le cnam
Alsace 2013 – 2014

RCP104
Optimisation en Informatique

Chapitre 6: Méthodes des coupes

Dr. Nazih OUWAYED
nazih.ouwayed@gmail.com
http://nouwayed.yolasite.com

Sommaire

le cnam
Alsace

- Introduction
- Méthodes de résolution
- Méthode des coupes de Gomory
- Exemple

Introduction (1/3)

le cnam Alsace

- Problème de programmation linéaire en nombres entiers

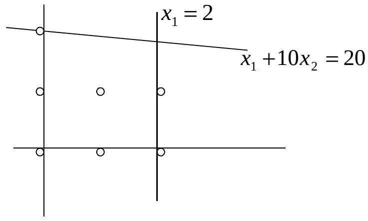
$$(P)\ \text{Min}\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{S.C.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,\cdots,m$$
$$x_j \geq 0,\ \text{entier} \quad j = 1,\cdots,n$$

- $F(P)$ = domaine réalisable de P
- $(\overline{P})$ dénote le problème (P) où les contraintes d'intégralité sur les variables sont rélaxées

$$x_j \geq 0,\ \cancel{\text{entier}}$$

- **Exemple**

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = -x_1 - 5x_2 \\ \text{S.C.} & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{entier} \end{array}$$



$$F(P) = \{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2)\}$$

Introduction (2/3)

le cnam Alsace

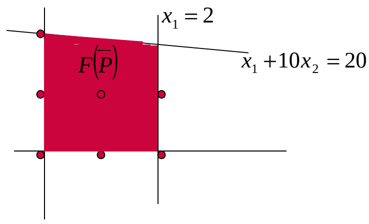
- Problème de programmation linéaire en nombres entiers

$$(\overline{P})\ \text{Min}\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{S.C.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,\cdots,m$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1,\cdots,n$$

- $F(\overline{P})$ = domaine réalisable de $\overline{P}$
- $(\overline{P})$ dénote le problème (P) où les contraintes d'intégralité sur les variables sont rélaxées

- **Exemple**

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = -x_1 - 5x_2 \\ \text{S.C.} & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Introduction (3/3)

le cnam
Alsace

- Problème de programmation linéaire en nombres entiers

$$(\overline{P})\ \text{Min}\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{S.C.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \cdots, n$$

- Résolution du problème

Pourquoi pas résoudre le problème relaxé et arrondir la solution?

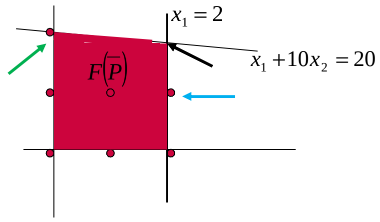
- **Exemple**

$$\text{Min} \quad z = -x_1 - 5x_2$$

$$\text{S.C.} \quad x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Solution du problème relaxé: (2, 1.8) et z = - 11

Solution arrondie: (2, 1) et z = - 7

Or (0, 2) est réalisable avec z = -10

Méthodes de résolution (1/2)

le cnam
Alsace

- **Principe de base**

Générer un ensemble de contraintes linéaires que nous ajoutons à (P)

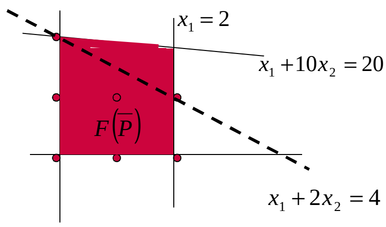
- **Exemple**

$$\text{Min} \ \ z = -x_1 - 5x_2$$

$$\text{S.C.} \ \ x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \qquad \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{entiers}$$



Méthodes de résolution (2/2)

le cnam Alsace

- **Principe de base**

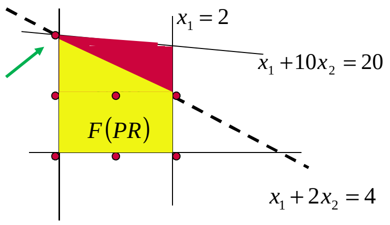
  Générer un ensemble de contraintes linéaires que nous ajoutons à (P) pour engendrer un nouveau problème (PR) tel que

  $$F\left(\overline{PR}\right) \subset F\left(\overline{P}\right)$$
  $$F\left(PR\right) = F\left(P\right)$$

  De plus en résolvant le problème relaxé $\overline{PR}$, la solution optimale est entière et donc une solution optimale pour (P)

- **Exemple**

  $$\begin{aligned} &\text{Min } z = -x_1 - 5x_2 \\ &\text{S.C. } x_1 + 10x_2 \le 20 \\ &\quad x_1 \le 2 \\ &\quad \boxed{x_1 + 2x_2 \le 4} \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0, \text{entiers} \end{aligned}$$



Solution (0, 2) est optimale avec z = -10

Méthode des coupes de Gomory

le cnam Alsace

- **Principe**

  Introduire de **nouvelles contraintes linéaires** au problème pour réduire le domaine réalisable du problème relaxé sans pour autant éliminer de points entiers du domaine réalisable

- **Procédure**

  La procédure consiste à **résoudre une suite de problèmes relaxés** jusqu'à ce qu'une solution optimale en nombres entiers soit obtenue

  Un problème de la suite est obtenu du précédent en lui ajoutant une **contrainte linéaire (coupe)** supplémentaire

Procédure de la méthode des coupes (1/6)

le cnam Alsace

- Considérer le problème en programmation linéaire en nombre entiers suivant :

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{S.C.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0, \ \text{entier} \qquad j = 1, \cdots, n$$

Voyons comment construire une coupe de Gomory.
Soit B une base optimale de $(\overline{P})$, et x_k la variable de base dans la i ième ligne du tableau optimal prenant une valeur qui n'est pas entière.

Procédure de la méthode des coupes (2/6)

le cnam Alsace

- Considérer le problème en programmation linéaire en nombre entiers suivant :

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{S.C.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0, \ \text{entier} \qquad j = 1, \cdots, n$$

Variables dépendantes	$x_1 \ x_2 \cdots x_r \cdots x_m \ x_{m+1} \cdots x_s \cdots x_n \ -z$	Termes de droite
x_1	$1 \qquad \bar{a}_{1m+1} \cdots \bar{a}_{1s} \cdots \bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
x_2	$1 \qquad \bar{a}_{2m+1} \cdots \bar{a}_{2s} \cdots \bar{a}_{2n}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\ddots \qquad \ddots \quad \ddots$	$\vdots$
x_r	$1 \qquad \bar{a}_{rm+1} \cdots \bar{a}_{rs} \cdots \bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\ddots \qquad \ddots \quad \ddots$	$\vdots$
x_m	$1 \qquad \bar{a}_{mm+1} \cdots \bar{a}_{ms} \cdots \bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$
$-z$	$\bar{c}_{m+1} \cdots \bar{c}_s \cdots \bar{c}_n \quad 1$	$\bar{z}$

La ligne correspondante du tableau est de la forme:

$$x_k + \sum_{j \in J} t_{ij} x_j = \bar{b}_i \qquad (1)$$

où $J = \{ j : j \text{ est l'indice d'une variable hors base} \}$ et

$\bar{b}_i$ n'est pas entier.

Procédure de la méthode des coupes (3/6)

le cnam Alsace

La ligne correspondante du tableau est de la forme:

$$x_k + \sum_{j \in J} t_{ij} x_j = \bar{b}_i \qquad (1)$$

où $J = \{ j : j \text{ est l'indice d'une variable hors base} \}$ et

$\bar{b}_i$ n'est pas entier.

Dénotons $\lfloor d \rfloor =$ le plus grand entier (plancher) $\leq d$.
Puisque $x_j \geq 0 \ \forall j$, alors

$$\sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \sum_{j \in J} t_{ij} x_j$$

exemples: $1.1 \rightarrow 1,\ 1.8 \rightarrow 1$

et par conséquent

$$x_k + \sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \bar{b}_i. \qquad (2)$$

Procédure de la méthode des coupes (4/6)

le cnam Alsace

La ligne correspondante du tableau est de la forme :

$$x_k + \sum_{j \in J} t_{ij} x_j = \bar{b}_i \qquad (1)$$

où $J = \{ j : j \text{ est l'indice d'une variable hors base} \}$ et

$\bar{b}_i$ n'est pas entier.

Si nous considérons la contrainte d'intégralité des variables x_j, il découle de (2) que

$$x_k + \sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor \qquad (3)$$

Ainsi toute solution de (P) satisfait (3).

Dénotons $\lfloor d \rfloor =$ le plus grand entier (plancher) $\leq d$.
Puisque $x_j \geq 0 \ \forall j$, alors

$$\sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \sum_{j \in J} t_{ij} x_j$$

et par conséquent

$$x_k + \sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \bar{b}_i. \qquad (2)$$

Considérons maintenant la relation obtenue en faisant le différence entre (3) et (1) :

$$\sum_{j \in J} \left(\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij} \right) x_j \leq \left(\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i \right) \qquad (4)$$

Notons que

$$\left(\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij} \right) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i \right) < 0$$

Puisque toute solution de (P) satisfait (1) et (3), alors elle satisfait (4), et son introduction dans (P) n'élimine aucune solution de (P).

Procédure de la méthode des coupes (5/6)

le cnam Alsace

Considérons maintenant la relation obtenue en faisant le différence entre (3) et (1) :

$$\sum_{j\in J}\left(\lfloor t_{ij}\rfloor - t_{ij}\right)x_j \le \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right) \qquad (4)$$

Notons que

$$\left(\lfloor t_{ij}\rfloor - t_{ij}\right)\le 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right)< 0$$

Puisque toute solution de (P) satisfait (1) et (3), alors elle satisfait (4), et son introduction dans (P) n'élimine aucune solution de (P)

Procédure de la méthode des coupes (6/6)

le cnam Alsace

Pour poursuivre la résolution, il suffit d'introduire la contrainte

$$\boxed{\sum_{j\in J}\left(\lfloor t_{ij}\rfloor - t_{ij}\right)x_j \le \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right) \leftrightarrow \sum_{j\in J}\left(\lfloor t_{ij}\rfloor - t_{ij}\right)x_j + x_\tau = \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right)}$$

où x_τ est une variable d'écart avec coût nul, au dernier tableau du simplexe pour générer une solution de base au nouveau problème en considérant x_τ comme la variable de base dans la nouvelle ligne du tableau.

Cette solution de base n'est pas réalisable puisque $x_\tau = \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right) < 0$.

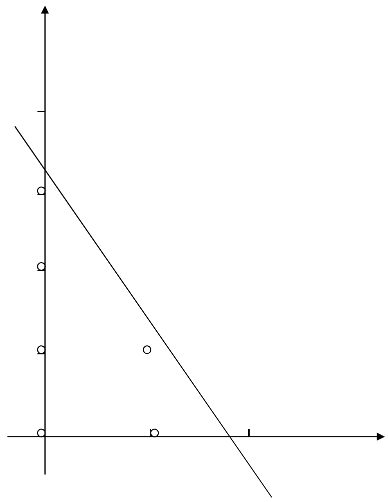
Il suffit de poursuivre la résolution avec l'algorithme dual du simplexe.

Exemple (1/5)

le cnam Alsace

Considérons le problème suivant

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -21x_1 - 11x_2 \\ \text{Sujet à} & 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0, \quad \text{entiers} \end{array}$$



Exemple (2/5)

Rappel : $\boxed{\sum_{j\in J}\left(\lfloor t_{ij}\rfloor - t_{ij}\right)x_j \le \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right) \leftrightarrow \sum_{j\in J}\left(\lfloor t_{ij}\rfloor - t_{ij}\right)x_j + x_\tau = \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right)}$

le cnam Alsace

Itération 1:

Solution de base optimal de $(\bar{P})$

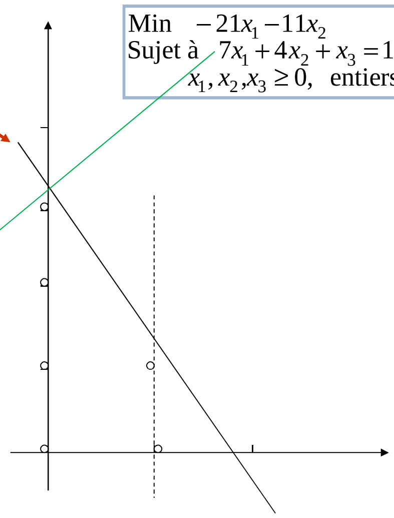
$$x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = \frac{13}{7}$$

valeur opt. $= -39$

Nouvelle contrainte:

$$\left(\left\lfloor\frac{4}{7}\right\rfloor - \frac{4}{7}\right)x_2 + \left(\left\lfloor\frac{1}{7}\right\rfloor - \frac{1}{7}\right)x_3 + x_4 = \left\lfloor\frac{13}{7}\right\rfloor - \frac{13}{7}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} & -21x_1 - 11x_2 \\ \text{Sujet à} & 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0, \quad \text{entiers} \end{array}}$$



Interprétation géométrique :

$$-\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 \le -\frac{6}{7} \Leftrightarrow -4x_2 - x_3 \le -6.$$

Or $x_3 = 13 - 7x_1 - 4x_2$. Ainsi

$$-4x_2 - 13 + 7x_1 + 4x_2 \le -6 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_1 \le 1}$$

Exemple (3/5)

le cnam Alsace

Itération 2 :

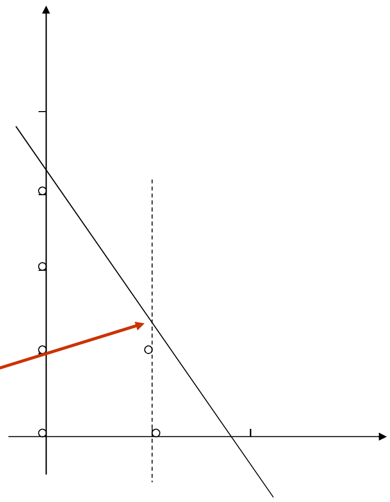
Résoudre le problème relaxé de

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad -21x_1 - 11x_2 \\
&\text{Sujet à} \quad 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13 \\
&\qquad -\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + x_4 = -\frac{6}{7} \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \ \text{entiers}
\end{aligned}
$$

Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_4 = 1 \\
&x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

valeur opt. $= -37\frac{1}{2}$



Exemple (4/5)

le cnam Alsace

Nouvelle contrainte à partir de la 2ième ligne $x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = \frac{3}{2}$:

$$\left(\left\lfloor\frac{1}{4}\right\rfloor - \frac{1}{4}\right)x_3 + \left(\left\lfloor-\frac{7}{4}\right\rfloor + \frac{7}{4}\right)x_4 + x_5 = \left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor - \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{j\in J}\left(\lfloor t_{ij}\rfloor - t_{ij}\right)x_j \leq \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right)$$

$$\updownarrow$$

$$\sum_{j\in J}\left(\lfloor t_{ij}\rfloor - t_{ij}\right)x_j + x_\tau = \left(\lfloor \bar{b}_i\rfloor - \bar{b}_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad -21x_1 - 11x_2 \\
&\text{Sujet à} \quad 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13 \\
&\qquad -\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + x_4 = -\frac{6}{7} \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \ \text{entiers}
\end{aligned}
$$

Interprétation géométrique

$-x_3 - x_4 \leq -2$

Substituons la valeur de x_4 tirée de la dernière contrainte ajoutée

$$-\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + x_4 = -\frac{6}{7}$$

pour obtenir

$$-x_3 - \frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{6}{7} \leq -2.$$

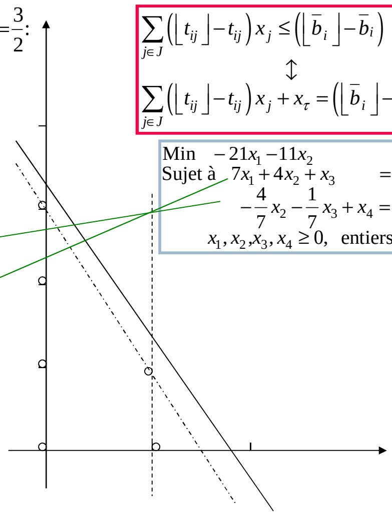
Substituons maintenant la valeur de x_3

$$x_3 = 13 - 7x_1 - 4x_2$$

pour obtenir

$$-\frac{8}{7}13 + 8x_1 + \frac{32}{7}x_2 - \frac{4}{7}x_2 + \frac{6}{7} \leq -2$$

$$\Leftrightarrow 8x_1 + 4x_2 \leq -2 + \frac{8}{7}13 - \frac{6}{7} \Leftrightarrow \boxed{2x_1 + x_2 \leq 3}$$



Exemple (5/5)

le cnam Alsace

Itération 3 :

Résoudre le problème

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & -21x_1 - 11x_2 \\
\text{Sujet à} \quad & x_1 + x_4 = 1 \\
& x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = \frac{3}{2} \\
& -\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \text{ entiers}
\end{aligned}$$

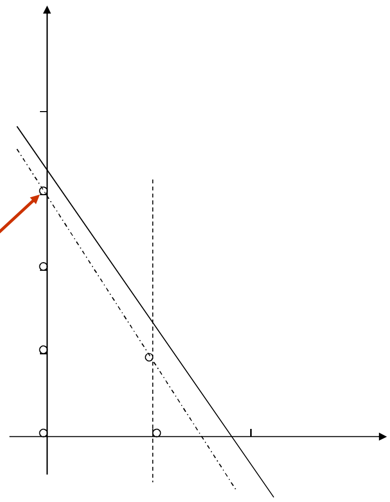
Nous obtenons

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_3 - x_5 &= 1 \\
2x_1 + x_2 + x_5 &= 3 \\
x_1 + x_4 &= 1
\end{aligned}$$

Donc solution optimale entière :

$x_1 = 0, \ x_2 = 3, \ x_3 = 1$

Valeur optimale $= -33$



Références

le cnam Alsace

- Modèles de recherche opérationnelle - Bernard Gendron, Université de montréal