Esercizio 1

sabato 21 novembre 2020 09:56

TUT

Esercizio 1. Calcolare quoziente q e resto r della divisione di b per a, dove

$$b = 63,\ a = 20; \qquad b = -63, a = 20.$$

- $63 = 3 \cdot 20 + 3$ $\quad q = 3, \quad r = 3$
- $-63 = -4 \cdot 20 + 17$ $\quad q = -4, \quad r = +17$

N.B. $0 \leq r < a$ (NON NEGATIVO)

Esercizio 2

sabato 21 novembre 2020 10:03

TUT

Esercizio 2. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tali che $a|b$ e $a|c$. Provare che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha $a|(bx+cy)$.

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $a \mid (bx+cy)$ $\quad a|b$, $a|c$

ovvero $bx + cy = a \cdot k_3$ con $k_3 \in \mathbb{Z}$

ogni somma di n. interi può essere scritta come prodotto fra interi

in particolare $b = a \cdot k_1$, $c = a \cdot k_2$

ma allora si ha $(a \cdot k_1)\, x + (a \cdot k_2)\, y = a \cdot k_3$

Si osserva facilmente per $(x, y) = (1,1)$: $\cancel{a} k_1 + \cancel{a} k_2 = \cancel{a} k_3$

$a \neq 0$ perché è divisore (zero non divide)

dunque preso ad esempio $k_3 = k_1 + k_2$ si dimostra la tesi.

mi accorgo che qualsiasi somma di interi è anch'essa un intero, dunque vale per ogni coppia x, y.

$\square$

Es. $(2,-3) \rightarrow 2\cancel{a}k_1 - 3\cancel{a}k_2 = \cancel{a}k_3$

$\underbrace{2k_1 - 3k_2}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{k_3}_{\in \mathbb{Z}}$ ✓

posso prendere $k_3 = k_1 + k_2$ (o altro k_3)

$k_3 = 0 + 0 = 0$

Siano $x, y \in \mathbb{Z}$

$a|b \rightarrow b = a \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$

$a|c \rightarrow c = a \cdot h$, $h \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow bx + cy = akx + ahy = a(kx + hy)$, $\quad kx + hy = j \in \mathbb{Z}$

allora $a \mid bx+cy \; (= a \cdot j)$

Esercizio 3

sabato 21 novembre 2020 10:17

TUT

Esercizio 3. Calcolare, usando l'algoritmo euclideo, il massimo comun divisore delle seguenti coppie di interi:

$$(354, 128), (689, 533), (720, 880), (228, 612), (1271, 1147),$$

e scrivere la corrispondente identità di Bezout.

(*) non bisogno pensarla graficamente in termini di "y" e "x".

- MCD (354, 128):

$354 = 2 \cdot 128 + 98$

$128 = 1 \cdot 98 + 30$

$98 = 3 \cdot 30 + 8$

$30 = 3 \cdot 8 + 6$

$8 = 1 \cdot 6 + \underline{2}$ → ultimo r≠0

$6 = 3 \cdot 2 + 0$ MCD (354, 128) = 2

(non importa l'ordine) (*) k, t, x, y sono nomi di coefficienti

$2 = 128k + 354t$

$2 = 128y + 354x$

ID x Bezout

→ $2 = 128x + 354y$

$8 + 3 \cdot 8$

$-30 + 4 \cdot 8$

allora $2 = 8 - 1 \cdot 6 = 8 - 1(30 - 3 \cdot 8) = -30 + 4 \cdot 8 = -30 + 4(98 - 3 \cdot 30)$

$= 4 \cdot 98 - 13 \cdot 30 = 4 \cdot 98 - 13(\underline{128} - 1 \cdot 98) = -13 \cdot 128 + 17 \cdot 98$

$= -13 \cdot \underline{128} + 17(\underline{354} - 2 \cdot \underline{128}) = -47 \cdot 128 + 17 \cdot 354$

$x = -47, \quad y = 17$ è una soluzione dell'identità

cerco una delle coppie di soluzioni

- (689, 533):

$689 = 1 \cdot 533 + 156$

$533 = 3 \cdot 156 + 65$

$156 = 2 \cdot 65 + 26$

$65 = 2 \cdot 26 + 13$ 13 = MCD

$26 = 2 \cdot 13 + 0$ Id Bezout: $13 = 533x + 689y$

- (720, 880):

$720 = 0 \cdot 880 + 720$

$880 = 1 \cdot 720 + 160$

$720 = 4 \cdot 160 + 80$ → MCD = 80

$160 = 2 \cdot 80 + 0$ $80 = 880x + 720y$

- (228, 612):

$228 = 0 \cdot 612 + 228$

$612 = 2 \cdot 228 + 156$

$228 = 1 \cdot 156 + 72$

$156 = 2 \cdot 72 + 12$ → MCD = 12

$72 = 6 \cdot 12 + 0$ $12 = 612x + 228y$

$156 = 2 \cdot 72 + 12 \longrightarrow \text{MCD} = 12$

$72 = 6 \cdot 12 + 0 \qquad 12 = 612x + 228y$

- $(1271, 1147)$:

$1271 = 1 \cdot 1147 + 124$

$1147 = 9 \cdot 124 + 31 \longrightarrow \text{MCD} = 31$

$124 = 4 \cdot 31 + 0 \qquad 31 = 1147x + 1271y$

Esercizio 4

sabato 21 novembre 2020 10:57

Esercizio 4. Siano a, b, k tre numeri interi positivi. Provare che $\mathrm{MCD}(ka, kb) = k \cdot \mathrm{MCD}(a, b)$.

$MCD(ka, kb)$: $ka = kb + r$

$k \cdot MCD(a, b)$: $k(a = b + r)$

Osservando che MCD e' $= b_n$ quando $r_n = 0$ (proseguendo per $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$; $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$) deduco la seguente:

- $ka_n = kb_n + 0$
- $k(a_n = b_n + 0)$

$] = (ka_n = kb_n)$ dunque entrambi gli MCD sono uguali a kb_n

Usiamo il fatto: $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha | \beta$, $\beta | \alpha \rightarrow \alpha = \beta$ prop. antisimmetrica

Sia $d = MCD(a, b)$

1) $k \cdot d \mid MCD(ka, kb)$ TESI

$k \cdot d \mid ka$

$k \cdot d \mid kb$

$\Big\| \rightarrow k \cdot d \mid MCD(ka, kb)$

per definizione di MCD (max intero che divide una coppia di interi dati)

2) $MCD(ka, kb) \mid k \cdot d$ TESI

$d = MCD(a, b) \rightarrow a = dt$, $b = ds$ $t, s \in \mathbb{Z}$, $MCD(t, s) = 1$ COPRIMI

(se ci fosse un n che $n | t$ e $n | s$ allora $n > MCD$ $\not{E}$)

$MCD(t, s) = 1 \xrightarrow{BEZOUT} \exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ t.c. $xt + ys = 1$

$MCD(ka, kb) \mid ka = kdt$

$MCD(ka, kb) \mid kb = kds$

$\Big\| \rightarrow$ [dell'es. 2] so che $MCD(ka, kb) \mid \underbrace{x(dtk) + y(dsk)}_{\text{COMBINAZIONE LINEARE A COEFF. INTERI}} = dk(\overset{1}{\overset{\|}{xt + ys}})$

$= dk$

$\square$

Esercizio 5

sabato 21 novembre 2020 11:04

→ NON DETERMINARLI

TUT

Esercizio 5. Esistono $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $10 = 3752x + 730y$? E tali che $3752x + 730y = 25$?

Verifico con l'algoritmo euclideo se hanno almeno una soluzione

(se esiste MCD = 10, 25 allora si ha soluzione per il teorema di Bezout)
o multiplo di essi
e per

- $730 = 0 \cdot 3752 + 730$

$3752 = 5 \cdot 730 + 102$

$730 = 7 \cdot 102 + 16$

$102 = 6 \cdot 16 + 6$

$16 = 2 \cdot 6 + 4$

$6 = 1 \cdot 4 + 2$

$4 = 2 \cdot 2 + 0$

Per la proposizione vista

se $a, b, c \in \mathbb{Z}$ allora l'eq. $ax + by = c$

ha soluzione $\Longleftrightarrow$ $MCD(a,b) \mid c$

$\rightarrow MCD(a,b) = 2 \mid 10$ ✓ ha soluzione

$2 \nmid 25$ × non ha soluzione

Esercizio 6

sabato 21 novembre 2020 11:15

TUT

Esercizio 6. Dire se le seguenti equazioni hanno soluzioni intere e in caso affermativo determinarne una usando l'algoritmo euclideo:

$$42x+24y=6; \quad 42x+24y=100; \quad 42x+24y=30.$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$, allora osservo se $MCD(a,b) = c$ o $|c$ (c multiplo).

↳ se si', ho soluzione dell'eq. $\in \mathbb{Z}$

- $24 = 0 \cdot 42 + 24$

$42 = 1 \cdot 24 + 18$

$24 = 1 \cdot 18 + 6 \longrightarrow MCD(24, 42) = 6$

$18 = 3 \cdot 6 + 0$

→ $42x + 24y = 6 = MCD$ ✓

→ $6 \nmid 100$ ✗

→ $6 \mid 30$ ✓

1^a eq.:

$$6 = 24 - 18 = 24 - 1(42 - 24) = -42 + 2 \cdot 24 = -42 + 2 \cdot (24 - 0)$$
$$= -1 \cdot 42 + 2 \cdot 24$$

Una soluzione e' $x = -1, y = 2$

2^a eq: $30 = 42x + 24y$, posso usare la coppia di soluzioni precedente moltiplicando entrambi i membri dell'eq. per uno stesso fattore:

$$\underset{30}{5 \cdot 6} = -1 \cdot 42 \cdot 5 + 2 \cdot 24 \cdot 5$$

Una soluzione possibile e': $x = -5$ e $y = 10$

(Cioe' le precedenti x, y moltiplicate per 5:)

$$\underset{x_0 \cdot \alpha}{x = -1 \cdot 5} \quad e \quad \underset{y_0 \cdot \alpha}{y = 2 \cdot 5}$$

TUT

Esercizio 7. Determinare tutte le soluzione intere delle seguenti equazioni:

$$18x + 84y = 42; \quad 623x + 679y = 21; \quad 623x + 679y = 22.$$

- $84 = 4 \cdot 18 + 12$ N.B. Era semplificabile!

$18 = 1 \cdot 12 + 6 \quad \rightarrow \quad MCD(84, 18) = 6 \mid 42$ ✓

$12 = 2 \cdot 6 + 0$

Lo mo allora posso ottenere un'eq. equivalente semplificata (divido per 6): $3x + 14y = 7$ (faccio nuovamente l'algoritmo euclideo, poi procedo al contrario)

Trovo una soluzione con Bezout

$6 = 18 - 1 \cdot 12 = 18 - 1 \cdot (84 - 4 \cdot 18) = 5 \cdot \overset{3}{18} - 1 \cdot \overset{14}{84} = 1 \; MCD(3,14)$

$x_1 = 5, \quad y_1 = -1$ ✓

moltiplico per 42 7 (perché ho soluzioni per MCD = 1) $mcd = \frac{42 \cdot 6}{1 \cdot 7}$

$x_0 = 42 \cdot 5 = 210$

$y_0 = 42 \cdot (-1) = -42$

Dunque tutte le soluzioni sono pari a

$$\begin{cases} x = \overset{5 \cdot 7}{210} + \overset{14}{84} k \\ y = \overset{(-1)7}{-42} - \overset{3}{18} k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

devono essere coprimi!

verifica: $(k=1) \quad 18 \cdot 294 - 84 \cdot 60 = (42 \cdot 6) \quad \rightarrow 252 = 252$ ✓

- $679 = 1 \cdot 623 + 56$

$623 = 11 \cdot 56 + 7 \quad \rightarrow \quad MCD(679, 623) = 7 \mid 21$ ✓

$56 = 8 \cdot 7 + 0 \qquad 7 \mid 22$ ✗

la 3ª equazione non ha soluzioni intere

→ Cerco una soluzione della 2ª eq. a Bezout:

$7 = 623 - 11 \cdot 56 = 623 - 11 \cdot (679 - 1 \cdot 623)$

$= 12 \cdot 623 - 11 \cdot 679 \quad \rightarrow \quad x = 12, \; y = -11$

moltiplico tutta l'eq. $623x + 679y = 7$ per 21;

$x_0 = 21 \cdot 12 = 252 \qquad mcd = 7 \cdot 21 = 147$

$y_0 = 21 \cdot (-11) = -231$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 252 + 679 k \\ y = -231 - 623 k \end{cases}$$

verifica: $k=1$

$\rightarrow 623 \cdot 931 - (679 \cdot 854)$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 252 + 679\,k \\ y = -231 - 623\,k \end{cases} \longrightarrow 623 \cdot 331 - (679 \cdot 854) = 147 \checkmark$$

Esercizio 8

sabato 21 novembre 2020 11:54

✓

Esercizio 8. Sia $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x,y)=20x-27y$. Provare che f è surgettiva e determinare $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(2)$. $\Leftrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{Z}\ \exists(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ t.c. $f(x,y)=n$

$20x-27y=n$

ovvero se l'eq. ha soluz. intera (ovvero se $MCD(20,27)\mid n$)

Lo x,y soluzioni dell'equazione

Presa come applicazione l'MCD (a,b), dove $a=20x$ e $b=-27$

$-27=-2\cdot 20+13$

$20=1\cdot 13+7$

$13=1\cdot 7+6$

$7=1\cdot 6+1$ $\rightarrow$ $\underset{MCD(20,-27)}{\overset{\|}{MCD}}(20,27)=1$

$6=6\cdot 1+0$

dati $a,b\in\mathbb{Z}$, $f(x,y)=c\in\mathbb{Z}$

t.c. $MCD(a,b)\mid c$

per avere soluzioni intere.

Mi accorgo però:

$1\mid\forall c\in\mathbb{Z}$

1 è divisore di tutti i numeri (interi)

quindi qualsiasi siano $x,y\in\mathbb{Z}$

ottengo un'equazione che ha soluzioni intere t.c. il risultato c dell'equazione è diviso da 1. Ogni n intero è raggiunto dall'equazione, ✓

MCD = funzione è quindi surgettiva. $\square$

Per il teorema visto; siamo nel caso $ax+by=c$ $MCD(a,b)=1$

Data una soluzione $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2$ di $ax+by=c$ tutte le soluzioni

si scrivono come $(x,y)=(x_0+bk,\ y_0-ak)$ $k\in\mathbb{Z}$

$\rightarrow f^{-1}(0)=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid \overbrace{20x-27y}^{f(x,y)}=0\}$

- $f^{-1}(0)$ corrisponde a $0=20x-27y$

Trovo una soluzione di $1=20x-27y$ tramite algoritmo euclideo

$1=7-1\cdot 6=7-1(13-7)=-13+2\cdot 7=-13+2\cdot(20-13)=-3\cdot 13+2\cdot 20$

$=-3(-27+2\cdot 20)+2\cdot 20=+3\cdot 27-4\cdot 20=1$ ✓

$x=-4,\ y=3$

Dunque per avere $0=20x-27y$, $\underline{x=y=0}$ $\rightarrow$ una soluz. particolare $(x_0,y_0)=(0,0)$

$f^{-1}(0)=\{(-27k,-20k)\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{(0,0),(-27,-20),(27,20)\dots\}$

• $f^{-1}(2)$ ovvero $2 = 20x - 27y$

significa moltiplicare tutto $\times 2$: $\overset{2}{2} \cdot 1 = \overset{6 \cdot 27}{3 \cdot 27} \cdot 2 - 4 \cdot 20 \cdot 2$ riscrivo

$= -8 \cdot 20 - 6(-27)$

$\quad + 6 \cdot 27$

ovvero equivale a $x = -8$, $y = -6$

ma poiché $2 = 20x - 27y$ la soluzione da prendere è -6

$f^{-1}(2) = \{(-8-27k, -6-20k) \mid k \in \mathbb{Z}$

CHECK $20x - 27y = 2$ $\quad 20(-8-27k) - 27(-6-20k)$

$= -20 \cdot 8 - \cancel{20 \cdot 27k} + 27 \cdot 6 + \cancel{27 \cdot 20k}$

$= -20 \cdot 8 + 27 \cdot 6 = -160 + 162 = 2$ ✓

Esercizio 9

sabato 21 novembre 2020 12:24

Esercizio 9. Sia $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ l'applicazione data da $f(x,y) = 21x + 28y$.
(1) Stabilire se f è surgettiva e/o iniettiva.
(2) Determinare $f^{-1}(34)$ e $f^{-1}(35)$.

Scelgo come $f(x,y) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$
$x, y \longmapsto \text{MCD}(x,y)$

$28 = 1 \cdot 21 + 7$ $\quad$ MCD $(a,b) = 7$ $\to$ dunque l'equazione $21x + 28y$ ha soluzione solo per c t.c. MCD $(a,b) = 7 \mid c$

$21 = 3 \cdot 7 + 0$

dunque non tutti gli $n \in \mathbb{Z}$ sono presi, es. 2: $7 \nmid 2$.

NO SURGETTIVA ✓

Non e' iniettiva, in quanto tutte le soluzioni di $21x + 28y = n$ ✓ possono essere trovate nella forma

$$\begin{cases} x = x_0 + b'k \\ y = y_0 - a'k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\to \begin{cases} x = x_1 \cdot n + 28k \\ y = y_1 \cdot n - 21k \end{cases}$$ con (x_1, y_1) una soluzione dell'equazione

ottengo ∞ soluzioni

- $f^{-1}(34)$ corrisponde a $34 = 21x + 28y$

ma poiché f manda x, y nel loro MCD, vale la regola che ha soluzioni se MCD $(x,y) \mid c$ $\to$ $7 \nmid 34$ mentre $7 \mid 35$ ✓

non ha soluzioni $\to f^{-1}(34) = \emptyset$

determino x, y prima di $7 = 21x + 28y$

$7 = 28 - 21 \to x = -1, \ y = 1$

dunque per $35 = 21x + 28y$ * moltiplico l'equaz. $\times 5$

$\to 7 \cdot 5 = 21(\overset{-1}{x} \cdot 5) + 28(\overset{1}{y} \cdot 5) \to x = -5, \ y = 5$ una soluz.

$\hookrightarrow 35 = -105 + 140 = 35$ ✓

tutte le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x = -5 + 28k \\ y = +5 - 21k \end{cases}$$

verifica: $k = 1 \to 35 = 21 \cdot 23 + 28(-16) = 35$ ✓

$$\begin{cases} x = -5 + \boxed{28}\, k \\ y = +5 - \boxed{21}\, k \end{cases}$$

→ non sono coprimi, perdo delle soluzioni

verifica: $k = 1 \rightarrow 35 = 21 \cdot 23 + 28(-16)$
$= 35$ ✓

$f^{-1}(35) = \{(-5 + \underline{4}\, k,\ 5 - \underline{3}\, k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

* conviene semplificare per l'MCD: $\frac{35}{7} = \frac{21}{7} x + \frac{28}{7} y \rightarrow 5 = 3x + 4y$