

Личные записи по топологии

@keba4ok

13 октября 2021г.

Некоторые воспоминания с конца второго курса по топологии, которые напрямую связаны с нынешним материалом, а также важные факты с лекций и практик.

Содержание

Алгебраическая топология.	2
Гомотопии.	2
Фундаментальная группа.	2
Оставшаяся хуйня.	3
Ретракции.	4
Клеточные пространства и накрытия.	6
Диффем.	9
«Напоминания».	9
Кривизны.	9
Многомерие.	10
Многомерные формулы Френе.	11
То, что ЕА рассказывал на доске.	12
4 семестр	15
Решения задач с практик	15
Поехали блять	17

Алгебраическая топология.

Гомотопии.

Будем считать, что X и Y - топологические пространства, $f, g : X \rightarrow Y$ - непрерывные отображения.

Определение 1. f и g *гомотопны* ($f \sim g$), если существует непрерывное отображение $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ такое, что

- $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X$;
- $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$.

Определение 2. Отображение H называется *гомотопией* между f и g .

Теорема 1. *Гомотопность - отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных функций из X в Y .*

Теорема 2. Пусть X, Y, Z - топологические пространства, отображения $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ гомотопны, и отображения $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ также гомотопны. Тогда $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.

Определение 3. Пусть $A \subset X$. Говорят, что гомотопия $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ *связана* на A , если $H(x, t) = H(x, 0), \forall x \in A, t \in [0, 1]$ (если гомотопия не связана, то она *свободна*).

Определение 4. Два пути $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ *гомотопны* ($\alpha \sim \beta$), если существует соединяющая их гомотопия, связанная на $\{0, 1\}$.

Определение 5. Пусть $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ - пути, и $\alpha(1) = \beta(0)$. Тогда *произведение путей* определяется как

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t - 1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Свойства произведения:

- произведения соответственно гомотопных путей гомотопны;
- ассоциативность;
- если ε_p и ε_q - постоянные пути в начале $\alpha(0) = p$ и $\alpha(1) = q$ пути α . Тогда $\varepsilon_p \alpha \sim \alpha \varepsilon_q \sim \alpha$;
- пусть $\alpha'(t) = \alpha(1 - t)$. Тогда $\alpha\alpha' \sim \varepsilon_p$.

Фундаментальная группа.

Определение 6. *Петля* - путь, у которого конец совпадает с началом. Множество петель в X с началом и концом в *отмеченной точке* x_0 , обозначается как $\Omega(X, x_0)$.

Определение 7. *Фундаментальная группа* топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 ($\pi_1(X, x_0)$) определяется так:

- множество элементов группы - фактор-множество $\Omega(X, x_0) / \sim$, где \sim - гомотопность путей с фиксированным концом в x_0 ;

- групповое произведение определяется формулой

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta],$$

где $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$.

Определение 8. Если γ - путь из p в q (значение в начале, и значение в конце). Тогда $T_\gamma : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q)$ - отображение групп (изоморфизм).

Теорема 3. Если X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, тогда

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Определение 9. (Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением). Если X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение, $f(x_0) = y_0$. Тогда определим $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ так:

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Свойства:

- * от композиции - композиция * к функциям;
- $\text{id} : X \rightarrow X \Rightarrow \text{id}_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Тогда $\text{id}_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

Утверждение 1. $f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, тогда $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ будет изоморфизмом.

Оставшаяся хуйня.

Определение 10. Топологическое пространство X *односвязно*, если X линейно связно и $\pi_1(X) = \{e\}$.

Теорема 4. S^n односвязно при всех n хотя бы 2.

Следствие. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ для всех n хотя бы 3, односвязно.

Определение 11. X, B - топологические пространства; $p : X \rightarrow B$ - непрерывное отображение называется *накрытием*, если $\forall u \in B$, существует окрестность $U : p^{-1}(U) = \sqcup v_i$, где каждое v_i открыто в X и $p|_{v_i}$ - гомеоморфизм между v_i и U .

Пример(ы) 1.

- гомеоморфизм (v_i - всё пространство);
- $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, где $p(x) = (\cos x, \sin x)$.

Теорема 5 (о постоянстве числа листов). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; B - связно. Тогда $|p^{-1}(b)|$ одинаково у всех $b \in B$.

Определение 12. $|p^{-1}(b)|$ - число листов накрытия

Определение 13. $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $f : Y \rightarrow B$ - непрерывное отображение. *Поднятием отображения* f называется непрерывное отображение $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ такое, что $f = p \circ \tilde{f}$.

Теорема 6 (*о поднятии пути*). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого пути $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ такого, что $\alpha(0) = b_0$, существует и притом единственное поднятие $\tilde{\alpha}$ пути α такое, что $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.

Лемма 1 (*о непрерывном аргументе*). Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда

- существует непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} = |\gamma(t)| \cdot (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$;
- такая φ единственная с точностью до добавления числа, кратного 2π .

Теорема 7 (*о поднятии гомотопии*). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого непрерывного отображения $H : K \rightarrow B$ такого, что $H(0, 0) = b_0$, существует, и притом единственное, поднятие \tilde{H} , что $\tilde{H}(0, 0) = x_0$.

Следствие. Пусть α, β - пути в B такие, что $\alpha(0) = \beta(0)$ и $\alpha(1) = \beta(1)$. Если $\alpha \sim \beta$, то их поднятие в одну и ту же точку $x_0 \in X$ гомотопны, и, что показывается изначальным, $\tilde{\alpha}(1) \sim \tilde{\beta}(1)$.

Определение 14. Петля, гомотопная постоянной, называется *стягиваемой*.

Следствие. Поднятие стягиваемой петли - стягиваемая петля.

Следствие. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $x_0 \in X, b_0 \in B$ такие, что $p(x_0) = b_0$. Тогда индуцированный гомеоморфизм $p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ является инъекцией.

Определение 15. Образ группы $\pi_1(X, x_0)$ при p_* называется *группой накрытия*.

Утверждение 2. Петля из группы накрытия при поднятии не размыкается.

Определение 16. Накрытие $p : X \rightarrow B$ называется *универсальным*, если X односвязно ($\pi_1(X) = \{e\}$, X - линейно связно).

Лемма 2. Сопоставим каждой петле $\alpha \in \Omega(B, b_0)$ конец её поднятия с началом в x_0 , то есть, рассматриваем отображение $\Omega(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ (так как конец поднятия проектируется в b_0). Это соответствие определяет биекцию $\pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$.

Теорема 8. $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, при $n \geq 2$.

Теорема 9. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Следствие. \mathbb{R}^2 не гомеоморфно \mathbb{R}^3 .

Ретракции.

Определение 17. *Ретракция* - непрерывное отображение $f : X \rightarrow A$, где $A \subset X$, такое, что $f|_A = \text{id}_A$. Если существует ретракция $f : X \rightarrow A$, то A называется *ретрактом* пространства X .

Теорема 10. Подмножество A топологического пространства X является его ретрактом тогда и только тогда, когда всякое непрерывное отображение $g : A \rightarrow Y$ в произвольное пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения $X \rightarrow Y$.

Лемма 3. Если $\rho : X \rightarrow A$ - ретракция, $\text{in} : A \rightarrow X$ - вложение и $x_0 \in A$, то

- $\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ - сюръекция;

- $\text{in} : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ - инъекция.

Теорема 11 (*Теорема Борсука в размерности 2*). Не существует ретракции из D^2 на S^1 .

Определение 18. Точка $a \in X$ называется *неподвижной* точкой отображения $f : X \rightarrow X$, если $f(a) = a$. Говорят, что пространство обладает свойством неподвижной точки, если всякое непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет неподвижную точку.

Теорема 12. Любое непрерывное отображение $f : D^2 \rightarrow D^2$ имеет неподвижную точку.

Определение 19. X и Y *гомотопически эквивалентны* ($X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ такие, что $g \circ f \sim \text{id}_X$ и $f \circ g \sim \text{id}_Y$. Такие f и g называются *гомотопически обратными* отображениями. Каждое из f и g называется *гомотопической эквивалентностью*.

Определение 20. Ретракция $f : X \rightarrow A$ называется *деформационной ретракцией*, если её композиция с включением $\text{in} : A \rightarrow X$ гомотопна тождественному отображению, то есть

$$\text{in} \circ f \sim \text{id}_X.$$

Если существуют деформационная ретракция X на A , то A называется *деформационным ретрактом* пространства X .

Теорема 13. Деформационная ретракция - гомотопическая эквивалентность.

Теорема 14. Гомотопическая эквивалентность - отношение эквивалентности между топологическими пространствами.

Определение 21. Класс пространства, гомотопически эквивалентных данному X называется его *гомотопическим типом*. Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопически эквивалентных, - *гомотопические свойства*.

Теорема 15. Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Лемма 4. Пусть $f, g : X \rightarrow Y$ - гомотопные отображения, $H : X \times t \rightarrow Y$ - гомотопия между ними, $f(x_0) = y_0$, $g(x_0) = y_1$, $\gamma(t) = H(x_0, t)$ - путь от y_0 к y_1 . Тогда $g_* = T_\gamma \circ f_*$.

Определение 22. Топологическое пространство *стягиваемо*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Лемма 5. Пусть $h : S^1 \rightarrow X$ - непрерывное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:

- h гомотопно постоянному отображению;
- h продолжается до непрерывного отображения $D^2 \rightarrow X$;
- h_* - тривиальный гомоморфизм фундаментальных групп.

Теорема 16. Для любой непрерывной функции $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(-x) = f(x)$.

Определение 23. *Топологической парой* (X, A) называется топологическое пространство X с выделенным подмножеством A , на котором мы рассматриваем топологию, индуцированную с X .

Определение 24. Топологическая пара называется *парой Борсука*, если для любого топологического пространства Y , любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ и любой гомотопии $F : A \times I \rightarrow Y$ такой, что $F_0 = f|_A$ (напомним, что по определению $F_t(\cdot) = F(\cdot, t)$) существует гомотопия $G : X \times I \rightarrow Y$ такая, что $G_t|_A = F_t$ для всех $t \in I$ и $G_0 = f$. Иными словами, любую гомотопию A внутри Y , начинающуюся с f , можно продолжить до гомотопии всего X .

Утверждение 3. Если (X, A) - пара Борсука и A стягиваемо, то X гомотопически эквивалентно X/A .

Клеточные пространства и накрытия.

Определение 25. *Клеточное пространство* размерности n определяется по индукции следующим образом. Клеточное пространство размерности 0 - дискретное пространство. Клеточное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ - топологическое пространство X , которое может быть получено (с точностью до гомеоморфизма) из клеточного пространства Y с размерностью $k < n$ приклеиванием набора $\{D_i^n\}_{i \in I}$ копий диска D^n по непрерывным отображениям $\varphi_i : \partial D \rightarrow Y$, где ∂D - краевая сфера диска D^n .

Клеточное разбиение - конкретный способ представить X в таком виде, вместе с аналогичным представлением Y и так далее до размерности 0.

Клетки - внутренности приклеиваемых дисков, а также точки исходного 0-мерного пространства.

Определение 26. Клеточный комплекс -

- *конечный*, если клеток конечное число;
- *локально конечный*, если клетки образуют локально конечное покрытие;
- *конечномерный*, если размерности клеток ограничены; при этом максимальная размерность клетки называется *размерностью* пространства.

Определение 27. Пусть X - клеточное пространство с зафиксированным клеточным разбиением. Его k -мерный остов - объединение всех клеток размерности не более k . Обозначение X_k или $\text{sk}_k(X)$.

Теорема 17. Пусть Γ - граф, X - топологическое пространство. Тогда отображение $f : \Gamma \rightarrow X$ - непрерывно тогда и только тогда, когда его сужение на каждое ребро (замкнутое) графа непрерывно.

Теорема 18. Фундаментальная группа букета n окружностей - свободная группа с n образующим (обозначение F_n). В качестве образующих можно взять однократные обходы окружностей букета.

Теорема 19. Пусть Γ - локально конечный граф. $T \subset \Gamma$ - стягиваемый подграф. Тогда $\Gamma/T \sim \Gamma$.

Следствие. Связный граф с n вершинами и m рёбрами гомотопически эквивалентен букету $m - n + 1$ окружностей (или точке, если $m - n + 1 = 0$).

Следствие. Фундаментальная группа связного графа с n вершинами и m рёбрами - свободная группа с $m - n + 1$ образующими.

Определение 28. Клеточное подпространство клеточного пространства X - замкнутое множество $Y \subset X$, состоящее из целых клеток.

Теорема 20. Пусть

- X - клеточное пространство, $Y \subset X$ - клеточное подпространство;
- Z - топологическое пространство, $f : X \rightarrow Z$ - непрерывное отображение;
- $H_0 : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ - гомотопия, $H_0(\cdot, 0) = f|_Y$.

тогда существует гомотопия $H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$, продолжающая H_0 и такая, что $H(\cdot, 0) = f$.

Лемма 6. Пусть Γ - локально конечный граф, $T \subset \Gamma$ - стягиваемый подграф. Тогда существует непрерывное $h : \Gamma \rightarrow \Gamma$ такое, что

- $h|_T = \text{const}$;
- $h \sim \text{id}_\Gamma$;
- существует такая гомотопия $\{h_t\}$ между id и h , что $h_t(T) \subset T$ при всех T .

Теорема 21. Пусть Y - топологическое пространство, X получается приклеиванием к Y диска D^2 по непрерывному отображению $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow Y$, $x_0 = \alpha(1, 0)$. Тогда

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, x_0) / N([\alpha]),$$

где $N([\alpha])$ - нормальное замыкание элемента $[\alpha]$ фундаментальной группы $\pi_1(Y, x_0)$.

Теорема 22. При приклеивании клетки размерности $n \geq 3$ фундаментальная группа не меняется.

Лемма 7 (о свободной точке). Существует $H_1 : X \rightarrow X$, совпадающее с H на краю K и такое, что образ H_1 не покрывает $X \setminus Y$.

Следствие. Фундаментальная группа конечного клеточного пространства изоморфна фундаментальной группе 2-мерного остова.

Следствие. Пусть X - конечномерное связное пространство, T - максимальное дерево в X и $x_0 \in T$. Для каждой одномерной клетки $e \subset X \setminus T$ выберем петлю s_e , начинающуюся в x_0 , проходящую по T до e и возвращающуюся (вновь по T) в исходную точку x_0 . Тогда гомотопические классы петель s_e являются свободными образующими группы $\pi_1(X, x_0)$.

Следствие. Если $\pi_1(Y, x_0)$ задана образующими и соотношениями, то $\pi_1(X, x_0)$ получается добавлением $[\alpha]$ в список соотношений.

Определение 29. Группа называется *конечно представленной*, если её можно задать образующими и соотношениями так, что образующих и соотношений конечное множество.

Следствие. Фундаментальная группа конечного клеточного пространства - конечно представленная группа.

Следствие. Любая конечно представленная группа изоморфна фундаментальной группе некоторого конечного клеточного пространства размерности 2.

Утверждение 4. Пусть $p : X \rightarrow Y$ и $q : Y \rightarrow Z$ - накрытия. Тогда если q - конечнолистно, то $q \circ p : X \rightarrow Z$ - накрытие.

Утверждение 5. Следующие условия эквивалентны:

- накрытие регулярно;
- все группы $p_*(\pi_1(X, x))$ с $x \in p^{-1}(b_0)$ совпадают;
- группа автоморфизмов накрытия действует в слое $p^{-1}(b_0)$ транзитивно.

Определение 30. *Морфизмом накрытий* $p_X : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ и $p_Y : (Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)$ - это непрерывное отображение $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, такое что

$$p_Y \circ f = p_X.$$

Определение 31. *Группой накрытия* $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ называется $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$.

Диффгем.

«Напоминания».

Основные понятия мы определяем для натурально параметризованных кривых. Так, пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - натурально параметризованная кривая, то есть, $|\gamma'(t)| = 1$ в каждой точке $t \in [a, b]$.

Определение 32. *Базис Френе* кривой γ в точке $t \in [a, b]$ - пара векторов $v, n \in \mathbb{R}^2$, определяемая условиями:

- $v = \gamma'(t)$;
- (v, n) - положительно ориентированный ортонормированный базис плоскости.

Обозначается как v , n или $v(t)$, $n(t)$ или $v_\gamma(t)$, $n_\gamma(t)$, а занывается *скоростью* и *нормалью* соответственно.

Кривизны.

Определение 33. *Кривизна* натурально параметризованной кривой γ в точке t - такое число $\kappa = \kappa(t) \in \mathbb{R}$, что

$$\gamma''(t) = v'(t) = \kappa(t) \cdot n(t).$$

Эквивалентное определение: $\kappa = \langle v', n \rangle$. Из этой формулы следует, что κ гладко зависит от t .

Определение 34. Пусть γ - произвольная (не натурально пааметризованная) регулярная кривая. Кривизна γ в точке t - кривизна её натуральной параметризации в соответствующей точке.

Теорема 23. Для произвольной регулярной кривой γ

$$\kappa = \frac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3},$$

где $[\cdot]$ - внешнее произведение векторов (определитель матрицы).

Теорема 24. Для натурально параметризованной кривой γ

$$\begin{cases} v' = \kappa n; \\ n' = -\kappa v. \end{cases}$$

Определение 35. *Поворот* натурально параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - это

$$\int_a^b \kappa(t) dt,$$

где κ - кривизна этой кривой.

Примечание. Для не натурально параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ поворот можно найти по формуле

$$\int_a^b \kappa(t) |\gamma'(t)| dt.$$

Краткая запись (интеграл по длине): $\int_a^b \kappa dt$.

Примечание. Непрерывный аргумент функции $v : [a, b] \rightarrow S^1$ - такая непрерывная функция $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, Что

$$v(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$$

для всех $t \in [a, b]$. Непрерывный аргумент существует у любой такой непрерывной функции. Он единственен с точностью до константы, кратной 2π .

Лемма 8. Непрерывный аргумент $\alpha(t)$ - гладкая функция от t .

Теорема 25. Пусть $v(t)$ - скорость натурально параметризованной кривой γ , $\alpha(t)$ - непрерывный аргумент для $v(t)$. Тогда $\alpha'(t) = \kappa(t)$, где κ - кривизна γ .

Следствие. Поворот кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ равен изменению аргументы вектора $\gamma'(t)$ от $t = a$ до $t = b$.

Следствие. Вектор $\gamma'(a)$ и $\gamma'(b)$ определяют поворот кривой γ с точностью до прибавления $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 26. Для любой гладкой функции $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ существует регулярная натурально параметризованная кривая $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, у которой кривизна равна этой функции. Такая кривая единственная с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.

Лемма 9. Пусть $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкая функция, $t_0 \in I$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $v_0 \in S^1$. Тогда существует единственная натурально параметризованная кривая $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ такая, что $\gamma(t_0) = p_0$, $\gamma'(t_0) = v_0$, $\kappa_\gamma(t) = \kappa(t)$ для всех $t \in I$.

Многомерие.

Определение 36. Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ - натурально параметризованная регулярная кривая, $t \in I$. Вектор $\gamma''(t)$ - *вектор кривизны* γ в точке t . Его длина $\kappa(t) := |\gamma''(t)|$ - *кривизна*. Его направление $n_\gamma(t) := \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$ (далее - просто *нормаль*).

Определение 37. *Бинормаль* γ в точке t - вектор $b(t) = v(t) \times n(t)$. *Кручение* γ в точке t - число $\tau(t) = \langle n'(t), b(t) \rangle$.

Теорема 27. Для натурально параметризованной кривой в \mathbb{R}^3 , кривизна которой не обращается в нуль, верны формулы

$$\begin{cases} v' = \kappa n; \\ n' = -\kappa v + \tau b; \\ b' = -\tau n. \end{cases}$$

Где v, n, b - базис Френе, κ - кривизна, τ - кручение.

Теорема 28. Для не натурально параметризованной кривой γ в \mathbb{R}^3 ,

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3},$$

$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

Определение 38.

- плоскость (v, n) - *соприкасающаяся плоскость*;

- плоскость (n, b) - *нормальная плоскость*;
- плоскость (v, b) - *спрямляющая плоскость*.

Примечание. Направляющая идея: из формула $b' = -\tau n$ следует, что соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается со скоростью $|\tau|$.

Следствие. Кривая γ (с ненулевой кривизной) лежит в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\tau \equiv 0$.

Многомерные формулы Френе.

Определение 39. Будем называть гладкую кривую $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ *невырожденной*, если для любого $t \in I$ векторы $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$ линейно независимы.

Теорема 29. Пусть $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ - невырожденная натурально параметризованная кривая. Тогда существует единственный набор гладких функций $v_1, \dots, v_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ и $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ (*кривизны*) такой, что для всех $t \in I$

- $v_1(t), \dots, v_n(t)$ - положительно ориентированный ортонормированный базис в \mathbb{R}^n (базис Френе);
- $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{n-2}(t) > 0$ (κ_{n-1} может менять знак);
- $v_1 = \gamma'$;
- верны *формулы Френе*:

$$\begin{aligned} v_1' &= \kappa_1 v_2; \\ v_i' &= -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1}; \\ v_n' &= -\kappa_{n-1} v_{n-1}. \end{aligned}$$

Теорема 30. Пусть $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкие функции, причём $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$. Тогда

- Существует невырожденная натурально параметризованная кривая $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, у которой кривизны равны $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$;
- Такая кривая единственна с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.

Определение 40. Кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - *замкнута*, если её можно продолжить до гладкой $(b - a)$ -периодической функции $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Следствие. Поворот замкнутой кривой равен $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 41. k - число вращения.

Определение 42. *Простая замкнутая кривая* - замкнутая кривая, у которой нет самопересечений.

Утверждение 6. Поворот простой замкнутой кривой равен $\pm 2\pi$.

То, что ЕА рассказывал на доске.

Теорема 31. Пусть γ - простая, регулярная, замкнутая кривая в \mathbb{R}^2 . Тогда следующие условия эквивалентны:

- γ - выпуклая (здесь - по одну сторону от \forall касательной);
- κ_γ везде не меньше или не больше нуля;
- \forall прямой l существует ровно две касательных к γ , параллельных l .

Определение 43. Пусть γ - натурально параметризованная кривая в \mathbb{R}^n , кривизна γ есть $\kappa_\gamma = |\gamma''(t)|$. Тогда **поворот** есть

$$\int_a^b \kappa_\gamma(t) dt.$$

Теорема 32 (Теорема Фенхеля). Поворот регулярной замкнутой кривой в \mathbb{R}^n не меньше 2π .

Далее, $\mathbb{R}^m \subset U$ - область (открытая связная), $m \leq N$, $r : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Определение 44. Гладкое отображение r называется **гладкой поверхностью**.

Определение 45. Поверхность r **регулярна**, если ранг dr равен m (инъекция).

Определение 46. **Касательное пространство** к поверхности в точке x есть $\text{Im}(d_x r)$.

Определение 47. **Нормаль** к поверхности - нормаль к касательной плоскости.

Определение 48. **Гладкая кривая** на поверхности - образ гладкой кривой на U .

Теорема 33. Касательная плоскость Φ ($\text{Im } r$) есть множество касательных векторов ко всем гладким кривым на поверхности, проходящим через данную точку.

Определение 49. Пусть $r_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Они называются **эквивалентными**, если существует диффеоморфизм из U_1 в U_2 с положительным Якобианом.

Определение 50. Пусть $r : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. **Первая форма** - это билинейная симметричная форма на \mathbb{R}^2 такая, что для любых $v, w \in \mathbb{R}^2$, для любого $x \in U$ ($x = (x_1, x_2)$), выполнено

$$I(v, w) = \langle d_x r(v), d_x r(w) \rangle.$$

$I(v, v)$ - **первая квадратичная форма**.

Утверждение 7.

- I положительно определена;
- Матрица $I(g_{ij})$ выглядит как

$$g_{ij} = \langle r'_{x_i}, r'_{x_j} \rangle,$$

и при $m = 2$ обозначается как

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Благодаря этой вещи можно считать:

- Длину кривой $\gamma(t) = r(x_1(t), x_2(t))$:

$$l = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int \sqrt{I(v, v)},$$

где $v = (x'_1, x'_2)$;

- Угол между кривыми (касательными в точке), посчитав скалярное произведение между двумя соответствующими векторами вида выше;
- Площадь поверхности.

Определение 51. *Второй формой* называется билинейная форма, заданная следующим образом:

$$\Pi(v, w) = \langle d_x^2 r(v, w), n \rangle,$$

где n - вектор нормали

$$\frac{r_{x_1} \times r_{x_2}}{|r_{x_1} \times r_{x_2}|}.$$

Утверждение 8.

- Матрица Π формы в стандартном базисе обозначается как

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

где $(h_{ij}) = \langle r_{x_i, x_j}, n \rangle$.

Теорема 34.

$$\Pi(v, w) = \langle dr(v), dn(w) \rangle.$$

Пусть $\tilde{\gamma}(t) = r(\widetilde{x_1(t)}, \widetilde{x_2(t)})$ - гладкая натурально параметризованная кривая. Тогда $\kappa_{\tilde{\gamma}} = |\tilde{\gamma}''(t_0)|$, но можно определить два очень полезных типа кривизн следующим образом:

Определение 52. Спроецируем $\tilde{\gamma}''(t_0)$ на соответствующий вектор нормали и получим *нормальную кривизну*, то есть, $\kappa_n = \langle \tilde{\gamma}''(t_0), n \rangle$. Другая компонента (проекция на касательную плоскость) называется *геодезической кривизной*, обозначается κ_g .

Утверждение 9.

- $\kappa_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}$;
- *Теорема Менье* $\kappa_n = \kappa_{\tilde{\gamma}} \cdot \cos(\varphi)$, где φ - угол между $\tilde{\gamma}''$ и нормалью.

Теорема 35. Пусть $\gamma(t) = r(x_1(t), x_2(t))$ - гладкая кривая на Φ , и пусть также $\xi = (x'_1(t_0), x'_2(t_0))$. Тогда

$$\kappa_n = \frac{\Pi(\xi, \xi)}{I(\xi, \xi)}.$$

Следствие. Если две кривые проходят через одну точку и имеют коллинеарные вектора скорости, то их нормальные кривизны совпадают.

Определение 53. Пусть $p \in \Phi$, $v \in T_p\Phi$, тогда *нормальное сечение* - пересечение Φ с плоскостью, порождённой векторами n и v .

Лемма 10. Нормальное сечение можно представить как гладкую кривую на Φ .

Определение 54. *Оператор Вейнгартена* - $s : T_p\Phi \rightarrow T_p\Phi$ такой, что для любых $\hat{v}, \hat{w} \in T_p\Phi$, $\hat{\Pi}(\hat{v}, \hat{w}) = \langle \hat{v}, s(\hat{w}) \rangle$.

Утверждение 10. В базисе r_{x_i} матрицы $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\Pi}$ форм связаны следующим соотношением:

$$[\hat{\Pi}] = [\hat{\Gamma}] \cdot [s].$$

Определение 55. *Главная кривизна* - собственное число оператора Вейнгартена. *Главное направление* - прямая, порождённая собственным вектором оператора Вейнгартена.

Утверждение 11. Так как s самопряжённая, существует m главных кривизн с учётом кратности (вещественных), которым соответствует m попарно ортогональных направлений.

Получается, что в $T_p\Phi$ существует ортонормированный базис b_1, b_2 из собственных векторов оператора S , в котором $[\hat{\Gamma}] = E$, а

$$[\hat{\Pi}] = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix},$$

где κ_1 и κ_2 - главные кривизны.

Теорема 36 (Теорема Эйлера). Пусть $\hat{v} \in T_p\Phi$, $|\hat{v}| = 1$, $\varphi = \angle(\hat{v}, b_1)$. Тогда κ_n поверхности Φ по направлению v равна

$$\kappa_n = \hat{\Pi}(\hat{v}, \hat{v}) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi.$$

Следствие. κ_1 и κ_2 - наибольшее и наименьшее значение κ_n по всем направлениям.

Определение 56. *Гауссова Кривизна* - $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$, *средняя кривизна* - $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.

Утверждение 12.

$$(\kappa_n)_\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_n(\phi) d\phi = H.$$

Теорема 37. κ_1 и κ_2 - корни уравнения $\det([\Pi] - t[I]) = 0$.

надо будет дописать 3 семестр...

4 семестр

Решения задач с практик

Первые несколько решений нагло украдены из заметок Н. С. Калинина.

Задача (1). Найдите первую форму для $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ с полярными координатами (ρ, φ) , и запишите длину кривой $(\rho(t), \varphi(t))$.

Решение. Мы умеем считать длины векторов в (x, y) -координатах, поэтому давайте перейдём к этой системе:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \\y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$

Мы знаем, что

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0; \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle &= 1,\end{aligned}$$

иначе говоря, пара векторов $\frac{\partial}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y}(x_0, y_0)$ - это ортонормированный базис в каждой точке. Так, получим ответ на первый вопрос:

$$\begin{aligned}dx &= \cos \varphi \cdot d\rho - \rho \sin \varphi \cdot d\varphi, \\ dy &= \sin \varphi \cdot d\rho + \rho \cos \varphi \cdot d\varphi, \\ dx^2 + dy^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.\end{aligned}$$

Что касается длины кривой, если $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (\rho(t), \varphi(t))$, то

$$\int_0^1 \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} = \int_0^1 \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \varphi'(t)^2} dt.$$

Задача (2). Рассмотрим единичную сферу без полюсов, параметризованную широтой и долготой, то есть как (θ, φ) где $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

а) Найдите первую форму в этих координатах.

б) Используя её, покажите, что площадь круга радиуса r на сфере равна $2\pi(1 - \cos r)$.

в) (теорема Архимеда) Нашу сферу пересекают две плоскости на расстоянии h . Докажите, что площадь участка сферы между плоскостями равна $2\pi h$.

Решение. Перейдём к декартовым координатам:

$$\begin{aligned}x &= \cos \varphi \cdot \sin \theta, \\ y &= \sin \varphi \cdot \sin \theta, \\ z &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial x}(-\sin \varphi \cdot \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos \varphi \cdot \sin \theta), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial x}(\cos \varphi \cdot \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin \varphi \cdot \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial z}(-\sin \theta),\end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ - опять-таки ортонормированный базис в \mathbb{R}^3 . Тогда посмотрим на скалярные произведения:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \sin^2 \theta, \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = 1,$$

а значит, первая форма есть $\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2$. Площадь круга ищем по формуле

$$\int_{\varphi \in [0, 2\pi]} \int_{\theta \in [0, r]} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \int_{\varphi, \theta} \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi(1 - \cos r).$$

А теорема Архимеда напрямую получается как разность двух результатов предыдущего пункта.

Задача (3). В плоскости xOz задана регулярная кривая $x = f(u)$, $z = g(u)$, не пересекающая ось Oz . Найдите параметризацию поверхности, полученной при вращении этой линии вокруг оси Oz и её первую форму.

Решение. Параметризация - простая:

$$(x(t) \cdot \cos \varphi, x(t) \cdot \sin \varphi, z(t)).$$

Теперь найдём первую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= (-\sin \varphi \cdot x(t), \cos \varphi \cdot x(t), 0), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= (\cos \varphi \cdot x'(t), \sin \varphi \cdot x'(t), z'(t)), \end{aligned}$$

а тогда скалярные произведения следующие:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = x(t)^2, \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = x'(t)^2 + z'(t)^2,$$

тогда получим $(x'(t)^2 + z'(t)^2)dt^2 + x^2 d\varphi^2$, а если кривая была параметризована натурально, то первый коэффициент обратится в единицу.

Задача (4). Найдите параметризацию и площадь тора, как поверхности вращения окружности радиуса r в \mathbb{R}^3 (пусть окружность находится в одной плоскости с осью, вокруг которой мы её вращаем, и расстояние от центра окружности до оси равно R).

Решение. Окружность параметризуется как

$$\begin{aligned} x &= R + r \cos \varphi, \\ z &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

тогда вращение выглядит как

$$((R + r \cos \varphi) \cdot \cos \psi, (R + r \cos \varphi) \cdot \sin \psi, r \sin \varphi).$$

Первая форма (поверхности вращения):

$$\underbrace{((r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2)}_{r^2} d\varphi^2 + (R + r \cos \varphi)^2 d\psi^2$$

А площадь - $\int_{[0, 2\pi]^2} \sqrt{EG - F^2} = \int r(R + r \cos \varphi) d\varphi d\psi = 4\pi^2 r R$.

Поехали блять

Определение 57. Простые поверхности M_1, M_2 одинаковой размерности *изометричны*, если у них есть такие параметризации $r_i : U_i \rightarrow M_i$ и такой диффеоморфизм $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$, что их первые формы поточечно равны, то есть, их первые формы Γ^1, Γ^2 в соответствующих точках $x \in U_1$ и $\varphi(x) \in U_2$ связаны соотношением

$$\Gamma_x^1(v, w) = \Gamma_{\varphi(x)}^2(d_x\varphi(v), d_x\varphi(w)),$$

где $v, w \in \mathbb{R}^m$.

Примечание. То же самое, только *локально изометричны*, если параметризации локальны.

Определение 58. Пусть M - связная поверхность, $p, q \in M$. *Внутреннее расстояние* между p и q в M - инфимум длин кусочно-гладких кривых на M , содержащих p и q .

Свойство (или характеристика) поверхности относится к *внутренней геометрии*, если оно одинаково у всех изометричных поверхностей. Внутренние свойства - те и только те, которые определяются первой формой. Например, длины углы и площади, но не кривизны (за редкими исключениями).

Определение 59. Пусть M_1, M_2 - поверхности (одинаковой размерности). *Изометрия* между M_1 и M_2 - диффеоморфизм $f : M_1 \rightarrow M_2$ такой, что для любой точки $p \in M_1$, дифференциал $d_p f : T_p M_1 \rightarrow T_p M_2$ сохраняет скалярное произведение. Поверхности *изометричны*, если существует изометрия между ними.

Примечание. Определения эквивалентны.

Определение 60. Многообразие размерности n - хаусдорфово пространство с счётной базой такое, что у любой точки есть крестность, гомеоморфная \mathbb{R}^n .

Определение 61. Пусть M - n -мерное многообразие.

Карта - гомеоморфизм $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, где $U \subset M$ и $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ - открыты.

Атлас - набор карт, области определения которых покрывают M .

Отображение перехода между картами $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ - отображение

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V).$$

Две карты *гладко согласованны*, если отображение перехода между ними гладкое. Атлас *гладкий*, если все его карты гладко согласованны.

Два гладких атласа *эквивалентны*, если их объединение - тоже гладкий атлас.

Лемма 11. Это - действительно отношение эквивалентности. Также, в каждом классе есть единственный максимальный (по включению) атлас - объединение всех атласов из классов эквивалентности.

Определение 62. *Гладкое многообразие* - многообразие с заданным на нём максимальным гладким атласом. Максимальный атлас также называют *структурой гладкого многообразия* или *дифференциальной структурой*.

Предметный указатель

- Атлас, 17
- Базис Френе, 9
- Бинормаль, 10
- Гомотопический тип, 5
- Гомотопия, 2
 - связанная, 2
- Группа
 - конечно представленная, 7
 - накрытия, 4, 8
 - фундаментальная, 2
- Изометрия, 17
- Карта, 17
- Кривая
 - замкнутая, 11
 - невырожденная, 11
- Кривизна, 9
 - Гауссова, 14
 - геодезическая, 13
 - главная, 14
 - нормальная, 13
 - средняя, 14
- Кручение, 10
- Лемма
 - о непрерывном аргументе, 4
 - о поднятии гомотопии, 4
- Многообразие
 - гладкое, 17
- Морфизм накрытий, 8
- Накрытие, 3
 - универсальное, 4
- Направление
 - главное, 14
- Нормаль, 12
- Оператор Вейнгартена, 14
- Отображения
 - гомотопные, 2
- Пара Борсука, 6
- Петля, 2
 - стягиваемая, 4
- Поверхность
 - гладкая, 12
- Поворот, 9, 12
- Поднятие отображения, 3
- Произведение путей, 2
- Пространство
 - касательное, 12
 - клеточное, 6
 - односвязное, 3
 - стягиваемое, 5
- Расстояние
 - внутреннее, 17
- Ретракция, 4
 - деформационная, 5
- Сечение
 - нормальное, 14
- Теорема
 - Борсука в размерности 2, 5
 - Менье, 13
 - Фенхеля, 12
 - Эйлера, 14
 - о поднятии пути, 4
 - о постоянстве числа листов, 3
- Топологическая пара, 5
- Точка
 - неподвижная, 5
- Форма
 - вторая, 13
 - первая, 12
- Эквивалентны
 - гомотопически, 5
- Эквивалентные поверхности, 12