Soluzioni - W1

E1.1 Dimostra che per tutti gli eventi E e F

1. $P(E^c) = 1 - P(E)$
2. Se $E \subseteq F$, $P(E) \leq P(F)$
3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

Soluzione

1. Per $A2$ $P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$ e per $A3$ $P(E \cup E^c) = P(S) = 1$.
2. Hai che $F = E \cup (E^c F)$. Per $A3$ $P(F) = P(E) + P(E^c F)$ e per $A1$ $P(E^c F) \geq 0$.
3. Osserva che per $A3$ $P(E \cup F) = P(E) + P(E^c F)$ e $P(F) = P(EF) + P(E^c F)$.

E1.2 Partendo da un gruppo di 8 donne e 6 uomini, quanti comitati di 3 donne e 2 uomini si possono formare?

Soluzioni

$$\frac{8!}{5!3!} \times \frac{6!}{4!2!} \tag{1}$$

E1.3 In un mazzo di 52 carte da Poker ogni carta è identificata da un seme (cuori, quadri, fiori, picche) e da un tipo (un numero da 1 a 10 oppure J, Q, K). Quindi il mazzo di carte può essere identificato con l'insieme:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \tag{2}$$

Una "mano" consiste di 5 carte estratte dal mazzo, ossia un elemento dell'insieme

$$\Omega = \{A \subseteq M : |A| = 5\} \tag{3}$$

Munendo Ω della probabilitá uniforme, si calcoli la probabilitá di ottenere poker e scala reale, dove:

- poker vuol dire avere 4 carte dello stesso tipo, la quinta arbitraria;
- scala reale vuol dire avere 5 carte dello stesso seme e con tipi crescenti in progressione aritmetica di passo 1, per es. $\{5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit\}$. le progressioni ammissibili sono $\{1, 2, 3, 4, 5\}]$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}]$ ... fino a $\{10, J, Q, K, 1\}]$.

Soluzione

- Scala reale: $\binom{52}{5}^{-1} \times 4 \times 10 = 0.0015\%$
- poker: $\binom{52}{5}^{-1} \times 13 \times 48 = 0.024\%$

E1.4 Calcola la probabilitá che, pescando a caso 7 numeri dall'insieme dei numeri N_{30} (insieme dei numeri interi positivi minori o uguali di 30) si ottenga una sequenza che contiene esattamente tre numeri pari e quattro numeri dispari?

Soluzione Per pescare 3 numeri pari sui 15 disponibili ci sono $\binom{15}{3}$ diversi modi per farlo e per ognuna di queste scelte abbiamo $\binom{15}{4}$ modi per scegliere quattro numeri dispari. In totale dunque ci sono $\binom{15}{3}\binom{15}{4}$ modi per pescare la sequenza di numeri richiesta.

Il numero totale di possibilitá di pescare 7 numeri dai 30 disponibili é pari a $\binom{30}{7}$. Pertanto la probabilitá di pescare la sequenza richiesta é pari a $\frac{\binom{15}{3}\binom{15}{4}}{\binom{30}{7}}$

E1.5 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Soluzione Possiamo scegliere $\Omega =$ insieme dei sottoinsiemi di r elementi dell'insieme degli n biglietti. Se A é l'evento in questione, A^c é l'insieme dei sottoinsiemi di r lementi degli $n - m$ biglietti non vincenti. Allora:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n-m}{r}}{\binom{n}{r}} \tag{4}$$