Soluzioni - W3

E3.1 Si consideri l'esercizio E2.2 della settimana scorsa. Ipotizzando che ogni tiro costi 1€ e che ogni centro dia in premio 5€, qual è il valore medio vinto da un partecipante con un singolo tiro?

Soluzione
Chiamiamo G la variabile aleatoria che esprime il guadagno *netto* del partecipante al gioco, questa ha come possibili realizzazioni $5 - 1 = 4$€ e $0 - 1 = -1$€ . Vogliamo quindi calcolare $E[G]$ dove G ha la seguente distribuzione di probabilità:

$$G = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } P\{x = \text{colpito}\} \\ +2 & \text{con probabilità } P\{x = \text{mancato}\} \end{cases}$$

Serve ottenere le quantità $P\{x = \text{colpito}\}$, $P\{x = \text{mancato}\}$. Possiamo utilizzare il teorema della probabilità assoluta.
$P\{x = \text{colpito}\} = \sum_{n\in\{1,2,3\}} P\{x = \text{colpito}|\text{Partecipante = Tipo } n\}P\{\text{Partecipante = Tipo } n\}$
$P\{x = \text{mancato}\} = \sum_{n\in\{1,2,3\}} P\{x = \text{mancato}|\text{Partecipante = Tipo } n\}P\{\text{Partecipante = Tipo } n\}$

dove $\{$Partecipante = Tipo n$\}$ esprime l'evento in cui il partecipante sia di Tipo 1, Tipo 2, o Tipo 3. Le probabilità di questi eventi sono rispettivamente 10%, 40% e 50%, mentre le $P\{x = \text{colpito}|\text{Partecipante = Tipo } n\}$ sono rispettivamente $0,8$, $0,5$ e $0,1$. Le probabilità di bersaglio mancato possono essere espresse come il coniugato delle probabilità di bersaglio colpito: $P\{x = \text{mancato}|\text{Partecipante = Tipo } n\} = 1 - P\{x = \text{colpito}|\text{Partecipante = Tipo } n\}$.
Otteniamo dunque:
$P\{x = \text{colpito}\} = 0,1 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,33$
$P\{x = \text{mancato}\} = 0,1 \cdot (1 - 0,8) + 0,4 \cdot (1 - 0,5) + 0,5 \cdot (1 - 0,1) = 0,67$

A questo punto possiamo calcolare il valore medio $E[G] = -1 \cdot P\{x = \text{colpito}\} + 4 \cdot P\{x = \text{mancato}\} = -1 \cdot 0,67 + 4 \cdot 0,33 = 0,65$

E3.2 Un'urna contiene 2 palline verdi, 3 rosse e 5 bianche; estraiamo casualmente 3 palline senza reinserimento. Guadagniamo 1€ per ogni pallina verde, nulla per ogni pallina bianca e perdiamo 1€ per ogni pallina rossa. Calcola la funzione di probabilità di massa e il valore atteso di X.

Soluzione
La vincita di X€ è una variabile casuale i cui possibili valori sono $0, \pm 1, \pm 2, -3$. I risultati possibili dell'esperimento sono le combinazioni di 3 palline scelte tra 11. Nell'assunzione di equiprobabilità la probabilità con la quale X assume un possibile valore si riduce al calcolo dei casi favorevoli corrispondenti. Limitandoci ai casi in cui $X \leq 0$, osserviamo che $X = 0$ si ottiene con 3 palline bianche o 1 di ogni colore, $X = -1$ con 1 rossa e 2 bianche o 2 rosse e 1 verde, $X = -2$ con 2 rosse e 1 bianca e $X = -3$ con 3 rosse. Avremo pertanto

$$P\{X = 0\} = \frac{\binom{5}{3} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{40}{120}, \quad P\{X = -1\} = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2} + \binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120}$$

$$P\{X=-2\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120}, \qquad P\{X=-3\} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}$$

La probabilità di non vincere è (40+36+15+1)/120 = 92/120=$0.7\bar{6}$. Similmente, la probabliità di vincere risulta essere pari a 28/120=$0.2\bar{3}$ o 1-$0.7\bar{3}$. Il valore atteso è pari a

$$E[X] = \sum_{X\in\Omega} XP(X) \approx -0.3,$$

con Ω tutti i risultati possibili di cui abbiamo calcolato le probabilità. Se il numero di palline rosse nell'urna è uguale al numero di palline verdi, la probabilità di vincita è uguale a quella di perdita e quindi il valore atteso di X è zero.

E3.3 Se $P\{X=-1\} = 0.3$, $P\{X=0\} = 0.5$ e $P\{X=1\} = 0.2$ calcola $E[2X^2+1]$.

Soluzione
Poiché $E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$ hai che $E[2X^2+1] = E[2X^2]+1 = [2\cdot(-1)^2\cdot 0.3 + 0 + 2\cdot(1)^2\cdot 0.2]+1 = 2$.

Soluzione
Poiché $E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$ hai che $E[X^3] = -13\cdot 0.2 + 0\cdot 0.5 + 13\cdot 0.3 = 0.1$.

E3.4 Sul totale degli iscritti all'universitá, la probabilitá di laurearsi di uno studente é $p = 0.7$. Si determini la probabilitá che, su 8 studenti:

1. Nessuno riesca a laurearsi.
2. Uno solo riesca a laurearsi.
3. Almeno uno riesca a laurearsi.

SOLUZIONE:
Sia X la v.a. che indica il numero di studenti che riescono a laurearsi su 8 studenti. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri $n=8$ e $p=0.3$.

1. $P(X=0) = (0.3)^8 \approx 0.00007$
2. $P(X=1) = 8(0.7)(0.3)^7 \approx 0.0012$
3. $P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 0.99993$

E3.5 Dimostra che $Var(X) = (1-p)/p^2$ è la varianza della variabile casuale geometrica X.

SOLUZIONE:
Per una variabile casuale geometrica

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} = i(1-p)^{i-1}p = \frac{1}{p}.$$

Inoltre

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{\infty} i^2(1-p)^{i-1}p = \sum_{i=1}^{\infty}(i+1-1)^2(1-p)^{i-1}p$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)^2(1-p)^{i-1}p + \sum_{i=1}^{\infty}2(i-1)(1-p)^{i-1}p + \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}j^2(1-p)^j p + \sum_{j=0}^{\infty}2j(1-p)^j p + 1 = (1-p)E[X^2] + 2(1-p)E[X] + 1$$

per cui

$$E[X^2] = \frac{2(1-p)E[X]+1}{p} = \frac{\frac{2}{p}-1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

e, quindi, $Var(X) = (1-p)/p^2$.

E3.6 La probabilità che un iscritto passi il test pratico per la patente è ad ogni tentativo pari a 0.6. Qual è la probabilità che un iscritto passerà finalmente il test pratico al terzo tentativo?

Soluzione

Usando la distribuzione geometrica,

$$p = 0.6 \Rightarrow P(\text{passare al III tentativo}) = (1-p)(1-p)p.$$