Es foglio 2 pre - esame

1) $p(\text{laurea}) = \frac{6}{10}$ P su 5 studenti:

a) nessuno si laurei b) uno solo si laurea c) almeno uno si laurea

a) $\left(\frac{4}{10}\right)^5$ b) $\binom{5}{1}\frac{6}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^4$ c) $1 - \left(\frac{4}{10}\right)^5$

BINOMIALE

può essere il 1°, 2° ... 5° studente a laurearsi

tolgo p che nessuno si laurei

2) $P(\text{passare}) = 0,7$ p (passare) al quarto tentativo?

$$P_{\text{passare}}(4) = (0,3)^{4-1}\,0,7 = (0,3)^3\,0,7$$

passato all'ennesimo

3) pdf: $f(x) = Cx^3$ definita su $[0, \frac{1}{2}]$

a) Det C b) Calcola $P\{\frac{1}{3} \le X \le 1\}$ c) Calcola $E(x^2)$ e $Var(x)$

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} Cx^3\,dx = C\frac{1}{4}x^4\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{64} = 1$ sse $C = 64$

b) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} 64x^3\,dx$ ma la pdf è definita fra 0 e $\frac{1}{2}$, fuori è nulla

$$\rightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 64x^3\,dx = 16x^4\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

c) $E(x) = \int x \cdot 64x^3\,dx = 64\int x^4\,dx = \frac{64}{5}x^5\Big|_0^{\frac{1}{2}}$

$$E(X) = \frac{\cancel{64}^{2}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{32}} = 2/5$$

$$E(X^2) = \int x^2 \cdot 64x^3 dx = 64 \int x^5 dx = \frac{64}{6} x^6 \Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{\cancel{64}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{64}} = 1/6$$

$$Var(X) = 1/6 - 4/25 = 1/150$$

4) $X \in [0,2]$. Calcola: (uniforme)

a) pdf e^x b) $E[e^x]$ e $Var[e^x]$

a) $P_x : \int_0^2 c \; dx$ $c = \frac{1}{b-a} = 1/2$

$$pdf(e^x) = P_x(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d g^{-1}(y)}{dy}$$

$$= \underbrace{P_{(x)}}_{\text{costante}}(\ln(y)) \cdot 1/y$$

$= \frac{1}{2} \cdot 1/y$ definita fra $[1, e^2]$

b) $E[e^x] = \int_0^2 e^x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} e^x \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

$$E[e^{2x}] = \int_0^2 e^{2x} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$

$$Var(X) = \frac{1}{4}(e^4 - 1) - \frac{1}{4}(e^2 - 1)^2$$

5) X distr. normale $N(3,9)$ $\quad Y = aX + b$

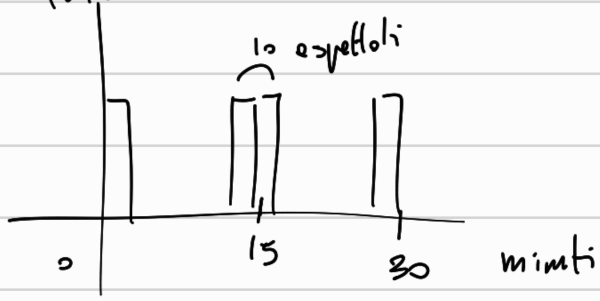
Det a e b t.c. Y abbia distribuzione $N(0,1)$

Y trasformazione lineare $\rightarrow$ nuova gaussiana con:

$$\mu' = a\mu + b \qquad \sigma' = a\sigma$$

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ 9a = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ a = \frac{1}{9} \end{cases} \longrightarrow Y = \frac{1}{9}X - \frac{1}{3}$$

6) Autobus



in tot. ho 4 intervalli di attesa di 5 minuti

distrib. uniforme

$$c = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{30}$$

$$P = \text{pdf}: \ 4 \cdot \int_0^5 \frac{1}{30}\,dx = \frac{4}{30}x \Big|_0^5 = \frac{2\cancel{0}}{3\cancel{0}} = \frac{2}{3}$$

7) Distr. exp con $\lambda = 6,9$

a) p dalle 18 il 1° paziente arrive prima delle 18,15

b) p prima delle 18.45 sapendo che non è arrivato prima di 18.15

$$p(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

a) $p(x) = \int_0^{1/4} 6,9\, e^{-6,9x} = -6,9 \cdot \frac{1}{6,9} e^{-6,9x} \Big|_0^{1/4} = 0,82827$

b) $p(<.45) - p(<.15) = -e^{\frac{69}{10}x}\Big|_0^{\frac{3}{4}} - 0,82827$

8) Sapendo che in una geometrica $E[X] = 1/p$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$p(i) = (1-p)^{i-1} \cdot p$ e $E[X] = 1/p$

Var (X) in generale è equivalente alla scrittura:

$E[x^2] - (\underbrace{E[x]}_{\hookrightarrow 1/p^2})^2$ $\qquad E[x] = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} p = 1/p$

$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 (1-p)^{i^2-1} \cdot p = \sum_{i=0}^{\infty} (\overset{a}{i-1} + \overset{b}{1})^2 (1-p)^{i-1} p$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \Big\{ \underset{a^2}{(i-1)^2} (1-p)^{i-1} p + \overset{2ab}{2(i-1)}(1-p)^{i-1} p + \underset{b^2}{1} \underbrace{(1-p)^{i-1} p}_{1} \Big\}$

detto $j = i-1$: $\sum_{j=\cancel{1}}^{\infty} j^2 (1-p)^j p + 1 + 2\sum_{j=\cancel{0}}^{\infty} \cancel{a} j (1-p)^j p$

$= (1-p) E(x^2) + 2(1-p) E(x) + 1$

$$\rightarrow \cancel{E(x^2)} - (\cancel{1}-p)\,E(x^2) = 2(1-p)E(x)+1$$

$$\rightarrow \cancel{p}\,E(x^2) = \frac{\frac{2(1-p)}{p}+1}{p} = \frac{\frac{2}{p}-2+1}{p} = \frac{2-p}{}$$

Quindi $Var(X) = \frac{2-p}{2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$ ✓

9) $E[X^2] = \sum_{i=\cancel{0}\,1}^{\infty} \cancel{i^2}\frac{\mu^{i^2}}{\cancel{i^2!}\;\cancel{i}(i-1)!} e^{-\mu}$ Dimostro che $Var(X) = \mu$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu^{i^2}}{(i^2-1)!} e^{-\mu}$$ [non richiesto]

$$= \mu \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu^{i^2-1}}{(i^2-1)!} e^{-\mu} \rightarrow 2\mu^2$$

$$Var(X) = (\mu^2+\mu) - \mu^2 = \mu$$

10) 20% fam senza figli $P(M) = P(F) = \frac{1}{2}$
50% fam 1 figlio
30% fam 2 figli

M \ F	0	1	2
0	$0{,}2$	$0{,}5 \cdot 0{,}5$	$0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$
1	$0{,}5 \cdot 0{,}5$	$0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$	0
2	$0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$	0	0

$\tilde{P}(M,0) = 0{,}525$

$P(M,1) = 0{,}325$

$P(M,2) = 0{,}15$

$\Sigma = 1$ ✓

$\tilde{P}(F,0) \quad P(F,1) \quad P(F,2)$

$0{,}525 \quad 0{,}325 \quad 0{,}15$

$\Sigma = 1$ ✓

$$\overset{M\ F}{P(0,0)} = 0{,}2$$

$P(1,0) = 0{,}25$

... (vedi tabella)