Legge dei grandi numeri / 08-04

L'idea è che la media empirica converge al valore atteso

X_i sono tutte var aleatorie identiche $E[X_i] = \mu \quad \forall i = 1, \dots, n$
(I I D identicamente e indipendentemente distribuite)

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(es X lancio di un dado
x il numero di lanci
(realizzazione di X))

1) $E[\mu_N] = \mu$ idea: meno variabilità di μ (numero) aumentando i tentativi (es lanci)

2) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$
$= 0$ se X, Y indipendenti

$$Var(\mu_n) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{dove } \sigma^2 = Var(X_i)$$

3) $\forall \epsilon > 0, \; P\{|\mu_N - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

Trials = n° tentativi (esperimento specifico, realizzazione)
T

n

T1 · · · · · · · $\mu_1 - \mu$ → 1 riga = 6 lanci, ottengo x riga una μ_i

T2 · · · · · · · $\mu_2 - \mu$ (calcolo la media

T3 · · · · · · · $\mu_3 - \mu$ $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ per riga)

T4 · · · · · · · $\mu_4 - \mu$

e si ripetono per infiniti trial

⋮

T_{10^3} . . . . $\mu_{10^3} - \mu$

Se faccio la media dei μ_i ottengo $E[\mu]$, il valore atteso

la varianza si studia su μ di quanto differisce rispetto agli altri

Nota: μ_n non è un numero, ma una rappresentazione dell'esperimento

$$\forall \epsilon > 0, \quad P\{|\mu_n - \mu| \geq \epsilon\}$$

i casi "favorevoli" sono, sottraendo μ da ogni valore μ_i ottenuto, quelli maggiori di un dato numero

Vedo a contare quante volte la media empirica è distante dal valore atteso di un certo ϵ

↳ in realtà sono casi "sfavorevoli", ovvero sto trovando i valori μ che sono molto variabili rispetto alla media
e si vuole ridurre tale distanza (quindi si limita la prob che succeda)

$$\forall \epsilon > 0, \quad P\{|\mu_n - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

se ho grande varianza ho più casi sfavorevoli

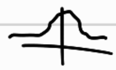
più tentativi faccio, meno variabilità ho

più grande è il "limite" entro cui il risultato è accettabile, meno casi sfavorevoli ho

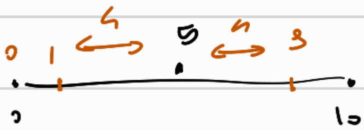
$$\forall_{\epsilon > 0} \lim_{n \to \infty} P\{|\mu_n - \mu| \geq \epsilon\} = \emptyset$$ → è una stima

conseguentemente $\mu_i \approx \mu$ quindi la variabilità diminuisce fino a sparire e quindi non ho così "sfavorevoli"

La distribuzione può essere qualsiasi ma generalmente la stima a ∞ avrà un certo valore. Per $n \to +\infty$, la distribuzione tende a una normale standard centrata sul valore atteso $N(0,1)$



Esempio



distribuzione uniforme $\mu = 5$, $\sigma^2 = \frac{25}{6}$

Supposto $n=1$ ottengo $P(|\mu_n - \mu| \geq 4)$

$\rightarrow P(|X - \mu| \geq 4) \leq \frac{\frac{25}{3}}{16} \simeq 0,52 \approx \frac{1}{2}$

in generale

$\leq$

$\rightarrow P(|\mu_n - \mu| \geq 4) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

nello specifico

2 intervalli lunghi 1

con $n > 1$ posso renderla più precisa, più tendente al valore esatto di $\frac{1}{5}$

Se X limitata (come nel caso sopra)

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \longrightarrow e^{-\frac{n\epsilon^2}{c}}$$ diviene più precisa

↳ costante arbitraria

Disuguaglianza di Markov

Presa Z var aleat. $Z \geq 0$ vale $E[Z]$

$$P(Z \geq \epsilon) \leq \frac{E(Z)}{\epsilon}$$

$$E[Z] = \int_0^{+\infty} \underset{\text{numero n° pos}}{z}\, p(z)\, dz \geq \int_\epsilon^{+\infty} z\, p(z)\, dz$$

↳ perdo "più eventi", ne sommo di meno

$$\geq \epsilon \int_\epsilon^{+\infty} \frac{z}{\epsilon}\, p(z)\, dz$$

sapendo che $z > \epsilon \rightarrow z/\epsilon > 1$

z viene integrato fra ϵ e $+\infty$

$$\geq \epsilon \underbrace{\int_\epsilon^{+\infty} p(z)\, dz}$$

maggiore di sommare solo 1

$$\geq \; = \epsilon\, P(Z \geq \epsilon)$$

cumulata, valori più grandi di un certo ϵ

quindi $P(Z \geq \epsilon) \leq \dfrac{E(Z)}{\epsilon}$

Es.

da Markov

Y, $E[Y] = \mu$, $Var(Y) = \sigma^2$

Chebyshev

$$Z = |Y - E[Y]|^2$$

$$P(|Y - E[Y]|^2 \geq \underset{a^2}{\epsilon}) \leq \frac{\sigma^2}{\underset{a^2}{\epsilon}}$$

scelto $a^2 = \epsilon$

$$P(|Y - E[Y]|^2 \geq \epsilon) = P(|Y - E[Y]|^2 \geq a^2) \leq \frac{\sigma_Y^2}{a^2}$$

in questo caso devo sapere la varianza, ma ho un quadrato al denominatore, meglio di $\frac{E[Z]}{\epsilon}$, meno così "sfavorevoli", più precisa (no grandi discostamenti)

Preso $Y = \mu_N$ da Chebyshev

allora $E[Y] = \mu$ e $\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$ y è specifica, x le contiene tutte

ottengo $P(|\mu_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\epsilon}$ formula iniziale generale