**Logica** — 10-1-2019

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate

**1.** Provare che
$$\neg R \to Q \models P \wedge \neg Q \to R \vee \neg P.$$

**2.** Stabilire se l'insieme di formule
$$\{A \to B \vee \neg C, \neg B \wedge C, \neg(\neg B \to \neg A)\}$$
è soddisfacibile.

**3.** Sia $\mathcal{L} = \{B, P, M\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove $B, P$ sono simboli relazionali unari, $M$ è simbolo relazionale binario. Si consideri la seguente interpretazione di $\mathcal{L}$:

- $B(x)$: $x$ è una balena;
- $P(x)$: $x$ è un pesce;
- $M(x, y)$: $x$ mangia $y$.

Si scrivano le seguenti frasi in formule del linguaggio $\mathcal{L}$:

1. Le balene non sono pesci.
2. Le balene non si mangiano tra loro.
3. Un pesce che mangia una balena è a sua volta mangiato da una balena.

**4.** Sia $\mathcal{L} = \{f\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove $f$ è un simbolo funzionale binario. Si considerino le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}), \mathcal{B} = (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}})$, dove:

- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi;
- $f^{\mathcal{A}}$ è l'operazione di addizione, cioè $f^{\mathcal{A}}(u, v) = u + v$ per ogni $u, v \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{B}}$ è l'operazione di sottrazione, cioè $f^{\mathcal{B}}(u, v) = u - v$, per ogni $u, v \in \mathbb{Z}$.

Determinare, se esiste, un enunciato $\varphi$ che distingua $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$, cioè tale che $\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{B} \not\models \varphi$.

Svolgimento

**1.** Sia $i$ un'interpretazione tale che $i(\neg R \to Q) = 1$, al fine di provare che $i(P \land \neg Q \to R \lor \neg P) = 1$.

Poiché $i(\neg R \to Q) = 1$, si hanno due possibilità:

1) $i(\neg R) = 0$.
Allora $i(R) = 1$, quindi $i(R \lor \neg P) = 1$ e pertanto $i(P \land \neg Q \to R \lor \neg P) = 1$.

2) $i(Q) = 1$.
In tal caso, $i(\neg Q) = 0$ e quindi $i(P \land \neg Q) = 0$, da cui di nuovo $i(P \land \neg Q \to R \lor \neg P) = 1$.

**2.** Si supponga che $i$ sia un'interpretazione che soddisfa l'insieme di enunciati dato.

In particolare, $i(\neg B \land C) = 1$, da cui segue che $i(\neg B) = i(C) = 1$ e quindi $i(B) = 0$.

Inoltre $i(\neg(\neg B \to \neg A)) = 1$, cioè $i(\neg B \to \neg A) = 0$, da cui segue che $i(\neg A) = 0$ e pertanto $i(A) = 1$.

Ma allora $i(\neg C) = 0$. Utilizzando i valori ricavati prima si ha quindi $i(B \lor \neg C) = 0$ e finalmente $i(A \to B \lor \neg C) = 0$, contraddicendo l'assunzione che $i$ soddisfi l'insieme di enunciati dato.

Un'interpretazione che soddisfi l'insieme d'enunciati dato non può quindi esistere, e tale insieme è insoddisfacibile.

**3.**
1. $\forall x(B(x) \to \neg P(x))$
2. $\forall x \forall y(B(x) \land B(y) \to \neg M(x, y))$
3. $\forall x(P(x) \land \exists y(B(y) \land M(x, y)) \to \exists z(B(z) \land M(z, x)))$

**4.** L'operazione di addizione è commutativa, l'operazione di sottrazione no:

$$\varphi : \forall x \forall y f(x, y) = f(y, x)$$