Actividad Evaluativa Eje III

Cálculo de integrales indefinidas

Mauricio Jiménez Estrella.

Marzo 2020.

Fundación Universitaria del Área Andina.

Ingeniería de Sistemas.

Calculo Integral.

Objetivo

Este trabajo pretende definir, apropiar e identificar los conceptos básicos vistos en el Eje III correspondientes a la Aplicar de manera correcta las diferentes técnicas de integración en la solución de ejercicios.

EJERCICIOS - ACTIVIDAD EVALUATIVA - EJE 3

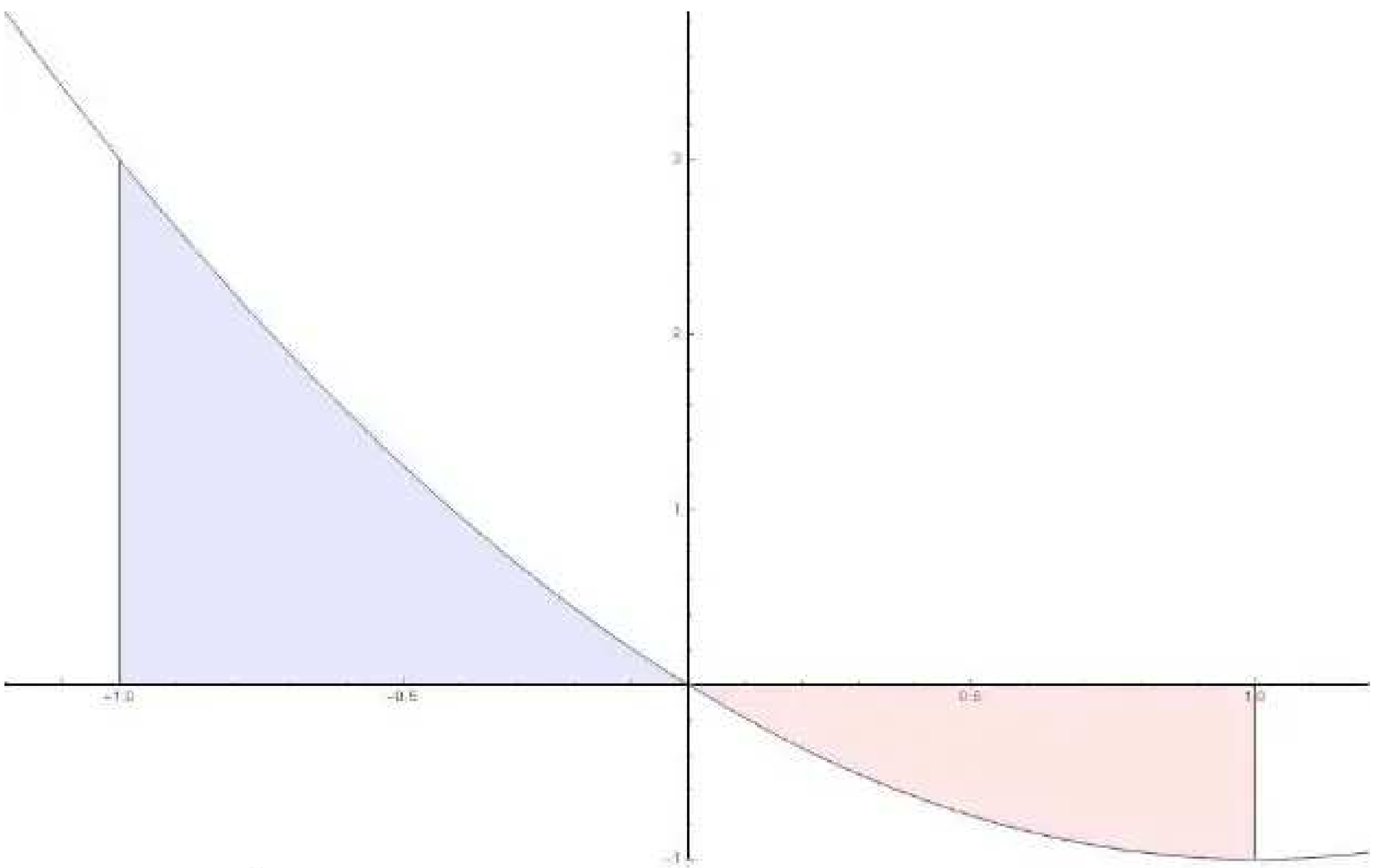
1. Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de cada función:

$a.\, f(x)=x(x-2)\, y\, las\, rectas\, verticales\, dadas\, por: x^2=1$

Solución:

$$\int_{-1}^{1} x(x-2)\,dx=\int_{-1}^{1} x^2-2x\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\Big|_{-1}^{+1}=\frac{1}{3}x^3-x^2\Big|_{-1}^{+1}=\left(\frac{1}{3}(1)^3-(1)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2\right)=\left(\frac{1}{3}1-1\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)-1\right)=$$

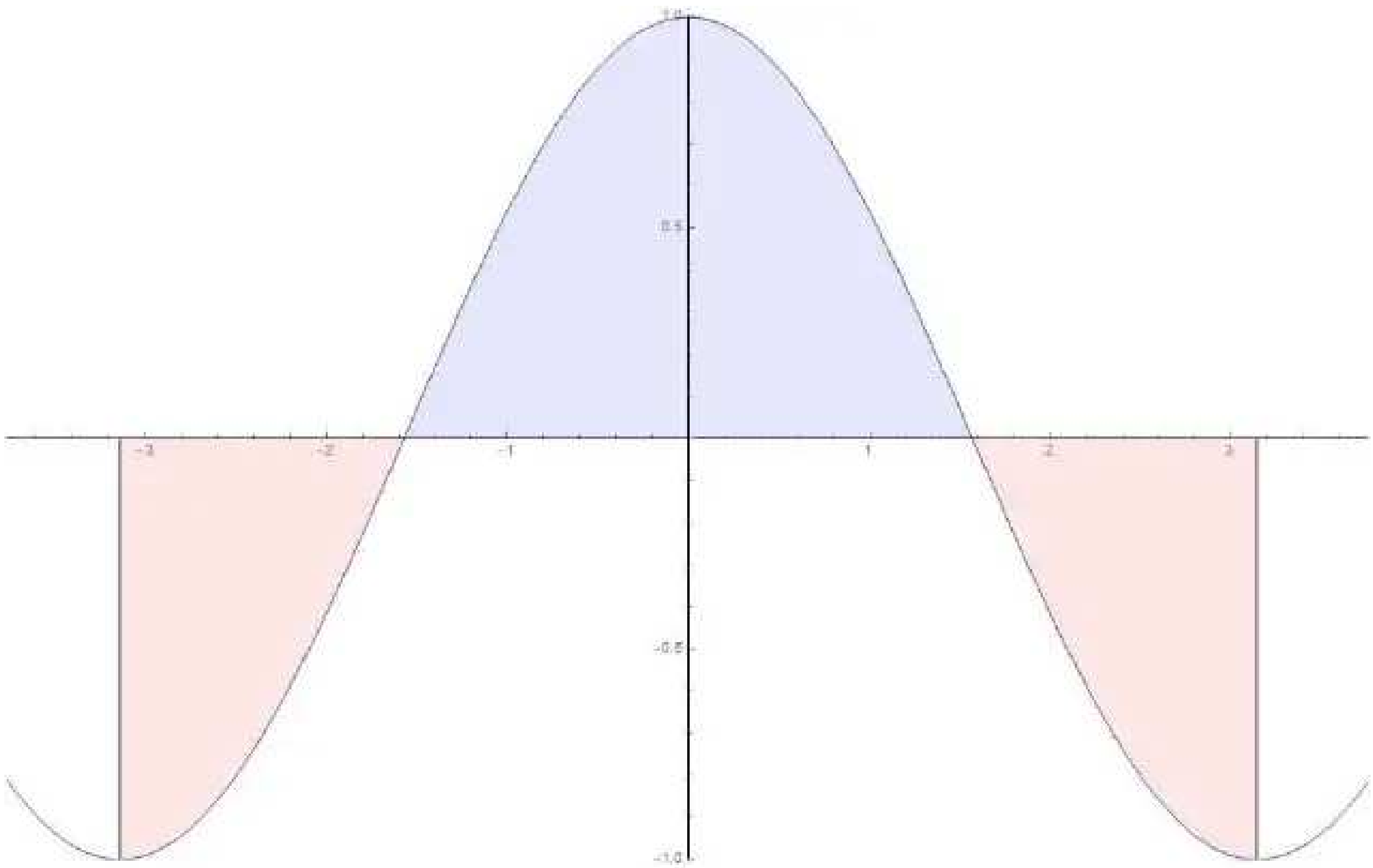
Gráfica:



$b.\, f(x)=\cos x\, y\, las\, rectas\, verticales\, dadas\, por: x=\pm\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx=\sin x|_{-\pi}^{+\pi}=(\sin(\pi))-(\sin(-\pi))=0-0=0$$

Gráfica:



$c.\, f(x)=x^2 \; y \; la\, función\, dada\, por: g(x)=-x^2+2$

Las intersecciones de las curvas se calculan igualando las expresiones:

$x^2=-x^2+2$

$x^2+x^2=2$

$2x^2=2$

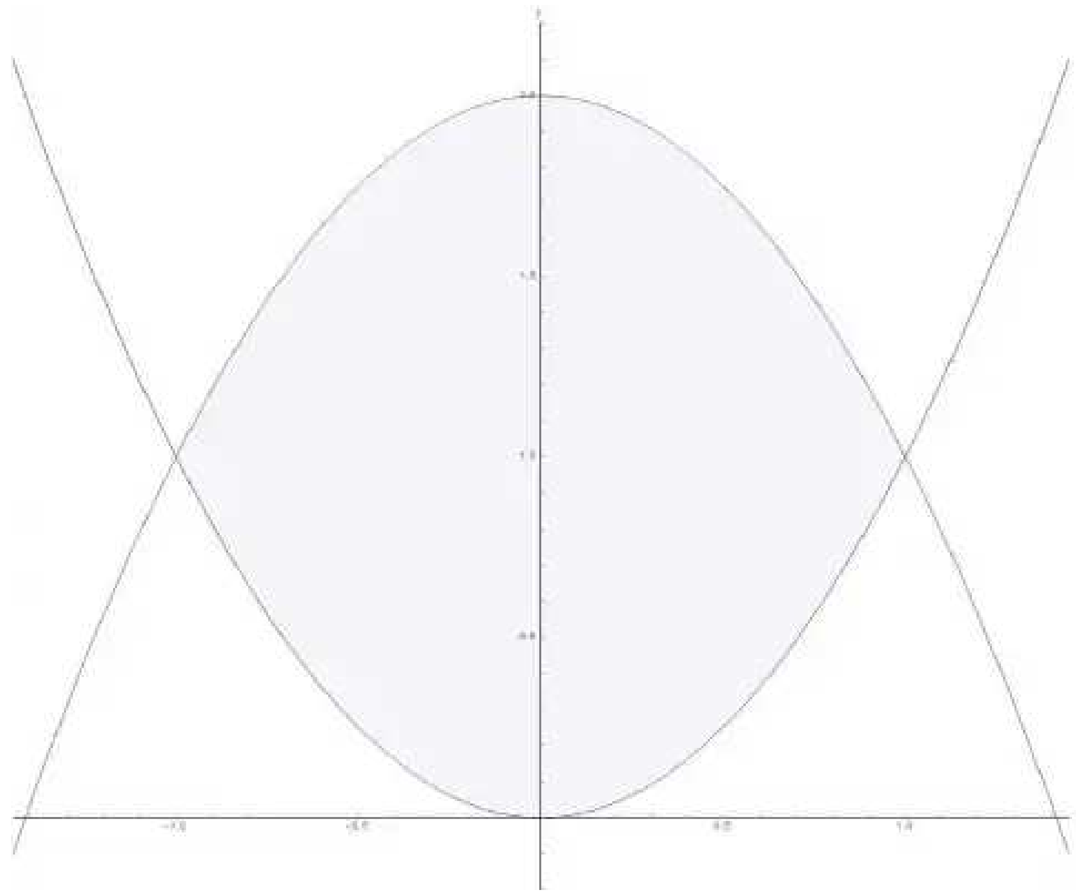
$x^2=1$

$x=\pm 1$

El área encerrada entre las curvas es:

$$\int_{-1}^{1} (2-x^2)-(x^2)dx=\int_{-1}^{1} 2-2x^2dx=2x-\frac{2x^3}{3}\Big|_{-1}^{+1}=\frac{2}{3}x(3-x^2)\Big|_{-1}^{+1}=\left[\frac{2}{3}(1)(3-(1)^2)\right]-\left[\frac{2}{3}(-1)(3-(-1)^2)\right]=\left[\frac{2}{3}(3-1)\right]-\left[\right.$$

Gráfica:



2. Calcular el volumen del sólido que se genera al girar cada función sobre el eje y las rectas dadas.

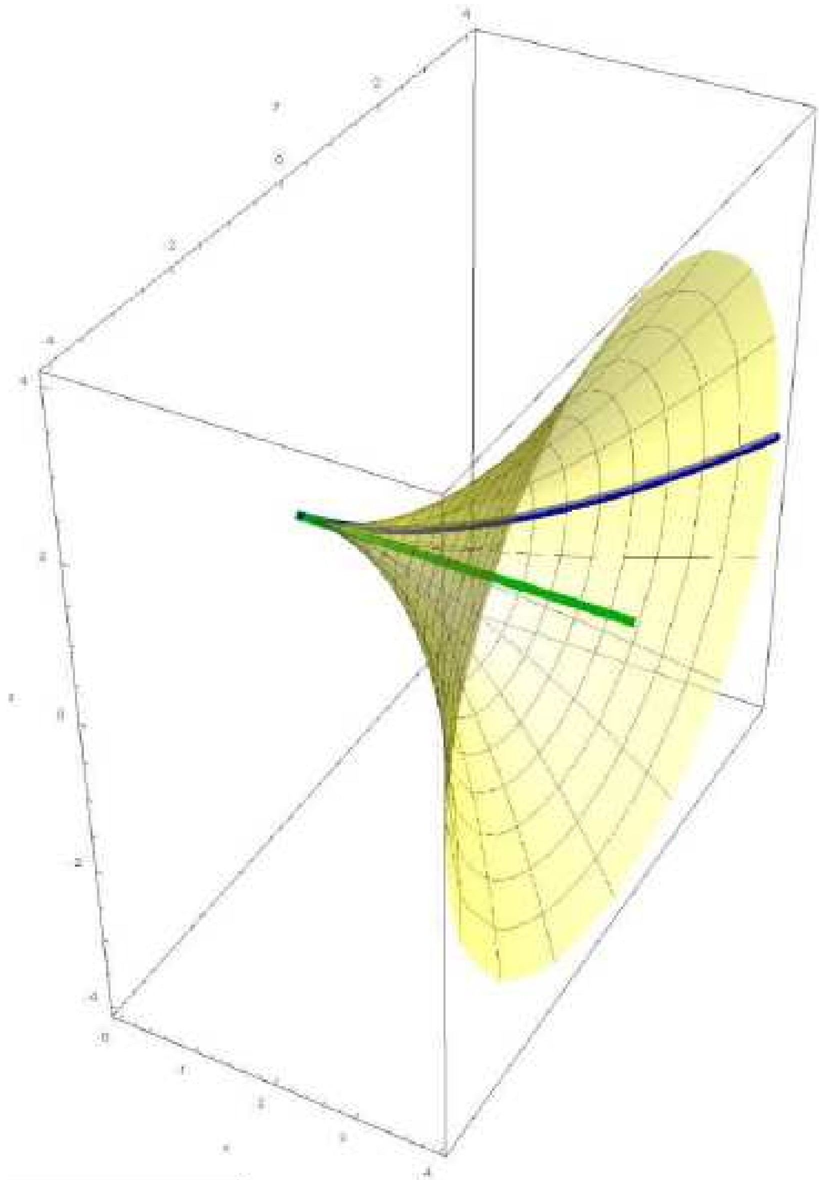
$a.\ y=\frac{x^2}{4}$ $conlasrectas\,dadas\,por: x=0\ y\ x=4\ sobreelejex$

Solución:

a. El volumen del sólido sobre el eje x es:

$$\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 \pi\, dx=\int_0^4 \frac{\pi x^4}{16}dx=\frac{\pi}{16}\int_0^4 x^4 dx=\frac{\pi}{16}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^4=\frac{\pi}{80}x^5\Big|_0^4=\left(\frac{\pi}{80}(4)^5\right)-\left(\frac{\pi}{80}0^5\right)=\left(\frac{\pi}{80}(4)^5\right)-(0)=\frac{64\pi}{5}\approx 40.2124$$

Gráfica:

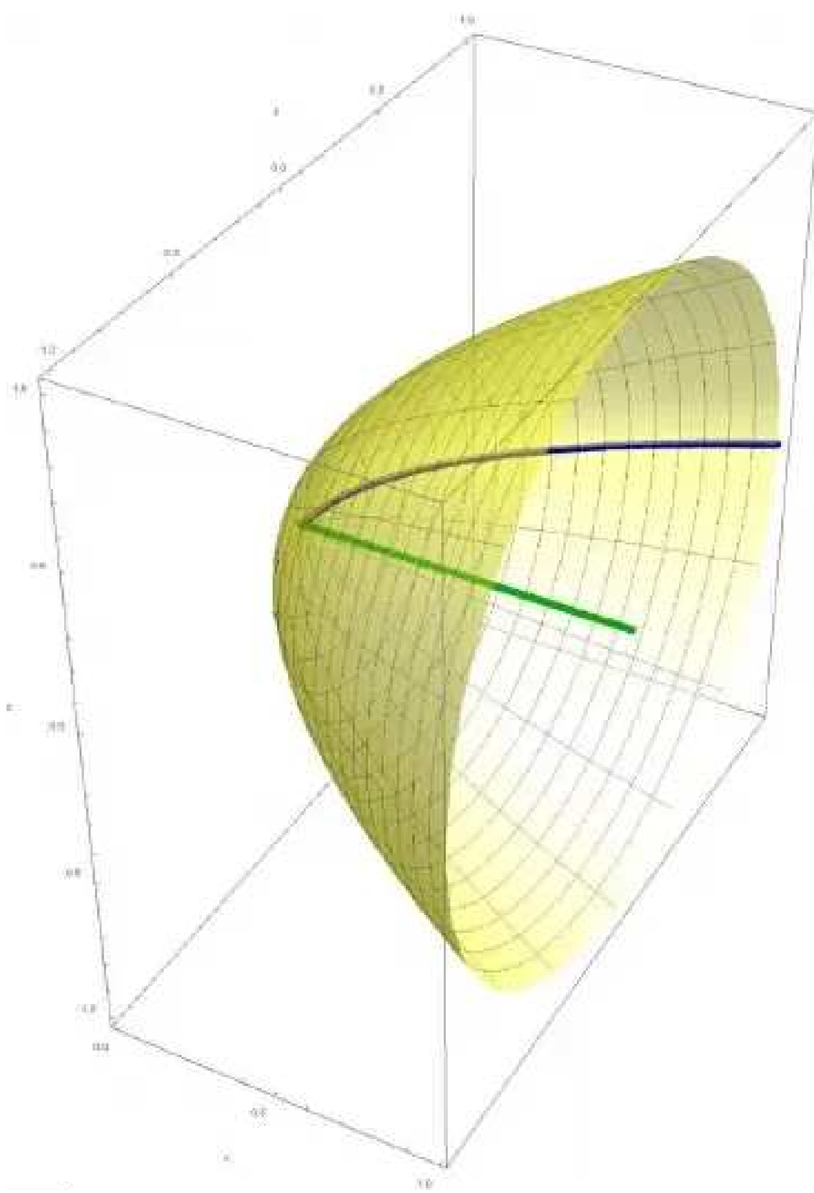


$b.\ y=\sqrt{x}$ con las rectas $x=0$ y $x=1$. Sobre el eje x

El volumen del sólido sobre el eje x es:

$$\int_0^1 (\sqrt{x})^2 \pi\,dx=\int_0^1 \pi x\,dx=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\left(\pi\frac{1^2}{2}\right)-\left(\pi\frac{0^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$$

Gráfica:



$c.\ y=x^3 \, con \, x=0 \, y \, x=8. \, Sobre \, el \, eje \, y$

El volumen del sólido sobre el eje y es:

Dado $f(x)=x^3$. Utilizando el método de los discos, se tiene la siguiente igualdad:

$\Delta V=\pi\left(f^{-1}(y)\right)^2 \Delta y$

Dado que $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

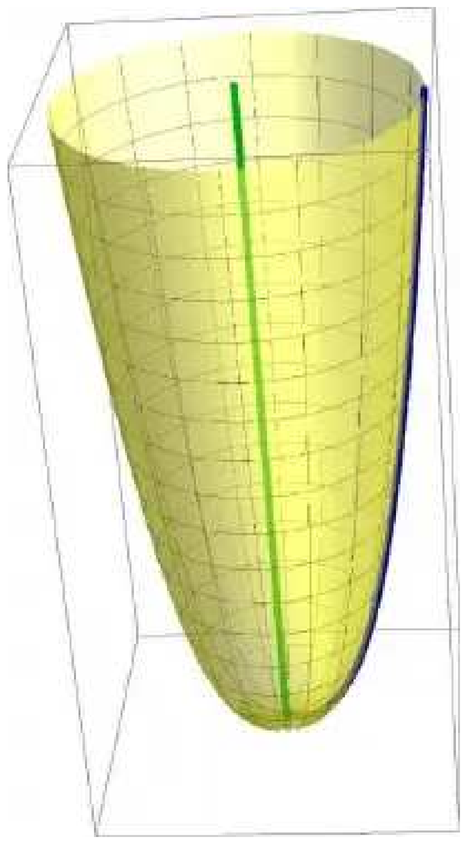
$\Delta V=\pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \Delta y$

$\Delta V = \pi y^{\frac{2}{3}} \Delta y$

Por lo tanto

$$V = \int_0^8 \pi y^{\frac{2}{3}} dy = \left. \frac{\pi y^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} \right|_0^8 = \left. \frac{\pi y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right|_0^8 = \left. \frac{3}{5} \pi y^{\frac{5}{3}} \right|_0^8 = \left(\frac{3}{5} \pi (8)^{\frac{5}{3}} \right) - \left(\frac{3}{5} \pi (0)^{\frac{5}{3}} \right) = \left(\frac{96\pi}{5} \right) - (0) = \frac{96}{5} \pi$$

Gráfica:



3. En el siguiente problema, utilizar el concepto de integral definida para calcular el trabajo pedido.

Un cuerpo es impulsado por fuerza $f(x) = 3x^2 + 4x$, donde la fuerza está dada en Newton y las distancias en metros. Calcular el trabajo necesario para trasladar el objeto una distancia de 10m.

Solución:

El trabajo necesario para mover el objeto una distancia de $10m$ es

$$W = \int_0^{10} (3x^2 + 4x) dx = \left. 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right|_0^{10} = \left. x^3 + 2x^2 \right|_0^{10} = \left((10)^3 + 2(10)^2 \right) - \left((0)^3 + 2(0)^2 \right) = (1000 + 200) - (0) = 1200\, Jules$$