ex 1

$A = \mathbb{Z}_5 \quad |A| = 5$
$B = \mathbb{Z}_6 \quad |B| = 6$

Cattaneo Kevin
S4844382

- $R = \mathcal{P}(A) \times B$

$$\# R = \# \mathcal{P}(A) \cdot \# B$$
$$= 2^{\# A} \cdot 6$$
$$= 2^5 \cdot 6$$

- $S = \{ f : B \to A \mid f \text{ iniettiva} \}$

$\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_5$

| | |
|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{5}$ | |

necessariamente un elemento di $\mathbb{Z}_6$ raggiunge un elemento di $\mathbb{Z}_5$ già mappato ~~con~~ da un altro elemento di $\mathbb{Z}_6$

$|S| = 0$ non ho funz. iniettive $\quad |B| > |A|$

- $T = \{ f : A \to B \mid |f(A)| = 1 \}$

$\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_6$ ↳ ho solo una possibilità (l'immagine per tutti gli elementi di A è solo una, che posso scegliere fra 6 elementi)

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| | 5 |

$|T| = 6$

ex 2 | $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ $\qquad f(x,y) = 12x + 21y$

equazione diofantea

$MCD(12,21) = ?$ $\qquad 21 = 1 \cdot 12 + 9$ $\qquad$ posso semplificare

$= 3$ $\qquad 12 = 1 \cdot 9 + 3$ $\to$ l'equazione per l'MCD

$9 = 3 \cdot 3 + 0$ $\qquad 3 = 12x + 21y$

$\to 1 = 4x + 7y$

Dunque questa equazione ha soluzione per un certo $k$ t.c. $MCD(12,21) \mid k$

ovvero $3 \mid k$

non tutti gli elementi di $\mathbb{Z}$ sono raggiunti, es. $k = 2$

NON SURGETTIVA $\qquad 3 \nmid 2$

Inoltre posso scrivere le soluzioni di questa equazione come

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot n + 21k \\ y = y_0 \cdot n - 12k \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, $x_0$ e $y_0$ una soluzione particolare

data $f(x,y) = 12x + 21y = n$

NO INIETTIVA

- ~~$f^{-1}$~~ Calcolo una soluzione $(x_0, y_0)$ di $12x + 21y = 3$

$3 = 12 - 9 = 12 - (21 - 12) = 2 \cdot 12 - 1 \cdot 21$

$\Rightarrow x_0 = 2, \; y_0 = -1$

- $f^{-1}(0)$ $\quad$ 0 è la soluz. dell'equazione per una certa $x_0, y_0$

$\to f^{-1}(0) = \{(7k, -4k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ insieme infinito

$3 \mid 0$ ✓ $\qquad$ scelte $x_0 = y_0 = 0$

(non è infatti iniettiva, posso trovare zero con più valori di $k$) | pag #2 ex 2 - continuo

- $f^{-1}(1) \to 3 \nmid 1$, 1 non è soluzione dell'equazione

  $f^{-1}(1) = \emptyset$

- $f^{-1}(15) \to 3 \mid 15$ ✓

  dato ~~$3 = 2\cdot 12 + (-1)\cdot 21$~~ $1 = 2\cdot 4 + (-1)\cdot 7$

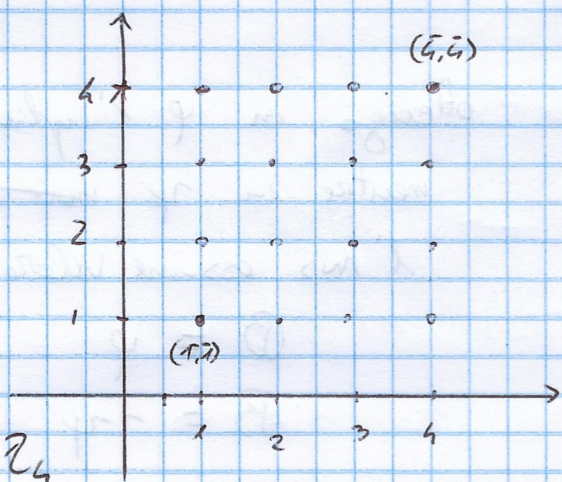
  moltiplico tutto per 15: $15 = \underline{10}\cdot 4 + (\underline{-5})\cdot 7$

$f^{-1}(15) = \{(10 + 7k, -5 - 4k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ insieme infinito

per $7 = 1\cdot 4 + 3$ $\quad 1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4)$

$4 = 1\cdot 3 + 1$ $\quad = \underline{2}\cdot 4 - \underline{7}\cdot \underline{1}$

ex 3




$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

max $= (\bar{4},\bar{4})$ = massimale = sup $A$

minimo $= (\bar{1},\bar{1})$ = minimale = inf $A$

minoranti: $\bar{x} \leq \bar{1} \wedge \bar{y} \leq \bar{1}$

maggioranti: $\bar{x} \geq 4 \wedge \bar{y} \geq \bar{4}$

$(\overline{13}, \overline{13})$

$\overline{13} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_4$, $(\bar{1},\bar{1})$ è minimale ex 4

~~2)~~ $\cancel{\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3 \times U_4}$ ~~osservo che~~ $\cancel{|G| > |\mathbb{Z}_3|}$ ~~dunque non riesco a trovare f BIGETTIVA (no ISOMORFISMO)~~

$\cancel{\bar{0}}$

$\cancel{\bar{1}}$

$\cancel{\bar{2}}$

1) Ordine gruppo = cardinalità $\Longrightarrow |G| = 3 \cdot 4 = 12$

So che ord (sottogruppo) | ord G , quindi $\nexists$ K sottogruppo con ordine 7

3) $|\mathbb{Z}| > |G|$ no f bigettiva

no ISOMORFISMO

~~2)~~