Esercizio 1

lunedì 26 ottobre 2020 08:49

Esercizio 1. Sia $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e sia $R \subseteq A \times A$ la seguente relazione:

$$R = \{(0,0), (0,1), (0,3), (1,1), (1,0), (2,3), (3,3)\}.$$

Stabilire se R è una relazione d'equivalenza oppure no.

TUT

Per essere relazione d'equiv., R deve essere

riflessiva, simmetrica e transitiva.

$\forall a \in A \rightarrow (a, a) \in R$

NON RISPETTATA; $(2,2) \notin R$ NON È REL. EQUIV. ✓

Esercizio 2

lunedì 26 ottobre 2020 08:58

Esercizio 2. Sia dato l'insieme $A = \{1,2,3\}$. Esibire un esempio di una relazione R su A tale che:

(1) R è riflessiva e transitiva, ma non simmetrica;
(2) R è simmetrica e transitiva, ma non riflessiva

TUT

RIFLESSIVA TRANSITIVA mi basta per una coppia sola (non tutte!)

1) $R = \{ (1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (1,2)\ (2,3)\ (1,3) \}$

non simmetrica: se $(a,b) \in R \not\Rightarrow (b,a) \in R$ ✓

N.B. Per quella simmetrica devo mettere TUTTE le coppie simmetriche $(2,1)\ (3,2)$ e $(3,1)$

2) $R = \{ (1,2)\ (2,3)\ (1,3)\ (2,1)\ (3,2)\ (3,1) \}$

non riflessiva: $\forall a \in A \quad \nexists (a,a) \in R$ ✓

ne basta una di coppia non presente

Esercizio 3. Determinare se le seguenti sono relazioni d'equivalenza nell'insieme A:

TUT

(1) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \Longleftrightarrow x < y$;
(2) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \Longleftrightarrow x \leq y$;
(3) $A = \mathbb{R}^2$, $(x,y) \sim (u,v) \Longleftrightarrow \underbrace{xu > 0 \text{ oppure } xu = 0}_{xu \geq 0}$;
(4) $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \Longleftrightarrow$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x = y^n$.

1) RIFLESSIVA ; $x \in \mathbb{R}$, $x \sim x \Leftrightarrow x < x$ IMPOSSIBILE, NO REL. EQUIV.

Un numero non può essere minore di se stesso, proprietà non soddisfatta.

2) RIFLESSIVA ; $x \in \mathbb{R}$, $x \sim x \Leftrightarrow x \leq x$ ✓ ✓

SIMMETRICA : $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

ovvero $x \leq y \Leftrightarrow y \leq x$ ✓ Solo se $x = y$ ✗ NO, vale solo per $x = y$

TRANSITIVA ; $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

ovvero $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ✓

Se x è $< y$ e y a sua volta è minore di z, significa che x è il più piccolo nella situazione considerata, dunque vale $x \leq z$. È REL. EQUIV no!

3) $A = \mathbb{R}^2$, $(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow xu \geq 0$

- RIFLESSIVA $(x, y) \sim (\overset{u}{x}, y) \Leftrightarrow \overset{u}{x} \cdot x \geq 0$ vale
$\Rightarrow x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ✓

- SIMMETRICA $(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow (u, v) \sim (x, y)$

$\Rightarrow$ $xu \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $ux \geq 0$ ✓

Ottengo lo stesso valore

- TRANSITIVA $(x, y), (u, v), (z, t) \in \mathbb{R}^2$

$\underbrace{(x, y) \sim (u, v)}_{①}$, $\underbrace{(u, v) \sim (z, t)}_{②}$ $\Rightarrow$ $(x, y) \sim (z, t)$

$x \cdot z \ldots$ $\quad (x \cdot u)(u \cdot z) \geq 0$

$(x,y) \sim (u,v)$, $(u,v) \sim (z,t) \Rightarrow (x,y) \sim (z,t)$
① ②

$xu \geq 0$, AND $uz \geq 0 \Rightarrow xz \geq 0$

$x \cdot z = \dfrac{(x \cdot u)(u \cdot z)}{\underbrace{u \cdot u}_{>0}}$

allora $x \cdot z \geq 0$

supposte ① e ② vere (non ho i casi in cui false, quindi $x<0$ e $u>0$ contemporaneamente)

- se $x \leq 0$ allora $u \leq 0$ per avere $xu \geq 0$

Dunque anche $z \leq 0$ per avere $uz \geq 0$

ma allora $x \leq 0$, $z \leq 0 \rightarrow xz \geq 0$ ✓

È REL. EQUIV

- se $x \geq 0$ allora $u \geq 0$ per avere $xu \geq 0$

Dunque anche $z \geq 0$ per avere $uz \geq 0$

ma allora $x \geq 0$, $z \geq 0 \rightarrow xz \geq 0$ ✓

4) A: $\mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid x = y^n$

RIFLESSIVA: $x \sim x \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid x = x^n$ vale solo per $n = 1 \in \mathbb{N}$ ✓ ✓
(quindi esiste un n)
↳ CONDIZ. SODDISFATTA

SIMMETRICA: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

$x = y^n \Leftrightarrow y = x^n$ vale solo per $n=0$ e $n=1 \in \mathbb{N}$ ✓
↳ $x = y^{1/n}$
↳ ho $x = y^n = y^{1/n}$

↳ se vale $x=y$ allora vale $y=x$ e viceversa

↳ (s o, perché non rispetta la riflessiva)

TRANSITIVA: $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$x = y^n$, $y = z^n \Rightarrow x = z^n$ per $n \in \mathbb{N}$

ne deriva: $x = y^n$ dove $y = z^n$

$\rightarrow (x = (z^n)^n) \stackrel{?}{=} (x = z^n)$ ✓

È REL EQUIV.

vale per $n=0$ (scarto) e $n=1$

N.B. Se $\exists n$, significa che uno (o più) stesso n soddisfa le 3 proprietà contemporaneamente.

Esercizio 4

lunedì 26 ottobre 2020 09:35

Esercizio 4. In $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ poniamo $z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \{+1, -1\}$.

(1) Provare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

(2) Determinare gli elementi della classe $[-i]$.

TUT

1) RIFLESSIVA: $z \sim z \iff z/z \in \{+1,-1\}$ ✓

$\forall z \in \mathbb{C}^*$ $\quad z/z = 1$ per $z > 0$ e $z < 0$ $(z \neq 0)$

SIMMETRICA $\quad z \sim w \iff w \sim z$

$z/w \in \{+1,-1\} \iff w/z \in \{+1,-1\} \Rightarrow$ mi basta un esempio in cui si verifichi

Presi $z = i^4$ e $w = i^2$: $\quad i^4/i^2 = i^2 = -1 \iff i^2/i^4 = i^{-2} = \frac{1}{-1} = -1$

Se il risultato in una frazione è ± 1, allora anche il suo reciproco vale ± 1 (ma non ∓ 1)

TRANSITIVA $\quad z, w, t \in \mathbb{C}^*$, $z/w \in \{+1,-1\}$, $w/t \in \{+1,-1\} \Rightarrow z/t \in \{+1,-1\}$

Presi $z = 3 - i^4$ $\quad w = 3 + i^2$ $\quad t = 2$

$z/w = \frac{3-i^4}{3+i^2} = \frac{2}{2} = 1$ $\qquad z/t = \frac{3-i^4}{2} = 2/2 = 1$ ✓

$w/t = \frac{3+i^2}{2} = 2/2 = 1$ $\qquad$ È REL EQUIV $\square$

2) $[-i] = \{b \in \mathbb{C}^* \mid -i \sim b\} = \frac{w}{i} \in \{-1, 1\}$ ✓

$-i \sim b$: $\frac{-i}{b} \in \{+1,-1\}$ Allora $b = \pm i$ $\quad \frac{-\cancel{i}}{-\cancel{i}} = +1$, $\quad \frac{-\cancel{i}}{+\cancel{i}} = -1$

$[-i] = \{+i, -i\}$

n

$\hookrightarrow$ tutti i valori di b possibili.

Esercizio 5

mercoledì 28 ottobre 2020 08:31

Esercizio 5. In $\mathbb{C}$ poniamo $z \sim w \iff z^4 = w^4$.

(1) Provare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
(2) Determinare la classe di 3.
(3) Determinare se l'assegnazione $\varphi : \mathbb{C}/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi([x]) = x^2$ definisce una funzione.
(4) Determinare se l'assegnazione $\psi : \mathbb{C}/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\psi([x]) = x^8$ definisce una funzione.

1) RIFLESSIVA: $z \sim z \iff z^4 = z^4$ ✓

SIMMETRICA: $z \sim w \iff w \sim z$

$z^4 = w^4 \iff w^4 = z^4$ ✓

TRANSITIVA $z \sim w,\ w \sim t \implies z \sim t$

$z^4 = w^4,\ w^4 = t^4 \implies z^4 = t^4$ ✓ per le proprietà dell'uguaglianza □ ✓

2) $[3] = \{ b \in \mathbb{C} : 3 \sim b \} = \{ b \in \mathbb{C} \mid z^4 = 3^4 = 81 \} = \{3, -3, 3i, -3i\}$

$3 \sim b : 3^4 = b^4$, sono le radici quarte di 81

3) $\mathbb{C}/\sim \;\longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi([x]) = x^2$ è funzione? [funzione: $\forall x \in \mathbb{C}\ \exists! y \in \mathbb{C} . f(x,y)$]

tutte le classi $\in \mathbb{C}$

$[x] \longmapsto x^2$

Esempi:

$[1] : 1^4 = b^4 = x^2\ (1^4 = 1^2)$

$[3] = [-3] = [-3i] = [3i]$

$\{3, -3, 3i, -3i\}$ → $9,\ 9,\ -9,\ -9$

Dipende dalla scelta del rappresentante in $\mathbb{C}/\sim$, non è una funzione $\mathbb{C}/\sim \;\longrightarrow \mathbb{C}$

4) $\mathbb{C}/\sim \;\longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi([x]) = x^8$ è funzione? [funzione: $\forall x \in \mathbb{C}\ \exists! y \in \mathbb{C} . f(x,y)$]

$[x] \longrightarrow x^8$

BEN DEFINITA $[x] = [y]$ allora $\psi(x) = \psi(y)$, con $\psi(x) = x^8$ e $\psi(y) = y^8$

$[x] = [y] \longrightarrow x^4 = y^4 \longrightarrow (x^4)^2 = (y^4)^2$, cioè $x^8 = y^8$

devo far vedere che x^8 dipende dal n. complesso, mentre la classe non dipende dal rappresentante scelto (dunque ottengo stesso risultato per qualsiasi rappresentato viene scelto).

se "$\underbrace{x \sim y}_{[x] = [y]}$ allora $x^8 = y^8$"

ψ non dipende dalla scelta del rappresentante = BEN DEFINITA

Esercizio 6. Sia data la relazione d'equivalenza in $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \sim (u,v) \iff x = u$.

(1) Determinare le classi $[(0,0)]$, $[(-1,-2)]$.
(2) Stabilire se $f : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f([x,y]) = 2x^2$ è una funzione.
(3) Stabilire se $g : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g([x,y]) = x^2 - y^2$ è una funzione.
(4) Trovare una funzione bigettiva $\varphi : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) • $[0,0] = \{ b \in R^2 , a \sim b \}$

interessa b_1 nella relazione, b_2 può essere qualsiasi

$(0,0) \sim (b_1,b_2) \iff 0 = b_1$ $\quad [(0,0)] = \{ (0,1), (0,2), (0,0) \dots \} = \{ (0,k) \text{ con } k \in R \}$

• $[(-1,-2)] = \{ b \in R^2 , a \sim b \}$

$(-1,-2) \sim (b_1,b_2) \iff -1 = b_1$ $\quad [(-1,-2)] = \{ (-1,k) \text{ con } k \in R \}$

2) $f : R^2/_\sim \to R$ $\quad f([x,y]) = 2x^2$

Deve valere $\forall (x,y) \ \exists! z$ $\quad$ e' FUNZIONE

Esempi :

$- f([0,0]) = 2x^2$ preso $k = 1,2,3 \dots, k \in R$ $\to f(0,k) = 2 \cdot (0)^2 = 0 \quad R$

$\forall (x,y)$ ho una y (stessa per tutte le coppie x, y)

$- f([-1,-2]) = 2x^2$ preso $k = k \in R$ ho $2(-1)^2 = 2 \in R$

3) $f : R^2/_\sim \to R$ $\quad f([x,y]) = x^2 - y^2$

e' FUNZIONE

Escmpi :

$f([0,0])$ preso $k = k$ ho $0^2 - k^2 = -k^2 \in R$

Qualsiasi altro numero $\in R/_\sim \in$ anche R

• f bigett $\quad$ f bigettiva : $R^2/_\sim \to R$

Posso prendere $\varphi(x,y) = \underline{2x + y}$

• INIETTIVA perche' $\varphi(x,y) = \varphi(x',y')$

• SURIETTIVA perche' ogni $\varphi(x,y)$ e' raggiunta da una coppia (x,y)

• INIETTIVA + SURIETTIVA = BIGETTIVA

Esercizio 7

mercoledì 28 ottobre 2020 09:25

Esercizio 7. Sia data in $\mathbb{Z}$ la relazione d'equivalenza $x \sim y \iff |x| = |y|$. Provare che il quoziente $\mathbb{Z}/\sim$ è in corrispondenza biunivoca[1] con $\mathbb{N}$.

[1] Due insiemi A e B si dicono in corrispondenza biunivoca se esiste una funzione bigettiva $f : A \to B$. In altre parole A e B sono in corrispondenza biunivoca se e soltanto se sono equipotenti.

$f : \mathbb{Z}/\sim \longrightarrow \mathbb{N}$

$[x] \longrightarrow |x|$

$\mathbb{Z}/\sim = \{(0,0), (1,1), (2,2), (-1,-1) \dots (\pm n, \pm n)\}$ $n \in \mathbb{Z}$

Presa ad esempio la funzione $f(x, y) = |x| \cancel{+ y^2}|$ scelta

devo porre una classe

es. $[y] = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = |y|\}$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 1\}$

$= \{-1, 1\}$ t.c. col modulo ho 1

"$\longrightarrow$":

- INIETTIVA: $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall x' \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \forall y' \in \mathbb{Z}$

$f([x], \cancel{y}) \neq f([x', y'])$

$a, b \in \mathbb{Z}$ $a \sim b$ $f(a) = f(b)$ (non importa la scelta del rappresentante)

$|a| = |b|$

dunque per $a \neq b$ ho $f(a) \neq f(b)$

- SURGETTIVA Ogni elemento naturale è raggiunto da una coppia di interi (in particolare se a questi viene applicato il modulo)

es. $f(1, -1) = |1 + 1| = 2$ $f(2,2) = 6$

$f(-1, 1) = |-1 + 1| = 0$ $f(-5, 5) = 20$

- quindi BIGETTIVA

"$\longleftarrow$"

- INIETTIVA perché una coppia di numeri naturali fa riferimento a una sola coppia di interi positiva

- SURGETTIVA perché ogni elemento naturale è anche contenuto in $\mathbb{Z}$ (dunque ogni coppia di $\mathbb{Z}/\sim$ è raggiunta)

} BIGETTIVA

Allora $\mathbb{Z}/\sim$ e $\mathbb{N}$ sono in corrispondenza biunivoca.

Esercizio 8 !

mercoledì 28 ottobre 2020 09:57

Esercizio 8. Sia data in $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ la relazione d'equivalenza
$$(x,y) \sim (a,b) \iff x = a \text{ e } y - b \text{ è pari.}$$
Provare che il quoziente $A/\sim$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N} \times \{0,1\}$. E con $\mathbb{N}$?

Controllare

$A/_\sim$ include tutte le classi di $N \times Z$, ovvero quelle i cui elementi rispettano la condizione $x = a$ e $y - b$ pari.

Preso $a \in Z$ qualsiasi, $y - b$ è pari quando $\begin{cases} y \text{ pari e } b = 0 \\ y \text{ dispari e } b = 1 \\ y \text{ pari e } b \text{ pari} \end{cases}$

$N \times \{0,1\}$ significa costruire le coppie che costituiscono $b = 0$ e $b = 1$, dunque rispettivamente y pari e y dispari come coppie $\in A/_\sim$.

Dunque ad ogni coppia $\in A/_\sim$ corrisponde un valore di $b \in N \times \{0,1\}$ e ad ogni b corrisponde una coppia y pari o dispari $\Big] \to$ INIETTIVA

$\begin{cases} y \text{ pari e } b = 0 \\ y \text{ dispari e } b = 1 \\ y \text{ pari e } b \text{ pari} \end{cases}$ riprendendo queste condizioni, si osserva che ogni elemento $\in A/_\sim$ e $\in N \times \{0,1\}$ è raggiunto

$\to$ SURIETTIVA

Allora BIETTIVA, $A/_\sim$ e $N \times \{0,1\}$ sono in corrispondenza biunivoca

La BIETTIVITÀ vale anche fra $A/_\sim$ e N in quanto $N \subseteq N \times \{0,1\}$ e rispetta le condizioni precedentemente descritte.