TdII 2021 - primo compito

pubblicato: 9 Marzo 2021; **scadenza consegna: 11 Marzo 2021, ore 08:00**

I problemi contrassegnati con $(*)$ sono per la lode.

1. Un'urna contiene 6 palline bianche e 4 rosse. Si estraggono 3 palline. Qual è la probabilità che venga estratta 1 pallina bianca e 2 rosse?
2. Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?
3. $(*)$ Sei in una classe di n persone. Qual è la probabilità che qualcuno dei tuoi compagni sia nato nel tuo stesso giorno? Per quale valore di n la probabilità è superiore al 50%?
4. Si supponga che il 70% degli studenti che si presentano ad un esame abbiano preparazione sufficiente. L'esame viene superato dal 90% degli studenti preparati e dal 2% degli studenti impreparati. Si calcolino:
   a) la probabilità che uno studente scelto a caso superi l'esame;
   b) la probabilità che uno studente che ha passato l'esame sia in effetti impreparato.
5. Un'urna contiene due monete di tipo A e una moneta di tipo B. La probabilità di ottenere testa è $2/5$ lanciando una moneta di tipo A e $4/5$ lanciando una moneta di tipo B. Se ottieni testa dal lancio di una moneta estratta a caso dall'urna, con quale probabilità è una moneta di tipo A?
6. Dimostra che due eventi indipendenti non possono essere mutuamente esclusivi, a meno che uno dei due eventi non abbia probabilità nulla.
7. $(*)$ Sia X il numero più piccolo estratto in un'estrazione di 2 palline, senza reinserimento, da un'urna contenente 10 palline numerate da 1 a 10. Assumendo equiprobabilità, calcolare la funzione di probabilità di massa di X.
8. Al tiro a segno, il 10% dei giocatori hanno probabilità 0.8 di colpire il bersaglio, il 30% probabilità 0.5, e il 60% probabilità 0.2. Ogni tiro costa 1 euro, e ogni centro dà in premio 5 euro. Calcola il valore atteso e la varianza della vincita di un partecipante con un singolo tiro.

9. ($*$) Sia X una variabile casuale discreta. Dimostra che $Var(X) = 0$ se e solo se esiste una costante c tale che $P\{X = c\} = 1$.

10. ($*$) Consideriamo una sequenza infinita di prove indipendenti. Sia S lo spazio campione di ogni prova. Fissiamo in esso un particolare evento E. In ogni prova, diciamo che si ha un successo se si verifica E, il che accade con probabilità $p = P(E)$, e un insuccesso altrimenti (con probabilità $1 - p$). Indichiamo con S_n il numero di successi su n prove. Calcolare la probabilità dell'evento

$$A_n = \{\text{almeno un successo nelle prime } n \text{ prove}\} = \{S_n \geq 1\}.$$