Optimisation Linéaire - Contrôle Court du 11 Mars 2020

CORRIGE PARTIEL : Exercices 2 et 3

Question 2. Mettez V pour vrai ou F pour faux dans chaque case correspondant à l'affirmation qui la suit.

- ☐ **FAUX** La solution optimale d'un problème linéaire, si elle existe, est unique.
- ☐ **FAUX** Tout PL dont la domaine de réalisabilité est non-vide, a au moins une solution optimale.
- ☐ **VRAI** Un PL *borné* défini sur une domaine non vide est forcément réalisable.
- ☐ **FAUX** Les solutions réalisables des PL correspondent aux sommets de leurs domaines réalisables.
- ☐ **VRAI** Un PL défini sur une domaine non vide est forcément réalisable.
- ☐ **FAUX** Les variables d'écart peuvent devenir positif, nul ou négatif au cours de la résolution.
- ☐ **VRAI**. Il faut ajouter une variable d'écart par contrainte du PL (hormis les contraintes de signe des variables originelles).
- ☐ **FAUX** Si le coefficient d'une variable est nul dans la fonction objectif donnée, on peut l'ignorer pendant la résolution.
- ☐ **VRAI**. Au cours de la résolution d'un PL par l'algorithme Simplexe, une variable sortante peut rentrer dans la base plus tard.
- ☐ **FAUX** Un sommet de la domaine de définition est un point qui satisfait à l'égalité toutes les contraintes du PL.

Question 3. Un orfèvre dispose de 400 grammes d'or (Au), 100 g d'argent (Ag), 80 g de cuivre (Cu) et de 2 g de rhodium (Rh). Avec ces métaux il peut fabriquer des bijoux en or jaune, or vert, or rose ou or blanc. La composition en pourcentage ainsi que son prix de vente unitaire (en euro/gramme) sont indiqués ci-dessous pour chaque alliage.

Alliage	Au	Ag	Cu	Rh	Prix
Or jaune	75	15	10	0	100
Or vert	75	25	0	0	110
Or rose	70	5	25	0	95
Or blanc	80	18	0	2	130

Grâce aux ventes précédentes, l'orfèvre décide que l'or jaune ne doit pas être moins que la moitié de sa production, et l'or blanc ne doit pas dépasser la quantité de l'or vert.

Modéliser le plan de production en divers alliages pour maximiser le revenu de l'orfèvre.

CORRIGE :
On demande le plan de production en divers alliages pour maximiser le revenu. Par conséquent, les variables du problème sont les quantités d'or jaune, vert, rose et blanc (x_j, x_v, x_r, x_b) et le problème est une maximisation. Le revenu consiste en ce que l'on gagne par la vente des bijoux en différents alliages d'or. Il n'existe aucune référence aux éventuels frais. Alors le revenu est composé exclusivement de l'argent que les ventes apportent.

$$\text{Fonction objectif :} \qquad \max \ 100\ x_j \ + \ 110\, x_v \ + 95\, x_r \ + \ 130\, x_b$$

Les quantités disponibles en métaux qui entrent aux alliages constituent des contraintes limitatives sur la production.

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Quantité d'or :} & 0.75\, x_j & + & 0.75\, x_v & + & 0.70\, x_r & + & 0.80\, x_b & \leq & 400 \\
\text{Quantité d'argent :} & 0.15\, x_j & + & 0.25\, x_v & + & 0.05\, x_r & + & 0.18\, x_b & \leq & 100 \\
\text{Quantité de cuivre :} & 0.10\, x_j & & & + & 0.25\, x_r & & & \leq & 80 \\
\text{Quantité de rhodium :} & & & & & & + & 0.02\, x_b & \leq & 2
\end{array}$$

La contrainte sur la quantité de l'or jaune qui ne doit pas être moins que la moitié de la production on peut écrire de façon équivalente

$$\begin{array}{lll}
x_j \ \geq \ (\ x_j \ + \ x_v \ + \ x_r \ + \ x_b\ )\ /\ 2 & & \text{ou} \\
x_j \ \geq \ \qquad x_v \ + \ x_r \ + \ x_b & & \text{ou encore} \\
\qquad -x_j \ + \ x_v \ + \ x_r \ + \ x_b & & \leq \ 0
\end{array}$$

et la contrainte qui existe entre les quantités de l'or blanc et de l'or vert est simplement

$$x_b \ \leq \ x_v$$

ou en forme habituelle

$$-\ x_v \ + \ x_b \ \leq \ 0 \ .$$

Naturellement toutes les variables sont non-négatives :

$$x_j \ , \ x_v \ , \ x_r \ , \ x_b \ \geq \ 0 \ .$$

Question 3.bis Un orfèvre dispose de 300 grammes d'or (Au), 80 g d'argent (Ag), 90 g de cuivre (Cu) et de 4 g de rhodium (Rh). Avec ces métaux il peut fabriquer des bijoux en or jaune, or vert, or rouge ou or noir. Les compositions de ces alliages en pourcentage ainsi que leur prix de vente unitaire (en euro/gramme) sont indiqués ci-dessous.

Alliage	Au	Ag	Cu	Rh	Prix
Or jaune	70	17	13	0	105
Or vert	75	25	0	0	115
Or rouge	70	0	30	0	95
Or noir	80	16	0	4	130

Grâce aux ventes précédentes, l'orfèvre décide que l'or jaune ne doit pas être plus que 60% de sa production, et l'or noir ne doit pas dépasser la quantité de l'or vert.

Modéliser le plan de production en divers alliages pour maximiser le revenu de l'orfèvre.

CORRIGE :
Le plan de production concerne les quantités des alliages utilisés pour fabriquer des bijoux, par conséquent les variables du problèmes sont ces quantités en gramme : x_j, x_v, x_r, x_n. L'objectif est de maximiser le revenu que procure la vente des bijoux faits de ces alliages.

Les quantités de métaux que l'on dispose (l'or, l'argent, le cuivre et le rhodium) et les relations entre les quantités de l'or jaune et la production entière d'une part et entre la quantité de l'or noir et celle de l'or vert d'autre part constituent les contraintes du problème.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcr}
\text{Fonction objectif :} & \max & 105\ x_j & + & 115\ x_v & + & 95\ x_r & + & 130\ x_n & & \\
\text{Quantité d'or :} & & 0.70\, x_j & + & 0.75\, x_v & + & 0.70\, x_r & + & 0.80\, x_n & \leq & 300 \\
\text{Quantité d'argent :} & & 0.17\, x_j & + & 0.25\, x_v & & & + & 0.16\, x_n & \leq & 80 \\
\text{Quantité de cuivre :} & & 0.13\, x_j & & & + & 0.30\, x_r & & & \leq & 90 \\
\text{Quantité de rhodium :} & & & & & & & + & 0.04\, x_n & \leq & 4 \\
\text{Or jaune / production :} & & 0.40\, x_j & - & 0.60\, x_v & - & 0.60\, x_r & - & 0.60\, x_n & \leq & 0 \\
\text{Or vert / Or noir :} & & & - & x_v & & & + & x_n & \leq & 0 \\
\text{Non-négativité des variables :} & & & & \multicolumn{3}{c}{x_j\ ,\ x_v\ ,\ x_r\ ,\ x_n} & & & \geq & 0
\end{array}
$$