1 Esercizi aa. 19/20: foglio 1: insiemi e funzioni

Esercizio 1.1. Sia X un insieme non vuoto. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?

1. $\varnothing \subset X$.
2. $\varnothing \in X$.
3. $\{\varnothing\} \subset X$.
4. $\varnothing \subset \mathbb{P}(X)$.
5. $\varnothing \in \mathbb{P}(X)$.
6. $\{\varnothing\} \subset \mathbb{P}(X)$.
7. $\mathbb{P}(\varnothing) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Esercizio 1.2. Determinare i seguenti insiemi e disegnarli.

$$\begin{array}{ll}
A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}, & B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 5 \geq 0\}, \\
C = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) \leq 0\}, & D = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 8 = 0\}, \\
E = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 6x + 5 \geq 0\}, & F = \{x \in \mathbb{Q} : (x-\pi)(x - \dfrac{1}{2}) = 0\}, \\
G = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 8\}, & H = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq [x] < 3\}, \\
I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 4\}, & L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}, \\
M = I\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 4\}, & N = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.
\end{array}$$

Esercizio 1.3. Siano $X = [0,5)$, $Y = [2,4]$, $Z = [1,3]$ e $W = (3,5)$ intervalli in $\mathbb{R}$. Determinare gli insiemi :

$$Y \cup Z,\ Z \cap W,\ Y \setminus W,\ (X \cap Y) \cup Z,\ X \setminus (Z \cup W).$$

Determinare e disegnare in $\mathbb{R}^2$ l'insieme $X \times W$.

Esercizio 1.4. Siano G l'insieme degli interi pari, H l'insieme degli interi multipli di 3, $I = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 \text{ è dispari}\}$ e $J = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq n \leq 10\}$. Determinare gli insiemi:

$$G \cup I,\ G \cap I,\ G \cap H,\ J \setminus G,\ I \setminus H,\ J \cap (G \setminus H).$$

Esercizio 1.5. Siano X, Y e Z tre insiemi. Provare che

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z).$$

Provare o trovare un controesempio all'affermazione

$$X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z).$$

Esercizio 1.6. Provare che

$$(X \times Y = X \times Z) \wedge (X \neq \varnothing) \implies Y = Z.$$

Esercizio 1.7. Determinare $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ nei seguenti casi:

1. $B_n = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$;
2. $B_n = \{n-1, n, n+1\}$;
3. $B_n = \{n+3, n+10\}$.

Esercizio 1.8. Determinare i seguenti insiemi e disegnarli.

$$\begin{aligned}
&A = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) = 2\}, && B = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) = -1\}, \\
&C = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4\}, && D = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \frac{\pi}{4}\}, \\
&E = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}, && F = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}, \\
&G = \{z \in \mathbb{C} : 3 \leq |z| \leq 5\}, && H = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Re}(z) > 0\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.9. Sia $f \colon X \to Y$ una funzione. Siano A, $B \subset X$ e C, $D \subset Y$. Provare o confutare le seguenti affermazioni:

1. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
5. $\complement_X(f^{-1}(C)) = f^{-1}(\complement_Y(C))$.
6. $\complement_Y(f(A)) = \complement_Y(f(A))$.

Esercizio 1.10. Siano

$$
\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, && f(x,y)=\frac{|x|+|y|}{2},\\
&g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, && g(x,y)=\frac{|x|-|y|}{2},\\
&h\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, && h(x,y)=[x]-[y], \qquad ([x],[y] \text{ sono le parti intere di } x \text{ e } y).
\end{aligned}
$$

Dire se f, g e h sono iniettive e trovare le immagini $f(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $h(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Esercizio 1.11. Sia $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $f(z)=\Re\mathfrak{e}(z)+\Im\mathfrak{m}(z)$. Dire se f è iniettiva e surgettiva. Determinare $f^{-1}(0)$.

Esercizio 1.12. Sia $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$, $f(x)$ è la somma delle cifre di x in base 2. Dire se f è iniettiva e surgettiva. Determinare $f^{-1}(0)$.

Esercizio 1.13. Sia $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(x,z)=xz$. Dire se f è iniettiva e surgettiva. Determinare $f^{-1}(0)$.

Esercizio 1.14. Sia X un insieme. Sia f la relazione su $\mathbb{P}(X)$ definita da

$$\forall A,B\in\mathbb{P}(X).(A,B)\, f\,(A\smallsetminus B).$$

Dire se f è una funzione e, in caso affermativo determinare il dominio, il condominio, l'immagine. Dire se f è iniettiva.

Esercizio 1.15. Sia X un insieme. Sia $\mathcal{R}$ la relazione su $\mathbb{P}(X)$ definita da

$$\forall A,B\in\mathbb{P}(X).(A\,\mathcal{R}\,B \iff A\smallsetminus B=\varnothing).$$

Dire se R è una relazione d'equivalenza.

Esercizio 1.16. Sia X l'insieme dei triangoli del piano e Y il sottoinsieme di X dei triangoli equilateri. siano date le mappe

$$f\colon X\to\mathbb{R}_{>0},\quad \forall T\in X, f(T)= \text{ perimetro di } T$$

e

$$g\colon X\to\mathbb{R}_{>0},\quad \forall T\in X, f(T)= \text{ area di } T.$$

Dire se f e g sono iniettive o surgettive. Dire se le restrizioni $f|_Y$ e $g|_Y$ di f e g a Y sono iniettive o surgettive.