Esercizi pasquali /13-04 / Cattaneo Kevin - 34344382

1) $45 < \begin{matrix} 35\ B \\ 10\ R \end{matrix}$ estraggo una carta: B → lancio moneta

R → 2 dadi onesti

a) P esce testa

b) P esce 6 (in somma)

a] Gli eventi sono indipendenti: l'estrazione di B o R non riduce o altera lo spazio campionario, bensì fa verificare un secondo evento

$$\rightarrow \underbrace{\frac{35}{45}}_{p(B)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{p(\text{testa})} \simeq 38,3\ \%$$

b] Casi di 6 (somma): (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3) 5 casi

Casi tot = 36 P esce una combinazione che sommata faccia 6 $| = \frac{5}{36}$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{10}{45}}_{p(R)} \cdot \underbrace{\frac{5}{36}}_{p(\text{fare 6 (somma)})} \simeq 3\ \%$$

2) urna di 6 B, 4 R. Estraggo 3. P(1B e 2R)

$\underbrace{6B, 4R}_{10}$

$P(B) = \frac{6}{10}$

$P(R) = \frac{4}{10}$

$P(1B \text{ e } 2R) =$ BRR + RBR + RRB (3 casi)

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{216}{720} \simeq 30\%$$

[alternativa (comb): $\dfrac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = 30\%$ $\dfrac{\text{modi di estrarre 1B} \cdot \text{" 2R}}{\text{modi di estrarre 3 palline}}$]

3) S spazio campione $P(A_n)$

E evento → successo $p(E)$ {almeno un successo nelle prime

→ insuccesso $1-p(E)$ n prove} = $\{S_n \geq 1\}$

S_n n° successi su n prove

seq. inf. prove indip.

Si basa sulla serie geometrica $p(n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$

Osservo che 'almeno' un successo lo si ha togliendo dal totale le possibilità di ottenere sempre insuccesso (per n prove)

$$p(A_n) = 1 - (1-p)^n$$

4) Calcola $E[Y]$ di $Y = 4X + 3$ dove X var aleatoria di lancio dado 6 facce

$$E[X] = \underset{\text{numero}}{1} \cdot \underset{p\ \text{numero}}{\frac{1}{6}} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

$$E[aX+b] = aE[X] + b$$
$$E[4X+3] = 4(3{,}5) + 3 = \underline{17}$$

5) Palline v e r, scatole 1, B, C uguali = stesso n° tot di palline

$v(A) = 2R$

$v(B) = R/2$

$v(C) = R$

Scelgo scatola a caso, estraggo pallina verde, P scatola sia B? = $P(B|\text{verde})$

$$P(B|\text{verde}) = \frac{P(\text{verde}|B) \cdot P(B)}{P(\text{verde}|A) \cdot P(A) + P(\text{verde}|B) \cdot P(B) + P(\text{verde}|C) \cdot P(C)}$$

$P(\text{verde}|A)$: $\frac{V}{V+R} = \frac{2R}{2R+R} = \frac{2}{3}$; $P(A) = \frac{1}{3}$

Rimane il rapporto.

$$= \frac{\frac{R/2}{R/2+R} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{R/2}{R/2+R} \cdot \frac{1}{3} + \frac{R}{2R} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{\cancel{R}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3\cancel{R}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \simeq \underline{22{,}2\ \%}$$

6] Sia X distribuita uniformemente su $[0,2]$

Calcola

a) pdf di e^x

b) $E[e^x]$ e $Var(e^x)$

perchè uniforme

a] $pdf(x): \int_0^2 c \, dx = 1 \rightarrow c = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2} = pdf(x)$

Detta $e^x = y$ definita su $[1, e^2]$ $\quad \left| \int_0^a \frac{1}{2} p(a) = \frac{1}{2} x \Big|_0^a = \frac{1}{2} \boxed{a} \right|$

$F_y(y) = P(e^x \le y) = P(x \le \ln y) = \frac{1}{2} \ln y$

Allora

$P_y(y) : pdf(y) = (F(y))' = \frac{P(x) \cdot d g^{-1}}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2y}$

$\left(\int_1^{e^2} \frac{1}{2} y \, dy = \frac{1}{2} \ln y \Big|_1^{e^2} = 1 \checkmark \right)$

b] $E[e^x] = \int_0^2 e^x \cdot p(x) \, dx = \frac{1}{2} e^x \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

$Var(e^x) = E[e^{2x}] - (E[e^x])^2 = \int_0^2 e^{2x} \cdot \underbrace{p(x)}_{\frac{1}{2}} \, dx - \left[\frac{1}{2}(e^2-1)\right]^2$

$= \frac{e^4 - 1}{4} - \frac{1}{4}(e^2-1)^2 = \frac{e^2 - 1}{2}$

7] X e Y var aleatorie discrete $P(x, y)$

$P(2,3) = 1/3 \qquad P(3,4) = 1/4$

$P(3,3) = 1/4 \qquad P(2,1) = 1/6$

a] P marginali?

$x \backslash y$	1	3	4
2	$1/6$	$1/3$	0
3	0	$1/4$	$1/4$

$p_x(2) = \frac{1}{2}$ $\qquad \sum p_x = 1 \checkmark$

$p_x(3) = \frac{1}{2}$ $\qquad \sum p_y = 1 \checkmark$

$p_y(1) = 1/6 \quad (2) = 7/12 \quad (3) = 1/4$

b) media di X e Y?

$$\mu_X = \underset{N\ \text{valori}}{\frac{1}{N}} \sum_i^N X_i = \frac{2+3}{2} = \underline{\frac{5}{2}} \qquad \mu_Y = \underline{\frac{8}{3}}$$

c] $E[X \cdot Y] = \sum_i^N \sum_j^M (x_i \cdot y_j) \cdot p(x_i, y_j)$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \cancel{3} \cdot \tfrac{1}{\cancel{3}} + \cancel{2 \cdot 4 \cdot 0} +$$
$$+ \cancel{3 \cdot 1 \cdot 0} + 3 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{4} + 3 \cdot \cancel{4} \cdot \tfrac{1}{\cancel{4}}$$
$$= \tfrac{1}{3} + 2 + \tfrac{9}{4} + 3 \simeq \underline{7{,}58}$$

d) $E[X] = \sum_i^N x_i \cdot \underbrace{p(x_i)}_{\text{marginale}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$E[Y] = \sum_j^M y_j \, p(y_j) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \cancel{3} \cdot \frac{7}{\cancel{12}_4} + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{70}{24}$

osservo $E(XY] \neq E[\lambda] \cdot E[Y]$ quindi X e Y dipendenti
e Cov $\neq 0$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] + E[X] \cdot E[Y]$ (X e Y numeri)
$= 7{,}58 - 7{,}29 \simeq \underline{0{,}29}$

e) X e Y <u>non</u> sono <u>indipendenti</u>

f) calcola $P(X \le 3, Y \le 3) = F(3,3)$ cdf

$$F(3,3) = \sum_{i \le 3}^N \sum_{j \le 3}^M p(x_i, y_j) = p(2,1) + p(2,3) + p(3,1) + p(3,3)$$

$$= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} + 0 + \tfrac{1}{4} = \underline{0{,}75}$$