Esercizio 1

martedì 17 novembre 2020 09:11

Esercizio 1. Siano dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $B = \{a,b,c,d,e\}$. Si determini la cardinalità dei seguenti insiemi:

(1) $A \times B^2$;
(2) $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$;
(3) $\{f : A \to B \text{ funzione}\}$; → "quante funzioni?" è l'insieme di funzioni
(4) $\{f : \mathscr{P}(A) \to B \text{ funzione}\}$;
(5) $\{f : \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A) \text{ funzione}\}$;
(6) $\{f : A \to B \text{ funzione} : f(1) = f(2) = f(3) = f(4)\}$;
(7) $\{f : A \to B \text{ funzione} : |f(\{1,2,3,4\})| = 2\}$;
(8) $\{f : A \to B \text{ funzione iniettiva}\}$. ← CARDINALITÀ

1) $A \times B^2$ dove $B^2 = B \times B$ → tutte le possibili combinazioni (coppie) $= 5^2 = 25$

$\#(A \times B^2) = 7 \cdot 25 = 175$ elementi ✓

$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$, $|X^Y| = |X|^{|Y|}$

$|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$ $\qquad |X \times Y| = |X| \cdot |Y|$

2) $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) = |\mathscr{P}(A)| \cdot |\mathscr{P}(B)| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^7 \cdot 2^5 = 4096$ → posso lasciare il risultato così

$\mathscr{P}(A) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{1,7\}$
$\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{2,7\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{3,7\}$
$,\{4,5\},\{4,6\},\{4,7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\},$
$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,2,7\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,3,7\},$
$\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,4,7\},\{4,5,6\},\{4,5,7\},\{5,6,7\},\{5,6,1\},\{5,6,2\}$
$\{5,6,3\},\{2,4,6\},\{2,4,5\},\{2,4,7\},\{1,6,7\},\{2,6,7\},\{3,6,7\},\emptyset,A\}$

$\#\mathscr{P}(A) = 54$

$\mathscr{P}(B) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\}$
$\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\},\ldots$

$\ldots \quad 54 \cdot \mathscr{P}(B)$

3) $\#\{f : A \to B\}$ $= B^A \to |B^A| = B^{|A|} = 5^7 = 78125$
il n° di funzioni che posso ~~creare sono~~ tutte le possibili combinazioni di 7 el di A ~~con i 5 di B senza rip.~~
~~$\binom{7}{5} = 21$ funzioni~~

4) $f : \mathscr{P}(A) \to B$ $\qquad |B^{\mathscr{P}(A)}| = |B|^{|\mathscr{P}(A)|} = 5^{2^7} = 5^{128}$

5) $\{f : \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A)\}$ $\quad \# f = \#\mathscr{P}(B) = ?$

5) $\{f: \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)\}$ $\# f = \# \mathcal{P}(B) = ?$

$|\mathcal{P}(A)^{\mathcal{P}(B)}| = 128^{32}$

6) $C = \{f: A \to B$ t.c. $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)\}$ ovvero ho uno stesso el. di B (producono la stessa copia)

Dunque ho 4 x fissate, ne rimangono 3 da associare a B;

quante combinazioni (coppie) possibili?, $\binom{5}{3}$ = 10 → dunque posso formare 10 f. diverse

(5 → el. di B; 3 → el. di A rimanenti)

allora $\#\{f: A \to B\} = 10$

$f\ A \to B$ $\qquad |C| = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ (per il 1° valore)

$1 \mapsto a, b, c, d, e$ 5 possibilità

$2 \mapsto f(1)$ 1 possibilità

$3 \mapsto f(1)$ 1 "

$4 \mapsto f(1)$ 1 "

$5 \mapsto a, b, c, d, e$ 5 "

$6 \mapsto a, b, c, d, e$ 5 "

$7 \mapsto a, b, c, d, e$ 5 "

7) $D = \{f: A \to B$ t.c. $\#(f(\{1,2,3,4\})) = 2\}$ = 2 combinaz. possibili per 4 x di A

(l'immagine di $\{1,2,3,4\}$ tramite f è un insieme di due elementi)

Le rimanenti 3 x posso associarle in $\binom{5}{3} = 10$ modi diversi

Allora ottengo 10 funzioni diverse → $\#\{f: A \to B\} = 10$

$B = \{a, b, c, d, e\}$ quanti sottoinsiemi di B di 2 elementi ci sono? $\binom{5}{2}$

Fissiamo $T \subseteq B$ di due elementi t.c. $f(\{1,2,3,4\}) = T$

dove inviare

$1 \mapsto 2$ possibilità → elementi di T

$2 \mapsto 2$ "

$3 \mapsto 2$ "

$4 \mapsto 2$ "

$\{1,2,3,4\} \to T$

es. $1 \mapsto a$, $2 \mapsto a$, $3 \mapsto a$, $4 \mapsto a$ | $1 \mapsto b$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto b$, $4 \mapsto b$

$(2^4 - 2)$ possibilità

perché ho singoletti, non ho più $= T$ (a e b per esempio, si intendono 2 el.)

$(2^4 - 2)$ possibilità

elementi mandati nello stesso elemento e in due diversi

perché ho singoletti, non ho più 2^T (a e b per esempio, si intendano 2 el.)

$|D| = \binom{5}{2} \cdot (2^4 - 2) \cdot 5^3$

$= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 14 \cdot 125 = 17.500$

$5 \longmapsto a, b, c, d, e$ 5 poss

$6 \longmapsto$ " "

$7 \longmapsto$ " " $\Big\} 5^3$

deve essere minore di tutte le funzioni da A a B ($7^8 \cdot 125$)

8) $f: A \to B$ INIETTIVA, quindi ogni el. di B è preso una volta sola

$\# A > \# B$ e degli el. di A quindi non vengono assegnati

non è possibile definire una funzione iniettiva $f: A \to B$

in quanto $\forall x \in A \ ! \nexists y \in B \mid y = f(x)$

(infatti non è stato specificato che esista)

$\nexists f: A \to B$

$\{f: A \to B \text{ INIETTIVA}\} = \emptyset$

$| \quad " \quad " \quad | = 0$

Esercizio 2

martedì 17 novembre 2020 09:44

Esercizio 2. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a^b = c^d.$$

(1) Si verifichi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
(2) Esibire tre elementi distinti che appartengono alla classe $[(3,6)]$ e tre elementi distinti che appartengono alla classe $[(1,1)]$.
(3) Qual è la cardinalità della classe $[(2,3)]$?
(4) Esistono classi di equivalenza aventi cardinalità uguale a 1? Se sì, si determini almeno una tale classe.
(5) * Si determini la cardinalità del quoziente $A/\sim$.

1) RIFLESSIVA: $(a,b) \sim (a,b) \iff a^b = a^b$ ✓

SIMMETRICA: $(a,b) \sim (c,d) \iff (c,d) \sim (a,b)$; $a^b = c^d \iff c^d = a^b$ ✓

TRANSITIVA $(a,b) \sim (c,d), (c,d) \sim (z,t) \to (a,b) \sim (z,t)$

$a^b = c^d \qquad c^d = z^t \to a^b = z^t$ ✓ sì ; $a^b = c^d = z^t$ ✓

è rel. d'equivalenza ✓

2) $[(3,6)] = \{(x,y) \in A \mid (3,6) \sim (x,y)\}$ ovvero per quali (x,y) ho 3^6

$\overline{(3,6)}$ "

$3^6 = x^y = 9^3 = 3^6 = 27^2 = 729^1$

$[(3,6)] = \{(3,6), (9,3), (27,2) \dots\}$ ✓

$[(1,1)] = \{(1,1), (\cancel{3,0}), (\cancel{5,0}) \dots\}$ 1 2, 1 3

~~$1^1 = x^y = 3^0 = 5^0 = 1^1$~~

$0 \notin \underset{\mathbb{N}^*}{A}$! $1^1 = 1^2 = 1^3 \dots$

3) $[(2,3)] = \{(2,3), (8,1)\}$ $\qquad 2^3 = x^y = 8^1 = 2^3$

8

$\# |[(2,3)]| = 2$

$\#[(1,1)] = \{(1,a) \mid a \in \mathbb{N}^*\}$ (classe infinita, numerabile (BIGEZIONE CON $\mathbb{N}^*$

$\hookrightarrow \mathbb{N}^*$

$(1,a) \longmapsto a$

4) $|[(x,y)]| = 1$ esiste e sono le classi dei n primi elevati a 1 CON $\mathbb{N}^*$)

es. $[(x,y)] = \{[(2,1)], [(3,1)], [(5,1)] \dots\}$

$\hookrightarrow \{(2,1)\} \to$ per la riflessività l'el. che rappresenta la classe fa parte della classe

p primo $\#[(p,1)] = 1$

5) $\#(A/\sim)$? $\qquad A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ $\qquad A/\sim = \{[x,y] \in A \mid (x,y) \in A\}$

$\forall [x,y] \in A$ si verifica $(x,y) \in A$

dunque per tutto $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

allora $\#(A/\sim) = \#(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) = \aleph_0$ ✓

dunque per tutto $N^* \times N^*$ /

allora $\#(A/\sim) = \#(N^* \times N^*) = \aleph_0$ ✓

posso dimostrarlo con una bigezione $\varphi : A/\sim \longrightarrow N^*$

$[a,b] \longmapsto a^b$

• φ è una funzione, cioè φ è indipendente dalla scelta del rappresentante di $[(a,b)]$

$(a,b), (c,d) \in A$, $(a,b) \sim (c,d) \longrightarrow a^b = c^d \longrightarrow \varphi(a,b) = \varphi(c,d)$

φ dipende solo dalla classe $[(a,b)] = [(c,d)]$

• SURGETTIVA Dato $x \in N^*$ scelgo $[(x,1)] \in A/\sim$, $\varphi([(x,1)]) = x^1 = x$

• INIETTIVA $[(a,b)], [(c,d)] \in A/\sim$ $\varphi[(a,b)] = \varphi([(c,d)]) \longrightarrow a^b = c^d \longrightarrow (a,b) \sim (c,d)$

$\longrightarrow [(a,b)] = [(c,d)]$

allora bigettiva

Esercizio 3

martedì 17 novembre 2020 10:11

Esercizio 3. Sia dato il numero complesso

$$z = \frac{2^9(1+2i)(1+3i)}{5(\sqrt{3}+i)^9}.$$

(1) Scrivere z in forma $a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$ e in forma esponenziale.

(2) Disegnare nel piano di Gauss le radici cubiche di z (anche senza determinarle esplicitamente).

$$z = \frac{2^9(1+2i)(1+3i)}{5(\sqrt{3}+i)^9} \cdot \frac{(\sqrt{3}-i)^9}{(\sqrt{3}-i)^9} = \frac{2^9(1+2i)(1+3i)(\sqrt{3}-i)^9}{5(3+1)^{18}} =$$

$$\hookrightarrow 5 \cdot 4^{18} = 5 \cdot (2^2)^{18} = 5 \cdot 2^{36}$$

$$= \frac{\cancel{2^9}(1+2i)(1+3i)(\sqrt{3}-i)^9}{5 \cdot 2^{\cancel{32}\,23}} = \frac{(\overbrace{1+3i+2i+6i^2}^{1+5i-6})(\sqrt{3}-i)^9}{5 \cdot 2^{23}}$$

$$= \frac{(-5+5i)(\sqrt{3}-i)^9}{5 \cdot 2^{23}} \quad \hookrightarrow (\sqrt{3}-i)^9 \to |z| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\to \vartheta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$(-5+5i) \to |z| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\to \vartheta = -\frac{5}{5} = -1 \to -\frac{\pi}{4}$$

$$z = 5\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\to \frac{(5\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i})(2 \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i})}{5 \cdot 2^{23}} = \frac{10\sqrt{2} \cdot e^{\frac{-7\pi}{12}i}}{5 \cdot 2^{23}}$$

$$\to \frac{\cancel{10}^{\,2}\sqrt{2}}{\cancel{5} \cdot 2^{23}} \cdot e^{-\frac{7}{12}\pi i} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-23} \cdot e^{-\frac{7}{12}\pi i}$$

$$\text{f. exp}: z = \underline{\sqrt{2^{43}} \cdot e^{-\frac{7}{12}\pi i}}$$

$$\text{f. algebrica}: \quad z = \cos\left(-\tfrac{7}{12}\pi\right) + i \sin\left(-\tfrac{7}{12}\pi\right)$$

$$z = \frac{2^9(1+2i)(1+3i)}{5(\sqrt{3}+i)^9}$$

- $(1+2i)(1+3i) = -5+5i$
- $\sqrt{3}+i \to$ f. exp $\quad |\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \arg(\sqrt{3}+i) = \vartheta$

$$\text{re} \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\vartheta \quad e \quad \sin = \frac{1}{2} \to \vartheta = \frac{\pi}{6}$$

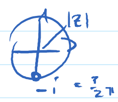
(cos)

$$\to (\sqrt{3}+i)^9 = 2\, e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2^9 e^{\frac{3}{2}\pi i} = 2^9(-i) = -2^9 i$$

$\to (\sqrt{3}+i)^3 = 2e^{i\frac{3\pi}{6}} = 2^3 e^{\frac{3}{2}\pi i} = 2^3(-i) = -2^3 i$

$\to (\cos\theta + i\sin\theta) = -i$

$0 \quad -i$

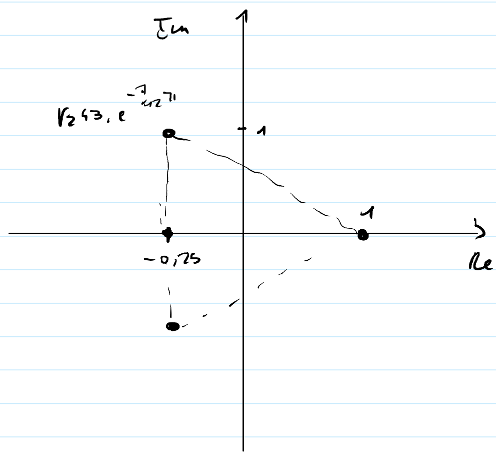


$z = \frac{\cancel{2^3}(-1+i)}{\cancel{2^3}\cdot i} = \frac{1-i}{i} = \frac{i}{i}\cdot\frac{1-i}{i} = \frac{i-i^2}{i^2} = \frac{i+1}{-1} = -1-i = \sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}$

cambio segno

f. alg. f. exp

2)



Le radici cubiche dovrebbero rappresentare un triangolo equilatero

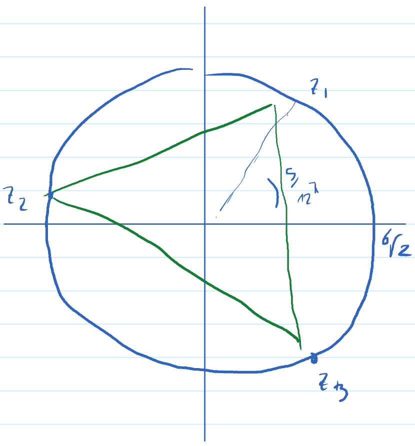
$z = \underbrace{\sqrt{2^{43}}\cdot e^{-\frac{7}{12}\pi i k}}$ con $k = 0, 1, 2$

$k = 0 \to z = 1$

$k = 1 \to z = \underbrace{\sqrt{2^{43}}\cdot e^{-\frac{7}{12}\pi i}}$

cos = −0,25 sin

sin = 0,36



$|z| = \sqrt{2}$ $\quad arg\left(\frac{5}{4}\pi\right)$

$\sqrt[3]{|z|} = (|z|)^{1/3} = (2^{1/2})^{1/3} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

$\to$ raggio circonf. delle soluzioni (rad cub.)

$\frac{5}{4}\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}\pi \simeq 75$ gradi

z_2 e z_3 posizioni approssimate

Esercizio 4

martedì 17 novembre 2020 10:49

Esercizio 4. Sia dato l'insieme $A = \{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,3),(5,3)\}$.

(1) Si consideri A come sottoinsieme del poset $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq \times \leq)$ e si determinino (se esistono) massimo, minimo, estremo inferiore, ed estremo superiore di A. Determinare l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti di A.

(2) Si consideri A come sottoinsieme del poset $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathrm{LEX})$ e si determinino (se esistono) massimo, minimo, estremo inferiore, ed estremo superiore di A. Determinare l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti di A.

1) $A \subseteq (N \times N, \leq \times \leq)$ ORDINE PRODOTTO $(a,b) \leq (c,d) \iff (a \leq c)$ e $(b \leq d)$ non e' un ORDINE TOTALE

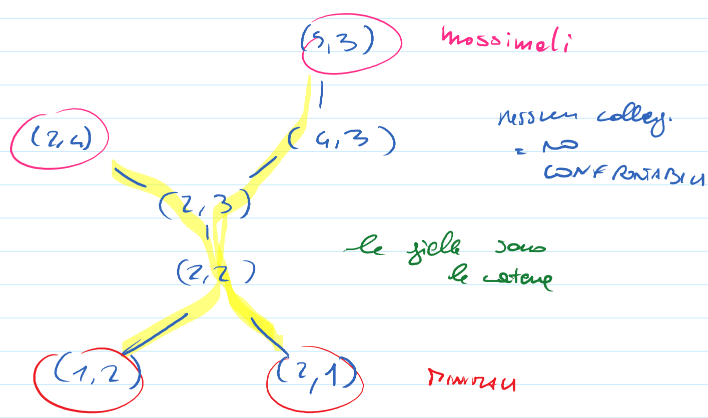
$(1,2)$ $(2,1)$ non CONFRONTABILI

$(1,2) \leq (2,2) \leq (2,3)$

$(2,1) \leq (2,1)$

...

DIAGRAMMA



ho 2 minimali e 2 massimali

no MAX e no MIN

- maggioranti: $\{(x,y) \in N \mid (x,y)$ e' maggiorante di $A\} = \{(x,y) \in N^2 \mid (x,y) \geq (a,b)\ \forall (a,b) \in A\}$

  elementi maggiori degli el. di A

  $= \{(x,y) \in N^2 \mid (x \geq 5)$ e $(y \geq 4)\}$

  ammette il minimo; $(5,4)$ $(\notin A)$; $= \sup A = (5,4)$

- minoranti: $\{(x,y) \in N \mid (x,y)$ e' minorante di $A\} = \{(x,y) \in N^2 \mid (x,y) \leq (a,b)\ \forall (a,b) \in A\}$

  $= \{(x,y) \in N \mid (x \leq 1)$ e $(y \leq 1)\}$ → el. più piccoli presenti nelle coppie di A

  $= \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

  ammette massimo: $(1,1) \rightarrow \inf A = (1,1)$

2) Con l'ordine LEX A e' ~~ordinato~~ TOTALMENTE ordinato, dunque posso confrontare le coppie.

MINIMO = $(1,2)$ perche' non c'e' coppia $< (1,2)$

MASSIMO: $(5,3)$ " " $> (5,3)$

maggioranti = $[(5,3), (+\infty, +\infty))$ $\sup A = (5,3)$

minoranti = $[(\ ,\ ), (1,2)]$ inf A = $(1,2)$

maggioranti $= [(5,3), (+\infty,+\infty))$ $\sup A = (5,3)$

minoranti $= [(0,0), (1,2)]$ $\inf A = (1,2)$

$\in A$

Ordine lex: $(x,y) \leq_{lex} (a,b) \longleftrightarrow \begin{cases} x < a \\ \text{oppure} \\ x = a \text{ e } y \leq b \end{cases}$ confronto prima le x ed eventualmente le y

se coincidono uso sempre $\leq$

min

$(1,2) \leq_{lex} (2,1) - (2,2) - (2,3) - (2,4) - (4,3) - (5,3)$ max

più piccolo stavolta (confrontabili)

più grande

una catena unica

se $\exists \min \to \min = \inf A$ se $\exists \max \to \max = \sup A$

- maggioranti: $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x,y) \geq_{lex} (a,b) \ \forall (a,b) \in A\} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > 5 \text{ o } (x = 5 \text{ e } y \geq 3)\}$

più grandi del max

(il minimo dei maggioranti è proprio il max $(5,3)$) che è $\sup A$

- minoranti: $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x,y) \leq_{lex} (a,b) \ \forall a,b \in A\} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < 1 \text{ o } (x = 1 \text{ e } y \leq 2)\}$

$= \{(0,y) \mid y \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,0), (1,1), (1,2)\}$