ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

FOGLIO DI ESERCIZI 9

Esercizio 1. Sia $A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ e si consideri la seguente associazione

$$a * b = \text{resto della divisione di } ab \text{ per } 18.$$

Stabilire se $*$ è un'operazione binaria sull'insieme A.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti operazioni binarie sull'insieme A indicato, stabilire se è associativa, commutativa, se esiste un elemento neutro e in tal caso se ogni elemento di A ha inverso.

(1) $A = \mathbb{Q}$, $x * y = x - y$;
(2) $A = \mathbb{Z}$, $x * y = \max\{x, y\}$;
(3) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(a,b) * (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$;
(4) $A = \mathbb{N}$, $x * y = x + y + xy$;
(5) $A = \mathbb{Z}$, $x * y = x^2 + y^2$;
(6) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(a,b) * (c,d) = (ac, bd)$;
(7) $A = \mathbb{R}$, $x * y = x(x + y)$;
(8) $A = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $X * Y = X \cap Y$;
(9) $A = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $X * Y = X \cup Y \setminus X \cap Y = \{x \in X \cup Y \mid x \notin X \cap Y\}$.

Esercizio 3. Sia A un insieme di s elementi. Quante sono le operazioni binarie su A?

Esercizio 4. Si determini quali delle seguenti operazioni su $\mathbb{R}$ sono associative e quali commutative:

$$x * y = \min\{x, y\}; \quad x * y = \frac{x + y}{|xy| + 1}; \quad x * y = e^{x+y}.$$

Esercizio 5. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ con la seguente operazione:

$$f * g = h, \text{ dove } h \text{ è definita da } h(n) = f(n) + g(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(1) Si dimostri che $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un monoide commutativo.
(2) Qual è l'elemento neutro?
(3) Quali elementi di $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ hanno inverso? $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un gruppo?

Esercizio 6. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ con la seguente operazione:

$$f * g = h, \text{ dove } h \text{ è definita da } h(n) = f(n) \cdot g(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(1) Si dimostri che $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un monoide commutativo.
(2) Qual è l'elemento neutro?

(3) Quali elementi di $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ hanno inverso? $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un gruppo?

Esercizio 7. Sia G un gruppo. Provare che $(aba^{-1})^n = ab^na^{-1}$ $\forall\, a,b \in G$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 8. Sia $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ la funzione data da $f(n,m) = (n-m, m+2)$. Stabilire se f ha inversa sinistra, se ha inversa destra e se è invertibile.

Esercizio 9. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione data da $f(x) = x^2$.

(1) Stabilire se f è invertibile.
(2) Determinare tre distinte inverse sinistre per f.
(3) Esistono inverse destre per f?

Esercizio 10. (1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x) = x^3$. Stabilire se f ha inversa sinistra, se ha inversa destra e se è invertibile.
(2) Sia $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione data da $g(x) = x^3$. Stabilire se g ha inversa sinistra, se ha inversa destra e se è invertibile.

Esercizio 11. Per ciascuno dei seguenti monoidi si determini, se esiste, l'inverso dell'elemento x assegnato:

(1) $(\mathbb{N}, +, 0)$, $x = 2$;
(2) $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $x = 2$;
(3) $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, $x = 2$;
(4) $(\mathbb{Z}_{15}, +, \overline{0})$, $x = \overline{2}$;
(5) $(\mathbb{Z}_{15}, \cdot, \overline{1})$, $x = \overline{2}$;
(6) $(\mathbb{Z}_6, \cdot, \overline{1})$, $x = \overline{2}$;
(7) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \circ, \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $x(n) = 2$ $\forall n \in \mathbb{Z}$;
(8) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \circ, \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $x(n) = n+2$ $\forall n \in \mathbb{Z}$;
(9) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \circ, \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $x(n) = 2n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$;