

수학과 학부를 다니는 학생들에게 들어 보면 그 중에서 미분기하가 가장 어려운 과목의 하나라고 한다. 수학과 과목을 가르치는 교수 입장에서는 결코 그렇지 않다고 생각하면서도 학생들이 어렵다고 하는 것이 무엇인지도 잘 알고 있다고 생각한다. 이 점을 명확히 설명하면 미분기하를 어떻게 공부할지를 설명한 것이라고 할 수도 있겠다는 생각이 든다.

해석학은 어렵다.

우선 수학과 과목들을 돌아보며 어느 과목이 정말 어려운지, 적어도 내가 보는 바에 대하여 이야기 하여 보자. 수학과와 코어(core) 과목 가운데서도 가장 중요하고 또 어려운 것은 내가 보기에는 해석학 과목이다. 2학년에 1년에 걸쳐서 공부하여야 하는 해석학은 학부 수학 거의 대부분의 중심을 이루고 있다. 대수학 또한 코어 과목의 하나지만 이와는 조금 동떨어진 듯 하고 해석학 만큼 여러 분야에 걸쳐 중요한 역할을 하고 있지는 못하다.

대부분의 학생들은 해석학이 중요하다는 데는 동의하겠지만 어렵다는 점에서는 나만큼 어렵게 생각하고 있지는 않을 것이다. 이것은 학생들의 잘못은 아니다. 아직 끝까지 공부해보지 않은 채로는 해석학이 어렵다는 것을 알아내기는 쉽지 않다.

더 나아가기 전에 어렵다는 것이 무슨 말인가 부터 정확하게 해 놓고 나서 이야기하자. 우선 모든 분야는 위로 올라갈수록 어려워진다. 이것은 예외가 있을 수 없는 법칙이다. 그럼 해석학(해석학개론) 과목이 어렵다는 것은 무슨 말인가? 우리가 생각해 보려는 것은 대학원 과정과 같이 고급의 이론으로 올라가지 않고 학부 수준만 이해하는 것이 얼마나 어려운가 하는 것이다.

미분기하-어려운 과목인가.

예를 들어 미분기하가 조금 어렵다고는 하지만 학부 수준의 내용은 조금 시간을 투자하여 계산만

잘 할 수 있게 되면 그리 어렵지 않다. 그러나 해석학은 고급 해석학으로 올라가지 않고 그냥 해석학 개론 교과서에 나오는 내용을 이해하는 것 자체만 봐도 결코 쉽지 않다. 한번 제대로 공부한 뒤에도 다시 들여다보면 새록새록 이해안되었던 부분이 보이고, 이런 것들을 깨우쳐도 다른 분야의 공부를 하다 보면 또 해석학 개론에서 안다고 생각했던 것을 아직 잘 모르고 있구나 하는 생각이 들곤 한다. 그래서 이리 저리 하다가 결국 드는 생각은 내가 공부하는 미분기하는 해석개론을 공부하며 알게된 이론을 써먹는 응용수학 같은 것이라는 점이다. 미분기하만이 아니라 해석학의 다른 분야나 위상수학은 물론 미분방정식을 필두로한 모든 응용수학은 바로 이 해석개론의 응용문제요 연습이라는 생각이 든다. 해석학과 선형대수.

지금 우리가 공부하는 교육과정은 아마도 20세기 중반에 들어서서 만들어진 것이 아닌가 생각된다. 몇 개의 중심과목을 만들고 가르치기 편하게 나누다가 보니까 해석학은 2학년 또는 3학년에 1년 또는 1년 반동안 공부하는 과목으로 전략(!)해 버렸는지 모르지만 그보다 먼저 만들어진 교과서를 보면 해석학이 수학의 전체였던 듯이 보인 적도 그리 오래지 않다. 대표적인 교과서로는 구 소련의 수학자 Smirnov가 만든 교과서 시리즈는 해석학과 그의 응용으로서 모든 기본적인 수학을 설명하고 있다.¹

그 다음으로 중요한 과목은 뭐니뭐니 해도 선형대수가 아닐 수 없다. 선형대수는 예전에는 선형기하(!)라고 불렸었지만 근래에 들어선 선형대수라는 이름으로 잘 불린다. 이 과목은 다변수 1차함수의 이론이다. 고등학교 미적분이 1변수함수의 일반적인 이론이라면 해석학은 어떤 의미에서 다변수함수의 일반적인 이론이라 할 수 있고, 이를 잘 하려면 적

¹이 책의 내용은 미적분학에서부터 대략 대학원 석사 과정 정도 까지의 범위를 다룬 다섯 권짜리 책이다.

어도 다변수 1차 및 2차함수 정도는 꿰차고 있어야 할 것이다. 이것이 선형대수인 것이다. 중요하지 않다 할 수가 없다. 자 이제 수학과 과목들을 보면 이 두 과목을 공부하고 나서 공부하게 되어 있다. 미분기하도 예외가 아니어서 미분이 무엇인지, 다변수 1, 2차 함수를 어떻게 다루는지, 선적분 면적분이 무엇인지는 다 알고 있다고 하고 시작한다.

미분기하-왜 어렵다는가.

미분기하는 결코 어려운 수학을 알고 나야 하는 과목이 아니다. 그렇다고 미분기하에 나오는 내용이 위상수학처럼 매우 고차원적인 이야기를 하고 있는 것도 아니다. 그러면 미분기하는 왜 어렵다고들 하는가? 다른 모든 과목들과 다른 점이 있다면 단 하나가 있다. 미분기하에서 사용하는 계산들은 다변수 1, 2차함수와 선적분, 면적분들을 많이 사용한다. 그것도 다른 과목에 비해서 매우 많이 사용한다. 그런데 이 부분은 미적분학에서 다 배운 것임에도, 그리고 해석학에서, 선형대수에서 또 공부한 것임에도 그 과목들의 맨 뒤에 나와서 조금은 소홀히 하고, 또 금방 잊어버린 사람들이 많은 그런 부분이다. 따라서 미분기하 공부를 시작하는 순간 처음부터 뭔가 잘 모르는 것 같은 것이 많이 튀어 나온다는 느낌이 드는 것이다.

방법은 따로 있을 수가 없다. 다변수 1, 2차함수와 벡터해석 부분을 잘 공부해 두는 수 밖에 없다. 미리 공부하기는 어려운 것이므로 미분기하를 공부하는 동안에 그 책들을 옆에다 두고 같이 읽어보는 성의는 필요하다. 이 정도만으로도 미분기하가 어렵다는 생각은 들지 않을 것이다. 과목마다 과목의 특성이 있고 이 특성에 맞게 공부하지 않으면 실패하기 쉽다. 위상수학의 특징이 혼자서 시간을 들여 상상을 거듭 해보아야 하는 것이라면, 미분기하는 미적분학과 선형대수 책을 옆에 두고 계속하여 계산해 보아야 하는 것이라고 할 수 있다.

공부를 시작하며.

미분기하 공부를 시작하면서 준비할 몇 가지를 구체적으로 들어 보자.

- (1) 우선 다변수 1, 2차 함수의 이론을 조금은 알아야 한다. 그렇다고 선형대수 책을 전부 다시 읽을 필요는 없다. 다행히도 학부 미분기하에서 다루는 선형대수는 거의 대부분이 2변수인 경우 뿐이다. 따라서 벡터도 2-벡터, 행렬도 2×2 -행렬이면 된다.

책을 다시 읽을 필요는 없고 책을 뒤적이면서 무슨 이야기가 있었는가를 알아본다. 결국 중요한 부분은 행렬의 고유값을 써서 행렬을 대각화하는 것이다. 그러나 이 부분은 실제로 사용할 때 가서 알아보아도 늦지 않다.

- (2) 벡터해석학에서 그린의 정리를 가끔씩 쓴다. 이 정리는 1학년 미적분학 교과서에 있는 것이면 충분하다. 한번 읽어보고 오는 정도면 된다.
- (3) 실제로 많이 쓰는 것은 미적분학에서 하던 것과 같은 셈들이다. 이것도 숫자를 가지고 하는 셈이 아니라 문자를 가지고 하게 된다. 이 계산들은 미리 공부할 틈이 없을 것이다. 미적분학의 책 내용을 모두 다시 읽고 계산해볼 틈을 없으니까 잘 못하면 못하는대로 시작한 다음 미분기하를 공부하면서 계산력을 기르기로 한다. 그 대신 계산을 잘 하는 사람들 보다는 조금 더 시간을 투자해야 한다는 것은 당연하다.
- (4) 당연히 필요하지만 전혀 준비할 수 없는 것에 '공간지각력'이 있다. 이것은 오랜 기간에 걸쳐 발달되는 능력이며 어떻게 하여야 한다는 법칙이 있는 것이 아니다. 이것이 조금 모자라면 다른 사람들보다 힘들다고 느끼기 쉽다. 그러나 사실 공간지각력이 높은 사람은 많지 않다. 사람들 대부분은 모자라

는 공간지각력을 가지고 어찌어찌해서 살아간다.

조금 도움을 받을 수 있는 것은 예를 들어 미적분학을 공부할 때 2차곡면의 그림과 같은 것을 많이 그려보며 도형과 그 방정식의 관계를 하나씩 분석하여 보는 것이다. 다시 말하면 수학에 나오는 그림을 많이 그려보고 상상해보는 것이다. 이것은 기하학에만 중요한 것이 아니라 위상수학, 해석학을 공부하는 데도 매우 중요하다.

공부를 하는 동안에.

공부를 하는 동안에 잊지 않아야 하는 것은 복습을 철저히 하는 것이다. 다른 수학 과목들과는 달리 미분기하는 레벨이 낮은 계산들이 매우 많다. 따라서 할 때는 잘 이해가 되는 듯이 보이면서도 다음 시간에 와 보면 지난 시간에 뭘 했었는지 잘 생각이나지 않는다. 혹 무슨 정리를 증명했는지는 기억이나도 어떻게 했는지는 전혀 생각이 안 날 때가 많다.

이것은 대부분의 증명이 어떤 획기적인 아이디어를 사용하고 있지 않은 평범한 계산이라서 그렇다. 오히려 반짝하는 아이디어가 있었던 증명은 잘 잊혀지지 않는다. 그러나 누구나 할 수 있는 계산을 열심히 하여 결론에 도달하는 것은 쉽게 잊혀지게 된다. 이런 것들이 많이 쌓이면 '뭔가 잘 모르겠는데 다시 들여다 봐도 뭘 모르는지 알아낼 수 없는' 이상한 상태에 빠지게 된다.

따라서 계산의 과정을 모두 기억할 필요는 없겠지만 어떤 계산을 했는가 하는 요점만은 기억을 해둘 필요가 있다. 요컨대 계산을 많이 해보는 습관을 들여야 한다.

미분기하-뭘 배우나.

미분기하란 우리 눈에 보이는 대상의 성질을 연구하는 것이다. 그것도 미적분을 써서 하는 것이므로 대상이 매끄러운(smooth) 곡선이나 곡면이 아니면 안 된다.

따라서 적어도 한 학기는 곡선에 대한 이론을 먼저 배우고 그 다음에 곡면에 대한 이론을 배운다. 어려운 이론은 다루지 않으므로 유클리드 공간 안에 놓여있는 곡선과 곡면을 미적분을 써서 (즉, ϵ -근방 안의 모양만으로 결정되는) 조그만 부분의 성질들을 중심으로 공부한다.

그러며 왜 이런 것을 하는지, 이걸 알면 뭘 할 수 있는지 등에 대한 궁금증에 대한 대답으로 한 두 가지 응용을 알아본다. 이러한 응용들은 순수수학의 정수와 같은 결과이며 여러 분야에 응용되는 가능성을 가진 것이므로 재미있지만 깊은 뜻을 가진 것이다.²

잘 하면 좋은 것.

미분기하를 공부하면서 계산을 잘 하라는 말을 했지만 이것 말고도 잘 했으면 하는 것이 하나 더 있다. 이미 공부했던 수학들을 보며 잘 알 수 있는 것이 계산만 잘 하면 뭔가 조금 모자라는 느낌을 받는다. 사실 수학을 잘 하는 것은 계산을 잘하며 한편 그 내용을 잘 이해하는 것이라고 할 수 있다. 이해한다는 것이 뭘지는 설명하기가 쉽지 않지만, 잘 이해하려면 전체 이론이 나아가고 있는 방향 내지는 지향하는 방향을 놓치지 않는 것이 중요하다. 수학의 이론들이 이러한 방향을 알아내기 힘들게 되어 있지만 이것을 생각하는 사람과 그렇지 않는 사람은 시간이 경과하면 많은 차이를 보이게 된다. 특히 이것은 가르쳐서 되는 것이 아니므로 스스로 터득하여야 하며 그 방법은 서로 토론하고 더 잘 아는 사람들의 견해를 듣고 생각하여 자기 나름대로의 의견을 다듬어 나가는데 있다.

²예를 들면 DNA의 길이를 사진만 보고 정확하게 알아내는 방법이라던가, 어떤 단백질 분자는 간단히 접히고 풀리는가, 고속도로를 어떻게 만들어야 운전자에게 편안하며 사고 위험이 적은가, 잠수함은 어떤 모양으로 만들어야 근처에서 폭뢰가 터져도 더 안전한가, 공장의 제조라인의 로봇의 팔은 어떻게 디자인하여야 좁은 공간에서 많은 일을 효율적으로 할 수 있는가 등등 많은 응용문제들은 미분기하의 도움을 필요로 한다.

성공하는 마음가짐.

성공하는 방법으로는 꾸준함보다 더 나은 것은
절대로 없다. 하나를 이해하여도 자만하지 말며, 남
보다 잘 못하는 것 같아도 절대로 실망할 필요 없이

꾸준히 하면 나도 모르는 사이에 원하던 것보다 더
높은 데 올라서 있게 된다. 열심히 찾아보고 물어보
고 읽어보고 하는 가운데 발전이 있고 목표에 한 걸
음 더 가까워진다.

