Esercizi - Inferenza 2

E10.1 Data la seguente funzione ($\theta > 0$)

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{4}{\theta^2}x & \text{se } 0 \le x \le \theta/2 \\ \frac{4}{\theta^2}(\theta - x) & \text{se } \theta/2 < x \le \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Verificare se f_θ rappresenta una pdf.
- Dato un campione casuale $(X_1, ..., X_n)$ estratto da f_θ, stabilire se $T = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ è uno stimatore corretto.

Soluzione:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(x)dx = \frac{1}{2}\theta\frac{2}{\theta} = 1.$
- Dato che $E[X] = \theta/2$, si ha

$$E[T] = E[2/n \sum_i X_i] = \frac{2}{n}\sum_i E[X_i] = \frac{2}{n} \cdot nE[x_i] = \frac{2}{n}n\frac{1}{2}\theta = \theta$$

E10.2 Sia data la variabile casuale unidimensionale X con la seguente pdf ($\theta > 0$):

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{18\theta^4}e^{-\frac{\sqrt{x}}{3\theta^2}} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Dato un campione casuale i.i.d. $\mathcal{D} = (X_1, ..., X_n)$, calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.
- Calcolare la densità di probabilità della variabile casuale $Y = \sqrt{X}$

Soluzione:

- $$L(\mathcal{D}, X) = \prod_i \frac{1}{18\theta^4}e^{-\frac{\sqrt{x_i}}{3\theta^2}} = \frac{1}{(18\theta^4)^n}e^{-\frac{\sum_i \sqrt{x_i}}{3\theta^2}}.$$

  Si ha

  $$\frac{d}{d\theta}\log L = \frac{d}{d\theta}(-n\log 18 - 4n\log\theta - \frac{\sum_i \sqrt{x_i}}{3\theta^2})$$

Quindi

$$-\frac{4n}{\theta}+\frac{2}{3\theta^3}\sum_i\sqrt{x_i}=0\rightarrow\theta^*=\sqrt{\frac{\sum_i\sqrt{x_i}}{6n}}.$$

- $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(\sqrt{x}\leq y)=P(X\leq y^2)=F_X(y^2)$. Quindi

$$\frac{d}{dy}F_X(y)=2yf_X(y^2)\rightarrow f_Y(y)=\frac{y}{9\theta^4}e^{-\frac{y}{3\theta^2}}.$$

E10.3 Il numero di interruzioni (crash) di un personal computer segue una distribuzione di Poisson di parametro λ. Sia $(X_1,...X_n)$ un campione casuale di ampiezza n estratto dalla distribuzione di Poisson data. Il costo di riparazione è dato da

$$Y_n=3\bar{X}_n+\bar{X}_n^2,$$

con $\bar{X}_n$ la media campionaria. Calcolare $E[Y_\infty]$.

Soluzione:
Data la pmf di Poisson

$$P_\lambda(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^x}{x!}e^{e^{-\lambda}} & \text{con } x_i=0,1,2,3,...\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

abbiamo $E[X]=\lambda$ e $Var[X]=\lambda$. Quindi

$$E[Y_n]=E[3\bar{X}_n+\bar{X}_n^2]=3E[\bar{X}_n]+E[\bar{X}_n^2]=3\lambda+E[\bar{X}_n^2].$$

Dato che

$$E[\bar{X}_n^2]-E[\bar{X}_n]^2=Var[\bar{X}_n],\quad Var[\bar{X}_n]=\frac{Var[X]}{n}=\frac{\lambda}{n},$$

si ha

$$E[Y_n]=3\lambda+\frac{\lambda}{n}+\lambda^2\rightarrow 3\lambda+\lambda^2.$$