

## Aula 16

*Banco do Brasil - Matemática*

Autor:

**Equipe Exatas Estratégia  
Concursos**

17 de Junho de 2025

# Índice

1) Logaritmo .....	3
2) Função Logarítmica .....	17
3) Equação Logarítmica .....	29
4) Inequação Logarítmica .....	36
5) Questões Comentadas - Logaritmos - Cesgranrio .....	45
6) Questões Comentadas - Função Logarítmica - Cesgranrio .....	57
7) Lista de Questões - Logaritmos - Cesgranrio .....	68
8) Lista de Questões - Função Logarítmica - Cesgranrio .....	72



E aí, caro Aluno do Estratégia Concursos, tudo bem?

Na aula de hoje iremos abordar o tema: **Funções Logarítmicas**.

Vamos iniciar a aula com o **estudo do Logaritmo** analisando sua **definição** e as **consequências** decorrentes da definição, assim como iremos estudar exaustivamente as **propriedades do logaritmo** que serão alicerces para toda a continuidade da aula.

Posteriormente, faremos um estudo minucioso da **Função Logarítmica**, bem como a análise do domínio, da imagem, do comportamento e também de como se constrói um gráfico a depender da base do logaritmo.

Iremos comparar a Função Logarítmica com a Função Exponencial (estudada na última aula), o que irá esclarecer o porquê de uma ser a inversa da outra.

Em seguida, falaremos sobre as **Equações e Inequações Logarítmicas**.

Fiquem tranquilos que sempre que terminarmos um tópico, iremos resolver **diversos exemplos** elaborados por mim e também **muitas questões de concurso**.

Todas as questões resolvidas passo a passo para você compreender este assunto.

Então, essa será a **sistemática da aula**: Abordagem de um tópico da matéria, resolução de alguns exemplos e comentários através de questões de concurso de como esse tópico é cobrado em prova.

Por fim, no tópico final “questões comentadas” faremos **mais exercícios** de concurso público, abrangendo a matéria como um todo para sintetizarmos o conteúdo por completo.



Contem sempre comigo. Caso tenham dúvidas, enviem no **Fórum de Dúvidas** ou por e-mail [vinicius.veleda@estrategiaconcursos.com.br](mailto:vinicius.veleda@estrategiaconcursos.com.br).

“Seja qual for o seu sonho, batalhe, lute por ele, não o espere. Seja diferenciado. Não se sinta superior, seja humilde, mas seja diferenciado. Faça sua vida valer a pena. Crie um ideal para ela e siga a jornada até estar concluída, até ser **aprovado!**”

Vinícius Veleda



# LOGARITMOS

Estudamos na aula de equações e inequações exponenciais igualdades do tipo:

$$2^y = 8$$

Onde podíamos reduzir ambas as potências à mesma base e resolver para  $y$ .

$$2^y = 8$$

$$2^y = 2^3 \rightarrow y = 3$$

Porém, em diversas outras situações, **não conseguiremos** reduzir as potências.

Imagine que uma questão da sua prova pergunte qual o valor de  $y$  na igualdade abaixo:

$$3^y = 5$$

Como você resolveria?

Não conseguiríamos reduzir as potências à mesma base.

Para poder resolver esta e outras operações iremos iniciar o **estudo do Logaritmo**.

## 1 - Definição

Dados dois números reais positivos  $a$  e  $x$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , o **logaritmo** de  $x$  na base  $a$  é igual ao expoente  $y$  ao qual a base  $a$  deve ser elevada para se chegar a  $x$  como resultado.

Se  $a > 0$  e  $a \neq 1$  e  $x > 0$ , temos que:

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x , \text{ onde:}$$

- $a$  → base do logaritmo
- $x$  → logaritmando
- $y$  → logaritmo

Isto é, o **logaritmo** de  $x$  na base  $a$  é a solução de  $y$  na equação  $a^y = x$ .

Observe que o Logaritmo é uma operação matemática intrinsecamente ligada à potenciação. A ideia do logaritmo é **reverter a operação de exponenciação**.



Sempre que nos depararmos com logaritmo estaremos mentalmente trabalhando com expoentes. Veremos mais a frente (na parte de função) que a **função logarítmica é a inversa da função exponencial**.

Inicialmente, esta definição pode parecer um pouco confusa ou difícil. No decorrer da aula, com inúmeros exemplos e questões de provas, tudo ficará mais claro.



$$\log_a x = y \quad \text{logaritmando}$$

*base*

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

Condição de existência:  $a > 0$  e  $a \neq 1$  e  $x > 0$

A pergunta que sempre devemos fazer é: "Devemos elevar a base a qual expoente para se obter o logaritmado?"

Vamos voltar no nosso exemplo do começo da aula.

Estávamos interessados em resolver a seguinte igualdade:

$$3^y = 5$$

Aplicando a definição de logaritmo, podemos calcular o valor de  $y$ :

$$3^y = 5 \rightarrow y = \log_3 5$$



Observe que iremos **trabalhar constantemente** com a **definição** e também com o **sentido inverso da definição**. É **importante** que você esteja confortável para trabalhar tanto em um sentido quanto no outro.

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$



(IF SP - 2012) Se  $\log_x 243 = 5$ , então o valor de  $x$  deve ser:

- a) 2
- b) 4
- c) 1
- d) 3
- e) 0

Comentários:

Observe que a banca nos questiona o valor da base. Até então estávamos sempre calculando o resultado de um logaritmo.

Todavia, a operação e a definição continuam as mesmas. Vejamos:

$$\log_x 243 = 5 \rightarrow x^5 = 243$$

$$x = 3$$

Gabarito: Alternativa D

## 2 - Consequências da definição

Devemos ter em mente algumas igualdades decorrentes das **consequências da definição**.



### Consequências da definição

$$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0 \quad a^{\log_a x} = x \quad \log_a a^x = x \quad \log_a x = \log_a y \leftrightarrow x = y$$



## 3 - Bases Especiais ou Particulares

Duas bases frequentemente são cobradas em provas. A base 10 e a base  $e$ .

### 1. Logaritmo na base 10.

É o que chamamos de logaritmo decimal. É o mais "comum" a ser usado.

Quando **não estiver explícita a base** do logaritmo em uma operação, entende-se que **a base é a decimal**.

$$\log x \rightarrow \log_{10} x$$

### 2. Logaritmo na base $e$ .

O número de Euller ( $e$ ) é uma constante matemática irracional e igual, aproximadamente, a 2,721.

O logaritmo de um número na base  $e$  tem a seguinte notação:

$$\log_e x \rightarrow \ln x$$

## 4 - Propriedades dos Logaritmos

Este tema é **MUITO cobrado** em prova. Praticamente todas as questões de logaritmos envolvem a aplicação de uma das propriedades abaixo.

Passarei as propriedades uma a uma com seu conceito e fórmula e ao final farei um **quadro resumo** com as notações que você **DEVE decorar**.

Iremos praticar também com **bastantes exemplos e questões de provas** para você entender como as bancas gostam de cobrar este assunto.

### Logaritmo do Produto

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

**Obs:** Esta propriedade pode ser estendida para  $n$  fatores:

$$\log_a(x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \dots + \log_a x_n$$



## Logaritmo do Quociente

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

## Logaritmo da Potência

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p * \log_a x$$

## Base elevada a um expoente

Quando a **base estiver elevada a um expoente**, o logaritmo é igual ao **produto do inverso da base vezes o logaritmo**.

$$\log_a^p x = \frac{1}{p} * \log_a x$$



### Propriedades dos Logaritmos

Propriedade	Fórmula	Conceito
Logaritmo do Produto	$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$	O logaritmo do produto é igual a soma de seus logaritmos
Logaritmo do Quociente	$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$	O logaritmo do quociente é igual a diferença dos seus logaritmos
Logaritmo da Potência	$\log_a x^p = p * \log_a x$	O logaritmo de uma potência é igual a esta potência vezes o logaritmo
Base elevada a um expoente	$\log_a^p x = \frac{1}{p} * \log_a x$	Quando a base estiver elevada a um expoente, o logaritmo é igual ao produto do inverso da base vezes o logaritmo





É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta **confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade**.

Em diversos exercícios será exigida a manipulação das soluções com a "volta" de uma das propriedades.

Vejamos alguns exemplos de aplicação dessas propriedades.

Estes exercícios buscam sempre uma "manipulação" algébrica dos numerais. Fique atento às contas. Irei sempre colocar o passo a passo para você acompanhar.

**Exemplo:** Dado que  $\log 2 = a$  e  $\log 3 = b$ , calcule os seguintes logaritmos:

a)  $y = \log 6$

Aplicaremos a propriedade do **logaritmo do produto** para reescrever este logaritmo e calcular seu valor.

$$y = \log 6$$

$$y = \log(2 * 3)$$

$$y = \log 2 + \log 3$$

$$y = a + b \rightarrow \log 6 = a + b$$

b)  $y = \log 9$

Aplicaremos a propriedade do **logaritmo da potência** e calcularemos o valor do logaritmo.

$$y = \log 9$$

$$y = \log 3^2$$

$$y = 2 * \log 3$$

$$y = 2 * b \rightarrow \log 9 = 2b$$



c)  $y = \log 1,5$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do quociente**:

$$y = \log 1,5$$

$$y = \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \log 3 - \log 2$$

$$y = b - a \rightarrow \log 1,5 = b - a$$

d)  $y = \log 15$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do produto**:

$$y = \log 15$$

$$y = \log(10 * 1,5)$$

$$y = \log 10 + \log 1,5$$

$$y = 1 + (b - a) \rightarrow \log 15 = 1 + b - a$$

e)  $y = \log \sqrt{3}$

Aplicando a propriedade do **logaritmo da potência**:

$$y = \log \sqrt{3}$$

$$y = \log 3^{1/2}$$

$$y = \frac{1}{2} * \log 3$$

$$y = \frac{1}{2} * b \rightarrow \log \sqrt{3} = \frac{b}{2}$$

f)  $y = \log 5$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do quociente**:

$$y = \log 5$$



$$y = \log\left(\frac{10}{2}\right)$$

$$y = \log 10 - \log 2$$

$$y = 1 - a \rightarrow \log 5 = 1 - a$$

g)  $y = \log_{100} 2$

Aplicando a propriedade da **base elevada a um expoente**:

$$y = \log_{100} 2$$

$$y = \log_{10^2} 2$$

$$y = \frac{1}{2} * \log_{10} 2$$

$$y = \frac{1}{2} * \log 2$$

$$y = \frac{1}{2} * a \rightarrow \log_{100} 2 = \frac{a}{2}$$

h)  $y = \log 36$

Aplicando simultaneamente as propriedades do **logaritmo do produto e do logaritmo da potência**:

$$y = \log 36$$

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

$$y = 2 * \log 2 + 2 * \log 3$$

Conseguiu entender esta última passagem?

Fique atento! Pois, na grande parte dos exercícios, pode ser que tenhamos de **usar propriedades em conjunto**. Observe passo a passo a resolução acima.

$$y = \log 36$$

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

Primeiro vamos aplicar a propriedade do **logaritmo do produto**:



$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

$$y = \log 2^2 + \log 3^2$$

Agora, aplicaremos a propriedade do **logaritmo da potência** para ambos os fatores:

$$y = \log 2^2 + \log 3^2$$

$$y = 2 * \log 2 + 2 * \log 3$$

$$y = 2 * a + 2 * b \rightarrow \log 36 = 2a + 2b$$

## 5 - Mudança de Base

Em algumas situações pode ser necessária a **conversão do logaritmo para uma única base conveniente**.

As propriedades estudadas acima são correlacionadas a logaritmos com a mesma base.

Nestes casos iremos proceder com a **mudança de base do logaritmo**.

Dados  $a, x$  e  $b$ , números reais positivos e  $a$  e  $b \neq 1$ , o logaritmo de  $x$  na base  $a$  pode ser escrito da seguinte forma:

■

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Acerca dessa mudança de base, há **duas observações importantes**:

1. Esta propriedade também pode ser representada da seguinte forma:

$$\log_a x = \log_b x * \log_a b$$

2. Se  $a$  e  $x$  são números reais positivos e diferentes de 1, temos:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$



**Exemplo:** Dado que  $\log 2 = a$  e  $\log 3 = b$ , calcule os seguintes logaritmos:

a)  $y = \log_3 2$

Aplicando a **mudança para a base 10**:

$$y = \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$y = \frac{a}{b} \rightarrow \log_3 2 = \frac{a}{b}$$

b)  $y = \log_2 3$

Poderíamos resolver igual a questão acima (aplicando a mudança para a base 10) ou aplicar a segunda observação estudada que nos diz:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

No exemplo acima calculamos  $\log_3 2$ , então:

$$y = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$$
$$y = \frac{b}{a} \rightarrow \log_2 3 = \frac{b}{a}$$

Iremos resolver, agora, **exercícios de concurso público**. Tenha decoradas as propriedades dos logaritmos e o entendimento do conceito da definição e das consequências da definição.



**(FUNDATEC - 2019)** Sabendo que o valor de  $\log 5 = 0,698$ , o valor do  $\log 50$  será:

- a) 1,698
- b) 2,698
- c) 3,698
- d) 4,698
- e) 10,698



**Comentários:**

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de  $y$  e aplicar a "volta" da **propriedade do logaritmo do produto** para encontrarmos o seu valor.

$$y = \log 50$$

$$y = \log(5 * 10)$$

$$y = \log 5 + \log 10$$

$$y = 0,698 + 1 \rightarrow \boxed{y = 1,698}$$

Gabarito: Alternativa A

(FGV - 2019) Sabe-se que  $\log_3 x + \log_3 y = 4$ . O valor do produto  $(x * y)$  é igual a:

- a) 12
- b) 24
- c) 36
- d) 54
- e) 81

**Comentários:**

Vamos aplicar o "caminho inverso" da **propriedade do logaritmo do produto**.

$$\log_3 x + \log_3 y = 4$$

$$\log_3(x * y) = 4$$

$$(x * y) = 3^4$$

$$\boxed{(x * y) = 81}$$

Gabarito: Alternativa E

(NC UFPR - 2014) A expressão  $\log_{10} 8 + \log_{10} 2$  é equivalente a:

- a)  $\log_{10} 10$
- b)  $8 * \log_{10} 2$



- c)  $2 * \log_{10} 8$
- d)  $2 * \log_{10} 4$
- e)  $\log_{10} 2$

**Comentários:**

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de  $y$  e aplicar as propriedades que estudamos para encontrar uma resposta que seja equivalente à expressão fornecida no enunciado.

$$y = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$$

Aplicando o "sentido contrário" da **propriedade do logaritmo do produto**:

$$y = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$$

$$y = \log_{10}(8 * 2)$$

$$y = \log_{10} 16$$

Perceba que não há gabarito para este resultado. Vamos manipular algebraicamente este valor para chegarmos ao gabarito.

Reescrevendo  $y$ :

$$y = \log_{10} 16$$

$$y = \log_{10} 4^2$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência:

$$y = \log_{10} 4^2 \rightarrow \boxed{y = 2 * \log_{10} 4}$$

Gabarito: Alternativa D

(QUADRIX Adaptada - 2018) Uma colônia de bactérias se prolifera e o número de indivíduos para cada instante  $t > 0$  é dado por:

$$N(t) = 2e^{kt}$$

Em que  $k$  é uma constante positiva. Sabe-se que, no instante  $t = 4$ , o número de bactérias é igual a 162.

Com base nesse caso hipotético, o valor de  $k$  e o número de bactérias no instante  $t = 8$  é igual a:



- a)  $\ln 3$
- b)  $\ln 5$
- c)  $\ln 4$
- d)  $\ln 7$
- e)  $\ln 2$

**Comentários:**

O enunciado nos fornece a igualdade e uma condição de contorno para calcularmos  $k$ .

Observe que quando  $t = 4 \rightarrow N(t) = 162$ .

Vamos substituir estes valores na igualdade e calcular o valor de  $k$ .

$$N(t) = 2e^{kt}$$

$$162 = 2e^{4k}$$

$$e^{4k} = \frac{162}{2}$$

$$e^{4k} = 81$$

Aplicando a **definição de logaritmo**:

$$e^{4k} = 81 \rightarrow 4k = \ln 81 \rightarrow k = \frac{1}{4} \ln 81$$

Aplicaremos a "volta" da **propriedade do logaritmo da potência**.

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade.

$$k = \frac{1}{4} \ln 81$$

$$k = \ln 81^{1/4} = \ln \sqrt[4]{81} \rightarrow \boxed{k = \ln 3}$$

Gabarito: Alternativa A



# FUNÇÃO LOGARÍTMICA

## 1 - Definição

A função logarítmica de base  $a$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$  é definida por:

$$f(x) = \log_a x$$

## 2 - Domínio

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de  $x$**  onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo ser maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

Lembram-se da condição de existência do logaritmo visto na primeira parte da aula? Ela será o **domínio** da nossa função logarítmica.



*log<sub>a</sub> x = f(x)*      *logaritmando*  
*base*      *Condição de existência: a > 0 e a ≠ 1 e x > 0*

**Exemplo:** Encontre o domínio das funções logarítmicas abaixo:



a)  $f(x) = \log_3(x - 8)$

Estudamos acima que a condição de existência é dada por duas condições. A primeira é a base ser maior que 0 e diferente de 1. Neste exemplo a base é igual a 3 e já satisfaz esta condição.

A segunda condição é o logaritmando ser maior que 0. Vamos determinar os valores de  $x$  para esta condição.

$$x - 8 > 0$$

$$x > 8$$

Sendo assim, o domínio pode ser representado por:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$$

b)  $f(x) = \log_{(x-3)} 8$

Perceba que neste exemplo o logaritmando é maior que 0. O que satisfaz uma das nossas condições de existência.

Todavia, precisamos encontrar o valor de  $x$  para que a base possa ser maior que 0 e também diferente de 1.

$$x - 3 > 0 \quad e \quad x - 3 \neq 1$$

$$x > 3 \quad x \neq 4$$

Observe que o domínio é dado pelos valores de  $x > 3$ . Porém,  $x$  tem que ser também diferente de 4. Ou seja,  $x$  é igual a todos os valores maiores do que 3, menos o valor 4.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ e } x \neq 4\} \text{ ou } D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \neq 4\}$$

Podemos ainda representar os valores no eixo Real das abscissas.



O intervalo é aberto em 3 pois queremos os números maiores que 3 e não maiores ou iguais a 3.

c)  $f(x) = \log_2(x^2 - 9x + 14)$

Perceba que a base já é maior que 0 e diferente de 1, o que satisfaz uma das duas condições de existência.

A segunda é o logaritmando ser maior que 0.



$$x^2 - 9x + 14 > 0$$

Lembra-se da aula de inequações? Essa é uma boa hora para revisar, pois vamos usar exaustivamente o estudo das inequações para encontrar o domínio das funções logarítmicas.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

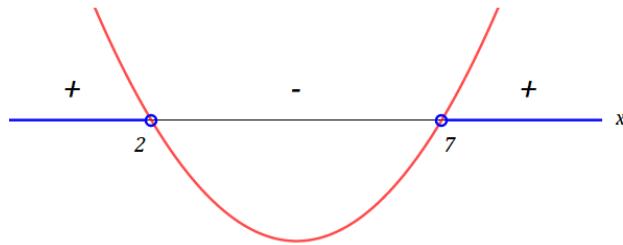
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 * 1 * 14}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{9 + 5}{2} \rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = \frac{9 - 5}{2} \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

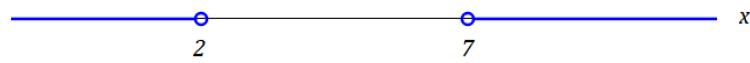
De posse das raízes, vamos proceder com o estudo da função quadrática na reta.

A função é um **parábola com concavidade voltada para cima** e corta o eixo  $x$  nas raízes 2 e 7. Como queremos os valores maiores que 0, o intervalo é aberto nas raízes.



Estamos em busca dos valores maiores que 0, isto é, positivos. Os valores positivos encontram-se a esquerda de 2 e a direita de 7.

Representando o domínio na reta teremos:



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ e } x > 7\} \text{ ou } x = ]-\infty, 2[ \cup ]7, +\infty[$$



**Exemplo:** Veremos agora, como exemplo de uma questão de concurso, no maior nível que a banca pode complicar. Faremos o estudo simultâneo da base com o logaritmando.

(CRS / PMMG Aspirante – 2010) O domínio da função:

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

está no intervalo:

- a)  $]7, +\infty[$
- b)  $]-2, 7[$
- c)  $]-1, +\infty[$
- d)  $]0, +\infty[$

**Comentários:**

O enunciado nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o **domínio** desta função.

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de  $x$**  onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo ser maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

$$f(x) \log_a x \rightarrow x > 0 \text{ e } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Vamos então dividir nosso problema em dois.

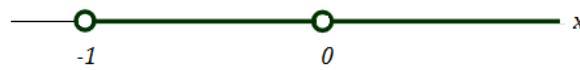
A primeira parte vai ser encontrar a condição de existência para a base  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . E a segunda parte, encontrar o intervalo de existência para o logaritmando  $x > 0$ .

- (I) – base maior que zero e diferente de 1.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1 \rightarrow x > -1 \text{ e } x \neq 0$$

Representando os valores de  $x$  na reta:



Observe que representamos na reta os valores maiores que -1 (intervalo aberto) e utilizamos a representação também aberta em 0, pois o como vimos  $x > -1$  e  $x \neq 0$ .

- (II) – Logaritmando maior do que zero.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x^2 - 5x + 14 > 0$$

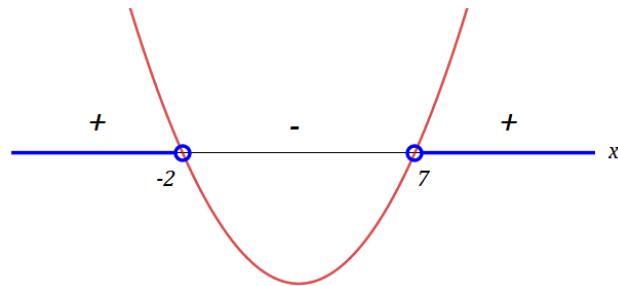
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 1 * (-14)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$\frac{5 \pm 9}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5 + 9}{2} \rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = \frac{5 - 9}{2} \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

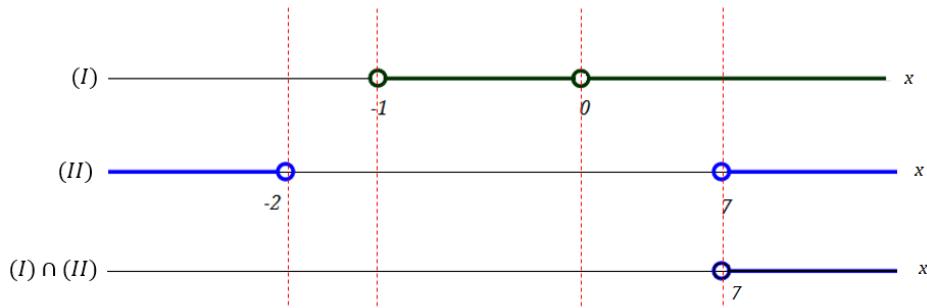
Fazendo o estudo da inequação na reta:



Perceba que queremos os valores de  $x$  onde a função é maior do que zero, isto é, a função é positiva. O intervalo aberto em -2 e também em 7 deve-se ao fato que queremos os valores apenas maiores do que zero e não maiores e iguais a zero.

Vamos agora fazer a interseção da condição (I) com a condição (II).





A interseção será determinada pelo intervalo:

$]7, +\infty[$

Gabarito: Alternativa A

### 3 - Imagem

A **imagem** de uma função é representada pelos **possíveis valores de  $y$  ou  $f(x)$**  resultantes da aplicação de  $x$  na lei de formação da função.

A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**. A imagem pode ser negativa, positiva ou até mesmo o zero.



A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**.

$$I = \mathbb{R} \text{ ou } I = ]-\infty, +\infty[$$

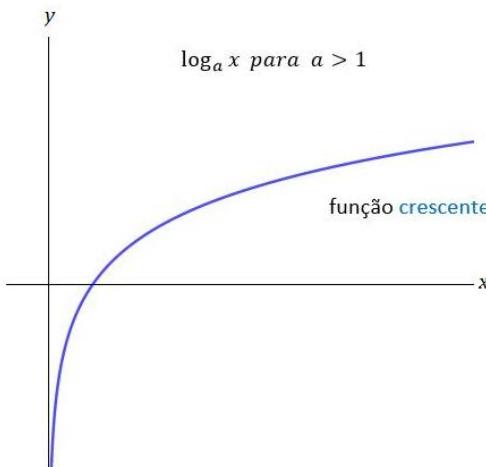
### 4 – Gráfico e Comportamento

O gráfico da função logarítmica  $f(x) = \log_a x$  pode apresentar dois comportamentos distintos a **depender do valor da base  $a$** .



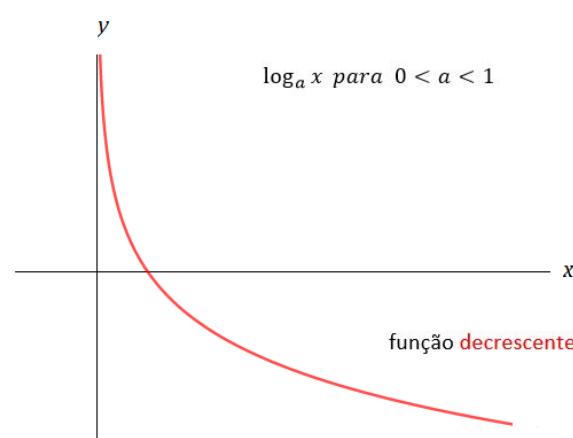
1.  $a > 1$

Quando a **base é maior que a unidade** a função logarítmica terá o seguinte comportamento:



2.  $0 < a < 1$

Quando a **base estiver entre 0 e 1**, o comportamento da função será:



É muito **IMPORTANTE** que você saiba o **comportamento da função logarítmica em função do valor da base**. Conhecer como a função se comporta te ajudará demais na resolução dos exercícios.

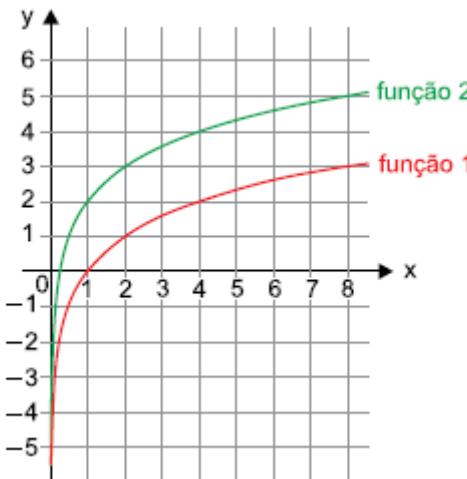


- Se  $a > 1$ , a função será **crescente** e dado  $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ .
- Se  $0 < a < 1$ , a função será **decrescente** e dado  $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ .



**Exemplo:** Vejamos uma questão de concurso elaborada pela VUNESP em que você apenas precisava lembrar do comportamento da função logarítmica e assim garantiria seu ponto na prova.

**(VUNESP – 2015) A imagem indica o gráfico das funções 1 e 2, ambas definidas para  $x$  real e maior do que zero.**



De acordo com o gráfico, as funções 1 e 2 podem ser, respectivamente,

- a)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  e  $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$
- b)  $y = 2^{x-2}$  e  $y = 2^{2x}$
- c)  $y = \sqrt{x} - 1$  e  $y = \sqrt{x} + 1$
- d)  $y = \log_2 x$  e  $y = \log_2 4x$
- e)  $y = \sqrt{x}$  e  $y = \sqrt{4x}$

#### Comentários:

Esta questão nos mostra a importância de estar familiarizado com o gráfico das funções. Se você soubesse o comportamento da função, não precisaria fazer uma conta sequer na hora da prova.

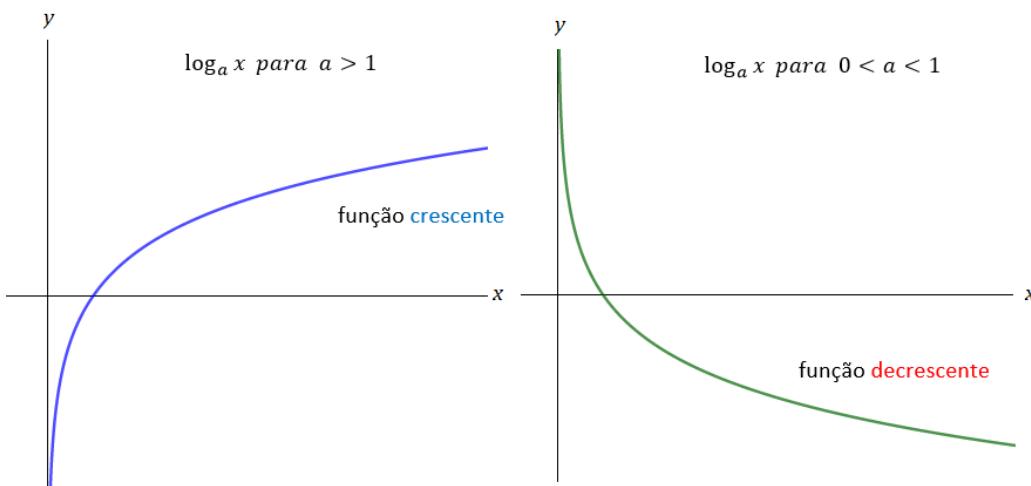
Vamos recordar o comportamento do gráfico da função logarítmica em função da base do logaritmo. Lembrando que a base do logaritmo tem que ser maior que 0 e diferente de 1.

Em termos genéricos temos:

$$f(x) = \log_a x \quad , \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

O gráfico da função pode assumir dois formatos. Vejamos:





Observe que os gráficos fornecidos pela banca possuem comportamento similar à **função crescente**, isto é, com **base maior que 1**. A **única opção** dentre as alternativas que apresenta uma **função logarítmica com base maior que 1** é a letra D.

Gabarito: Alternativa D

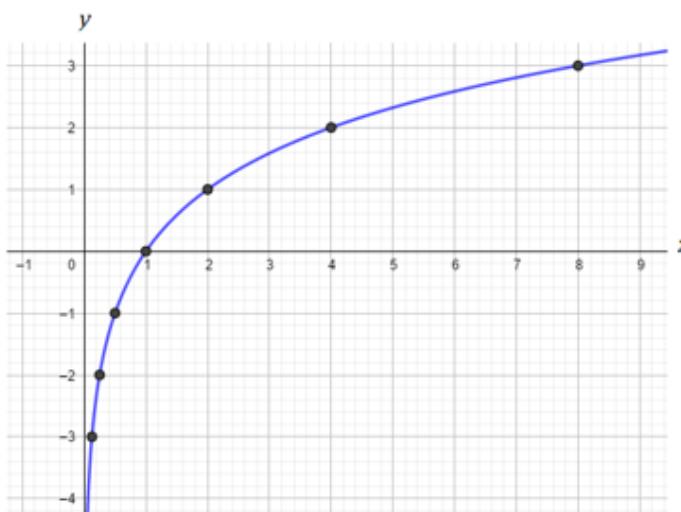
## 5 - Construindo o gráfico da função logarítmica

Para construir o gráfico da função iremos atribuir valores para  $x$  e calcular o valor da função neste ponto.

**Exemplo:** Construa o gráfico da função  $f(x) = \log_2 x$ .

Vamos **atribuir alguns valores para  $x$**  e **calcular o valor da função para o respectivo valor de  $x$** . Explicitaremos os pontos calculados no gráfico.

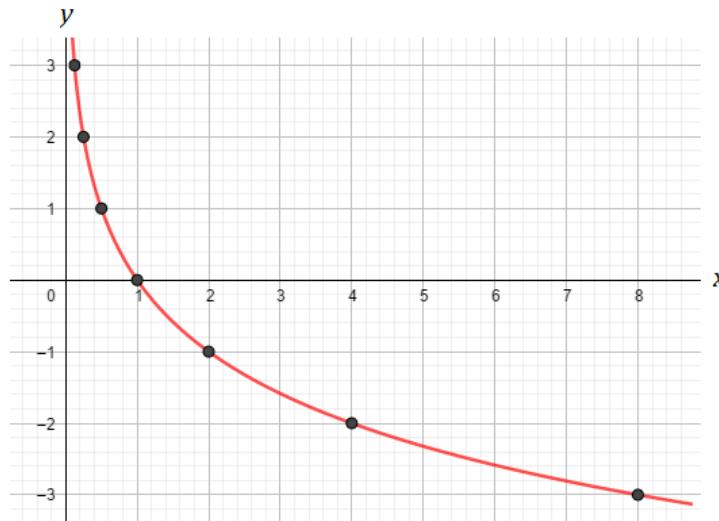
$x$	$f(x) = \log_2 x$
$1/8$	$f(1/8) = \log_2(1/8) = -3$
$1/4$	$f(1/4) = \log_2(1/4) = -2$
$1/2$	$f(1/2) = \log_2(1/2) = -1$
1	$f(1) = \log_2 1 = 0$
2	$f(2) = \log_2 2 = 1$
4	$f(4) = \log_2 4 = 2$
8	$f(8) = \log_2 8 = 3$



**Exemplo:** Construa o gráfico da função  $f(x) = \log_{1/2} x$ .

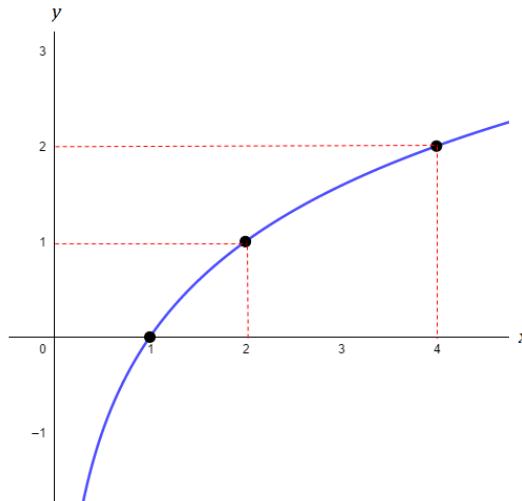
A mecânica da construção será a mesma. Iremos **atribuir valores para  $x$**  e calcular o valor da função para o respectivo valor de  $x$ .

$x$	$f(x) = \log_{1/2} x$
$1/8$	$f(1/8) = \log_{1/2}(1/8) = 3$
$1/4$	$f(1/4) = \log_{1/2}(1/4) = 2$
$1/2$	$f(1/2) = \log_{1/2}(1/2) = 1$
$1$	$f(1) = \log_{1/2} 1 = 0$
$2$	$f(2) = \log_{1/2} 1 = -1$
$4$	$f(4) = \log_{1/2} 4 = -2$
$8$	$f(8) = \log_{1/2} 8 = -3$



**Exemplo:** A banca fornece o gráfico e pergunta qual é a função.

(Qualimp - Adaptada / Prefeitura de Areal (RJ) – 2020) Considere a função  $f: R \rightarrow R$  cujo o gráfico está esboçado abaixo.



Qual é a lei de formação da função?

- a)  $\log_2(x + 1)$
- b)  $\log_2 x$



- c)  $\log x$
- d)  $\log_2 x + 1$

**Comentários:**

A lei de formação genérica de uma função logarítmica é igual a:

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

Precisamos então calcular  $a$  e  $b$ . Perceba que quando  $x = 1 \rightarrow y = 0$ . Iremos substituir estes valores na função e calcular o valor de  $b$ .

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$0 = \log_a(1 + b)$$

$$a^0 = 1 + b$$

$$1 = 1 + b \rightarrow \boxed{b = 0}$$

E para calcular o valor de  $a$ , substituiremos outro ponto pertencente a função. Observe que quando  $x = 2 \rightarrow y = 1$ . Sendo assim, o valor de  $a$  será igual a:

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$f(2) = \log_a(2 + 0)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \log_a 2 \\ a^1 &= 2 \rightarrow \boxed{a = 2} \end{aligned}$$

Logo, a **lei de formação** será igual a:

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$f(x) = \log_2(x + 0) \rightarrow \boxed{f(x) = \log_2 x}$$

Gabarito: Alternativa **B**

## 6 - Função Logarítmica x Função Exponencial

A função logarítmica  $f(x) = \log_a x$ , como demonstrado, é a inversa da função exponencial  $g(x) = a^x$ .



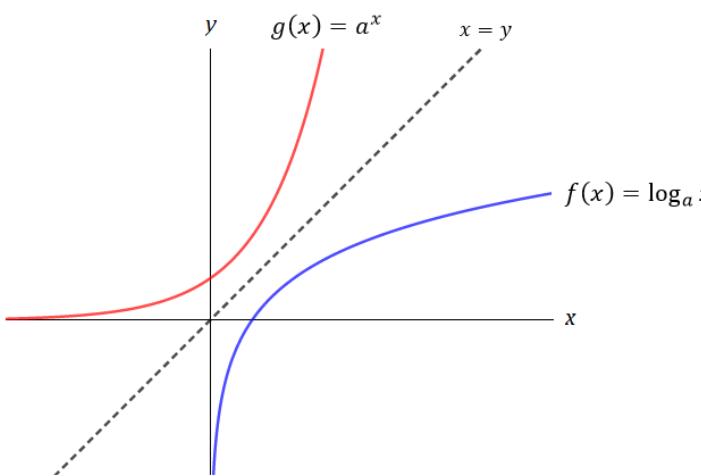
A função logarítmica  $f(x)$  é inversa da função exponencial  $g(x)$ , ou seja, tais funções são simétricas em relação à reta  $xy$  (bissetriz dos quadrantes ímpares).

$$f(x) = \log_a x$$

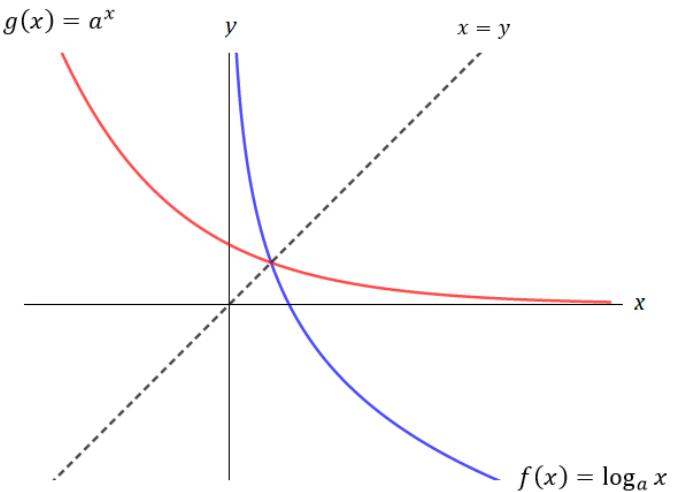
$$g(x) = a^x$$

Vamos analisar o gráfico dessas duas funções **em função da base  $a$**  do logaritmo.

### 1. $a > 1$



### 2. $0 < a < 1$



# EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Dois logaritmos em uma mesma base são iguais, se e somente se, **os logaritmandos também forem iguais**.

$$\log_a x = \log_a y \leftrightarrow x = y$$

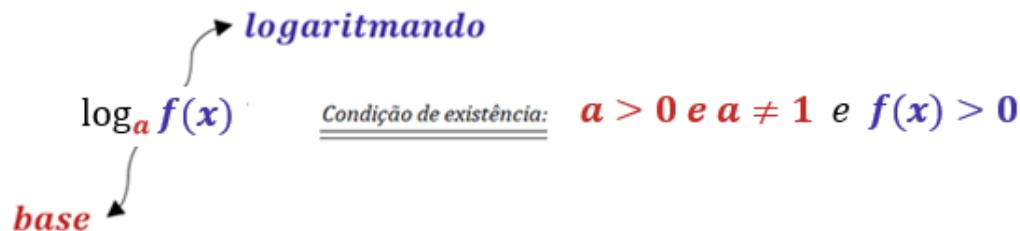
Podemos expandir essa igualdade também para as funções.

Assim,

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Alguns tipos de equações logarítmicas podem aparecer na sua prova.

Lembre-se sempre de que, para cada tipo estudado, estamos adotando a **condição de existência do logaritmo**, isto é, base maior que 0 e diferente de 1 e logaritmando maior que 1.



## I. Igualdade entre logaritmos de mesma base

É uma equação que apresenta igualdade de logaritmos do tipo:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

## II. Igualdade entre um logaritmo e um número

Para resolver este tipo, aplicamos a definição de logaritmo.

$$\log_a f(x) = b \rightarrow f(x) = a^b$$



### III. Mudança para uma incógnita auxiliar

Para resolver este tipo de equação, tomaremos como artifício o uso de uma incógnita auxiliar para facilitar nossa solução.

São equações do tipo:

$$(\log_a x)^2 + \log_a x = b$$

Vamos resolver alguns exemplos que abordam todos esses tipos para fixar a matéria. Atente-se que neste tópico, como falado acima, utilizaremos todo o conteúdo até aqui estudado.

**Exemplo:** Obtenha o conjunto solução das equações abaixo:

a)  $\log(4x - 9) = \log 71$

Observe que as bases são iguais, isto é, há igualdade entre dois logaritmos de mesma base (tipo I). Então,

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

$$4x - 9 = 71$$

$$4x = 80 \rightarrow x = 20$$

Conjunto Solução:  $S = \{20\}$

b)  $\log_3(x + 17) = 5$

Igualdade entre um logaritmo e um número (tipo II).

Resolveremos pela definição de logaritmo:

$$\log_3(x + 7) = 5$$

$$x + 7 = 3^5$$

$$x + 7 = 243 \rightarrow x = 236$$

Conjunto Solução:  $S = \{236\}$



c)  $(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x = -6$

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação (tipo III).

Chamaremos  $\log_3 x$  de  $y$ .

$$y = \log_3 x$$

Substituindo na equação e calculando o valor de  $y$ .

$$(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x = -6$$

$$y^2 - 5y = -6$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma 5 e produto 6.

$$y_1 = 2 \quad e \quad y_2 = 3$$

Iremos substituir na nossa igualdade auxiliar e calcular os valores de  $x$  que satisfazem a igualdade.

$$y = \log_3 x \quad \begin{cases} 2 = \log_3 x \rightarrow x = 9 \\ 3 = \log_3 x \rightarrow x = 27 \end{cases}$$

Conjunto Solução:  $S = \{9, 27\}$

Vejamos como esse assunto já foi cobrado em prova.



**(CETREDE - 2019)** Pode-se afirmar que o conjunto verdade da equação  $\log x + \log(x + 1) - \log 6 = 0$  é igual a:



- a)  $\{3\}$
- b)  $\{2, -3\}$
- c)  $\{2\}$
- d)  $\{-2, 3\}$
- e)  $\{2, 3\}$

**Comentários:**

Antes de começar a resolver, perceba que **não poderíamos jamais marcar as letras B ou D como gabarito.**

Observe o segundo fator da soma:

$$\log(x + 1)$$

O logaritmando tem que ser maior que 0 como condição de existência. Assim,

$$x + 1 > 0$$

$$x > -1$$

Ou seja,  $x$  tem que ser maior que  $-1$  e as letra B e D apresentam  $-2$  e  $-3$  como solução, o que é impossível para nossa condição de existência.

Vamos trabalhar algebraicamente com a igualdade e calcular o valor de  $x$ . Acompanhe.

$$\log x + \log(x + 1) - \log 6 = 0$$

$$\log(x^2 + x) = \log 6$$

$$x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 1 * (-6)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$



$$x = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - 5}{2} \rightarrow \cancel{x_1 = -3} \\ x_2 = \frac{-1 + 5}{2} \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

Em um primeiro momento você poderia ir direto e marcar a letra B. Porém, vimos acima que para a condição de existência do logaritmo,  $x$  deve ser maior que  $-1$ .

Sendo assim, a solução  $x_1 = -3$  está **descartada**.

Nosso conjunto solução da equação será:

$$S = \{2\}$$

Gabarito: Alternativa **C**

**(AMAUC - 2019)** Seja a equação logarítmica  $(\log_2 x)^2 - 6 * \log_2 x + 8 = 0$ . O conjunto solução é:

- a) {6 e 8}
- b) {4 e 16}
- c) {2 e 4}
- d) {-6 e 8}
- e) {4 e -16}

#### Comentários:

Para esta questão, usamos o mesmo raciocínio inicial da questão acima. **Jamais poderíamos marcar a letra D ou a E na prova.**

A condição de existência do logaritmo nos impõe que o logaritmando deve ser maior que 0. Observe o seguinte fator da equação:

$$\log_2 x$$

O logaritmando tem que ser maior que 0, como condição de existência. Assim,

$$x > 0$$

As letras D e E apresentam valores menores que 0 como solução. Ou seja, jamais poderiam ser marcadas.

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação. Chamaremos  $\log_2 x$  de  $y$ .



$$y = \log_2 x$$

Substituindo na equação e calculando o valor de  $y$ .

$$(\log_2 x)^2 - 6 * \log_2 x + 8 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma 6 e produto 8.

$$y_1 = 4 \quad e \quad y_2 = 2$$

Mas,  $y = \log_2 x$ . Calculando  $x$ :

$$y = \log_2 x \quad \begin{cases} 4 = \log_2 x \rightarrow x = 16 \\ 2 = \log_2 x \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Gabarito: Alternativa **B**

**(CESGRANRIO - 2017)** Qual o maior valor de  $k$  na equação  $\log(kx) = 2 \log(x + 3)$  para que ela tenha exatamente uma raiz?

- a) 0
- b) 3
- c) 6
- d) 9
- e) 12

**Comentários:**

Vamos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo da potência e calcular o valor de  $k$  para que a equação tenha exatamente uma raiz.

**Obs:** Houve uma imprecisão terminológica. A banca quis dizer "duas raízes reais e iguais" no lugar de "uma raiz".

$$\log(kx) = 2 \log(x + 3)$$

$$\log(kx) = \log(x + 3)^2$$

$$kx = (x + 3)^2$$



$$kx = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + (6 - k)x + 9 = 0$$

Para que a equação tenha exatamente uma raiz, o delta de Bhaskara tem que ser igual a 0.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(6 - k)^2 - 4 * 1 * 9 = 0$$

$$36 - 12k + k^2 - 36 = 0$$

$$k^2 - 12k = 0$$

$$k(k - 12) = 0 \rightarrow k = 0 \text{ ou } k = 12$$

Então, o maior valor para  $k$  será:

**$k = 12$**

Gabarito: Alternativa E



# INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São **desigualdades** que apresentam logaritmos em um dos seus termos.

Assim, como estudado nas equações logarítmicas, vamos dividir as inequações em três tipos:

## I. Desigualdades entre logaritmos de mesma base

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

Relembrando:

- Se  $a > 1$ , a função será **crescente** e dado  $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ .
- Se  $0 < a < 1$ , a função será **decrescente** e dado  $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ .

### 1. $a > 1$

Quando a base é maior que 1, iremos **MANTER** o sentido da desigualdade.

$$Se a > 1 , \log_a f(x) > \log_a g(x) \rightarrow f(x) > g(x)$$

### 2. $0 < a < 1$

Quando a base é um número entre 0 e 1, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

$$Se 0 < a < 1 , \log_a f(x) > \log_a g(x) \rightarrow 0 < f(x) < g(x)$$



$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } a > 1 \rightarrow f(x) > g(x) \quad \text{mantém a desigualdade} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow 0 < f(x) < g(x) \quad \text{inverte a desigualdade} \end{array} \right.$$



## II. Desigualdade entre um logaritmo e um número

$$\log_a f(x) \leq k$$

Para resolver este tipo de desigualdade, utilizaremos a definição de logaritmo.

Quando a **base for maior que 1**, iremos **MANTER** o sentido da desigualdade. Enquanto, quando a **base for um número entre 0 e 1**, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

Sintetizando teremos:

$$\log_a f(x) > k \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow f(x) > a^k \text{ mantém o sinal} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow 0 < f(x) < a^k \text{ inverte o sinal} \end{cases}$$

Observe que podemos ter também o caso de  $\log_a f(x) < k$ . Mas a ideia permanece a mesma. Mantém o sinal quando a base é maior que 1 e inverte quando a base estiver entre 0 e 1.

Vejamos:

$$\log_a f(x) < k \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow 0 < f(x) < a^k \text{ mantém o sinal} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow f(x) > a^k \text{ inverte sinal} \end{cases}$$

## III. Mudança para uma incógnita auxiliar

Para resolver este tipo de equação, assim como nas equações logarítmicas, tomaremos como artifício o uso de uma incógnita auxiliar para facilitar nossa solução.



Nas **inequações logarítmicas** iremos calcular também a **condição de existência de cada fator** que apresenta o logaritmo em seu termo.

Calcularemos o **intervalo solução** para cada logaritmando e também o intervalo solução da inequação.

E nossa **resposta** será a interseção desses intervalos.



Vejamos nos exemplos e nas questões de provas solucionadas abaixo como devemos proceder.

**Exemplo:** Calcule o conjunto solução das inequações abaixo:

a)  $\log_5(2x + 5) < 2$

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- (I) –  $\log_5(2x + 5)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$2x + 5 > 0$$

$$2x > -5$$

$$x > -\frac{5}{2}$$

- (II) –  $\log_5(2x + 5) < 2$

Observe que se trata de uma inequação do tipo II, isto é, desigualdade entre um logaritmo e um número.

Utilizaremos a definição de logaritmo para calcular o valor de  $x$  que satisfaz a inequação. E nesse caso, a **base é maior que 1**, ou seja, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\log_a f(x) < k \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow 0 < f(x) < a^k \text{ mantém o sinal} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow f(x) > a^k \text{ inverte sinal} \end{cases}$$

Calculando  $x$  teremos:

$$\log_5(2x + 5) < 2$$

$$2x + 5 < 5^2$$

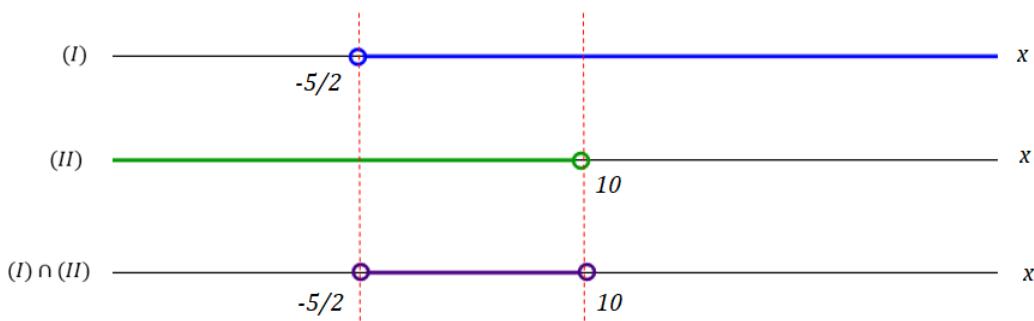
$$2x + 5 < 25$$

$$2x < 20$$



$$x < 10$$

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução da inequação será:

$$S = -\frac{5}{2} < x < 10$$

b)  $\log_{1/2}(3x - 2) < \log_{1/2} 7$

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- (I) –  $\log_{1/2}(3x - 2)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$3x - 2 > 0$$

$$3x > 2$$

$$x > \frac{2}{3}$$

- (II) –  $\log_{1/2}(3x - 2) < \log_{1/2} 7$

Observe que se trata de uma inequação do tipo I, isto é, desigualdade entre logaritmos de mesma base. E nesse caso, **a base do logaritmo está entre 0 e 1**. Logo, devemos **INVERTER** o sinal da desigualdade.

Resolvendo a inequação:

$$\log_{1/2}(3x - 2) < \log_{1/2} 7$$

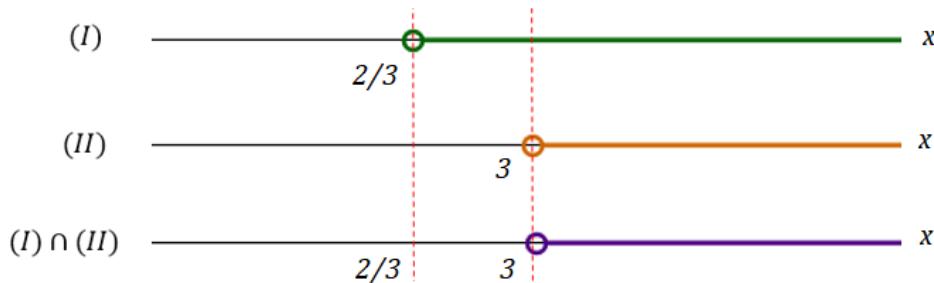
$$3x - 2 > 7$$



$$3x > 9$$

$$x > 3$$

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução da inequação será:

$$S = x > 3$$

c)  $(\log_2(x))^2 - 5 * \log_2(x) + 6 > 0$

Mesmo procedimento dos outros dois exemplos. Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

Como os dois fatores que apresentam logaritmos são iguais, o estudo de um será igual ao do outro.

- (I) –  $\log_2(x)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$x > 0$$

- (II) –  $(\log_2(x))^2 - 5 * \log_2(x) + 6 > 0$

Observe que se trata de uma inequação do tipo III, isto é, necessitaremos de uma incógnita auxiliar para nos ajudar a encontrar o conjunto solução.

Vamos chamar  $\log_2(x)$  de  $y$  e resolver para  $y$ .

$$y = \log_2(x)$$

$$y^2 - 5y + 6 > 0$$

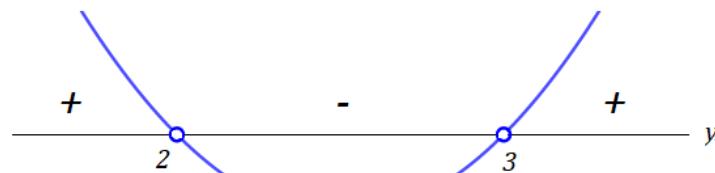


$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Duas raízes que a soma seja 5 e o produto 6.

$$y_1 = 2 \quad e \quad y_2 = 3$$

Faremos o estudo de  $y$  na reta. Trata-se de uma parábola com concavidade voltada para cima e raízes em 2 e 3.



Para ser maior que 0, nosso intervalo será o intervalo positivo, isto é, o intervalo menor que 2 e o intervalo maior que 3.



Porém, precisamos fazer o estudo da inequação em  $x$ . Sabemos que:

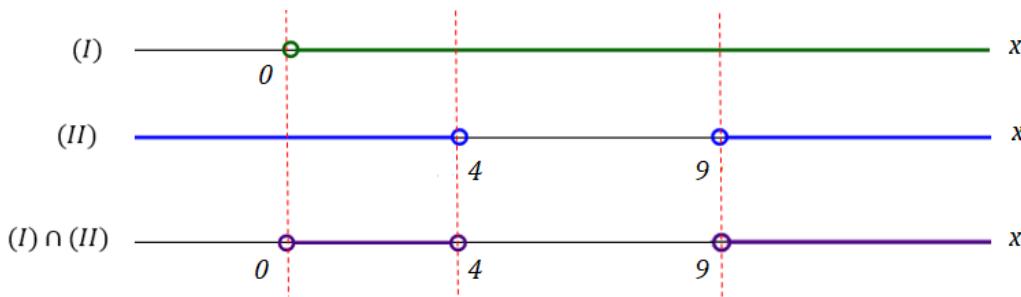
$$y = \log_2(x) \rightarrow \begin{cases} 2 = \log_2(x) \rightarrow x = 4 \\ 3 = \log_2(x) \rightarrow x = 9 \end{cases}$$

Logo, nossa reta em  $x$  será:



Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.





Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$S = 0 < x < 4 \text{ ou } x > 9$$

Vamos analisar como este assunto é cobrado em prova.



**(COTEC - 2020) Resolvendo-se a inequação  $\log 2x > \log(x + 1)$ , obtemos:**

- a)  $S = \{x \in R \mid x < -1\}$
- b)  $S = \{x \in R \mid x > -1\}$
- c)  $S = \{x \in R \mid x > 1\}$
- d)  $S = \{x \in R \mid x > 1/2\}$
- e)  $S = \{x \in R \mid x < 1/2\}$

**Comentários:**

Vamos fazer o estudo do logaritmando das duas funções e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- (I) –  $\log 2x$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$2x > 0$$

$$x > 0$$

- (II) –  $\log(x + 1)$

Sendo o logaritmando maior que 0:



$$x + 1 > 0$$

$$x > -1$$

- (III) –  $\log 2x > \log(x + 1)$

Como a base do logaritmo (10) é maior que 1, a desigualdade se mantém.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \rightarrow f(x) > g(x)$$

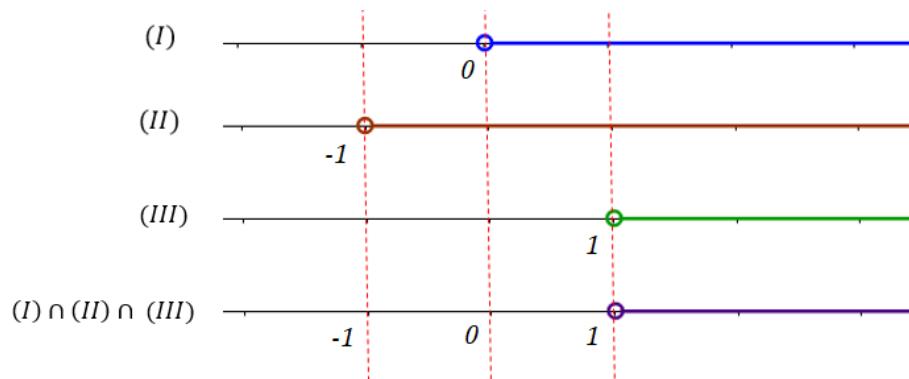
$$\log 2x > \log(x + 1)$$

$$2x > x + 1$$

$$x > 1$$

Então, chegamos a três soluções distintas para nosso valor de  $x$ .

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das três soluções.



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

Gabarito: Alternativa C

(FGV - 2013) Considere a desigualdade:

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0$$

O menor valor inteiro  $x$  que satisfaz essa desigualdade é:



- a)  $2013^{2014} + 1$
- b)  $2014^{2013} + 1$
- c)  $2014^{2015} + 1$
- d)  $2015^{2014} + 1$
- e) 2016

**Comentários:**

Vamos resolver normalmente pela definição de logaritmo e, como as **bases são maiores que 1**, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015}x)) > 0$$

$$\log_{2014}(\log_{2015}x) > 2013^0$$

$$\log_{2014}(\log_{2015}x) > 1$$

$$\log_{2015}x > 2014$$

$$x > 2015^{2014}$$

Perceba que  $x$  tem que ser maior que esse número. O primeiro inteiro maior que esse número é igual a esse número somado a unidade. Sendo assim, o conjunto solução pedido no enunciado será:

$$S = 2015^{2014} + 1$$

Gabarito: Alternativa **D**

Chegamos ao final da teoria. Iremos comentar agora uma **bateria de questões de concursos** que sintetizam todo o conteúdo estudado. Vamos juntos!



## QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

### Logaritmo

1. (CESGRANRIO / Casa da Moeda – 2024) Considere um objeto astronômico, como uma estrela, com brilho ou irradiação observada igual a  $b$ . A magnitude aparente desse objeto é dada por

$$5 \log_{100} \left( \frac{b_0}{b} \right)$$

A magnitude aparente expressa em termos do logaritmo decimal é

- a)  $\frac{5}{2} \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$
- b)  $\frac{15}{2} \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$
- c)  $10 \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$
- d)  $20 \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$
- e)  $50 \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$

#### Comentários:

A banca nos afirma que a magnitude aparente do objeto é dada por

$$m = 5 \log_{100} \left( \frac{b_0}{b} \right)$$

E nos questiona o valor dessa magnitude em termos do logaritmo decimal, isto é, em termos de  $\log_{10}$ .

Iremos trabalhar com a mudança de base (da base 100 para a base que queremos 10).

Lembrando que dados  $a, x$  e  $b$ , números reais positivos e  $a$  e  $b \neq 1$ , o logaritmo de  $x$  na base  $a$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Aplicando a mudança de base na fórmula da magnitude teremos:



$$m = 5 \log_{100} \left( \frac{b_0}{b} \right)$$

$$m = 5 \frac{\log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)}{\log_{10} 100}$$

$$m = 5 \frac{\log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)}{2} \rightarrow \boxed{m = \frac{5}{2} \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)}$$

Gabarito: Alternativa A

**2. (CESGRANRIO / BB - 2023) Um banco montou um índice de desempenho ( $L$ ) para um de seus serviços. O índice se refere a um atributo numérico, representado por  $A$ , sempre positivo. Por conta de o atributo  $A$  assumir valores muito altos, o índice  $L$  montado pelo setor técnico do banco foi concebido por  $L = \log_{10}(A)$ . Há uma meta de que, nos próximos 5 anos, o índice  $L$  aumente em duas unidades. A meta, portanto, indica que é esperado que, nos próximos 5 anos, o atributo  $A$  seja igual**

- a) ao atributo  $A$  atual aumentado em 2 unidades.
- b) ao atributo  $A$  atual aumentado em 100 unidades.
- c) a 2 vezes o atributo  $A$  atual.
- d) a 10 vezes o atributo  $A$  atual.
- e) a 100 vezes o atributo  $A$  atual.

#### Comentários:

Vamos atribuir o valor de  $L = 0$  para o atual momento e  $L = 2$  para o índice daqui a 5 anos, uma vez que a banca nos informa que há uma meta de que, nos próximos 5 anos, o índice  $L$  aumente em duas unidades (de  $L = 0$  para  $L = 2$ ).

Iremos calcular o valor de  $A$  para  $L = 0$  e  $L = 2$ .

- $L = 0$

$$L = \log_{10}(A)$$

$$0 = \log_{10}(A)$$

$$A = 10^0 \rightarrow \boxed{A = 1}$$

- $L = 2$



$$L = \log_{10}(A)$$

$$2 = \log_{10}(A)$$

$$A = 10^2 \rightarrow A = 100$$

Ou seja, a meta indica que é esperado que, nos próximos 5 anos, o atributo A seja igual a 100 vezes o atributo A atual.

Gabarito: Alternativa E

### 3. (CESGRANRIO / BR - 2015) Sejam $M = \log 30$ e $N = \log 300$ .

Na igualdade  $x + N = M$ , qual é o valor de x?

- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) +1
- e) +2

#### Comentários:

Vamos substituir os valores na igualdade e calcular o valor de x.

$$x + N = M$$

$$x + \log 300 = \log 30$$

$$x = \log 30 - \log 300$$

Iremos aplicar a "volta" da propriedade do Logaritmo do Quociente.

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$x = \log 30 - \log 300$$



$$x = \log\left(\frac{30}{300}\right)$$

$$x = \log 0,1 \rightarrow \boxed{x = -1}$$

Observe que nesta parte final aplicamos a definição de logaritmo para chegar ao resultado.

10 elevado a que número é igual a 0,1? Resposta: 10 elevado a -1.

Caso você tenha dificuldade, pode manipular algebraicamente para se chegar ao resultado. Vejamos. 0,1 é igual a  $1/10$  que é igual a  $10^{-1}$ .

$$x = \log 0,1$$

$$x = \log 10^{-1}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$x = \log 10^{-1}$$

$$x = -1 \times \log 10$$

Sabemos que  $\log 10 = 1$ . Então:

$$x = -1 \times \log 10$$

$$x = -1 \times 1 \rightarrow \boxed{x = -1}$$

Gabarito: Alternativa **B**

#### 4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2014) O valor de

$$\log_4[(8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8)^2]$$

é



- a) 9
- b) 18
- c) 27
- d) 36
- e) 72

**Comentários:**

Vamos chamar o valor acima de uma incógnita  $y$  e então, nosso objetivo será determinar  $y$ .

$$y = \log_4[(8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8)^2]$$

Iremos começar aplicando a propriedade do logaritmo da potência.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$y = \log_4[(8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8)^2]$$

$$y = 2 \log_4(8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8)$$

Reescrevendo temos:

$$y = 2 \log_4(8 \cdot 8^8)$$

Iremos aplicar a "volta" da propriedade do Logartimo do produto.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$y = 2 \log_4(8 \cdot 8^8) = 2(\log_4 8 + \log_4 8^8) = 2(\log_4 8 + 8 \cdot \log_4 8)$$

Vamos calcular o valor de  $\log_4 8$  fazendo a mudança de base para a base 2.

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\log_4 8 = 1,5}$$

Substituindo acima teremos:



$$y = 2(\log_4 8 + 8 \cdot \log_4 8)$$

$$y = 2(1,5 + 8 \cdot 1,5)$$

$$y = 2(1,5 + 12)$$

$$y = 2 \cdot 13,5 \rightarrow \boxed{y = 27}$$

Gabarito: Alternativa C

5. (CESGRANRIO / BASA - 2013) Sabe-se que x e y são números reais tais que:

$$y = 5^{3x}$$

Conclui-se que x é igual a

- a)  $\log_5(y^3)$
- b)  $\log_5(y/3)$
- c)  $\log_5(\sqrt[3]{y})$
- d)  $-\log_5(3y)$
- e)  $\frac{1}{3\log_5(y)}$

Comentários:

Vamos aplicar " $\log_5$ " nos dois lados da igualdade e desenvolver a expressão.

$$y = 5^{3x}$$

$$\log_5 y = \log_5 5^{3x}$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo da Potência.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$\log_5 y = \log_5 5^{3x}$$

$$\log_5 y = 3x \times \log_5 5$$



Sabemos que  $\log_5 5 = 1$ .

$$\log_5 y = 3x \times 1$$

$$\log_5 y = 3x \rightarrow x = \frac{1}{3} \times \log_5 y$$



**Cuidado para não marcar a Alternativa B.** Observe que a fração na expressão acima está **FORA** dos parênteses, enquanto que na alternativa está dentro. São números totalmente diferentes.

Por fim, para chegar em umas das respostas, iremos aplicar a "volta" da propriedade do Logaritmo da Potência vista acima.

$$x = \frac{1}{3} \times \log_5 y$$

$$x = \log_5 y^{1/3} \rightarrow x = \log_5 \sqrt[3]{y}$$

Gabarito: Alternativa **C**

6. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dado  $\log_3 2 = 0,63$ , tem-se que  $\log_6(24)$  é igual a

- a) 1,89
- b) 1,77
- c) 1,63
- d) 1,51
- e) 1,43

**Comentários:**

Iremos chamar  $y = \log_6(24)$  e calcular seu valor.

Observe, primeiramente, que a banca nos fornece o valor de um logaritmo na base 3. Então, vamos começar desenvolvendo o valor questionado mudando sua base para a base 3.



Dados  $a, x$  e  $b$ , números reais positivos e  $a \neq b \neq 1$ , o logaritmo de  $x$  na base  $a$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$y = \log_6(24)$$

$$y = \frac{\log_3 24}{\log_3 6}$$

Reescrevendo os valores decompostos:

$$y = \frac{\log_3(2^3 \times 3)}{\log_3(2 \times 3)}$$

Aplicando a propriedade do Logartimo do produto.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

$$y = \frac{\log_3 2^3 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

Iremos aplicar a propriedade do Logartimo da Potência no primeiro fator do numerador.

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p * \log_a x$$

$$y = \frac{\log_3 2^3 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$y = \frac{3 \times \log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$



Sabemos que  $\log_3 3 = 1$  e que, conforme fornecido no enunciado,  $\log_3 2 = 0,63$ . Substituindo os valores:

$$y = \frac{3 \times \log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$y = \frac{3 \times 0,63 + 1}{0,63 + 1}$$

$$y = \frac{2,89}{1,63} \rightarrow \boxed{y = 1,77}$$

Gabarito: Alternativa B

7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) A magnitude de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas, sob características padronizadas, produzidas durante um terremoto.

O poder destrutivo de um terremoto é proporcional à potência 3/2 de sua amplitude. A razão do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Richter, é de

- a)  $(10)^{1,5}$
- b)  $(10)^{-1,5}$
- c) 1
- d)  $(1/100)^{-1,5}$
- e)  $(1/10)^{1,5}$

#### Comentários:

O poder destrutivo  $D$  de um terremoto é proporcional à potência 3/2 de sua amplitude  $A$ . Ou seja,

$$D = A^{3/2}$$

A magnitude  $M$  de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas.

$$M = \log A$$

Vamos calcular a Magnitude e o poder Destrutivo para dois terremotos, de escalas 5 (terremoto I) e 6 (terremoto II) na escala Richter.

💡 I: 5 na escala Richter.



$$M = \log A$$

$$M_I = \log A_I$$

$$5 = \log A_I \rightarrow \boxed{A_I = 10^5}$$

De posse da Amplitude, calculamos o poder destrutivo  $D$ :

$$D = A^{3/2}$$

$$D_I = A_I^{3/2}$$

$$D_I = (10^5)^{3/2}$$

$$D_I = 10^{15/2} \rightarrow \boxed{D_I = 10^{7,5}}$$

 II: 6 na escala Ritcher.

$$M = \log A$$

$$M_{II} = \log A_{II}$$

$$6 = \log A_{II} \rightarrow \boxed{A_{II} = 10^6}$$

De posse da Amplitude, calculamos o poder destrutivo  $D$ :

$$D = A^{3/2}$$

$$D_{II} = A_{II}^{3/2}$$

$$D_{II} = (10^6)^{3/2}$$

$$D_{II} = 10^{18/2} \rightarrow \boxed{D_{II} = 10^9}$$

Sendo assim, a razão  $d$  do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Ritcher, é de:

$$d = \frac{D_I}{D_{II}}$$

$$d = \frac{10^{7,5}}{10^9}$$

$$d = 10^{7,5-9} \rightarrow \boxed{d = 10^{-1,5}}$$



Gabarito: Alternativa **B**

8. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Sejam  $x, M, N$  e  $P$  números reais positivos que tornam verdadeiras as igualdades

$$\frac{\log M}{2} = \frac{\log N}{6} = \frac{\log P}{4} = \log x$$

Qual é o valor de  $K$  para o qual

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

- a) -1
- b) 3
- c) 4
- d) 6
- e) 9

**Comentários:**

Vamos trabalhar com as igualdades uma a uma e calcular o valor de  $M, N$  e  $P$  em função de  $x$ .

■  $M$  em função de  $x$ :

$$\frac{\log M}{2} = \log x$$

$$\log M = 2 \times \log x$$

$$\log M = \log x^2 \rightarrow \boxed{M = x^2}$$

■  $N$  em função de  $x$ :

$$\frac{\log N}{6} = \log x$$

$$\log N = 6 \times \log x$$

$$\log N = \log x^6 \rightarrow \boxed{N = x^6}$$



  $P$  em função de  $x$ :

$$\frac{\log P}{4} = \log x$$

$$\log P = 4 \times \log x$$

$$\log P = \log x^4 \rightarrow \boxed{P = x^4}$$

Agora, de posse do valor das incógnitas em função de  $x$ , vamos substituir os valores na igualdade fornecida e calcular o valor de  $k$ .

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

$$\frac{(x^6)^2}{\sqrt{x^2 \times x^4}} = x^k$$

$$\frac{x^{6 \times 2}}{\sqrt{x^{2+4}}} = x^k$$

$$\frac{x^{12}}{\sqrt{x^6}} = x^k$$

$$\frac{x^{12}}{x^3} = x^k$$

$$x^{12-3} = x^k$$

$$x^9 = x^k \rightarrow \boxed{k = 9}$$

Gabarito: Alternativa E



## QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

### Função Logarítmica

1. (CESGRANRIO / DECEA - 2012) Considerem-se as funções logarítmicas  $f(x) = \log_4 x$  e  $g(x) = \log_2 x$ , ambas de domínio  $R_+^*$ .

Calculando-se  $f(72) - g(3)$ , o valor encontrado será de

- a) 1,0
- b) 1,5
- c) 2,0
- d) 2,5
- e) 3,0

#### Comentários:

Vamos calcular separadamente o valor de  $f(72)$  e de  $g(3)$ .

- $f(72)$

$$f(x) = \log_4 x$$

$$f(72) = \log_4 72$$

Iremos desenvolver  $\log_4 72$  mudando sua base para a base 2.

$$f(72) = \log_4 72 \rightarrow f(72) = \frac{\log_2 72}{\log_2 4}$$

Decompondo  $\log_2 72$  e desenvolvendo a equação:

$$f(72) = \frac{\log_2 72}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2^3 \cdot 3^3)}{2}$$

Aplicando em conjunto a propriedade do logaritmo do produto e da potência de logaritmo teremos:

$$\begin{aligned} f(72) &= \frac{\log_2(2^3 \cdot 3^2)}{2} = \frac{3 \log_2 2 + 2 \log_2 3}{2} \\ f(72) &= \frac{3 + 2 \log_2 3}{2} \end{aligned}$$



$$f(72) = \frac{3}{2} + \frac{2 \log_2 3}{2} \rightarrow f(72) = 1,5 + \log_2 3$$

- $g(3)$

$$g(x) = \log_2 x \rightarrow g(3) = \log_2 3$$

Sendo assim,

$$f(72) - g(3) = 1,5 + \log_2 3 - \log_2 3 \rightarrow f(72) - g(3) = 1,5$$

Gabarito: Alternativa **B**

2. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2012) Considere as funções  $g(x) = \log_2 x$  e  $h(x) = \log_b x$ , ambas de domínio  $R_+^*$ .

Se  $h(5) = 1/2$ , então  $g(b + 9)$  é um número real compreendido entre

- a) 5 e 6
- b) 4 e 5
- c) 3 e 4
- d) 2 e 3
- e) 1 e 2

**Comentários:**

A banca nos informa que  $h(5) = 12$ :

$$h(x) = \log_b x$$

$$1/2 = \log_b 5$$

$$b^{1/2} = 5 \rightarrow b = 25$$

De posse de  $b$ , calculamos  $g(b + 9)$ , isto é,  $g(34)$ .

$$g(x) = \log_2 x$$

$$y = \log_2 34 \rightarrow 2^y = 34$$



2 elevado a que número resulta em 34?

Sabemos que  $2^5 = 32$  e que  $2^6 = 64$ .

Logo, certamente, 2 elevado a um número entre 5 e 6 será igual a 34. Não precisamos saber qual esse número. A banca apenas nos questiona o intervalo em que  $y$  se encontra.

Gabarito: Alternativa **A**

3. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) Sejam  $F$  e  $G$  funções reais definidas em domínios convenientes, de modo que existam números reais  $y_1$  e  $y_2$  tais que

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G(x) = y_2 = x^3$$

Com as devidas restrições, a saber,  $y_2 \neq 0$ , podemos calcular  $F(y_2)$  e, nesse caso, encontraremos

- a)  $-3y_1$
- b)  $-y_1$
- c)  $y_1$
- d)  $3y_1$
- e)  $(y_1)^3$

**Comentários:**

Sabemos que  $y_2 = x^3$ . Então, estamos em busca do valor de:

$$F(y_2) \rightarrow F(x^3)$$

O enunciado nos informa que:

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sendo assim,  $F(x^3)$  será igual a:

$$F(x^3) = \log\left(\frac{1}{x^3}\right)$$



$$F(x^3) = \log\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$F(x^3) = \left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo da potência:

$$F(x^3) = 3 \times \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

A banca nos informa que  $y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$ . Substituindo teremos:

$$F(x^3) = 3 \times \log\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \boxed{F(x^3) = 3y_1}$$

Gabarito: Alternativa D

4. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) O “erro logarítmico” de ordem  $n$  ( $n$  natural maior que 1) de uma medição  $x$  ( $x$  real maior que um) é dado por

$$E_n(x) = \frac{1}{\log_n x}$$

Três técnicos avaliam, quanto ao erro logarítmico, uma medida, sendo que o primeiro avalia o erro de ordem 3, o segundo, o erro de ordem 4, e o terceiro, o erro de ordem 5. Por fim, os erros avaliados são somados, e o resultado é o erro total ( $ET(x)$ ) daquela medição.

Qual é o  $ET(60)$ ?

- a) 0
- b) 1
- c)  $\log_3 60 + \log_4 60 + \log_5 60$
- d)  $\log_3 60 \cdot \log_4 60 + \log_4 60 \cdot \log_5 60 + \log_5 60 \cdot \log_3 60$
- e)  $\frac{1}{\log_3 60 \cdot \log_4 60 \cdot \log_5 60}$

#### Comentários:

Ante de adentrarmos na resolução propriamente dita, vamos desenvolver a equação do erro:



$$E_n(x) = \frac{1}{\log_n x}$$

Iremos aplicar a propriedade da mudança de base no denominador. Mudaremos para a base  $x$ .

$$E_n(x) = \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\frac{\log_x n}{\log_x x}} = \frac{\log_x n}{\log_x x}$$

$\log_x x$  é igual a 1. Sendo assim:

$$E_n(x) = \frac{\log_x n}{\log_x x} = \frac{\log_x n}{1} \rightarrow E_n(x) = \log_x n$$

O erro total  $ET(x)$  será igual a soma do erro de ordem 3 mais o erro de ordem 5 mais o erro de ordem 5, isto é:

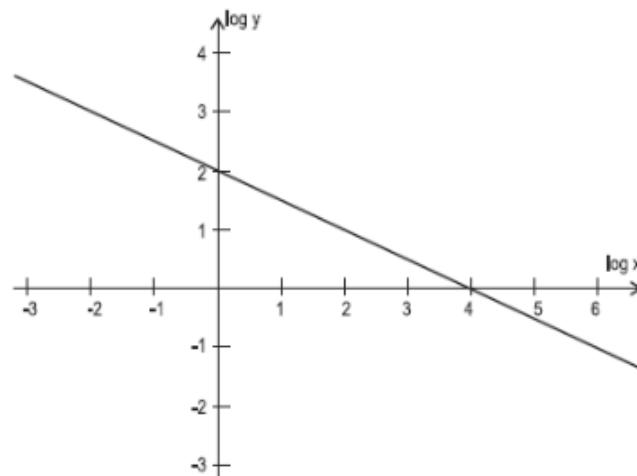
$$ET(x) = E_3(x) + E_4(x) + E_5(x)$$

Logo,  $ET(60)$  será igual a:

$$ET(60) = E_3(60) + E_4(60) + E_5(60) \quad \rightarrow \quad ET(60) = \log_3 60 + \log_4 60 + \log_5 60$$

Gabarito: Alternativa C

5. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Abaixo, tem-se o gráfico do logaritmo decimal de  $y$  em função do logaritmo decimal de  $x$ .



Das expressões a seguir, aquela que relaciona diretamente os valores das grandezas  $y$  e  $x$  é



- a)  $y = \frac{-x}{2} + 2$   
 b)  $x = \frac{-y}{2} + 2$   
 c)  $x^2y = 10.000$   
 d)  $xy^2 = 10.000$   
 e)  $x^2y^2 = 10.000$

**Comentários:**

Na aula de função do primeiro grau, estudamos que a equação da reta é igual a:

$$y = ax + b$$

Todavia, conforme o enunciado nos traz, estamos diante de um gráfico do logaritmo decimal de  $y$  em função do logaritmo decimal de  $x$ .

Logo:

$$\log y = a \log x + b$$

O Coeficiente Linear  $b$  é determinado pelo ponto em que a reta cruza o eixo  $y$ . No nosso caso:

$$b = 2$$

Para encontrar o valor de  $a$ , vamos substituir o ponto ( $\log y = 0$  ;  $\log x = 4$ ) que pertence à função e  $b = 2$ .

$$\log y = a \log x + b$$

$$0 = a \cdot 4 + 2$$

$$4a = -2 \rightarrow a = \frac{-2}{4} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Sendo assim, a equação será igual a:

$$\log y = a \log x + b \rightarrow \log y = -\frac{1}{2} \log x + 2$$

Multiplicando toda a equação por 2:

$$2 \log y = -\log x + 4$$

$$2 \log y + \log x = 4$$



Iremos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo da potência no fator  $2 \log y$ .

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$2 \log y + \log x = 4$$

$$\log y^2 + \log x = 4$$

Por fim, aplicaremos a "volta" da propriedade do Logartimo do produto.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log y^2 + \log x = 4$$

$$\log(y^2 \cdot x) = 4$$

$$y^2 \cdot x = 10^4 \rightarrow \text{y}^2 \cdot x = \mathbf{10.000}$$

Gabarito: Alternativa D

#### 6. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Sendo a função

$$f(x) = 2 \cdot \log_5 \left( \frac{3x}{4} \right)$$

em que  $x$  é um número real positivo,  $f(17)$  é um número real compreendido entre

- a) 1 e 2
- b) 2 e 3
- c) 3 e 4
- d) 4 e 5
- e) 5 e 6

**Comentários:**



Iremos desenvolver a expressão dada acima e encontrar  $f(17)$ .

$$f(x) = 2 \cdot \log_5 \left( \frac{3x}{4} \right)$$

$$f(17) = 2 \cdot \log_5 \left( \frac{3 \cdot 17}{4} \right)$$

$$f(17) = 2 \cdot \log_5(12,75)$$

Iremos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo da potência.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

Então:

$$f(17) = \log_5(12,75^2)$$

$12,75^2$  é igual a aproximadamente 162. Você não precisa calcular exato. Estamos querendo um intervalo para o valor de  $f(17)$ .

$$f(17) = \log_5(162) \rightarrow 5^{f(17)} = 162$$

5 elevado a que número resulta em 162?

Sabemos que  $5^3 = 125$  e que  $5^4 = 625$ .

Logo, certamente, para que possamos achar o valor de 162 (que está entre 125 e 625), precisamos elevar 5 a um número entre 3 e 4.

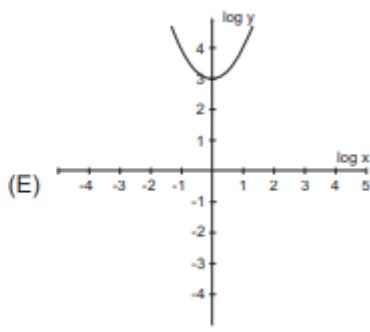
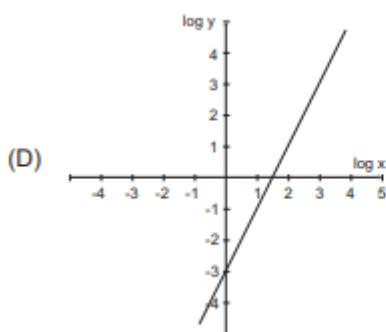
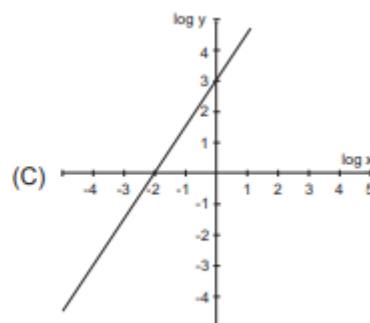
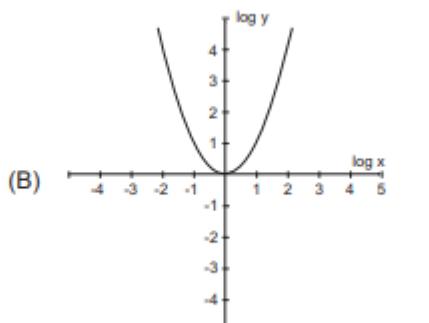
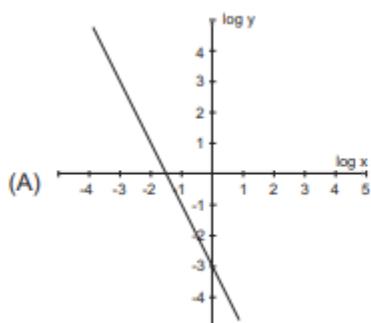
Qual será esse número? Não sabemos e não precisamos saber. Conforme dito, a banca nos questiona o intervalo em que está compreendido  $f(17)$ .

Sendo assim,  $f(17)$  estará compreendido entre os números 3 e 4.

Gabarito: Alternativa C



7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) As grandezas  $x$  e  $y$  são tais que  $x^2 = 1.000y$ . O gráfico que melhor representa a relação entre os logaritmos decimais de  $x$  e de  $y$  é



#### Comentários:

Perceba, inicialmente, que a escala das alternativas é a escala logarítmica. Então, muito cuidado para não assinalar as alternativas em que  $x^2 = 1.000y$  representa uma parábola. Seria uma parábola se estivéssemos trabalhando com a escala unitária convencional.

Sendo assim, iremos aplicar log dos dois lados da equação para encontrar o valor de  $\log y$  em função de  $\log x$ .

$$x^2 = 1.000y$$

$$\log x^2 = \log(1.000 \cdot y)$$

Iremos aplicar a propriedade do logaritmo da potência no lado esquerdo da igualdade e a propriedade do logaritmo do produto no lado direito.

$$\log x^2 = \log(1.000 \cdot y)$$

$$2 \log x = \log 1.000 + \log y$$

$$2 \log x = 3 + \log y$$



$$\log y = 2 \log x - 3$$

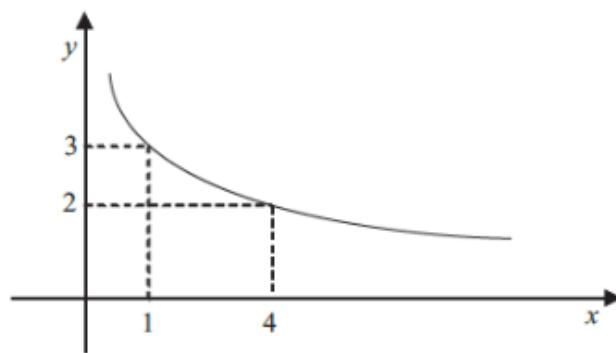
Ou seja, na escala logarítmica, estamos diante de uma reta com coeficiente angular ( $a = 2$ ) positivo e com coeficiente linear ( $b = -3$ ).

Sendo assim, teremos uma reta CRESCENTE que intercepta o eixo  $y$  em  $y = -3$ .

A única alternativa que nos traz esta condição é a Alternativa D.

Gabarito: Alternativa D

8. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) A função  $f(x) = b + \log_a x$ , onde  $a \in R_+^*$  e  $b \in R$ , está representada no gráfico abaixo.



Os valores de  $a$  e de  $b$ , respectivamente, são

- a)  $1/4$  e  $3$
- b)  $4$  e  $2$
- c)  $5$  e  $2$
- d)  $1/2$  e  $3$
- e)  $4$  e  $3$

**Comentários:**

Iremos substituir os pontos  $(1 ; 3)$  e  $(4 ; 2)$  na equação  $f(x) = b + \log_a x$  para determinar os valores de  $a$  e  $b$ .

- $(1 ; 3)$

$$f(x) = b + \log_a x$$

$$3 = b + \log_a 1$$



Sabemos que  $\log 1$  em qualquer base é igual a 0. Então,  $\log_a 1 = 0$ . Sendo assim:

$$3 = b + 0 \rightarrow b = 3$$

- (4 ; 2)

$$f(x) = b + \log_a x$$

$$2 = 3 + \log_a 4$$

$$2 - 3 = \log_a 4$$

$$\log_a 4 = -1$$

$$a^{-1} = 4 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Logo,  $a = \frac{1}{4}$  e  $b = 3$ .

Gabarito: Alternativa A



## LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

### Logaritmo

1. (CESGRANRIO / Casa da Moeda – 2024) Considere um objeto astronômico, como uma estrela, com brilho ou irradiação observada igual a  $b$ . A magnitude aparente desse objeto é dada por

$$5 \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$$

A magnitude aparente expressa em termos do logaritmo decimal é

- a)  $\frac{5}{2} \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$
- b)  $\frac{15}{2} \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$
- c)  $10 \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$
- d)  $20 \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$
- e)  $50 \log_{10} \left( \frac{b_0}{b} \right)$

2. (CESGRANRIO / BB - 2023) Um banco montou um índice de desempenho ( $L$ ) para um de seus serviços. O índice se refere a um atributo numérico, representado por  $A$ , sempre positivo. Por conta de o atributo  $A$  assumir valores muito altos, o índice  $L$  montado pelo setor técnico do banco foi concebido por  $L = \log_{10}(A)$ . Há uma meta de que, nos próximos 5 anos, o índice  $L$  aumente em duas unidades. A meta, portanto, indica que é esperado que, nos próximos 5 anos, o atributo  $A$  seja igual

- a) ao atributo  $A$  atual aumentado em 2 unidades.
- b) ao atributo  $A$  atual aumentado em 100 unidades.
- c) a 2 vezes o atributo  $A$  atual.
- d) a 10 vezes o atributo  $A$  atual.
- e) a 100 vezes o atributo  $A$  atual.

3. (CESGRANRIO / BR - 2015) Sejam  $M = \log 30$  e  $N = \log 300$ .



Na igualdade  $x + N = M$ , qual é o valor de x?

- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) +1
- e) +2

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2014) O valor de

$$\log_4[(8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8)^2]$$

é

- a) 9
- b) 18
- c) 27
- d) 36
- e) 72

5. (CESGRANRIO / BASA - 2013) Sabe-se que x e y são números reais tais que:

$$y = 5^{3x}$$

Conclui-se que x é igual a

- a)  $\log_5(y^3)$
- b)  $\log_5(y/3)$
- c)  $\log_5(\sqrt[3]{y})$
- d)  $-\log_5(3y)$
- e)  $\frac{1}{3 \log_5(y)}$

6. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dado  $\log_3 2 = 0,63$ , tem-se que  $\log_6(24)$  é igual a

- a) 1,89
- b) 1,77



- c) 1,63
- d) 1,51
- e) 1,43

**7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010)** A magnitude de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas, sob características padronizadas, produzidas durante um terremoto.

O poder destrutivo de um terremoto é proporcional à potência 3/2 de sua amplitude. A razão do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Richter, é de

- a)  $(10)^{1,5}$
- b)  $(10)^{-1,5}$
- c) 1
- d)  $(1/100)^{-1,5}$
- e)  $(1/10)^{1,5}$

**8. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011)** Sejam  $x$ ,  $M$ ,  $N$  e  $P$  números reais positivos que tornam verdadeiras as igualdades

$$\frac{\log M}{2} = \frac{\log N}{6} = \frac{\log P}{4} = \log x$$

Qual é o valor de  $K$  para o qual

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

- a) -1
- b) 3
- c) 4
- d) 6
- e) 9



## GABARITO

1. A
2. E
3. B
4. C
5. C
6. B
7. B
8. E



## LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

### Função Logarítmica

1. (CESGRANRIO / DECEA - 2012) Considerem-se as funções logarítmicas  $f(x) = \log_4 x$  e  $g(x) = \log_2 x$ , ambas de domínio  $R_+^*$ .

Calculando-se  $f(72) - g(3)$ , o valor encontrado será de

- a) 1,0
- b) 1,5
- c) 2,0
- d) 2,5
- e) 3,0

2. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2012) Considere as funções  $g(x) = \log_2 x$  e  $h(x) = \log_b x$ , ambas de domínio  $R_+^*$ .

Se  $h(5) = 1/2$ , então  $g(b + 9)$  é um número real compreendido entre

- a) 5 e 6
- b) 4 e 5
- c) 3 e 4
- d) 2 e 3
- e) 1 e 2

3. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) Sejam F e G funções reais definidas em domínios convenientes, de modo que existam números reais  $y_1$  e  $y_2$  tais que

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G(x) = y_2 = x^3$$

Com as devidas restrições, a saber,  $y_2 \neq 0$ , podemos calcular  $F(y_2)$  e, nesse caso, encontraremos

- a)  $-3y_1$
- b)  $-y_1$



- c)  $y_1$   
d)  $3y_1$   
e)  $(y_1)^3$

4. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) O “erro logarítmico” de ordem  $n$  ( $n$  natural maior que 1) de uma medição  $x$  ( $x$  real maior que um) é dado por

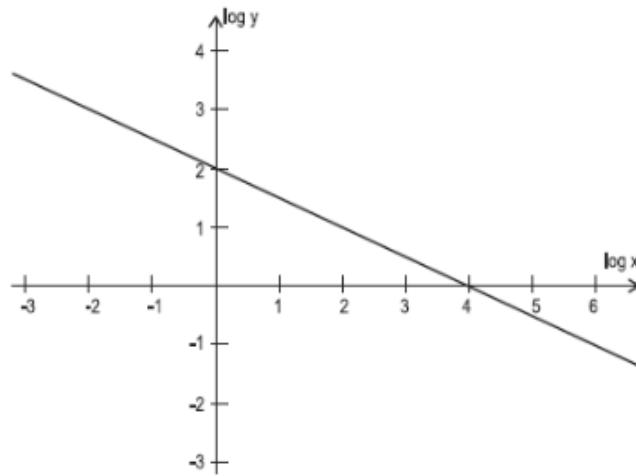
$$E_n(x) = \frac{1}{\log_n x}$$

Três técnicos avaliam, quanto ao erro logarítmico, uma medida, sendo que o primeiro avalia o erro de ordem 3, o segundo, o erro de ordem 4, e o terceiro, o erro de ordem 5. Por fim, os erros avaliados são somados, e o resultado é o erro total ( $ET(x)$ ) daquela medição.

Qual é o  $ET(60)$ ?

- a) 0  
b) 1  
c)  $\log_3 60 + \log_4 60 + \log_5 60$   
d)  $\log_3 60 \cdot \log_4 60 + \log_4 60 \cdot \log_5 60 + \log_5 60 \cdot \log_3 60$   
e)  $\frac{1}{\log_3 60 \cdot \log_4 60 \cdot \log_5 60}$

5. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Abaixo, tem-se o gráfico do logaritmo decimal de  $y$  em função do logaritmo decimal de  $x$ .



Das expressões a seguir, aquela que relaciona diretamente os valores das grandezas  $y$  e  $x$  é



- a)  $y = \frac{-x}{2} + 2$   
 b)  $x = \frac{-y}{2} + 2$   
 c)  $x^2y = 10.000$   
 d)  $xy^2 = 10.000$   
 e)  $x^2y^2 = 10.000$

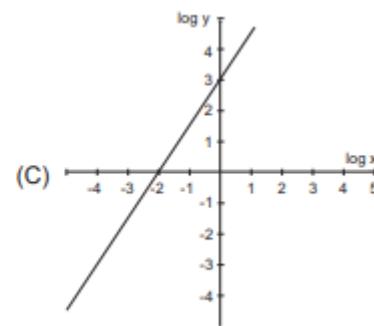
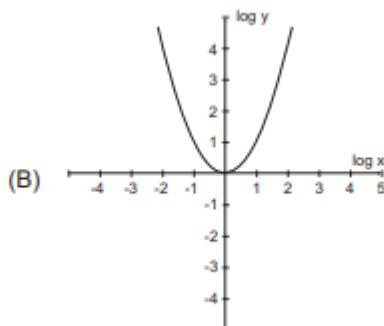
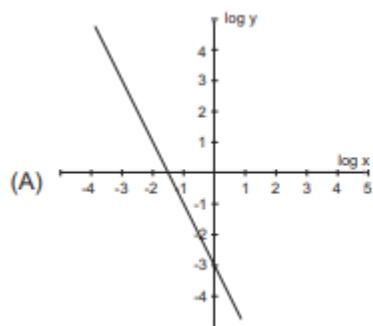
**6. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Sendo a função**

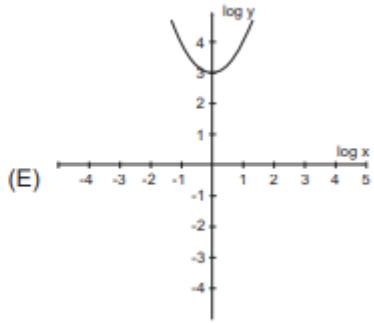
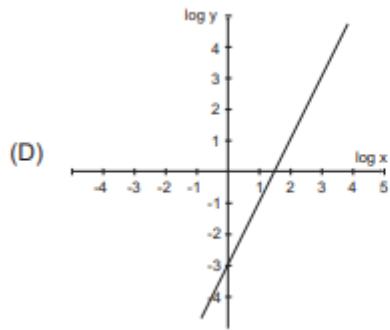
$$f(x) = 2 \cdot \log_5 \left( \frac{3x}{4} \right)$$

em que  $x$  é um número real positivo,  $f(17)$  é um número real compreendido entre

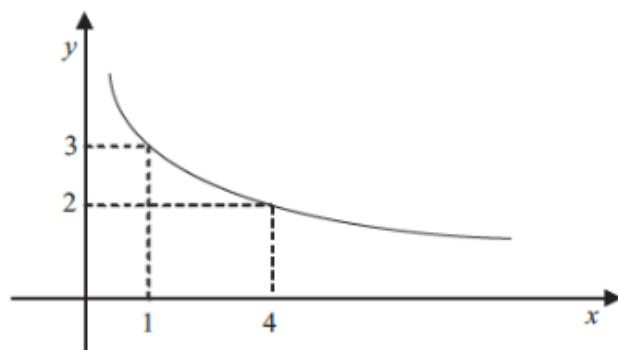
- a) 1 e 2  
 b) 2 e 3  
 c) 3 e 4  
 d) 4 e 5  
 e) 5 e 6

**7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) As grandezas  $x$  e  $y$  são tais que  $x^2 = 1.000y$ . O gráfico que melhor representa a relação entre os logaritmos decimais de  $x$  e de  $y$  é**





8. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) A função  $f(x) = b + \log_a x$ , onde  $a \in R_+^*$  e  $b \in R$ , está representada no gráfico abaixo.



Os valores de  $a$  e de  $b$ , respectivamente, são

- a)  $1/4$  e  $3$
- b)  $4$  e  $2$
- c)  $5$  e  $2$
- d)  $1/2$  e  $3$
- e)  $4$  e  $3$



## GABARITO

1. B
2. A
3. D
4. C
5. D
6. C
7. D
8. A



# ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1

Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2

Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3

Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4

Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5

Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6

Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7

Concursado(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8

O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.