Relazioni e funzioni

mercoledì 7 ottobre 2020 14:31

Def Detti $A_1 \dots A_n$ insiemi con $n >= 2$, una RELAZIONE (N-ARIA) è $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ (PRODOTTO CARTESIANO)

$(a_1 \dots a_n) \in R$ significa che $a_1 \dots a_n$ sono in relazione a R

Esempi (CASI)

- $R = A_1 \times \dots A_n$ RELAZIONE TOTALE
- $R = \emptyset$ RELAZIONE VUOTA
- $n = 2$ $R \subseteq A_1 \times A_2$ RELAZIONE BINARIA
  $\shortparallel$
  $\{(x, y) : x \in A_1, y \in A_2 \quad x, y \in R\}$
- $R^o = \{(y, x) : (x, y) \in R\} \subseteq A_2 \times A_1$ La relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano
- $\Delta = \{(x, y) \in A \times A : x = y\}$ RELAZIONE DIAGONALE

Def detti A, B insiemi, una funzione da A a B è una relazione $f \subseteq A \times B$ tale che soddisfa la proprietà:

$$\forall x \in A \ \underbrace{\exists! \, y \in B}_{\text{Ad ogni elemento del primo insieme, ne deve esistere un secondo per ottenere una COPPIA ORDINATA}} \ \overbrace{(x, y) \in f \subseteq A \times B}^{\text{quindi gli elementi di } f \text{ sono COPPIE ORDINATE}}$$

$\exists!$: ESISTE UN UNICO

(associare) ← Ad ogni elemento del primo insieme, ne deve esistere un secondo per ottenere una COPPIA ORDINATA

Posso anche scrivere:

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f$$

per ogni x esiste un'UNICA y e NON VICEVERSA !

(non necessariamente ogni y deve avere un'UNICA x)

Oppure:

$f \quad A \to B$

"da A a B"

[N.B. la funzione è detta anche APPLICAZIONE o MAPPA]

Inoltre: • A è detto **DOMINIO** di f • B è detto **CODOMINIO** di f

L' **IMMAGINE** di f, detta $f(A) = \{ y \in B : \exists x \in A : y = f(x) \} \subseteq B$

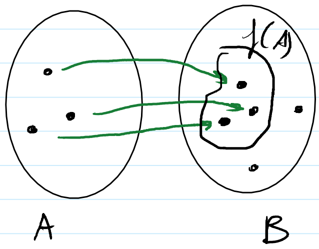
$(x,y) \in f$

↓

è un sottoinsieme di B

ovvero → <u>DIAGRAMMA DI EULERO - Venn</u>

$f(A)$ contiene (alcuni) degli elementi di B associati ad alcuni elementi di A

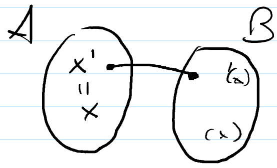


è detto **GRAFO DI f**, LA RELAZIONE $\Gamma_f = \{ (x,y) \in f \} = f$

e . e . e . e . e . e

- $f \ A \to B$ è INIETTIVA se $\underline{\forall x \in A, \forall x' \in A \ (\underbrace{f(x)}_{y} = \underbrace{f(x')}_{y'} \Rightarrow x = x')}$

ovvero non può succedere che due elementi diversi vengano mappati uguali in A. Dunque se $f'(x) = f(x)$ allora anche x' e x sono uguali, cioè ogni elemento in B deve essere raggiunto al max da un solo elemento di A.



- $f \ A \to B$ è SURGETTIVA (o SURIETTIVA) se $\underline{\forall y \in B \ \exists x \in A : y = f(x)}$

ovvero ad ogni elemento di B è associato un elemento di A (ovvero tutti gli elementi di A sono mappati in B)

f SURGETTIVA $\iff$ $f(A) = B$
IMMAGINE CORRISPONDENTE AL CODOMINIO

- $f \ A \to B$ è BIGETTIVA (o BIETTIVA) Se f è SIA INIETTIVA che SURGETTIVA

$\underline{\forall y \in B \ \exists! x \in A \ \ y = f(x)}$ Esiste un unico x in A per ogni y in B

f BIGETTIVA $\iff$ f INIETTIVA e SURGETTIVA

Ricorda! Esistono funzioni che non sono INIETTIVE né SURIETTIVE.

Es A, B INSIEMI $A = \{1,2,3\}$ DOMINIO $B = \{2,4,6,8\}$ CODOMINIO

$f : A \to B$
$\underbrace{x \to 2x}$
"mando x in 2x"

$2x$ è $\overset{y}{f(x)}$, ovvero una funzione scelta per associare gli elementi di A in B

↓ ovvero

$1 \to 2$
$2 \to 4$
$3 \to 6$

creo le coppie (x,y)
$\left.\begin{matrix}(1,2)\\(2,4)\\(3,6)\end{matrix}\right\} \to \in f$ — $2 = f(1)$, $4 = f(2)$, $6 = f(3)$

$f(A) = \{2,4,6\} \subsetneq B$ $\boxed{\text{A non ha tutti gli elementi di B}}$

IMMAGINE (sottoinsieme di B)
↓
dove sono contenuti gli elementi di B associati ad A

Inoltre:

Dunque:
- f non è SURIETTIVA; perché non tutti gli elementi di B sono raggiunti (8 non è raggiunto)
- f è INIETTIVA: ogni elemento di B è raggiunto al massimo da un solo elemento di A

di A

$\{1,2\} \subseteq A$ $f(\{1,2\}) = \{2,4\} \subseteq B$

SOTTOINSIEME IMMAGINE DI $\{1,2\}$

Se prendessi un sottoinsieme C di B: $C = \{2,4,6\} \subseteq B$

f TILDE

$\tilde{f}$ $A \to C$
$x \to f(x)$

E in questa funzione ogni elemento di A si associa con tutti gli elementi di C almeno una volta

$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in A$

Ho definito una seconda funzione

Allora $\tilde{f}$ e' SURGETTIVA e INIETTIVA
$= \tilde{f}$ BIGETTIVA

ES

$B \to A$

$2 \to 1$
$4 \to 2$
$6 \to 3$
$8 \to ?$

N.B. Non e' una funzione

Ogni elemento di B non si associa con uno di A (ora B e' dominio e A codominio)

Posso renderla funzione se associo a $8 \mapsto 2$ (con una certa funzione) e diventerebbe SURGETTIVA (ogni elemento di A raggiunto) ma non INIETTIVA (2 ($\in A$) e' raggiunto sia da 4 che 8)

Dettagli sulle funzioni

sabato 10 ottobre 2020 13:54

Def CONTROIMMAGINE

Data $f\ A \to B$, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$

$f(C)$ e' IMMAGINE DI C

$f(C) \subseteq B$, $f(C) = \{y \in B\ \exists x \in C : y = f(x)\}$

$f^{-1}(D) := \{x \in A : \exists y \in D : y = f(x)\}$ e' detta CONTROIMMAGINE di D

$f^{-1}(D) \subseteq A$ è un sottoinsieme A

N.B. Da non confondere con la funzione inversa:

$f^{-1}(D)$ NON e' UNA FUNZIONE, ma un SOTTOINSIEME

ES $A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,4,6,8\}$

$D = \{6,8\}$ SOTTOINSIEME DI B

$f\ A \to B$, $x \mapsto 2x$

$f^{-1}(D) = \{3\}$

L'immagine di A si ferma a D

ovvero la controimmagine e' l'insieme di quegli elementi che hanno immagine in B.

Associo elementi di A e D

$f|_{f^{-1}(D)} : f^{-1}(D) \to D$

RESTRIZIONE

$3 \to 6$

$\to (8)$

8 non ha x

Associo gli elementi di A ad ALCUNI di B, ovvero a quelli del suo sottoinsieme D.

DEF $C \subseteq A$ $f\ A \to B$

$f|_C$ $C \to B$, $x \mapsto f(x)$ e' detta RESTRIZIONE DI f a C

Associo gli elementi di un sottoinsieme di A, a B.

con il solo dominio di C

ES $C = \{1,2\}$

$C \to B$

$1 \to 2$

$2 \to 4$

DEF $f\ A \to B$ e' detta COSTANTE se $\exists!\ \bar{b} \in B$ t.c. $f(a) = \bar{b}\ \forall a \in A$

ad ogni elemento di A e' associato sempre e solo un elemento di B

DEF FUNZIONE IDENTITÀ su A

è un insieme Id_A $\quad A \to A$
$\quad x \to x$

- manda ogni elemento a se stesso
- ha senso se ogni elemento di partenza è uguale (quindi DOMINIO = CODOMINIO)
- è BIGETTIVA

DEF. FUNZIONE INCLUSIONE

$i \quad A \to B$
$\quad x \to x$

l'elemento va in se stesso, ma a differenza di Id, l'elemento $\in$ anche a B

$\{(x,x) \quad x \in A, x \in B\}$ è INIETTIVA ma non SURGETTIVA

$(i$ SURGETTIVA $\iff B = A)$ caso

si può scrivere anche $i \; A \hookrightarrow B$

DEF FUNZIONE e PARTE INTERA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{Z} : \; n \leq x \Rightarrow n \leq f(x)$

ovvero "$f(x)$ è il più grande intero, più piccolo di x"

quindi $\quad f(\frac{2}{3}) = 0 \qquad f(\sqrt{2}) = 1 \qquad f(3) = 3$

$f(-1{,}5) = -2 \quad$ → se scegliessi -1, sarebbe $n > x$!

approssimazione per difetto

PROPRIETÀ

- f NON è INIETTIVA $\quad f(2) = 2 = \overbrace{f(2{,}5)}^{\text{perché } n < x \text{ e } n < f(x)}$ $\quad$ ho più elementi associati a 2
- f è SURIETTIVA $\quad \forall n \in \mathbb{Z} \; \exists x \in \mathbb{R} \quad n = f(x)$

DATO $n \in \mathbb{Z}$ SCELGO $x = n$ SI HA $f(x) = f(n) = n \to$ NOTAZIONE $f(x) = [x]$ PARTE INTERA

$f_{|\mathbb{Z}} \quad \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è BIGETTIVA (e anche IDENTITÀ)

RESTRINGO AGLI INTERI

DEF PARTE FRAZIONARIA $\{\cdot\} \to \overset{\text{INTERVALLO}}{[0,1)}$

$\{x\} := x - [x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

DEF PARTE FRAZIONARIA $\{\cdot\} \to [0,1)$

$$\{x\} := x - \underbrace{[x]}_{\text{PARTE INT DI } x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\{2,5\} := 2,5 - 2 = 0,5$$

Osservazione

dati A, B, C insiemi:

$A \times B \times C \to = \{(a,b,c) : (a \in A) \land (b \in B) \land (c \in C)\}$

$(A \times B) \times C \to = \{((a,b),c) : (a,b) \in A \times B \land (c \in C)\}$

$A \times (B \times C) \to = \{(a,(b,c)) : (a \in A) \land (b,c) \in B \times C\}$

NON SONO UGUALI

- $f \quad A \times B \times C \to A \times (B \times C)$
  $(a,b,c) \mapsto (a,(b,c))$
- $g \quad A \times B \times C \to (A \times B) \times C$
  $(a,b,c) \mapsto ((a,b),c)$
- $h \quad (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$
  $((a,b),c) \mapsto (a,(b,c))$

SONO TUTTE FUNZIONI BIGETTIVE

N.B. $A \times B \neq B \times A$

$\varphi \quad A \times B \to B \times A$ BIGETTIVA
$(a,b) \mapsto (b,a)$

Lo ho un ordine di elementi differente!

Riprendendo il concetto generale di funzione:

detta $f \; A \to B$ con A e B insiemi

che verifica la proprietà:

$\forall x \in A \;\; \exists!\, y \in B \;\; y = f(x) \iff (x,y) \in f \subseteq A \times B$

DEF Proiezioni

Dati due insiemi A e B e le funzioni:

$pr_A : A \times B \to A$ PROIEZIONE SU A
$(a,b) \to a$

$pr_B : A \times B \to B$ PROIEZIONE SU B
$(a,b) \to b$

UNICO ELEMENTO DELLA COPPIA

→ sempre SURIETTIVE (non necessariamente INIETTIVE)

Def Iniezioni

Dato $a \in A$ $\quad i_a : B \to A \times B$
$b \to (a,b)$

SCORCIATOIA PER DIRE:
$\forall b \in B \quad i_a(b) = (a,b)$

$(b,(a,b)) \in i_a \subseteq B \times (A \times B)$

dato $b \in B$ $\quad i_b : A \to A \times B$
$a \to (a,b)$

sempre INIETTIVE

Prodotto di funzioni

giovedì 8 ottobre 2020 14:15

$f: A \to B \qquad g: C \to D \qquad A, B, C, D$ INSIEMI

DEF $\quad f \times g : A \times C \to B \times D \quad$ PRODOTTO DI f e g

$(a, c) \boxed{\mapsto} (\underbrace{f(a)}_{\text{ottengo un elemento di } B}, \underbrace{g(c)}_{\text{" di } D})$

SIGNIFICA

$\forall (a,c) \in A \times C \quad (f \times g)(a,c) := (f(a), g(c))$

OGNI ELEMENTO (a,c) VIENE MANDATO (ASSOCIATO) a $(f(a), g(c))$

PROPRIETÀ

1) f, g INIETTIVE ALLORA $f \times g$ INIETTIVA

DIMOSTRAZIONE:

Hp (IPOT.)

f è INIETTIVA SE $\forall a \in A \ \forall a' \in A \ (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$

non è possibile che A mandi 2 elementi diversi in uno stesso elemento di B

g INIETTIVA SE $\forall c \in C \ \forall c' \in C \ (g(c) = g(c') \Rightarrow c = c')$

Th (TESI)

$f \times g$ INIETTIVA $\quad \forall (a,c) \in A \times C \ \forall (a',c') \in A \times C \ ((f \times g)(a,c) = (f \times g)(a',c')) \Rightarrow (a,c) = (a',c')$

Siano $(a,c), (a',c') \in A \times C$

supponiamo $(f \times g)(a,c) = (f \times g)(a',c')$

$$(f(a), g(c)) = (f(a'), g(c')) \Rightarrow (f(a) = f(a')) \wedge (g(c) = g(c'))$$

se sono uguali significa che

$\Rightarrow$ (PERCHÉ INIETTIVE) $(a = a') \wedge (c = c') \iff (a,c) = (a',c') \quad \square$

2) f, g SURGETTIVE $\Rightarrow f \times g$ SURGETTIVA

2) f, g SURGETTIVE $\Rightarrow$ $f \times g$ SURGETTIVA

Hp | f SURGETTIVA: $\forall b \in B \quad \exists a \in A : b = f(a)$
| g SURGETTIVA: $\forall d \in D \quad \exists c \in C : d = g(c)$

Th $f \times g$ SURGETTIVA: $\forall (b,d) \in B \times D \quad \exists (a,c) \in A \times C : (b,d) = (f \times g)(a,c)$

$\Rightarrow \underline{f(a) = b, \; g(c) = d}$

DIMOSTRAZIONE:

Siano $(b,d) \in B \times D$ e $(a,c) \in A \times C$

allora: $(b,d) = (f \times g)(a,c) \quad \Rightarrow \quad (b,d) = (f(a), g(c))$

se uguali allora $\Rightarrow (b = f(a)) \wedge (d = g(c)) \Leftrightarrow \underline{f(a) = b \wedge g(c) = d}$ $\square$

SURGETTIVA
ogni elemento di $B \times D$ è associato a un elemento di $A \times C$

3) f, g BIGETTIVE $\Rightarrow$ $f \times g$ BIGETTIVA

Hp | f BIGETTIVA: $\forall b \in B \quad \exists! a \in A : b = f(a)$
| g BIGETTIVA: $\forall d \in D \quad \exists! c \in C : d = g(c)$

Th $f \times g$ BIGETTIVA: $\forall (b,d) \in B \times D \quad \exists! (a,c) \in A \times C : (b,d) = (f \times g)(a,c)$

$\underline{f(a) = b, \; d = g(c)}$

DIMOSTRAZIONE:

Siano $(a,c) \in A \times C$ e $(b,d) \in B \times D$

allora $(b,d) = (f \times g)(a,c) \quad \Rightarrow (f(a), g(c)) = (f \times g)(a,c)$

poiché BIGETTIVA (e in particolare INIETTIVA) : $a = c$

poiché BIGETTIVA (e in particolare SURGETTIVA) : $(b,d) = (f(a), g(c))$

$\underline{f(a) = b \wedge g(c) = d}$

con $\underline{a = c}$ (unico) $\square$

Etichettare gli insiemi

I, X INSIEMI

etichettare X mediante I significa definire

$$f: I \to X$$

FUNZIONE f

CASO PIU' TIPICO $\quad I = \mathbb{N}$

$f: I \to X$
$\quad i \to f(i)$ si denota con x_i] detta SUCCESSIONE → PARTICOLARE TIPO DI ETICHETTATURA

Es $\quad I = \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$\quad n \to 2^n + \sqrt{n}$ SCELTA

$f(n) = 2^n + \sqrt{n}$ La successione è data da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ TALE CHE $x_n = 2^n + \sqrt{n}$

$x_0 = 2^0 + \sqrt{0} = 1 \qquad x_1 = 2 + 1 = 3 \qquad x_2 = 4 + \sqrt{2} \quad \ldots$ elementi della successione

VALORI DELLA FUNZIONE

N.B. Non sono raggiunti tutti i n. reali (non negativi, f è sempre positiva) quindi NON SURGETTIVA

Composizione di Funzioni

$f: A \to B \qquad g: B \to C$ FUNZIONI $\qquad A, B, C$ INSIEMI

$g \circ f: A \to C \qquad \forall a \in A \quad (g\circ f)(a) := g(f(a)) \in C$

composto

ELEM. DI B
POSSO ASSOCIARLO A C con $g(\ldots)$

g composto f

ottengo $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $\quad g \circ f$

N.B. Non posso fare $f \circ g$

La composizione di funzioni si può fare anche

$f: A \to B \quad g: C \to D$

$B \subseteq C$

B sottoinsieme di C

$(g\circ f)(a) = g(f(a))$

Es $\quad g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ("B" → "C") $\qquad g(n) = 2^n + \sqrt{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ("A" → "B") $\qquad f(n) = n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$(g\circ f): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

(è anche una successione) perché parte dai naturali

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (g\circ f)(n) = g(f(n)) = g(n^2)$

APPLICO n^2 $(f(n))$ a $g(n)$

$= 2^{n^2} + \sqrt{n^2} = 2^{n^2} + n$

Es

data una funzione $h : \{CARLO\} \to \mathbb{N}$, con $A = \{CARLO\}$ e $B = \mathbb{N}$

LEGGE CHE ASSOCIA ogni elemento di A a B

SCELGO $h(CARLO) = 3$

$(g \circ h) : \{CARLO\} \to \mathbb{R}$ $\qquad (g \circ h)(CARLO) = g(h(CARLO)) = g(3) = 2^3 + \sqrt{3} = 8 + \sqrt{3}$

se ho un solo elemento (non necessariamente un numero) posso scrivere $\{*\}$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad T = \{8+\sqrt{3}, 1, -6\} \in \mathbb{R}$

$g^{-1}(T) = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in T \ \ g(x) = y\} = \{x \in \mathbb{N} : 2^x + \sqrt{x} \in T\} = \{0, 3\} \subseteq \mathbb{N}$

CONTROIMMAGINE DI T

x viene "mappato" in y ovvero ne faccio la funzione

-6 non posso ottenerlo

ottengo 1

$8+\sqrt{3}$

e ~ e · e · e · e · e

1) f, g INIETTIVE $\Rightarrow$ $g \circ f$ INIETTIVA

2) f, g SURGETTIVE $\Rightarrow$ $g \circ f$ SURGETTIVA

3) f, g BIGETTIVE $\Rightarrow$ $g \circ f$ BIGETTIVA

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

1) DIMOSTRAZIONE:

Hp
- f INIETTIVA: $\forall a \in A \ \forall a' \in A \ (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$
- g INIETTIVA: $\forall c \in C \ \forall c' \in C \ (g(c) = g(c') \Rightarrow c = c')$

Tesi $g \circ f$ INIETTIVA: $\forall c \in C \ \forall c' \in C \ ((g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a'))$

RAGGIUNTO DA UN SOLO ELEMENTO INDISTINTO

Siano $a \neq a'$ in A, se f INIETTIVA $\Rightarrow f(a) \neq f(a')$ (B e' raggiunto max da 1 elemento)

Se g INIETTIVA allora $g(f(a)) \neq g(f(a'))$

ovvero $(g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a')$, quindi $g \circ f$ e' INIETTIVA $\square$

2) DIMOSTRAZIONE:

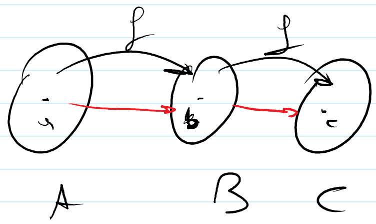
definizione di SURIETTIVA

Hp
- f SURIETTIVA $\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$
- g SURIETTIVA $\forall c \in C \ \exists b \in B : g(b) = c$

TESI [$g \circ f$ SURIETTIVA $\forall c \in C \ \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$

Sia $c \in C$ generico $\underset{g \text{ SURIETTIVA}}{\Rightarrow}$ $\exists b \in B$. $g(b) = c$ (tale che) $\underset{f \text{ SURIETTIVA}}{\Rightarrow}$ $\exists a \in A : f(a) = b$

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c \quad \square$



3) DIMOSTRAZIONE

f BIGETTIVA: $\forall b \in B \ \exists! a \in A ; b = f(a)$

g BIGETTIVA: $\forall c \in C \ \exists! b \in B ; c = g(b)$

g INIETTIVA: $\forall b \in B \ \exists! \ a \in A : b = f(a)$

g BIGETTIVA; $\forall c \in C \ \exists! \ b \in B : c = g(b)$

$g \circ f$ BIGETTIVA $\forall c \in C \ \exists! \ a \in A : b = f(a)$

Siano $c \in C \rightarrow \exists! \ b \in B . \ g(b) = c \Rightarrow \exists! \ a \in A . \ f(a) = b$

INIETTIVA

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ $\rightarrow$ SURIETTIVA

BIGETTIVA

$\square$

Es $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ IDENTITÀ, BIGETTIVA

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$n \rightarrow 0$

$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(g \circ f)$ è la FUNZIONE COSTANTE ZERO, NON BIGETTIVA

Dunque $g \circ f$ BIG. SE SIA f che g BIG.

PROPRIETÀ $f : A \rightarrow B$ FUNZIONE. SONO EQUIVALENTI

a) f BIGETTIVA

b) $\exists! \ g : B \rightarrow A$ t.c. $g \circ f = Id_A$, $f \circ g = Id_B$

$g \circ f : A \rightarrow A$

$f \circ g : B \rightarrow B$

$Id_A(a) = a \quad \forall a \in A$

$Id_A : A \rightarrow A$

g VIENE DETTA INVERSA DI f $\rightarrow$ SI INDICA f^{-1}

Dimostrazione:

a) $\Rightarrow$ b) SUPPONIAMO CHE f SIA BIGETTIVA

$\forall b \in B \ \exists a \in A \ f(a) = b$ DEFINIAMO $g(b) = a$ UNO

$g : B \rightarrow A$ È UNA FUNZIONE

$\forall a \in A \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$ Ciò mi dice che $g \circ f = Id_A$

$\forall b \in B \quad (f \circ g)(b) = f(g(b)) = b \Rightarrow f \circ g = Id_B$

Ora dimostro il contrario:

$b) \Rightarrow a)$ SUPPONIAMO CHE $\exists! g: B \to A$ t.c. $g \circ f = Id_A$ $f \circ g = Id_B$

- f INIETTIVA $a, a' \in A$ $f(a) = f(a')$ TESI: $a = a'$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a = g(f(a)) = g(f(a')) = a'}$$

- f SURIETTIVA $b \in B$ Tesi $\exists a \in A$ t.c. $f(a) = b$

vale $\forall b$, ma ne prendo uno generale

Scegliamo $a = g(b)$ $\underline{f(a) = f(g(b)) = b}$ $\square$

perchè f SIA INIETTIVA e SURIETTIVA } BIGETTIVA

→ NON DIMOSTRABILE CON ALTRI ASSIOMI

Assioma della scelta

Se $f: X \to Y$ è surgettiva, allora $\exists g: Y \to X$ t.c. $\underbrace{(f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in Y}_{f \circ g = Id_Y}$

$$\Downarrow$$

Ho un'inversa solo verso destra (non è detto che ottengo Id_X)

Si può dimostrare se X e Y sono insiemi finiti, altrimenti viene preso senza assioma.

Insiemi indicizzati

lunedì 12 ottobre 2020 14:06

Situazione particolare di etichettatura

$\mathcal{A}$ INSIEME DI INSIEMI (FAMIGLIA) INDICIATA SU UN INSIEME I dato con indici

$$f: I \to \mathcal{A}$$

Es $\mathcal{A} = \{ \underbrace{\{1,2\}}_{A_1}, \underbrace{\{3,4\}}_{A_2}, \underbrace{\{10,21,23\}}_{A_3} \}$

$I = \{1,2,3\}$ 3 INDICI

$f: I \to A$, $i \mapsto A_i$

$f(\underset{\text{INDICE}}{1}) = \underset{\text{INSIEME}}{\{1,2\}}$ $f(2) = \{3,4\}$

$f(3) = \{10,21,23\}$

Es $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ $A_k = \{ n^k : n \in \mathbb{N} \}$

$A_2 = \{0,1,4,9,16,\dots\} = \{n^2 ; n \in \mathbb{N}\}$ INSIEME DEI QUADRATI

$A_3 = \{0,1,8,27\dots\} = \{n^3 ; n \in \mathbb{N}\}$ INSIEME DEI CUBI

$\mathcal{A} = \{A_k : k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$

DEF

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{ x \in E : \forall i \in I, x \in A_i \}$$ INTERSEZIONE

tutti gli elementi descritti da i appartengono a tutti gli insiemi

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \in E : \exists i \in I, x \in A_i \}$$ UNIONE

basta un elemento appartenente ad almeno uno fra tutti gli insiemi (ovvero tutti gli elementi, vedi es)

Es $\mathcal{A} = \{ \underbrace{\{1,2\}}_{A_1}, \underbrace{\{3,4\}}_{A_2}, \underbrace{\{10,21,23\}}_{A_3} \}$

UNIONE DI TUTTI GLI INSIEMI

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{3} A_i = \{1,2,3,4,10,21,23\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots$$

$\exists i \in I$ t.c. $2 \in A_i$ ($i = 1$, $2 \in A_1$)

$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ nessun elemento comune a tutti gli insiemi

Es $\quad A_k = \{ n^k ; n \in \mathbb{N} \} \quad k \geq 2$

$\bigcap_{k \geq 2} A_k = \underbrace{\{0, 1\}}$

unici elementi
appartenenti
a tutti gli insiemi
$0^k = 0 \qquad 1^k = 1$

$\bigcup_{k \geq 2} A_k \subsetneq \mathbb{N}$

$\downarrow$

2

[esteso:

$\bigcap_{k \in \mathbb{N}, k \leq 2} / \bigcup_{k \in \mathbb{N}, k \leq 2}$]

$J = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$= \{ k \in \mathbb{N} : k \geq 2 \}$

Assioma della scelta (riformulazione)

$X = \bigcup_{i \in J} A_i \quad$ unione di una famiglia di insiemi indicizzata su J

Allora $\exists$ una funzione $g : J \to X$ tale che $g(i) \in A_i$

Es $\quad A_k = \{ n^k ; n \in \mathbb{N} \} \quad k \geq 2$

Ad esempio scelgo $g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \to A$

$n \longmapsto n^n \qquad n^n \in A_k$ per definizione

allora $g(2) = 2^2 \in A_2$ (insieme di tutti i quadrati)

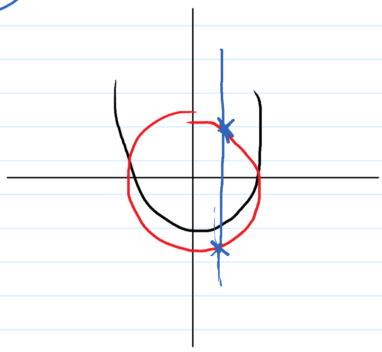
$g(3) = 2^3 \in A_3$ (" " cubi)

$g(4) = 2^4 \in A_4 = \{ n^4 ; n \in \mathbb{N} \}$

Dati insiemi A, B.

è funzione $f : A \to B$ secondo la regola $\forall x \in A \ \exists! \, y \in B$ t.c. $(x,y) \in f \to y = f(x)$

Es



- La parabola è una funzione
- La circonferenza non lo è, perché tracciando una retta verticale per certe x ottengo 2 valori di y (non ho un unico y!)

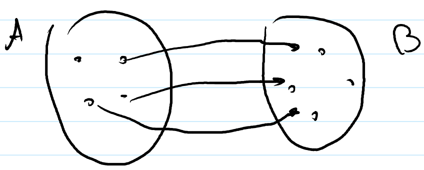
$f : A \to B$ (A: DOMINIO, B: CODOMINIO)

$f(A) := \{ y \in B \mid \exists x \in A \text{ t.c. } y = f(x) \}$ IMMAGINE DI f = elementi di B che possono essere scritti come $f(x)$ con $x \in A$

$f^{-1}(D) = \{ x \in A \mid \underbrace{f(x)}_{y} \in D \}$ è detta CONTROIMMAGINE di f

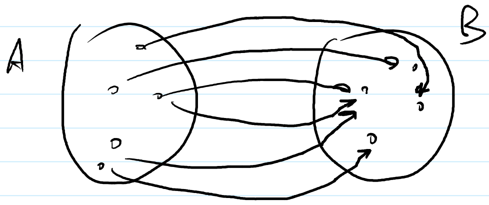
PROPRIETÀ

- $f : A \to B$ INIETTIVA : $\forall x \in A, \forall x' \in A \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$



iniettiva quando un elemento di A è associato un solo elemento di B

- $f : A \to B$ SURIETTIVA : $\forall y \in B \ \exists x \in A$ t.c. $y = f(x)$



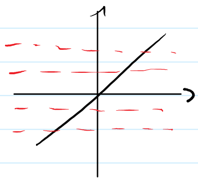
tutti gli elementi di B siano coperti

N.B. Posso avere più x per una y (ma non più y per una stessa x!)

Dunque IMMAGINE coincide con CODOMINIO
e CONTROIMMAGINE con DOMINIO

Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($A \to B$)

dove $f(x) = x$

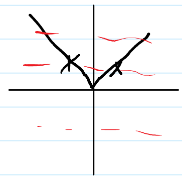


tutti i punti sono raggiunti
(ogni x ha un'unica y)

è INIETTIVA e SURIETTIVA

elementi di A sono legati a un solo elemento di B

ogni elemento di B è coperto



no INIETTIVA

↳ posso tracciare delle rette orizzontali per osservare quanti punti intersecano la retta
(ovvero vedo quante x corrispondono a una stessa y)

Se f è INIETTIVA e SURIETTIVA si dice BIETTIVA, dunque si può calcolare la f INVERSA.

• Delta

f INIETTIVA $\to$ $g \circ f$ INIETTIVA

DIM $g \circ f$ suppongo per assurdo che $g \circ f$ NON è INIETTIVA

Come si traduce?

$\exists \; x_1, x_2 \quad (x_1 \neq x_2) \quad$ t.c. $\quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

per x diverse possono esistere stesse y

Per ipotesi f è INIETTIVA:

$\exists \; x_1, x_2 \quad (x_1 \neq x_2) \quad$ t.c. $\quad f(x_1) \neq f(x_2)$

per x diverse non esistono stesse y

ma quindi

$g \circ f|_{x_1} \qquad\qquad g \circ f|_{x_2}$

$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ perché $f(x_1) \neq f(x_2)$ □

$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ perchè $f(x_1) \neq f(x_2)$ a