- **希尔伯特空间**：系统的全部可能状态的**集合**叫做**状态空间**，若系统的状态可以用向量表示则可以称作**向量空间(线性空间)**，定义了内积的完备线性空间是**希尔伯特空间。**
- 向量空间(vector space)：记作C_n，由所有的n个复数元组$(z_1,...z_n)$组成的空间。向量空间的元素称为向量(vector)，可以通过矩阵表示$[z_1,...,z_n]^T$。
- Dirac符号：$|\cdot\rangle$与$\langle\cdot|$一起被称为Dirac符号。$|\psi\rangle$有时称为ket即为右矢，是向量的量子力学标准符号，$\langle\psi|$称为bra即为左矢。
- 向量空间的生成集（a spanning set）：是指一组能够通过线性组合表示向量空间内任意向量的集合。
- 线性相关：如果有一组非零向量，并且存在一组复数$a_1,...a_n$，至少有$a_i \neq 0$，使得$a_1|v_1\rangle + a_2|v_2\rangle + ... + a_n|v_n\rangle = 0$，则这组向量是线性相关。反之是线性无关。
- 线性算子：向量空间 V 和 W 之间的线性算子被定义为任何函数 A : V → W。

$$A(\sum_i a_i|v_i\rangle) = \sum_i a_i A(|v_i\rangle)$$

- 矩阵与线性算子是等价的：矩阵 A 与一个在C_n中的向量的矩阵相乘等价于将将向量空间 C_n 中的向量发送到向量空间 C_m（$A(\sum_i a_i|v_i\rangle) = \sum_i a_i A(|v_i\rangle)$）；线性算法用矩阵表示，$A^{nm}|v_j\rangle = \sum_i^n A_{ij}^{nm}|w_i\rangle$。
- Pauli matrices：

$$\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \sigma_x = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sigma_2 = \sigma_y = Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \sigma_z = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 内积(Inner products)：向量空间中的两个向量 $|v\rangle$ 和 $|w\rangle$ 作为输入并产生一个复数作为输出的函数，可以写成$(|v\rangle, |w\rangle)$，(·,·) 符号在本章中偶尔会很有用。

$$((y_1,...,y_n),(z_1,...,z_n)) = \sum_i y_i^* z_i = [y_1^* ... y_n^*] \begin{bmatrix} z_1 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{bmatrix}$$

- 内积性质：1、第二个元素具有线性。2、第一个元素具有共轭线性。3、共轭的内积，等于内积之间向量交换位置。4、同一元素的内积，范数大于0，仅当向量为0向量取等号。
- Gram-Schmidt procedure：用于制备正交基组。$|v_1\rangle = |w_1\rangle / \||w_1\rangle\|$

$$|v_{k+1}\rangle = \frac{|w_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^k \langle v_i|w_{k+1}\rangle|v_i\rangle}{\||w_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^k \langle v_i|w_{k+1}\rangle|v_i\rangle\|}$$

- 外积：是一种线性算法，可以表示为$|w\rangle\langle v|$。完整性关系：$\sum_i |i\rangle\langle i| = I$。
- 柯西-施瓦茨不等式：$|\langle v|w\rangle|^2 \leq \langle v|v\rangle\langle w|w\rangle$，证明过程：

$$
\begin{aligned}
\langle v|v\rangle\langle w|w\rangle &= \sum_i \langle v|i\rangle\langle i|v\rangle\langle w|w\rangle \\
&>= \frac{\langle v|w\rangle\langle w|v\rangle}{\langle w|w\rangle}\langle w|w\rangle \\
&= \langle v|w\rangle\langle w|v\rangle = |\langle v|w\rangle|^2
\end{aligned}
$$

- 特征值和特征向量：其中$A|v\rangle = v|v\rangle$，其中称$|v\rangle$为A的特征向量，v为A对应的特征值。
  特征函数：特征函数定义为$c(\lambda) \equiv det|A - \lambda I|$，其中 det 是矩阵的行列式函数
- 对角线表示：向量空间 V 上算子 A 的对角线表示是表示$A = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$，如果算子具有对角表示，则称它是可对角化的。
- 伴随算子或 Hermitian 算子：在 V 上存在一个唯一的线性算子 A†，使得对于所有向量 |v，|w ∈ V，$(|v\rangle, A|w\rangle) = (A\dagger|v\rangle, |w\rangle)$，Hermitian 共轭运算的作用是将 A 的矩阵转换为共轭转置矩阵$A\dagger \equiv (A^*)^T$。
- 投影(projector)矩阵：$P = \sum_{i=1}^k |i\rangle\langle i|$是子空间 W 上的投影，其中V 构造一个正交基 (|1 , . . . , |d) 使得 (|1 , . . . , |k) 是 W 的正交基。$A|i\rangle$即在A在i上的投影
- 正交补码：Q ≡ I - P，其中Q称作P的正交补码。
- 正规算子(normal)：如果 $AA\dagger = A\dagger A$，则称算子 A 是正规的(normal)。算子是**正规算子**当且仅当它是**可对角化**的。
- 酉矩阵，幺正矩阵：如果$U\dagger U = I$，则称矩阵 U 是酉的。
- 正定矩阵（positive）： 如果$(|v\rangle, A|v\rangle)$对于所有 $|v\rangle = 0$ 严格大于零，则我们说算子(矩阵)A 是正定的。
- 特征分解/谱分解（Spectral decomposition）：定理 2.1： （谱分解）向量空间 V 上的任何正规算子 M 相对于 V 的某个标准正交基是对角线的。 相反，任何可对角化的算子都是正规的。
- 张量积（Tensor product）：是一种将向量空间组合在一起以形成更大向量空间的方法，可以记作$V \otimes W$（读作“V 张量 W”），也可以叫做缩写符号 $|v\rangle|w\rangle$、$|v, w\rangle$甚至 $|vw\rangle$。
- Kronecker 乘积：A 是 m × n 矩阵，B 是 p × q 矩阵，Kronecker 乘积的方便矩阵表示张量积，矩阵表示如下：

$$
A \otimes B \equiv \left.\overbrace{\begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{bmatrix}}^{nq}\right\} mp\,. \qquad (2.50)
$$

- 算符函数（Operator functions）：给定一个从复数到复数的函数f，可以通过以下构造在正规矩阵（或某些子类，例如Hermitian矩阵）上定义一个对应的矩阵函数。
  例子如下：$e^{\theta Z} = \begin{bmatrix} e^\theta & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{bmatrix}$。
- 迹（trace）： 矩阵A 的迹被定义为其对角线元素的总和，$tr(A) = \sum_i A_{ii}$。
- 对易式和反对易式（commutes and anti-commutes）：对易式定义$[A, B] = AB - BA$，反对易子定义为$\{A, B\} = AB + BA$。如果 [A,B] = 0，即 AB = BA，则称 A 与 B 可对易的，如果 {A,B} = 0，我们说 A 与 B 是反对易的。
- 同时对角化定理（Simultaneous diagonalization theorem）：假设 **A 和 B 是 Hermitian 算子。** 那么 **[A,B] = 0** 当且仅当存在一个正交基使得 **A 和 B 都相对于该基是对角线。** 在这种情况下，我们说 A 和 B 同时可对角化。
- 极分解（The polar decompositions）：定理 2.3： （极分解）设 A 是向量空间 V 上的线性算子。则存在酉 U 和正定算子 J 和 K 使得$A = UJ = KU$。其中满足这些方程的唯一正定运算符 J 和 K 由 $J \equiv \sqrt{A\dagger A}$ 和 $K \equiv \sqrt{AA\dagger}$ 定义。 此外，如果 A 是可逆的，则 U 是唯一的。

- 奇异值分解（The singular value decompositions）：设A为方阵。然后存在酉矩阵 U 和 V，以及具有非负项的对角矩阵 D 使得$A = UDV$，**D 的对角线元素**称为 A 的**奇异值。**