

Esercizi di probabilità

E1 Si supponga di avere un mazzo di 45 carte di cui 35 blu e 10 rosse. Si estrare una carta: se è blu si lancia una moneta, altrimenti due dadi onesti. Si calcolino le probabilità che:

- a) esca testa;
- b) esca il numero 6 (in somma).

E2 Un'urna contiene 6 palline bianche e 4 rosse. Si estraggono 3 palline. Qual è la probabilità che venga estratta 1 pallina bianca e 2 rosse?

E3 Consideriamo una sequenza infinita di prove indipendenti. Sia S lo spazio campione di ogni prova. Fissiamo in esso un particolare evento E . In ogni prova, diciamo che si ha un *successo* se si verifica E , il che accade con probabilità $p = P(E)$, e insuccesso altrimenti (con probabilità $1 - p$). Indichiamo con S_n il numero di successi su n prove. Vogliamo la probabilità dell'evento $A_n = \{\text{almeno un successo nelle prime } n \text{ prove}\} = \{S_n \geq 1\}$.

E4 Calcola il valore atteso della variabile $Y = 4X + 3$, dove X è la variabile aleatoria che descrive il lancio di un dado onesto a sei facce.

E5 Tre scatole uguali (A, B e C) contengono palline verdi e rosse. La scatola A contiene il doppio di palline verdi rispetto alle rosse; la scatola B contiene la metà di palline verdi rispetto alle rosse; la scatola C contiene un numero uguale di palline verdi e rosse. Scegliendo una scatola a caso, si estrae da essa una pallina verde. Qual è la probabilità che la scatola scelta sia la B?

E6 Sia X una variabile casuale distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, 2]$. Calcola:

- a) la pdf di e^X ;
- b) $\mathbb{E}[e^X]$ e $\text{Var}[e^X]$.

E7 Se X e Y sono due variabili casuali discrete con $P(X = 2, Y = 3) = 1/3$, $P(X = 3, Y = 3) = 1/4$, $P(X = 3, Y = 4) = 1/4$ e $P(X = 2, Y = 1) = 1/6$ calcola:

- a) le probabilità marginali;
- b) le media di X e Y ;
- c) $\mathbb{E}[XY]$;
- d) la covarianza $\text{Cov}(X, Y)$.
- e) le variabili X e Y sono indipendenti?
- f) calcolare $P(X \leq 3, Y \leq 3)$