ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

FOGLIO DI ESERCIZI 5

Esercizio 1. Provare, usando il principio di induzione, le seguenti affermazioni:

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$;
(2) $1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$;
(3) $1+4+7+\cdots+(1+3n)=\frac{3n^2+5n+2}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$;
(4) Se $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ per ogni $n>0$ si ha $1+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$;
(5) Un insieme finito che ha n elementi ha 2^n sottoinsiemi;
(6) n^3-n+6 è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{N}^*$;
(7) 8^n+6 è divisibile per 14 per ogni $n \in \mathbb{N}^*$;
(8) $n! > 2^n$ per ogni $n \geq 4$.

Esercizio 2. Siano A e B due insiemi non vuoti e $f: A \to B$ una funzione. Consideriamo il grafico di f, cioè $\Gamma_f = \{(x,y) \in A \times B : \; y = f(x)\}$. Provare che A e Γ_f sono equipotenti.

Esercizio 3. Provare che l'insieme $\mathbb{Z} \setminus (5\mathbb{Z})$ è numerabile, dove $5\mathbb{Z} = \{5k : \; k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 4. Siano $A = \{a,e,i,o,u\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} : \; |x| \leq 2\}$. Determinare la cardinalità degli insiemi seguenti:

$$\mathscr{P}(A),\ B \cap C,\ B \cup C,\ A \cup (B \cap C),\ A \times B,\ B \times A,\ \mathscr{P}(A \times B),\ \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B),$$

$$A^A = \{f : A \to A \text{ funzione}\},\ D = \{f : A \to A \text{ funzione bigettiva}\}$$

$$\mathscr{P}(A)^B = \{f : B \to \mathscr{P}(A) \text{ funzione}\},\ B^{\mathscr{P}(A)} = \{f : \mathscr{P}(A) \to B \text{ funzione}\}.$$

Esercizio 5. Stabilire se l'insieme $\{n^2 : \; n \in \mathbb{Z}\}$ è numerabile oppure no.

Esercizio 6. Siano A e B due insiemi numerabili. E' vero che $A \times B$ è numerabile?

Esercizio 7. Si considerino gli insiemi $A = \big\{f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c\} \text{ funzione tale che } f(1) = a\big\}$ e $B = \big\{f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c\} \text{ funzione tale che } f(3) = f(4) = b\big\}$. Determinare la cardinalità degli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, A^B, B^A.

Esercizio 8. Determinare, se possibile, un'applicazione bigettiva $f : A \to B$ tra le seguenti coppie di insiemi:

(1) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{\text{nord, sud, ovest, est}\}$;
(2) $A = 2\mathbb{Z}$, $B = 9\mathbb{Z}$;

(3) $A = \{1\}$, $B = \{\{42\}\}$;
(4) $A = \{a,b,c\}$, $B = \mathscr{P}(\{1,2\})$;
(5) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{R}^2$;
(6) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$;
(7) $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :\ x + 2y = 3\}$, $B = \{n^3 :\ n \in \mathbb{Z}\}$;
(8) $A = \mathscr{P}(C)$, $B = D^3$, dove $C = \{\text{Ronaldo}, \text{Morata}, \text{Dybala}\}$ e $D = \{\triangle, \bigtriangledown\}$

Esercizio 9. Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente $A/\sim$ per gli insiemi e le relazioni di equivalenza seguenti:

(1) $A = \mathbb{Z}$ con $x \sim y \iff |x| = |y|$;
(2) $A = \mathbb{Z}$ con $x \sim y \iff x - y = 12k,\ k \in \mathbb{Z}$;
(3) $A = \mathbb{Z}$ con $x \sim y \iff x - y = k,\ k \in \mathbb{Z}$;
(4) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ con la relazione d'equivalenza diagonale, cioè $x \sim y \iff x = y$;
(5) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ con $x \sim y \iff x - y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$;
(6) $A = \mathbb{Z}$ con $x \sim y \iff x - y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$;
(7) $A = \mathbb{N}$ con $x \sim y \iff x - y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$.