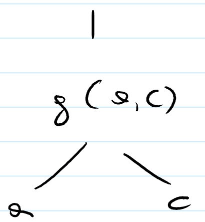
## Esercizi

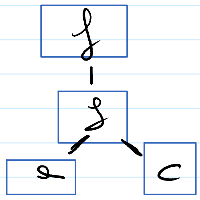
Siano $f, g, h$ simboli funzionali di arità rispettive $1, 2, 3$, e siano $a, b, c$ simboli di costante. Stabilire se le seguenti stringhe sono termini, usando l'algoritmo dell'albero sintattico. In caso affermativo, determinarne l'altezza.

- $f(g(a, c))$
- $h(f(x), g(f(a), y), z)$
- $h(a, b, x)$
- $g(h(x, x, x), f(x, x))$
- $f(f(f(g(g(a, c), g(x, y)))))$
- $h(f(a), g(f(a), a))$

1) $f(g(a, c))$ ✓



posso semplificare:

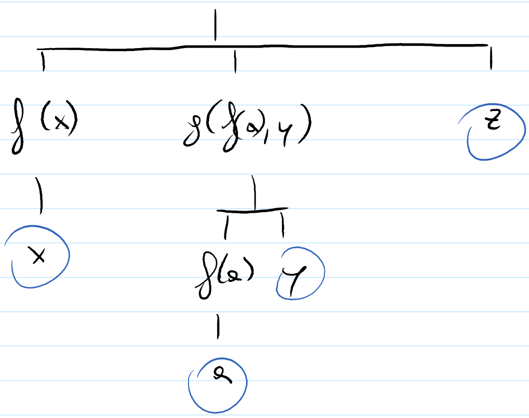


termine dato

$ht(t) = 2$

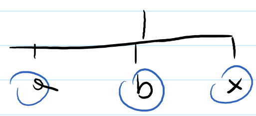
Sono giunto ai nodi dunque la stringa è un TERMINE

2) $h(f(x), g(f(a), y), z)$ ✓



$ht(t) = 3$

3) $h(a, b, x)$ ✓



$ht(t) = 1$

4) $g(h(x, x, x), f(x, x))$

4) $g(h(x,x,x), f(x,x))$

↳ è stato detto che $f$ si applica a un elemento per volta (unario)

quindi ERRORE, no TERMINE

5) $f(f(f(g(g(a,c), g(x,y))))))$ ✓

1 2 3 4 5 4 5 4 3 2 1 0

N.B. $f$ si applica a un blocco unico (perché unario)

$ht(t) = 5$

0 $f(f(f(g(g(a,c), g(x,y))))))$

1 $f(f(g(g(a,c), g(x,y))))$

2 $f(g(g(a,c), g(x,y)))$

3 $g(g(a,c), g(x,y))$

4 $g(a,c)$ $g(x,y)$

5 $a$ $c$ $x$ $y$

6) $h(f(a), g(f(a), a))$

1 2 3?

ERRORE

$h$ è un termine di arità 3, dunque manca un sotto-termine, allora $h$ non è un termine!

## Es_Slide9_11a

martedì 20 ottobre 2020 10:14

### Esercizi

Si consideri il linguaggio $L = \{+, \cdot, 1\}$.

1 • Scrivere i polinomi rappresentati seguenti termini:
  - 1 • $+(+(+(x, x), y), \cdot(z, z))$
  - 2 • $+(+(\cdot(x, \cdot(x, x)), +(x, x)), +(+(1, 1), 1))$
  - 3 • $+(+(\cdot(+(1, 1), x), x), +(1, 1))$

2 • Scrivere dei termini che rappresentino i seguenti polinomi:
  - 1 • $x + y + 3$
  - 2 • $x + y^2 + 3z$
  - 3 • $z^2 + 2x$

Se faccio riferimento ai polinomi, allora sto usando le regole algebriche.

1.1) $+(+(+(x,x), y), \cdot(z,z))$

$( \quad ) + ( \quad )$

$( (()+()) + ( ) ) + (() \cdot ())$

$(x+x+y) + (z \cdot z)$

$\rightarrow z^2 + 2x + y$

1_2) $+(+(\cdot(x, \cdot(x,x)), +(x,x)), +(+(1,1),1))$

$(x \cdot x \cdot x) + (x+x) + (1+1+1)$

$x^3 + 2x + 3$

1_3) $+(+(\cdot(+(1,1), x), x), +(1,1))$

$(((1+1) \cdot x) + x) + (1+1)$

$2x + x + 2$

$3x + 2$

2_1) $x + y + 3$

$+(+(x,y), 3)$

Posso usare i simboli del linguaggio

N.B.

2_2) $x + y^2 + 3z$

2-2) $x + y^2 + 3z$

N.B. Posso usare i simboli del linguaggio dato, ovvero +, ·, 1, dunque devo costruire il 3.

$+(+(x, \cdot(y,y)), \cdot(\underbrace{+(+(1,1),1)}, z))$

scrivibile anche come: $+(+(z,z), z) = 3z$

2-3) $z^2 + 2x$

$+(\cdot(z,z), \cdot(+(1,1), x))$

# Es_Slide4_11b

martedì 20 ottobre 2020 10:17

Sia $L = \{P, f, c\}$, dove

- $P$ è simbolo relazionale binario
- $f$ è simbolo funzionale unario
- $c$ è simbolo di costante

Verificare se le seguenti stringhe sono formule atomiche: → secondo le regole fornite

1. $(P(f(x), c))$
2. $(=(f(f(x)), f(c)))$

1) $\overset{1}{(}P\overset{2}{(}f\overset{3}{(}x\overset{2}{)},c\overset{1}{)}\overset{0}{)}$ ✓

- parentesi inizio, fine, terza, penultima. ✓
- P simbolo relazionale ✓
- arità rispettata ✓
- una virgola rilevante (non in mezzo a coppie di parentesi) ✓ (x, x) → non rilevante
- $f(x)$ e $c$ termini ✓

2) $\overset{1}{(}=\overset{2}{(}f\overset{3}{(}f\overset{4}{(}x\overset{3}{)}\overset{2}{)}, f\overset{3}{(}c\overset{2}{)}\overset{1}{)}\overset{0}{)}$ ✓

- parentesi prima, ultima, terza e penultima ✓
- = simbolo relazionale ✓
- arità rispettata ✓
- una virgola rilevante ✓
- $f(x)$, $f(f(x))$, $f(c)$, $c$ termini ✓

Dato un linguaggio $L = \{ \cdot, 1 \}$

Es $\cdot(x, 1) = x$ vera o falsa?

$x \cdot 1 = x$

Dipende come interpretiamo i simboli del linguaggio ($\cdot$ e $1$)

Nell'interpretazione standard $\cdot$ è moltiplicazione e $1$ = "uno"

Dunque la formula non è sempre vera, dipende dal contesto. In contesto algebrico è vera.

Es $\mathcal{L} = \{ C, S, U \}$

$C, S$ simboli relazionali unari

$U$ " " binario

$C(x)$ è un computer

$S(x)$ è uno studente

$U(x,y)$ x usa y

" C'è un computer che non è usato da alcuno studente " Traduci con il linguaggio L

$\forall x \, \forall y \, (\underbrace{C(x) \wedge S(y)}) \to \neg U(x,y)$

si applica solo a

$\forall x \, \forall y \, [(C(x) \wedge S(y))] \to \neg U(y,x)]$

Per tutti i computer e studenti, nessuno usa i computer

$\exists x \, (C(x) \wedge \neg \exists y (S(y) \wedge U(y,x)))$

= ( esiste un computer che uno studente non usa (non è detto che tutti i computer sono usati)

$\exists y \, \forall x \, [C(y) \wedge (S(x) \to \neg U(x,y))]$

$\exists y \; \forall x \; [\, C(y) \wedge (S(x) \to \neg U(x,y))\,]$

Infatti

(1) $\exists x \; [\, \neg \exists y \; (S(y) \wedge U(x,y))\,]$

$\hookrightarrow = \forall y \; \neg(S(y) \wedge U(y,x)) = \forall y \; (\neg S(y) \vee \neg U(y,x))$

(2) $\exists x \; [\, \forall y \; (S(y) \to \neg U(y,x))\,]$

TALE CHE è "implicito"

$\hookrightarrow$ ma $\neg P \vee Q \equiv P \to Q$

$\neg \exists x \; ( U((S(x), C(y))))$ NON va bene

NON SONO TERMINI (sono affermazioni date dai simboli relazionali)

Dire (Pino è bello) = (Pino è buono)

BINARIO $\to$ il verbo "usare"

SONO AFFERMAZIONI (non posso dire = né dire "usa")

TERMINI

$t_1$ usa $t_2$ ✓

Dire:

$f$ (Pino è bello) $\longleftarrow$ $F(x)$ : lo zio di $x$

NO! $\to$ non c'è lo zio di un'affermazione, ma di un individuo

$L = \{B, F\}$ se $B$ è un'affermazione (costruita dal simbolo relazionale)

$\cancel{F(B(x))}$

Es $\mathcal{L} = \{C, S, U\}$

$C, S$ simboli relazionali unari

$U$ " " binario

$C(x)$ e' un computer

$S(x)$ e' uno studente

$U(x,y)$ x usa y

- "C'e' un computer usato da almeno due studenti"

$\to \exists x \left( C(x) \land \exists y \exists z \left( y \neq z \land S(y) \land S(z) \land U(y,x) \land U(z,x) \right) \right)$

$\neg(y = z)$

se non sono uguali, sono almeno due

stesso computer

$\to \exists x \; \forall y \forall z \left[ \left( C(x) \land S(y) \land S(z) \right) \to \left( U(y,x) \land U(z,x) \right) \right]$

$\land \; y \neq x$

e' sbagliato perche' ammetterei che l'antecedente esiste sempre (in un'implicazione non e' sempre così)

Se sostituisco con $\land$: significa che tutti gli studenti usano almeno due computer

Es "Gli studenti che usano un computer ne usano almeno due."

$\exists y \exists z \; ( y \neq z \land C(y) \land C(z) \land U(x,y) \land U(x,z) )$

" x usa almeno due computer "

var quantificata

$\forall x \left[ \underbrace{S(x)}_{\text{x e' studente}} \land \underbrace{\exists w \left( C(w) \land U(x,w) \right)}_{\text{x usa almeno un computer}} \right]$

# Es_slide45_12b

martedì 27 ottobre 2020 10:09

## Esercizio

Sia $L = \{P, Q, f, a, c\}$ un linguaggio del prim'ordine dove:

- $P$ è simbolo di predicato binario
- $Q$ è simbolo di predicato unario
- $f$ è un simbolo funzionale unario
- $a, c$ sono simboli di costante

1. Per ciascuna occorrenza di variabile nelle seguenti formule, stabilire se si tratta di un'occorrenza libera o vincolata
2. Per ciascuna formula, elencare le sue variabili libere
3. Stabilire quali formule sono enunciati

$\varphi_1 : \forall z P(z, z) \land \exists x \forall y (P(x, y) \to P(z, y))$
$\varphi_2 : \exists x (\exists y\ f(x) = y \lor (f(y) = x \leftrightarrow P(x, y)))$
$\varphi_3 : P(c, c) \land Q(a)$
$\varphi_4 : \forall z \exists y P(y, x) \lor P(c, f(x))$
$\varphi_5 : P(z, x) \to \exists x \forall y P(z, x)$

- $\varphi_1$ : $\forall \underline{z}\, P(\underline{z},\underline{z}) \land \exists \underline{x} \forall \underline{y} (P(\underline{x},\underline{y}) \to P(\underline{z},\underline{y}))$

  $FV(\varphi_1) = \{z\} \neq \emptyset$ NO ENUNCIATO ✓

- $\varphi_2$ : vale solo per l'adiacente

  $\exists \underline{x} (\exists \underline{y}\ f(\underline{x}) = \underline{y} \lor (f(\underline{y}) = \underline{x} \leftrightarrow P(\underline{x},\underline{y})))$

  $FV(\varphi_2) = \{y\} \neq 0$ NO ENUNCIATO ✓

- $\varphi_3$ : $P(c,c) \land Q(a)$ ho solo costanti

  $\to$ no var vincolate né libere ; $FV(\varphi_3) = \emptyset$ <u>ENUNCIATO</u> ✓

- $\varphi_4$ : $\forall \underline{z} \exists \underline{y} P(\underline{y},\underline{x}) \lor P(c, f(\underline{x}))$

  $FV(\varphi_4) = \{x\} \neq \emptyset$ NO ENUNCIATO ✓

  N.B. $\forall z$ non dice nulla (non ho z nella formula che segue)

- $\varphi_5$ : $P(\underline{z},\underline{x}) \to \exists \underline{x} \forall \underline{y} P(\underline{z},\underline{x})$ ✓

  $FV(\varphi_5) = \{x, z\} \neq \emptyset$ NO ENUNCIATO

  stessa cosa vale per $\forall y$

Esercizi in lezione - 2

martedì 27 ottobre 2020 14:06

- Se in una formula $\varphi$ trovo due (o più volte) una variabile $x$ ad occorrenze libere:

$FV(\varphi) = \{x, x\}$ ma è più corretto dire $= \{x\}$ (ripeto una volta sola)

- $x^2 + 3x = 5$ $FV(\varphi) = \{x\}$

**Es esame** 10/09/2020

$L = \{C, A, p, g\}$

C simbolo relazionale unario
A " " binario
p, g simboli di costante

Considera le interpretazioni:

$C(x)$ : x va al cinema
$A(x, y)$ : x è amico di y
p : Pino
g : Gino

Formalizza:

1) Pino va al cinema, ma Gino no. $C(p) \land \neg C(g)$

2) Pino e Gino sono gli unici che vanno al cinema $C(p) \land C(g) \land \forall x\, \cancel{(\neg C(x))}$

Pino e Gino vanno al cinema

"nessuno va al cinema" = neanche Pino e Gino, CONTRADDIZIONE

① $C(p) \land C(g) \land \forall x\, (C(x) \to x = p \lor x = g)$

e se un individuo va al cinema è o Pino o Gino = sono gli unici

N.B. Affermare solo $\underbrace{\qquad\qquad}$, significa che chiunque va al cinema o è Pino o Gino. Ma non è detto che Pino e Gino ci siano andati.

② $C(p) \land C(g) \land \neg\exists x\, (x \neq p \land x \neq g \land C(x))$

non esiste un individuo che va al cinema che non sia Pino e Gino = sono gli unici

**Es esame** 23/01/2013

$L = \{S, A\}$

S simbolo relazionale unario
A " " binario

$S(x)$ : x è uno studente
$A(x, y)$ : x è amico di y.

Formalizza:

1) Ogni studente è amico di qualche studente.

in particolare

- $\forall x \exists y\, (S(x) \land S(y) \land A(x, y)) \models \forall x\, S(x)$ NO in particolare

- $\forall x \exists y ( S(x) \land S(y) \land A(x,y)) \models \forall x\, S(x)$ NO

sto affermando che ogni essere umano e' uno studente

x e' amico di qualche studente

- $\forall x\ ( S(x) \rightarrow \exists y (S(y) \land A(x,y)))$ N.B. le parentesi fanno si che x e y arrivino sino ad $A(x,y)$.

2) Ogni studente è amico di qualche altro studente.

- $\forall x\ (S(x) \rightarrow \exists y ( S(y) \land (\neg(x=y)) \land A(x,y)))$

3) C'e' uno studente che e' amico di ogni altro studente.

(ALMENO UNO)

$$\exists x\ (S(x)) \land \forall y( (S(y) \land x \neq y) \rightarrow A(x,y)))$$

le parentesi non necessarie (gerarchie connettivi)

N.B.

$A(x, S(y))$ NO

"x e' amico di y e' uno studente"

non e' corretta (neanche pronunciandola)

# Es_Slide1_13a

martedì 3 novembre 2020 07:54

Reintrodurre le parentesi nelle seguenti formule, dove $P$ è un simbolo di relazione unario, $R$ è un simbolo di relazione binario, $f$ è un simbolo di funzione binario, $g$ è un simbolo di funzione unario e $a, b, c$ sono simboli di costante.
Per ognuna delle formule, risonoscere le occorrenze libere e vincolate delle variabili.

} LINGUAGGIO USATO

- $\varphi_1 : \exists x P(x) \rightarrow \forall z R(z,y) \wedge g(x) = f(x,y)$
- $\varphi_2 : P(x) \wedge \forall z \forall y R(g(z), f(z,y)) \leftrightarrow \neg \forall w (P(w) \wedge P(c))$
- $\varphi_3 : \forall x \exists y R(x,x) \rightarrow \forall z f(z) = a$
- $\varphi_4 : \forall x (\exists y R(x,x) \rightarrow \forall z f(z) = a)$
- $\varphi_5 : \forall x \exists y (R(x,x) \rightarrow \forall z f(z) = a)$
- $\varphi_6 : \neg P(x) \wedge \forall y R(y,z)$
- $\varphi_7 : \neg (P(x) \wedge \forall y R(y,z))$

$= (g(x), f(x,y))$

- $\varphi_1 : ((\exists x(P(x))) \rightarrow ((\forall z(R(z,y))) \wedge (g(x) = f(x,y))))$ su tutto

QUANTIF. CONN PRINC. PRIORITÀ $\wedge > \rightarrow$

non ha quantificatori su y e su x (qui)

VARIABILI:
= VINCOLATE (quantificate)
= LIBERE

$FV(\varphi_1) = \{x, y\}$

- $\varphi_2 : (((P(x)) \wedge (\forall z(\forall y(R(g(z), f(z,y)))))) \leftrightarrow (\neg(\forall w((P(w)) \wedge (P(c))))))$ $FV(\varphi_2) = \{x\}$

c COSTANTE, non variabile!

- $\varphi_3 : ((\forall x(\exists y(R(x,x)))) \rightarrow (\forall z(f(z) = a)))$ $FV(\varphi_3) = \emptyset$
- $\varphi_4 : (\forall x((\exists y(R(x,x))) \rightarrow (\forall z(f(z) = a))))$ $FV(\varphi_4) = \emptyset$
- $\varphi_5 : (\forall x(\exists y((R(x,x)) \rightarrow (\forall z(f(z) = a)))))$ $FV(\varphi_5) = \emptyset$
- $\varphi_6 : ((\neg(P(x))) \wedge (\forall y(R(y,z))))$ $FV(\varphi_6) = \{x, z\}$
- $\varphi_7 : (\neg((P(x)) \wedge (\forall y(R(y,z)))))$ $FV(\varphi_7) = \{x, z\}$

Individuare la costante logica principale nelle formule seguenti:

- $\varphi_1 : \exists x(\forall y R(x,y) \land \neg(x=y)) \lor \forall z \neg P(z)$
- $\varphi_2 : \neg\exists x(P(x) \to R(x,x))$
- $\varphi_3 : \forall z P(z) \land \neg R(z,z) \land \exists z \neg P(z)$
- $\varphi_4 : \forall x \neg(\exists y R(x,y) \to P(x))$

→ sono i simboli più esterni delle parentesi e con priorità più bassa (applicato x ultimo)

- $\varphi_1$ : $\underbrace{\exists x (\forall y R(x,y) \land \neg(x=y))}_{\text{APPLICATO PRIMA} \ ①} \lor \underbrace{\forall z \neg P(z)}_{\text{APPLICATO PRIMA} \ ②}$

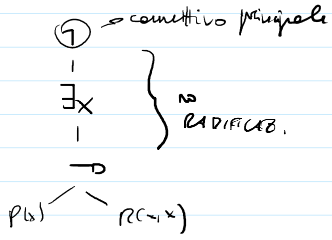
(c'è ¬ e ∀, con priorità maggiore)

(costante logica)
∨ e' il connettivo principale (OR)
① e ② sono le sottoformule principali

- $\varphi_2$ : $\neg\exists x (P(x) \to R(x,x))$

dentro le parentesi

l' albero è lineare, senza informazioni sui connettivi




- $\varphi_3$ : $\forall z P(z) \land \neg R(z,z) \land \exists z \neg P(z)$

OPR. PIU' ALTA

la 1ª occorrenza di ∧ viene applicata per prima secondo la convenzione sulla costruzione delle formule da sx a dx, dunque la 2ª occorrenza e' l'ultima applicata = connettivo princ.

- $\varphi_4$ : $\forall x \neg(\underbrace{\exists y R(x,y) \to P(x)}_{\text{SOTTOFORMULA}})$

∀x è la costante logica principale

# Es_Slide6_13a

martedì 3 novembre 2020 08:34

Costruire l'albero sintattico della formula

$$(\exists x(\forall y R(x, y) \wedge x \neq y)) \vee (\forall z \neg P(z))$$

$\exists x(\forall y R(x,y) \wedge x \neq y)$ $\qquad$ $\forall z \neg P(z)$

sottoformula

$(\forall y (R(x,y))) \wedge (x \neq y)$ $\qquad$ $\neg P(z)$

↳ no formula atomica

$\neg(=(x,y))$

↳ priorità > $\wedge$

$P(z)$

$\forall y R(x,y)$ $\qquad$ $x \neq y$

$R(x,y)$ $\qquad$ $x = y$

Es_Slide7_13a

martedì 3 novembre 2020 08:50

Per ciascuna delle formule seguenti:

- Determinare l'albero sintattico e l'altezza
- Stabilire per ogni occorrenza di variabile se si tratta di una variabile libera o vincolata.
- Determinare le variabili libere

Individuare quali sono gli enunciati.

$\varphi_1 : \exists x P(x) \to \forall z(f(z) = x \vee \neg R(x,z))$

$\varphi_2 : \forall w \exists y(P(x) \wedge R(x,z) \leftrightarrow \exists z \neg \forall v R(z,v))$

$\varphi_3 : \neg \exists x(R(x,x) \vee \forall y P(c) \to R(c,c) \wedge P(x))$

$\varphi_4 : \exists x \forall z R(x,z) \to \forall z \exists x R(x,z)$

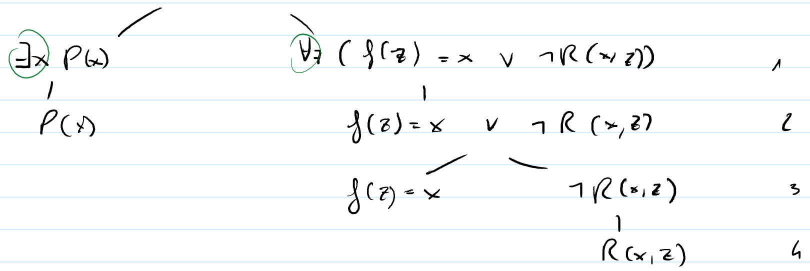
$\varphi_5 : P(c) \wedge \forall x(P(x) \to P(f(x))) \to \forall x P(x)$

NO ENUNCIATO

- $\varphi_1 : \exists x P(x) \to \forall z (f(z) = x \vee \neg R(x,z))$

$FV(\varphi_1) = \{x\}$

• = vincolate




$ht(\varphi_1) = 4$

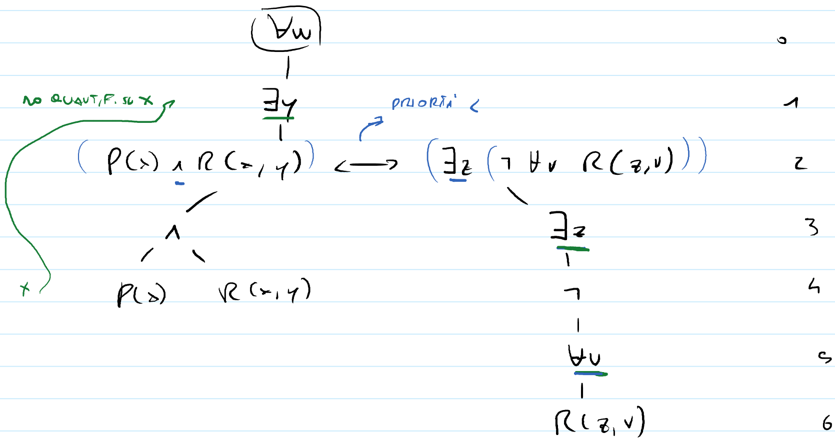
quantificano su variabili che non compaiono: la formula è equivalente alla stessa senza $\forall w$ e $\exists y$

NO ENUNCIATO

- $\varphi_2 : \forall w \exists y (P(x) \wedge R(x,z) \leftrightarrow \exists z \neg \forall v R(z,v))$

$FV(\varphi_2) = \{x, z\}$

• VINCOLATE

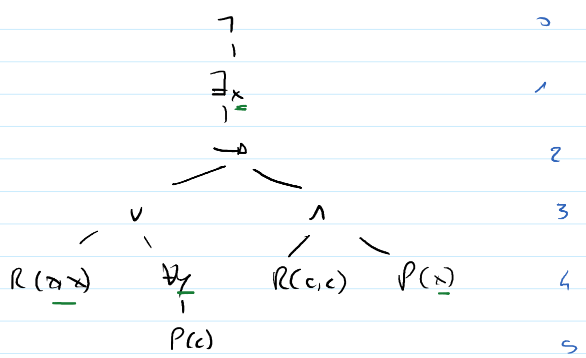



$ht(\varphi_2) = 6$

- $\varphi_3 : \neg \exists x (R(x,x) \vee \forall y P(c) \to R(c,c) \wedge P(x))$

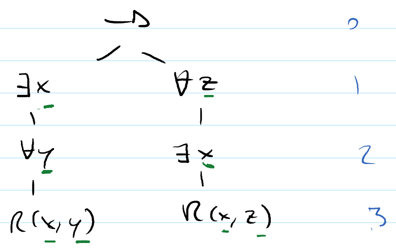
$FV(\varphi_3) = \emptyset$

ENUNCIATO




$ht(\varphi_3) = 5$

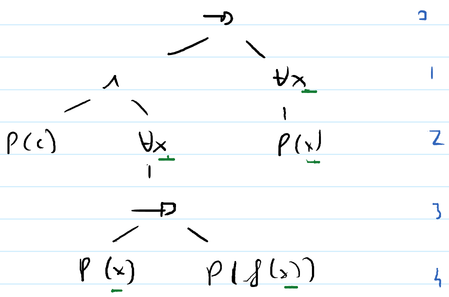
- $\varphi_4: \exists x \, \forall y \, R(x,y) \to \forall z \, \exists x \, R(x,z)$




$ht(\varphi_4): 3$

$FV(\varphi_4) = \emptyset$ ENUNCIATO

- $\varphi_5: (P(c) \land \forall x (P(x) \to P(f(x)))) \to (\forall x \, P(x))$




$ht(\varphi_5): 4$

$FV(\varphi_5) = \emptyset$ ENUNCIATO

- Riferimento esame 12-3-2019

$L = \{D, M, P, S\}$

$D, M, P$ : simboli rel. unari
$S$ : " " binario

L-struttura:

$\mathcal{A} = (A, D^{\mathcal{A}}, M^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}})$

$D^{\mathcal{A}} \subseteq A$, $M^{\mathcal{A}} \subseteq A$, $P^{\mathcal{A}} \subseteq A$, $S^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$ } sottoinsiemi

Interpreto:

$D(x)$ : x e' un dentista
$M(x)$ : x e' mediocre
$P(x)$ : x e' un paziente
$S(x,y)$ : x spaventa y

} Sto definendo una struttura per L

dove l'universo (non esplicitato) lo scelgo formalmente:
A e' l'insieme degli umani

dunque $D^{\mathcal{A}} = \{a \in A \mid a$ e' un dentista$\}$
$S^{\mathcal{A}} = \{(a,b) \in A \times A \mid a$ spaventa $b\}$

1) I dentisti mediocri spaventano i (propri) pazienti.

$\forall x$ ( x è dentista mediocre $\to$ x spaventa i pazienti )

- $\forall x\, (D(x) \wedge M(x) \to \forall y (P(y) \to S(x,y)))$

se y paziente, viene spaventato

$FV(\varphi_1) = \{x\}$ $\quad FV(\varphi_2) = \{x\}$

infatti dipendono da chi e' x

- $\forall x \forall y\, (\cancel{x \neq y} \wedge D(x) \wedge M(x) \wedge P(y) \to S(x,y))$

↳ se il dentista e' un paziente, puo' spaventare se stesso

2) Qualche paziente e' spaventato dai dentisti mediocri

- $\exists(x)\, [\forall y\, (P(x) \wedge D(y) \wedge M(y) \to S(y,x))]$ NO

↳ significa che preso x che non soddisfa P, ho comunque una formulazione vera.

secondo l'implicaz. $0 \to 1$ per qualche x fra gli individui (non specificati)

- $\forall x\, (D(x) \to M(x) \to \exists y\, (P(y) \to S(x,y)))$ → "ogni dentista mediocre spaventa almeno un paziente" NO

- $\exists x\, (P(x) \wedge \underbrace{x \text{ è spaventato da tutti i dentisti mediocri}})$

↳ $\exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (D(y) \wedge M(y) \to S(y,x)))$ → esiste almeno un paziente spaventato da tutti i dentisti

il paziente e' espresso prima!

il dentista spaventa x

3) I dentisti che spaventano i pazienti sono mediocri

- $\forall x \forall y\, (D(x) \wedge P(y) \wedge S(x,y) \to M(x))$
- $\forall x\, ((D(x) \wedge \underbrace{\forall y (P(y) \to S(x,y))}_{x \text{ spaventa i pazienti}}) \to M(x))$

**Es** Scrivi strutture di $L = \{f\}$: $f$ simb. funz. binario

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, -)$ $\qquad$ $\mathcal{B} = (\mathbb{N}^+, F^{\mathcal{B}})$ $\qquad$ $f: \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$, $(n, m) \to n^m$ $\qquad$ con $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ strettamente positivi

Data la formula $\varphi: \forall x \forall y \forall z \ \underbrace{f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))}_{f \text{ è l'operazione associativa}}$

$\mathcal{A} \models \varphi$? No

↳ Perché es. $(3-5)-4 \neq 3-(5-4) \to -6 \neq 2$ la sottrazione non è associativa

$\mathcal{B} \models \varphi$? no $\qquad$ es. $(2^2)^3 \neq 2^{(2^3)} \to 2^8 \neq 2^6$

per $n=2$, $m=3$

**Es** Trova un enunciato $\varphi$ vero per $\mathcal{A}$ e falso per $\mathcal{B}$ descritti sopra

• $\varphi: \exists x \exists y \ f(x,y) < 0$ $\qquad$ Non è una formula in $L$, perché $<$ e $0$ non sono presenti in $L$.

FALSO

• $\varphi: \forall z \exists x \exists y \ f(x,y) = z$ $\qquad$ $f^{\mathcal{A}}: A \times A \to A$ e stesso per $f^{\mathcal{B}}$ per $\mathcal{B}$

$(x,y) \to z$

$a - 0 = a$ $\qquad$ $\mathcal{A} \models \varphi$

$a^1 = a$ $\qquad$ $\mathcal{B} \models \varphi$

"$f^{\mathcal{A}}$ è una funzione surgettiva"

• $\varphi: \forall x \forall y \exists z \ f(x,y) = z$ $\qquad$ "$f$ è una funzione (ovunque è definita)"

• $\varphi: \forall z \exists x \exists y \ (z \neq x \wedge f(x,y) = z)$ $\qquad$ $a - b = c$ $\qquad$ $a^b = c$

$\mathcal{A}$ vero $\qquad$ $\mathcal{B}$ FALSO

- $\mathcal{A} \models \varphi$: Per ogni $c \in \mathbb{Z}$ esistono due numeri interi $a$ e $b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq c$ e $a - b = c$.

Es. $a = c+1$, $b = 1$ $\qquad$ $c+1-1 = c$ ✓ $\qquad$ ogni numero può essere descritto come differenza di altri due numeri

- $\mathcal{B} \not\models \varphi$: cioè $\mathcal{B} \models \neg\varphi$, cioè $\mathcal{B} \models \exists z \forall x \forall y \ (\underbrace{\neg(z \neq x)}_{x = z} \vee f(x,y) \neq z)$

non tutti gli $n \in \mathbb{N}^+$ possono non tutti gli $n \in \mathbb{N}^+$ possono essere descritti da una potenza

$x = z$

quindi $\mathcal{B} \not\models \exists z \forall x \forall y \, (\underbrace{z \neq x \to f(x,y) \neq z}_{})$

↳ secondo: $A \to B \equiv \neg A \vee B$

secondo $\varphi$ ( $x^y = 1$ IMPOSSIBILE $\to x^y \neq 1$

se $x \neq 1$ — dunque non posso ottenere 1 dalle potenze se non per $x = 1$

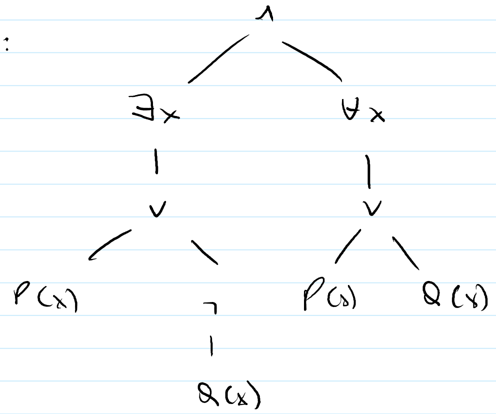
**Es**

Riferimento esame 8/01/2020

$$\varphi: \underbrace{\exists x\, (P(x) \vee \neg Q(x))}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{\forall x\, (P(x) \vee Q(x))}_{\varphi_2}$$

P, Q simboli relaz. unario (lo capisco da come è strutturata la formula)

- Albero sintattico:




- $\varphi$ è soddisfacibile? Ovvero si riesce a costruire una struttura $\mathcal{A}$ in cui $\varphi$ è vero? $\mathcal{A}$ t.c. $\mathcal{A} \models \varphi$

si riesce a costruire $\mathcal{B}$ t.c. $\mathcal{B} \not\models \varphi$?

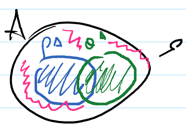
$\to \mathcal{A} = (A, P^a, Q^a)$

$P^a \subseteq A$, $Q^a \subseteq A$

$\varphi_1$: "c'è un elemento per cui o vale P o non vale Q" $a \in P^a$ o $a \notin Q^a$

$\varphi_2$: "per ogni $a \in A$, $a \in P^a$ o $a \in Q^a$"

↳ $\varphi_2$: $A = P^a \cup Q^a$ (disegno errato, non apparterrebbe a nulla)




se fossero stati simb. funz., non è detto che $\subseteq A$

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \overset{\text{sottoinsiemi}}{\underset{P^a}{\mathbb{N}}}, \underset{Q^a}{\mathbb{N}}) \models \varphi$$ (vale per tutti gli elementi) ✓

$$\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}) \not\models \varphi$$ (non è vero che $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$) ✓

Altrimenti posso proseguire:

$A = \{a\}$ $\quad$ $p$ è vero ($a$ unico elemento e sta sia in $P^a$ sia $Q^a$)

$Q^a = \emptyset$

$P^a = \{a\}$

Es $\quad L = \{A, C, M\}$ $\quad$ $A, C$: simb. rel. unario $\quad$ Formalizza.

$M$: simb. rel. binario

$A(x)$: $x$ abbaia

$C(x)$: $x$ è un cane

$M(x,y)$: $x$ morde $y$

si intende per tutti i cani, detto un qualsiasi cane

- Cane che abbaia non morde

non ho una rel. unaria, uso la binaria (introduco $y$)

$\forall x ( C(x) \wedge A(x) \rightarrow \forall y (\neg M(x,y)))$

posso portarlo fuori

$= \neg \exists y M(x,y)$ non esiste nessuno morso

- Cane non morde cane

$\forall x \forall y ( C(x) \wedge C(y) \wedge \neg M(x,y))$ $\equiv$ $\forall x \forall y \neg ( C(x) \wedge C(y) \wedge M(x,y))$

$\equiv \neg \exists x \exists y ( C(x) \wedge C(y) \wedge M(x,y))$

- Nessuno morde un cane che non morde nessuno

$\neg \exists x \exists y ( C(y) \wedge M(x,y) \wedge \neg \exists z M(y,z))$

non esiste $z$ che viene morso da $y$ / tale che $y$ morde $z$

$\equiv \forall x \forall y ( C(x) \wedge \neg M(x,y) \rightarrow \forall z \neg M(z,x) ]$

N.B. $\quad \neg \forall \quad \vee \quad \forall$

se lo porto fuori diventa $\exists$ e viceversa (poiché ho una $\neg$)

$\forall y\ P(y) \rightarrow Q$ $\rightarrow$ Se tutti gli $y$ soddisfano $P$ allora soddisfano $Q$

$\forall y\ (P(y) \rightarrow Q)$

("se tutti cantano), si fa rumore"

Tutte le persone che soddisfano $P$ allora soddisfano $Q$

"tutti quelli che cantano fanno anche rumore"

N.B. $\quad \forall y\ P(y) \wedge \forall y\ Q(y) \equiv \forall y [P(y) \wedge Q(y)]$

$\forall y\ P(y) \vee \forall y\ Q(y) \not\equiv \forall y [P(y) \vee Q(y)]$ $\quad$ viceversa con $\exists$ (posso portarlo fuori con OR ma non con AND

$\exists y\ P(y) \wedge \exists y\ Q(y) \not\equiv \exists y [P(y) \wedge Q(y)]$

$$\exists y\, P(y) \land \exists y\, Q(y) \equiv \exists y\, [P(y) \lor Q(y)]$$

↳ soddisfano almeno uno, entrambe va bene lo stesso!

# Esercizi in lezione - 5

martedì 10 novembre 2020 14:15

- $\varphi(x,y) : y + x = 3$ $\qquad L = \{+, 3\}$

$\gamma(y) : \exists x\ \varphi(x,y)$ $\qquad \mathcal{A} = (\mathbb{N}, \underbrace{+, 3}_{})$

$\exists x\ y + x = 3$ $\qquad \sigma : y/2$ $\qquad$ INTERPRETAZIONE STANDARD

$\mathcal{A} \stackrel{?}{\models} \gamma[y/2]$ $\quad$ si sse esiste $b \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathcal{A} \models (\underbrace{y + x = 3}_{\varphi})[y/2, x/b]$

allora e' vera $\quad$ se $\quad \mathcal{A} \models (y + x = 3)[y/2, x/1]$

perché $\quad 2 + 1 = 3$

N.B. $+$ e $3$ sono simboli che interpretano l'addizione e il numero 3.

Nel caso in cui $\sigma : y/5$ non ho alcun $b$ da assegnare a $x$ che soddisfi la formula $\varphi$

- Rif. esame 2/07/2013

$\mathcal{L} = \{f, g\}$

- $f$ simbolo funzionale binario
- $g$ " " unario

$\varphi : \forall x \exists y\ f(x,x) = g(y)$

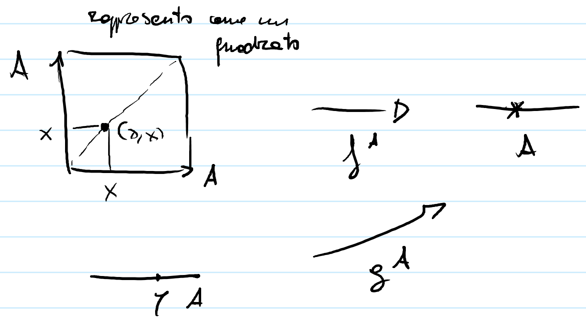
$\psi : \exists x \forall y\ f(x,y) = g(y)$

Trovare $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ t.c. $\mathcal{A}$ soddisfi uno solo dei due

$f^{\mathcal{A}} : A \times A \to A$

$g^{\mathcal{A}} : A \to A$

Provo con dei disegni




Cerco $\mathcal{A} \not\models \varphi$, $\mathcal{A} \models \psi$ (scelgo)

e ragiono della forma "grafica"

oppure provo con dei tentativi

$\to \mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \cdot, g^{\mathcal{A}})$ $\qquad g^{\mathcal{A}}(a) = a + 1$ $\qquad$ esempio va bene anche $g^{\mathcal{A}}(a) = a^2$
ma non $g^{\mathcal{A}}(a) = a$ (esiste $x = 1$)

$\mathcal{A} \stackrel{?}{\models} \varphi$ $\qquad \varphi$: Dato $y$ (intero) esiste $x$ t.c. $x^2 = y + 1$ $\qquad$ vero $\quad (y = x^2 - 1)$

$A \models \varphi$ $\quad \varphi$: Dato $x$ (intero) esiste $y$ t.c. $x^2 = y + 1$ <u>vero</u> $(y = x^2 - 1)$

$A \overset{?}{\models} \psi$ $\quad \psi$: E' vero che esiste un $x$ t.c. per ogni $y$, $x \cdot y = y + 1$

$x = 1$ per ogni $y$ : $1 \cdot y = y + 1$ ? <u>NO</u>

$x = 0$ " : $0 \cdot y = y + 1$ ? NO

$x = 2$ " : $2 \cdot y = y + 1$ ? NO

Se ci fosse un tale $x$ per ogni $y \neq 0$, si avrebbe $x = \frac{y+1}{y}$ $\rightarrow$ non ho valori costanti

# Es_Slide11_16a

giovedì 12 novembre 2020 10:14

Sia $L = \{P, f, c\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove

- $P$ è simbolo relazionale binario
- $f$ è simbolo funzionale binario
- $c$ è simbolo di costante

Si considerino:

l'enunciato $\sigma : \forall x \forall y (P(c, y) \wedge f(x, x) = y \rightarrow P(x, y))$

Siano $L, \sigma$ come nell'esempio precedente. Stabilire se $\sigma$ è vero in ciascuna delle seguenti $L$-strutture:

- $(\mathbb{Z}, <, +, -1)$ $\mathcal{A}$
- $(\mathbb{Q}, \leq, \cdot, 0)$ $\mathcal{B}$
- $(\mathbb{R}, \geq, \cdot, 0)$ $\mathcal{C}$
- $(\mathbb{Z}, \geq, +, 2)$ $\mathcal{D}$

1) $(\mathbb{Z}, <, +, -1)$
$P \; f \; c$

Per ogni $x$ e $y \in \mathbb{Z}$, se $(-1 < y$ e $x + x = y)$ allora $x < y$

ovvero $n, m \in \mathbb{Z}$, se $m$ è maggiore di $-1$ ed è uguale a due volte $n$ allora $m$ è anche maggiore di $n$

$(m > -1) \wedge (m = 2n) \rightarrow m > n$

numeri positivi e $m = 0$

se $m = 0$: $0 > -1$ ✓ $\wedge$ $0 = 2n$ per $n = 0$ ✓ $\rightarrow 0 > 0$ ✗!

implicazione non valida

$\mathcal{A} \not\models \sigma$

perché $\exists (x, y)$ che rende falsa l'implicazione (e quindi l'enunciato)

✓

2) $(\mathbb{Q}, \leq, \cdot, 0)$
$P \; f \; c$

Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$, se $0 < y$ e $x \cdot x = y$ allora $x \leq y$

$\rightarrow$ per ogni $n, m \in \mathbb{Q}$, se $m$ è maggiore di zero ed è uguale ed è un quadrato (ovvero $= n^2$), allora $m \geq n$

se prendo $m = \frac{1}{4} > 0$ e $x^2 = \frac{1}{4}$ ovvero $x = \frac{1}{2}$

ma quindi $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}$ no!

$\mathcal{B} \not\models \sigma$

IMPLICAZIONE FALSA

✓

3) $(\mathbb{R}, \geq, \cdot, 0)$

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, se $0 \geq y$ e $x \cdot x = y$ allora $x \geq y$

$\rightarrow$ per ogni $n, m \in \mathbb{R}$, se $m$ è minore o uguale a zero ed è un quadrato perfetto $(n^2)$ allora è minore di $n$

es. se $m < 0$ non può essere risultato di un quadrato

dunque verifico per $m = 0$ (unico possibile secondo le ipotesi)

$0 \leq 0$ ✓ $0 = n^2$ sì per $n = 0$ allora $0 \geq 0$ ✓

$\underline{\mathcal{C} \models \sigma}$

✓

$\mathcal{C} \models \mathcal{G}$

4) $(\mathbb{Z}, \geq, +, 2)$ Per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$, se $2 \geq y$ e $x + x = y$ allora $x \geq y$

$\rightarrow$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$, se $m$ e' minore di 2 ed e' il doppio di $n$ allora $n$ e' maggiore di $m$

es. preso $m = 2 \leq 2$ ✓ $\quad 2 = n + n$ per $n = 1$ allora $1 \geq 2$ No!

es preso $m = -2 \leq 2$ ✓ $\quad -2 = -1 + (-1)$ per $n = -1$ allora $-1 \geq -2$ si

Non vale per tutti gli $n$ e $m$ che rispettano le ipotesi. $\mathcal{D} \not\models \mathcal{G}$