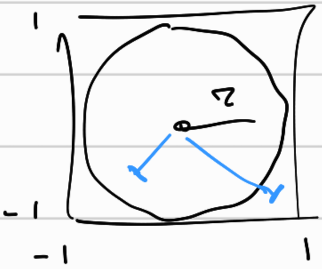
Metodi: Monte Carlo / 20-05

Trattiamo stimatori, non algoritmi



$A_q = 4r^2$

$A_c = \pi r^2$

$$\frac{A_c}{A_q} = \frac{\pi}{4}$$

Lanciando una freccetta, P finire dentro il cerchio? $\rightarrow \pi/4$

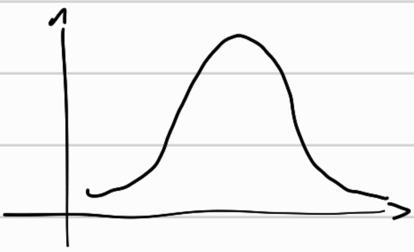
$\downarrow$ + P finire fuori = 1

estraggo un x, y a caso da -1 -1

$\hookrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ sono dentro il cerchio

$\rightarrow$ il no di centri / N tot. lanci : $i/N \rightarrow \pi$ in probabilità

$$\lim_{N \to +\infty} i/N = 0 \qquad (\pi/4)$$



La fluttuazione dei dati è $\frac{1}{\sqrt{N}}$

$\hookrightarrow$ a causa del σ

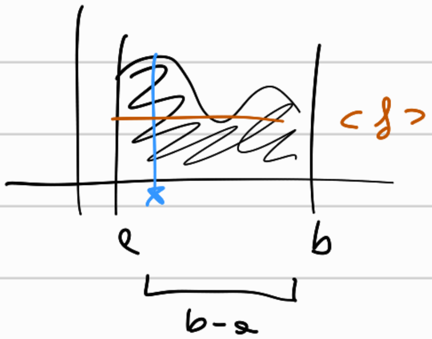
se uso N per approssimare π e ottengo 3,14159 per aggiungere una cifra significativa si attua un'operazione costosa: N^2

Sia $\underbrace{\langle f \rangle_m}_{\text{valor medio}} = \langle f \rangle_{m-1} + \frac{1}{m}\left(f_m - \langle f \rangle_{m-1} \right)$

(più efficiente nel calcolo della media per m grandi)

$\int_3^5 \ln(x^2+5) \sin 3x \; dx$ identica alla stima di π, è sempre un'area

$\int_a^b f(x) \, dx$



Teorema: $\exists$ rettangolo di Area A il cui valor medio è l'altezza del rettangolo

Prendendo valori a caso ottengo f_1, f_2 ...

$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_i \longrightarrow \langle f \rangle$ in alta probabilità (m grande)

(per forme di Monte Carlo)

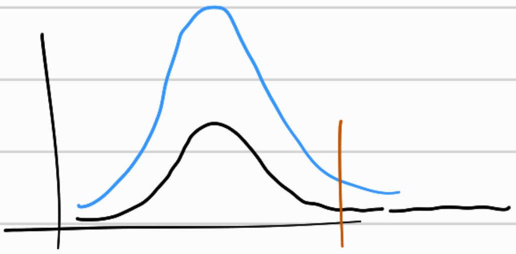
||

nel caso dell'area

||

$A \simeq \frac{(b-a)}{m} \sum_{i=1}^{m} f_i = \int_a^b f(x) \, dx$

Ora $f(x)$ si comporta come una gaussiana, dove le estrazioni da | contribuiscono poco alla media



posso quindi moltiplicare $f(x)$ per una gaussiana, aumentando la precisione senza aumentare il n° di esperimenti

Variabili casuali di Rademacher

$Pr(X=1) = Pr(X=-1) = \frac{1}{2}$ la var assume val di Bernoulli, -1 e 1

$E[X] = 0$

$Var(X) = 1$

Abbiamo una matrice quadrata semidefinita positiva $n \times n$

$$[x\ y] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x\ y] \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + y^2 \geq 0$$

definita: $x, y = 0$ per avere 0

$$[x\ y] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x\ y] \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix} = 2x^2 \geq 0$$

semidefinita basta $x = 0$ per avere 0

(somma degli el. della diag)

Si cerca la traccia $Tr(A)$ di A enorme a cui non possiamo accedere. Se così fosse, potrei diagonalizzare:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ la somma degli autovalori è la traccia

- in generale potrei sommare $a_{11}, a_{22} \dots$: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Possiamo però fornire un vettore u e mi viene restituito $u^T A u$

scelgo di Rademacher

come sopra

si osserva che $Tr(A) \rightsquigarrow u^T A u$

ovvero $u^T A u$ è una stima di $Tr(A)$ con una serie di tentativi. Per capirlo posso calcolarne il valore atteso

$$\mathbb{E}[u^T A u] = \mathbb{E}\left[\sum_i \sum_j a_{ij} u_i u_j\right] = \sum_i \sum_j a_{ij} \mathbb{E}[u_i u_j]$$

↳ non è var casuale

$\vec{u}$ vettore di Rademacher (es $\vec{u} = [1, -1, 1, 1, -1 \dots]$)

$$(u_1\ u_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}[u_i] = 0$

$\mathbb{E}[u_i u_j] = \mathbb{E}[u_i] \cdot \mathbb{E}[u_j] = 0 \qquad i \neq j$

i due valori sono indipendenti

perché altrimenti se $i = j$
$\mathbb{E}[u_i^2] = 1$!

δ_{ij} delta di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dunque $E[u_i u_j]$ corrisponde al delta

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} = c_i$$

sempre zero tranne quando $i = j$

ne rimane uno

$$E[u^T A u] = \sum_i \sum_j a_{ij} E[u_i u_j] = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \delta_{ij} \right)$$

applichiamo somma per volta prima $\sum_j$

$\sum_i a_{ii}$

$\delta_{ii} = 1$

somma delle diagonali

↓

dunque sto calcolando una stima della traccia