Calcolo combinatorio

lunedì 2 novembre 2020 14:50

Serve "a contare", ad esempio gli elementi di un insieme (la sua cardinalità).

Dato X insieme finito, $\# X = n \in \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$

DEF Una PERMUTAZIONE di X è una BIGEZIONE $p: \{1, \dots, n\} \to X$

etichetta gli el. di X in un certo ordine

Spesso si denota

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & \dots & & p(n) \end{pmatrix}$$

Se $X = \{a, b, c\}$ $\quad p: 1 \mapsto b$, $2 \mapsto c$, $3 \mapsto a$ $\quad$ si denota $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & c & a \end{pmatrix}$ viene "associato un nome"

Quante PERMUTAZIONI di X ci sono? $\quad X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$1 \mapsto$ SCELGO tra n elementi di X

$2 \mapsto$ " " $n-1$ elementi di X $\to$ perché BIGETTIVA (quindi iniettiva, non posso mandarlo nello stesso elemento dove ho mandato 1)

$3 \mapsto$ " " $n-2$ " "

$\vdots$

$n \mapsto$ " " 1 elemento di X (L'UNICO RIMASTO)

Ho $n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ POSSIBILI PERMUTAZIONI DI X

$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $\quad$ n FATTORIALE

Si pone $0! := 1$ (c'è solo una possibilità di ordinare zero elementi)

DEF $k \leq n$ (INTERI) DISPOSIZIONI DI CLASSE k di X è una funzione INIETTIVA $D_k : \{1, \dots, k\} \to X$

Quante sono?

$1 \mapsto n$ scelte tra gli elementi di X

$2 \mapsto n-1$ scelte " " di X

$3 \mapsto n-2$ scelte " " di X

$\vdots$

$k \mapsto n-k+1$ scelte " " di X

$\quad\quad\quad$ d $\; n-(k-1)$

$\quad\quad\quad$ Lo finora $n - (1, 2, 3 \dots k)$

$\quad\quad\quad\quad\quad$ Lo erano $k - (1, 2, 3 \dots)$

Se $k = n$ $\quad D_n$ è una permutazione

Le disposizioni D_k sono $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

DEF $k \leq n$ (INTERI) COMBINAZIONE DI CLASSE k di X è $C_k \subseteq X$ (SOTTOINSIEME) t.c. $\# C_k = k$

INTERI

DEF $k \le n$ COMBINAZIONE DI CLASSE k di X è $C_k \subseteq X$ t.c. $\# C_k = k$

SOTTOINSIEME

Quante sono? $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

SCELGO il 1° elemento di C_k $\longrightarrow$ n scelte

" il 2° " " $\longrightarrow$ $n-1$ scelte (per averne k ne scelgo un altro)

il 3° " " $\longrightarrow$ $n-2$ "

$x_3 \; x_2 \,||\, x_2 \; x_3$

$k°$ el. di C_k $\longrightarrow$ $n-k+1$ scelte

se scambio gli elementi ottengo lo stesso insieme (non è una funzione ma un sottoinsieme, importa solo se l'el. è sottoinsieme o no, non importa in che ordine)

$n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ DISPOSIZIONI

$k!$ PERMUTAZIONI

devo tenere conto quindi delle varie permutazioni (ordini)

ovvero $$\frac{n(n-1)\cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =: \binom{n}{k}$$ COEFFICIENTE BINOMIALE

risponde alla domanda in quanti modi posso scegliere k fra n elementi? =

Per convenzione:

- $\binom{n}{0} := 1$
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ $\qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$
- Triangolo di Tartaglia (Pascal) scrive in ogni riga la somma dei precedenti (rappresenta $\binom{n}{k}$)

```
            1
          1   1
        1   2   1        —> n=2
      1   3   3   1      —> n=3
    1   4   6   4   1    —> n=4
  1   5  10  10   5   1  —> n=5
1   6  15  20  15   6   1 —> n=6
```

$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$

TEOREMA BINOMIALE $x, y \in \mathbb{R}$ $(x, y \in \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Σ SOMMATORIA

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$$

indice, faccio la somma da 1 a 4, con incremento di 1

$$\sum_{i=1}^{3} (i+1) = 2+3+4 = 9$$

ES $(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$ $\quad$ coefficienti binomiali $\quad n=2$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy + 1y^3 \quad n=3$

$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \quad n=5$

righe del triangolo di Tartaglia

COROLLARIO X insieme, $X \neq \emptyset$, $\# X = n$ Allora $\# \mathcal{P}(X) = 2^n$

Dim $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ $\qquad Y \subseteq X \Rightarrow \# Y \in \{0, 1, \dots, n\}$

Dim $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ $Y \subseteq X \implies \# Y \in \{0, 1, \dots, n\}$

- Quanti sottoinsiemi di $n=0$ elementi? 1 $\emptyset$
- " " di 1 elemento? n $\{x\}$ $\forall x \in X$ (singoletti)

⋮

I sottoinsiemi di k elementi di X sono $\binom{n}{k}$

$\# \mathcal{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ somma di sottoinsiemi

per eseguire tale somma:

per il TEOREMA BINOMIALE $x=1, y=1$ $\underbrace{(1+1)^n}_{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

ma allora $\mathcal{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $\square$

Def $k \in \mathbb{N}$ DISPOSIZIONE CON RIPETIZIONE DI CLASSE k di X e' un' applicazione (funzione)

$$D_k^R : \{1, 2, \dots, k\} \longrightarrow X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$$

Quante sono?

$1 \longmapsto n$ scelte
$2 \longmapsto n$ "
$3 \longmapsto n$ "

] non ho condizioni di iniettività o suriettività $\longrightarrow$ solo che sia una funzione

$n \cdot n \cdot n \dots n = n^k$ scelte

$A^B = \{ f : B \to A \text{ funzioni} \}$ $\#(A^B) = \# A^{\# B}$ se $\# A, \# B$ finite

ho n^k scelte finite

Def $k \in \mathbb{N}$, COMBINAZIONE CON RIPETIZIONE DI CLASSE k di $X = \{x_1, \dots x_n\}$ e' un elemento $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ di $X^k = X \times \dots \times X$ t.c. $i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k$

Es $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

per $k=5$ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ✓
$(x_1, x_1, x_1, x_1, x_1)$ ✓
$(x_1, x_1, x_2, x_1, x_2)$ ✗ indici decrescenti

Quante sono?

TEOREMA Sono $\binom{n+k-1}{k}$

DIM Sia $n \geq 1$ FISSATO. Dim per induzione su k

PASSO BASE

- per $k=1$ comb. con rip. di classe k X^1 t.c. ~~$i_1 \leq$~~ NIENTE non c'è la condizione

$$\binom{n+1-1}{1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

si semplificano tutti tranne n

ne abbiamo n (1 x ciascun elemento di X)

PASSO INDUTTIVO

- $k \to k+1$ $C^r_{k+1,n}$ l'insieme delle combinazioni con rip. di classe $k+1$ di X

TESI: $\# C^r_{k+1,n} = \binom{n+k}{k+1}$ gli 1 si eliminano

Dividiamo $C^r_{k+1,n}$ in una partizione (= UNIONE DISGIUNTA DI SOTTOINSIEMI):

$\to A_1 = \{ c \in C^r_{k+1,n} \mid a_1 \in C \}$ sono tutte le combinazioni

$\{a_1, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k+1}}\} \in X^{k+1}$

iniziano con a_1 COND: $1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq n$
(ordine crescente)

$\to A_2 = \{ c \in C^r_{k+1,n} \mid a_1 \notin C, a_2 \in C \}$ $(a_2, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k+1}}) \in X^{k+1}$

CONDIZIONE: $2 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1}$

Range più piccolo di A_1

$\to A_3 : \{ c \in C^r_{k+1,n} \mid a_1, a_2 \notin C, a_3 \in C \}$ $(a_3, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k+1}}) \in X^{k+1}$

COND.: $3 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1}$

$\to A_n : \{ c \in C^r_{k+1,n} \mid a_1, \dots, a_{n-1} \notin C, a_n \in C \}$

$(a_n, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k+1}}) \in X^{k+1}$

COND: $n \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq n$

N.B. gli indici sono compresi fra $(1,2,3 \dots n)$ e n

$\|$

$\{(a_n, \dots, a_n)\}$

quindi abbiamo ottenuto l'ennupla $(a_n, \dots, a_n)$ (SINGOLETTO)

$C^r_{k+1,n} = \bigcup_{i=1}^{n}$ UNIONE DISGIUNTA $\Rightarrow \# C^r_{k+1,n} = \# A_1 + \# A_2 + \dots + \# A_n$

$\# A_1 = ?$ A_1 sono le combinazioni con rip. di classe k di $\{a_1, \dots, a_n\}$

$\# A_1 = ?$ A_1 sono le combinazioni con rip. di classe k di $\{a_1, \dots, a_n\}$

$\xrightarrow[\text{per Hp induttiva}]{}$ (fissato a_1) $\# A_1 = \binom{n+k-1}{k}$

$\# A_2 = ?$ A_2 sono le combinazioni con rip. di classe k di $\{a_2, \dots, a_n\}$

$\xrightarrow[\text{per Hp induttiva}]{}$ $\# A_2 = \binom{\overset{\text{meno ho } a_1}{n-1} + k - 1}{\underset{\text{Lo scelgo } k}{k}} = \binom{n-k-2}{k}$

$\# A_j = ?$ A_j sono le combinazioni con rip. di classe k di $\{a_j, \dots, a_n\}$

$1 \leq j \leq n$ $\longrightarrow$ $\# A_j = \binom{n-j+1+k-1}{k} = \binom{n+k-j}{k}$

$\# A_n = ?$ $\# A_n = \binom{\cancel{n}+k-\cancel{n}}{k} = \binom{k}{k} = 1$ infatti A_n ha solo un elemento

$A_n = \{(a_n, \dots, a_n)\}$
k-upla

ma allora la somma delle cardinalità è:

$\# C^r_{k+1,n} = \# A_1, \# A_2, \dots, \# A_n = \binom{n+k-1}{k} + \binom{n-k-2}{k} + \dots + \binom{k}{k} = \binom{n+k}{k+1}$

Uso L'IDENTITÀ DEL BASTONE DA HOCKEY

$$\sum_{i=r}^{m} \binom{i}{r} = \binom{m+1}{r+1} \quad \text{con} \quad r = k, \; m = n+k-1$$

da dimostrare per induzione

$\square$

Es N.2 $D_k / k!$ non sono comb. con rip.

$k=2$, $n=4$ $D_{n,k}$ $\{1,2,3\} \longrightarrow \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ $\# = 4^3$

4 possibilità per 1
" per 2
" per 3

perché indici crescenti per DEF → NO COMB CON RIP

N.B. Nelle combinazioni con rip. non è necessario indicare l'insieme, ma è molto utile nel caso bisogna fare dei conti sopra, come in questo caso il coefficiente binomiale

(CONSIGLIATO ETICHETTARE!)

1 ⟼ a_2
2 ⟼ a_3
3 ⟼ a_1

se divido per le permutaz. $k!$ $\{a_1, a_2, a_3\}$ ~~a_3, a_2, a_1~~ INDICI $3 \leq 2 \leq 1$ NO!

1 ⟼ a_2
2 ⟼ a_3
3 ⟼ a_3

a_2, a_3, a_3

con una permutaz., conto separate due stesse combinazioni

Es TOMBOLA $\{1, 2, \dots, 90\}$

- estraggo 5 palline SENZA reinserimento

90 possibilità x la 1ª pallina (ne rimangono 89)

$90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 = \frac{90!}{85!}$ IMPORTA L'ORDINE

1ª 2ª 3ª 4ª 5ª pallina

↳ sequenze $(1,2,3,4,5) \neq (2,1,3,4,5)$

$90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot \frac{1}{5!} = \frac{90!}{85!\,5!}$ NON IMPORTA L'ORDINE $= \binom{90}{5}$

(ovvero in quanti modi posso scegliere 5 elementi fra 90)

- estraggo 5 palline CON reinserimento

$90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90 = 90^5$ contando l'ordine

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \{1, \dots, 90\}^5$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$ ORDINO IN MODO CHE

quintuple di palline $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 5$ (per poterle distinguere)

NON IMPORTA l'ordine di uscita, ma le palline (numero) che esce.

$$\binom{90+5-1}{5} = \binom{94}{5} = \frac{94!}{5!\,89!_{(n-k)}}$$

$$= \frac{94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot \cancel{89!}}{5! \cdot \cancel{89!}} \quad \left(\frac{89!}{89!} \text{ si semplifica}\right)$$

Tabella sintesi TUT

giovedì 3 dicembre 2020 12:17

n = n° oggetti k = n° posti	senza ripetizione	con ripetizione
PERMUTAZIONI - $n = k$ - conta l'ordine	$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$	$P_n^{(r)} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_n!}$ r: quante volte un certo valore si ripete → es. 3 volte si ripete l'oggetto 1
DISPOSIZIONI - $n \neq k$ - conta l'ordine	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$D_{n,k}^{(r)} = n^k$
COMBINAZIONI - $n \neq k$ - non conta l'ordine	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$	$C_{n,k}^{(r)} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$