

Личные записи по матану ^{β}

@keba4ok

18 октября 2021г.

Некоторые материалы с практик и лекций для подготовки к контрольным и экзаменам.

Содержание

Задача 1. Интегралы с параметром.	2
Грубые оценки.	2
Разбиение на части.	2
Интегрирование по параметру.	2
Использование комплексов.	3
Задача 2. Многомерное интегрирование.	3
Задача 3. Перестановка пределов интегрирования.	4
Задача 4. Замена переменной.	4
Решение примера КР.	5
Краткий лекционный материал.	6
Введение	6
Системы множеств и функции на них.	6
Счётная аддитивность.	7
Теорема Лебега-Каратеодори.	8
Измеримость.	9
Интеграл Лебега.	10
Пространства суммируемых функций.	13
Разное из неуспетого.	13
Краткий четвёртый семестр.	15
Введение	15
Дифференциальные формы и пути.	15

Задача 1. Интегралы с параметром.

Грубые оценки.

Задача (1.3.1).

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{\alpha + x^2(\alpha + \alpha^3)} &\geq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha + (1+\alpha)^2(\alpha + \alpha^3)} \geq 1 \\ &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha + (1-\alpha)^2(\alpha + \alpha^3)} \leq 1\end{aligned}$$

Задача (1.3.2).

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta &\geq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R\theta} d\theta = -\frac{e^{-R\theta}}{R} \Big|_0^\pi = \\ &= -\frac{e^{-R\frac{\pi}{2}}}{R} + \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Разбиение на части.

Посредством замены переменных.

Задача (1.3.4).

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-\sin R\theta} d\theta = [R] \frac{1}{R} \int_0^\pi e^{-\sin \theta} d\theta.$$

Интегрирование по параметру.

Теорема 1. Пусть $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция, дифференцируемая по первой переменной и такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ тоже непрерывна. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy. \quad (1)$$

Теорема 2. Пусть c или d бесконечно и существуют g и h - непрерывные на $[c, d]$ такие, что к условиям непрерывности добавляются

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq h(y), \quad |f(x, y)| \leq g(y)$$

и

$$\int_c^d h(y) dy < \infty, \quad \int_c^d g(y) dy < \infty,$$

тогда формула (1) также верна.

Задача (1.5.1).

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= [H_\varepsilon(t) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^t}{\ln x} dx] = H_\varepsilon(b) - H_\varepsilon(a) = \\ &= \int_a^b H'_\varepsilon(t) dt = \int_a^b \frac{dt}{t+1}.\end{aligned}$$

Использование комплексов.

Задача (1.5.2). $a > 0$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx &= - \int_0^{\infty} \sin x e^{-ax} dx = \\ &= - \int_0^{\infty} \sin x e^{-ax} dx = - \int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{-ax} dx = \\ &= - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} (e^{(i-a)x} - e^{-(i+a)x}) dx = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i-a} + \frac{1}{i+a} \right] = \frac{-1}{1+a^2}. \end{aligned}$$

Теорема 3 (*Интеграл Френеля*).

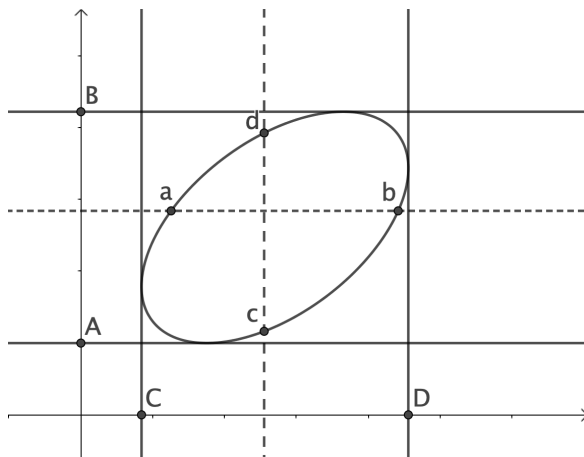
$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Задача 2. Многомерное интегрирование.

Теорема 4 (*Тождество Фубини*).

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy$$

Утверждение 1. Пусть Ω - (приличная) область в \mathbb{R}^2 .



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \chi_{\Omega}(x, y) dx dy = \\ &= \int_C^D \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Задача (4.1.3). $f(x, y) = x^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} x^2 dy dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{1-x} x^2 dx \end{aligned}$$

Задача 3. Перестановка пределов интегрирования.

Чертим график области (ну она же должна быть 2-х или 3-ч мерной, поэтому возможно), затем отслеживаем согласно *утв. 1* новые границы, а функция под интегралом остаётся той же самой.

Задача 4. Замена переменной.

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ - открытые и, возможно, связные области. Пусть также есть $\Phi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ такая, что $\Phi \in C^1(\overline{\Omega_1})$ и Φ - биекция между данными областями. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} f(y) dy &= \int_{\Omega_1} f(\Phi(x)) d\Phi(x) = \\ &= \int_{\Omega_1} f(\Phi(x)) |\det \Phi_x| dx. \end{aligned}$$

В частности, при $d = 2$, и при $\Phi(x, y) = (\Phi^1(x, y), \Phi^2(x, y))$,

$$\begin{aligned} d\Phi_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi^2}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial \Phi^2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}, \\ \det d\Phi|_{(x,y)} &= \Phi_1^1 \cdot \Phi_2^2 - \Phi_1^2 \cdot \Phi_2^1, \end{aligned}$$

откуда получается результат замены:

$$\int_{\Omega_1} f(\Phi(x, y)) |\Phi_1^1 \cdot \Phi_2^2 - \Phi_1^2 \cdot \Phi_2^1| dx dy.$$

Пример(ы) 1. *Полярная замена.* $\Omega_1 = \{(r, \varphi) | r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\}$, $\Omega_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда $\Phi^1 = r \cos \varphi$, $\Phi^2 = r \sin \varphi$,

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

И определитель, как нетрудно понять, будет равен r . В трёхмерном случае получается, конечно, *сферическая замена*.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= \rho \cos \theta. \end{aligned}$$

Пример(ы) 2. *Экспоненциальная замена.* $\Phi = (e^{u_1}, e^{u_2}, \dots)$, тогда $\det = e^{u_1 + u_2 + \dots}$.

Решение примера КР.

Задача (1).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin^2 x + a \cos^2 x) dx, \quad a \geq 0$$

Задача (2). Вычислить интеграл от функции $u(x, y) = x^2 + y$ по области, ограниченной параболой $y = x^2$ и $x = y^2$.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy dx = \int_0^1 yx^2 + \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{x} + \frac{x}{2} - 1,5x^4 dx = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10}$$

Задача (3). Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^r \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_0^r \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^y f(x, y) dx dy$$

Задача (4).

$$\iiint_U \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} = \iiint_{U'} \frac{r dr d\varphi d\theta}{\sqrt{r^2 - 2r \cos \theta + 4}}$$

Краткий лекционный материал.

Введение

Пусть X - некоторое универсальное пространство, а \mathfrak{A} - набор его подмножеств.

Определение 1. \mathfrak{A} - *полукольцо множеств*, если для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ их пересечение $A \cap B$ тоже лежит в \mathfrak{A} , а их разность $A \setminus B$ представляется в виде конечного объединения попарно дизъюнктивных множеств из \mathfrak{A} .

Определение 2. \mathfrak{A} - *кольцо множеств*, если для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ их пересечение $A \cap B$, объединение $A \cup B$ и разность $A \setminus B$ лежат в \mathfrak{A} .

Определение 3. \mathfrak{A} - *алгебра множеств*, если оно кольцо, и для любого $A \in \mathfrak{A}$ множество X тоже лежит в \mathfrak{A} .

Примечание 1. При рассуждении о полукольцах разумно думать о

$$P(\mathbb{R}^n) = \left\{ \prod_{i=1}^n [a_i, b_i); a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}} \right\},$$

то есть, о полуинтервалах на прямой, в частности.

Определение 4. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ - полукольца, тогда их *произведение*:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B, A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}.$$

Утверждение 2 (полукольцо).

$$A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 \setminus (A_2 \cup A_3) = \bigsqcup_{j=1}^N C_j$$

и это аналогично обобщается до вычитания больших объединений.

Определение 5. Функция $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ называется *мерой*, если для любых попарно дизъюнктивных множеств $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{A}$ и таких, что $\bigsqcup_{i=1}^k A_i \in \mathfrak{A}$, верно равенство $\mu(\bigsqcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$

Примечание 2. Данное свойство называется *аддитивностью*

Утверждение 3. Мера, определённая на полукольце, монотонна: если $A, B \in \mathfrak{A}$, и $B \subseteq A$, то $\mu(B) \leq \mu(A)$.

Системы множеств и функции на них.

Определение 6. Пусть \mathfrak{A} - полукольцо, и $A \in \mathfrak{A}$. Определим *функцию-индикатор* (или *характеристическую функцию*):

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

Определение 7. *Простая функция* - это функция вида $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$, где $A_i \in \mathfrak{A}$ и $a_i \in \mathbb{R}$

Примечание 3. Сумма и произведение простых функций - простые функции.

Определение 8. Пусть \mathfrak{A} - полукольцо, μ - мера и f - простая функция (всё пока что конечно). Тогда *элементарным интегралом* называется

$$\int f(x)dx = \sum a_i \mu(A_i)$$

Утверждение 4. Рассмотрим свойства интеграла:

- **Линейность.** Если у нас есть две простые функции: f и g , а также два числа: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда

$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g.$$

- **Монотонность.** Пусть f и g - простые функции, а также $f \leq g$. Тогда

$$\int f \leq \int g.$$

Примечание 4. Для доказательства практически всего нужно просто рассмотреть дизъюнктное подразбиение данных функций.

Определение 9. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ - полукольца с мерами μ и ν соответственно. Определим их произведение $\lambda : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ по правилу $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Счётная аддитивность.

Определение 10. Пусть даны $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - набор подмножеств множества X , и функция $\mu : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$. Эта функция называется *счётно-аддитивной* (или *σ -аддитивной*), если для любого не более чем счётного набора попарно дизъюнктных множеств $\{B_i\}$ таких, что их объединение $B = \bigsqcup B_i$ лежит в \mathfrak{B} , верно равенство $\mu(B) = \sum \mu(B_i)$

Определение 11. Мера μ , определённая на полукольце (кольце, алгебре и т.д.) $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, называется *регулярной*, если для любого $A \in \mathfrak{A}$:

- $\mu(A) = \inf_{G \in \mathfrak{A}, A \subset G, G \text{ - открытое}} \mu(G)$
- $\mu(A) = \sup_{K \in \mathfrak{A}, K \subset A, K \text{ - компакт}} \mu(K)$

Теорема 5 (Александров). Регулярная конечно аддитивная мера μ , определённая на кольце в топологическом пространстве, счётно аддитивна.

Определение 12. Если в определении алгебры сказать, что объединение и пересечение должны быть счётными, то мы получим *σ -алгебру*.

Примечание 5. Пересечение σ -алгебр - σ -алгебра.

Определение 13. *Порождённая σ -алгебра* для $\mathfrak{B} \subset 2^X$ - $\overline{\mathfrak{B}}$ - наименьшая σ -алгебра, содержащая \mathfrak{B} .

Утверждение 5. Если \mathfrak{A} - алгебра, из $\{E_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{A}$ следует, что $\bigcap_1^\infty E_n \subset \mathfrak{A}$, то \mathfrak{A} - σ -алгебра.

Определение 14. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - полукольцо с (конечно-аддитивной) мерой μ . Определим функцию $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ по правилу $\mu^*(A) = \inf(\sum \mu(A_i) | \{A_i\} \in \mathfrak{A}, \bigcup A_i \supset A)$ (т.е. инфимум по всем покрытиям множества A элементами полукольца) и назовём её *внешней мерой*.

Утверждение 6.

- $\mu^*(A) \leq \mu(A)$;
- Монотонность: если $A \subseteq B$, то $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- *Счётная полуаддитивность*: Если $\{A_i\} \in \mathfrak{A}$, и $\bigcup A_i \in \mathfrak{A}$ то $\mu^*(\bigcup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i)$;
- Если μ - счётно-аддитивна, то $\mu^*_{|\mathfrak{A}} = \mu$.

Теорема Лебега-Каратеодори.

Определение 15. Пусть X - множество произвольной природы. Монотонную и счётно-полуаддитивную функцию $\gamma : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, такую, что $\gamma(\emptyset) = 0$, мы назовём *предмерой* на множестве X .

Определение 16. Множество $E \subseteq X$ называется *γ -измеримым*, если для любого $A \subseteq X$ верно равенство $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \setminus E)$ или, что равносильно, $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \cap E^c)$.

Примечание 6. Внешняя мера - это предмера.

Теорема 6 (*Теорема Лебега-Каратеодори*). Пусть γ - предмера на множестве X , и $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ - набор всех γ -измеримых подмножеств. Тогда:

- Σ - σ -алгебра;
- $\gamma_{|\Sigma}$ - счётно-аддитивная мера на Σ ;
- Пусть \mathfrak{A} - полукольцо на X , и μ - (конечно) аддитивная мера на нём. Если мы определим $\gamma := \mu^*$, то $\Sigma \supset \mathfrak{A}$.

Определение 17. Пусть $P(\mathbb{R}^n)$ - полукольцо ячеек с естественной мерой μ (которая, как мы помним, счётно-аддитивна). Множества, измеримые относительно внешней меры μ^* , образуют σ -алгебру (будем обозначать её Σ) и называются *измеримыми по Лебегу*, а μ^* от них обозначается буквой λ и называется *мерой Лебега*.

Определение 18. Рассмотрим $\mathfrak{B} = \overline{P(\mathbb{R}^n)}$ - σ -алгебра, натянутая на полукольцо ячеек $P(\mathbb{R}^n)$. Она состоит из всевозможных счётных объединений и пересечений элементов $P(\mathbb{R}^n)$ и называется *Борелевской σ -алгеброй*. Эта алгебра содержит, например, все открытые множества (так как любое открытое множество в \mathbb{R}^n можно представить в виде дизъюнктного объединения ячеек).

Примечание 7. Любое измеримое по Борелю множество также измеримо и по Лебегу (в силу п.3 теоремы Лебега-Каратеодори), но обратное неверно.

Утверждение 7. Пусть γ - предмера на X . Если $E \subseteq X$, и $\gamma(E) = 0$, то E - γ -измеримо. Как следствие, любое подмножество γ -измеримого и имеющего предмеру ноль множества также измеримо.

Утверждение 8. Канторово множество имеет мощность континуум, измеримо по Борелю (а, значит, и по Лебегу) и имеет меру Лебега, равную нулю.

Определение 19. Мера на полукольце $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ называется *σ -конечной*, если исходное множество X представляется в виде счётного объединения $\bigcup A_n$, где $A_i \in \mathfrak{A}$, и $\mu(A_i) < \infty$.

Утверждение 9 (*о структуре измеримых множеств*). Пусть $A \in \Sigma$ - (измеримое по Лебегу) множество. Тогда оно представимо в виде разности $B \setminus E$, где $B \in \mathfrak{B}$, а $\lambda(E) = 0$.

Утверждение 10. Пусть $P(\mathbb{R}^n)$ - полукольцо ячеек, Σ - измеримые по Лебегу подмножества, λ - мера Лебега, и Δ ($\mathfrak{B} \subseteq \Delta \subseteq \Sigma$) - какая-то другая σ -алгебра со своей мерой ν такая, что $\nu|_{\mathfrak{B}} = \lambda|_{\mathfrak{B}}$. Тогда $\nu|_{\Delta} = \lambda|_{\Delta}$

Утверждение 11.

- Мера Лебега инвариантна относительно сдвига. А именно, если $E \in \Sigma$, и $r \in \mathbb{R}^n$, то $\lambda(E + r) = \lambda(E)$
- Пусть μ - какая-то счётно-аддитивная мера на \mathfrak{B} , инвариантная относительно сдвига. Тогда $\mu = c\lambda$ для некоторой константы c .

Измеримость.

Определение 20. Пусть у нас есть (X, Σ, μ) и (Y, Δ, ν) . $f : X \rightarrow Y$ *измеримо*, если $\forall A \in \Delta$, $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

Примечание 8. Обозначим тройку (X, Σ, μ) как *пространство-мера*, причём обычно считают μ счётно аддитивной.

Определение 21. Пусть у нас есть (Y, Δ, μ) и множество $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$. *Расширение*, наименьшая сигма-алгебра, которая это \mathfrak{B} содержит - $\overline{\mathfrak{B}}$. Если она совпадает с Δ , то \mathfrak{B} - образующее множество в Δ . Это множество можно и желательно выбирать как можно меньше.

Пример(ы) 3. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = B(X)$, что можно выбрать поменьше? Можно рассмотреть *диадические разбиения*, то есть, все такие кубики, вершины которых лежат в двоично-рациональных точках. То есть, набор кубиков, устроенный как

$$\left[\frac{p_1}{2^k}, \frac{p_1 + 1}{2^k}\right) \times \left[\frac{p_2}{2^k}, \frac{p_2 + 1}{2^k}\right) \times \dots \times \left[\frac{p_n}{2^k}, \frac{p_n + 1}{2^k}\right).$$

Обозначим это разбиение как D . Ясно, что любое открытое множество G в \mathbb{R}^n представимо в виде объединения $G = \bigcup D_i$ кубиков из D . Как следствие, D порождает Бoreлевскую σ -алгебру. При этом, если есть два кубика, то они либо не пересекаются, либо один находится внутри другого. Таким образом, можно считать, что все D_i попарно дизъюнкты.

Утверждение 12. Пусть G_1 и G_2 - области в \mathbb{R}^n , и $f : G_1 \rightarrow G_2$ - гомеоморфизм, и дополнительно $f \in Lip(G_1)$. Пусть также есть измеримое по Лебегу множество $B \subset \Sigma_\lambda$, $B \subset G_1$, тогда $f(B)$ тоже измеримо по Лебегу (Лебегово)

Определение 22. Функция

$$f : (X, \Sigma, \mu) \rightarrow \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}),$$

называется *измеримой по Лебегу*, если она измерима в вышеупомянутом смысле.

Определение 23. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, тогда

$$E_a(f) = \{x \in X : f(x) < a\}$$

- множества Лебега.

Примечание 9. Множества $\{x \in X : f(x) > a\}$, $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ и $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ также иногда называются множествами Лебега.

Утверждение 13. Отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ измеримо тогда и только тогда, когда $E_a(f) \in X$ для любого a .

Утверждение 14. Если у нас есть измеримые функции f_1 и f_2 , то их сумма $f_1 + f_2$ и произведение $f_1 f_2$ тоже измеримы. Если X - метрическое пространство, и f_2 непрерывна, то $\frac{f_1}{f_2}$ также измерима там, где знаменатель не обращается в ноль.

Утверждение 15. Пусть теперь $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ - измеримые функции. Тогда их поточечный супремум $f(x) = \sup_i \{f_i(x)\}$ также измерим.

Примечание 10. Аналогично, измеримы функции $\inf_i \{f_i(x)\}$, $\limsup f_i(x) = \inf_m \sup_{k>m} f_i(x)$ и $\lim_i f_i(x)$ (если существует).

Интеграл Лебега.

Пусть есть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Разобьём её на положительную и отрицательную части: $f = f_+ - f_-$, где, напомним, $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ и $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$ (заметим, что f_+ и f_- - неотрицательные функции).
2. Если мы определим интеграл Лебега $I(f)$ для неотрицательных функций, то сможем определить и для произвольной функции $g = g_+ - g_-$: $I(g) = I(g_+) - I(g_-)$ при условии, что хотя бы один из интегралов $I(g_+)$ и $I(g_-)$ меньше бесконечности. Если же оба интеграла равны бесконечности, то определить интеграл Лебега от функции g мы не можем.
3. Таким образом, наша текущая цель - определить интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Для этого мы будем пользоваться определёнными ранее простыми функциями.

Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}(x)$ - простая функция, E_k - измеримые множества. Для неё мы уже определяли $I(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k)$.

Идея: Приблизить произвольную функцию простыми.

Теорема 7 (Малая теорема Леви). Даны неотрицательные простые функции f и $\{g_i\}_{i=1}^\infty$. Также $g_i(x) \leq g_{i+1}(x)$, и для почти любого x есть предел $\lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) = f(x)$. Тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} I(g_i) = I(f)$.

Лемма 1. Дана неотрицательная измеримая функция f . Тогда существует последовательность неотрицательных простых функций $\{f_i\}$, почти всюду монотонно возрастающих (по i) к f .

Определение 24. Дана неотрицательная измеримая функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда величина $I(f) := \sup\{I(h), h - \text{простая функция, и } 0 \leq h \leq f\}$ называется **интегралом Лебега**.

Свойство(a) (Интеграл Лебега, часть 1).

- **Монотонность:** Если $0 \leq f_1 \leq f_2$, то $I(f_1) \leq I(f_2)$
- **Аддитивность с простой функцией:** f - измеримая функция, и $0 \leq \phi \leq f$ - простая функция. Тогда $I(f) = I(f - \phi) + I(\phi)$.
- **Неравенство Чебышёва:** Даны неотрицательная измеримая функция f , вещественное число a и соответствующее множество Лебега $E_a = \{x : f(x) \geq a\}$. Тогда $f \geq a \chi(E_a)$, и $I(f) \geq I(a \chi(E_a)) = a \cdot \mu\{x : f(x) \geq a\}$.

Теорема 8. f и $\{f_n\}$ - измеримые неотрицательные функции на пространстве с конечной мерой. Известно, что $\{f_n\}$ почти всюду монотонно возрастает к f . Тогда $I(f_n)$ монотонно возрастает к $I(f)$.

Свойство(a) (Интеграл Лебега, часть 2).

- Интеграл Лебега от функции f можно определить не как супремум по всем простым функциям, а как предел интеграла простых функций, стремящихся к f .
- **Линейность:** Если f_1, f_2 - измеримые неотрицательные, то $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$.
- Если $I(f) = 0$, то $f = 0$ почти везде.

Определение 25. Множество E называется **σ -конечным**, если оно представляется в виде счётного объединения множеств конечной меры.

Утверждение 16. Пусть $f \geq 0$ - измерима, $I(f) < \infty$. Тогда её носитель $\text{supp}(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$ - σ -конечное множество.

Пусть задана измеримая функция $f \geq 0$. Для любого измеримого множества $E \in \Sigma$ можно рассмотреть функцию от множества E , определённую по правилу $I(f, E) = I(f \cdot \chi_E)$

Теорема 9. Дана последовательность вложенных друг в друга множеств $\{E_i\}$, $E_{i+1} \subseteq E_i$, $\mu\{E_1\} < \infty$, $I(f, E_1) < \infty$ и $E = \bigcap_i E_i$. Тогда

$$I(f, E) = \lim_{i \rightarrow \infty} I(f, E_i)$$

Примечание 11. Далее мы будем обозначать $I(f)$ через $\int f d\mu$

Теорема 10 (Лемма Фату). Пусть $\{f_n\}$ - последовательность неотрицательных измеримых функций. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

Определение 26. Окончательное определение интеграла Лебега. Дана измеримая функция $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Определим функции $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$. Тогда f_+ и f_- измеримы и неотрицательны. Мы уже умеем определять $\int f_+ d\mu$ и $\int f_- d\mu$. Если оба эти интеграла равны бесконечности, то определить $\int f d\mu$ мы не можем, в противном же случае положим $\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$

Определение 27. Функция f называется **суммируемой**, если оба интеграла $\int f_+ d\mu$ и $\int f_- d\mu$ конечны или, что равносильно, конечен и $\int |f| d\mu$

Свойство(a) (Интеграл Лебега, часть 3).

- **Монотонность:** $f_1 \leq f_2 \implies \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu$
- **Линейность для суммируемых функций:** Если f_1, f_2 - суммируемые функции, то $\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu$

Теорема 11. Теоремы о предельных переходах под знаком интеграла:

1. **Монотонный предельный переход.** Пусть (X, Σ, μ) - пространство с мерой, $\{f_n\}$ - последовательность функций, $f_n \nearrow f$ почти всюду и $\int_X f_1 d\mu < \infty$. Тогда существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

2. То же самое, только теперь $f_n \searrow f$.

3. **Лемма Фату.** Пусть (X, Σ, μ) - пространство с мерой, $\{f_n\}$ - последовательность неотрицательных измеримых функций, и $\int \inf_{k \geq 1} f_k d\mu < \infty$. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

4. **Теорема о мажорируемой сходимости.** Пусть (X, Σ, μ) - пространство с мерой, $\{f_n\}$ - последовательность измеримых функций, почти всюду сходящаяся к f (но, возможно, не монотонно). Предположим, есть суммируемая функция $g \geq 0$ такая, что $|f_n| < g$ и $|f| < g$. Тогда

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$$

при $n \rightarrow \infty$

Определение 28. Пусть μ, ν - две меры на одной и той же σ -алгебре пространства X . Мы говорим, что ν - **абсолютно непрерывна** относительно μ , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из того, что $\mu(E) < \delta$ следует, что $\nu(E) < \varepsilon$. В частности, из того, что $\mu(E) = 0$, следует, что $\nu(E) = 0$.

Утверждение 17. Если μ - σ -конечная мера, то $I_f(E)$ абсолютно непрерывна относительно неё

Пусть $(\mathfrak{A}, \Sigma, \mu)$ и $(\mathfrak{B}, \Delta, \nu)$ - пространства с мерами. Можно построить полукольцо $R = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{X \times Y | X \in \mathfrak{A}, Y \in \mathfrak{B}\}$ и определить на нём σ -аддитивную меру $\mu \otimes \nu(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y)$. По теореме Лебега-Каратеодори в $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ есть σ -алгебра Θ множеств, измеримых относительно $\mu \otimes \nu$.

Пусть $(\mathfrak{A}, \Sigma, \mu), (\mathfrak{B}, \Delta, \nu)$ - пространства с мерами, $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \Theta, \mu \otimes \nu)$ - их произведение. Если у нас есть функция $F(x, y) : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$, то она, с одной стороны, может быть измеримой относительно $\mu \otimes \nu$, а, с другой стороны, при фиксированном $x \in \mathfrak{A}$ быть измеримой относительно ν . Хотелось бы понять, как все эти махинации связаны между собой.

Теорема 12 (Теорема Тонелли). Пусть $F : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ - неотрицательная измеримая функция, меры μ и ν σ -конечны. Тогда «всё можно»:

1. При почти всех $x \in \mathfrak{A}$ функция $\phi_x(y) = F(x, y) : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима

2. При почти всех $y \in \mathfrak{B}$ функция $\psi_y(x) = F(x, y) : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима

3. $\Phi(x) = \int_{\mathfrak{B}} \phi_x(y) d\nu$ - измерима

4. $\Psi(y) = \int_{\mathfrak{A}} \psi_y(x) d\mu$ - измерима

5. $\int_{\mathfrak{A}} \Phi(x) d\mu = \int_{\mathfrak{B}} \Psi(y) d\nu = \int_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} F(x, y) d\mu \otimes \nu$

Альтернативная запись:

$$\int_{\mathfrak{A}} \left(\int_{\mathfrak{B}} F(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_{\mathfrak{B}} \left(\int_{\mathfrak{A}} F(x, y) d\mu \right) d\nu = \int_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} F(x, y) d\mu \otimes \nu$$

Теорема 13 (Теорема Фубини). $F(x, y)$ - суммируемая (но уже, возможно, не положительная) относительно $\mu \otimes \nu$ функция. Тогда «всё можно».

Пространства суммируемых функций.

Пусть $(\mathfrak{A}, \Sigma, \mu)$ - пространство с мерой. Как обычно, на всякий случай считаем меру σ -конечной.

Определение 29. $L^1(\mathfrak{A}, \Sigma, \mu) = \{f : \int_{\mathfrak{A}} |f| d\mu < \infty\}$. Хотелось бы определить норму $\|f\|_{L^1} := \int_{\mathfrak{A}} |f| d\mu$, но вот незадача: норма может быть равна нулю, когда функция отлична от нуля на непустом множестве нулевой меры. Поэтому мы будем подразумевать, что наши функции определены с точностью до множества меры нуль, а, если быть точным, введём отношение эквивалентности $f \sim g \iff f - g = 0$ почти везде, и будем подразумевать не сами функции, а их классы.

Утверждение 18. $L^1(0, 1)$ - нормированное пространство:

1. $\|f\| \geq 0, f = 0 \iff \|f\| = 0$
2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$
3. $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$

Утверждение 19. $L^1(0, 1)$ - полное пространство: если $\{f_n\} \in L^1$ - последовательность Коши, то существует $f \in L^1$ такая, что $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Теорема 14 (Теорема Мюнца). Рассмотрим последовательность функций $\{t^{\lambda_n}\}$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Любую функцию $f \in C[0, 1]$ можно равномерно приблизить «обобщёнными полиномами» $\sum_{k=0}^N \alpha_k t^{\lambda_k}$
2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$

Лемма 2 (Лемма Урысона). Пусть X - Хаусдорфово пространство, $K \subset G \subset X$, K - компакт, G - открытое. Тогда существует непрерывное отображение $f : X \rightarrow [0, 1]$ такое, что $f|_K = 1$ и $f|_{X \setminus G} = 0$.

Определение 30. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Их *свёрткой* называется функция $h(t) = (f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$. Очень похоже на умножение полиномов.

Свойство(a) (Свёртки).

1. **Коммутативность:** $f * g = g * f$
2. **Дистрибутивность:** $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
3. $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

Разное из неуспешного.

Определение 31. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (*сходится по мере*), если (и только если) $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu\{x : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Утверждение 20. Если f_n сходятся к f почти всюду, то они сходятся к ней также и по мере.

Утверждение 21. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то существует подпоследовательность f_{n_k} таких, что они сходятся к f почти всюду.

Теорема 15 (Теорема Егорова). $\mu(X) < \infty$, $f_n \rightarrow f$ почти всюду. Тогда $\forall \delta > 0 \exists E \subset X$, $\mu(X \setminus E) < \delta$ и f_k сходятся к f на E .

Теорема 16 (Теорема Лузина). Следующие утверждения эквивалентны:

- f измерима на $[0, 1]$;
- $\forall \delta > 0 \exists E \subset [0, 1]$ и $g \in C[0, 1]: \mu(E) > 1 - \delta$ и $f|_E = g|_E$.

Утверждение 22. Любую функцию из $L^1(\mathbb{R})$ можно приблизить по L^1 -норме непрерывными функциями с компактными носителями.

Теорема 17 (Теорема Радона-Никодима). Пусть (X, \mathfrak{A}, μ) - пространство с мерой, μ - σ -конечна. Если мера $\nu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна относительно μ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$), то $\exists f: X \rightarrow \mathbb{R}: \nu(A) = \int_A f d\mu$.

Теорема 18 (Неравенство Гёльдера). $f \in L^p$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p, q \geq 1$), тогда $fg \in L^1$ и

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Следствие 1.

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{g \in L^q, \|g\|_{L^q}=1} \int fg d\mu.$$

Теорема 19 (Неравенство Йенсена). μ - вероятностная мера, Ψ - выпукла и суммируема, f суммируема. Тогда

$$\Psi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \Psi(f) d\mu.$$

Теорема 20 (Неравенство Минковского для интегралов). (X, \mathfrak{A}, μ) , (Y, \mathfrak{B}, ν) - пространства с σ -конечными мерами. f - $\mu \otimes \nu$ - измеримая, $p > 1$. Тогда

$$\left\| \int_Y f(x, y) f \nu \right\|_{L^p(\mu)} \leq \int_Y \|f(x, y)\|_{L^p(\mu)} d\nu$$

Следствие 2. При $1 < p < q < \infty$ верно, что

$$\left\| \|f(x, y)\|_{L^p(\mu)} \right\|_{L^q(\nu)} \leq \left\| \|f(x, y)\|_{L^q(\nu)} \right\|_{L^p(\mu)}.$$

Теорема 21 (Формула Стокса). $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\omega \in W^1$ - 1-форма $(f(x, y)dx + g(x, y)dy)$ - всё кусочно гладкое. Тогда

$$\int \int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

(при обходе по часовой стрелке)

надо будет докидать третий семестр...

Краткий четвёртый семестр.

Введение

Определение 32. f - *аналитическая* в $G \subset \mathbb{C}$ - открытом, если для любого $z_0 \in G$, существует $B(z_0, r)$, $r > 0$, такой, что шар лежит в G , $f(z)$ представляется в виде степенного ряда $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$. При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на $B(z_0, r)$.

Определение 33. φ = *голоморфна* в $G \subset \mathbb{C}$, открытом, если для любого $z_0 \in G$,

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0).$$

Теорема 22. Аналитичность равносильна голоморфности.

Утверждение 23 (Отступление про голоморфность.). Каждую функцию $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ можно рассматривать как функцию $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ согласно следующему правилу:

$$\varphi(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy),$$

где $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$. И для гладкости в комплексном смысле, обе эти функции должны быть гладкими и удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(z_0 + x) - \varphi(z_0)}{x} = u'_x + iv'_x; \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(z_0 + iy) - \varphi(z_0)}{iy} = v'_y - iu'_y. \end{aligned}$$

Определение 34. *Уравнения Коши-Римана*

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y; \\ v'_x &= -u'_y. \end{aligned}$$

Примечание 12. Голоморфные преобразования можно отождествить с поворотными гомотетиями, что можно заметить из соответствующих им матриц.

Определение 35. Отображение, которое в малом переводит окружность в окружность, называется *конформным*.

Теорема 23 (*Лиувилля*). В \mathbb{R}^n ($n > 2$) любое конформное отображение получается из стереографических проекций.

Дифференциальные формы и пути.

Определение 36. *Дифференциальная форма* - сумма вида

$$F = \sum_{k=1}^n f_k(x) dx_k,$$

где f_k - непрерывные функции.

Определение 37. *Путь* - отображение из отрезка в \mathbb{R}^n .

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Утверждение 24.

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b (f(\gamma(t)), \gamma'(t))_{\mathbb{R}^n} dt = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt.$$

Примечание 13. γ - кусочно-гладкая.

Свойство(a).

- $\int_{\gamma} F$ не зависит от параметризации;
- $\int_{\gamma^{-1}} F = - \int_{\gamma} F$;
- линейность;
- Пусть $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$, причём $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Тогда

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F.$$

Утверждение 25 (Основная оценка).

$$\left| \int_{\gamma} F \right| \leq \sup_{x \in \gamma} \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot l(\gamma).$$

Определение 38. Дифференциальная форма F называется *точной*, если существует H такая, что

$$F = dH = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k} dx_k.$$

Утверждение 26. Пусть F - точная дифференциальная форма, тогда

$$\int_{\gamma} F = H(\gamma(b)) - H(\gamma(a)),$$

где H - первообразная.

Теорема 24. Пусть F - дифференциальная форма некоторой области G в \mathbb{R}^n с непрерывными коэффициентами. Тогда следующие утверждения равносильны:

- $\int_{\gamma} F$ зависит только от $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$;
- $\int_{\gamma} F = 0$ для любой замкнутой γ ;
- $\exists H$ есть первообразная.

Примечание 14. Пусть G такова, что для любых двух точек $x, y \in G$, любой прямоугольник, на них натянутый $(P_{x,y})$, лежит в G . Тогда можно добавить 4 условие: $\int_{\gamma_P} F = 0$.

Примечание 15. Аналогично и для круга.

Определение 39. Дифференциальная форма называется *замкнутой*, если она локально точная. То есть, $\forall x \in G, \exists U_x$, т. ч. F - точная в U_x .

Теорема 25. Пусть F - дифференциальная форма в G . Тогда следующие условия эквивалентны:

- F - замкнута;
- $\forall x \in G, \exists U_x$ - окрестность, такая, что $\int_{\gamma} F = 0$ для любого $\gamma \subset U_x$;
- $\forall x \in G, \exists B_r(x)$, такой, что $\int_{\gamma_P} F = 0$, для прямоугольников в шаре;
- $\int_{\gamma_P} F = 0, \forall \bar{P} \subset G$.

Теорема 26. Пусть имеется дифференциальная форма в \mathbb{R}^n которая выглядит как

$$F = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j,$$

где $f_j \in C^1$, то F замкнута тогда и только тогда, когда $\forall k, j$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

Функцию из \mathbb{C} в \mathbb{C} , как мы уже видели, можно рассматривать как функцию из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^2 . А значит, можно записать дифференциалы

$$dz = dx + i dy;$$

$$d\bar{z} = dx - i dy.$$

Тогда дифференциал $F = u(x, y)dx + v(x, y)dy$ будет выглядеть как

$$F = dz \cdot \frac{u - iv}{2} + d\bar{z} \cdot \frac{u + iv}{2}.$$

И если $F = dH$, то можно ввести определение:

Определение 40.

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - i \frac{\partial H}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + i \frac{\partial H}{\partial y} \right)$$

Теорема 27 (Теорема Коши). Пусть F - голоморфная в G . Тогда дифференциальная форма $F(z)dz$ замкнута.

Предметный указатель

- γ -измеримое множество, 8
- σ -аддитивная функция, 7
- σ -алгебру, 7
- σ -конечная мера, 8
- σ -конечное множество, 11
- Абсолютно непрерывная мера, 12
- Алгебра множеств, 6
- Борелевская σ -алгебра, 8
- Внешняя мера, 7
- Диадическое разбиение, 9
- Дифференциальная форма, 15
- Замена
 - полярная, 4
 - экспоненциальная, 4
- Измеримая по Лебегу функция, 9
- Измеримость, 9
- Интеграл
 - Френеля, 3
 - элементарный, 7
- Интеграл Лебега, 10
- Кольцо множеств, 6
- Лемма
 - Урысона, 13
 - Фату, 11
- Малая теорема Леви, 10
- Мера, 6
 - Лебега, 8
- Множества, измеримые по Лебегу, 8
- Неравенство
 - Гёльдера, 14
 - Йенсена, 14
 - Минковского, 14
 - Чебышёва, 10
- Отображение
 - конформное, 15
- Полукольцо множеств, 6
- Предмера, 8
- Простая функция, 6
- Пространство-мера, 9
- Путь, 15
- Регулярная мера, 7
- Свёртка функций, 13
- Суммируемая функция, 11
- Счётная полуаддитивность, 8
- Счётно-аддитивная функция, 7
- Теорема
 - Егорова, 14
 - Коши, 17
 - Лебега-Каратеодори, 8
 - Лузина, 14
 - Мюнца, 13
 - Радона-Никодима, 14
 - Тонелли, 12
 - Фубини, 12
 - о мажорируемой сходимости, 12
 - о структуре измеримых множеств, 8
- Тождество Фубини, 3
- Уравнения Коши-Римана, 15
- Форма
 - замкнутая, 16
 - точная, 16
- Формула
 - Стокса, 14
- Функция
 - аналитическая, 15
 - голоморфная, 15
- Функция-индикатор, 6
- Характеристическая функция, 6