Личные записи по топологии

@keba4ok

13 октября 2021г.

Некоторые воспомниания с конца второго курса по топологии, которые напрямую связаны с нынешним материалом, а также важные факты с лекций и практик.

Содержание

Алгебраическая топология.

Гомотопии.

Будем считать, что X и Y - топологические пространства, $f, g : X \to Y$ - непрерывные отображения.

Определение 1. f и g *гомотопны* ($f \sim g$), если существует непрерывное отображение $H : X \times [0, 1] \to Y$ такое, что

- $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X$;
- $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$.

Определение 2. Отображение H называется *гомотопией* между f и g.

Теорема 1. *Гомотопность - отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных функций из X в Y.*

Теорема 2. *Пусть X, Y, Z - топологические пространства, отображения $f_0, f_1 : X \to Y$ гомотопны, и отображения $g_0, g_1 : Y \to Z$ также гомотопны. Тогда $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.*

Определение 3. Пусть $A \subset X$. Говорят, что гомотопия $H : X \times [0, 1] \to Y$ *связана* на A, если $H(x, t) = H(x, 0)$, $\forall x \in A$, $t \in [0, 1]$ (если гомотопия не связана, то она *свободна*).

Определение 4. Два пути $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ *гомотопны* ($\alpha \sim \beta$), если существует соединяющая их гомотопия, связанная на $\{0, 1\}$.

Определение 5. Пусть $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ - пути, и $\alpha(1) = \beta(0)$. Тогда *произведение путей* определяется как

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), t \le \frac{1}{2}; \\ \beta(2t - 1), t \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Свойства произведения:

- произведения соответственно гомотопных путей гомотопны;
- ассоциативность;
- если ε_p и ε_q - постоянные пути в начале $\alpha(0) = p$ и $\alpha(1) = q$ пути α. Тогда $\varepsilon_p\alpha \sim \alpha\varepsilon_q \sim \alpha$;
- пусть $\alpha'(t) = \alpha(1 - t)$. Тогда $\alpha\alpha' \sim \varepsilon_p$.

Фундаментальная группа.

Определение 6. *Петля* - путь, у которого конец совпадает с началом. Множество петель в X с началом и концом в *отмеченной точке* x_0, обозначается как $\Omega(X, x_0)$.

Определение 7. *Фундаментальная группа* топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 ($\pi_1(X, x_0)$) определяется так:

- множество элементов группы - фактор-множество $\Omega(X, x_0)/\sim$, где $\sim$ - гомотопность путей с фиксированным концом в x_0;

- групповое произведение определяется форумлой
$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta],$$
где $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$.

Определение 8. Если γ - путь из p в q (значение в начале, и значение в конце). Тогда $T_\gamma : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$ - отображение групп (изоморфизм).

Теорема 3. *Если X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, тогда*
$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Определение 9. (*Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением*). Если X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \to Y$ - непрерывное отображение, $f(x_0) = y_0$. Тогда определим $f_* : \pi(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ так:
$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Свойства:

- $*$ от композиции - композиция $*$ к функциям;
- $\mathrm{id} : X \to X \Rightarrow \mathrm{id}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Тогда $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

Утверждение 1. $f : X \to Y$ - гомеоморфизм, тогда $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ будет изоморфизмом.

Оставшаяся хуйня.

Определение 10. Топологическое пространство X *односвязно*, если X линейно связно и $\pi_1(X) = \{e\}$.

Теорема 4. *S^n односвязно при всех n хотя бы 2.*

Следствие. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ для всех n хотя бы 3, односвязно.

Определение 11. X, B - топологические пространства; $p : X \to B$ - непрерывное отображение называется *накрытием*, если $\forall y \in B$, существует окрестность $U : p^{-1}(U) = \sqcup v_i$, где каждое v_i открыто в X и $p_{\restriction v_i}$ - гомеоморфизм между v_i и U.

Пример(ы) 1.

- гомеоморфизм (v_i - всё пространство);
- $p : \mathbb{R} \to S^1$, где $p(x) = (\cos x, \sin x)$.

Теорема 5 (*о постоянстве числа лисотв*)**.** *Пусть $p : X \to B$ - накрытие; B - связно. Тогда $|p^{-1}(B)|$ одинаково у всех $b \in B$.*

Определение 12. $|p^{-1}(b)|$ - *число листов* накрытия

Определение 13. $p : X \to B$ - накрытие; $f : Y \to B$ - непрервное отображение. *Поднятием отображения* f называется непрерывное отбражение $\tilde{f} : Y \to X$ такое, что $f = p \circ \tilde{f}$.

Теорема 6 (*о поднятии пути*). *Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого пути $\alpha : [0,1] \to B$ такого, что $\alpha(0) = b_0$, существует и притом единственное поднятие $\tilde{\alpha}$ пути α такое, что $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.*

Лемма 1 (*о непрерывном аргументе*). *Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда*

- *существует непрерывная функция $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} = |\gamma(t)| \cdot (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$;*
- *такая φ единственная с точностью до добавления числа, кратного 2π.*

Теорема 7 (*о поднятии гомотопии*). *Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого непрерывного отображения $H : K \to B$ такого, что $H(0,0) = b_0$, существует, и притом единственное, поднятие $\tilde{H}$, что $\tilde{H}(0,0) = x_0$.*

Следствие. Пусть α, β - пути в B такие, что $\alpha(0) = \beta(0)$ и $\alpha(1) = \beta(1)$. Если $\alpha \sim \beta$, то их поднятие в одну и ту же точку $x_0 \in X$ гомотопны, и, что показывается изначально, $\tilde{\alpha(1)} \sim \tilde{\beta(1)}$.

Определение 14. Петля, гомотопная постоянной, называется *стягиваемой*.

Следствие. Поднятие стягиваемой петли - стягиваемая петля.

Следствие. Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $x_0 \in X, b_0 \in B$ такие, что $p(x_0) = b_0$. Тогда индуцированный гомеоморфизм $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ является инъекцией.

Определение 15. Образ группы $\pi_1(X, x_0)$ при p_* называется *группой накрытия*.

Утверждение 2. Петля из группы накрытия при поднятии не размыкается.

Определение 16. Накрытие $p : X \to B$ называется *универсальным*, если X односвязно ($\pi_1(x) = \{e\}$, X - линейно связно).

Лемма 2. *Сопоставим каждой петле $\alpha \in \Omega(B, b_0)$ конец её поднятия с началом в x_0, то есть, рассматриваем отображение $\Omega(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ (так как конец поднятия проецируется в b_0). Это соответствие определяет биекцию $\pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$.*

Теорема 8. $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, *при* $n \geq 2$.

Теорема 9. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Следствие. $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

Ретракции.

Определение 17. *Ретракция* - непрерывное отображение $f : X \to A$, где $A \subset X$, такое, что $f|_A = \mathrm{id}_A$. Если существует ретракция $f : X \to A$, то A называется *ретрактом* пространства X.

Теорема 10. *Подмножество A топологического пространства X является его ретрактом тогда и только тогда, когда всякое непрерывное отображение $g : A \to Y$ в произвольное пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Y$.*

Лемма 3. *Если $\rho : X \to A$ - ретракция, $\mathrm{in} : A \to X$ - вложение и $x_0 \in A$, то*

- *$\rho : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ - сюръекция;*

- $\mathrm{in}: \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ - *инъекция.*

Теорема 11 (*Теорема Борсука в размерности 2*). *Не существует ретракции из D^2 на S^1.*

Определение 18. Точка $a \in X$ называется *неподвижной* точкой отображения $f : X \to X$, если $f(a) = a$. Говорят, что прстранство обладает свойством неподвижной точки, если всякое непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет неподвижную точку.

Теорема 12. *Любое непрерывное отображение $f : D^2 \to D^2$ имеет неподвижную точку.*

Определение 19. X и Y *гомотопически эквивалентны* $(X \sim Y)$, если существуют непрерывные отображение $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_x$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$. Такие f и g называются *гомотопически обратными* отображениями. Каждое из f и g называется *гомотопической эквивалентностью.*

Определение 20. Ретракция $f : X \to A$ называется *деформационной ретракцией*, если её композиция с включением $\mathrm{in}\, A \to X$ гомотопна тождественносу отображению, то есть

$$\mathrm{in} \circ f \sim \mathrm{id}_X .$$

Если существуют деформационная ретракция X на A, то A называется деформационным ретрактом пространства X.

Теорема 13. *Деформационная ретракция - гомотопическая эквивалентность.*

Теорема 14. *Гомотопическая эквивалентность - отношение эквивалентности между топологическими пространствами.*

Определение 21. Класс пространства, гомотопически эквивалентных данному X называется его *гомотопическим типом*. Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопических эквивалентных, - *гомотопические свойства.*

Теорема 15. *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.*

Лемма 4. *Пусть $f, g : X \to Y$ - гомотопные отображения, $H : X \times t \to Y$ - гомотопия между ними, $f(x_0) = y_0$, $g(x_0) = y_1$, $\gamma(t) = H(x_0, t)$ - путь от y_0 к y_1. Тогда $g_* = T_\gamma \circ f_*$.*

Определение 22. Топологическое пространство *стягиваемо*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Лемма 5. *Пусть $h : S^1 \to X$ - непрерывное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:*

- *h гомотопно постоянному отображению;*
- *h продолжается до непрерывного отображения $D^2 \to X$;*
- *h_* - тривиальный гомоморфизм фундаментальных групп.*

Теорема 16. *Для любой непрерывной функции $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(-x) = f(x)$.*

Определение 23. *Топологической парой* (X, A) называется топологическое пространство X с выделенным подмножеством A, на котором мы рассматриваем топологию, индуцированную с X.

Определение 24. Топологическая пара называется *парой Борсука*, если для любого топологического пространства Y, любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ и любой гомотопии $F : A \times I \to Y$ такой, что $F_0 = f|_A$ (напомним, что по определению $F_t(\cdot) = F(\cdot, t)$) существует гомотопия $G : X \times I \to Y$ такая, что $G_t|_A = F_t$ для всех $t \in I$ и $G_0 = f$. Иными словами, любую гомотопию A внутри Y, начинающуюся с f, можно продолжить до гомотопии всего X.

Утверждение 3. Если (X, A) - пара Борсука и A стягиваемо, то X гомотопически эквивалентно X/A.

Клеточные пространства и накрытия.

Определение 25. *Клеточное пространство* размерности n определяется по индукции следующим образом. Клеточное пространство размерности 0 - дискретное пространство. Клеточное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ - топологическое пространство X, которое может быть получено (с точностью до гомеоморфизма) из клеточного пространства Y с размерностью $k < n$ приклеиванием набора $\{D_i^n\}_{i \in I}$ копий диска D^n по непрерывным отображениям $\varphi_i : \partial D)i^n \to Y$, где ∂D_i^n - краевая сфера диска D_i^n.

Клеточное разбиение - конкретный способ представить X в таком виде, вместе с аналогичным представлением Y и так далее до размерности 0.

Клетки - внутренности приклеиваемых дисков, а также точки исходного 0-мерного пространства.

Определение 26. Клеточный комплекс -

- *конечный*, если клеток конечное число;
- *локально конечный*, если клетки образуют локально конечное покрытие;
- *конечномерный*, если размерности клеток ограничены; при этом максимальная размерность клетки называется *размерностью* пространства.

Определение 27. Пусть X - клеточное пространство с зафиксированным клеточным разбиением. Его k-мерный остов - объединение всех клеток размерности не боле k. Обозначение X_k или $\mathrm{sk}_k(X)$.

Теорема 17. *Пусть Γ - граф, X - топологическое пространство. Тогда отображение $f : \Gamma \to X$ - непрерывно тогда и только тогда, когда его сужение на каждое ребро (замкнутое) графа непрерывно.*

Теорема 18. *Фундаментальная группа букета n окружностей - свободная группа с n образующим (обозначение F_n). В качестве образующих можно взять однократные обходы окружностей букета.*

Теорема 19. *Пусть Γ - локально конечный граф. $T \subset \Gamma$ - стягиваемый подграф. Тогда $\Gamma/T \sim \Gamma$.*

Следствие. Связный граф с n вершинами и m рёбрами гомотопически эквивалентен букету $m - n + 1$ окружностей (или точке, если $m - n + 1 = 0$).

Следствие. Фундаментальная группа связного графа с n вершинами и m рёбрами - свободная группа с $m - n + 1$ образующими.

Определение 28. Клеточное подпространство клеточного пространства X - замкнутое множество $Y \subset X$, состоящее из целых клеток.

Теорема 20. *Пусть*

- X *- клеточное пространства* $Y \subset X$ *- клеточное подпространство;*
- Z *- топологическое пространство,* $f : X \to Z$ *- непрерывное отображение;*
- $H_0 : Y \times [0,1] \to Z$ *- гомотопия,* $H_0(\cdot, 0) = f|_Y$.

тогда существует гомотопия $H : X \times [0,1] \to Z$*, продолжающая* H_0 *и такая, что* $H(\cdot, 0) = f$.

Лемма 6. *Пусть* Γ *- локально конечный граф,* $T \subset \Gamma$ *- стягиваемый подграф. Тогда существует непрерывное* $h : \Gamma \to \Gamma$ *такое, что*

- $h|_T = \mathrm{const}$*;*
- $h \sim \mathrm{id}_\Gamma$*;*
- *существует такая гомотопия* $\{h_t\}$ *между* id *и* h*, что* $h_t(T) \subset T$ *при всех* T.

Теорема 21. *Пусть* Y *- топологическое пространство,* X *получается приклеиванием к* Y *диска* D^2 *по непрерывному отображению* $\hat{\alpha} : S^1 \to Y$, $x_0 = \alpha(1, 0)$. *Тогда*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, x_0)/N([\alpha]),$$

где $N([\alpha])$ *- нормальное замыкание элемента* $[\alpha]$ *фундаментальной группы* $\pi_1(Y, x_0)$.

Теорема 22. *При приклеивании клетки размерности* $n \geq 3$ *фундаментальная группа не меняется.*

Лемма 7 (*о свободной точке*)**.** *Существует* $H_1 : X \to X$*, совпадающее с* H *на краю* K *и такое, что образ* H_1 *не покрывает* $X \backslash Y$.

Следствие. Фундаментальная група конечного клеточного пространства изоморфна фундаментальной группе 2-мерного остова.

Следствие. Пусть X - конечномерное связное пространство, T - максимальное дерево в X и $x_0 \in T$. Для каждой одномерной клетки $e \subset X \backslash T$ выберем петлю s_e, начинающуюся в x_0, проходязую по T до e и возвращающуюся (вновь по T) в исходную точку x_0. Тогда гомотопические классы петель s_e являются свободными образующими группы $\pi_1(X, x_0)$.

Следствие. Если $\pi_1(Y, x_0)$ задана образующими и соотножениями, то $\pi_1(X, x_0)$ получается добавлением $[\alpha]$ в список соотношений.

Определение 29. Группа называется *конечно представленной*, если её можно задать образующими и соотношениями так, что образующих и соотношений конечное множество.

Следствие. Фундаментальная группа конечного клеточного пространства - конечно представленнаая группа.

Следствие. Любая конечно представленная группа изоморфна фундаментальной группе некоторого конечного клеточного пространства размерности 2.

Утверждение 4. Пусть $p : X \to Y$ и $q : Y \to Z$ - накрытия. Тогда если q - конечнолистно, то $q \circ p : X \to Z$ - накрытие.

Утверждение 5. Следующие условия эквивалентны:

- накрытие регулярно;
- все группы $p_*(\pi_1(X, x))$ с $x \in p^{-1}(b_0)$ совпадают;
- группа автоморфизмов накрытия действует в слое $p^{-1}(b_0)$ транзитивно.

Определение 30. *Морфизмом накрытий* $p_X : (X, x_0) \to (B, b_0)$ и $p_Y : (Y, y_0) \to (B, b_0)$ - это непрерывное отображение $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, такое что

$$p_Y \circ f = p_X.$$

Определение 31. *Группой накрытия* $p : (X, x_0) \to (B, b_0)$ называется $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$.

Дифгем.

«Напоминания».

Основные понятия мы определяем для натурально параметризованных кривых. Так, пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ - натурально параметризованная кривая, то есть, $|\gamma'(t)| = 1$ в каждой точке $t \in [a, b]$.

Определение 32. *Базис Френе* кривой γ в точке $t \in [a, b]$ - пара векторов $v, n \in \mathbb{R}^2$, определяемая условиями:

- $v = \gamma'(t)$;
- (v, n) - положительно ориентированный ортонормированный базис плоскости.

Обозначается как v, n или $v(t)$, $n(t)$ или $v_\gamma(t)$, $n_\gamma(t)$, а заныается *скоростью* и *нормалью* соответственно.

Кривизны.

Определение 33. *Кривизна* натурально параметризованной кривой γ в точке t - такое число $\kappa = \kappa(t) \in \mathbb{R}$, что

$$\gamma''(t) = v'(t) = \kappa(t) \cdot n(t).$$

Эквивалентное определение: $\kappa = \langle v', n\rangle$. Из этой формулы следует, что κ гладко зависит от t.

Определение 34. Пусть γ - произвольная (не натурально пааметризованная) регулярная кривая. Кривизна γ в точке t - кривизна её натуральной параметризвции в соответствующей точке.

Теорема 23. *Для произвольной регулярной кривой γ*

$$\kappa = \frac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3},$$

где $[,]$ - внешнее произведение векторов (определитель матрицы).

Теорема 24. *Для натурально параметризованной кривой γ*

$$\begin{cases} v' = \kappa n; \\ n' = -\kappa v. \end{cases}$$

Определение 35. *Поворот* натурально параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ - это

$$\int_a^b \kappa(t) dt,$$

где κ - кривизна этой кривой.

Примечание. Для не натурально параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ поворот можно найти по формуле

$$\int_a^b \kappa(t)|\gamma'(t)|dt.$$

Краткая запись (интеграл по длине): $\int_a^b \kappa dt$.

Примечание. Непрерывный аргумент функции $v : [a,b] \to S^1$ - такая непрерывная функция $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, Что

$$v(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t))$$

для всех $t \in [a,b]$. Непрерывный аргумент существует у любой такой непрерывной функции. Он единственен с точностью до константы, кратной 2π.

Лемма 8. *Непрерывный аргумент $\alpha(t)$ - гладкая функция от t.*

Теорема 25. *Пусть $v(t)$ - скорость натурально параметризованной кривой γ, $\alpha(t)$ - непрерывный аргумент для $v(t)$. Тогда $\alpha'(t) = \kappa(t)$, где κ - кривизна γ.*

Следствие. Поворот кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ равен изменению аргументы вектора $\gamma'(t)$ от $t = a$ до $t = b$.

Следствие. Вектор $\gamma'(a)$ и $\gamma'(b)$ определяют поворот привой γ с точностью до прибавления $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 26. *Для любой гладкой функции $\kappa : I \to \mathbb{R}$ существует регулярная натурально параметризованная кривая $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, у которой кривизна равна этой функции. Такая кривая единственная с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.*

Лемма 9. *Пусть $\kappa : I \to \mathbb{R}$ - гладкая функция, $t_0 \in I$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $v_0 \in S^1$. Тогда существует единственная натурально параметризованная кривая $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ таая, что $\gamma(t_0) = p_0$, $\gamma'(t_0) = v_0$, $\kappa_\gamma(t) = \kappa(t)$ для всех $t \in I$.*

Многомерие.

Определение 36. Пусть $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ - натурально параметризованная регулярная кривая, $t \in I$. Вектор $\gamma''(t)$ - *вектор кривизны* γ в точке t. Его длина $\kappa(t) := |\gamma''(t)|$ - *кривизна*. Его направление $n_\gamma(t) := \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$ (далее - просто *нормаль*).

Определение 37. *Бинормаль* γ в точке t - вектор $b(t) = v(t) \times n(t)$. *Кручение* γ в точке t - число $\tau(t) = \langle n'(t), b(t) \rangle$.

Теорема 27. *Для натурально параметризованной кривой в $\mathbb{R}^3$, кривизна которой не обращается в нуль, верны формулы*

$$\begin{cases} v' = \kappa n; \\ n' = -\kappa v + \tau b; \\ b' = -\tau n. \end{cases}$$

Где v, n, b -базис Френе, κ - кривизна, τ - кручение.

Теорема 28. *Для не натурально параметризованной кривой γ в $\mathbb{R}^3$,*

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3},$$

$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

Определение 38.

- плоскость (v, n) - *соприкасающаяся плоскость*;

- плоскость (n, b) - *нормальная плоскость*;
- плоскость (v, b) - *спрямляющая плоскость*.

Примечание. Направляющая идея: из формула $b' = -\tau n$ следует, что соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается со скоростью $|\tau|$.

Следствие. Кривая γ (с ненулевой кривизной) лежит в отной плоскости тогда и только тогда, когда $\tau \equiv 0$.

Многомерные формулы Френе.

Определение 39. Будем называть гладкую кривую $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *невырожденной*, если для любого $t \in I$ векторы $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$ линейно независимы.

Теорема 29. *Пусть $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ - невырожденная натурально параметризованная кривая. Тогда существует единственный набор гладких функций $v_1, \dots, v_n : I \to \mathbb{R}$ и $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ (кривизны) такой, что для всех $t \in I$*

- *$v_1(t), \dots, v_n(t)$ - положительно ориентированный ортонормированный безис в $\mathbb{R}^n$ (базис Френе);*
- *$\kappa_1(t), \dots, \kappa_{n-2}(t) > 0$ (κ_{n-1} может менять знак);*
- *$v_1 = \gamma'$;*
- *верны формулы Френе:*

$$\begin{aligned} v_1' &= \kappa_1 v_2; \\ v_i' &= -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1}; \\ v_n' &= -\kappa_{n-1} v_{n-1}. \end{aligned}$$

Теорема 30. *Пусть $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ - глажкие функции, причём $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$. Тогда*

- *Существует невырожденная натурально параметризованная кривая $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, у которой кривизны равны $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$;*
- *Такая кривая единственна с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.*

Определение 40. Кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ - *замкнута*, если её можно продолжить до гладкой $(b-a)$-периодической функции $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Следствие. Поворот замкнутой привой равен $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 41. k - число вращения.

Определение 42. *Простая замкнутая кривая* - замкнутая кривая, у которой нет самопересечений.

Утверждение 6. Поворот простой замкнутой кривой равнен $\pm 2\pi$.

То, что ЕА рассказывал на доске.

Теорема 31. *Пусть γ - простая, регулярная, замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *γ - выпуклая (здесь - по одну сторону от $\forall$ касательной);*
- *κ_γ везде не меньше или не больше нуля;*
- *$\forall$ прямой l существует ровно две касательных к γ, параллельных l.*

Определение 43. Пусть γ - натурально параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$, кривизна γ есть $\kappa_\gamma = |\gamma''(t)|$. Тогда *поворот* есть

$$\int_a^b \kappa_\gamma(t)dt.$$

Теорема 32 (*Теорема Фенхеля*)**.** *Поворот регулярной замкнутой кривой в $\mathbb{R}^n$ не меньше 2π.*

Далее, $\mathbb{R}^m \subset U$ - область (открытая связная), $m \leq N$, $r : U \to \mathbb{R}^n$.

Определение 44. Гладкое отображение r называется *гладкой поверхностью*.

Определение 45. Поверхность r *регулярна*, если ранг dr равен m (инъекция).

Определение 46. *Касательное пространство* к поверхности в точке x есть $\mathrm{Im}(d_x r)$.

Определение 47. *Нормаль* к поверхности - нормаль к касательной плоскости.

Определение 48. *Гладкая кривая* на поверхности - образ гладкой кривой на U.

Теорема 33. *Касательная плоскость Φ ($\mathrm{Im}\, r$) есть множество касательных векторов ко всем гладким кривым на поверхности, проходящим через данную точку.*

Определение 49. Пусть $r_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$, $r_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$. Они называются *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм из U_1 в U_2 с положительным Якобианом.

Определение 50. Пусть $r : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. *Первая форма* - это билинейная симметричная форма на $\mathbb{R}^2$ такая, что для любых $v, w \in \mathbb{R}^2$, для любого $x \in U$ ($x = (x_1, x_2)$), выполнено

$$\mathrm{I}(v, w) = \langle d_x r(v), d_x r(w) \rangle.$$

$\mathrm{I}(v, v)$ - *первая квадратичная форма*.

Утверждение 7.

- I положительно определена;
- Матрица I (g_{ij}) выглядит как

  $$g_{ij} = \langle r'_{x_i}, r'_{x_j} \rangle,$$

  и при $m = 2$ обозначается как

  $$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Благодаря этой вещи можно считать:

- Длину кривой $\gamma(t) = r(x_1(t), x_2(t))$:

$$l = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int \sqrt{\mathrm{I}(v,v)},$$

где $v = (x_1', x_2')$;

- Угол между кривыми (касательными в точке), посчитав скалярное произведение между двумя соответствующими векторами вида выше;
- Площадь поверхности.

Определение 51. *Второй формой* называется билинейная форма, заданная следующим образом:

$$\mathrm{II}(v,w) = \langle d_x^2 r(v,w), n \rangle,$$

где n - вектор нормали

$$\frac{r_{x_1} \times r_{x_2}}{|r_{x_1} \times r_{x_2}|}.$$

Утверждение 8.

- Матрица II формы в стандартном базисе обозначается как

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

где $(h_{ij}) = \langle r_{x_i, x_j}, n \rangle$.

Теорема 34.

$$\mathrm{II}(v,w) = \langle dr(v), dn(w) \rangle.$$

Пусть $\widetilde{\gamma}(t) = r(\widetilde{x_1(t)}, \widetilde{x_2(t)})$ - гладкая натурально параметризованная кривая. Тогда $\kappa_{\widetilde{\gamma}} = |\widetilde{\gamma}''(t_0)|$, но можно определить два очень полезных типа кривизн следующим образом:

Определение 52. Спроецируем $\widetilde{\gamma}''(t_0)$ на соответствующий вектор нормали и получим *нормальную кривизну*, то есть, $\kappa_n = \langle \widetilde{\gamma}''(t_0), n \rangle$. Другая компонента (проекция на касательную плоскость) называется *геодезической кривизной*, обозначается κ_g.

Утверждение 9.

- $\kappa_{\widetilde{\gamma}} = \sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}$;
- *Теорема Менье* $\kappa_n = \kappa_{\widetilde{\gamma}} \cdot \cos(\varphi)$, где φ - угол между $\widetilde{\gamma}''$ и нормалью.

Теорема 35. *Пусть $\gamma(t) = r(x_1(t), x_2(t))$ - гладкая кривая на Φ, и пусть также $\xi = (x_1'(t_0), x_2'(t_0))$. Тогда*

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{II}(\xi,\xi)}{\mathrm{I}(\xi,\xi)}.$$

Следствие. Если две кривые проходят через одну точку и имеют коллинеарные вектора скорости, то их нормальные кривизны совпадают.

Определение 53. Пусть $p \in \Phi$, $v \in T_p\Phi$, тогда *нормальное сечение* - ересечение Φ с плоскостью, порождённой векторами n и v.

Лемма 10. *Нормальное сечение можно представить как гладкую кривую на* Φ.

Определение 54. *Оператор Вейнгартена* - $s : T_p\Phi \to T_p\Phi$ такой, что для любых $\widehat{v}$, $\widehat{w} \in T_p\Phi$, $\widehat{\mathrm{II}}(\widehat{v}, \widehat{w}) = \langle \widehat{v}, s(\widehat{w}) \rangle$.

Утверждение 10. В базисе r_{x_i} матрицы $\widehat{\mathrm{I}}$ и $\widehat{\mathrm{II}}$ форм связаны следующим соотношением:

$$[\widehat{\mathrm{II}}] = [\widehat{\mathrm{I}}] \cdot [s].$$

Определение 55. *Главная кривизна* - собственное число оператора Вейнгартена. *Главное направление* - прямая, порождённая собственным векторомоператора Вейнгартена.

Утверждение 11. Так как s самомопряжённая, существует m главных кривизн с учётом кратности (вещественных), которым соответствует m попарно ортогональных направлений.

Получается, что в $T_p\Phi$ существует ортонормированный базис b_1, b_2 из собственных векторов оператора S, в котором $[\widehat{\mathrm{I}}] = E$, а

$$[\widehat{\mathrm{II}}] = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix},$$

где k_1 и k_2 - главные кривизны.

Теорема 36 (*Теорема Эйлера*)**.** *Пусть* $\widehat{v} \in T_p\Phi$, $|\widehat{v}| = 1$, $\varphi = \angle(\widehat{v}, b_1)$. *Тогда* κ_n *поверхности* Φ *по направлению* v *равна*

$$\kappa_n = \widehat{\mathrm{II}}(\widehat{v}, \widehat{v}) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi.$$

Следствие. κ_1 и κ_2 - наибольшее и наименьшее значение κ_n по всем направлениям.

Определение 56. *Гауссова Кривизна* - $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$, *средняя кривизна* - $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.

Утверждение 12.

$$(\kappa_n)_\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_n(\phi) d\phi = H.$$

Теорема 37. κ_1 *и* κ_2 *- корни уравнения* $\det([\mathrm{II}] - t[\mathrm{I}]) = 0$.

надо будет дописать 3 семестр...

4 семестр

Поехали блять

Определение 57. Простые поверхности M_1, M_2 одинаковой размерности *изометричны*, если у них есть такие параметризации $r_i : U_i \to M_i$ и такой диффеоморфизм $\varphi : U_1 \to U_2$, что их первые формы поточечно равны, то есть, их первые формы I^{r_1}, I^{r_2} в соответствующих точках $x \in U_1$ и $\varphi(x) \in U_2$ связаны соотношением

$$\mathrm{I}^{r_1}_x(v, w) = \mathrm{I}^{r_2}_{\varphi(x)}(d_x\varphi(v), d_x\varphi(w)),$$

где $v, w \in \mathbb{R}^m$.

Примечание. То же самое, только *локально изометричны*, если параметризации локальны.

Определение 58. Пусть M - связная поверхность, $p, q \in M$. *Внутреннее расстояние* между p и q в M - инфимум длин кусочно-гладких кривых на M, содержащих p и q.

Свойство (или характеристика) поверхности относится к *внутренней геометрии*, если оно одинаково у всех изометричных поверхностей. Внутренние свойства - те и только те, которые определяются первой формой. Например, длины углы и площади, но не кривизны (за редкими исключениями).

Определение 59. Пусть M_1, M_2 - поверхности (одинаковой размерности). *Изометрия* между M_1 и M_2 - диффеоморфизм $f : M_1 \to M_2$ такой, что для любой точки $p \in M_1$, дифференциал $d_pf : T_pM_1 \to T_{(p)}M_2$ сохраняет скалярное произведение. Поверхности *изометричны*, если существует изометрия между ними.

Примечание. Определения эквивалентны.

Определение 60. Многообразие размерности n - хаусдорфово пространство о счётной базой такое, что у любой точки есть крестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.

Определение 61. Пусть M - n-мерное многообразие.

Карта - гомеоморфизм $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, где $U \subset M$ и $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ - открыты.

Атлас - набор карт, области определения которых покрывают M.

Отображение перехода между картами $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ - отображение

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

Две карты *гладко согласованны*, если отображение перехода между ними гладкое. Атлас *гладкий*, если все его карты гладко согласованны.

Два гладких атласа *эквивалентны*, если их объединение - тоже гладкий атлас.

Лемма 11. *Это - действительно отношение эквивалентности. Также, в каждом классе есть единственный максимальный (по включению) атлас - объединение всех атласов из классов эквивалентности.*

Определение 62. *Гладкое многообразие* - многообразие с заданным на нём максимальным гладким атласом. Максимальный атлас также называют *структурой гладкого многообразия* или *дифференциальной структурой.*

Предметный указатель