1. Costruire l'albero sintattico della formula proposizionale $\neg(B \to C) \wedge (A \vee \neg D) \to A \wedge \neg C$.

2. Elencare tutte le sottoformule della formula proposizionale $\neg(C \to (B \leftrightarrow A)) \vee B$.

3. Determinare se le seguenti formule proposizionali sono soddisfacibili, insoddisfacibili, valide:

   (a) $A \leftrightarrow \neg A$

   (b) $B \wedge A \to \neg A$

   (c) $(B \leftrightarrow C) \wedge (\neg B \leftrightarrow A) \wedge \neg(C \vee A)$

   (d) $(((A \to B) \to C) \to ((C \to A) \to B)) \to ((B \to C) \to A)$

   (e) $(A \to B) \to (\neg(B \wedge C) \to \neg(A \wedge B))$

   (f) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C) \leftrightarrow A \vee (C \to B)$

   (g) $A \wedge \neg(\neg B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$

4. Date le formule proposizionali $A \to B \wedge C$ e $(A \to B) \wedge (A \to C)$, determinare se una delle due è conseguenza logica dell'altra e se sono logicamente equivalenti.

5. Date le formule proposizionali $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow B)$ e A, determinare se una delle due è conseguenza logica dell'altra e se sono logicamente equivalenti.

6. Determinare una forma normale disgiuntiva e una forma normale congiuntiva per ognuna delle formule:

   (a) $\neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)$

   (b) $B \leftrightarrow (A \wedge C)$

   (c) $\neg(B \to C) \vee (A \leftrightarrow C)$

   (d) $\neg(B \wedge C) \to (B \leftrightarrow A)$

7. Sia $L = \{S, +, \cdot\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove S è simbolo funzionale unario, $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari. Determinare quali delle seguenti stringhe sono L-termini, utilizzando l'algoritmo dell'albero sintattico.

   (a) $S(S(0))$

   (b) $\cdot(S(0), x)$

(c) $+(\cdot(y, S(x)), S(x), 0)$

(d) $S(\cdot(+(x, S(S(0))), +(y, x)))$

8. Sia $L = \{P, <, Q, R, f, g, c\}$ dove P è simbolo relazionale unario, $<, Q$ sono simboli relazionali binari, R è simbolo relazionale ternario, f è simbolo funzionale unario, g è simbolo funzionale binario, c è simbolo di costante. Determinare le occorrenze libere e le occorrenze vincolate della variabili nelle formule:

   (a) $\forall x(Q(f(f(y)), g(y, z)) \to \forall z R(x, y, f(f(f(z)))))$

   (b) $\exists x(\forall y P(f(y)) \to Q(y, z))$

   (c) $x = c \wedge \forall x(P(g(g(x, y), y)) \to \exists y Q(y, g(x, x)))$

   (d) $\forall x\ x = y \wedge \forall y\ y = z \to x = z$

   (e) $\exists x \forall y\ x < y \vee \forall x\ x = y$

9. Sia $L = \{A, P, R, c\}$, dove A, P sono simboli relazionali unari, R è simbolo relazionale binario, c è simbolo di costante. Determinare quali delle seguenti formule sono enunciati:

   (a) $\forall x(A(x) \wedge P(x)) \vee \neg P(x)$

   (b) $A(c) \wedge (P(c) \to \forall x\ x = c)$

   (c) $\forall z(\forall x R(x, z) \leftrightarrow \exists x R(x, x))$

   (d) $\forall y \exists z(R(y, c) \to R(x, z))$

10. Disergnare il grafo diretto (G, E), dove $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(a, b) \in G \times G \mid b = a + 1 \text{ o } b = a - 4\}$.

11. Determinare se le seguenti affermazioni sono corrette:

    (a) $\{P(0), \forall x(P(x) \to P(s(x)))\} \models \forall x P(x)$

    (b) $\forall x \exists y\ f(y) = x \models \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y)$

    (c) $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(P(x) \to Q(x))\} \models \exists x(Q(x) \wedge R(x))$

12. Sia $L = \{S, +, \cdot, 0, 1, 2, \ldots\}$, dove S è simbolo funzionale unario, $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari, $0, 1, 2, \ldots$ sono simboli di costante. Si consideri la L-struttura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, S^{\mathcal{N}}, +, \cdot\}$, dove $S^{\mathcal{N}}$ è la funzione definita da $S^{\mathcal{N}}(a) = a + 1$, e $+, \cdot, 0, 1, 2, \ldots$ sono interpretati in modo standard. Determinare l'insieme di verità in $\mathcal{N}$ delle formule:

    (a) $x = x + x$

(b) $S(x) = x \cdot x$

(c) $\neg(x = 7 \vee x = 9)$

(d) $x \cdot S(x) = x + 25$

(e) $x \cdot y = 0$

(f) $x = 4 \wedge y = 1747$

(g) $x = 4$

(h) $x = S(y)$

(i) $x \cdot S(y) = S(x) \cdot y$

(j) $(x \cdot x) \cdot (y \cdot y) = 36$

13. Sia $L = \{s, +, \cdot, 0\}$, dove s è simbolo funzionale unario, $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari, 0 è simbolo di costante. Si consideri l'enunciato $\exists x \exists y\ s(s(s(0))) = (x \cdot x) + (y \cdot y)$. È soddisfacibile? È valido?

14. Sia $L = \{C, P, D, a, p, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove C, P sono simboli relazionali unari, D è simbolo relazionale binario, a è simbolo funzionale unario, p, g sono simboli di costante. Si consideri la seguente interpretazione di L:

    - $C(x)$: x è contento
    - $P(x)$: x piange
    - $D(x, y)$: x detesta y
    - $a(x)$: l'avvocato di x
    - p: Pino
    - g: Gino

    Formalizzare in L le affermazioni:

    (a) Se qualcuno è contento, allora Pino è contento

    (b) Se qualcuno è contento e Pino non è contento allora o Gino è contento o l'avvocato di Pino piange

    (c) Pino detesta Gino e tutti gli avvocati contenti

15. Sia $L = \{Z, <, \cdot, 0\}$ un linguaggio del prim'ordine, con Z simbolo relazionale unario, $<$ simbolo relazionale binario, $\cdot$ simbolo funzionale binario, 0 simbolo di costante. Si consideri la L-struttura $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, \mathbb{Z}, <, \cdot, 0)$. Si formalizzino in $\mathcal{R}$ le asserzioni:

(a) Il quadrato di ogni numero reale è positivo.
(b) Alcuni reali sono strettamente superiori al loro quadrato.
(c) Nessun intero è strettamente superiore a tutti gli altri.
(d) Non tutti i reali sono dei quezienti di interi.
(e) Esiste un intero che è multiplo intero di tutti gli altri.
(f) Tra due reali distinti esiste un razionale.
(g) Dati tre reali non nulli, almeno due hanno il medesimo segno.