# Relazioni d'ordine

lunedì 26 ottobre 2020 15:24

**DEF** $X$ insieme, $R$ relazione su $X$ ($R \subseteq X \times X$) e' detta **PREORDINE** se

- e' **RIFLESSIVA** $\forall x \in X$. $xRx$

AND

- e' **TRANSITIVA** $\forall x,y,z \in X$ $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$

NO PROPRIETA' SIMMETRIA (può esserlo ma interessa)

Si scrive $x \trianglelefteq y$ (oppure $x \leq y$) al posto di $xRy$

$X$ viene detto **INSIEME PREORDINATO** se c'e' una $R$ di preordine su $X$

Un preordine su $X$ viene detto **ORDINE PARZIALE** se (oltre a riflessiva e transitiva)

- e' **ANTISIMMETRICO** cioe' $(x \trianglelefteq y) \wedge (y \trianglelefteq x) \Rightarrow x = y$

Cioe' sono in relazione solo se sono uguali

$X$ viene detto **PARZIALMENTE ORDINATO** (o **POSET**)

partially ordered set

**N.B.** Su un insieme posso dare più ordini parziali

$(X, \trianglelefteq)$ POSET

insieme — ordine parziale

$(X, \trianglelefteq)$ POSET, $x, y \in X$ si dicono **CONFRONTABILI**

SE $(x \trianglelefteq y) \vee (y \trianglelefteq x)$

**DEF** $(X, \trianglelefteq)$ POSET, $\trianglelefteq$ e' detto **ORDINE TOTALE** se

$\forall x, y \in X$ $(x \trianglelefteq y) \vee (y \trianglelefteq x)$ cioe' se **TUTTI gli elementi sono confrontabili**

In tal caso $X$ si dice **TOTALMENTE ORDINATO**

**Es 1)** $(\mathbb{R}, \leq)$ INSIEME TOTALMENTE ORDINATO - TESI

- RIFLESSIVA $x \leq x$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- TRANSITIVA $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ } abbiamo un PREORDINE
- ANTISIMMETRICA $x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$

} abbiamo un ORDINE PARZIALE

Dati $x, y \in \mathbb{R}$ e' vero che $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (almeno o uno o l'altro)

$\Rightarrow$ ORDINE TOTALE

**Es 2)** $X$ insieme, $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$ relazione diagonale ordine parziale (riflessiva + transitiva), ma non è totale - TESI

$x, y \in X, \; x \neq y$ $\quad (x \not\Delta y)$ è FALSO $\vee$ $(y \not\Delta x)$ è FALSO

$x \Delta y \Leftrightarrow (x,y) \in \Delta \Leftrightarrow x = y$

non tutti gli elementi sono confrontabili

- ANTISIMMETRICA

$x \Delta y \Leftrightarrow (x,y) \in \Delta \Leftrightarrow x = y$

(dunque $\Delta$ è simmetrica e antisimmetrica)

Es 3) $\mathbb{C}$ $\quad z \Delta w \Leftrightarrow |z| \leq |w|$ $\quad z, w \in \mathbb{C}$

PREORDINE ma non un ORDINE - TESI

- RIFLESSIVO $\quad z \Delta z \Leftrightarrow |z| \leq |z|$
- TRANSITIVO $\quad (x \Delta y), (y \Delta z) \overset{?}{\to} x \Delta z$

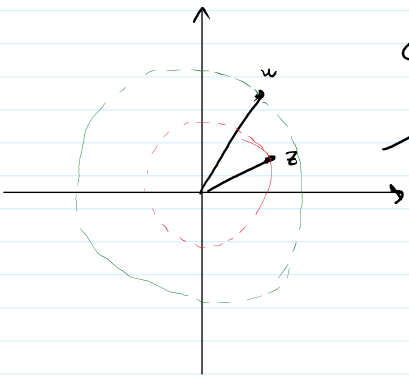
$|x| \leq |y|, |y| \leq |z| \Rightarrow |x| \leq |z|$

- non è ANTISIMMETRICA $\quad x \Delta y$ e $y \Delta x \overset{?}{\not\to} x = y$ $\quad$ mi basta un controesempio

$x \Delta y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$

$y \Delta x \Leftrightarrow |y| \leq |x|$

Se scelgo $x = 1$, $y = -1$ $\Rightarrow$ $\overset{1}{|x|} \leq \overset{1}{|y|}$, $|y| \leq |x|$ ma $x \neq y$




$\mathbb{C}$ "i due moduli non sono uguali"

Es 4) $X$ insieme, $X \neq \emptyset$ $\quad$ Definiamo una relazione su $\mathcal{P}(X)$

$A \Delta B \Leftrightarrow A \subseteq B$

- RIFLESSIVA $\quad A \subseteq A$
- TRANSITIVA $\quad A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \to$ per le proprietà
- ANTISIMMETRICA $\quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$

"$\subseteq$" è un ordine parziale

ma non è sempre totale, dipende da $X$.

es $X = \{1,2,3\}$ $\mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$

$\{1\} \Delta \{1,2\}$ perché $\{1\} \subseteq \{1,2\}$ confrontabili

ma $\{1\} \not\subseteq \{2,3\}$ , $\{2,3\} \not\subseteq \{1\}$ $\{1\}$ e $\{2,3\}$ NON SONO CONFRONTABILI

" $\subseteq$ " non è ordine totale

Quando " $\subseteq$ " è un ordine totale?

Se $X = \{1\}$ allora $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}\}$ $\emptyset \Delta \{1\}$ , $\emptyset \subseteq \{1\}$

Es 5) $\mathbb{R}$ " $<$ " è un ordine? no, perché <u>non è riflessiva</u> (non è neanche un preordine)

$x \in \mathbb{R}$ $x < x$ <u>MAI</u>

# Massimi e minimi

mercoledì 28 ottobre 2020 14:17

e · e · e · e · e · e · e

**DEF** $(A_1, \leq_1), \dots, (A_n, \leq_n)$ POSET (insieme parzialmente ordinato)

INSIEMI — RELAZIONI DI ORDINE (può essere tot., parziale, non ci esprimiamo)

che SERVONO ordine al prodotto cartesiano

Su $A_1 \times \dots \times A_n$ definiamo l'ordine lessicografico "LEX"

$$(a_1, \dots, a_n) \leq_{LEX} (b_1, \dots, b_n) \iff \begin{cases} a_1 \leq_1 b_1 & \text{se } a_1 \neq b_1 \\ a_j = b_j & j = 1, \dots, k \text{ e } (a_{k+1} \leq_{k+1} b_{k+1}) \end{cases}$$

**PROP.** Se $A_1, \dots, A_n$ sono totalmente ordinati (dunque confrontabili), allora $\Rightarrow$ $(A_1 \times \dots \times A_n, \leq_{LEX})$ è TOTALMENTE ORDINATO

**DEF** Su $A_1, \dots, A_n$ definiamo l'ordine prodotto $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \leq_i$

$$(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n) \iff a_i \leq_i b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Se $A_1, \dots, A_n$ siano TOTALMENTE ORDINATI $\not\Rightarrow$ $(A_1 \times \dots \times A_n, \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \leq_i)$ TOT ORDINATO
non c'è detto

**ES** • $A_1 = A_2 = \mathbb{R}$ con $\leq$

$(\mathbb{R}, \leq)$ è tot. ordinato (vedi scorsi argomenti), ma $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq \times \leq)$ non è tot. ordinato perché $(1,2)$ e $(2,1)$ non sono confrontabili. "SVANTAGGIO" dell'ordine prodotto (nessun ordine)

• $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \text{LEX})$ è TOT. ORD. $\quad (1,2) \leq_{LEX} (2,1)$ confronto le singole componenti (è più piccola la coppia (ennupla) che ha sulla componente di sinistra la cifra più piccola)

Con LEX posso comunque dare ordine al prodotto cartesiano.

**DEF** $(X, \leq)$ POSET, $Y \subseteq X$ SOTTOINSIEME, definiamo un ordine sul sottoinsieme, ORDINE INDOTTO su $Y$

$$a, b \in Y \subseteq X \quad a \leq_Y b \iff a \leq b$$

Si dice che $Y$ è una CATENA se l'ordine INDOTTO è un ordine totale.

**ES** $X = \mathbb{N}^*$ $\quad n \leq m \iff n \mid m$ ($n$ divide $m$) ($n$ divisore di $m$, ovvero $m = kn$ $\quad k \in \mathbb{Z}$)

$\leq$ ordine parziale (qui non diremo stretto) perché $2$ e $3$ NON SONO CONFRONTABILI $\quad 2 \nmid 3$ e $3 \nmid 2$
non si dividono a vicenda

$Y = \{7^k : k \in \mathbb{N}\}$ è una catena di $X$

e viceversa

$Y = \{7^k : k \in \mathbb{N}\}$ è una catena di $X$

**N.B.** Se prendessimo $\mathbb{N}$ invece che $\mathbb{N}^*$ avrei semplicemente $7^0 = 1$ (divide tutti i numeri)

$7^k, 7^h \in Y$, $k \leq h$ $\quad 7^k \mid 7^h \iff 7^k \trianglelefteq 7^h$

$7^k$ divide $7^h$ allora corrisponde alla relazione d'ordine $\trianglelefteq$

**DEF** $(X, \trianglelefteq)$ POSET, $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ — col triangolo però generalizzo a tutti i poset, equivale a $\leq$ (in questo caso vale per $\mathbb{R}$)

- $y \in Y$ è detto **minimo** di $Y$ se $\forall x \in Y$ allora $y \trianglelefteq x$. Scriviamo $y = \min Y$
- $y \in Y$ è detto **massimo** di $Y$ se $\forall x \in Y$ (tutti gli elementi) allora $y \trianglerighteq x$. Scriviamo $y = \max Y$
- $y \in Y$ è un **ELEMENTO MINIMALE** di $y$ se $\forall x \in Y$ $(x \trianglelefteq y \Rightarrow x = y)$ — se $x$ minore di $y$
- $y \in Y$ è un **ELEMENTO MASSIMALE** se $\forall x \in Y$ (gli elementi) $(y \trianglelefteq x \Rightarrow y = x)$ — se $y$ minore di $x$ — "l'elemento più grande nell'insieme"

↳ "non esistono elementi più grandi di questo nell'insieme (ed eventualmente max e questo coincidono)"
↳ si vede in particolare quando non ho elementi confrontabili

**FATTI**:

1) Minimo e massimo (se esistono) sono unici.

2) Se esiste il minimo/massimo allora ogni elemento minimale/massimale coincide col minimo/massimo

3) **se $\trianglelefteq$ è un ordine totale allora abbiamo che esiste un elemento minimale/massimo se e solo se esiste il minimo/massimo**

**ES 1** $(\mathbb{N}, \leq)$ il minimo è zero, non esiste un massimo

$\leq$ è totale (dati due elementi $\in \mathbb{N}$ posso confrontarli)

minimale (= minimo qui) = 0, non esiste un massimale

**ES 2** $(\mathbb{Z}_{\leq 0}, \leq)$ $\quad$ MAX = 0, $\nexists$ MIN

MASSIMALE = 0, $\nexists$ MINIMALE

**ES 3** $(\mathbb{Z}, \leq)$ $\quad \nexists$ MAX, $\nexists$ MIN $\xRightarrow{\leq \text{ è totale}}$ $\nexists$ MASSIMALI e $\nexists$ MINIMALI

**ES 4** $X$ insieme, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ POSET

MINIMO di $\mathcal{P}(X)$: $\emptyset$ $\qquad$ MASSIMO di $\mathcal{P}(X)$ è: $X$

$\forall Y \in \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \subseteq Y$ ($\emptyset \trianglelefteq Y$) $\qquad \forall Y \in \mathcal{P}(X)$, $Y \subseteq X$ $= \forall Y \in \mathcal{P}(X)$, $Y \trianglelefteq X$

$A = \{\{x\} : x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\quad$ A non ha minimo e massimo

(non esiste singoletto contenuto/che contiene tutti gli che singoletti)

Ogni elemento di $A$ è sia MINIMALE che MASSIMALE

preso un elemento di $A$ $\{x_0\} \in A$ è minimale :

pondo un altro elemento $\{y\} \in A$ t.c. $\{y\} \trianglelefteq \{x_0\}$

che significa $\{y\} \subseteq \{x_0\}$

$\longrightarrow$ $y = x_0$ $\longrightarrow$ $\{y\} = \{x_0\}$

stessa cosa vale per il massimal (ho gli elementi che coincidono)

**Es 5** $X = \{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$ FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{Z}$

$n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} : m = n \cdot k \text{ per un } k \in \mathbb{Z}\}$

$(X, \trianglelefteq)$ $A \trianglelefteq B \iff A \subseteq B$ rende $(X, \trianglelefteq)$ un POSET

$n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \iff m \mid n$

$4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$

MULTIPLO DI 4 — MULTIPLO DI 2

ma è anche

$\exists$ minimo e max di $X$ ?

NO non esiste né max né min.

• Se $n_0\mathbb{Z}$ è il minimo di $X$ dato $\forall m\mathbb{Z} \in X$ (pongo) allora $n_0\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$

succede $\iff$ $m \mid n_0$ (perché $n_0$ è multiplo di tutti i numeri interi) $\nexists$ non esiste

• Se $n_0\mathbb{Z}$ è il max di $X$ $\forall m\mathbb{Z} \in X$ $m\mathbb{Z} \subseteq n_0\mathbb{Z} \iff n_0 \mid m$

dunque $n_0$ divide tutti gli interi

gli unici numeri con tale "abilità" sono $n_0 = \pm 1$ (posso stato $n \geq 1$ nella condizione avrei max $= 1$)

ma $n_0\mathbb{Z} \notin X$

• $\nexists$ el. minimali perché se $n_0\mathbb{Z}$ è minimale $(m\mathbb{Z} \subseteq n_0\mathbb{Z} \Rightarrow m = n_0)$

ciò non è vero, perché dato $n_0\mathbb{Z}$ vi sono infiniti elementi più piccoli $(n_0^k \cdot \mathbb{Z} \subseteq n_0\mathbb{Z})$

(es. $2\mathbb{Z} \supseteq 4\mathbb{Z} \supseteq 8\mathbb{Z} \supseteq 16\mathbb{Z} \supseteq \dots$)

ogni multiplo è contenuto

• $\exists$ el. massimali : $p\mathbb{Z}$ con $p$ numero primo sono massimali

perché non sono contenuti in altri elementi

(es. $2\mathbb{Z}$ è massimale di tutti gli altri primi)

**Es 6** $A = \{(n, n+(-1)^n) : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\} = \{(2,3), (3,2), (4,5), (5,4), (6,7) \dots\}$

$A$ con l'ordine indotto da $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \times \leq)$
↳ ordine prodotto

- $\exists$ max, $\nexists$ massimali
  ↳ si possono trovare sempre degli elementi più grandi degli altri

- $\nexists$ minimo, ci sono 2 elementi minimali

$(x,y) \leq (2,3) \Rightarrow x \leq 2, y \leq 3 \Rightarrow x=2, y=3 \Rightarrow (x,y)=(2,3)$

perché non vi sono altre coppie in cui $x \leq 2$ e $y \leq 3$

$(x,y) \leq (3,2) \Rightarrow x \leq 3, y \leq 2 \Rightarrow x=3, y=2 \Rightarrow (x,y)=(3,2)$

TUTTAVIA $\nexists$ MIN (non ho un elemento più piccolo degli altri, i più piccoli sono → $(2,3)$ e $(3,2)$ ma non sono confrontabili

$(4,5)$ non è minimale $\quad (x,y) \leq (4,5) \Rightarrow x \leq 4, y \leq 5 \not\Rightarrow x=4, y=5$

infatti per $\underset{\leq 4}{x=2}$ e $\underset{\leq 5}{y=3}$ $\quad \underset{A}{(2,3)} \leq \underset{A}{(4,5)}$

**DEF** $(X, \Delta)$ POSET, l'**ORDINE OPPOSTO** su $X$, $\Delta^{opp.}$

$$x \Delta^{opp} y \iff y \Delta x$$

L'ordine opposto scambia MIN e MAX.

**DEF** $(X, \Delta)$ POSET, $Y \subseteq X$ SOTTOINSIEME:

- $z \in X$ è un **MINORANTE** di $Y$ se $\forall x \in Y$, $z \Delta x$ — se $z$ è più piccolo di tutti gli elementi di $Y$ (ma non necessariamente sta in $Y$!)
- $z \in X$ è un **MAGGIORANTE** di $Y$ se $\forall x \in Y$, $x \Delta z$ — $z$ più grande
- se l'insieme dei minoranti di $Y$ è non vuoto ed ha il suo massimo $z$, $z$ si dice **estremo inferiore** di $Y$. (max dei minoranti)
- se l'insieme dei maggioranti di $Y$ è non vuoto ed ha minimo $z$, $z$ si dice **estremo superiore** di $Y$. (min dei maggioranti)

Si denotano rispettivamente con $\inf Y$ e $\sup Y$

! Non è detto $\inf Y, \sup Y \in Y$

se $\inf Y \in Y \Rightarrow \min Y = \inf Y$

se $\sup Y \in Y \Rightarrow \max Y = \sup Y$

**Es 1** $(\mathbb{R}, \leq)$, $Y = (0,1)$ intervallo (escluso) $\quad \nexists \max Y$, $\nexists \min Y$

maggioranti di $Y$: $[1, +\infty) \Rightarrow \sup Y = \min\{\text{MAGGIORANTI}\} = \min [1, +\infty) = 1 \notin Y$

minoranti di $Y$: $(-\infty, 0]$ (compreso) $\Rightarrow \inf Y = \max\{\text{MINORANTI}\} = \max(-\infty, 0] = 0 \notin Y$

↳ più piccoli di tutti gli elementi di $Y$

**Es 2** $(\mathbb{R}, \leq)$ $\quad Y = [0,1]$ intervallo

**Es 2** $(\mathbb{R}, \leq)$ , $Y = [0,1]$ intervallo

MAGGIORANTI di $Y$ : $[1, +\infty)$ $\longrightarrow$ $\sup Y = \min [1, +\infty) = 1 \in Y$
$b \geq 1$ è $\geq$ a tutti gli elementi di $Y$

MINORANTI di $Y$ : $(-\infty, 0]$ $\longrightarrow$ $\inf Y = \max (-\infty, 0] = 0 \in Y$

$\longrightarrow$ $\min Y = \inf Y = 0$ , $\max Y = \sup Y = 1$

**Es 3** $(\mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \leq)$ , $Y = (0,1)$ intervallo

MINORANTI di $Y$ $(-\infty, 0)$ non ha massimo $\longrightarrow$ $\nexists \inf Y$

MAGGIORANTI di $Y$ $(1, +\infty)$ non ha minimo $\longrightarrow$ $\nexists \sup Y$

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ha inf e sup. $\mathbb{R}$ si dice infatti completo

**DEF** $(X, \Delta)$ POSET si dice RETICOLO ("LATTICE" in INGLESE, LATTIX) se $\forall a,b \in X$ esistono $\inf\{a,b\}$ e $\sup\{a,b\}$

**Es 1** $(\mathbb{R}, \leq)$ è un reticolo dati $a,b \in \mathbb{R}$ , $\inf\{a,b\}$ è il minimo fra i due
$= \min\{a,b\}$ (DIFFERENTE DA $\inf(\,) = \max(\text{minor.})$)
$\sup\{a,b\}$ è il max fra i due
$= \max\{a,b\}$

**Es 2** $A = \{(n, n+(-1)^n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ non è un reticolo
$= \{(2,3), (3,2), (4,5), (5,4) \dots\}$ ordine prodotto $\leq \times \leq$

Sia $x$ minorante:

Dati $a = (2,3)$ e $b = (3,2)$

$\{$MINORANTI di $a$ e $b\} = \{\forall x \in A \mid x \leq a$ e $x \leq b\}$

$x \leq a = (2,3)$ $\longrightarrow$ $x = (2,3)$
$(2,3)$ minimale

$= \emptyset$

(x = coppia ordinata)

$x \leq b = (3,2)$ $\longrightarrow$ $x = (3,2)$ non può assumere due valori

$\Rightarrow \nexists \max \{$minoranti di $a$ e $b\}$ $\longrightarrow$ $\nexists \inf\{a,b\}$

$\{$MINORANTI di $(4,5)$ e $(5,4)\} = \{(2,3), (3,2)\}$ $\nexists \max\{(2,3),(3,2)\}$
perché $!$ non sono confrontabili

se $\nexists \max\{$MINORANTI$\}$ $\longrightarrow$ $\nexists \inf\{(4,5),(5,4)\}$

# Crescenza e decrescenza

giovedì 29 ottobre 2020 14:15

e · e · e · e · e · e · e · e

**DEF** $(X,\trianglelefteq)$ POSET, una successione $(x_n)_{n\in\mathbb N} \subseteq X$ è detta:

- **CRESCENTE** se $\forall n\in\mathbb N \quad x_n \trianglelefteq x_{n+1}$ ($x_n$ minore o uguale a $x_{n+1}$)
- **STRETTAMENTE** CRESCENTE se (crescente i) $\forall n \in \mathbb N \quad (x_n \trianglelefteq x_{n+1}) \wedge (x_n \neq x_{n+1})$
- **DECRESCENTE** se $\forall n\in\mathbb N \quad x_{n+1}\trianglelefteq x_n$
- **STRETTAMENTE** DECRESCENTE se $\forall n\in\mathbb N \quad (x_{n+1} \trianglelefteq x_n) \wedge (x_n \neq x_{n+1})$

**Es 1** $(X,\trianglelefteq) = (\mathbb R, \le) \qquad x_n = n^2 \quad \forall n\in\mathbb N$ STRETT. CRESCENTE (detta "debolmente crescente")

$(x_n \le x_{n+1}) \wedge (x_n\neq x_{n+1}) \longleftrightarrow x_n < x_{n+1} \longleftrightarrow \cancel{n^2} < (n+1)^2 \Leftrightarrow 0 < 2n+1$ ✓

lo stesso uguale $\qquad (n+1)^2 = \cancel{n^2}+2n+1$

FUNZIONE COSTANTE

**Es 2** $x_n = 3 \quad \forall n\in\mathbb N$ è crescente e decrescente

$(X,\trianglelefteq)$ fissato $y\in X$ la successione $x_n = y \quad \forall n\in\mathbb N$ è crescente e decrescente

$x_n \trianglelefteq x_{n+1} \longleftrightarrow y\trianglelefteq y$ vero perché $\trianglelefteq$ è riflessiva (REL. D'ORDINE)

**DEF** $(X,\trianglelefteq)$ POSET, $X$ è **BEN FONDATO** se ogni sottoinsieme $\neq\emptyset$ di $X$ ha un (ALMENO UNO) elemento minimale. $[\forall Y\subseteq X,\ Y\neq\emptyset \ \exists y\in Y$ MINIMALE$]$

**Es 3** $A=\{(n, n+(-1)^n) \mid n\in\mathbb N,\ n\ge 2\}\subseteq \mathbb N\times\mathbb N$ con ordine $\le \times \le$

$= \{(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),\dots\}$

è ben fondato (A ha 2 el. minimali) e i sottoinsiemi di A hanno a loro volta un n più piccolo che costituisce el. minimale

**Es 4** $X = \{n^{-1} \mid n\in\mathbb N,\ n\ge 2\}$ non è BEN FONDATO, $\nexists$ elementi minimali

In generale vale:

**PROP** $(X,\trianglelefteq)$ POSET ALLORA

$X$ è BEN FONDATO $\longleftrightarrow \nexists\, (x_n)_{n\in\mathbb N} \subseteq X$ (SUCCESSIONE) STRETTAMENTE DECRESCENTE

(ovvero non ha elementi minimali definiti)

**Es** $(\mathbb N, \le)$ è ben fondato perché ha $n=0$ come el. minimale

$(\mathbb{N}^*, \leq)$ è ben fondato (el. min = 1)

$(\mathbb{Z}, \leq)$ non è ben fondato (posso prendere una succ. strett. decr. di elementi interi)

**PROP** $(X_1, \Delta_1), (X_2, \Delta_2)$ poset BEN FONDATI $\Rightarrow (X_1 \times X_2, \Delta_1 \times \Delta_2)$ BEN FONDATO

**ES** $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \times \leq)$ BEN FONDATO

$\cup$

$A = \{(n, n+(-1)^n) \mid n \geq 2\}$ ha un elemento minimale (ne ha due)

**TEOREMA** - **Induzione strutturale**

$(X, \Delta)$ POSET BEN FONDATO

$P$ un'affermazione (o proprietà) t.c.

1) $P$ vale $\forall x \in X$ minimale - PASSO BASE

2) se $P$ vale per ogni $y \Delta z$ (FISSATO $z \in X$) ALLORA $P$ VALE ANCHE PER $z$ - PASSO INDUTTIVO

↳ $P(y)$ VERA $\Rightarrow P(z)$ VERA

Allora $P(x)$ vale per $\forall x \in X$

INDUZIONE CLASSICA $\mathbb{N}$

$P(0)$ VERA

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

**ES** $X = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x>0 \text{ oppure } y>0\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0,0)\}$

no MIN, ma 2 elementi minimali: $(1,0)$, $(0,1)$

1) $P$ vera per $X$ $(1,0)$ e $(0,1)$

2) Dato $z \in X$ SE $P$ vera $\forall y < z$ allora $P(z)$ vera

} ciò che bisogna dimostrare

**ES** $X = (\mathbb{N}, \leq)$ $\mathbb{N}$ HA UN MIN: 0

1) $P(0)$ VERA

2) VERO $\forall m \leq n$ ALLORA $P(n+1)$ VERA

} ciò che bisogna dimostrare

**ES** $A = \{(n, n+(-1)^n) : n \geq 1\}$ BISOGNA VERIFICARE $P$ sugli elementi minimali $(2,3), (3,2)$

BISOGNA VERIFICARE CHE dato una coppia $(x,y) \in A$, se $P$ vale $\forall (a,b) \underset{\Delta}{\leq} (x,y)$

allora vale per $(x,y)$

**ES** $A: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \text{lex})$

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } m = 0 \\ A(m-1, 1) & \text{se } m>0 \quad n=0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{se } m>0 \quad n>0 \end{cases}$$

FUNZIONE DEFINITA PER RICORSIONE

FUNZIONE DI ACKERMANN

$A(4,3) = A(3, A(4,2))$ $\quad$ $A(4,2) = A(3, A(4,1))$ ...

Verifichiamo che A e' ben definita per induzione strutturale su $(N\times N, \text{lex})$

passo 1) Bisogna verificare che la funzione sia definita sugli elementi minimali di $N\times N$:

$A(0,0) = 1$ dove $(0,0)$ e' minimale di $N\times N$

passo 2) $\boxed{\overset{\text{FISSATO}}{m>0 \quad e \quad n=0}}$ $\quad (m-1,1) \overset{m-1 \le m \text{ per lex}}{\le_{LEX}} (m,0)$ e $(m-1,1) \overset{1 \ne 0}{\ne} (m,0)$

allora per Hp induttiva $A(m-1,1)$ e' BEN DEFINITA [TESI $A(m,0)$ e' definita]

$A(m,0) = A(m-1,1)$ per definizione $\Longrightarrow A(m,0)$ BEN DEFINITA $\square$

passo 3) $m>0$ e $n>0$

$(m,n-1) \le_{LEX} (m,n)$ e $(m,n-1) \ne (m,n) \xRightarrow[\text{INDUTTIVA}]{\text{HP}} A(m,n-1)$ BEN DEFINITA

(ACKERMANN)

$(m-1, A(m,n-1)) \le_{LEX} (m,n)$ e $(m-1, A(m,n-1)) \ne (m,n)$ perche' il 1° elemento e' diverso

$\xrightarrow[\text{INDUTTIVA}]{\text{per Hp}}$ $A(m-1, A(m,n-1))$ e' BEN DEFINITA

$\quad \parallel$

$A(m,n)$ $\square$

(utile per ordinare le coppie (anche non ordinate))

↳ per ogni $m,n$ ho dimostrato che la funzione ricorsiva termina in un numero finito di passi

Sintesi del PASSO 3

[ Dato $(m,n) \in N\times N$

se $\forall (x,y) \le_{lex} (m,n)$

$A(x,y)$ BEN DEFINITA

$\rightarrow A(m,n)$ BEN DEFINITA ]

(**Def** $(X, \trianglelefteq)$ POSET è detto **BEN FONDATO** se $\forall Y \subseteq X, Y \neq \emptyset\ \exists y \in Y$ MINIMALE)

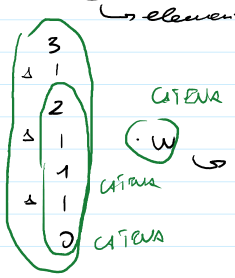
**Def** $(X, \trianglelefteq)$ POSET è detto **BENE ORDINATO** se $\forall Y \subseteq X, Y \neq \emptyset\ \exists y \in Y$ MINIMO

se BEN ORDINATO $\longrightarrow$ BEN FONDATO, ma non vale il viceversa (vedi esempio)

**Es** ($\not\leq$) $X = \{0, 1, 2, 3, w\}$ $0 \trianglelefteq 1 \trianglelefteq 2 \trianglelefteq 3$ $0 \trianglelefteq 0$ $2 \trianglelefteq 2$ $w \trianglelefteq w$ $1 \trianglelefteq 1$ $3 \trianglelefteq 3$ ↳ elementi della relazione

$(X, \trianglelefteq)$ POSET (non totalmente ordinato)

X BEN FONDATO w è MINIMALE di X (*) (anche massimale)




↳ non confrontabile con 0, 1, 2, 3

se $0 \trianglelefteq 1 \trianglelefteq w \trianglelefteq 2 \trianglelefteq 3$ $(X, \trianglelefteq)$ POSET BENE ORDINATO

Sia $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$

se $w \in Y$ allora w è minimale

se $w \notin Y$ allora $\longrightarrow$ se $0 \in Y$, 0 minimale

↳ se $0 \notin Y$ $\longrightarrow$ se $1 \in Y$, 1 minimale

↳ se $1 \notin Y$ $\longrightarrow$ $2 \in Y$, 2 minimale

↳ $2 \notin Y$ allora $Y = \{3\}$

3 minimale

Quindi X è BEN FONDATO

X non è bene ordinato, perché $Y = \{0, w\}$ NON HA MINIMO (non sono confrontabili)

((*) w è MINIMALE se $\forall y \in X$, $y \trianglelefteq w \longrightarrow y = w$ unica relazione che ha w a destra è $w \trianglelefteq w$)

**Prop1** $(X_1, \trianglelefteq_1)$, $(X_2, \trianglelefteq_2)$ POSET BEN FONDATI $\longrightarrow$ $(X_1 \times X_2, LEX)$ BEN FONDATO

**Prop2** $(X_1, \trianglelefteq_1)$, $(X_2, \trianglelefteq_2)$ POSET BEN ORDINATO $\longrightarrow$ $(X_1 \times X_2, LEX)$ BEN ORDINATO

**Oss** Prop 1, 2 non valgono per l'ordine prodotto (al posto di LEX)

**Es** $(\mathbb{N}, \leq)$ BEN ORDINATO, ma $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \times \leq)$ non è BENE ORDINATO

$\cup\!|$ $Y = \{(1,0), (0,1)\}$ non ha MINIMO (che avrebbe col LEX)

**ASSIOMA DEL BUON ORDINAMENTO**:

X insieme, $X \neq \emptyset$ allora $\exists \trianglelefteq$ ordine su X t.c. $(X, \trianglelefteq)$ è BEN ORDINATO.

**ASSIOMA DEL BUON ORDINAMENTO $\Longleftrightarrow$ ASSIOMA DELLA SCELTA $\Longleftrightarrow$ LEMMA DI ZORN**

**LEMMA DI ZORN** (preso come assioma)

$(X, \trianglelefteq)$ POSET, $X \neq \emptyset$, se ogni CATENA di X (→ sottoinsiemi totalmente ordinati (*)) possiede un maggiorante, allora X ha elementi massimali. (se X ben ordinato el. massimale = massimo)

(*) **DEF** $(X, \trianglelefteq)$ POSET, $Y \subseteq X$ CATENA se $(Y, \trianglelefteq)$ è TOTALMENTE ORDINATO elementi massimali. (Se X ben ordinato el. massimali = massimi)

* **DEF** $(X, \trianglelefteq)$ POSET, $Y \subseteq X$ CATENA SE $(Y, \trianglelefteq)$ E' TOTALMENTE ORDINATO

**Es** $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ NON BEN FONDATO (non esistono elementi minimali)

**Es** $(\mathbb{Z}, \leq)$ non è BEN FONDATO (il sottoinsieme dei negativi non ha el. minimali)