1极限

数列的极限

（此处的数列都是无限数列）
设给定数列a_n，对于任意给定的ϵ,存在N>0，当n>N时，$|a_n-a|<\epsilon$，那么a是数列a_n的极限
1.ϵ是趋向于0的极小的数，不可大于某个整数，不能替换成$\epsilon+1$;
2.先有ϵ再决定N，数列的n是自然数，N可以是任何数，当n>N极限为a成立时，N+1,N+2等也会成立;
3.几何意义：a_n在区间$(a-\epsilon,a+\epsilon)$内有无限项，在区间外的有有限项
N的取值与ε的大小有关?
分析法证明数列的极限
重要极限：$lim_{n\rightarrow\infty}1/n^k=0$ (k>0，k是常数)
$lim_{n\rightarrow\infty}q^n=0$(q是常数，|q<1|)
$lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt[n]{a}=1$(a>0，是常数)
$lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt[n]{n}=1$
$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a^n}{n!}=0$(a是常数)
$lim_{n\rightarrow\infty}C=C$

数列极限的性质：

1.唯一性：如果数列有极限，那么它的极限一定只有1个;
2.有界性：收敛⇒有界;
3.保序性;
4.保号性(保正、保负）：若$lim_{n\rightarrow\infty}a_n=a>0$，对于任何$0<\eta<a$，存在$N$,当n>N时，$0<\eta<a_n$
5.四则运算：不能推广到无限项
重要结论：
$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+...+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+...+b_{m-1}n+b_m}$
当k>m，极限为∞;
当k<m，极限为0;
当k=m，极限为$\frac{a_0}{b_0}$

夹逼定理

$lim_{n\rightarrow\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

单调有界定理

有界且单调的数列一定有极限

子数列

从原数列中抽取的**无限项**组成的一个新数列。可以记作a_{n_k}
常取到2k或2k+1或2k-1这些项作为子数列
推论：子数列的极限存在不相等或者极限不存在，那么原数列也发散
如果原数列收敛，a_{2k}、a_{2k+1}极限存在且相等

函数的极限

极限的定义

函数极限的性质
ps：如果函数是分式，代入x_0有等于0的，可以先因式分解把等于0的部分先约掉
如果含有根号，可以先有理化，把等于0的约掉
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$

海涅定理

$f(x)$在x_0的某空心邻域有定义，则$lim_{x \to x_0} f(x)$存在的充要条件是对任何以x_0为极限且包含于x_0的邻域的数列$\{x_n\}$，极限$lim_{n \to \infty} f(x_n)$都存在且相等
极限不存在的充要条件：存在两个包含在x0邻域的子数列，两个子数列的极限是x0，两个子数列的函数值的极限存在且不相等；
存在子数列xn，极限为x0，子数列的函数值的极限不存在

无穷小与无穷大

无穷大的性质：1.两个无穷大的和不一定是无穷大，例：

函数的连续性

连续的定义：$f(x)$ 在x_0 的领域内有定义，且$f(x_0)$处的左右极限存在且等于$f(x_0)$，x_0是连续点 。
否则就是间断，x_0则是间断点
第一类间断点：左右极限存在
第一类间断点中，左右极限相等，称为**可去间断点**，
左右极限不相等称为**跳跃间断点**，
否则是**第二类间断点**：1.极限是无穷大时，**无穷间断点**；2.x->x_0，f(x)不断变动，**振荡间断点**
间断点的判断

- 1.没有定义的点；
- 2.极限不存在的；
- 3.左右极限存在，但不等于函数值。
  若$f(x)$是(a,b)的单调函数，$x_0 \in (a,b)$，若x_0为间断点，那x_0是跳跃间断点

连续函数的复合函数也是连续函数

初等函数在定义域内处处连续，要求某处极限时，可以直接代入函数值

(连续函数的四则运算). 设 $f(x), g(x)$都在x_0处连续, 则

- 1. $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在x_0处连续, 其中 α, β 为常数;
- 2.$f(x)g(x)$ 在x_0处连续;
- 3.当 $g(x_0)\neq 0$ 时, $f(x)/g(x)$ 在 x_0 处连续.

. 定义在区间 I 中的严格单调连续函数 fpxq 一定是可逆的, 且其 逆也是严格单调连续的.

闭区间上连续函数的性质:

- (有界性定理). 设$f(x)$为闭区间$[a,b]$上的连续函数, 则$f(x)$在$[a,b]$上有界.
- (最值定理). 设$f(x)$为闭区间$[a,b]$上的连续函数, 则$f(x)$在$[a,b]$上必取到最大值和最小值, 即存在 x_*,$x^* \in [a,b]$, 使得$f(x_*)\leq f(x)\leq f(x^*)$, 任意$x\in[a,b]$
- (零值定理, Bolzano)设 f(x) 为闭区间[a, b]上的连续函数, 且 f(a)f(b)<0, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 f(ξ)=0.
- (介值定理). 设 f(x)为[a, b]上的连续函数, μ 是严格介于f(a)和f(b)之间的数, 则存在$\xi\in[a,b]$, 使得 f(ξ)=μ.