Taglio minimo e MonteCarlo / 02-05

Gli algoritmi tipo MonteCarlo: con una probabilità $p>0$ restituiscono almeno una risposta corretta ($1-p$ di averne una errata)

Utile per ricerca di minimi e massimi

$$p(E_1 E_2 \dots E_n) = \frac{p(E_1E_2\dots E_n)}{p(E_1E_2\dots E_{n-1})} \cdot \frac{p(E_1E_2\dots E_{n-1})}{p(E_1E_2\dots E_{n-2})} \, p(E_1E_2\dots E_{n-2}) \dots \cdot p(E_1)$$

$\cap$ di n eventi

↳ si tolgono

So che $\frac{p(AB)}{p(B)} = p(A|B)$, allora

$$p(E_n|E_1E_2\dots E_{n-1})\; p(E_{n-1}|E_1\dots E_{n-2}) \dots P(E_2|E_1)\; P(E_1)$$

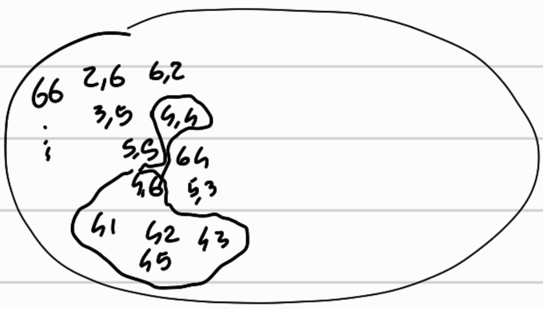
es

E_1 probabilità che la somma di due lanci di un dado è 8 o 10

E_2 p che il 1° lancio esce 4

E_3 p che il 2° esce 6

Totale 36 coppie (2 lanci)



$P(E_1) = \frac{8 \text{ coppie}}{36} = \frac{2}{9}$

$P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(E_3) = \frac{1}{6}$

$$P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3|E_1E_2) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$$

si verificano tutti

↳ cambio lo spazio camp. ← (su 8 coppie di E_1)

solo (4,4) e (4,6)

↳ sulle 2 coppie prec. (dato $E_1 E_2$)

Riprendendo la distribuzione geometrica

$P(X \geq 1)$ p prob successo $(1-p)$ p insuccesso

p che almeno dopo 10 lanci ottengo testa (quindi i primi 9 hanno insuccesso)

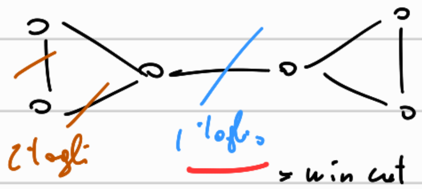
$(1-p)^9 \cancel{p}$

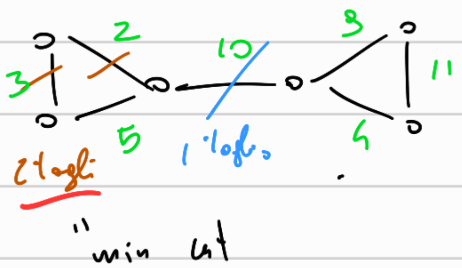
significa che al decimo è sicuro non 'probabile'

Taglio minimo (min cut)

Dato un grafo (connesso e senza pesi)

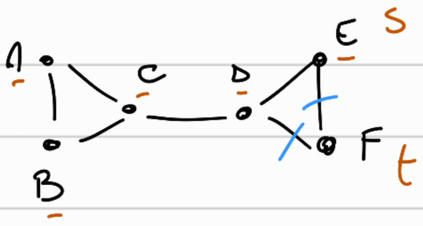
Ad ogni taglio di un singolo arco costa 1 : trova il min n° di tagli che rompe la connessione (ovvero abbia più grafi connessi a partire dall'originale)





con i pesi (positivi) ogni taglio è moltiplicato per il costo dell'arco

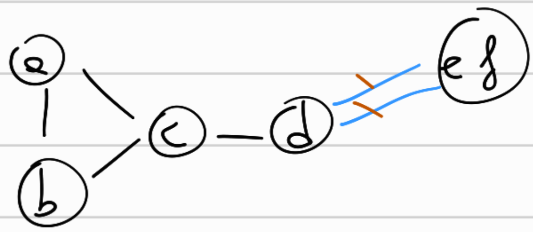
Stoir e Wagner hanno inventato un algoritmo deterministico



- pesco un vertice a caso, es. a
- costruisco un grafo collegando ad a il nodo con più archi (pesi nel caso di pesi)
  → a, b, c, d, e
- rimane e come ultimo nodo S che separo da t (nodo rimasto)
- n° tagli per separare il grafo costruito da t? 2

(abcde, f) 2

due grafi   tot tagli x separare

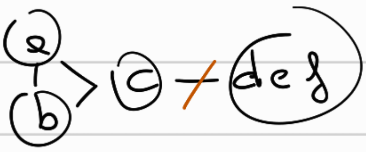


- nel nuovo grafo pongo 2 archi, in quanto d collegato sia e che F

ciclo le operazioni sopra

d = s

(abcd, ef) 2



c collegato solo a d, 1 arco (riduzione rispetto a prima)

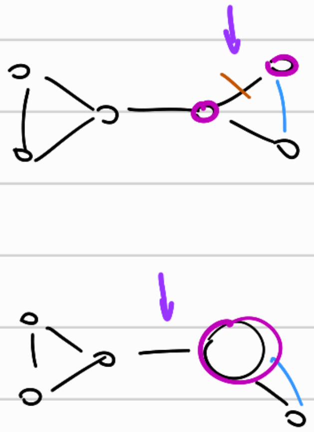
(a b c, def) 1

Togliendo questo • ho il n° tot. di tagli minimi (cioè 1, meno di 1 non posso avere) e mi fermo

Algoritmo randomizzato

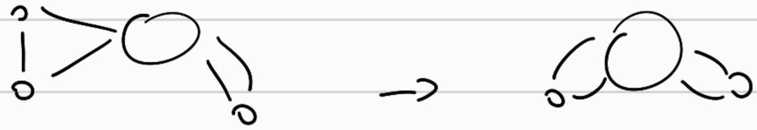
MC MIN CUT   INPUT G : multigrafo (→ più grafi) connesso di n vertici

OUTPUT S : insieme di archi di G candidato a essere il TAGLIO minimo



for $i = n \dots 2$

- campionare un arco da G con prob uniforme (u,v)
- taglio l'arco (o TUTTI se multigrafo) e unisco i vertici u e v in (u,v) di quell'arco reindirizzando gli archi che incidevano (blu) su u e v da su (uv)
- $i-1 \leftarrow i$



taglio minimo = 2 è sbagliato

infatti l'output si propone su un G candidato, non corretto

Si cerca dunque di prelevare solo gli archi che partecipano al taglio minimo

il grado rimane invariato

TAGLIO MINIMO è k (minimo grado)

n vertici

quanti sono almeno gli archi : $\frac{nk}{2}$

k archi di $\frac{nk}{2}$ non devono essere toccati per l'algoritmo

p che vengano toccati k $\leq \dfrac{k}{\frac{nk}{2}} = \dfrac{2}{n} \rightarrow p \leq \dfrac{2}{n}$

$p(E_1) \geq 1 - \dfrac{2}{n}$ $\quad$ p non ho pescato un arco di k

$\downarrow$

1° estrazione

dopo avrò $n-1$ vertici

$$p(E_2 \mid E_1) \geq 1 - \frac{2}{n-1}$$

quindi data una sequenza S di nodi $|S| = k$

$$\prod_{i=1}^{n-2} \left(1 - \frac{2}{n-i+1}\right) = \prod \frac{n-i-1}{n-i+1} = \text{togli minimi}$$

$$\rightarrow \frac{(n-2)(n-3)\ldots 3\,2\,1}{n(n-1)(n-2)\ldots 3} = \frac{2}{n(n-1)}$$

p almeno con questa p trovo il MINCUT

$$\downarrow$$

$$p > \frac{2}{n^2}$$