Лекции по функану

@noname

4 семестр

Содержание

Нормированные пространства.Банаховы пространства.

Несколько вводных определений:

Определение 1. Линейное пространство L(над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *нормированным*, если на нём существует норма.

Определение 2. Нормированное пространство $(X,||.||)$ называется *Банаховым*, если оно полное относительно $||.||$ (Метрика задаётся нормой: $\rho(x,y) := ||x-y||$)

Определение 3. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность($\{x_n\}$, такая что $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \rho(x_n,x_m) < \varepsilon, \forall n,m > N$) в нём сходится.

Примеры:

- $\mathbb{R}^n$,$||x||_2 = \sqrt{\Sigma_{k=1}^n x_k^2}$, $||x||_\infty = max\{|x_k|,k = 1...n\}$
- То же самое для $\mathbb{C}^n(||z||_2 = \sqrt{\Sigma_{k=1}^n |z_k|^2})$
- $C([a,b]),a,b \in \mathbb{R}$ - множество непрерывных функций на отрезке. $||f||_\infty = max_{x\in[a,b]}|f(x)|,||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx$
- $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\},D(\mathbb{D}) = \{f \in Hol(\mathbb{D}) : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \sqrt{\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 d\lambda_2(z)} < +\infty\}$, тогда интеграл под корнем - полунорма, т.к. константы обнуляются.
- $C^1([a,b]),p(f) := max_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ - полунорма, т.к. константы обнуляются.
- $\mathcal{P}[x] = \{\Sigma_{k=0}^n \lambda_k x^k, \lambda_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in [0,1]\}$-линейное пространство многочленов, $||f|| := max_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Но пространство не полно - произвольные функции можно приближать многочленами.

Определение 4. Пусть в линейном протсрантсве X заданы нормы $||.||,||.||_*$ - они называются *эквивалентными*, если $\exists C_1,C_2 : C_1||x|| \le ||x||_* \le C_2||x||$

Пример: в $\mathbb{R}^n$ $||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty$

Утверждение 1. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Примечание. В бесконечномерном пространстве есть контрпример — в $C([a,b]) : ||.||_\infty \not\backsimeq ||.||_1$

Доказательство. Пусть X — n-мерное линейное пространство над $\mathbb{R}$, покажем что $||.|| \backsimeq ||.||_2 (||x||_2 = \sqrt{\Sigma_{k=1}^n x_k^2}$, где $x = \Sigma x_k e_k$, $\{e_k\}$ - базис)

- $||x|| = ||\Sigma x_k e_k|| \le |x_k|||e_k|| \le \sqrt{\Sigma x_k^2}\Sigma||e_k|| = ||x||_2 \cdot c_2$, константой сверху оценили.
- Покажем, что $f(x) := ||x||,f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция. Действительно, $|f(x) - f(y)| = |||x|| - ||y||| \le ||x - y|| \lesssim ||x - y||_2$(меньше с точностью до домножения на константу), причём, если $||x||_2 = 1$, то $f(x) > 0$(т.к. 0 по определению любой нормы принимается только в 0).

  Тогда на $S = \{||x||_2 = 1\}$ есть непрерывная положительная функция f, которая должна достигать минимум > 0, в $x_0 \in S$. Стало быть $\forall x \in S||x|| \ge ||x_0|| =: c_1$.

  $\forall x \ne 0||x|| = ||x||_2 \cdot ||\frac{x}{||x||_2}|| \ge ||x||_2 \cdot c_1$, т.к. $\frac{x}{||x||_2} \in S$. Таким образом оценили константой внизу.

□

Определение 5. Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ — система элементов ЛНП(линейное нормированное пространство) X. Она называется *полной*, если $\overline{span}\{x_i\} = X$($span$ - выпуклая оболочка, черта - замыкание), т.е. $\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists x_{i_1},...x_{i_n}; \lambda_1,...\lambda_n : ||x - \Sigma\lambda_k x_{i_k}|| < \varepsilon$.

Определение 6. ЛНП X *сепарабельно*, если в нём существует счётная полная система элементов.

Примеры:

- $C([a,b]) = \overline{span}\{1,x,x^2,...\}$
- $l^\infty = \{(z_1,z_2,...z_k,...); z_k \in \mathbb{C}, sup_k|z_k| < +\infty\}, |z| = sup_k|z_k|$ — несепарабельно

Определение 7. Пусть X,X_* — ЛНП, тогда X_* называется пополнением X, если в X_* существует подпространство X', изоморфное X, при этом X' - *плотно* в X_*(любая окрестность в X_* содержит точку из X')

Теорема 1. *Любое ЛНП X имеет пополнение*

Примечание. Любое метрическое пространство X имеет пополнение.(по клику - ссылка на док-во в википедии)

Доказательство. Введём метрику $\rho(x,y) = ||x - y||$. Построим метрическое пополнение X_*. Осталось ввести на X_* линейные операции и норму.

Пусть $x_*,y_* \in X_*$. Если $x_* = [\{x_n\}], y_* = [\{y_n\}]$, то определим $x_*+y_* := [\{x_n+y_n\}], \lambda x_* := [\{\lambda x_n\}]$

Норму же определим, как $||x_*||_* := \lim_{n\to\infty} ||x_n||$(легко проверить, что не зависит от выбора последовательности) Несложно проверить, что это действительно норма. □

Линейные операторы

Определение 8. ЛНП X,Y; Пусть $f : X \to Y$; $\mathrm{Dom} f$ — область определения f, $\mathrm{Range} f$ — область значений f, $\mathrm{Ker} f$ — ядро.

f — линейный оператор, если $Dom f$ — линейное подпространство X, а f — линейная функция.

Определение 9. Пусть $f : X \to Y$ — линейный оператор. Он *ограничен*, если образ любого ограниченного множества ограничен($\forall x \in M ||x|| < C$).

Определение 10. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность операторов, $f_n : X \to Y$. $\{f_n\}$ сходится на можестве $D \subset X$ к оператору f, если $D \subset Dom f_n$(и $Dom f$) $\forall n$, и $f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x) \forall x \in D$, что равносильно $\lim_{n\to\infty} ||f_n(x) - f(x)||_Y = 0$.

Определение 11. $\{f_n\}$ сходится равномерно к $f, f_n \rightrightarrows f$, если $\lim_{n\to\infty} sup_{x\in D}||f_n(x) - f(x)||_Y = 0$.

Примеры:

- Id;
- $X = C([0,1]), A(f(x)) := xf(x), DomA = X, RangeA \neq C([0,1])$;
- $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, умножение на матрицу $n \times m, DomM = \mathbb{R}^n, RangeM$ — разное, зависит от ранга матрицы;

- $X = C([0,1]), A : f \to \frac{\partial}{\partial x} f, DomA = X, KerA = const$

Обозначение: $L(X,Y) = \{$ограниченные линейные операторы $f : X \to Y, Domf = X\}$

Утверждение 2. $A \in L(X,Y)$ непрерывен $\Leftrightarrow A$ непрерывен в 0.

Доказательство. $x_0 \in DomA, x \to x_0, A(x) \to A(x_0) \Leftrightarrow A(x - x_0)$ при $(x - x_0) \to 0$. □

Утверждение 3. Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор, ограниченный на единичном шаре, тогда A — ограниченный оператор.

Доказательство. Пусть $E \subset DomA$, E — ограничено, тогда $\exists R : ||x|| \le R \forall x \in E$, а тогда $||A(x)|| = R \cdot R||A(\frac{x}{R})|| \le CR$. □

Определение 12. Пусть $A : X \to Y$, *норма оператора* A:
$||A|| := sup_{||x|| \le 1} ||A(x)||_Y, x \in DomA$

Из предыдущего утверждения следует, что A — ограниченный$\Leftrightarrow ||A|| < +\infty$. Также не сложно убедиться в том, что это действительно норма.

Далее следует довольно простых утверждений, почти все из которых доказывались на матане, поэтому пока что они без доказательств

Утверждение 4. Линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен $\Leftrightarrow \exists C > 0 : ||A(x)|| \le C||x|| \forall x \in DomA$

Утверждение 5. $||A|| = sup_{||x||=1} ||A(x)|| = sup_{||x|| \ne 0} \frac{||A(x)||}{||x||}, x \in DomA$

Следствие. $||A(x)|| \le ||A|| \cdot ||x||, x \in DomA$

Следствие. Если A — ограничен, то A — непрерывен.(т.к.$||A(x) - A(x_0)|| \le ||A|| \cdot ||x - x_0||$)

Утверждение 6. Пусть $DomA = X$, тогда A — ограничен $\Leftrightarrow$ A — непрерывен в 0

Доказательство. В одну сторону уже доказали в следствии выше.

В обратную сторону — пусть A непрерывен в 0, но не ограничен(а значит, и не ограничен на единичном шаре), тогда $\exists \{x_n\} : ||x_n|| \le 1, A(x_n) \ge n \Rightarrow ||A(\frac{x_n}{n})|| \ge 1$.

Тогда $||\frac{x_n}{n}|| \to 0$, но $||A(\frac{x_n}{n})|| \nrightarrow 0$. □

Теорема 2. *Пусть $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор, $DomA$ плотно в X; Y — банахоово. Тогда $\exists A' : X \to Y, DomA' = X, A'|_{DomA} = A, ||A'|| = ||A||$*

Доказательство. Пусть $x \in X, x \notin DomA$, хотим определить $A'(x)$. $DomA$ плотно в $X \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset DomA : x_n \to x$

$||A(x_n) - A(x_m)|| \le ||A|| \cdot ||x_n - x_m|| \Rightarrow \{A(x_n)\}$ — последовательность Коши $\Rightarrow \exists a := \lim A(x_n)$, тогда положим $A'(x) = a$. Осталось проверить все свойства:

- корректность — $||z - \widetilde{z}|| \le ||z - A(x_n)|| + ||A(x_n) - A(\widetilde{x_n})|| + ||\widetilde{z} - A(\widetilde{x_n})||$
- линейность — предел линеен
- норма — очевидна не уменьшилась, но и не увеличилась, т.к. предел сохраняет неравенства, а значит $||A'(x)|| \le ||A|| \cdot ||x|| \Rightarrow ||A'|| \le ||A||$

□

Теорема 3. *$L(X,Y)$ — ЛНП, кроме того, если Y — банахово, то и $L(X,Y)$ тоже банахово.*

Доказательство. Покажем, что если A,B — лоо(линейные ограниченные операторы), $DomA = DomB = X$, то $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ — лоо. Линейность очевидна, ограниченность: $||\lambda_1 A(x) + \lambda_2 B(x)|| \leq (|\lambda_1| \cdot ||A|| + |\lambda_2| \cdot ||B||)||x||$. Таким образом, мы показали линейность пространства, нормированность уже знаем, осталось показать банаховость(сходимость фундаментальных последовательностей):

Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная последовательность $||A_{m+n}(x) - A_n(x)|| \leq ||A_{m+n} - A_n|| \cdot ||x||$, где $||A_{m+n} - A_n|| \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow \{A_n(x)\}$ — фундаментальна. Y — полно $\Rightarrow \exists \lim A_n(x), \forall x \in X. A(x) := \lim A_n(x)$

Линейность A следует из линейности предела. Покажем ограниченность:

$||A_n(x)|| \leq ||A_n|| \cdot ||x|| \leq C \cdot ||x|| \Rightarrow ||A(x)|| \leq C \cdot ||x||$. □

Теорема 4 (*Хан-Банах*). *Пусть p — однородно выпуклый функционал, $p : X \to \mathbb{R}, X$ — вещественное ЛНП, пусть X_0 — линейное подпространство X. Если A_0 — линейный функционал, заданный на X_0, т.ч.*

$A_0(x) \leq p(x), x \in X_0$, то тогда сущесвтует функционал $A : X \to \mathbb{R}$, линейный, $A(x) \leq p(x), x \in X, A|_{X_0} = A_0$.

Определение 13. *Функционал* на ЛНП X есть отображение $X \to \mathbb{R}$

Определение 14. Функционал однородно выпуклый, если:

- $p(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tp(x_1) + (1-t)p(x_2), 0 \leq t \leq 1, x_1, x_2 \in X$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x), x \in X, \lambda > 0$.

Предметный указатель