Личные записи по вариационке$^{\beta}$

@keba4ok

16 февраля 2022г.

Некоторые материалы с практик и лекций для подготовки к контрольным и экзаменам.

Содержание

Краткие записи лекций

Введение

Пусть X - линейное нормированное пространство (мы, в основном, рассматриваем различные пространства функций). Отображение $J : X \to \mathbb{R}$ называем *функционалом*.

В конечных случаях всё довольон прозаично, мы проверяем градиент и знак матрицы

$$\left|\left|\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right|_{i,j=1}^{n}.$$

Однако мы будем анализировать не только конечномерные отображения.

Пример(ы) 1.

$$J[u] = \int_{-1}^{1} x^2 (u'(x))^2 dx,$$

при $X = \{u \in C^1[-1, 1] : u(\pm) = \pm\}$ с нормой $||u||_{C^1} = \max_{x\in[-1,1]} |u(x)| + \max_{x\in[-1,1]} |u'(x)|$, тогда во-первых, X замкнуто относительно данной меры, а во-вторых, $\inf J[u] = 0$.

В общем случае мы будем рассматривать $I[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$, где, соответственно, $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ - непрерывное отображение, и $y : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Типисными же для нас пространствами станут, например, два следующих:

- $X = C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ - полное нормированное (банахово) пространство с нормой $||f||_X = \max_{x\in\Omega} |f(x)| + \max_{x\in\Omega} |f'(x)|$;
- $X = C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $||f||_X = \max_{x\in\Omega} |f(x)|$.

Утверждение 1. Пусть $L \in C(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\Omega = [a, b]$, $J : X \to \mathbb{R}$:

$$J[y] = \int_{\Omega} L(x, y, y')dx.$$

Тогда J - непрерывна.

Определение 1. Пусть $f, h \in X$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J[f + th] = \delta J(f, h) = J'_G(f)h$$

есть производная по направлению h в точке f, *вариация* или производная по Гато.

Утверждение 2. Вариация однородна по h, то есть,

$$\delta J(f, \lambda h) = \lambda \delta J(f, h),$$

но, отнюдь, не всегда линейна.

Определение 2. *Сопряжённое* к X пространство есть множество X^* функционалов l таких, что они линейны и ограничены. Функционал ограничен, если $|l(f)| \le C||f||_X$ для всех $f \in X$ и некоторой константы C. Норма на этом пространстве определяется как

$$||l||_{X^*} := \sup_{f\in X, f\ne 0} \frac{|l(f)|}{||f||_X}.$$

Утверждение 3. X^* с данной нормой - Банахово пространство.

Определение 3. J - дифференцируема по Фреше, если в точке $f \in X$, если существует $J'_F[f] \in X^*$:

$$J[f+h] = J[f] + J'_F[f](h) + o(||h||),$$

где $h \to 0$.

Утверждение 4.

- Если $J'_F[f]$ существует, то единственна;
- Если $J'_F[f]$ существует, то производная по любому направлению $h \in X$, и $\delta J(f,h) = J'_F[f](h)$, однако в обратную сторону это не работает.

Определение 4. $J \in C^1(X)$, если для любого $f \in X$ существует $J'_F[f]$, причём отображение из X в X^*, действующее по правилу $f \mapsto J'_F[f]$, непрерывно.

Определение 5. Честно говоря, конкретно сейчас мне лень расписывать все эти определения локальных и глобальных максимумов и минимумов.

Утверждение 5. Если существует $\delta J(f,h)$, f - строгий локальный максимум (минимум), то $\delta J(f,h) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $L \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $X = C^1(\Omega)$, Ω - отрезок, $J[u] = \int_\Omega L(x,u,u')dx$. Тогда $J \in C^1(X)$ и*

$$\delta J(u,h) = \int_\Omega (\langle (\nabla_u L)(x,u,u'), h(x)\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle (\nabla_{u'} L)(x,u,u'), h'(x)\rangle_{\mathbb{R}^n})dx.$$

Предметный указатель