Esercizi pasquali /18-04 / Cattaneo Kevin - 34344382

1) $45 \begin{cases} 35\ B \\ 10\ R \end{cases}$ estraggo una carta: $B \rightarrow$ lancio moneta

$R \rightarrow$ 2 dadi onesti

a) P esce testa

b) P esce 6 (in somma)

a] Gli eventi sono indipendenti: l'estrazione di B o R non riduce o altera lo spazio campionario, bensì fa verificare un secondo evento

$$\rightarrow \underbrace{\frac{35}{45}}_{p(B)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{p(\text{testa})} \simeq 38{,}3\ \%$$

b] Casi di 6 (somma): (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3) 5 casi

Casi tot = 36   P (esce una combinazione che sommata faccia 6) = $\frac{5}{36}$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{10}{45}}_{p(R)} \cdot \underbrace{\frac{5}{36}}_{p(\text{fare 6 (somma)})} \simeq 3\ \%$$

2) urna di 6 B, 4 R. Estraggo 3. $P(1B \text{ e } 2R)$

$\underbrace{6B, 4R}_{10}$

$P(B) = \frac{6}{10}$

$P(R) = \frac{4}{10}$

$P(1B \text{ e } 2R) = BRR + RBR + RRB$ (3 casi)

$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{216}{720} \simeq 30\%$

[alternativa (comb): $\frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = 30\%$ $\frac{\text{modi di estrarre 1B} \cdot \text{" 2R}}{\text{modi di estrarre 3 palline}}$]

3) S spazio campione

E evento → successo $p(E)$

→ insuccesso $1 - p(E)$

S_n n° successi su n prove

seq. inf. prove indip.

$P(A_n)$

{almeno un successo nelle prime n prove} = $\{S_n \geq 1\}$

Si basa sulla serie geometrica $p(n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$

Osservo che 'almeno' un successo lo si ha togliendo dal totale le possibilità di ottenere sempre insuccesso (per n prove)

$$p(A_n) = 1 - \overbrace{(1-p)^n}^{p(S_n=0)}$$

4) Calcola $E[Y]$ di $Y = 4X+3$ dove X var aleatoria di lancio dado 6 facce

$$E[X] = \underbrace{1}_{\text{numero}} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{p\ \text{numero}} + 2\cdot\tfrac{1}{6} + 3\cdot\tfrac{1}{6} + 4\cdot\tfrac{1}{6} + 5\cdot\tfrac{1}{6} + 6\cdot\tfrac{1}{6} = 3{,}5$$

$$E[aX+b] = aE[X] + b$$
$$E[4X+3] = 4(3{,}5) + 3 = 17$$

5) Palline V e R, scatole A, B, C uguali = stesso n° tot di palline

$V(A) = 2R$
$V(B) = R/2$
$V(C) = R$

Scelgo scatola a caso, estraggo pallina verde, P scatola sia B? $= P(B|\text{verde})$

$$P(B|\text{verde}) = \frac{P(\text{verde}|B)\cdot P(B)}{P(\text{verde}|A)\cdot P(A) + P(\text{verde}|B)\cdot P(B) + P(\text{verde}|C)\cdot P(C)}$$

$P(\text{verde}|A)$: $\frac{V}{V+R} = \frac{2R}{2R+R} = \frac{2}{3}$ rimane il rapporto

$P(A)$: $\frac{1}{3}$

$$= \frac{\frac{R/2}{R/2+R}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{R/2}{R/2+R}\cdot\frac{1}{3} + \frac{R}{2R}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{\cancel{R}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3\cancel{R}}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \simeq 22{,}2\ \%$$

6] Sia X distribuita uniformemente su $[0,2]$

Calcola

a) pdf di e^x

b) $E[e^x]$ e $Var(e^x)$

x qualsiasi valore valore costituisce una costante. Non fosse uniforme (es pdf $=x$ allora

pdf di X

$$P_Y(y) = P_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dF^{-1}(y)}{\text{"in" } dy}$$

$$P_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y}$$

pdf$(\ln y)$ $= \ln y$ (IDENTITY)

perché uniforme

a] $\text{pdf}(x) : \int_0^2 c \, dx = 1 \to c = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2} = \text{pdf}(x)$

Detta $e^x = y$ definita su $[1, e^2]$ $\left| \int_0^a \frac{1}{2} p(a) = \frac{1}{2} x \Big|_0^a = \frac{1}{2} \boxed{a} \right|$

$F_Y(y) = P(e^x \leq y) = P(x \leq \ln y) = \frac{1}{2} \ln y$

Allora

$P_Y(y) : \text{pdf}(y) = (F(y))' = \frac{P(x) \cdot d g^{-1}}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2y}$

$\left(\int_1^{e^2} \frac{1}{2} y \, dy = \frac{1}{2} \ln y \Big|_1^{e^2} = 1 \checkmark \right)$

b] $E[e^x] = \int_0^2 e^x \cdot p(x) \, dx = \frac{1}{2} e^x \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

$Var(e^x) = E[e^{2x}] - (E[e^x])^2 = \int_0^2 e^{2x} \cdot \underbrace{p(x)}_{\frac{1}{2}} \, dx - \left[\frac{1}{2}(e^2-1)\right]^2$

$= \frac{e^4 - 1}{4} - \frac{1}{4}(e^2-1)^2 = \frac{e^2-1}{2}$

7] X e Y var aleatorie discrete $P(x,y)$

$P(2,3) = \frac{1}{3}$ $\quad P(3,4) = \frac{1}{4}$

$P(3,3) = \frac{1}{4}$ $\quad P(2,1) = \frac{1}{6}$

a] P marginali?

$x \backslash y$	1	3	4
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$p_x(2) = \frac{1}{2}$

$p_x(3) = \frac{1}{2}$

$\Sigma p_x = 1 \checkmark$

$\Sigma p_y = 1 \checkmark$

$p_y(1) = \frac{1}{6}$ $\quad (2) = \frac{7}{12}$ $\quad (3) = \frac{1}{4}$

b) media di X e Y?
valore atteso

$E[X] = 5/2 \qquad E[Y] = 79/24$ (vedi sotto)

c] $E[X \cdot Y] = \sum_i^N \sum_j^M (x_i \cdot y_j) \cdot p(x_i, y_j)$

$= 2 \cdot 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot \cancel{3} \cdot 1/\cancel{3} + \cancel{2 \cdot 4 \cdot 0} +$
$+ \cancel{3 \cdot 1 \cdot 0} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}}$
$= \frac{1}{3} + 2 + \frac{9}{4} + 3 \simeq 7{,}58$

d) $E[X] = \sum_i^N x_i \cdot \underbrace{p(x_i)}_{\text{marginale}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} = 5/2$

$E[Y] = \sum_j^M y_j \, p(y_j) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \cancel{3} \cdot \frac{7}{\cancel{12}_4} + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{79}{24}$

osservo $E(XY] \neq E[X] \cdot E[Y]$ quindi X e Y dipendenti
e Cov $\neq 0$

$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$ (X e Y numeri)
$= 7{,}58 - 7{,}29 \simeq 0{,}29$

e) X e Y non sono indipendenti

f) calcolo $P(X \leq 3, Y \leq 3) = F(3,3)$ cdf

$F(3,3) = \sum_{i \leq 3}^N \sum_{j \leq 3}^M p(x_i, y_j) = p(2,1) + p(2,3) + p(3,1) + p(3,3)$

$= 1/6 + 1/3 + 0 + 1/4 = 0{,}75$