Soluzioni - W4

E4.1 Data la v.a. Continua X con pdf $f(x) = Cx^3$ definita nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$, si chiede di:

- Determinare il valore di C.
- Determinare la probabilitá $P\{\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\}$
- Calcolare $E[X^2]$ e $Var(X)$.

Soluzione

- $\int_0^{3/2} Cx^3 dx = 1 \Leftrightarrow C = \frac{64}{81}$
- $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{64}{81} x^3 dx = \frac{80}{81} \approx 0.988$
- $E[X^2] = \int_0^{3/2} Cx^5 dx = 1.5$
  per calcolare la varianza devo prima calcolare $E[X] = \int_0^{3/2} Cx^4 dx = 1.2$
  $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 1.5 - 1.44 = 0.06$

E4.2 Mostra che, per a e b costanti, e X variabile aleatoria continua: $E[aX + b] = aE[X] + b$, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Soluzione
$E[aX + b] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(ax + b)\mathrm{d}x = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x\mathrm{d}x + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = aE[X] + b$, mentre per la varianza $Var(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(ax + b - aE[X] - b)^2 \mathrm{d}x = a^2 Var(X)$.

E4.3 Sia X una variabile casuale distribuita uniformemente sull'intervallo $[0, 2]$. Calcolare $E[2^X]$ e $\mathrm{Var}[2^X]$.

Soluzione
$E[2^X] = .5 \int_0^2 2^x dx = .5 \frac{2^x}{\log 2}|_0^2 = \frac{2}{\log 2}$. Per la varianza si ha che $Var[2^X] = E[(2^X)^2] - E[2^X]^2$. Con $E[(2^X)^2] = .5 \int_0^2 2^{2x} dx = \frac{15}{4 \log 2}$

E4.4 Data la v.a. Continua con distribuzione normale $X \sim \mathcal{N}(3, 9)$ si chiede di determinare i valori reali di a e b, tali per cui la trasformazione $Y = aX + b$ risulta avere una distribuzione del tipo $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Soluzione
$a = \frac{1}{3}$ e $b = -1$

E4.5 Un autobus passa ogni 15 minuti dalle 8 in poi. Calcola la probabilità di aspettarlo meno di 5 minuti e più di 10 minuti arrivando tra le 8 e le 9, considerando il tempo di arrivo del passeggero alla fermata come una distribuzione uniforme tra le 8 e le 9.

Soluzione

Un possibile svolgimento è il seguente:
se il tempo di arrivo alla fermata è distribuito uniformemente tra le 8 e le 9, aspetti meno di 5 minuti arrivando dopo le 8.10, 8.25, 8.40 o 8.55 e più di 10 arrivando prima delle 8.5, 8.20, 8.35 o 8.50. Dunque:

$$P\{8.10 < x < 8.15\} + P\{8.25 < x < 8.30\} + P\{8.40 < x < 8.45\} + P\{8.55 < x < 9\} =$$

$$P\{8.0 < x < 8.5\} + P\{8.15 < x < 8.20\} + P\{8.30 < x < 8.35\} + P\{8.45 < x < 8.5\} = 1/3.$$