Calculus 1 **2020/21**

Lezione 1: 22/02/21

☡. Queste note devono servire come guida per lo studio: non sono un libro di testo (ve ne sono di ottimi da consultare in biblioteca), non sono una trascrizione di quanto detto a lezione (gli appunti sono essenziali), mancano i commenti ed i disegni (indispensabili per la comprensione), vi sono alcuni argomenti che non sono stati trattati a lezione (ma che possono servire di approfondimento).
Il simbolo ☡ indica punti che richiedono particolare attenzione.

Il template LaTeX è stato adattato da un modello della UC Berkeley EECS Department.

Notazione.

$\varnothing$	insieme vuoto
$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri relativi
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mid$ o :	tale che
$\Rightarrow$	implica che
$\Longleftrightarrow$	se e solo se, equivale
$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste
$\nexists$	non esiste

Intervalli. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leqslant b$,

intervallo limitato aperto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
intervallo limitato chiuso	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
intervallo limitato	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
intervallo limitato	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
intervallo illimitato aperto	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
intervallo illimitato chiuso	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$
intervallo illimitato aperto	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
intervallo illimitato chiuso	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
intervallo illimitato	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Il punto a (o $-\infty$) è detto estremo sinistro e b (o $+\infty$) è detto estremo sinistro dell'intervallo.

☡. Se $a = b$, $[a, b] = \{a\}$ e $(a, b) = (a, b] = [a, b) = \varnothing$.

Relazioni tra insiemi. Dati due insiemi A e B

- inclusione: $A \subseteq B$ oppure $B \supseteq A$, se
$$\text{per ogni } x \in A \text{ allora } x \in B$$
(si dice che A è un sottoinsieme di B o, equivalentemente, che A è contenuto in B oppure che B contiene A)
- inclusione propria: $A \subsetneq B$ oppure $B \supsetneq A$, se
$$\begin{cases} \text{per ogni } x \in A \text{ allora } x \in B \\ \text{esiste } x \in B \text{ tale che } x \notin A \end{cases}$$
(si dice che A è un sottoinsieme proprio di B)

Operazioni tra insiemi. Dati due sotto-insiemi $A, B \subseteq X$

- unione
$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$
- intersezione
$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B\};$$
- complementare
$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$$
- differenza insiemistica
$$A \backslash B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$
- prodotto cartesiano
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$
dove (x, y) denota la coppia ordinata.

. Se $x, y \in \mathbb{R}$, la stessa notazione (x, y) è usata per indicare sia la coppia ordinata sia l'intervallo aperto di estremi x e y.

Numeri reali. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, sono definite le operazioni di

- somma $x + y$
- prodotto xy
- relazione d'ordine $x < y$

che soddisfano le seguenti proprietà

(a) associatività: per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z \qquad (xy)z = x(yz) = xyz$$
(b) commutatività: per ogni $x, y \in \mathbb{R}$
$$x + y = y + x \qquad xy = yx$$
(c) proprietà distributiva: per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x + y)z = xz + yz.$$
(d) esistenza elemento neutro: per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$x + 0 = 0 + x = x \qquad x1 = 1x = x$$
(e) esistenza inverso:

i) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico elemento $-x \in \mathbb{R}$, detto opposto, tale che $x + (-x) = 0$

ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ esiste un unico elemento $1/x \in \mathbb{R}$, detto reciproco, tale che $x(1/x) = 1$

(f) relazione d'ordine totale: per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ una ed una sola delle seguenti relazioni è vera

$$\begin{cases} x < y \\ x = y \\ y < x \end{cases}$$

(g) proprietà transitiva: dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ e } y < z \text{ allora } x < z$$

(h) compatibilità con la somma, dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ allora } x + z < y + z$$

(i) compatibilità con il prodotto, dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ e } z > 0 \text{ allora } xz < yz$$

Funzioni. Una funzione (reale di variabile reale) $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni elemento $x \in A$ un unico valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$. L'insieme A è detto dominio di f e denotato anche con $\operatorname{dom} f$.

Grafico. Si chiama grafico della funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ il sottoinsieme del piano cartesiano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in A\}$$

Immagine. Si chiama immagine della funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ l'insieme di valori effettivamente presi dalla funzione e si denota con $\operatorname{Im} f$ o $f(A)$

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

Nota. Le rette parallele all'asse delle ascisse (asse x) hanno equazione $y = y_0$, mentre quelle parallele all'asse delle ordinate (asse y) hanno equazione $x = x_0$.

Osservazione. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione.

a) Il grafico di f è una *curva* nel piano caratterizzata dal fatto che, dato $x_0 \in A$, la retta $x = x_0$, parallela all'asse delle ordinate, interseca il grafico di f in un solo punto P_0 le cui coordinate sono $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

b) Un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sta sul grafico di f se e solo se $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0)$.

c) Il dominio A della funzione è un sottoinsieme dell'asse delle ascisse ed è la proiezione del grafico della funzione su tale asse.

d) L'immagine $\operatorname{Im} f$ è un sottoinsieme dell'asse delle ordinate, costituito da tutti i valori $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in **almeno** un punto, cioé $\operatorname{Im} f$ è la proiezione del grafico della funzione sull'asse delle ordinate.

e) Dato $y_0 \in \mathbb{R}$, l'equazione $y_0 = f(x)$ equivale a trovare le intersezioni tra il grafico $y = f(x)$ e la retta $y = y_0$ parallela all'asse delle ascisse

$$y_0 = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = f(x) \\ y = y_0 \end{cases} .$$

. Vi sono curve del piano che non sono il grafico di alcuna funzione.

Funzioni iniettive, surgettive e bigettive. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è detta

a) iniettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette al più una soluzione;
b) surgettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette almeno una soluzione;
c) bigettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette una ed una sola soluzione.

Osservazione. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$,

a) f è iniettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in al più un punto;
b) f è surgettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in almeno un punto;
c) f è bigettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in esattamente un punto.

Proposizione 1.1. *Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$,*

a) f è iniettiva se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$ si ha $x_1 = x_2$;
b) f è iniettiva se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$;
c) f è surgettiva se e solo se l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$, cioè $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$;
d) f è bigettiva se e solo se f è sia iniettiva sia surgettiva.

Calculus 1 **2020/21**

Lezione 2: 26/02/21

Funzioni monotone. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è detta

a) crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, allora
$$f(x_1) < f(x_2);$$
b) decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, allora
$$f(x_1) > f(x_2);$$
c) debolmente crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \leqslant x_2$, allora
$$f(x_1) \leqslant f(x_2);$$
d) debolmente decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \leqslant x_2$, allora
$$f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Una funzione crescente o decrescente è detta monotona.

Operazioni tra funzioni.
Date due funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$

a) la somma/differenza $f \pm g$ è definita da
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad x \in \operatorname{dom}(f \pm g) = A \cap B$$
b) il prodotto fg è definito da
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad x \in \operatorname{dom}(fg) = A \cap B =$$
c) il rapporto f/g è definito da
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in \operatorname{dom}\frac{f}{g} = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

La funzione
$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad x \in \operatorname{dom}\frac{1}{f} = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$$
è detta reciproco di f ed è anche denotata con $f(x)^{-1}$.

Funzione composta.
Date due funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ la funzione
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in A,$$
con dominio
$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ e } f(x) \in B\}$$
si chiama funzione *composta* di g e f.

☡. Il risultato della composizione di due funzioni dipende dall'ordine, per cui in generale $g(f(x)) \neq f(g(x))$. Ad esempio, se

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 1 + x$$

allora

$$g(f(x)) = 1 + x^2 \qquad f(g(x)) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

dove entrambe le funzioni composte sono definite su $\mathbb{R}$.

Se

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \operatorname{dom} f = [0, +\infty) \qquad g(x) = 1 + x \quad \operatorname{dom} g = \mathbb{R}$$

allora

$$g(f(x)) = 1 + \sqrt{x} \qquad f(g(x)) = \sqrt{1+x}$$

dove

$$\operatorname{dom} g \circ f = [0, +\infty) \qquad \operatorname{dom} f \circ g = [-1, +\infty)$$

Funzione inversa.
Data una funzione iniettiva $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, la legge che assegna ad ogni $y \in \operatorname{Im} f$ l'unica soluzione $x \in A$ dell'equazione

$$f(x) = y$$

si chiama funzione inversa e si denota con

$$f^{-1} : B \to \mathbb{R} \qquad x = f^{-1}(y) \qquad B = \operatorname{Im} f$$

Valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} &\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f \\ &\operatorname{Im} f^{-1} = \operatorname{dom} f \\ &f^{-1}(f(x)) = x \qquad && x \in \operatorname{dom} f \\ &f(f^{-1}(y)) = y && y \in \operatorname{dom} f^{-1} \end{aligned}$$

Inoltre, la funzione f^{-1} è iniettiva e $(f^{-1})^{-1} = f$.

☡. Nel definire la funzione inversa è utile usare la lettera y per indicare la variabile indipendente, $x = f^{-1}(y)$, tuttavia quando si vuole disegnare il grafico di f^{-1} occorre *scambiare* la x con la y (per convenzione la variabile indipendente corrisponde ai punti dell'asse delle ascisse). Ne segue che il grafico della funzione inversa f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y = x$, la bisettrice del primo e terzo quadrante, vedi Fig. 2.1.

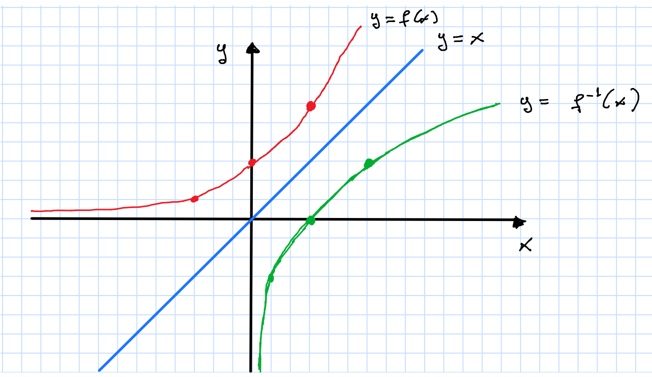

FIGURA 2.1. Grafico di $y = f(x)$ (rosso) e della sua inversa $y = f^{-1}(x)$ (verde) .

. La condizione che la funzione f sia iniettiva è necessaria per assicurare che, dato $y \in \operatorname{Im} f$, l'equazione $y = f(x)$ ammetta un'unica soluzione $x \in \operatorname{dom} f$. Se $y \notin \operatorname{Im} f$ l'equazione $y = f(x)$ non ha soluzione.

. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

denota il reciproco purché $x \in A$ e $f(x) \neq 0$, mentre

$$f^{-1}(x)$$

denota il valore della funzione inversa purché f sia iniettiva e $x \in \operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f$. Inoltre

$$f(x)f(x)^{-1} = 1 \qquad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Calculus 1	2020/21

Lezione 3: 1/03/21

2 ore

Traslazioni, dilatazioni e riflessioni.
Data una funzione $y = f(x)$,

a) dato $x_0 > 0$ il grafico della funzione $y = f(x + x_0)$ si ottiene traslando a sinistra di x_0 ed il grafico della funzione $y = f(x - x_0)$ si ottiene traslando a destra di x_0

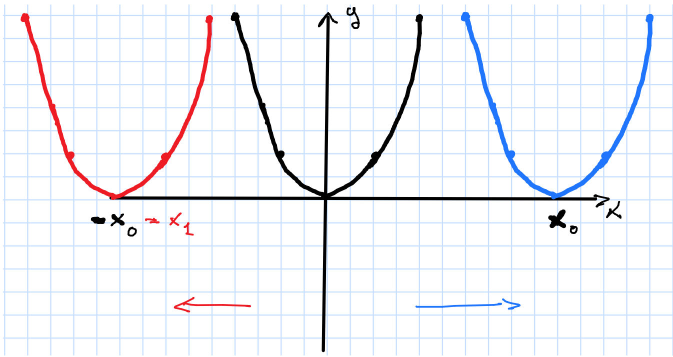

FIGURA 3.1. Grafico di $y = f(x - x_0)$ (blu) e di $y = f(x + x_0) = f(x - x_1)$ (rosso)

b) dato il grafico $y_0 > 0$ della funzione $y = f(x) + y_0$ si ottiene traslando in alto di y_0 ed il grafico della funzione $y = f(x) - y_0$ si ottiene traslando in basso di $y_0 > 0$

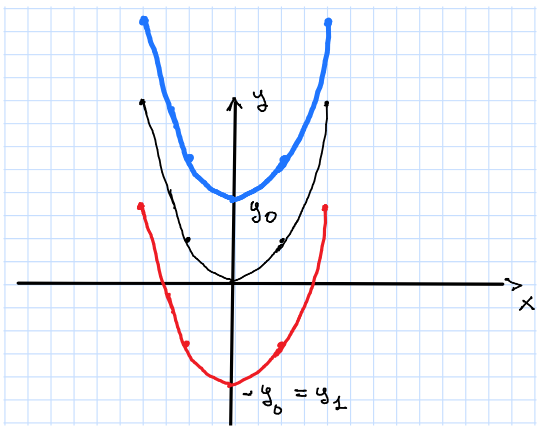

FIGURA 3.2. Grafico di $y = f(x) + y_0$ (blu) e di $y = f(x) - y_0 = f(x) + y_1$ (rosso)

c) dato $a > 1$, il grafico della funzione $y = f(x/a)$ si ottiene dilatando di a lungo l'asse x ed il grafico della funzione $y = f(ax)$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse x

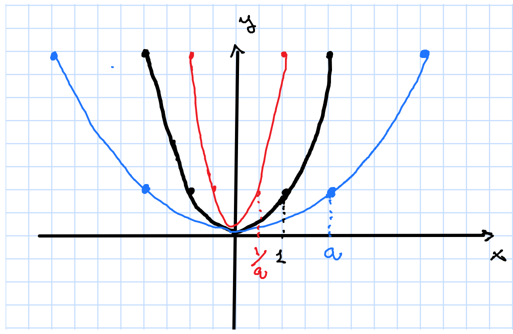

FIGURA 3.3. Grafico di $y = f(x/a)$ (blu) e di $y = f(ax) = f(x/a^{-1})$ (rosso)

d) dato $a > 1$, il grafico della funzione $y = af(x)$ si ottiene dilatando di a lungo l'asse y ed il grafico della funzione $y = f(x)/a$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse y

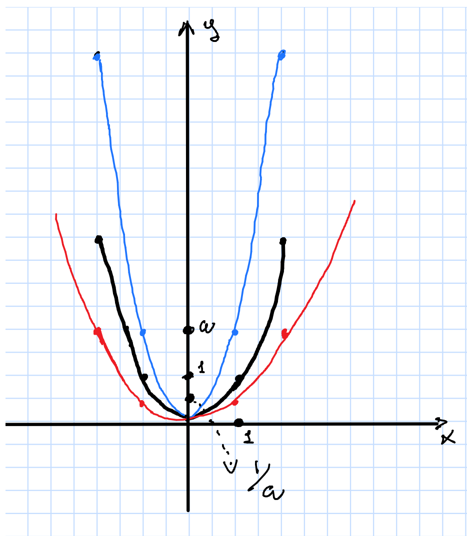

FIGURA 3.4. Grafico di $y = af(x)$ (blu) e di $y = f(x)/a = a^{-1}f(x)$ (rosso)

e) il grafico della funzioni $y = f(-x)$, $y = -f(x)$ $y = -f(-x)$ si ottengono riflettendo il grafico di f rispetto all'asse delle ordinate, all'asse delle ascisse o all'origine, rispettivamente.

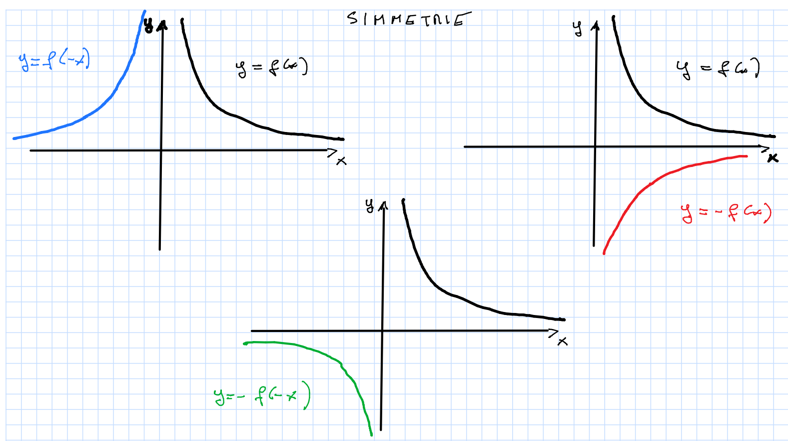

FIGURA 3.5. Grafico di $y = f(-x)$ (blu), di $y = -f(x)$ (rosso) e di $y = -f(-x)$ (verde)

Simmetrie. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è detta

a) pari se per ogni $x \in A$, allora $-x \in A$ e $f(-x) = f(x)$;
b) dispari se per ogni $x \in A$, allora $-x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$.

Una funzione è pari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, mentre una funzione è dispari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine

Calculus 1 **2020/21**

Lezione 4: 05/03/21

2 ore

Potenze con esponente intero.

- dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ la funzione potenza n-esima è definta da

$$f(x) = x^n = \underbrace{x\,x\ldots x}_{n\text{-volte}} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} [0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.1.

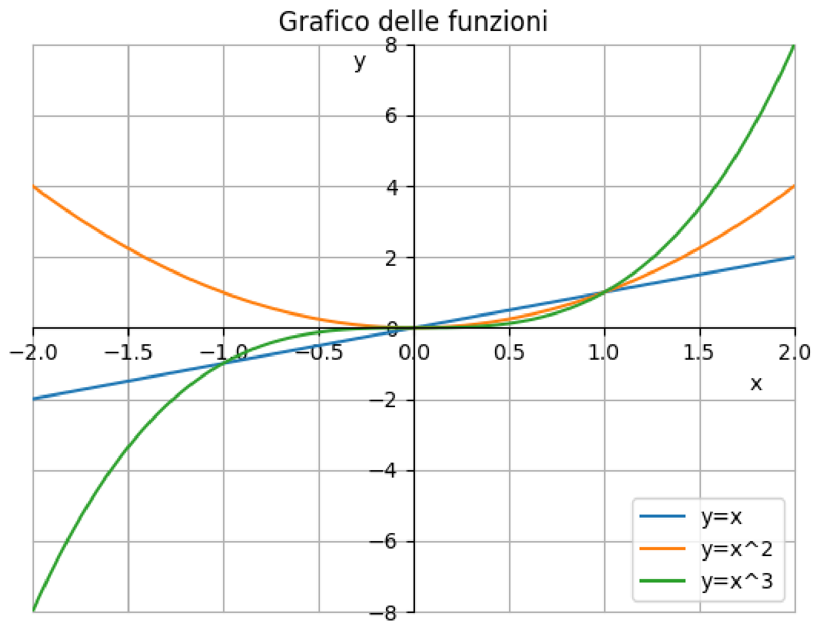

FIGURA 4.1. Grafico di $y = x^n$ per $n = 1, 2, 3$.

- se $a = 0$ si definisce

$$f(x) = x^0 = 1 \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = \{1\}$$

. Con la convenzione che $x^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale l'uguaglianza $0^0 = 0$. Questa convenzione non è adottata in tutti i libri di analisi.

Polinomi.
Una funzione del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{dom } f = \mathbb{R},$$

dove i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$, è detto polinomio o funzione polinomiale di grado n.

Potenze con esponente reale.
Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è

$$f(x) = x^a,$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a. Il caso $a = n \in \mathbb{N}$ è stato discusso nella precedente paragrafo, vediamo gli altri casi.

Esponente negativo $a = -n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \mathrm{Im}\, f = \begin{cases} (0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R}\backslash\{0\} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.2.

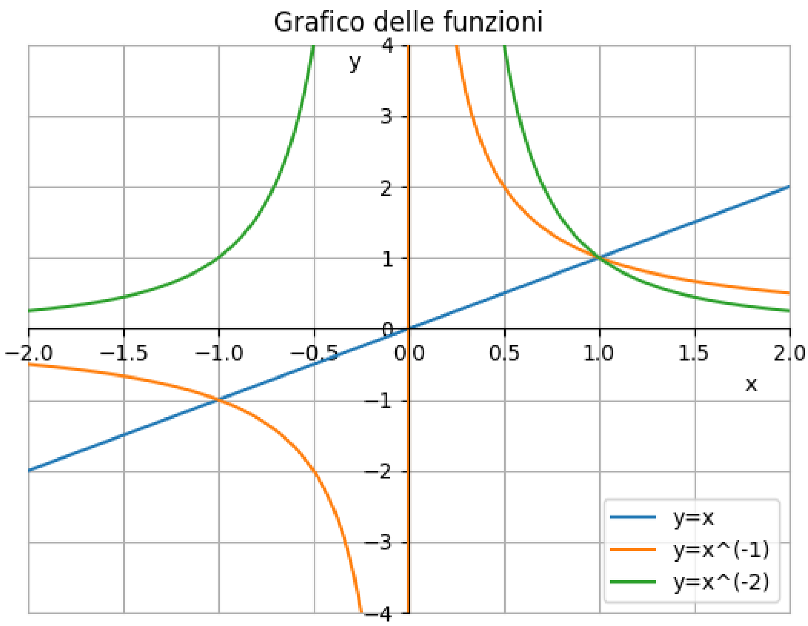

FIGURA 4.2. Grafico di $y = x^n$ per $n = -1, -2$.

Esponente reciproco di un naturale $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \mathrm{dom}\, f = \begin{cases} [0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases} \qquad \mathrm{Im}\, f = \begin{cases} [0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.3.

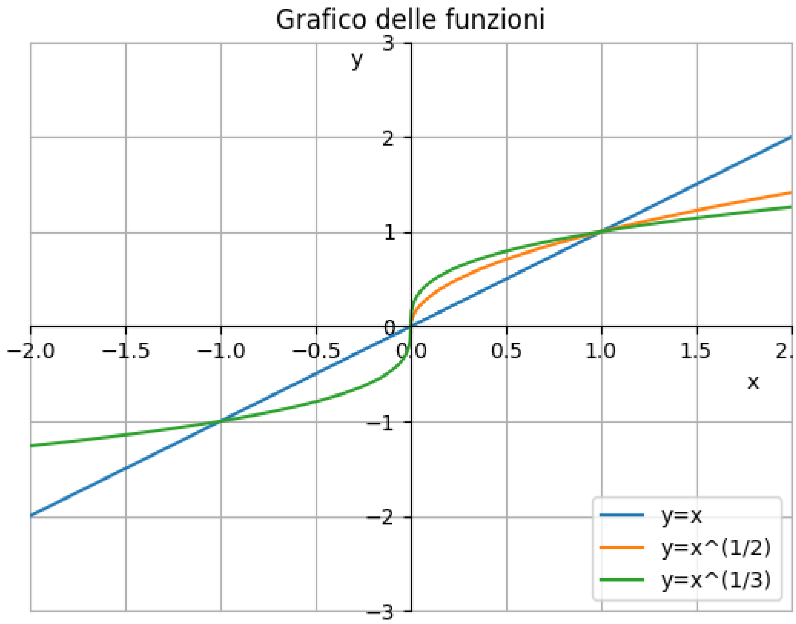

FIGURA 4.3. Grafico di $y = x^a$ per $n = 1/2, 1/3$.

Esponente razionale $a = m/n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \qquad \operatorname{Im} f = (0, +\infty)$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.4.

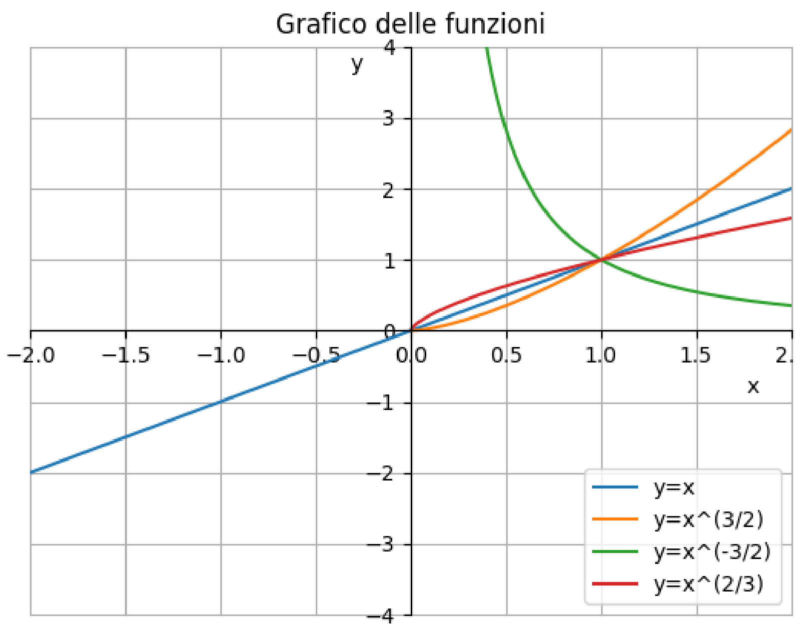

FIGURA 4.4. Grafico di $y = x^q$ per $q = 3/2, 2/3, -3/2$.

Esponente reale $a \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\, q \leqslant a\} & x \geqslant 1 \\ \inf\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\, q \leqslant a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \qquad \operatorname{Im} f = (0, +\infty)$$

. La definizione di estremo superiore sup e di estremo inferiore inf verrà data più avanti. In modo intuitivo, si tratta di definire x^a per approssimazioni successive. Ad esempio, se $x = 2$ e $a = \pi = 3.141\ldots$, possiamo definire 2^π per approssimazioni successive

$$2^3 = 8 < 2^{\frac{31}{10}} \simeq 8.574 < 2^{\frac{314}{100}} \simeq 8.815 < 2^{\frac{3141}{1000}} \simeq 8.822 < \ldots 2^\pi \simeq 8.825$$

Il grafico della funzione è riportato in Fig. 4.5.

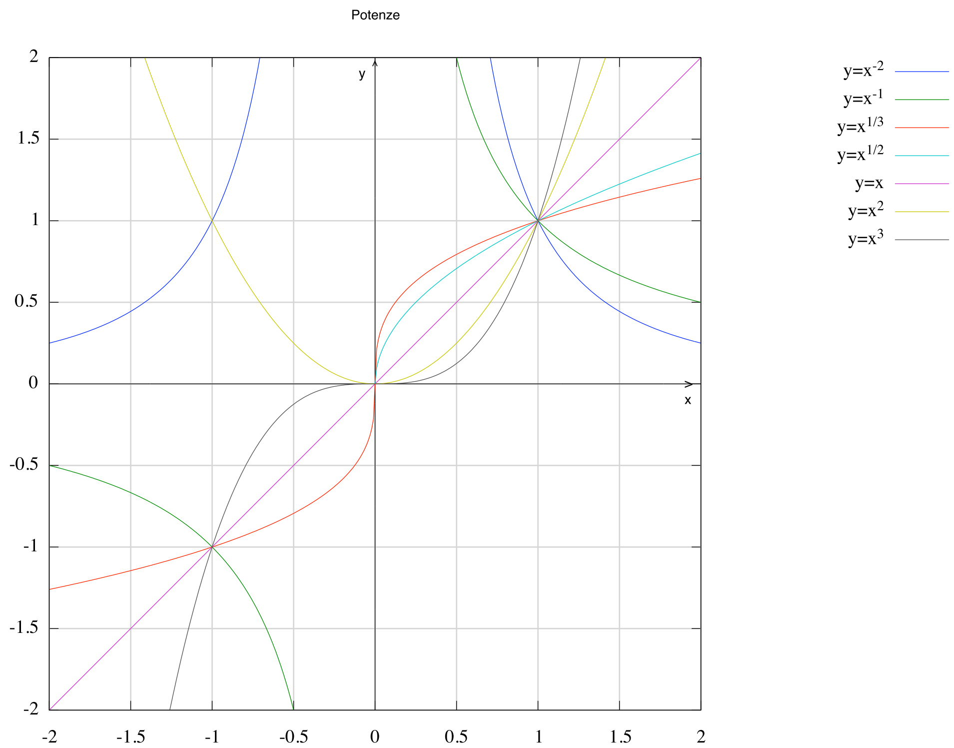

FIGURA 4.5. Grafici di $y = x^a$ con $a = 1, 2, 3, -1, -2, 1/2$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 0$, f è crescente su $(0, +\infty)$
b) se $a < 0$, f è decrescente su $(0, +\infty)$
c) se $a < b$

$$\begin{cases} x^a < x^b & \text{se } x > 1 \\ x^a > x^b & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

d) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$1^q = 1$$
$$x^{a+b} = x^a x^b$$
$$x^{ab} = (x^a)^b$$

Esponenziale.
Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im} f = (0, +\infty).$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828\ldots > 1$, la funzione esponenziale si denota

$$f(x) = e^x = \exp x$$

Il grafico delle funzioni esponenziali è riportato in Fig. 4.6

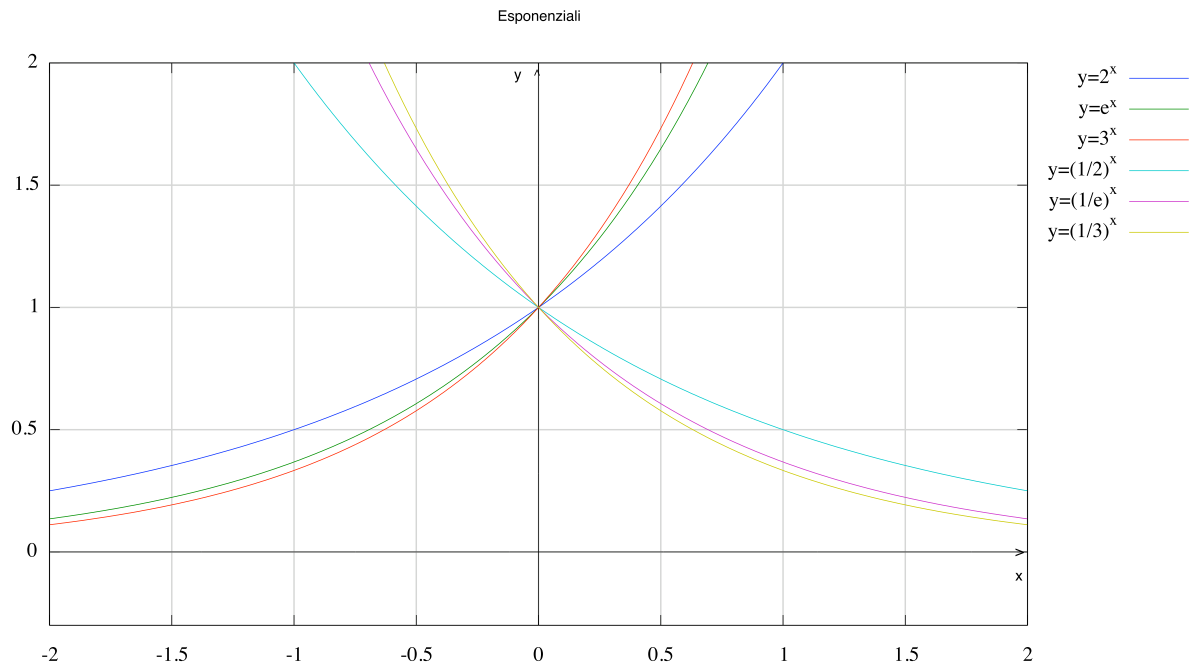

FIGURA 4.6. Grafici di $y = a^x$ con $a = 2, e, 3, 1/2, 1/e$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 1$, allora la funzione a^x è crescente
b) se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è decrescente
c) se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & \text{se } x > 0 \\ a^x > b^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{aligned} & a^0 = 1 \\ & a^1 = a \\ & a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} && x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ & a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x && x \in \mathbb{R} \\ & (a^x)^b = a^{bx} && x, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Funzione logaritmo.
Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale a^x, vedi Fig. 4.7.

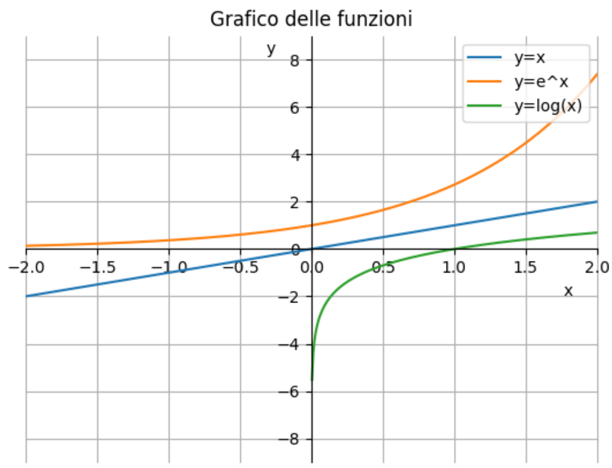

FIGURA 4.7. Grafico di $y = e^x$ e della sua inverse $y = \ln x$.

Se si sceglie come base il numero di Nepero e, il logaritmo si denota

$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x.$$

Il grafico delle funzioni logaritmo è riportato in Fig. 4.8.

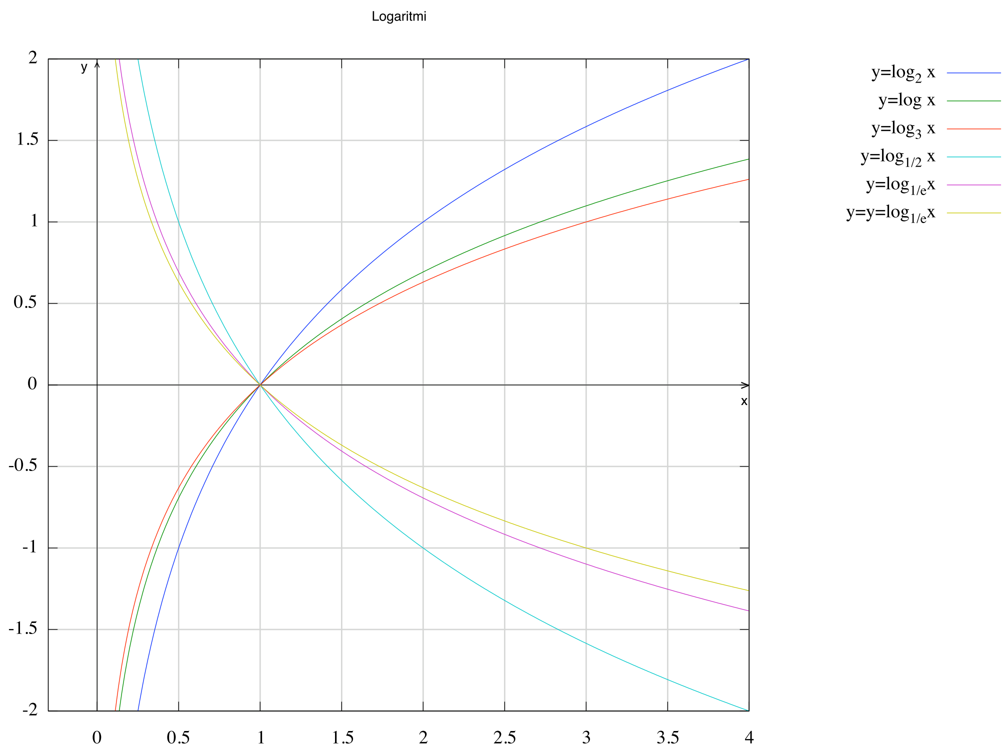

FIGURA 4.8. Grafici di $y = \log_a x$ con $a = 2, e, 3, 1/2, 1/e$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è crescente
b) se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è decrescente
c) se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{se } x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

d) valgono le seguenti proprietà

$$\begin{array}{ll}
\log_a a^x = x & x \in \mathbb{R} \\
a^{\log_a x} = x & x > 0 \\
\log_a 1 = 0 & \\
\log_a a = 1 & \\
\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 & x_1, x_2 > 0 \\
\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2 & x_1, x_2 > 0 \\
\log_a x^b = b \log_a x & x > 0,\ b \in \mathbb{R} \\
\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \dfrac{\ln x}{\ln a} & x > 0 \text{ e } b > 0\ b \neq 1 \\
a^x = e^{(\ln a)x} & x \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0\ a \neq 1
\end{array}$$

Calculus 1 **2020/21**

Lezione 5: 08/03/21

2 ore

Radianti. Si chiama circonferenza goniometrica la circonferenza di centro l'origine O e raggio 1. Denotiamo con P_0 l'intersezione della circonferenza con la semiretta delle ascisse positive. Data una semiretta con origine in O, questa individua un angolo θ con la semiretta delle ascisse positive, ed un punto P sulla circonferenza goniometrica. La lunghezza dell'arco di circonferenza di estremi P_0 e P è la misura in radianti dell'angolo con la convenzione che θ è positivo se la semi-retta passante per P è ottenuta ruotando in senso anti-orario e θ è negativo se la semi-retta è ottenuta ruotando in senso orario: per un angolo proprio $\theta \in [0, 2\pi]$ (senso anti-orario) o $\theta \in [-2\pi, 0]$ (senso orario) e l'angolo giro corrispondente a 2π o -2π, vedi Fig 5.1.

Angoli impropri corrispondono a rotazioni multiple in modo tale che due angoli θ e θ' tali che $\theta' - \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ individuano lo stesso punto P sulla circonferenza goniometrica. La relazione tra radianti e gradi è data da

$$\frac{\theta_{\text{radianti}}}{2\pi} = \frac{\theta_{\text{gradi}}}{360}$$

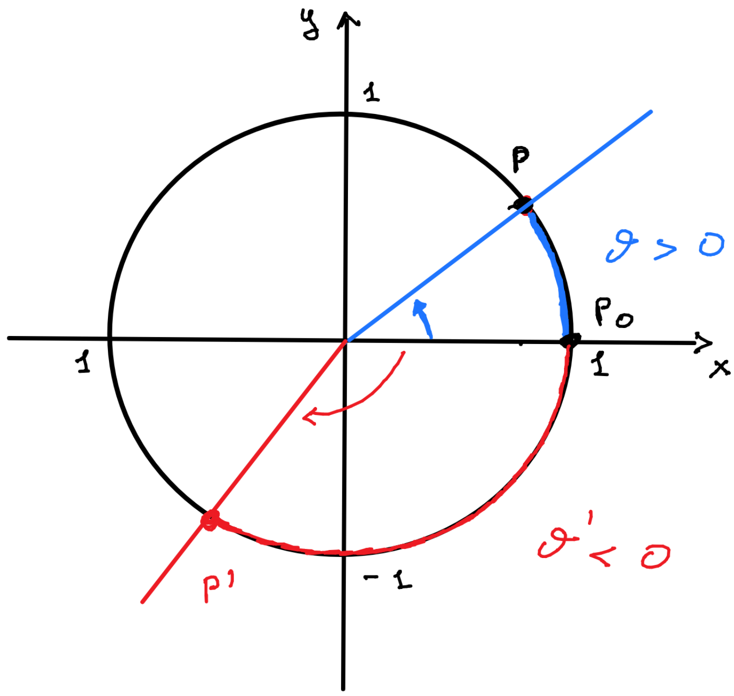

FIGURA 5.1. Circonferenza goniometrica.

Funzioni trigonometriche.
Dato un angolo $x \in \mathbb{R}$, sia P il punto sulla circonferenza goniometrica tale che la semiretta di centro O e passante per P formi un angolo x con la semiretta delle ascisse positive (in senso antiorario se x è positivo, in senso orario se x è negativo). Si definiscono $\cos x$ e $\sin x$ come l'ascissa e l'ordinata di P, rispettivamente, cioè

$$P = (\cos x, \sin x).$$

Se la retta OP non coincide con l'asse delle ordinate, sia Q l'intersezione della retta OP con la retta verticale passante per il punto $P_0 = (1, 0)$, intersezione della circonferenza goniometrica con l'asse delle ascisse. La tangente è definita come l'ordinata del punto Q, cioè

$$Q = (1, \tan x).$$

Vedi Fig. 5.2 e 5.3.

☡. L'argomento delle funzioni trigonometriche è l'angolo espresso in radianti.

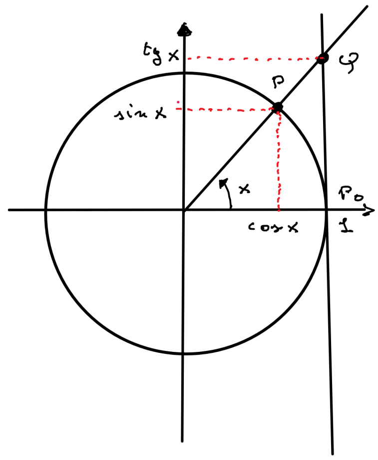

FIGURA 5.2. Definizione funzioni trigonometriche

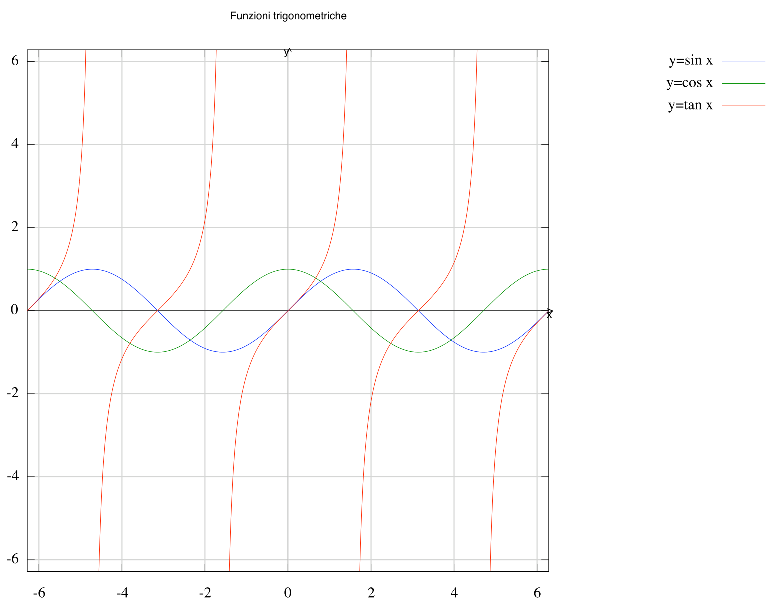

FIGURA 5.3. Grafici delle funzioni trigonometriche.

Valgono le seguenti proprietà.

a) dominio e immagine

$$\operatorname{dom}\sin x = \mathbb{R} \qquad \operatorname{dom}\cos x = \mathbb{R} \qquad \operatorname{dom}\tan x = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{Im}\sin x = [-1,1] \qquad \operatorname{Im}\cos x = [-1,1] \qquad \operatorname{Im}\tan x = \mathbb{R}$$

b) periodicità: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

c) parità

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

d) zeri: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\iff x = 0 + 2k\pi \quad x = \pi + 2k\pi \\ \cos x = 0 &\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \tan x = 0 &\iff x = 0 + k\pi \end{aligned}$$

e) intervalli di monotonia: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

i) la funzione $\sin x$ è crescente su $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$

ii) la funzione $\sin x$ è decrescente su $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$

iii) la funzione $\cos x$ è crescente su $[-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$

iv) la funzione $\cos x$ è decrescente su $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$

v) la funzione$\tan x$ è crescente su $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$

f) teorema di Pitagora

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

g) trigonometria

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

h) traslazione

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) & \cos x &= \sin(\frac{\pi}{2} - x) \\ \sin x &= \cos(x - \frac{\pi}{2}) & \cos x &= \sin(x + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

i) somma

$$\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 \\ \sin(x_1 - x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2 \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 \\ \cos(x_1 - x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 \end{aligned}$$

j) duplicazione

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

k) riduzione potenza

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

l) bisezione

$$\begin{aligned} \sin\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} & \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ \cos\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} & \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi \end{aligned}$$