complessi

lunedì 12 ottobre 2020 14:37

$\mathbb{C}$ insieme dei numeri complessi

$\parallel$ a livello di insiemi

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow x + iy \qquad (2,3) \longleftrightarrow 2 + i3$

REGOLE

- SOMMA $\underset{\text{coppia ordinata}}{(x+iy)} \underset{\text{operazione}}{+} (u+iv) := \underbrace{x+u}_{} + i\,\underbrace{(y+v)}_{}$ → somma in $\mathbb{R}$

- $i^2 = i \cdot i = -1$ (non compatibile in $\mathbb{R}$)
- PRODOTTO $(x+iy)\cdot(u+iv) := xu - yv + i(xv + yu)$

N. COMPLESSO

$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad x, y \in \mathbb{R} \qquad z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

PARTE REALE $\mathrm{Re}(z) = x$

PARTE IMMAGINARIA $\mathrm{Im}(z) = y$

Es $3 + i4 = z \qquad \mathrm{Re}(z) = 3 \qquad \mathrm{Im}(z) = 4$

- $i \qquad \mathrm{Re}(i) = 0 \qquad \mathrm{Im}(i) = 1$
- $\pi \qquad \mathrm{Re}(\pi) = \pi \qquad \mathrm{Im}(\pi) = 0 \qquad \pi \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \qquad [\pi \notin \mathbb{Q}]$

Osservazione: $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$

Osservazione: $z, w \in \mathbb{C}$, $z = w \Longleftrightarrow (\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)) \wedge (\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w))$

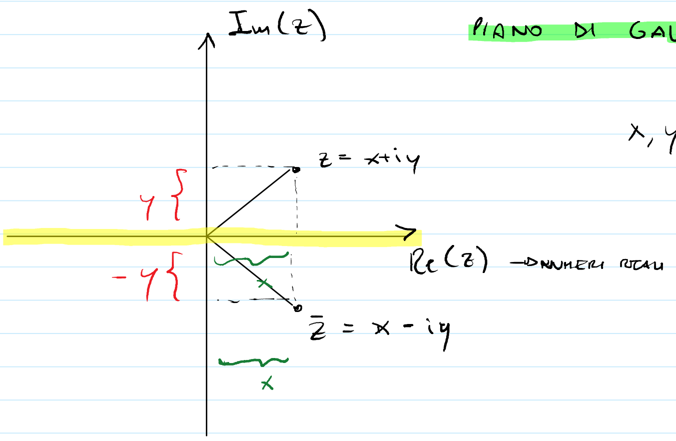
Def OPERAZIONE DI COMPLESSO CONIUGATO

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ il coniugato di z è $\bar{z} = x - iy$

$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$

PIANO DI GAUß

$x, y \in \mathbb{R}$



PROPRIETA' DELL'OPERAZIONE

1) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

2) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

3) $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

DIM 3)

→ si osserva sul piano di Gauß: se non ho parte immaginaria, la simmetria coincide su se stessa.

DIM 1) $z, w \in \mathbb{C}$ $\quad z = x+iy \quad x, y \in \mathbb{R} \quad w = u+iv \quad u, v \in \mathbb{R}$

$$\overline{zw} = \overline{xu - yv + i(xv+yu)} = xu - yv - i(xv+yu)$$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (x-iy)(u-iv) = xu - yv - iyu - ixv$$

→ posso trattarlo come un polinomio

RICORDA DI SOSTITUIRE $i^2 = -1$ dove presente

DIM 2) $z, w \in \mathbb{C}$ $\quad z = x+iy \quad x, y \in \mathbb{R} \quad w = u+iv \quad u, v \in \mathbb{R}$

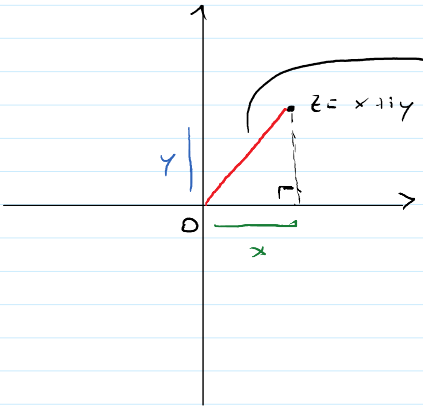
$$\overline{z+w} = \overline{x+iy+u+iv} = \overline{x+u+i(y+v)} = x+u-i(y+v)$$

$$\bar{z} + \bar{w} = x - iy + u - iv = x+u-i(y+v) \quad =$$

RACCOLGO IL MENO

Def MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO $\quad z = x+iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R} \geq 0$$



L'ipotenusa ha lunghezza $|z|$
(per il teorema di Pitagora)

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\hookrightarrow (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{ixy} - i^2y^2 = x^2+y^2 = |z|^2$

CONSEGUENZA $z \neq 0$ $\quad \boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}}$ VERIFICA:

ovvero $z \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \overset{?}{=} 1$ $\qquad z\cdot\bar{z} = |z|^2$ quindi $z \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{\cancel{|z|^2}}{\cancel{|z|^2}} = 1$

ES $z_1 = 4+3i \qquad z_2 = 3+4i$

Se $\dfrac{1}{z} = 1 \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ è un modo per riscrivere il denominatore

$\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \dfrac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$

$|z_1| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5 = |z_2|$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = (4+3i)\,\frac{3-4i}{25} = \frac{1}{25}\left(12-16i+9i+12\right) = \frac{24}{25} - \frac{7}{25}i$$

PROPRIETÀ $\quad z, w \in \mathbb{C}$

1) $|zw| = |z|\cdot|w|$

2) $|z+w| \le |z| + |w|$ $\quad$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\Downarrow$

Se $z \in \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{Im}(z) = 0$ allora $|z|$ è il valore assoluto di z.

 $\overset{\shortparallel}{x+iy}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$ $\quad y = 0$ $\qquad \overset{\shortparallel}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2} = |x| \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Es $z_1 = 4+3i \qquad z_2 = 3+4i \qquad |z_1| = |z_2| = 5$

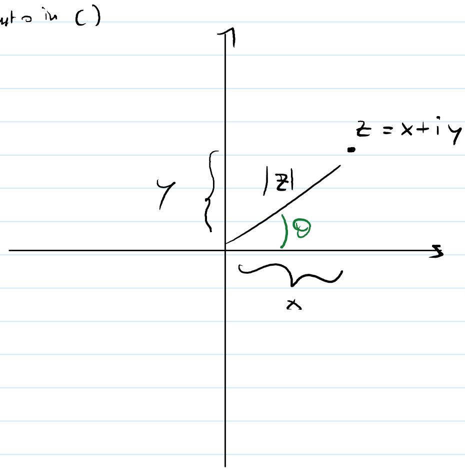
$z_1 + z_2 = 7+7i \qquad |z_1+z_2| = \sqrt{98} \le 10 = |z_1| + |z_2|$

Osservazione $\mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{inclusione}} \mathbb{C}$ (ogni n° reale è contenuto in $\mathbb{C}$)

$x \longmapsto x + i0$

↓

come può essere visto ogni numero reale



θ = argomento = $\arg(z)$

$\theta \in [0, 2\pi[$ — 0 incluso (z reale), escluso 2π — intervallo

N.B. Solo se $z \neq 0$, altrimenti l'angolo non esisterebbe!

Posso determinare z tramite il modulo e l'argomento: (per via trigonometrica)

Se $z=0$, $|z| = 0$

Se $z \neq 0$

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)\right) = x + iy$$

$\theta \to \arg(z)$

$y \to \sqrt{x^2+y^2}(\sin\theta)$

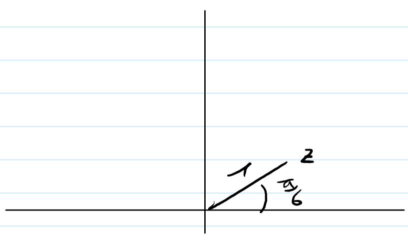
$x = \sqrt{x^2+y^2} \cdot (\cos\theta)$

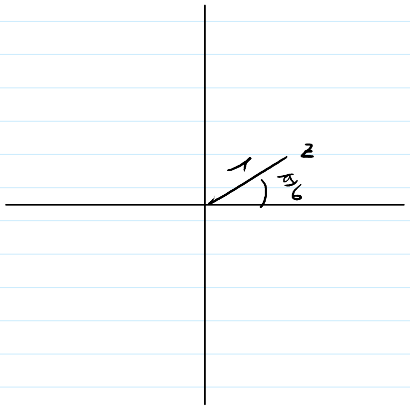
$\arg(z) \to$ CALCOLARE $\quad tg(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x} = \frac{Im(z)}{Re(z)}$

Es $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \qquad |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\arg(z) = \theta \qquad \sin\theta = Im\, z = \frac{1}{2} \qquad \cos\theta = Re(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

l'angolo può essere "qualsiasi" partendo da $\theta = \pi/6$





l'angolo può essere "qualsiasi" partendo da $\theta = \frac{\pi}{6}$

(Es) $z = 3 + 4i \qquad |z| = 5 \qquad \cos\theta = \frac{3}{5} \quad \sin\theta = \frac{4}{5}$

non facile da determinare

Ma sappiamo che:

$\exists!\ \theta \in [0, 2\pi[$ t.c. $\cos\theta = \frac{3}{5} \quad \sin\theta = \frac{4}{5}$ → senza specificare ulteriormente

$z = 5(\cos\theta + i\sin\theta)$

notazione trigonometrica

NOTAZIONE ESPONENZIALE $\qquad z \in \mathbb{C} \qquad \arg(z) = \theta$

$$z = \underbrace{|z|e^{i\theta}}_{\text{EXP}} := \underbrace{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{TRIGONOMETRICA}}$$

(Es) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \Rightarrow |z| = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$

$z = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |w| = 1 \qquad \theta' = \frac{\pi}{3}$

$z \cdot w = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ → allora $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ perché $Re(z \cdot w) = 0$ e $Im(z \cdot w) = 1$

VERIFICO

$z \cdot w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} + i\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = i \quad ✓$

REGOLA GENERALE $\qquad$ N.B.

$z = |z| \cdot e^{i\theta} \qquad w = |w|e^{i\varphi}$

$z \cdot w = |z| \cdot |w| e^{i(\theta + \varphi)}$

N.B. FORMULA DI EULERO

$\cos\pi \quad \sin\pi = 0$, no Im

$(1)\ e^{i\pi} = -1$

Es $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = +1$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $i^2 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}$, $i^3 = e^{i(\frac{3}{2}\pi)}$, $i^4 = e^{i\frac{4}{2}\pi} = e^{2\pi i}$

$z \in \mathbb{C} \longrightarrow z^n = |z|^n(\cos(n \cdot \arg(z)) + i \cdot \sin(n \arg z)) = |z|^n e^{in\arg(z)}$

per $z \neq 0$

$0^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ 0^0 non e' definito

Teorema fondamentale dell'algebra

martedì 8 dicembre 2020 13:24

Sia un polinomio $p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0$ $\quad a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$

Allora $\exists\, w \in \mathbb{C}$ t.c. $p(w) = 0$ $\quad$ (w è una RADICE di p) $\quad a_d \neq 0 \quad d \in \mathbb{Z}$

Es $\quad p(z) = z^2 + 1$ non ha radici reali $\Rightarrow p(z) \neq 0$ sempre (con z reale)

mentre in $\mathbb{C}$:

$p(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \;\rightsquigarrow\; i$ e $-i$ sono radici di p

$p(-i) = 0$

Infatti posso scomporre il polinomio in $(z+i)(z-i) = z^2 + 1$

Inoltre: $\exists\, w_1 \dots w_r \in \mathbb{C}$, $\exists\, n_1 \dots n_r \in \mathbb{Z} > 0$

t.c. $p(z) = (z - w_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z - w_r)^{n_r}$

e $n_1 + \dots + n_r = d$

} esistono tutte le radici del polinomio

- $w_1 \dots w_r$ si dicono RADICI (o SOLUZIONI) del polinomio "p"
- n_i è una MOLTEPLICITÀ di w_i (come radice)

Es

1) $z^3 - 3z^2 + z - 3 = p(z)$ $\quad$ Quali sono le radici?

Sono i numeri complessi che annullano il polinomio.

$p(3) = 27 - 27 + 3 - 3 = 0$

3 è radice

$p(-i) = \cancel{i} - 3i^2 \cancel{-i} - 3 = 3 - 3 = 0 \qquad -i$ è radice

$p(i) = -i - 3i^2 + i - 3 = 0 \qquad i$ radice

$\Rightarrow p(z) = (z-3)(z-i)(z+i)$ e ottengo il polinomio di partenza

$\rightarrow (z^2 - zi - 3z + 3i)(z+i) = z^3 + z^2 i - z^2 i - z(i^2) - 3z^2 \cancel{- 3zi} \cancel{+ 3zi} + 3(i^2)$
$= z^3 + z^2 i - z^2 i + z - 3z^2 - 3$
$= z^3 - 3z^2 + z - 3$

2) $p(z) = z^3 + (1 - 4i) z^2 + (-4 - 4i) z - 4$

$= (z - 2i)^2 (z + 1)$

RADICE $2i$ di molteplicità 2

RADICE 1 di molteplicità 1

] La molteplicità è l'esponente del fattore lineare

TEOREMA

$$\left\{\begin{array}{l} p(z) = a_d z^d + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad \overset{\text{se reale}}{[a_i \in \mathbb{R}]} \\ w \in \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad p(w) = 0 \quad \text{allora} \quad p(\bar{w}) = 0 \\ \text{La radice complessa} \end{array}\right\}$$

<u>DIM</u>

$$p(\bar{w}) = \underline{a_d (\bar{w})^d} + \ldots + a_1 \bar{w} + a_0$$

per le proprietà dei coniugati, posso fare il coniugato dopo la potenza

$$= a_d \overline{w^d} + \ldots + a_1 (\bar{w}) + a_0$$

poiché $a_i \in \mathbb{R} \longrightarrow \bar{a}_i = a_i$ per definizione

ovvero: $\bar{a}_d \overline{w^d} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{w} + \bar{a}_0$

per le proprietà
$(\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w})$
$(\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w})$

$$= \overline{a_d w^d + \ldots + a_1 w + a_0} = \overline{p(w)} = \bar{0} = 0 \qquad \square$$

Def: RADICE QUADRATA

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$ LA RADICE n-esima DI x è:

1) Se n dispari è l'unico numero reale y t.c. $y^n = x$ ($y \in \mathbb{R}$)
2) Se n pari e $x \geq 0$, la radice è l'unico $y \in \mathbb{R} \geq 0$ t.c. $y^n = x$
3) Se n pari e $x < 0$ allora la radice non è definita (radice su n negativo)

Dove esiste si denota con $\sqrt[n]{x} = y$

RADICI COMPLESSE

$w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ allora le radici complesse n-esime di w sono le soluzioni $z^n - w = 0$ (w che rendono il polinomio zero)

ESSE SONO:

NOTAZIONE TRIGONOMETRICA

$$w_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg(w)+2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{con } k = 0, \dots, n-1$$

$$w_k = \sqrt[n]{|w|}\, \overset{e}{\exp}\left(\frac{\arg(w) + 2\pi}{n} i\right)$$ NOTAZIONE ESPONENZIALE

Es $\boxed{w = 1}$ si parla di radici dell'unità

le soluzioni di $z^n = 1$ sono:

$$\left\{ (\underbrace{\sqrt[n]{1}}_{=1})^{\frac{2\pi k i}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} =: \sqrt[n]{1}$$

NOTAZIONE $\sqrt[n]{1} = 1$

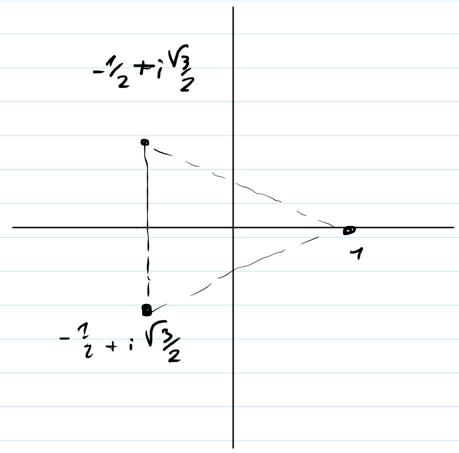
→ $n = 3$: radici terze di 1

$$\left\{ e^{\left(\frac{2\pi k i}{3}\right)} \quad k = 0,1,2 \right\} = \left\{ \underset{k=0}{1}, \underset{k=1}{e^{\frac{2\pi i}{3}}}, \underset{k=2}{e^{\frac{4\pi i}{3}}} \right\}$$

riscrivibili in f. trig. $= \left\{1, \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right\}$

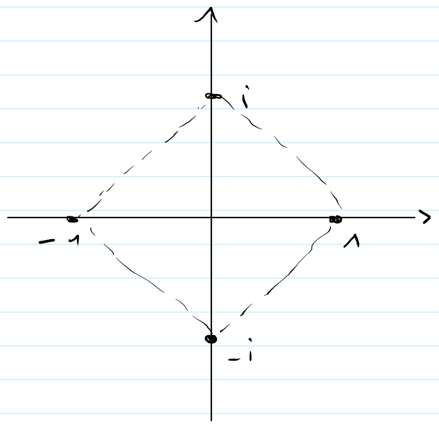
" f. algebrica $= \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Graficamente:



ottengo un triangolo equilatero

→ $n=4$, $z^4=1$ $\{1, -1, i, -i\}$ sono le radici QUARTE di 1



ottengo un QUADRATO

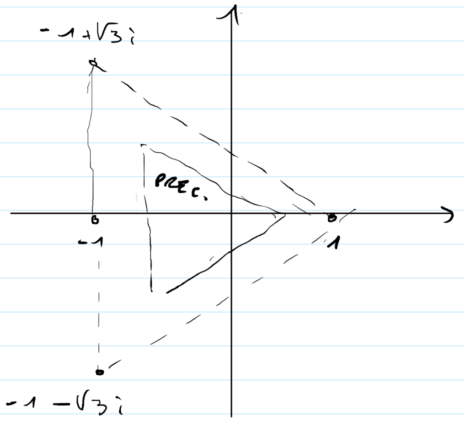
CASI DEGENERI:

- 2 sole soluzioni costituiscono un segmento
- 1 sola soluzione determina un punto

- RADICI TERZE DI 8 $z^3=8$

$$\left\{ \sqrt[3]{|8|} \cdot e^{\frac{2\pi i k}{3}} \text{ per } k=0,1,2 \right\} = \left\{ 2\cdot 1,\ 2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \right\}$$

$$= \left\{ 2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i \right\}$$



ottengo un triangolo equilatero

(più grande di un fattore 2 rispetto al precedente)

Osservazione le radici n-esime complesse di $w \in \mathbb{C}$ sono i vertici di un poligono regolare inscritto in una circonferenza di centro O (origine assi) e raggio $\sqrt[n]{|w|}$

Es $w = \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i \right)$ calcola le radici quinte di w e w^7

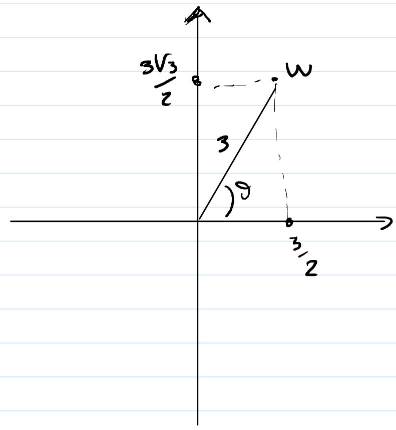
$|w| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{9} = 3$ modulo di w

calcolo l'argomento: sia $\vartheta = \arg(w)$

$\sin\vartheta = \frac{\operatorname{Im} w}{|w|} = \frac{3\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\vartheta = \frac{\operatorname{Re} w}{|w|} = \frac{3\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

corrisponde a $\vartheta = \frac{\pi}{3}$



Dunque:

$w = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$

F. TRIG F. EXP

$w^7 = \left(3e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^7 = \underline{3^7 e^{\frac{7}{3}\pi i}}$ (notazione exp più rapida)

Ora calcolo le radici quinte di w

$\left\{ \sqrt[5]{3} \cdot e^{\frac{\pi}{3 \cdot 5}i + \frac{2k\pi}{5}i} \text{ con } k = 0,1,2,3,4 \right\} = \left\{ \underline{\sqrt[5]{3}\, e^{\frac{\pi}{15}i}}, \sqrt[5]{3}\, e^{\frac{7}{15}\pi i}, \sqrt[5]{3}\, e^{\frac{13}{15}\pi i}, \sqrt[5]{3}\, e^{\frac{19}{15}\pi i}, \sqrt[5]{3}\, e^{\frac{5}{3}\pi i} \right\}$

posso passare a un'altra forma: es. $\sqrt[5]{3}\, e^{\frac{\pi}{15}i} = \sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i \sin\frac{\pi}{15}\right)$

Es

$w = 4 + 4\sqrt{3}\, i$ RADICI QUARTE

$|w| = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = \sqrt{16 \cdot 4} = 8$

$\vartheta = \arg(w)$, $\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{3}$

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta &= \frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\vartheta &= \frac{\operatorname{Re}(w)}{|w|} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right) \vartheta = \frac{\pi}{3}$$

- RADICI QUARTE DI w

$$w_k = \sqrt[4]{|w|} \cdot e^{\frac{\vartheta + 2k\pi}{4} i} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3$$

$$\left.\begin{aligned} k=0 \quad w_0 &= \sqrt[4]{8}\, e^{\frac{\frac{\pi}{3} + 0}{4}} = \sqrt[4]{8}\, e^{\frac{\pi}{12} i} \\ k=1 \quad w_1 &= \sqrt[4]{8}\, e^{\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4}} = \sqrt[4]{8}\, e^{\frac{7\pi}{12} i} \\ k=2 \quad w_2 &= \sqrt[4]{8}\, e^{\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{4}} = \sqrt[4]{8}\, e^{\frac{13\pi}{12} i} \\ k=3 \quad w_3 &= \sqrt[4]{8}\, e^{\frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{4}} = \sqrt[4]{8}\, e^{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{3}{2}\pi\right)} = \sqrt[4]{8}\, e^{\frac{19}{12}\pi} \end{aligned}\right\}$$

tutte le possibili radici (soluzioni) del polinomio w

$z \in \mathbb{C}$ insieme più grande di $\mathbb{R}$

$z = x + \boxed{i}y$

↳ unità immaginaria

$\underline{i^2 = -1}$

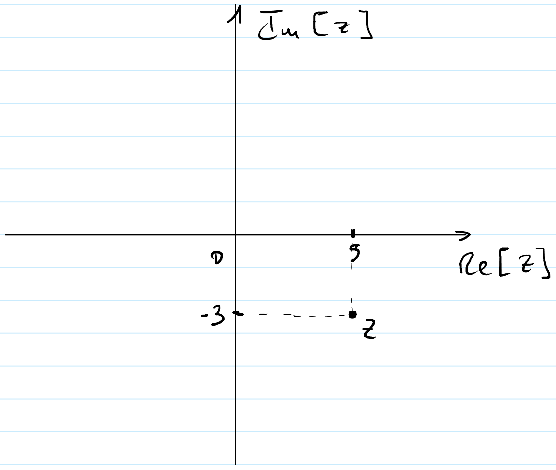
N.B. ❗

$\sqrt{-1} \overset{?}{=} i$

per definizione dei complessi e della radice NON POSSO SCRIVERLO

$x = Re[z]$ PARTE REALE

$y = Im[z]$ PARTE IMMAGINARIA



$z = 5 + -3i$

I numeri complessi possono essere scritti anche in maniera TRIGONOMETRICA

$|z| = \sqrt{|x^2| + |y^2|}$ rappresentazione del MODULO (secondo quanto visto sul piano)

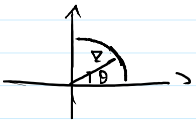
$\parallel$

$z = r e^{\theta}$ rappresentazione esponenziale

↓ MODULO

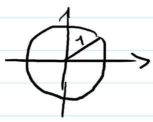
$\parallel$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



rappresentazione trigonometrica

Dunque se $|z| = r = 1$

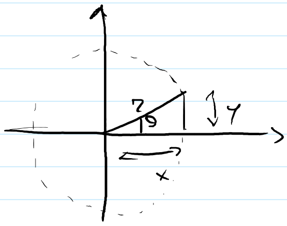


I complessi hanno anche il loro "opposto" (termine IMPROPRIO): il CONIUGATO

$\bar{z} = x - iy$

Come calcolare ϑ:

$z = x + iy$



$\tan\vartheta = \frac{y}{x} \longrightarrow \vartheta = \overset{\tan^{-1}}{\overset{\parallel}{\arctan}}\left(\frac{y}{x}\right)$

RAPPRESENTAZIONI DI NUMERI COMPLESSI

$z \in \mathbb{C}$

$z = Re(z) + i\, Im(z)$ forma algebrica

$z = r e^{i\vartheta}$ forma esponenziale

$r = \sqrt{|Re(z)|^2 + |Im(z)|^2}$ = raggio circonf = modulo di z

$\vartheta = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$

Es. Trovare la radice ennesima del numero complesso $z \in \mathbb{C}$

$z^n = ?$

per $n = \frac{1}{4} \longrightarrow z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{z} = ?$

$z^n = (r)^n \left(\cos(n\vartheta + \underbrace{2k\pi}_{\text{periodicità}}) + i\sin(n\vartheta + 2k\pi)\right)$ scritto in coordinate POLARI (forma trigonometrica)

per $k \in \mathbb{Z}$

Lo stessi valori per dati intervalli di angolo

Es. $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = \sqrt{3} - i$

radici quarte? $\longrightarrow n = 4$

- Calcolo il modulo di z: $r = |z| = \sqrt{3 + \overset{-i^2 = -(-1)}{1}} = 2$
- Calcolo l'argomento ϑ: $\vartheta = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (o $\frac{5}{6}\pi$)

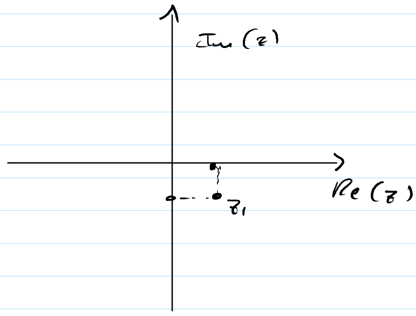
  o $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$z_n = \sqrt[n]{z} = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) - i\sin\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\right)$

$k = 0, 1, 2, 3$ Sono tutte le radici sino a $n-1$

$k = 0, 1, 2, 3$ Sono tutte le radici sino a $n-1$

es. per $n=1$ $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$



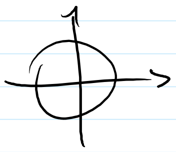
e disegnando z_0, z_1, z_2, z_3

ottengo un poligono regolare.

detto $|z| = \sqrt{|a^2| + |b^2|}$

$\theta = \arctan(b/a)$

- per $n > 1$: $z^n = (|z|)^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$
- per $0 < n < 1$: $z^n = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$ $\rightarrow$ intesa come a^n; se $n = \frac{1}{2} \rightarrow a^{1/2} = \sqrt[2]{a}$



$$\begin{cases} \arctan(b/a) & b > a \\ \arctan(b/a) + \pi & b < a \end{cases}$$

↳ per saltare nella parte positiva