ALGEBRA PER INFORMATICA 2020-21

FOGLIO DI ESERCIZI 11

Esercizio 1. Si consideri il seguente sottoinsieme dei numeri complessi:

$$Z = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

con le operazioni di somma e prodotto indotte da $\mathbb{C}$. Gli elementi di Z vengono chiamati *interi di Gauss*.

(1) $(Z,+)$ è un sottomonoide di $(\mathbb{C},+)$? È un sottogruppo?
(2) $(Z \setminus \{0\}, \cdot)$ è un sottomonoide di $(\mathbb{C}^*, \cdot)$? È un sottogruppo?

Esercizio 2. Stabilire se le seguenti coppie di gruppi sono isomorfe oppure no e in caso affermativo esibire un isomorfismo di gruppi:

(1) $(\mathbb{R},+)$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$;
(2) $(\mathrm{U}(\mathbb{Z}_{36}), \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_{36},+)$;
(3) $(\mathrm{U}(\mathbb{Z}_7), \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_6,+)$;
(4) $(\mathrm{U}(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_4,+)$;
(5) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3,+)$ e $(\mathbb{Z}_6,+)$;
(6) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3,+)$ e $(\mathbb{Z}_9,+)$;
(7) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R},+)$ e $(\mathbb{C},+)$;
(8) $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;
(9) $(\mathbb{Q},+)$ e $(\mathbb{R},+)$.

Esercizio 3. Determinare tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_8,+)$ e tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_7,+)$.

Esercizio 4. Sia $X = \{1, \dots, n\}$ un insieme di n elementi e sia $S_n = \{f : X \to X \text{ bigettiva}\}$ il gruppo delle permutazioni di X. Si consideri il seguente sottoinsieme di S_n

$$H = \{\sigma \in S_n : \ \sigma(n) = n\}.$$

(1) Dimostrare che H è un sottogruppo di S_n.
(2) Stabilire se H è un sottogruppo normale oppure no.

Fissiamo $n = 4$ e $f \in S_4$ tale che $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$.

(3) Si determini un elemento diverso da f nella classe laterale sinistra $f \circ H$.
(4) L'insieme $K = \{\sigma \in S_4 : \ \sigma(1) = 2\}$ è un sottogruppo di S_4?

Esercizio 5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{Z}$ la funzione $f_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f_k(n) = 2n + k$ è un omomorfismo di gruppi additivi[1]. Per quali k è un isomorfismo?

[1] Cioè un omomorfismo $f_k : (\mathbb{Z},+) \longrightarrow (\mathbb{Z},+)$

Esercizio 6. Sia $H = \{(2t, 3t+s) : \ t,s \in \mathbb{Z}\}$. Provare che H è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}^2, +)$. È un sottogruppo normale?

Esercizio 7. Sia $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : \ x+y+z = 0 \mod 3\}$.

(1) Provare che H è un sottogruppo normale di $(\mathbb{Z}^3, +)$.
(2) Determinare tutti gli elementi del quoziente $\mathbb{Z}^3/H$.
(3) A quale gruppo noto è isomorfo il gruppo quoziente $\mathbb{Z}^3/H$?

Esercizio 8. Si consideri il gruppo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ e il sottoinsieme delle radici quarte dell'unità

$$U_4 = \{z \in \mathbb{C} : \ z^4 = 1\}.$$

(1) Dimostrare che U_4 è un sottogruppo normale.
(2) Determinare la classe di 3 nel gruppo quoziente $\mathbb{C}^*/U_4$.
(3) La funzione $\psi : \mathbb{C}^*/U_4 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tale che $\psi(\overline{x}) = x^8$ è ben definita? È un omomorfismo di gruppi? È un isomorfismo?

Hint: Confrontare questo esercizio con l'esercizio 5 *del foglio* 4.

Esercizio 9. Si consideri la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$.

(1) Stabilire se f è un omomorfismo di gruppi $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ e in caso affermativo determinarne il nucleo e l'immagine.
(2) Stabilire se f è un omomorfismo di gruppi $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ e in caso affermativo determinarne il nucleo e l'immagine.

Esercizio 10. Siano $f, g : \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_{36}$ le funzioni date da $f(\overline{x}) = 2\overline{x}$ e $g(\overline{x}) = 7\overline{x}$. Determinare se f e g sono omomorfismi di gruppi. In caso affermativo, determinarne il rispettivo nucleo e stabilire se si tratta di isomorfismi.

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proiezione sulla prima componente $f(x,y) = x$.

(1) Provare che f è un omomorfismo di gruppi additivi.
(2) Trovare il nucleo $\ker f$.
(3) Provare che $\mathbb{R}^2/\ker f$ è isomorfo a $\mathbb{R}$.

Esercizio 12. Sia $G = \mathbb{Z}_3 \times S_3$, dove S_3 è il gruppo delle permutazioni di un insieme di 3 elementi (vedi esercizio 4).

(1) Qual è l'ordine di G? È abeliano?
(2) Determinare, se possibile, un sottogruppo di ordine 8 e uno di ordine 9 di G.