Esercizio 1

venerdì 13 novembre 2020 08:32

Esercizio 1. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(a,b) \lhd (c,d) \iff (a < c) \text{ OR } (a = c \text{ AND } b \leq d).$$

Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine. In caso affermativo, $\lhd$ coincide con qualche relazione d'ordine nota?

✓

Verifico le proprietà:

- RIFLESSIVA - $(a,b) \lhd (a,b) \longleftrightarrow (a < a)$ OR $(a = a$ AND $b \leq b)$ ✓
  $\underset{\perp}{(a<a)}$ $\underset{T}{(a=a \text{ AND } b\leq b)}$ $\to T$

- TRANSITIVA - se $(a,b) \lhd (c,d) \longleftrightarrow (a<c)$ or $(a=c$ AND $b \leq d)$
  e $(c,d) \lhd (e,f) \longleftrightarrow (c<e)$ or $(c=e$ AND $d \leq f)$
  $\to (a,b) \lhd (e,f) \longleftrightarrow (a<e)$ or $(a=e$ AND $b \leq f)$

  Se $a<c$ e $c<e$ allora è vero $a<e$

  Se la parte sx di or è falsa: se $a=c \wedge b \leq d$, E $c=e \wedge d \leq f$
  allora è vero $a=c=e$ E $b \leq d \leq f$ ✓
  $a=e$ $\quad b \leq f$

- ANTISIMMETRICA - se $(a,b) \lhd (c,d)$, $(c,d) \lhd (a,b) \longleftrightarrow (a,b)=(c,d)$

  $(a<c)$ or $(a=c$ AND $b \leq d)$

  $(c<a)$ or $(c=a$ AND $d \leq b)$

  sicuramente falso (se entrambe le $\lhd$ vere per ipotesi)

  ↳ dunque rimane il caso $a=c$ e $c=a$
  dove $b \leq d \wedge d \leq b$ è plausibile solo per $b=d$
  quindi $(a,b)=(c,d)$ ✓

Al momento è un POSET, presi $x=(a,b)$ e $y=(c,d)$ osservo che $\forall x,y$ vale $(x \lhd y) \vee (y \lhd x)$ allora ho UN ORDINE TOTALE

Coincide con l'ordine lessicografico LEX (osservo le cifre più a sx e se uguale osservo quelle a destra nelle coppie).

Esercizio 2

venerdì 13 novembre 2020 08:51

Esercizio 2. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbb{Z}$:

$$m \lhd n \iff m+n \in 2\mathbb{Z}^{\text{PARI}}$$

Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine. In caso affermativo, $\lhd$ coincide con qualche relazion d'ordine nota?

TUT

- RIFLESSIVA ? – $m \rhd m \iff \underbrace{m+m}_{2m} \in 2\mathbb{Z}$ ✓ ✓

- TRANS. ? – $m \rhd n,\ n \rhd k \Rightarrow m \rhd k$

$m+n \in 2\mathbb{Z}$ $\quad$ $m+k \in 2\mathbb{Z}$ ✓ ✓

$n+k \in 2\mathbb{Z}$

se $m=2,\ n=4,\ k=6$

$m+n = 6 \in 2\mathbb{Z}$

$n+k = 10 \in 2\mathbb{Z}$

$m+k = 8 \in 2\mathbb{Z}$

m, n, n posso prenderli o tutti pari o tutti dispari (perché devono rispettare $m+n \in 2\mathbb{Z}$ es. $\underset{\text{DIS}}{1} + \underset{P}{4} = 5 \notin 2\mathbb{Z}$)

- ANTISIMM. ? – $(m \rhd n) \wedge (n \rhd m) \Rightarrow m=n$ ✓

non necessariamente: $m = 2 \neq 4 = n$ ho $2+4=6 \in 2\mathbb{Z}$

Ho quindi un PREORDINE. ✓

Non coincide con $\rhd$ note. ✓

Esercizio 3

venerdì 13 novembre 2020 09:06

TUT

Esercizio 3. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $A = \{a,b,c,d\}$:

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(c,a),(a,d),(c,d),(b,c),(b,d),(b,a)\}.$$

Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine e in caso affermativo se è una relazione d'ordine totale.

$R \subseteq \mathcal{P}(X) \subseteq A^2$

- RIFLESSIVA? - associa le coppie (a,a), (b,b), (c,c), (d,d) ✓ (per a, per b, per c, per d)
- TRANS.? - per a ho (a,b), (b,c), (c,d) e dunque ho (a,d) ✓
- ANTISIMM.? - $\underset{a \trianglelefteq b}{(a,b)} \vee \underset{b \trianglelefteq a}{(b,a)} \longrightarrow a=b$ NO

↳ ovvero non ho la simmetria (non ho le coppie invertite)

Ho un ~~preordine~~

REL. ORD

Esercizio 4

venerdì 13 novembre 2020 09:14

Esercizio 4. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbb{N}$:

$$a \lhd b \iff b = 2^k a \text{ for some } k \in \mathbb{N}.$$

Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine e in caso affermativo se è una relazione d'ordine totale. Determinare, se esistono, elementi minimali e massimali, minimo e massimo.

cioè soddisfa le 3 proprietà (R, T, ANTI-S) ("almeno" è un POSET)

- RIFL? – $a \lhd a \iff a = 2^k a$ per delle $k \in \mathbb{N}$ (= $\exists k \in \mathbb{N}$) sì, per $k=0$.
- TRANS? – $a \lhd b,\ b \lhd c \Rightarrow a \lhd c$

$a \lhd b \iff b = 2^k a$

$c = 2^h b \iff b \lhd c \iff c = 2^k b = 2^k 2^k a = 2^{2k} a$

$a \lhd c \iff c = 2^k a$

$c = 2^{k+h} a$

$\Rightarrow \cancel{2^{2k}}\, \cancel{a} = \cancel{2^k}\, \cancel{a}$

$\Rightarrow 2^k = 1$

solo per $k=0$ (come sopra)

- ANTISIMM? – $(a \lhd b) \wedge (b \lhd a) \Rightarrow a = b$

$b = 2^k a \wedge a = 2^k b \Rightarrow \cancel{2^k} b = \cancel{2^k} a \Rightarrow b = a \iff a = b$ sì

$k \in \mathbb{N}$ $b = 2^k a$

$h \in \mathbb{N}$ $a = 2^h b$

$\Rightarrow b = 2^k 2^h b = 2^{k+h} b$ / $b = 0 \xrightarrow{b = 2^k a} a = 0$; $b \neq 0 \Rightarrow 2^{k+h} = 1$

$\Rightarrow k + h = 0 \Rightarrow k = 0 = h \Rightarrow b = a$

Ottengo un POSET (rel. ord. parziale)

$\forall a, b$ ho $(a \lhd b) \vee (b \lhd a)$ ovvero delle (almeno una) k che soddisfano le rel.?

Sì, nei casi come sopra le relazioni valgono per $k=0$ (vale per tutti i poset)

Ho un ~~ORDINE TOTALE~~. NO

3 e 7 non sono confrontabili:

$3 \lhd 7$? : $7 = 2^k \cdot 3$ ∄

$7 \lhd 3$? : $3 = 2^k \cdot 7$ ∄

(uno non divide l'altro)

- Preso $b = 2^k a$ in $\mathbb{N}$
  - non ho massimo, non ho elementi massimali (procedono all'infinito)
  - ho un minimo per $k=0$ (n° più piccolo in $\mathbb{N}$) N.B. Non ho i negativi

    ovvero $b = 2^0 a = 1 \cdot a = a$

    Dunque l'elemento minimale coincide con il minimo $= a$

$\forall x \in \mathbb{N}$ $x \lhd 2x$ $2x = 2^1 \cdot x$

$\forall x \in \mathbb{N} \qquad x \,\Delta\, 2x \qquad 2x = 2^1 \cdot x$

solo con se stesso $\quad$ $0 \,\Delta\, 0$ $\rightarrow$ 0 è sia minimale che massimale

$1 \,\Delta\, 2 \,\Delta\, 4 \,\Delta\, 8 \,\Delta\, 16 \,\Delta\, \dots$ $\quad$ non ci sono altri elementi massimali

$3 \,\Delta\, 6 \,\Delta\, 12 \,\Delta\, 24 \,\Delta\, \dots$

$5 \,\Delta\, 10 \,\Delta\, 20 \,\Delta\, 40 \,\Delta\, \dots$

$7 \,\Delta\, 14 \,\Delta\, 28 \,\Delta\, \dots$

i numeri dispari sono minimali (per infinite catene)

Se n dispari, $m \in \mathbb{N}$, $m \,\Delta\, n$ $\longrightarrow$ $n = 2^k \cdot m$ $\quad \| \rightarrow k=0 \rightarrow n=m$

n dispari

- ma i dispari non sono confrontabili $\rightarrow$ no minimo
- per quanto visto prima $\rightarrow$ no massimi

Esercizio 5

venerdì 13 novembre 2020 11:25

Esercizio 5. Sia $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ funzione}\}$ dotato della relazione:

$$f \triangleleft g \iff f(x) \leq g(x)\ \forall x \in \mathbb{N}.$$

Provare che $\triangleleft$ è una relazione d'ordine su A. Si tratta di una relazione d'ordine totale? Determinare, se esistono, elementi minimali e massimali, minimo e massimo.

- RIFL. $f \triangleleft f \leftrightarrow f(x) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{N}$? sì
- TRANS. $f \triangleleft g,\ g \triangleleft h \to f \triangleleft g$

  $f(x) \leq g(x),\ g(x) \leq h(x) \to f(x) \leq h(x)$? sì $\forall x \in \mathbb{N}$
- ANTISIMM. $(f \triangleleft g) \wedge (g \triangleleft f) \to f = g$

  $(f(x) \leq g(x)) \wedge (g(x) \leq f(x)) \to f(x) = g(x)$ sì $\forall x \in \mathbb{N}$

  non possono essere entrambi minori dell'altro, quindi vero quando uguali

È un POSET. $\forall x \in \mathbb{N}\ (f \triangleleft g) \vee (g \triangleleft f)$, vale sempre almeno una delle due (elementi confrontabili) ("entrambe" quando uguali; ma anche in quel caso ne scelgo una)

È un ~~ORDINE~~ TOTALE: ogni $x \in \mathbb{N}$ è un elemento confrontabile. no!

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ $\quad f, g$ non sono confrontabili (non vale $1 < 0$!)

oppure: $f(x) = Id_{\mathbb{N}}$ $\quad g(x) = 2$

$f(1) = 1 < 2 = g(1)$ ok

$f(3) = 3 \not< 2 = g(3)$ no! è $>$

non vale $\forall x$, infatti per $x=3$ ad esempio non viene rispettata $\triangleleft$. Dunque f e g non sono confrontabili e non ho ord. tot. $\hookrightarrow$ rispetto a $x = 3$

- non ho max né elementi massimali (procede all'∞) ✓

  data $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ prendo $g(x) = f(x) + 1 \nearrow f \triangleleft g$ non ho un elemento più grande degli altri

- ho un minimo in $\mathbb{N}$ ovvero $MIN = 0$ che è anche el. minimale (non ve ne sono di più piccoli).

  funzione nulla $\underline{0}(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{N}$

Esercizio 6

venerdì 13 novembre 2020 11:36

Esercizio 6. Si consideri l'insieme $A = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$, con la relazione d'ordine parziale $\subseteq$.

(1) Trovare gli elementi massimali.
(2) Trovare gli elementi minimali.
(3) Esiste un massimo?
(4) Esiste un minimo?
(5) Trovare tutti i maggioranti dell'insieme $B = \{\{2\},\{4\}\}$.

(6) Trovare l'estremo superiore dell'insieme $B = \{\{2\},\{4\}\}$, se esiste.
(7) Trovare tutti i minoranti dell'insieme $C = \{\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$.
(8) Trovare l'estremo inferiore dell'insieme $C = \{\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$, se esiste.

controllato (+UT)

non contenuto in altri insiemi → gli altri el. sono contenuti in

cardinalità più alta

$\{1,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}$

Considerato poset $(A, \subseteq)$

1) El massimali: $\{1,2,4\}, \{2,3,4\}$ in quanto contengono ($\subseteq$) più elementi di ogni altro insieme (e sono contenuti) ×

2) El minimali: sono i singoletti (hanno meno el. degli altri insiemi): $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ ✓✓

3) Non ho un max UNICO (ho 2 el. massimali e non vale $\subseteq$ per nessuno dei due) ✓✓

4) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ ho 4 minimali, non uno solo, quindi non ho MINIMO. ✓

5) $\{4\}$ è maggiorante × $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,4\}$ ↳ contengono 2 e 4 (insiemi $\in A$) È un confronto fra A e B

6) $\{4\}$ è sup B × $\{2,4\}$ ↳ più picc. dei maggioranti (cardinalità)

7) Minoranti: $\{1,2,4\}$ × $\{2,4\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ ↳ contengono qualcuno degli elementi di C

8) Inf C: $\{1,2,4\}$ × $\{2,4\}$ ↳ più grande dei minoranti

Esercizio 7

venerdì 13 novembre 2020 11:52

Esercizio 7. Si consideri il poset $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq\times\leq)$ e il sottoinsieme $A = \{(2,2),(2,3),(2,6),(4,3)\}$.

(1) Trovare gli elementi massimali e minimali di A.
(2) Trovare, se esistono, massimo e minimo di A.
(3) Trovare tutti i maggioranti e i minoranti di A.
(4) Trovare, se esistono, estremo inferiore e superiore di A.
(5) Si consideri A come sottoinsieme del poset $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \text{LEX})$ e si risponda alle domande dei punti (1) – (4) in questo caso.

TUT

non confrontabili (6 e 3)

(2,6) (4,3) → massimali

(2,3)

(2,2) → minimali

1) El. minimale: $(x,y) = (2,2)$ perché $\nexists$ altra coppia tale che $x \leq 2$ e $y \leq 2$ ✓

El massimale: $(x,y) = (2,6)$ e $(x,y) = (4,3)$ ✓

nessun'altra $(x \geq 2$ e $y \geq 6)$ e $(x \geq 4$ e $x \geq 3)$

{ (per togliere una coppia dovrei avere x e y contemporaneamente maggiori o uno delle due coppie)

2) Ho min: unico el. minimale: $(2,2)$ ✓

Non ho max, perché $(2,6)$ e $(4,3)$ non sono confrontabili per $\leq$

3) ~~Non ho maggioranti~~ perché non ho ~~coppie confrontabili~~

$\text{magg } A = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \geq 4 \wedge y \geq 6\}$ → più grande di tutte

Come minoranti ho $(2,2)$ che è minimo

$\text{min } A = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq 2 \wedge y \leq 6\}$

4) $\sup A = (4,6)$ → più piccolo di magg. , $\inf A = \min A = (2,2)$ ✓

$\leq (2,3) \leq (2,6) \leq (4,3)$ → $4 > 2$

5-1) Minimale $= (2,2)$ ✓, massimale $=$ ~~(2,6)~~, $(4,3)$ ✓

5-2) MIN $= (2,2)$ ✓, max $= (4,3)$ ✓ perché guardando x in (x,y) (parte sx della coppia) osservo $4 > 2$

5-3) Minoranti $=$ ~~(2,2)~~ $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < 2\} \cup \{\text{''} \mid x = 2, y \leq 2\}$, maggioranti $=$ ~~(4,3)~~ $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = 4 \text{ e } y \geq 3\}$

5-4) $\sup A = (4,3)$ ✓ $\inf A = (2,2)$ ✓

Coincidono rispettivamente con max e min

Esercizio 8

venerdì 13 novembre 2020 12:08

(TUT)

Esercizio 8. Si consideri il poset $(\mathbb{R}, \leq)$ e si determinino, se esistono, massimo e minimo, estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi:

$$\overset{1}{A} = (0,1),\ \overset{2}{B} = (0,1],\ \overset{3}{C} = (0,2] \setminus \{1\},\ \overset{4}{D} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\},\ \overset{5}{E} = \mathbb{Q},$$

$$\underset{6}{F} = \mathbb{N},\ \underset{7}{G} = D \cup \{-2\},\ \underset{8}{H} = \{\pi\},\ \underset{9}{I} = (-1,0) \cup (1,2),\ \underset{10}{J} = (-1,0] \cup [1,2).$$

1) $A = (0,1)$ intervallo di valori, no max, no min, no sup A, no inf A perché intervallo aperto
∞ el. sono più grandi di un certo el., non ho massimali

2) $B = (0,1]$ - max = 1, sup B = 1, no min, no inf B
(più grande dei $\underbrace{\text{massimali}}$ coincidono con il max se $\exists$)

3) $C = (0,2] \setminus \{1\}$ - max = 2, sup C = 2, no min, no inf C.

4) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ - max = 1 (con n = 1 (più piccolo)) = sup D, min non c'è, inf D = 0 (tende a zero ma non arriva) ✓

5) $E = \mathbb{Q}$ - no max, no sup E, no min, no inf D ✓

6) $F = \mathbb{N}$ - min = 0, inf F = 0, no max, no sup F

7) $G = D \cup \{-2\}$ - no max, no sup G, min = -2 = inf G

8) $H = \{\pi\} = \{*\}$ - $\forall x \in H$ ho $\leq$ valido, dunque non ho un valore più piccolo né più grande degli altri (sono tutti uguali). No max, no min, no sup H, no inf H.

9) $G = (-1,0) \cup (1,2)$ - minoranti: $(-\infty, -1]$ e maggioranti $[2, +\infty)$ ✓
non interessano
no min, no max, inf G = -1, sup G = 2
-1 e 2 non compresi
lo max dei minor. lo min dei magg.

10) $J = (-1,0] \cup [1,2)$ - uguale a 9) ✓

guardo gli estremi
"più estremi"

Esercizio 9

venerdì 13 novembre 2020 12:27

Controllore

Esercizio 9. Si consideri il poset $(\mathbb{R}^2, \mathrm{LEX})$ e i sottoinsiemi $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2\}$ e $B = [1,2] \times [1,3]$.

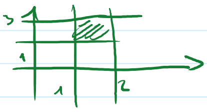
(1) Trovare, se esistono, massimo e minimo di A e B.
(2) Trovare tutti i maggioranti e i minoranti di A e B.
(3) Trovare, se esistono, estremo inferiore e superiore di A e B.

gli elementi di B sono compresi fra gli estremi :

$B = \{[1,1], [1,2], [1,3], [2,1], [2,3], [3,2], [3,1]\}$ $\to$ (gli elementi sono intervalli divisi) $\to$ $\{1 \le x \le 3$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

coppie di valori = intervalli

∄ ho infinite y che variano nelle coppie ∄



1) A : $\max = \cancel{2}$ (~~al max x può essere = 2~~), $\min = \cancel{1}$

B : $\max = (2,3)$, $\min = (1,1)$

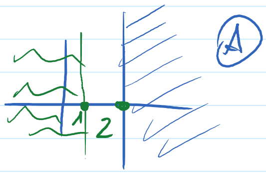
2 e' il maggiorante più piccolo, più grande di tutti gli el. dell'ins. A.

ho le x che variano

2) A : $\{$maggioranti$\} = [2, +\infty)$, $\{$minoranti$\} = (-\infty, 1]$

B : $\{$ " $\} = \{3, +\infty)$, $\{$ " $\} = \{-\infty, 1]$

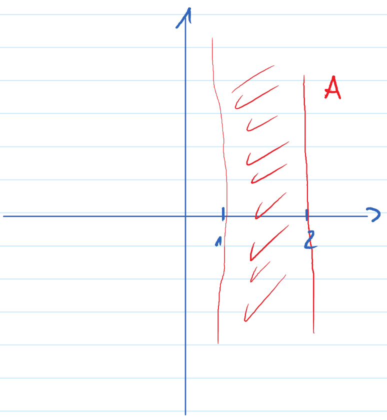
$\{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x > 2$
$\cup \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, y \ge 3\}$

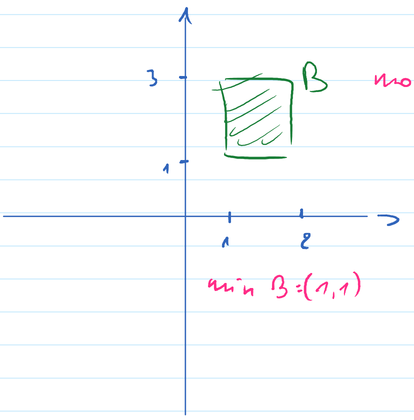


3) A : $\sup A = \min\{$maggioranti$\} = \cancel{2}$, $\inf A = \max\{$minoranti$\} = \cancel{1}$ ∄ sup A ∄ inf

guarda le x, ma la y varia (non ho un punto def.)

B : $\sup B =$ " $= (2,3)$ " max B , $\inf B =$ " $= (1,1)$ " min B





max B = (2,3)

min B = (1,1)

∄ max A ∄ max B

per assurdo $(x_0, y_0) = \max A$, $(x_0, y_0) \in A$, $(x_0, y_0 + 1) \in A$ $\quad (x_0, y_0+1) \triangleright_{LEX} (x_0, y_0)$ è più grande degli altri

$(x_0, y_0 - 1) \in A$ $\quad (x_0, y_0 - 1) \triangleleft_{LEX} (x_0, y_0)$

no minimo in A e B

maggioranti di A $\{x > 2\}$ ∄ sup A ∄ inf A

minoranti di A $\{x < 1\}$

maggioranti di B $\{x > 2\} \cup \{(x = 2) \wedge y \ge 3)$

minoranti di B $\{x < 1\} \cup \{(x = 1) \wedge (y \le 1)\}$

maggioranti di B $\{x > 2\} \cup \{(x = 2) \wedge y \geq 3)$

minoranti di B $\{x < 1\} \cup \{(x = 1) \wedge (y \leq 1)\}$

Esercizio TUT

giovedì 3 dicembre 2020 11:52

Dato I generico, $A = \mathcal{P}(I)$

Relazione d'ordine $\triangleq$ presi $X, Y \in A$ $X \triangleq Y \iff X \subseteq Y$ e $|Y \setminus X| = 2n$
cord.
$n \in \mathbb{N}$ pari

$I = \{1,2,4,7\}$ per esempio

$X = \{2,4\}$
$X \subseteq Y$ ma $|\{7\}| = 1 \neq$ pari
$Y = \{2,4,7\}$

$Y = \{1,2,4,7\}$ $X \subseteq Y$ e $|\{1,7\}| = 2 =$ pari

E' rel. d'ordine?

1) riflessiva? $X \triangleq X \iff X \subseteq X$ ✓ e $|X \setminus X| = 0$ pari **ok**

2) antisimm.?

$$\left.\begin{array}{l} X \triangleq Y \to X \subseteq Y \\ Y \triangleq X \to Y \subseteq X \end{array}\right\}$$ l'unica possibilità $X = Y$ **ok**

3) transitiva? $X, Y, Z \in \mathcal{P}(I)$ tesi $X \triangleq Z$

$$\left.\begin{array}{l} X \triangleq Y \to X \subseteq Y \dots \\ Y \triangleq Z \to Y \subseteq Z \dots \end{array}\right\} \underline{X \subseteq Z}$$

... e $|Y \setminus X|$ e' pari

... e $|Z \setminus Y|$ e' pari

tutto ciò che non e' in X

① $X \subseteq Y \to Y = X \cup (Y \setminus X)$

② $Y \subseteq Z \to Z = \underline{Y} \cup (Z \setminus Y)$

$Z = X \cup (Y \setminus X) \cup (Z \setminus Y)$

"sposto la X" $Z \setminus X \subseteq (Y \setminus X) \cup (Z \setminus Y)$

proprietà delle cardinalità $|Z \setminus X| \leq |Y \setminus X| + |Z \setminus Y|$
pari pari

per Hp
$X, Y, Z \in A$, Z e' finito
per rispettare che $\in \mathcal{P}(I)$
si suppone che $\leq$ in realtà e' proprio $=$

somma di pari e' pari, allora $\underline{|Z \setminus X| \text{ e' pari}}$

- Dato il poset $(A, \trianglelefteq)$, def elementi massimali e minimali in A

Consideriamo $X \in \mathcal{P}(I)$ $\quad |X| \geq 2$

$\exists x, y \in X$, $x \neq y$, $Y = X \setminus \{x, y\}$

- $Y \trianglelefteq X$ $\longrightarrow$ minimali di X sono $|X \setminus Y|$ pari per la cond. $|X| \geq 2$

- se $|X| \leq 1$, minimale di X è $\{\emptyset\}$

se $|X| = 0$ allora $X = \emptyset$