AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

Calculo Integral

Actividad Evaluativa Eje 3 – Tarea - Ejercicios

Tutor: Miguel Angel Granados Peñaranda

in Enrique Bolaños García (202110 - 1A - 014)

Bogota D.C

Tabla de Contenidos

Introducción

El propósito del presente trabajo es proporcionar de manera explícita por medio de diferentes ejercicios aplicando las diferentes técnicas de integración aprendidas en las clases, referentes de aprendizaje y lecturas recomendadas del eje 2, todo esto con él fin de fortalecer y aplicar las diferentes técnicas de integración.

Ejercicio 1

1. Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de cada función:

a. $f(x) = x(x-2)$ y las rectas verticales dadas por: $x^2 = 1$

b. $f(x) = cosx$ y las rectas verticales dadas por: $x = \pm\pi$

c. $f(x) = x^2$ y la función dada por: $g(x) = -x^2 + 2$

Las rectas verticales son

$$x=-1,\ x=1$$

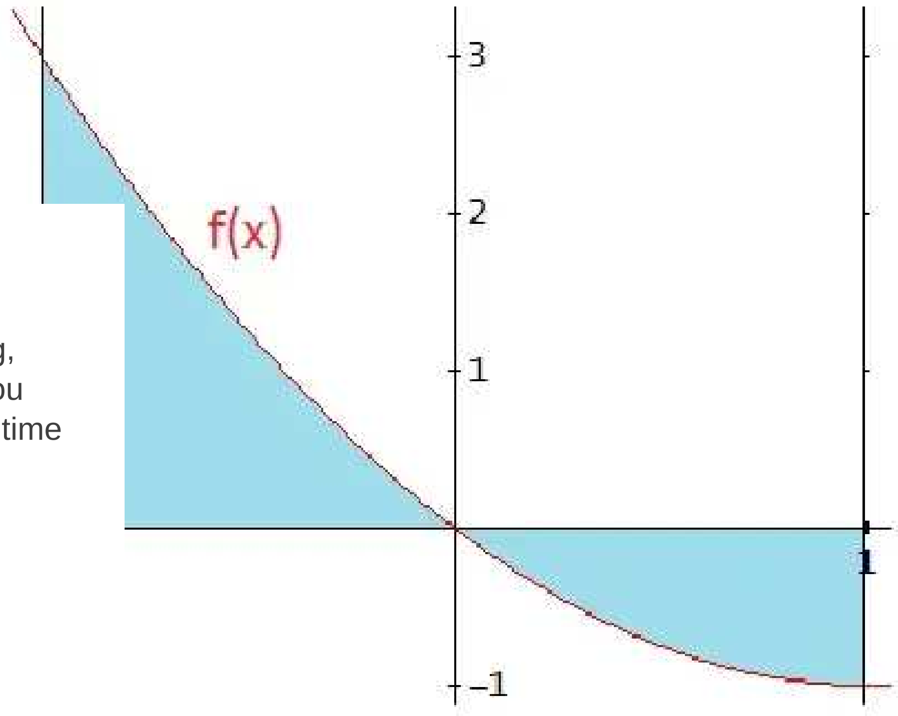
x=−1, x=1

Como tenemos que integrar la función f, es mejor desarrollar el producto:

$$f(x)=x(x-2)=x^2-2x$$

f(x)=x(x−2)=x2−2x

Representamos la gráfica y las rectas para ver si el eje horizontal divide la región:



...vide la región en dos (una sobre el eje y otra bajo
...calcular dos integrales. El resultado de la integral

correspondiente al área que está por debajo será negativo, por lo que tenemos que cambiar el signo (o escribir el valor absoluto).

Los intervalos de *x* de las regiones son:

$$[-1,0],\ [0,1]$$

Nota: el extremo 0 se calcula resolviendo la ecuación

$$f(x)=0$$

Estos intervalos son los extremos de las integrales.

La integral indefinida de *f* es

$$\int f(x)dx=\int (x^2-2x)dx=$$
$$=\int x^2dx-\int 2xdx=\frac{x^3}{3}-x^2$$

Calculamos las áreas calculando las integrales definidas mediante la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}=$$

$$=-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

del valor absoluto de los resultados obtenidos:

$$\left|\frac{4}{3}\right|+\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=$$

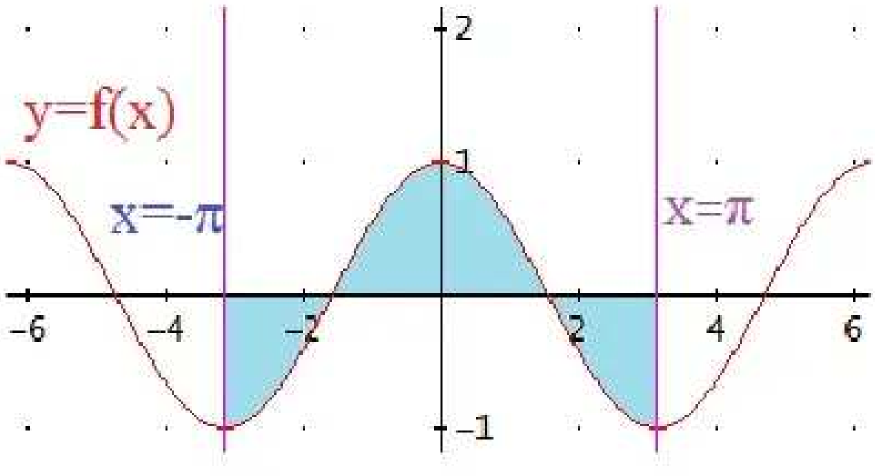
$$=\frac{6}{3}=2$$

Por tanto, el área de la región es 2.

B.

Representamos la gráfica de *f* y las dos rectas:

$x=-\pi,\ x=\pi$ $x=-\pi,\ x=\pi$



Tenemos tres regiones: una positiva (sobre el eje OX) y dos negativas (bajo el eje). Luego debemos calcular tres integrales definidas.

Los intervalos de integración son

$[-\pi,-\pi 2],\ [-\pi 2,\pi 2],\ [\pi 2,\pi]$ $[-\pi,-\pi 2],\ [-\pi 2,\pi 2],\ [\pi 2,\pi]$

La integral indefinida de *f* es

$=\int \cos(x)dx=\sin(x)$ $\int f(x)dx=\int \cos(x)dx=\sin(x)$

grales definidas en los tres intervalos:

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\pi/2} =$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(-\pi) =$$

$$= -1 - 0 = -1$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 1 - -1 = 2$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

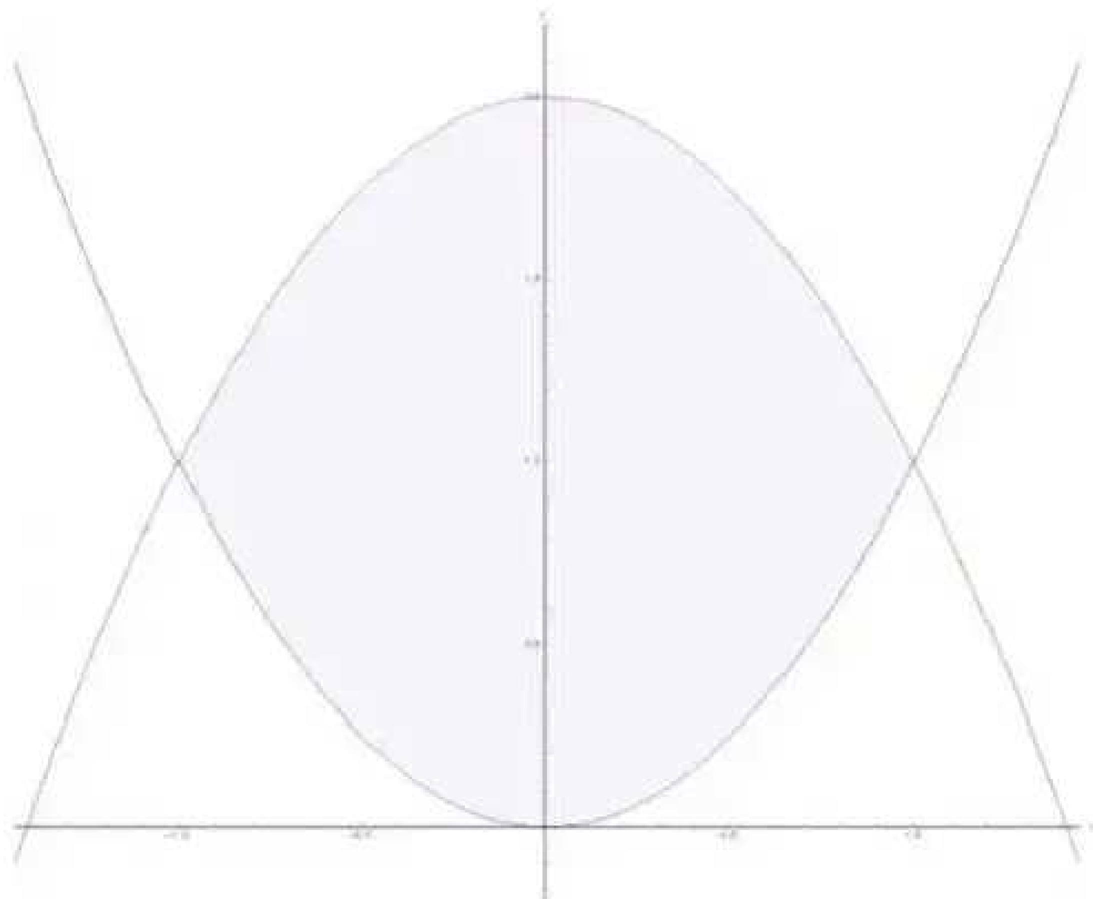
$$= 0 - 1 = -1$$

Por tanto, el área total es

$$|-1| + |2| + |-1| = 4$$

$$\int_{-1}^{1} x(x-2)\,dx=\int_{-1}^{1} x^2-2x\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{+1}=\frac{1}{3}x^3-x^2\Bigg|_{-1}^{+1}=\left(\frac{1}{3}(1)^3-(1)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2\right)=\left(\frac{1}{3}1-1\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)-1\right)=$$

Gráfica:



n del sólido que se genera al girar cada función sobre el
:.

s dadas por: x=0 y x= 4. Sobre el eje x

as x=0 y x=1. Sobre el eje x

=8. Sobre el eje y.

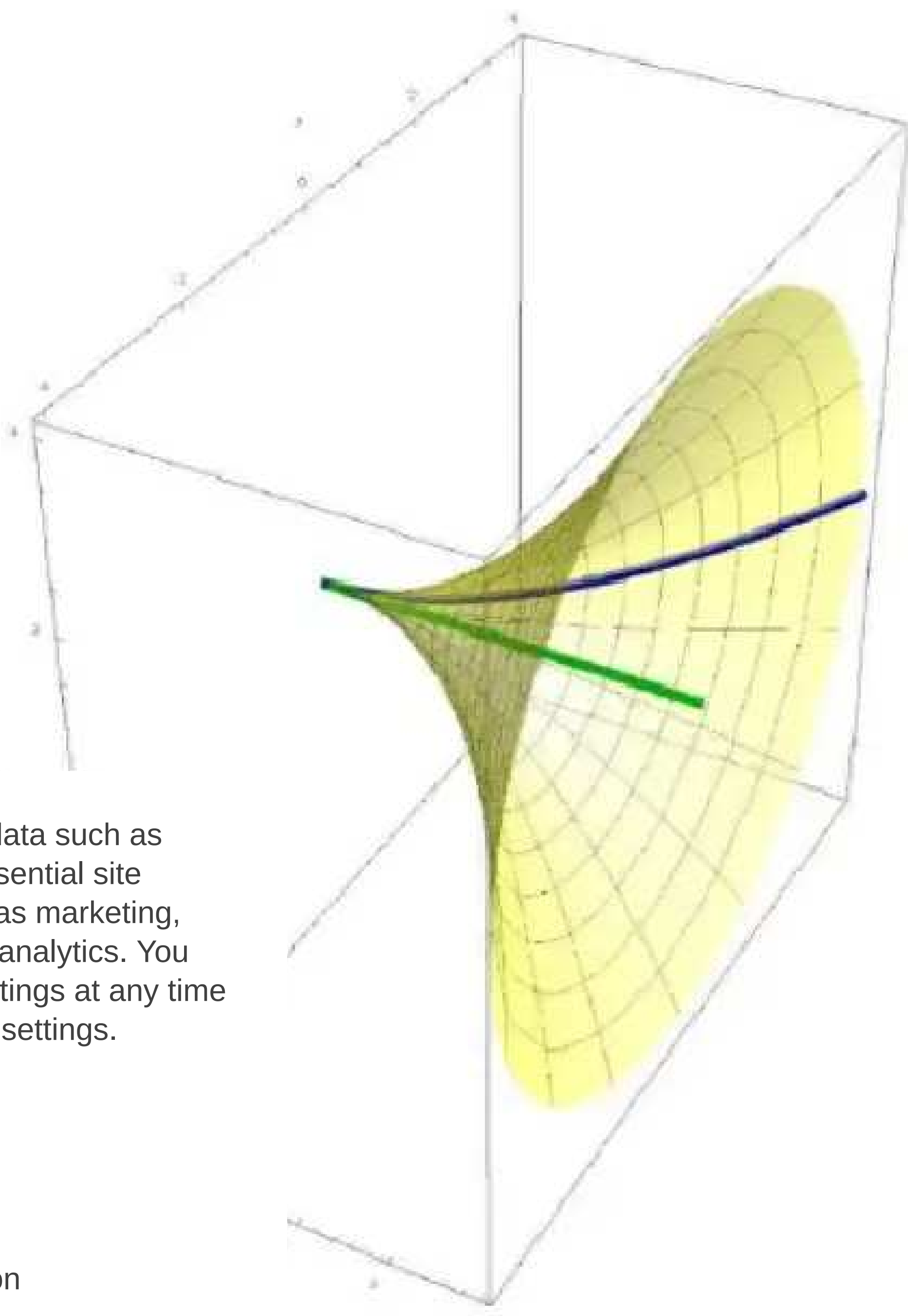
A

$a.\ y=\frac{x^2}{4}$ *con las rectas dadas por*: $x=0$ *y* $x=4$ *sobre el eje x*

Solución:

a. El volumen del sólido sobre el eje x es:

$$\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 \pi\, dx=\int_0^4 \frac{\pi x^4}{16}\, dx=\frac{\pi}{16}\int_0^4 x^4\, dx=\frac{\pi}{16}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^4=\frac{\pi}{80}x^5\Big|_0^4=\left(\frac{\pi}{80}(4)^5\right)-\left(\frac{\pi}{80}0^5\right)=\left(\frac{\pi}{80}(4)^5\right)-(0)=\frac{64\pi}{5}\approx 40.2124$$

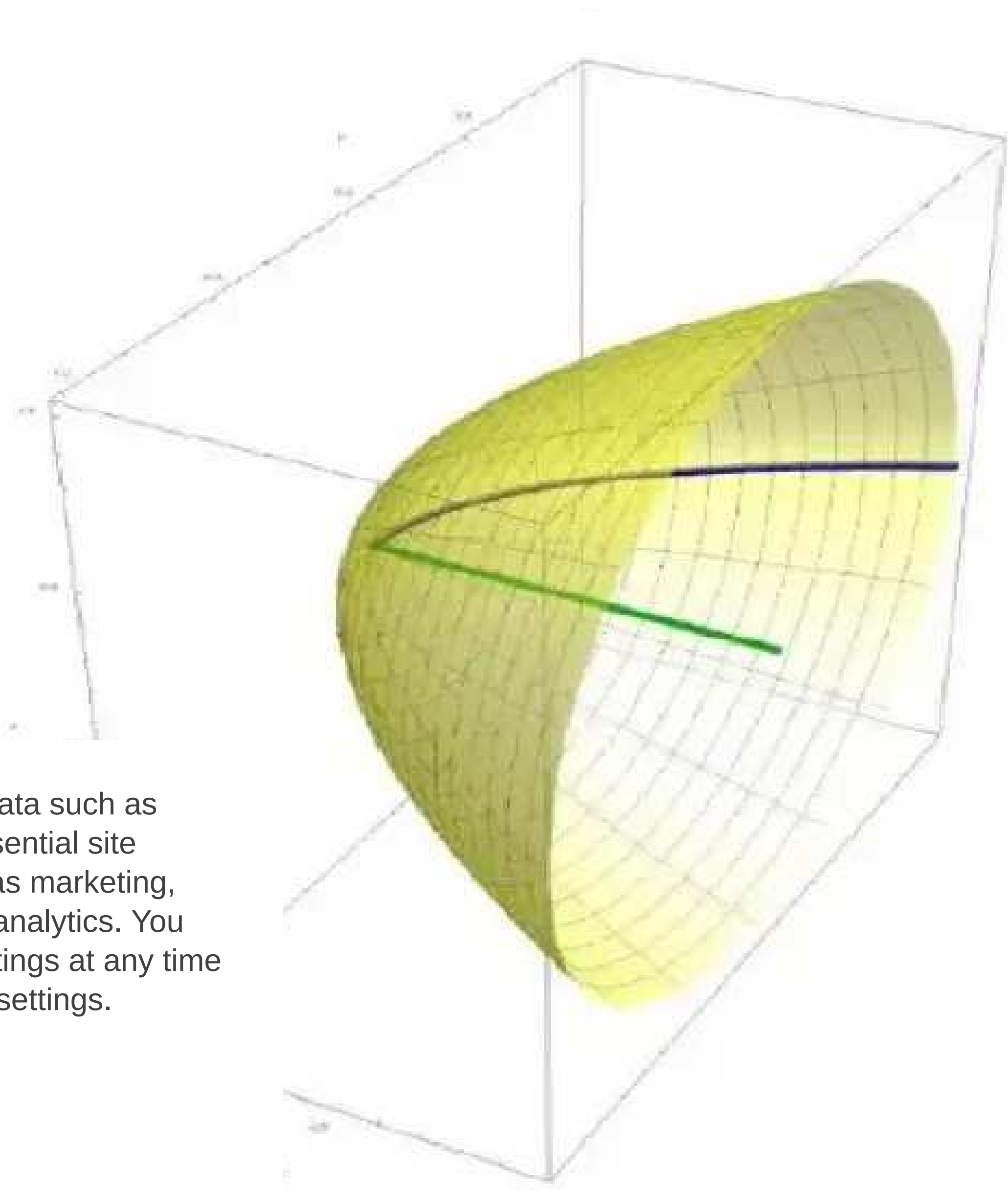


B.

El volumen del sólido sobre el eje x es:

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \pi\, dx = \int_0^1 \pi x\, dx = \pi \int_0^1 x\, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \left(\pi \frac{1^2}{2}\right) - \left(\pi \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

Gráfica:



C.

Dado $f(x)=x^3$. Utilizando el método de los discos, se tiene la siguiente igualdad:

$\Delta V=\pi\left(f^{-1}(y)\right)^2\Delta y$

Dado que $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

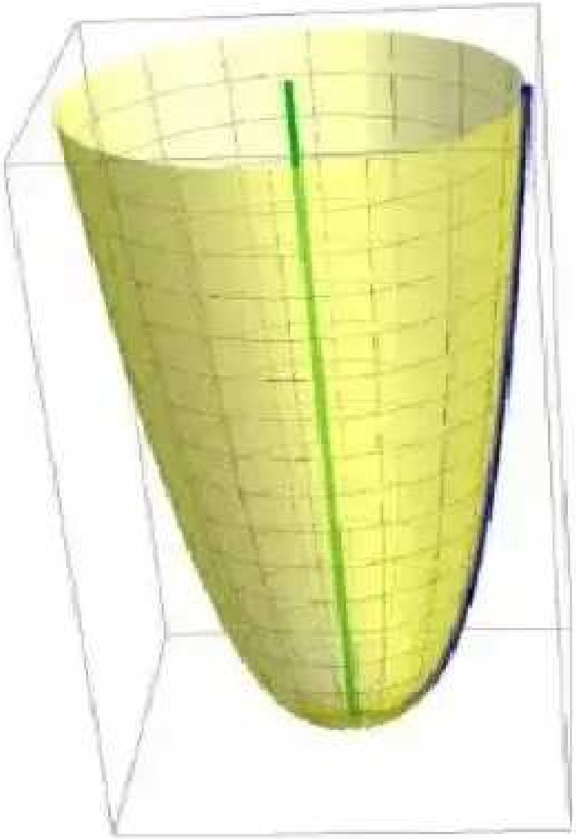
$\Delta V=\pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\Delta y$

$\Delta V=\pi\, y^{\frac{2}{3}}\Delta y$

Por lo tanto

$$V=\int_0^8 \pi\, y^{\frac{2}{3}}\,dy=\left.\frac{\pi\, y^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right|_0^8=\left.\frac{\pi\, y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right|_0^8=\left.\frac{3}{5}\pi\, y^{\frac{5}{3}}\right|_0^8=\left(\frac{3}{5}\pi(8)^{\frac{5}{3}}\right)-\left(\frac{3}{5}\pi(0)^{\frac{5}{3}}\right)=\left(\frac{96\pi}{5}\right)-(0)=\frac{96}{5}\pi$$

Gráfica:



Ejercicio 3

3. En el siguiente problema, utilizar el concepto de integral definida para calcular el trabajo pedido.

a. Un cuerpo es impulsado por fuerza $f(x) = 3x^2 + 4x$, donde las fuerza está dada en Newton y las distancias en metros. Calcular el trabajo necesario para trasladar el objeto una distancia de 10m.

El trabajo necesario para mover el objeto una distancia de $10m$ es

$$W = \int_0^{10} (3x^2 + 4x)\,dx = 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\Big|_0^{10} = x^3 + 2x^2\Big|_0^{10} = ((10)^3 + 2(10)^2) - ((0)^3 + 2(0)^2) = (1000 + 200) - (0) = 1200\,Jules$$

Conclusiones

A través de este trabajo podemos concluir el reconocimiento, resolución, interpretación, importancia y beneficios en la aplicación de diferentes técnicas de integración aprendidas durante del eje de aprendizaje. De la misma manera todo esto nos ayuda a entender y aplicar de una manera más sencilla y eficiente los temas tratados en la materia, los cuales nos serán de gran ayuda como Ingenieros de Sistemas en un futuro próximo teniendo en cuenta la carrera que estamos cursando en la actualidad.

Referencias bibliográficas

- ReferentePensamientoEje3, 2021, CalculoIntegral.pdf
- https://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n_indefinida
- https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/integral-indefinida.html
- https://www.matematicasonline.es/pdf/Temas/2BachCT/Integral%20Indefinida.pdf