Esercizio 1

mercoledì 14 ottobre 2020 08:10

Esercizio 1. Siano dati i tre insiemi:

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < x < 1\}$, $C = \{x \in B : x < 0\}$.

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$0 \in A$; $-1 \notin B$; $0 \in A \cup C$; $-1 \in A \cap B$;

$C \subseteq A$; $\{-2\} \in B \cap C$; $\{-2\} \in \mathscr{P}(B)$; $\mathscr{P}(\{-2\}) \subseteq \mathscr{P}(A)$;

$(1,1) \in A \times B$; $\{(-1,0)\} \subseteq B \times A$; $(A \times B) \cap (B \times A) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

Si ricorda che $\mathscr{P}(-)$ denota l'insieme delle parti di un insieme.

$\{0,1,2,3,4,5,6\}$ $\{-2,-1,0\}$ $\{-2,-1\}$

$A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{-2,-1,0\}$

$C = \{-2,-1\}$

1) $0 \in A$ T ✓

2) $-1 \notin B$ $\perp$ ✓

3) $0 \in A \cup C$ T ✓ $(0 \in A) \vee (0 \in C)$ $A \cup C \iff (0 \in A) \cup (0 \in C)$

4) $C \subseteq A$ ~~T~~ $\perp$ ✗ $-2 \in C$ ma $-2 \notin A$ $C \subseteq A \iff \{\forall x \in C \,.\, x \in A\}$

5) $\{-2\} \in B \cap C$ ~~T~~ $\perp$ ✗ insieme errore di notazione

$-2 \in B \cap C$

MA $\{-2\} \cancel{\in} B \cap C$ $\{-2\}$ e' un insieme non un elemento

$\to \{-2\} \subseteq B \cap C$ $(-2 = (-2) \neq \{-2\})$

oppure $\{-2\} \in \mathscr{P}(B)$

6) $\{-2\} \in \mathscr{P}(B)$ T ✓ $\mathscr{P}(\{-2\}) = \{\emptyset, \{-2\}\}$

7) $\mathscr{P}(\{-2\}) \subseteq \mathscr{P}(A)$ $\perp$ ~~T~~ ✗ $\{-2\} \not\subseteq A$ $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\} \dots A\}$

8) $(1,1) \in A \times B$ $\perp$ ✓ $1 \notin B$

9) $\{(-1,0)\} \subseteq B \times A$ T ✓ anche uguale

altri esempi:

$\{(-1,0)\} \subsetneq B \times A$ T ✓ contenuto stretto

$(-1,0) \subseteq B \times A$ $\perp$ ✓ $\to$ $(-1,0)$ e' un elemento, non un sottoinsieme

$(-1,0) \in B \times A$ T ✓ un elemento

10) $(A \times B) \cap (B \times A) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ~~$\perp$~~ T ✗

rimane $\{(a,b)\}$ $\to$ ovvero $\{(0,0)\}$

11) $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$ $\perp$ ✓ $\to$ infatti da $\cap$ ottengo $\{(0,0)\}$ (vedi sopra)

12) $-1 \in A \cap B$ $\perp$ ✓ $\to$ $A \cap B = (-1 \in A) \wedge (-1 \in B)$

F V

F

Esercizio 2

mercoledì 14 ottobre 2020 08:22

Esercizio 2. Quanti elementi ha l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 = x\}$? E' vero che $A \subseteq \mathbb{N}$? E' vero che $A \subseteq \mathbb{Z}$? E' vero che $A \subseteq \mathbb{Q}$? Determinare $A \cap \mathbb{N}$.

↪ Risolvo l'eq. $\rightarrow$ $x = 0 \lor x = 1 \lor x = -1$

- A contiene 3 elementi: 0, 1, -1
- No, $A \not\subseteq \mathbb{N}$ poiche' contiene -1
- Si, in quanto A contiene solo n interi
- sì, A contiene solo numeri razionali
- $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$

✓

Esercizio 3

mercoledì 14 ottobre 2020 08:32

Esercizio 3. Stabilire in ciascun caso se gli insiemi A e B sono uguali:

(1) $A = \{(t, t+1) : t \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{(t-6, t-7) : t \in \mathbb{Z}\}$;
(2) $A = \{(t, t+1) : t \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{(t-6, t-7) : t \in \mathbb{N}\}$;
(3) $A = \{(t, t+1) : t \in \mathbb{R}\}$ e $B = \mathbb{R}^2$;
(4) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari}\}$, $B = \{n^2 : n \in \mathbb{N},\ n \text{ è dispari}\}$.

magg. uden

$\{(-6,-7), \ldots, (0,-1), (1,0)\}$

$\{(0,1), (1,2) \ldots\}$ (minore, maggiore)

1) $A = \{(t, t+1) : t \in \mathbb{Z}\} = \{\{t, t+1\}, \{t\} : t \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{(t-6, t-7) : t \in \mathbb{Z}\} = \{\{t-6, t-7\}, \{t-6\} : t \in \mathbb{Z}\}$

diverso!

Principio di estensionalità: osservo che $(A \subseteq B)$ e $(B \subseteq A)$ allora uguali

gli elementi t sono ritrovabili in entrambi gli insiemi

$A \neq B$ $\quad (0,1) \in A$ perché $(0,1) = (t, t+1)$ per $t = 0 \in \mathbb{Z}$

$(0,1) \in B$ perché $(0,1) = (t-6, t-7)$ per $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 0 = t-6 \\ 1 = t-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 8 \end{cases}$$

non posso avere due valori di t contemporaneamente

2) Osservo che $B \supseteq A$ ma $A \not\supseteq B$ $\rightarrow$ no uguali

che n negativi

3) Osservo che $B \subseteq A$ ma $A \not\subseteq B$ $\rightarrow$ no uguali

4) Osservo che $B \subseteq A$ ma $A \not\subseteq B$ $\rightarrow$ no uguali

non tutti i n dispari sono quadrati

Esercizio 4. Siano A, B, C tre insiemi tali che $A \cap B = C$, $B \cap C = A$ e $C \cap A = B$. Provare che $A = B = C$.

Hp: $A \cap B = C$, $B \cap C = A$, $C \cap A = B$

Th: $A = B = C$

Segue:

$A \cap B = \{x \in E : (x \in A) \wedge (x \in B)\} = C$

$B \cap C = \{x \in E : (x \in B) \wedge (x \in C)\} = A$

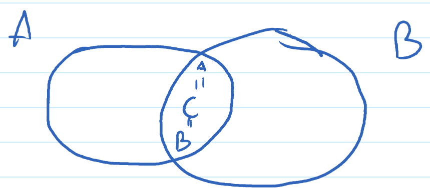
$C \cap A = \{x \in E : (x \in C) \wedge (x \in A)\} = B$

Se $A \cap B = C$ significa che $(x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)$ anche $(C \subseteq A \cap B) \wedge (A \cap B \subseteq C)$

Se $B \cap C = A$ significa che $(x \in B) \wedge (x \in C) \wedge (x \in A)$ $(A \subseteq B \cap C) \wedge (B \cap C \subseteq A)$

Se $C \cap A = B$ significa che $(x \in C) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)$ $(B \subseteq C \cap A) \wedge (C \cap A \subseteq B)$

Allora ogni x e' contenuta in ciascuno dei 3 insiemi contemporaneamente.
Se in ogni caso tutti gli insiemi contengono lo stesso elemento per x generico allora A, B, C hanno gli stessi elementi, ovvero $A = B = C$. Inoltre, poiche' uguali, gli insiemi si contengono a vicenda.



$x_1 \in (A \wedge B)$, $\in C$

x_1 e' A e B e C

stessa cosa per x_2 e x_3

Graficamente:

ne segue che $A = B = C$ (devono essere lo stesso insieme)

Esercizio 5

giovedì 15 ottobre 2020 10:10

Esercizio 5. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 4 = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x^2 = -4x\}$. Provare che A è un sottoinsieme proprio di B, cioè $A \subset B$ e $A \neq B$ $\iff A \subsetneq B$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 4 = 0\}$

$\rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ soluzione dell'eq.

$B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x^2 + 4x = 0\}$

$\rightarrow x(x^2 + 3x + 4) = 0$

$x = 0 \rightarrow x = 0$ soluzione

$x^2 + 3x + 4 = 0$ $\nexists x$

dunque A è un insieme vuoto $\emptyset$

- Per definizione: $\emptyset \subset B$ ✓
- Inoltre, poiché $A \not\supset B$ in quanto B ha un elemento che A non ha

non viene rispettato il principio di estensionalità

$A \neq B$ ✓

vuoto lo ha $x = 0$ (un elemento)

(posso verificare se 0 soddisfa le equazioni)

[insieme vuoto = insieme proprio]

Esercizio 6

giovedì 15 ottobre 2020 10:27

Esercizio 6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \{x \in \mathbb{N} : x > n\}$. Determinare l'insieme $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

ciò significa che $x \geq n+1$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ nessun elemento è comune a tutti, in quanto proseguendo nei numeri naturali, ciascun numero di "partenza" contenuto in A_n non è contenuto in A_{n+1}, ovvero:

$n = 1$ $n = 2$

$A_0 = \{1,2,3,4 \dots\}$ $A_1 = \{2,3,4,5 \dots\}$ $A_{1+1=2} = \{3,4,5,6 \dots\}$ no 2

un elemento è perso

$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \dots$

Ci sarà sempre un numero in più non comune a tutti gli insiemi.

$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n > m \quad A_n \subseteq A_m$

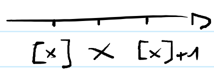
per definizione $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{N} : x \in A_n\ \forall n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} : x > n\ \forall n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$

"$\supseteq$" ✓

"$\subseteq$" per assurdo supponiamo $\exists x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow x \in \mathbb{N},\ x > n\ \forall n \in \mathbb{N}$

prendo $n = [x]+1 \in \mathbb{N}$

$n_0 > x$ MA $x > n\ \forall n \in \mathbb{N}$ ↯ ASSURDO, è una contraddizione



Esercizio 7

giovedì 15 ottobre 2020 10:36

Esercizio 7. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ sia $A_i = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 2i\}$. Determinare gli insiemi $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ e $B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

$i=0 \quad i=1 \quad i=2 \quad i=3 \ldots$

$\{n \neq 0, 2, 4, 6 \ldots\}$

- $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z} \mid n = 2i+1\}$ ovvero tutti i numeri dispari

e' tutto $\mathbb{Z}$!

- $B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z} \mid n \neq 2i\}$

$A_0 = \{n \in \mathbb{Z} ; n \neq 0\} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$A_1 = \{n \in \mathbb{Z} ; n \neq 2\} = \mathbb{Z} \setminus \{2\}$

$A_2 = \{n \in \mathbb{Z} ; n \neq 4\} = \mathbb{Z} \setminus \{4\}$

$A_3 = \{n \in \mathbb{Z} ; n \neq 6\} = \mathbb{Z} \setminus \{6\}$ $\qquad A_i = \mathbb{Z} \setminus \{2i\}$

...

- $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \stackrel{?}{=} \mathbb{Z}$

$\quad = \{x \in \mathbb{Z} ; \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_{2i}\}$

"$\subseteq$" ✓

"$\supseteq$" Sia $x \in \mathbb{Z}$, $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$?

esiste $i \in \mathbb{N}$ t.c. $x \in A_{2i}$ Si, basta scegliere $i \neq x/2$

$\underline{A_i = \mathbb{Z} \setminus \{2i\} \ni x}$ allora $\bigcup$ di tutti gli A_i e' $\mathbb{Z}$

- $B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \stackrel{?}{=} \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Z}, x > 0, x \text{ DISPARI}\}$

NEGATIVI

"$\supseteq$". $C \subseteq B$ sia $x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$ TESI $x \in B \iff x \in A_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

$A_i = \mathbb{Z} \setminus \{2i\}$ $i \geq 0$ $\quad \Rightarrow x \neq 2i \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in A_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

$A_i = \mathbb{R} \setminus \{2i\} \quad i \geq 0$

$x < 0 \quad \Bigg\| \Rightarrow \underset{0}{\overset{\wedge}{x \neq 2i}} \quad \underset{0}{\overset{\forall i}{\forall i}} \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

• $D \subseteq B$ sia $x \in D$, $x > 0$, x DISPARI TESI $x \in B \Leftrightarrow x \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$A_i = \mathbb{Z} \setminus \{2i\}$ $\quad 0 \leq 2i$ pari

$0 \leq x$ DISPARI $\Bigg\| \Rightarrow x \neq 2i \rightarrow x \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \quad C \cup D \subseteq B$

"$\subseteq$" Sia $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \rightarrow x \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$x \in \mathbb{Z} \rightarrow x < 0 \rightarrow x \in C$ ✓

$\searrow x \geq 0 \rightarrow x$ non può essere pari

perché se x è pari $x = 2i$ $i \in \mathbb{N}$, ma allora

$x \notin A_i = \mathbb{R} \setminus \{2i\}$ ↯ ASSURDO (contraddizione)

$\Rightarrow x$ DISPARI $\rightarrow x \in D$ $\square$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \underbrace{\mathbb{R}^-}_{C} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n = 2k+1, \ k \in \mathbb{N}\}$$

Esercizio 8

giovedì 15 ottobre 2020 11:07

Esercizio 8. Siano $A = \{1,2\}$ e $B = \{a,b\}$. Elencare tutti gli elementi di ciascuno dei seguenti insiemi:

$$A \times B,\ B \times A,\ A^2,\ B^3,\ \mathscr{P}(A \times B).$$

- $A \times B := \{(1,a), (2,b) : 1,2 \in A .\ a,b \in B\}$
  $= \{ \{1,a\}, \{1\}, \{2,b\}, \{2\} \}$

- $B \times A := \{(a,1), (b,2) : a,b \in B .\ 1,2 \in A\}$
  $= \{\{1,a\}, \{a\}, \{2,b\}\{b\}\}$

- $A^2 = A \times A := \{ (1,1), (2,2) : 1,2 \in A \}$
  $= \{ \{1,1\}, \{1\}, \{2,2\} \{2\} \}$

  $\rightarrow \{x,y,z\}$ ho 2 elementi

- $B^3 = B \times B \times B := \{ (a,a,a), (b,b,b), (a,a,b), (a,b,b), (a,b,a), (b,a,a)$
  $(b,a,b), (b,b,a) \}$

- $\mathscr{P}(A \times B) = \{ \emptyset, \{(1,a)\} \{2,a\} \}\{(2,b)\}, \{(1,b)\} \}, \{ (1,a), (1,b) \}, \{ (1,a), (2,a) \} \ldots$
  $\ldots\ A \times B \}$

Esercizio 1.1. Sia X un insieme non vuoto. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?

1. $\varnothing \subset X$.
2. $\varnothing \in X$.
3. $\{\varnothing\} \subset X$.
4. $\varnothing \subset \mathbb{P}(X)$.
5. $\varnothing \in \mathbb{P}(X)$.
6. $\{\varnothing\} \subset \mathbb{P}(X)$.
7. $\mathbb{P}(\varnothing) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

$\rightarrow$ $X \neq \varnothing$

N.B. Non e' specificato che l'insieme contiene l'insieme vuoto

(es. nel caso $X = \{1, 2, 3 \ldots n\}$)
$\hookrightarrow$ non contiene $\varnothing$!

1) $\varnothing \subset X$ VERO (vedi N.B.)

2) $\varnothing \in X$ FALSA, errore di notazione, $\in$ serve per collegare elementi a insiemi

3) $\{\varnothing\} \subset X$ VERO $\rightarrow$ RICORDA: $P(\varnothing) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$\varnothing$ ↓ INSIEME

$\{\varnothing\}$ ↓ ELEMENTI DELL'INSIEME

$\mathbb{P}$ e' l'insieme degli insiemi (non di elementi) contenuti in un insieme.

Es 2 TUT

giovedì 22 ottobre 2020 11:24

Esercizio 1.2. Determinare i seguenti insiemi e disegnarli.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 5 \geq 0\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) \leq 0\}, \quad D = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 8 = 0\},$$
$$E = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 6x + 5 \geq 0\}, \quad F = \{x \in \mathbb{Q} : (x-\pi)(x-\frac{1}{2}) = 0\},$$
$$G = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 8\}, \quad H = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq [x] < 3\},$$
$$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 4\}, \quad L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$
$$M = I\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 4\}, \quad N = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- $A : \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \}$

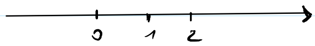
guardo l'insieme da dove vengono pescati gli elementi

Lo guardo gli x che soddisfano l'eq.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad \begin{matrix} 2 = x_1 \\ 1 = x_2 \end{matrix}$$

Dunque $A = \{1, 2\}$ → unici elementi contenuti

Rappresento l'insieme:



- $D : \{ x \in \mathbb{Z} : x^2 - 8 = 0 \}$

1ª CONDIZIONE

2ª CONDIZIONE

Lo $x = \pm 2\sqrt{2}$ queste soluzioni soddisfano la richiesta $x \in \mathbb{Z}$? No, ho una radice.

Dunque non ho x intere che soddisfano l'equazione : $D = \emptyset$ INSIEME VUOTO

→ Scrivere $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che corrisponde $A \times B$ che non contiene solo $a \in A$ e $b \in B$ ma le coppie (a, b)

$L : \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}$

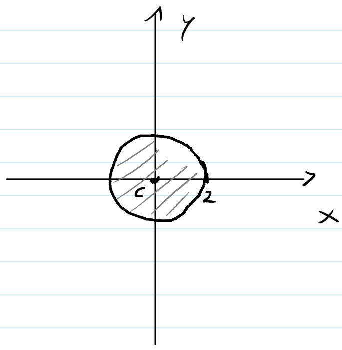
COPPIA DI NUMERI che individuano un punto nel piano cartesiano

Lo $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$(x_0, y_0) =$ centro $= (0, 0)$

$r = 2$

Dunque $\mathbb{R}^2$ IMPONE di considerare una coppia (notazione)



Devo prendere i punti all'interno della mia circonferenza

Fosse stato > 4 avrei preso i punti fuori dalla mia circonferenza ($>$ (raggio $= 2$))

Es 3 TUT

giovedì 22 ottobre 2020 11:40

Esercizio 1.3. Siano $X = [0,5)$, $Y = [2,4]$, $Z = [1,3]$ e $W = (3,5)$ intervalli in $\mathbb{R}$. Determinare gli insiemi :

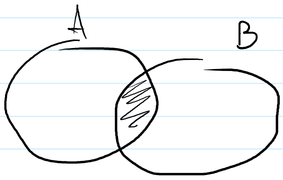
$$Y \cup Z,\ Z \cap W,\ Y \smallsetminus W,\ (X \cap Y) \cup Z,\ X \smallsetminus (Z \cup W).$$

Determinare e disegnare in $\mathbb{R}^2$ l'insieme $X \times W$.

- Intersezione $A, B \rightarrow A \cap B$

$a \in A,\ b \in B \rightarrow x \in (A \cap B)$

$x \in A \underset{\text{AND}}{\wedge} x \in B$

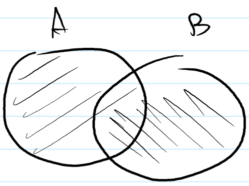


x appartiene a entrambi

- Unione $A, B \rightarrow A \cup B$

$a \in A,\ b \in B \rightarrow x \in (A \cup B)$

$x \in A \underset{\text{OPPURE}}{\vee} x \in B$

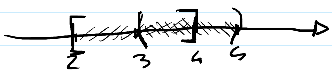


x appartiene ad almeno uno dei due insiemi

- Sottrazione $A \smallsetminus B$ sottraggo ad A gli elementi di B appartenenti anche ad A.

$A = [2,4]^{\leftarrow \text{COMPRESO}}$

$B = (3,5)^{\leftarrow \text{ESCLUSO}}$



$A \smallsetminus B = [2,3]$ INCLUSO

il 3 non appartenere a B, dunque 3 è ancora di A

Es 5 TUT

giovedì 22 ottobre 2020 11:47

Esercizio 1.5. Siano X, Y e Z tre insiemi. Provare che

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z).$$

Provare o trovare un controesempio all'affermazione

$$X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z).$$

• $\underbrace{X \times (Y \cup Z)}_{\mathrm{I}} = \underbrace{(X \times Y) \cup (X \times Z)}_{\mathrm{II}}$

Riscrivo:

I) $X \times (Y \cup Z)$, da questo ottengo una coppia data dal prodotto cartesiano

$\to (a,b) \in (X \times (Y \cup Z))$

per definizione $a \in X$ e $b \in (Y \cup Z)$ $\to b \in Y$ $\vee$ oppure $\to b \in Z$ sono arrivato in fondo

allora:

II) $\alpha \in X \times Y \to a \in X, b \in Y$

$\vee$ dove $\alpha = (a,b)$ una coppia, la coppia sta in almeno uno dei prodotti cartesiani

$\alpha \in X \times Z \to \cancel{a \in X}, b \in Z$

già considerato, mi basta che stia in uno

Dunque $\underline{a \in X, b \in Y} \vee \underline{b \in Z}$ come detto per I, allora è vera l'uguaglianza