31 maggio 2022: Teoria dell'Informazione e Inferenza

E1.1 Quante targhe si possono formare di 4 lettere (tra 22) e 3 cifre (tra 10)?

E1.2 Data la variabile aleatoria X con distribuzione $f(x) = C(1 + 2x^2)$ per $x \in [0, 1]$, determinare il valore della costante C, calcolare $E[X]$ e calcolare $P\{0 < X < 1/2\}$.

E1.3 Definire e produrre il grafico della *pmf* e della *cdf* di un dado onesto e di un dado in cui le probabilià delle facce pari sono il doppio delle facce dispari.

E1.4 **(Facoltativo)** Sia $\bar{X}_n$ la media campionaria di n estrazioni indipendenti ottenute da una distribuzione di probabilità ignota con varianza σ^2. Mostrare che $Var(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$.

E2.1 Se H(X) = 5, H(Y) = 2 e H(X, Y) = 6, calcola le entropie condizionate e la mutua informazione. A seguito dei risultati ottenuti, cosa si può dire delle variabili causali X e Y?

E2.2 Calcola la codifica di Huffman per i simboli $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ se $P(a) = P(b) = P(c) = 1/16$, $P(d) = 5/16$, $P(e) = 1/8$, e $P(f) = 3/8$.

E2.3 Calcola l'entropia H e l'entropia grezza H_0 della variabile casuale X che assume valori $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ con probabilità $p(a) = p(b) = p(c) = 1/16$, $p(d) = 4/16$, $p(e) = 1/8$, $p(f) = 3/8$ e $p(g) = p(h) = 1/32$.

E2.4 **(Facoltativo)** Rispondere ad almeno uno dei seguenti quesiti:
- Dare la definizione di distanza di Hamming e spiegare per quale ragione l'abbiamo introdotta.
- Scrivere e spiegare il significato della disuguaglianza di Kraft-McMillian (senza dimostrazione).

E3.1 Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza del parametro λ di una distribuzione esponenziale $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$ e 0 altrimenti. a partire da un set di campioni $\mathcal{D} = \{x_1, ..., x_n\}$.

E3.2 Un'urna contiene cinque monete di tipo A, tre di tipo B e due di tipo C. La probabilità di ottenere testa è 1/3 lanciando una moneta di tipo A, 1/6 lanciando una moneta di tipo B e 5/6 lanciando una moneta di tipo C. Calcolare la probabilità di ottenere testa lanciando una moneta estratta a caso. Assumendo di aver ottenuto testa, con quale probabilità è una moneta di tipo A?

E3.3 Data la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

calcolare la probabilità di transizione dallo stato s_2 allo stato s_1 in due passi. Discutere l'irriducibilità e la regolarità di $\mathbf{P}$ determinando la sua distribuzione stazionaria.

E3.4 **(Facoltativo)** Si consideri la seguente funzione ($\theta > 0$)

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{4}{\theta^2}x & \text{se } 0 \leq x \leq \theta/2 \\ \frac{4}{\theta^2}(\theta - x) & \text{se } \theta/2 < x \leq \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato un campione casuale $(X_1, ..., X_n)$ estratto da f_θ, calcolare $E[X]$ e mostrare se $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ è uno stimatore corretto del parametro θ. In caso non lo fosse, come potrebbe essere modificato per divenire corretto?