Logica — 10-9-2020

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

1. Si consideri la formula proposizionale (scritta usando le convenzioni sulle parentesi e la priorità dei connettivi)

$$\neg(A \to B) \lor C \to \neg B$$

(a) Disegnare l'albero sintattico della formula.

(b) Si tratta di una formula soddisfacibile? Si tratta di una formula valida?

2. Si consideri il linguaggio del prim'ordine dell'aritmetica $\mathcal{L} = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$, dove:

- $<$ è simbolo relazionale binario
- $+, \cdot$ sono simboli funzionali binari
- $0, 1$ sono simboli di costante

Si consideri la $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$, dove i simboli di $\mathcal{L}$ sono intepretati in maniera standard.

(a) Scrivere un formula $\varphi(x, y)$ di $\mathcal{L}$ che abbia esattamente x, y come variabili libere

(b) Determinare se $\mathcal{R} \models \varphi[x/4, y/3]$

(c) Determinare l'insieme di verità $\varphi(\mathcal{R})$ e disegnarlo

3. Sia $\mathcal{L} = \{C, A, p, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove C è simbolo relazionale unario, A è simbolo relazionale binario, p, g sono simboli di costante. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $C(x)$: x va al cinema;
- $A(x, y)$: x è amico di y;
- p: Pino;
- g: Gino.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. Pino va al cinema, ma Gino no.

2. Pino e Gino sono gli unici che vanno al cinema.
3. Se tutti gli amici di Pino vanno al cinema, allora ci va anche Gino.

4. Si considerino gli enunciati del prim'ordine

$$
\begin{aligned}
\varphi: &\quad \exists x(P(x) \land \neg Q(x)) \\
\psi: &\quad \forall x(P(x) \lor Q(x))
\end{aligned}
$$

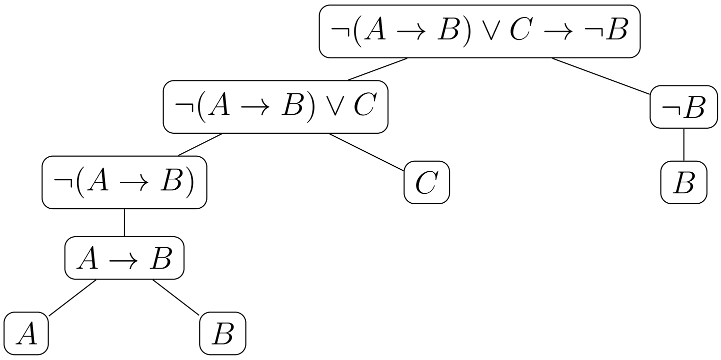
Costruire, se esistono:

(a) Un modello di $\neg\varphi$

(b) Un modello di $\varphi \land \neg\psi$

Svolgimento

1. (a)



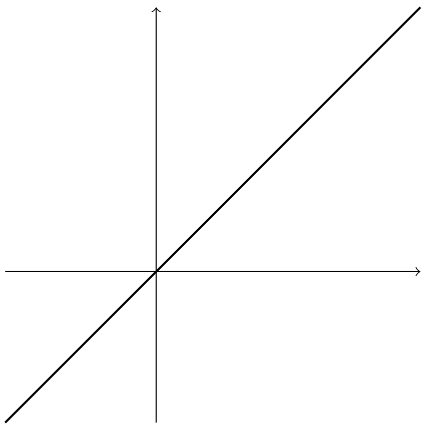
(b) ∗ La formula è soddisfacibile, perché se i è un'interpretazione tale che $i(B) = 0$, allora $i^*(\neg B) = 1$ e quindi $i^*(\neg(A \to B) \vee C \to \neg B) = 1$

∗ La formula non è valida, perché se i è un'interpretazione tale che $i(B) = i(C) = 1$, allora $i^*(\neg(A \to B) \vee C) = 1, i^*(\neg B) = 0$, e quindi $i^*(\neg(A \to B) \vee C \to \neg B) = 0$

2. (a) $x = y$

(b) $\mathcal{R} \not\models \varphi[x/4, y/3]$, perché $4 \neq 3$

(c) $\varphi(\mathcal{R}) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}$ è la diagonale del primo e terzo quadrante del piano $\mathbb{R}^2$:



3.
1. $C(p) \wedge \neg C(g)$
2. $C(p) \wedge C(g) \wedge \forall x(C(x) \to x = p \vee x = g)$
3. $\forall x\ (A(x, p) \to C(x)) \to C(g)$

4. (a) $\neg\varphi \equiv \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$. Un modello $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}})$ per $\neg\varphi$ consiste quindi di:

$$A = \{a\}, \qquad P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$$

dove a è un qualunque elemento.

(b) $\neg\psi \equiv \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$. Siano a, b elementi distinti, e sia $\mathcal{B} = (B, P^{\mathcal{B}}, Q^{\mathcal{B}})$, dove

$$P^{\mathcal{B}} = \{a\}, \qquad Q^{\mathcal{B}} = \emptyset$$

Allora $\mathcal{B} \models \varphi$, perché $a \in P^{\mathcal{B}}$ e $a \notin Q^{\mathcal{B}}$; inoltre $\mathcal{B} \models \neg\psi$, perché $b \notin P^{\mathcal{B}}$ e $b \notin Q^{\mathcal{B}}$. Pertanto $\mathcal{B} \models \varphi \wedge \neg\psi$.