Esercizio 1

sabato 14 novembre 2020 10:26

Esercizio 1. Si dimostri la seguente *identità del bastone da hockey*:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1} \text{ per } r, n \in \mathbb{N},\ n \geq r.$$

Controllare

Dimostrabile per induzione:

numeri più piccoli $\rightarrow r = n = 0 \in \mathbb{N}$ e $i = r$ PASSO BASE

ovvero $\binom{0}{0} = \binom{0+1}{0+1} \rightarrow \frac{0!}{0! \cdot 0!} = \frac{1!}{1! \cdot 1!} \rightarrow 1 = 1$ ✓

PASSO INDUTTIVO: se vale per $i_1 = r$ allora vale anche per $i_2 = r+1$

Poiché ho una sommatoria, basta sommare il fattore successivo in Σ $\rightarrow \binom{i_1}{r} + \binom{i_2}{r} = \binom{n+1}{r+1} + \binom{i_2}{r}$

aggiungo da entrambe le parti per lasciare vera l'uguaglianza

$$\rightarrow \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} = \binom{n+1}{r+1} + \binom{r+1}{r}$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{r!}}{\underbrace{(r-r)!}_{0!=1}\,\cancel{r!}} + \frac{(r+1)!}{(\cancel{r}+1-\cancel{r})!\,r!} = \frac{(n+1)!}{(n+\cancel{1}-r-\cancel{1})!\,(r+1)!} + \frac{(r+1)!}{(r+1-r)!\,r!}$$

$$\rightarrow 1 + \frac{(r+1)!}{r!} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!} + \frac{(r+1)!}{r!}$$

$$\rightarrow 1 + \frac{(r+1)\cdot\cancel{(r+1-1)!}}{\cancel{r!}}$$ $\rightarrow$ estraggo un valore dal fattoriale $$= \frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!} + r + 1$$

$n \geq r$

se $n = r \rightarrow r + 2 = \frac{\cancel{(r+1)!}}{0! \cdot \cancel{(r+1)!}} + r + 1 \rightarrow r+2 = r+2$ ✓

se $n > r \rightarrow r+2 = \frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!} + r + 1$

preso $n = 2$ e $r = 1$

$3 = \frac{6}{2} + 2 \rightarrow 3 \neq 5$?

Controllo sostituendo $i = r+1$ a $\sum \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

$\binom{r+1}{\ }$ $\binom{n+1}{\ }$ $(r+1)!$ $(n+1)!$

$$\binom{r+1}{r} = \binom{n+1}{r+1} \longrightarrow \frac{(r+1)!}{(\cancel{r}+1-\cancel{r})!\, r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r-1)!\,(r+1)!}$$

$$\longrightarrow \frac{(r+1)\cdot \cancel{r!}}{\cancel{r!}} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!}$$

vale per $n \geq r$: se $n=r$ $\longrightarrow$ $r+1 = \dfrac{\cancel{(r+1)!}}{0!\cdot\cancel{(r+1)!}}$ $\longrightarrow$ $r+\cancel{1} = \cancel{1}$ $\longrightarrow$ $r=0$

Esercizio 2

sabato 14 novembre 2020 10:56

$\boxed{\text{TUT}}$ ✓

Esercizio 2. Si dimostri la seguente identità:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ per } k, n \in \mathbb{N},\ n \geq k \geq 1$$

Ritaglio schermata acquisito: 14/11/2020 10:56

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}_{=}$$

$$\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$(n-k-1)! = \frac{(n-k)!}{n-k} \quad \text{infatti} \quad \frac{\cancel{(n-k)}(n-k-1)!}{\cancel{n-k}} = (n-k-1)!$$

$$k! = k(k-1)! \rightarrow (k-1)! = \frac{k!}{k}$$

$$\rightarrow \frac{(n-1)!}{k!\,\frac{(n-k)!}{n-k}} + \frac{(n-1)!}{\frac{k!}{k}\,(n-k)!}$$

$$\rightarrow \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(n-\cancel{k}+\cancel{k})}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Esercizio 3

sabato 14 novembre 2020 11:22

TUT

Esercizio 3. Una targa automobilistica è composta da due lettere (A-Z) seguite da tre cifre (0-9) e poi altre due lettere (A-Z). Quante distinte targhe automobilistiche si possono formare in questo modo?

TARGA : $\underbrace{a_1\ a_2\ n_1\ n_2\ n_3\ a_3\ a_4}_{7}$ con a = lettere e n = cifre

si moltiplicano le possibilità

L'ordine conta : $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 10^3 \cdot 26^4 = 4{,}57 \cdot 10^8$ targhe distinte ✓

e posso ripetere stesse lettere/numeri

posso scegliere tra 26 lettere

" tra 10 cifre

oppure posso considerare $k = 7$ posti , n° oggetti = $26 + 10$

Esercizio 4

sabato 14 novembre 2020 11:29

Esercizio 4. Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre decimali tali che il prodotto delle quattro cifre sia 420?

Ritaglio schermata acquisito: 14/11/2020 11:29

$420 = 42 \cdot 10 = 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Poiché posso utilizzare solo 4 cifre, queste possono essere scelte fra 4, 3, 5, e 7 (divisori di 420). I numeri richiesti altro non sono che i numeri specificati disposti in modi differenti (es. 4357, 7345 ecc..)

= permutazione senza ripetizione : $\underset{\text{cifre}}{4}! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ numeri naturali diversi di 4 cifre

N.B. Posso anche effettuare le disposizioni senza ripetizione:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

posso scegliere fra 4 cifre   fra 3   fra 2   ne rimane 1

Esercizio 5

sabato 14 novembre 2020 11:42

(TUT)

Esercizio 5. Quanti numeri interi ci sono tra 1 e $1000000 = 10^6$ che non sono nè un cubo nè un quadrato di un intero?

QUADRATO $\longrightarrow$ 1000 $(1000^2 = 10^6)$

$\downarrow$

n° il cui quadr è 10^6?

ho mille numeri t.c. i quadrati sono compresi fra 1 e 10^6

CUBO $\longrightarrow$ 100 $(100^3 = 10^6)$

tra 1 e 100 ho 100 numeri i cui cubi sono compresi fra 1 e 10^6

Devo anche togliere i numeri che sono quadrati e cubi (10)

$$N_{TOT} = 10^6 - 1000 - 100 - 10$$

Esercizio 6

sabato 14 novembre 2020 11:59

TUT

Esercizio 6. Quanti numeri di 6 cifre distinti possono essere costruiti utilizzando soltanto le cifre 1, 2, 3?

Ritaglio schermata acquisito: 14/11/2020 12:00

Ho 3 cifre riutilizzabili : 1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 6ª cifr.

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$ numeri da 6 cifre distinti

✓

oppure

- oggetti $n = 3$
- posti $k = 6$
- conta l'ordine (ord diverso = differenti num)
- possono ripetersi

disposizione con ripetizione n^k

$3^6 = 729$

Esercizio 7

sabato 14 novembre 2020 12:01

TUT

Esercizio 7. Fra i 33 studenti di una classe, 18 giocano a calcio, 17 a basket e 4 non praticano alcuno sport. Quanti sono gli studenti che giocano sia a calcio che a basket?

↳ rispetto a C e B

33 TOT
- 18 C
- 17 B
- 4 N

$33 - 4 = 23$ praticanti sport

$18 + 17 = 35 \quad - 23 = 6$ ho un "eccesso" di studenti rispetto a quelli praticanti uno sport

Per includere questi 6 nei 23 significa che 6 studenti praticano C e B.

$33 - 18 - 4 = 11$ studenti né giocano a calcio né fanno altri sport (rispetto B e C) $\longrightarrow$ 11 giocano a basket

ma altri 6 studenti giocano a basket, ma allora 6 fanno un altro sport che secondo il contesto è il calcio, quindi 6 giocano a B e C.

33 studenti

18 calcio

17 basket

4 no sport

Tolgo prima gli studenti no sport: $33 - 4 = 23 = N_{SPORT}$

$N_{CALCIO} = 23 - \underbrace{17}_{BASKET} = 12$

$N_{BC} = \underbrace{\text{studenti C+B}}_{18} - \underbrace{\text{studenti C}}_{12} = 6$

Esercizio 8

sabato 14 novembre 2020 12:12

TUT

Esercizio 8. In un'urna ci sono 100 palline bianche, 100 rosse e 100 nere. Determinare quante bisogna estrarne contemporaneamente per
(1) essere sicuri di averne almeno 5 dello stesso colore;
(2) essere sicuri di averne almeno 5 rosse.

↳ CASI PEGGIORI

300 palline tot.

1) Nel peggior dei casi devo estrarre tutti i colori diversi da uno scelto e le rimanenti saranno di uno stesso colore, le successive estrazioni avranno stesso colore

Quindi ne estraggo 200 + 5 = ~~205~~ per essere sicuro di pescarne 5 di uno stesso colore

1 N | 1B | 1R
1 N | 1B | 1R
1 N | 1B | 1R
1 N | 1B | 1R
1 N |
↳ 1B o 1R

caso peggiore (3 palline di colori diversi ogni volta che ne estraggo una (si pensi linearmente))

N = 13 palline almeno per averne 5 di uno stesso colore

[PROBABILITA'] P (5 palline stesso colore)?

$$P(\text{Evento}) = \frac{\text{CASI FAVOREVOLI}}{\text{CASI POSSIBILI}}$$

NO ORDINE, NO RE-INSERIMENTO

$$C_{300,5} = \binom{300}{5} = \frac{300!}{5!\,295!} = \frac{300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot 297 \cdot 296 \cdot \cancel{295!}}{5!\,\cancel{295!}}$$

CASI POSSIBILI (combinazioni di estrazione)

I CASI FAVOREVOLI sono le combinazioni di come posso estrarre 5 palline in uno stesso gruppo di colore (diverse)

$$C_{100,5} = \underbrace{\frac{100!}{5!\,95!}}_{\text{di un solo colore}} \cdot 3$$

→ 3 colori diversi

2) Sono 205, ho estratto 100 N e 100 B, infine 5 rosse nel peggiore dei casi.

per essere certi di almeno 5 rosse

esatto, se voglio esattamente 5 rosse, può succedere nel PEGGIORE DEI CASI di pescare prima tutte quelle nere, poi quelle bianche, infine rimangono le rosse.

Esercizio 9

sabato 14 novembre 2020 12:30

TUTTI ✓

Esercizio 9. Una password è costituita da 6 cifre (tra 0 e 9), tutte diverse. Determinare il massimo numero di tentativi necessario per indovinare la password giusta.

Corrisponde al n° di differenti digitazioni delle varie cifre

una password è così fatta:

1^a	2^a	3^a	4^a	5^a	6^a	cifra (diverse fra loro)
10	9	8	7	6	5	

cifre utilizzabili

$= \underline{151200}$ password che si possono creare, nonché i vari tentativi possibili.

Esercizio 10

sabato 14 novembre 2020 13:11

TUT

Esercizio 10. Determinare il coefficiente di x^3 nello sviluppo del polinomio $(x+2)^8$.

Per il teorema binomiale e il triangolo di tartaglia

$n = 8$ $\quad k = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$\quad\quad\quad\quad x^8 \quad x^7 \quad x^6 \quad x^5 \quad x^4 \quad x^3$

quindi il coefficiente di $x^3 = \binom{8}{5} = 56$

Per il binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(x+2)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^{8-k} - 2^k$$

per quale k ottengo x^3?

$8-k = 3 \rightarrow k = 5$

$k=5$ Considero il 6° elemento della somma (parte da zero)

$$\binom{8}{5} 2^5 = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot 32 = 56 \cdot 32 = 1792$$ coefficiente di x^3

Esercizio 11

sabato 14 novembre 2020 13:16

Esercizio 11. Determinare quante sono le combinazioni al superenalotto (cioè le sestine composte da 6 numeri distinti tra 1 e 90) che contengono esattamente tre numeri pari.

↳ gli altri sono dispari

Ritaglio schermata acquisito: 14/11/2020 13:17

in 90 numeri ho $90/2$ n pari (0 escluso) = 45 e 45 dispari

→ 1° 2° 3° 4° 5° 6° numero

$\underbrace{45 \cdot 44 \cdot 43}_{\text{n dispari}} \cdot \underbrace{45 \cdot 44 \cdot 43}_{\text{n pari}} \cdot \underbrace{6!}_{\text{n° permutazioni}} = \cancel{5,218 \cdot 10^{12}}$ combinazioni.

n° permutazioni (in quanti modi posso posizionare 6 numeri diversi)

estraggo 3 pari e 3 dispari

$\binom{45}{3}\binom{45}{3} \longrightarrow \binom{45}{3}^2$

↳ "quante combinazioni per estrarre 3 pari"?