

TdII 2021 - terzo compito

pubblicato: 13 Aprile 2021; **scadenza consegna: 15 Aprile 2021, ore 08:00**

I problemi contrassegnati con (*) sono per la lode.

1. Data una variabile casuale continua X con pdf $f_X(x)$, determina la pdf $f_Y(y)$ della variabile casuale $Y := |X|$, lasciandola espressa in funzione di $f_X(x)$.
2. Siano X e Y due variabili casuali discrete con $\mathbb{P}\{X = 2, Y = 3\} = 1/3$, $\mathbb{P}\{X = 3, Y = 3\} = 1/4$, $\mathbb{P}\{X = 3, Y = 4\} = 1/4$ e $\mathbb{P}\{X = 2, Y = 1\} = 1/6$. Calcola:
 - (a) le probabilità marginali di X e Y ;
 - (b) $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$;
 - (c) $\mathbb{E}[XY]$;
 - (d) $\text{Cov}(X, Y)$.
 - (e) Le variabili X e Y sono indipendenti?
 - (f) Calcola $\mathbb{P}\{X \leq 3, Y \leq 3\}$.
3.
 - (a) Dimostra che se due variabili casuali sono indipendenti allora hanno covarianza nulla.
 - (b) Trova un esempio di due variabili casuali dipendenti a covarianza nulla.
4. Siano X_1, X_2, X_3, X_4 variabili casuali indipendenti, ciascuna con media 0 e varianza 1. Definiamo $Y_1 := X_1 + X_2$, $Y_2 := X_2 + X_3$, e $Y_3 := X_3 + X_4$. Calcola la correlazione tra:
 - (a) Y_1 e Y_2 ;
 - (b) Y_1 e Y_3 .
5. Siano X_1, \dots, X_n misurazioni in cm dell'altezza μ di una persona. Assumiamo che le X_i siano indipendenti e identicamente distribuite con media μ e deviazione standard $\sigma = 1$ cm. La media campionaria $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ costituisce una stima di μ . Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, calcola il numero n di misurazioni necessarie per determinare μ con una precisione di 0.5 cm e una confidenza del 90%.
6. (*) Risolvi l'esercizio 5 utilizzando il teorema del limite centrale.