ທະນາຄານແຫ່ງ ສປປ ລາວ

ສະຖາບັນການທະນາຄານ

ຄະນິດສາດ

ຮຽບຮຽງໂດຍ: ອາຈານ ຄໍາພຸດ ໂສພາລີ
ອາຈານ ເຢີຢ່າງ ເຍ່ຍຕູ້
ກວດແກ້ໂດຍ: ກຸ່ມວິຊາຄະນິດສາດ

ຄຳນຳ

ເພື່ອໃຫ້ນັກສຶກສາສະຖາບັນການທະນາຄານມີປື້ມອ່ານປະກອບການຮຽນວິຊາຄະນິດສາດ ແລະ ເພື່ອເປັນເອກະສານຄົ້ນຄ້ວາຂອງອາຈານໃນການສິດສອນວິຊາຄະນິດສາດ, ພວກຂ້າພະເຈົ້າໄດ້ຮຽບຮຽງປື້ມຫົວນີ້ອອກມາ.

ໂຄງສ້າງເນື້ອໃນປື້ມຫົວນີ້ແມ່ນໄປຕາມເນື້ອໃນວິຊາຄະນິດສາດທີ່ສອນຢູ່ໃນສະຖາບັນການສຶກສາຊັ້ນສູງ ແລະ ມະຫາວິທະຍາໄລ. ເນື້ອໃນຂອງປື້ມຫົວນີ້ສ່ວນໜຶ່ງແມ່ນເປັນການທວນຄືນວິຊາຄະນິດສາດຊັ້ນມັດທະຍົມປາຍ ແລະ ໄດ້ເພີ່ມເຕີມບາງຫົວຂໍ້ເຂົ້າຕື່ມເພື່ອຍົກລະດັບໃຫ້ນັກສຶກສາເຫັນໄດ້ການນຳເອົາວິຊາຄະນິດສາດໄປໃຊ້ໃນຂົງເຂດເສດຖະກິດ

ເຖິງແມ່ນວ່າ ເນື້ອໃນສ່ວນໃຫຍ່ຂອງປື້ມຫົວນີ້ໄດ້ໃຊ້ເປັນບົດສອນຂອງອາຈານໃນຫຼາຍໆສົກຮຽນຜ່ານມາແລ້ວກໍຕາມ ແຕ່ອາດຍັງມີສິ່ງຂາດຕົກບົກຜ່ອງ, ດັ່ງນັ້ນພວກຂ້າພະເຈົ້າຈະຖືເປັນພະຄຸນຢ່າງສູງຖ້າທ່ານຜູ້ອ່ານໄດ້ໃຫ້ຄວາມກະລຸນາສົ່ງຂ່າວມາຍັງພວກຂ້າພະເຈົ້າເພື່ອປັບປຸງປື້ມຫົວນີ້ໃຫ້ດີຂື້ນເລື້ອຍໆ ແລະ ມີຄວາມສອດຄ່ອງຫຼາຍຂື້ນ.

ຄຳພຸດ ໂສພາລີ
1 ສິງຫາ 2013

ສາລະບານ

ເອກະສານອ້າງອີງ

1. ຄະນິດສາດ 1 ສໍາລັບວິທະຍາໄລວິທະຍາສາດພື້ນຖານ ມະຫາວິທະຍາໄລແຫ່ງຊາດ , 2000
2. ຄະນິດສາດ 2 ສໍາລັບວິທະຍາໄລວິທະຍາສາດພື້ນຖານ ມະຫາວິທະຍາໄລແຫ່ງຊາດ , 2001
3. ຄະນິດສາດສໍາລັບເສດຖະສາດ 210MA221 ມະຫາວິທະຍາໄລແຫ່ງຊາດ , 2002
4. Mathamatic for Business ຄະນະເສດຖະສາດ ມະຫາວິທະຍາໄລແຫ່ງຊາດ , 1999
5. ຄູ່ມືກຽມສອບຄະນິດສາດ ມ.4.5.6 ຮອງສາດສະດາຈານ ສະໄໝ ເຫຼົ່າວານິດ ຫຼັກສູດການສຶກສາຂັ້ນພື້ນຖານ ພສ 2544.
6. ຄະນິດສາດ ມ.5 ເຫຼັ້ມ 3 ຄ 013 ຫຼັກສູດປັບປຸງໃໝ່ ສສວທ ລ່າສຸດ ຮອງສາດສະດາຈານ ການົນ ເອກໄທຈະເລີນ.

ບົດທີ 1

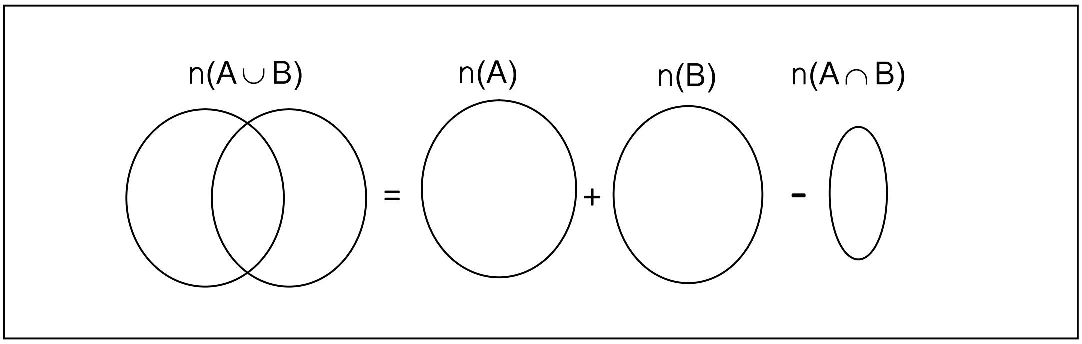
ການນັບ

(Counting)

1.1 ເຕັກນິກພື້ນຖານໃນການນັບ.

1.1.1. ໃຊ້ຫຼັກການການໂຮມ ແລະ ການຕັດ.

ເມື່ອ A ແລະ B ເປັນກຸ່ມຈຳກັດຈະເຫັນໄດ້ວ່າ



ຕົວຢ່າງ 1: ທະນາຄານ A ໄດ້ປ່ອຍສິນເຊື່ອໃຫ້ລູກຄ້າໃນໝູ່ບ້ານແຫ່ງໜຶ່ງທີ່ດຳເນີນທຸລະກິດລ້ຽງໝູ ແລະ ລ້ຽງປາທັງໝົດ 10 ຄອບຄົວ. ຮູ້ວ່າລູກຄ້າທີ່ດຳເນີນທຸລະກິດລ້ຽງໝູມີ 8 ຄອບຄົວ, ລູກຄ້າທີ່ດຳເນີນທຸລະກິດລ້ຽງປາມີ 6 ຄອບຄົວ. ຖາມວ່າລູກຄ້າທີ່ດຳເນີນທຸລະກິດທັງສອງປະເພດມີຈັກຄອບຄົວ?

ວິທີແກ້: ໃຫ້ A ແທນກຸ່ມລູກຄ້າທີ່ລ້ຽງໝູ

B ແທນກຸ່ມລູກຄ້າທີ່ລ້ຽງປາ

ຮູ້ວ່າ $n(A\cup B) = 10$, $n(A) = 8$, $n(B) = 6 \Rightarrow n(A\cap B) = ?$

ຈາກສູດ $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

ຖອນໄດ້ $n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cup B)$

$n(A\cap B) = 8 + 6 - 10 = 4$

1.1.2. ໃຊ້ແຜນວາດຂອງແວນ.

ຕົວຢ່າງ 2: ໃນໂອກາດວັນຄູແຫ່ງຊາດທີ 7 ຕຸລານັກຂ່າວໄດ້ສຳພາດນັກສຶກສາສອງຫ້ອງຈຳນວນ 60 ຄົນພົບວ່າມີ 35 ຄົນມອບຊໍ່ດອກໄມ້ໃຫ້ຄູອາຈານ, ມີ 25 ຄົນຂຽນບັດອວຍພອນຄູອາຈານ ແລະ ນັກສຶກສາ 10 ຄົນທັງຂຽນບັດອວຍພອນ ແລະ ມອບຊໍ່ດອກໄມ້ໃຫ້ຄູອາຈານ. ຖາມວ່າມີນັກສຶກສາຈັກຄົນທີ່ບໍ່ເຮັດທັງສອງຢ່າງ?

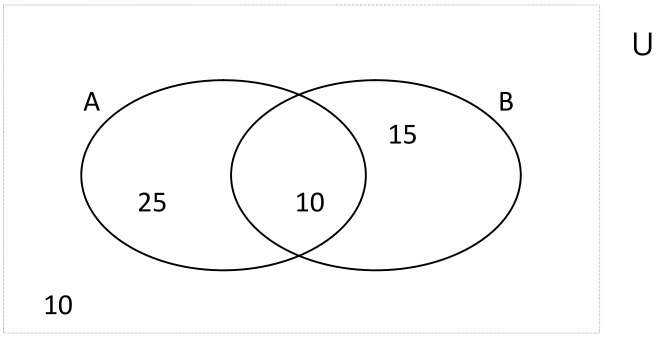
ວິທີແກ້: ໃຫ້ A ແທນກຸ່ມນັກສຶກສາທີ່ມອບຊໍ່ດອກໄມ້

B ແທນກຸ່ມນັກສຶກສາທີ່ຂຽນບັດອວຍພອນ

ຮູ້ວ່າ $n(A\cup B) = 60,\ n(A) = 35,\ n(B) = 25,\ n(A\cap B) = 10$

$n[(A\cup B)'] = ?$

ໂດຍໃຊ້ແຜນວາດຂອງແວນເຮົາສາມາດແຍກກຸ່ມຕ່າງໆທີ່ບໍ່ຕັດກັນແລ້ວວາງຈຳນວນອົງປະກອບຂອງກຸ່ມເຫຼົ່ານັ້ນໃສ່ໃນເຂດຂອງມັນໂດຍເລີ່ມວາງໃສ່ເຂດທີ່ຢູ່ດ້ານໃນກ່ອນຈະໄດ້ດັ່ງນີ້



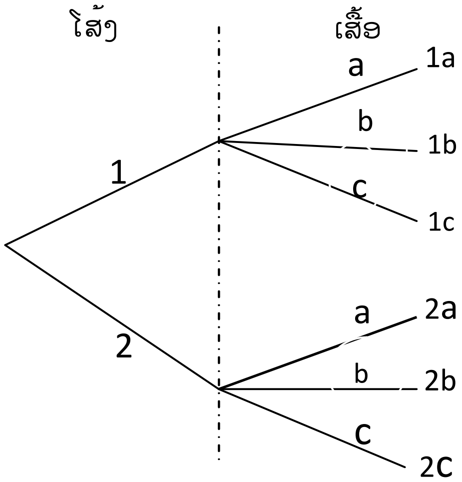
ຈາກແຜນວາດນີ້ຈະເຫັນວ່າຈຳນວນນັກສຶກສາທີ່ບໍ່ເຮັດທັງສອງຢ່າງຄືຈຳນວນທີ່ຢູ່ນອກທັງສອງກຸ່ມມີ 5 ຄົນ $\Rightarrow n[(A\cup B)'] = 10$

1.1.3. ໃຊ້ແຜນວາດງ່າໄມ້.

ຕົວຢ່າງ 3: ມີໂສ້ງ 2 ຜືນສີຕ່າງກັນ ແລະ ເສື້ອ 3 ຜືນສີຕ່າງກັນ. ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ຈະນຸ່ງເຄື່ອງໃຫ້ເປັນຊຸດແຕກຕ່າງກັນໂດຍບໍ່ໃຫ້ນຸ່ງໂສ້ງ ແລະ ເສື້ອສີດຽວກັນຊ້ຳກັນ.

ວິທີແກ້: ໃຫ້ 1, 2 ແທນໂສ້ງ 2 ຜືນທີ່ມີ.

ໃຫ້ a, b, c ແທນຈຳນວນເສື້ອ 3 ຜືນທີ່ມີ.



ຈາກແຜນວາດດັ່ງກ່າວສະຫຼຸບໄດ້ວ່າສາມາດເລືອກນຸ່ງເຄື່ອງໃຫ້ເປັນຊຸດແຕກຕ່າງກັນທັງໝົດໄດ້ 6 ວິທີ

1.1.4. ໃຊ້ຫຼັກການການຄູນ

<u>ຫລັກເກນ</u> ໃນການເຮັດວຽກໃດໜຶ່ງ, ຕັ້ງແຕ່ເລີ່ມຕົ້ນຈົນວຽກງານສຳເລັດລວມມີ k ຂັ້ນຕອນທີ່ຕ່າງກັນ, ຊຶ່ງຂັ້ນຕອນທີ 1 ສາມາດເຮັດໄດ້ n_1 ວິທີຕ່າງກັນ. ຂັ້ນຕອນທີ 2 ສາມາດເຮັດໄດ້ n_2 ວິທີຕ່າງກັນ. ຂັ້ນຕອນທີ 3 ສາມາດເຮັດໄດ້ n_3 ວິທີຕ່າງກັນ.....ແລະ ຂັ້ນຕອນທີ k ສາມາດເຮັດໄດ້ n_k ວິທີຕ່າງກັນ. ຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ເຮັດວຽກ k ຂັ້ນຕອນເທົ່າກັບ $n_1.n_2.n_3 \ldots\ldots n_k$ ວິທີ.

ຕົວຢ່າງ 4: ໃນການພິມໃບຫວຍຊຸດໜຶ່ງ 3 ຕົວເລກ. ຖາມວ່າໃບຫວຍຊຸດດັ່ງກ່າວຈະມີ

ກ. ໃບຫວຍທັງໝົດຈັກໃບ ?

ຂ. ໃບຫວຍທີ່ເປັນຈຳນວນຄີກຈັກໃບ ?

ວິທີແກ້:

ຕົວເລກທີ່ຈະນຳມາຈັດໃສ່ໃບຫວຍມີ 0,1, 2, 3,.......,9. ມີທັງໝົດ 10 ຕົວເລກ. ໃບຫວຍປະດ້ວຍຕົວເລກ 3 ຫຼັກ ຊຶ່ງແຕ່ລະຫຼັກສາມາດຊ້ຳກັນໄດ້ໂດຍເລືອກຈາກຕົວເລກ 0 ຫາ 9

ກ. ຈຳນວນໃບຫວຍທັງໝົດ

$\square$ $\square$ $\square$ ຈຳນວນໃບຫວຍທັງໝົດແມ່ນ $10 \times 10 \times 10 = 1{,}000$ ໃບ.

10 10 10

ຂ. ຈຳນວນໃບຫວຍທີ່ເປັນຈຳນວນຄີກ

ເພື່ອໃຫ້ໄດ້ໃບຫວຍທີ່ເປັນຈຳນວນຄີກຕົວເລກທ້າຍຂອງໃບຫວຍຕ້ອງເປັນເລກຄີກ ເຮົາເຫັນວ່າຕົວເລກທັງໝົດມີຈຳນວນຄີກຢູ່ 5 ຕົວຄື: 1, 3, 5, 7 ແລະ 9 ເລືອກມາໃສ່ຫຼັກໜ່ວຍໄດ້ 5 ວິທີ. ສ່ວນຕົວເລກໃນຫຼັກ 10 ແລະ ຫຼັກ 100 ບໍ່ມີເງື່ອນໄຂໃດແລ້ວສາມາດເລືອກຕົວເລກທັງ 10 ຕົວມາໃສ່ສອງບ່ອນທີ່ຍັງເຫຼືອຈັດໄດ້ທັງໝົດດັ່ງນີ້:

$\square$ $\square$ $\square$ ຈຳນວນໃບຫວຍທີ່ເປັນຈຳນວນຄີກເທົ່າກັບ $10 \times 10 \times 5 = 500$

10 10 5

ຕົວຢ່າງ 5: ຈາກຕົວເລກ 0, 4, 6, 7, 8 ຈະສາມາດສ້າງເປັນຈຳນວນທີ່ມີ 4 ຕົວເລກ ໃຫ້ມີຄວາມໝາຍເລກບໍ່ຊ້ຳກັນໄດ້ຈັກຈຳນວນ.

ກ. ເປັນຈຳນວນໃດກໍ່ໄດ້. ຂ. ເປັນຈຳນວນໃຫ່ຍກ່ວາ 7000.

ຄ. ເປັນຈຳນວນຄູ່. ງ. ເປັນຈຳນວນຫານຂາດໃຫ້ 5 ແລະ ນ້ອຍກ່ວາ 7000.

ວິທີແກ້:

ກ. ເປັນຈຳນວນໃດກໍ່ໄດ້ແຕ່ໃຫ້ມີຄວາມໝາຍນັ້ນໝາຍຄວາມວ່າເລກ 0 (ສູນ) ບໍ່ສາມາດເອົາມາໃສ່ຫຼັກພັນໄດ້ດັ່ງນັ້ນຕົວເລກທີ່ເອົາມາໃສ່ຫຼັກພັນໄດ້ມີ 4 ຕົວເລກຍົກເວັ້ນ 0. ສ່ວນຫຼັກ 100, ຫຼັກ 10 ແລະ ຫຼັກໜ່ວຍມີແຕ່ເງື່ອນໄຂບໍ່ຊ້ຳກັນ. ດັ່ງນັ້ນເອົາຕົວເລກທີ່ຍັງເຫຼືອມາຈັດໃສ່ 3 ບ່ອນທີ່ຍັງເຫຼືອໂດຍຫຼຸດລົງເທື່ອລະ 1 ຈຳນວນສາມາດຈັດໄດ້ດັ່ງນີ້:

$\square$ $\square$ $\square$ $\square$ ຈຳນວນທັງໝົດເທົ່າກັບ $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ ຈຳນວນ

4 4 3 2

ຂ. ເປັນຈຳນວນໃຫຍ່ກວ່າ 7000

ເພື່ອໃຫ້ໄດ້ຈຳນວນໃຫຍ່ກວ່າ 7000 ໝາຍຄວາມວ່າຕົວເລກທີ່ເອົາມາໃສ່ຫຼັກພັນໄດ້ມີພຽງສອງຕົວເລກຄື 7 ຫຼື 8ເລືອກໄດ້ 2 ວິທີ. ສ່ວນຫຼັກ 100, ຫຼັກ 10 ແລະ ຫຼັກໜ່ວຍມີແຕ່ເງື່ອນໄຂບໍ່ຊ້ຳກັນ. ດັ່ງນັ້ນເອົາຕົວເລກທີ່ຍັງເຫຼືອມາຈັດໃສ່ 3 ບ່ອນທີ່ຍັງເຫຼືອໂດຍຫຼຸດລົງເທື່ອລະ 1 ຈຳນວນສາມາດຈັດໄດ້ດັ່ງນີ້:

□	□	□	□	ຈຳນວນທັງໝົດເທົ່າກັບ $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ ຈຳນວນ
2	4	3	2	

ຄ. ເປັນຈຳນວນຄູ່

ເພື່ອໃຫ້ຈຳນວນທີ່ສ້າງອອກມາເປັນຈຳນວນຄູ່ຕົວເລກທ້າຍຕ້ອງເປັນເລກຄູ່ຊຶ່ງເລກຄູ່ມີ 4 ຕົວຄື 0, 4, 6 ແລະ 8. ແຕ່ເຫັນວ່າເລກ 0 ບໍ່ສາມາດໃສ່ບ່ອນຫຼັກພັນໄດ້ ສ່ວນ 4, 6 ຫຼື 8 ສາມາດໃສ່ຫຼັກພັນໄດ້ດັ່ງນັ້ນເຮົາຕ້ອງໄດ້ແຍກເປັນສອງກໍລະນີດັ່ງນີ້:

● ກໍລະນີລົງທ້າຍດ້ວຍ 0

ເລືອກເລກ 0 ມາໃສ່ຫຼັກໜ່ວຍໄດ້ 1 ວິທີ. ສວ່ນຫຼັກພັນ, ຫຼັກຮ້ອຍ ແລະ ຫຼັກສິບຍັງເຫຼືອແຕ່ເງື່ອນໄຂເລກບໍ່ຊ້ຳກັນ. ດັ່ງນັ້ນເລືອກເອົາຕົວເລກທີ່ຍັງເຫຼືອ 4 ຕົວມາຈັດໃສ່ 3 ບ່ອນທີ່ຍັງເຫຼືອໂດຍຫຼຸດລົງເທື່ອລະ 1 ຈຳນວນສາມາດຈັດໄດ້ດັ່ງນີ້:

□	□	□	□	ຈຳນວນທັງໝົດເທົ່າກັບ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ຈຳນວນ
4	3	2	1	

● ກໍລະນີລົງທ້າຍດ້ວຍ 4, 6 ຫຼື 8

ເລືອກຕົວເລກ 3 ຕົວມາໃສ່ຫຼັກໜ່ວຍໄດ້ 3 ວິທີ. ແຕ່ເລກ 0 ເອົາມາໃສຫຼັກພັນບໍ່ໄດ້. ດັ່ງນັ້ນຕົວເລກທີ່ຈະເອົາມາໃສ່ຫຼັກພັນໄດ້ຈຶ່ງເຫຼືອພຽງ 3 ຕົວຍົກເວັ້ນເລກ 0 ແລະ ຕົວເລກທີ່ໃສ່ໃນຫຼັກໜ່ວຍໄດ້ 3 ວິທີ. ສວ່ນຫຼັກຮ້ອຍ ແລະ ຫຼັກສິບຍັງເຫຼືອແຕ່ເງື່ອນໄຂເລກບໍ່ຊ້ຳກັນ. ດັ່ງນັ້ນເລືອກເອົາຕົວເລກທີ່ຍັງເຫຼືອ 3 ຕົວມາຈັດໃສ່ 2 ບ່ອນທີ່ຍັງເຫຼືອໂດຍຫຼຸດລົງເທື່ອລະ 1 ຈຳນວນສາມາດຈັດໄດ້ດັ່ງນີ້:

□	□	□	□	ຈຳນວນທັງໝົດເທົ່າກັບ $3 \times 3 \times 2 \times 3 = 54$ ຈຳນວນ
3	3	2	3	

ສອງກໍລະນີຂ້າງເທິງຖືວ່າແຕ່ລະກໍລະນີແມ່ນຈັດສຳເລັດໂດຍທີ່ທັງສອງກໍລະນີບໍ່ມີຄວາມຕໍ່ເນື່ອງກັນ. ດັ່ງນັ້ນຈຳນວນທັງໝົດທີ່ສາມາດສ້າງເປັນຈຳນວນຄູ່ໄດ້ເທົ່າກັບ 54+24 = 78 ຈຳນວນ

ງ. ເປັນຈຳນວນຫານຂາດໃຫ້ 5 ແລະ ນ້ອຍກວ່າ 7000

ເພື່ອໃຫ້ເປັນຈຳນວນຫານຂາດໃຫ້ 5 ຕົວເລກທ້າຍຕ້ອງເປັນເລກ 0 ຫຼື ເລກ 5 ແຕ່ຈຳນວນທີ່ໃຫ້ມາບໍ່ມີເລກ 5 ແນ່ນອນຕ້ອງລົງທ້າຍດ້ວຍ 0 ເທົ່ານັ້ນໄດ້ 1 ວິທີ. ເພື່ອໃຫ້ເປັນຈຳນວນນ້ອຍກວ່າ 7000 ຕົວເລກທີ່ເອົາມາໃສ່ຫຼັກພັນມີພຽງ 2 ຕົວຄື 4 ຫຼື 6 ເລືອກໄດ້ 2 ວິທີ. ສວ່ນຫຼັກຮ້ອຍ ແລະ ຫຼັກສິບຍັງເຫຼືອແຕ່ເງື່ອນໄຂເລກບໍ່ຊ້ຳກັນ. ດັ່ງນັ້ນເລືອກເອົາຕົວເລກທີ່ຍັງເຫຼືອ 3 ຕົວມາຈັດໃສ່ 2 ບ່ອນທີ່ຍັງເຫຼືອໂດຍຫຼຸດລົງເທື່ອລະ 1 ຈຳນວນສາມາດຈັດໄດ້ດັ່ງນີ້:

$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	ຈຳນວນທັງໝົດເທົ່າກັບ $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ ຈຳນວນ
2	3	2	1	

1.2. ການຈັດລຽນ (Permutation).

1.2.1 ວິທີຈັດລຽນສິ່ງຂອງ n ອັນຕ່າງກັນແບບແຖວຊື່

ຈາກຫຼັກການການຄູນຂ້າງເທິງ, ເຮົາສາມາດນັບຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ສາມາດລຽນສິ່ງຂອງ n ອັນແຕກຕ່າງກັນ ໂດຍລຽນເທື່ອລະ k ອັນຕາມແຖວຊື່ໄດ້ດັ່ງນີ້:

ບ່ອນທີ 1	ບ່ອນທີ 2	ບ່ອນທີ 3	......	ບ່ອນທີ k
↑	↑	↑		↑
n ວິທີ	n -1 ວິທີ	n - 2 ວິທີ		n - k+1 ວິທີ

ຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ສາມາດຈັດໄດ້ແມ່ນ: $\boxed{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-k+1) \text{ ວິທີ}}$

ຊຶ່ງເພິ່ນສັນຍາລັກ $\boxed{P_n^k = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

ເມື່ອ k = n ຈະໄດ້ $P_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 2.1 = n!$

n! ອ່ານວ່າ n ແຟກທໍຣຽນ (n factorial) ແລະ ເພິ່ນກຳນົດ $0! = 1$

ເຮົາສາມາດຂຽນໄດ້ $n! = n(n-1)!$

ເມື່ອ n = 1 ຈະໄດ້ $1! = 1(1-1)! = 1\times 0! = 1$

ຕົວຢ່າງ 6:

1. $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$
2. $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$
3. $\frac{5!}{3!} = \frac{5\times 4\times 3!}{3!} = 5\times 4 = 20$
4. $\frac{4!\times 7!}{3!5!} = \frac{4\times 3!\times 7\times 6\times 5!}{3!5!} = 7\times 6\times 4 = 168$

ຕົວຢ່າງ 7: ຈະມີຈັກວິທີຈະຈັດຄົນ 8 ຄົນ ຊຶ່ງໃນນັ້ນມີ ທ້າວ ກ ແລະ ທ້າວ ຂ ລວມຢູ່ນຳ ນັ່ງຕັ່ງອີ້ລຽນກັນເປັນແຖວຊື່ ໂດຍໃຫ້ ທ້າວ ກ ແລະ ທ້າວ ຂ ນັ່ງຕິດກັນສະເໝີ.

ວິທີແກ້: ເນື່ອງຈາກໂຈດກຳນົດໃຫ້ ທ້າວ ກ ແລະ ທ້າວ ຂ ນັ່ງຕິດກັນສະເໝີ, ດັ່ງນັ້ນວິທີງ່າຍໆຄືເຮົາຖືວ່າທ້າວ ກ ແລະ ທ້າວ ຂ ຍຶດຕິດກັນເປັນຄົນ 1 ຄົນ ໃນການນຳໄປຈັດບວກກັບ 6 ຄົນທີ່ຍັງເຫຼືອເປັນ 7 ຄົນ. ນັ້ນໝາຍຄວາມວ່າເຮົາມີຄົນທັງໝົດ 7 ຄົນເອົາມານັ່ງລຽນກັນເປັນແຖວຊື່ສາມາດຈັດໄດ້ $P_7^7 = 7!$ ວິທີ. ແຕ່ ທ້າວ ກ ແລະ ທ້າວ ຂ ທີ່ຍຶດຕິດກັນນັ້ນສາມາດປ່ຽນກັນໄດ້ 2! ວິທີ

ດັ່ງນັ້ນ ຈຳນວນວິທີທີ່ຈັດໄດ້ທັງໝົດ = $7!\times 2!$ = 10,080 ວິທີ.

1.2.2 ການຈັດລຽນສິ່ງຂອງ n ອັນທີ່ມີບາງອັນຄືກັນຕາມແຖວຊື່

ສົມມຸດເຮົາມີສິ່ງຂອງ n ອັນ ຊຶ່ງໃນນັ້ນມີ:

n_1 ຄືກັນເປັນແບບທີ່ 1

n_2 ຄືກັນເປັນແບບທີ່ 2

.

.

n_k ຄືກັນເປັນແບບທີ່ k

ນຳສິ່ງຂອງ n ອັນດັ່ງກ່າວມາຈັດລຽນເປັນແຖວຊື່ຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ສາມາດຈັດໄດ້ແມ່ນ:

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,\ldots\ldots\ldots\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\times n_2\times!n_3!\times\ldots\ldots\ldots\times n_k!}$$

ຕົວຢ່າງ 8: ຈາກຄຳວ່າ " Banking " ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນຄຳສັບໃໝ່ທີ່ເປັນໄດ້ທັງໝົດ ທີ່ເກີດຈາກການປະກອບຂອງຕົວອັກສອນຈາກຄຳດັ່ງກ່າວຄືນໃໝ່ ໂດຍບໍ່ຄຳນຶງເຖິງຄວາມໝາຍ.

ກ. ບໍ່ມີຂໍ້ຈຳກັດໃດໆ

ຂ. ຄຳປະກອບໃໝ່ຕ້ອງຂຶ້ນດ້ວຍ a ແລະ ລົງທ້າຍດ້ວຍ b ສະເໝີ.

ວິທີແກ້: ຄຳວ່າ "Banking" ປະກອບດ້ວຍຕົວອັກສອນທັງໝົດ 7 ຕົວ ຄື: n ມີ 2 ຕົວ, b ມີ 1 ຕົວ, a ມີ 1 ຕົວ, i ມີ 1 ຕົວ, g ມີ 1 ຕົວ ແລະ k ມີ 1 ຕົວ.

ເຮົາມີ: n ມີ 2 ຕົວ ຄືກັນເປັນແບບທີ່ 1

b ມີ 1 ຕົວ ເປັນແບບທີ່ 2

a ມີ 1 ຕົວ ເປັນແບບທີ່ 3

i ມີ 1 ຕົວ ເປັນແບບທີ່ 4

g ມີ 1 ຕົວ ເປັນແບບທີ່ 5

k ມີ 1 ຕົວ ເປັນແບບທີ່ 6

ກ. ວິທີທັງໝົດທີ່ຈັດໄດ້ແມ່ນ:

$$P_7^{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!}$$

$$= \frac{5040}{2} = 2{,}520 \text{ ວິທີ}$$

ຂ. ຂຶ້ນຕົ້ນດ້ວຍ a ແລະ ລົງທ້າຍດ້ວຍ b ສະເໝີ

ມີ a ໜຶ່ງຕົວເລືອກມາໃສ່ບ່ອນທຳອິດໄດ້ 1 ວິທີ ແລະ b ໜຶ່ງຕົວເລືອກມາໃສ່ບ່ອນສຸດທ້າຍໄດ້ 1 ວິທີຍັງເຫຼືອຕົວອັກສອນ 5 ຕົວເອົາມາຈັດໃສ່ທາງກາງວິທີທັງໝົດທີ່ຈັດໄດ້ແມ່ນ:

$$1\times1\times P_5^{2,1,1,1,1} = \frac{5!}{2!\times1!\times1!\times1!\times1!} = 60 \text{ ວິທີ.}$$

1.2.3. ການຈັດລຽນສິ່ງຂອງ n ອັນທີ່ແຕກຕ່າງກັນແບບວົງມົນ.

ສົມມຸດມີສິ່ງຂອງ n ອັນຕ່າງກັນ ນຳສິ່ງຂອງດັ່ງກ່າວມາຈັດລຽນແບບວົງມົນ ຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ສາມາດຈັດໄດ້ແມ່ນ: $(n-1)!$ ວິທີ.

ຕົວຢ່າງ 9: ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນວິທີທີ່ຈະຈັດໃຫ້ຜູ້ຊາຍ 4 ຄົນ ແລະ ຜູ້ຍິງ 4 ຄົນ ເຂົ້ານັ່ງອ້ອມໂຕະມົນໜ່ວຍໜຶ່ງ ໂດຍທີ່

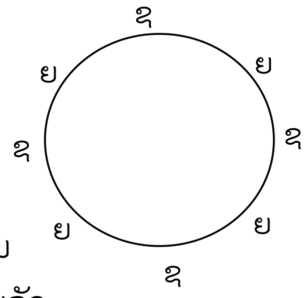
ກ. ໃຜຈະນັ່ງບ່ອນໃດກໍໄດ້ ?

ຂ. ຊາຍ ແລະ ຍິງຕ້ອງນັ່ງສະຫຼັບກັນ ?

ວິທີແກ້: ຜູ້ຊາຍ 4 ຄົນ ແລະ ຜູ້ຍິງ 4 ຄົນ ລວມກັນເປັນ 8 ຄົນ.

ກ. ຈຳນວນວິທີທີ່ຈະຈັດໄດ້ແມ່ນ: $(8-1)! = 7!$ = 5,040 ວິທີ.

ຂ. ຊາຍ ແລະ ຍິງນັ່ງສະຫຼັບກັນ



ສາມາດເອົາຊາຍ ຫຼື ຍິງ ເຂົ້ານັ່ງກ່ອນກໍໄດ້

ຖ້າໃຫ້ຜູ້ຊາຍເຂົ້ານັ່ງກ່ອນ ຊາຍ 4 ຄົນ ເອົາມານັ່ງອ້ອມໂຕະມົນ ມົນຈັດໄດ້ $(4-1)! = 3!$ ວິທີ

ເຮົາສັງເກດເຫັນວ່າບ່ອນທີ່ຍິງຈະນັ່ງໄດ້ມີ 4 ບ່ອນ ສະນັ້ນ ການຈັດຍິງ 4 ຄົນເຂົ້ານັ່ງ 4 ບ່ອນນັ້ນບໍ່ແມ່ນການຈັດແບບວົງມົນອີກແລ້ວເພາະວ່າແຕ່ລະຕຳແໜ່ງບໍ່ສາມາດປ່ຽນບ່ອນກັນໄດ້. ການຈັດແມ່ນຄ້າຍຄືການຈັດລຽນແບບແຖວຊື່. ດັ່ງນັ້ນເລືອກເອົາຍິງ 4 ຄົນທີ່ຍັງເຫຼືອເຂົ້ານັ່ງຕາມບ່ອນຫວ່າງ 4 ບ່ອນຈັດໄດ້ $P_4^4 = 4!$ ວິທີ

ຈຳນວນວິທີທີ່ຈັດຄົນ 8 ຄົນເຂົ້ານັ່ງໄດ້ແມ່ນ:

$3! \times 4!$ ວິທີ $= 144$ ວິທີ.

1.3. ການຈັດໝວດ (Combination).

ການຈັດໝວດຄືວິທີການເລືອກສິ່ງຂອງທັງໝົດ ຫຼື ບາງສ່ວນທີ່ກຳນົດໃຫ້ເອົາມາຈັດລຽນໂດຍບໍ່ຄຳນຶງເຖິງລຳດັບຂອງສິ່ງຂອງທີ່ເລືອກມາ.

ສົມມຸດ ມີສິ່ງຂອງ n ອັນຕ່າງກັນ ນຳເອົາສິ່ງຂອງດັ່ງກ່າວມາຈັດໝວດ ໂດຍຈັດໝວດລະ k ອັນ $(k \le n)$. ຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ສາມາດຈັດໄດ້ແມ່ນ:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ ວິທີ ຫຼື } C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} \text{ ວິທີ}$$

ຕົວຢ່າງ 10: ຂໍ້ສອບວິຊາຄະນິດສາດຂອງນັກສຶກສາປີທີ່ 1 ຢູ່ສະຖາບັນການທະນາຄານ ມີ 12 ຂໍ້ ໃນນັ້ນກຳນົດໃຫ້ນັກສຶກສາຕ້ອງເລືອກແກ້ 10 ຂໍ້ ແລະ ຕ້ອງໄດ້ເລືອກເອົາຢ່າງໜ້ອຍ 5 ຂໍ້ຈາກ 6 ຂໍ້ທຳອິດ. ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ຈະເລືອກແກ້ຂໍ້ສອບໃຫ້ຄົບ 10 ຂໍ້ ?

ວິທີແກ້:

ການເລືອກແກ້ຂໍ້ສອບນັກສຶກສາສາມາດເລືອກແກ້ຂໍ້ໃດກ່ອນກໍໄດ້ດັ່ງນັ້ນການເລືອກດັ່ງກ່າວຈຶ່ງເປັນການຈັດໝວດ

ເລືອກແກ້ຂໍ້ສອບຢ່າງໜ້ອຍ 5 ຂໍ້ ຈາກ 6 ຂໍ້ ທຳອິດ ໝາຍຄວາມວ່າຕ້ອງເລືອກແກ້ເອົາ 5 ຂໍ້ ຫຼື ແກ້ 6 ຂໍ້ ຈາກ 6 ຂໍ້ ທຳອິດ. ຈຳນວນວິທີທີ່ສາມາດເລືອກແກ້ໄດ້ແມ່ນ:

- ກໍລະນີເລືອກແກ້ 5 ຂໍ້ ຈາກ 6 ຂໍ້ ທຳອິດ ແລະ 5 ຂໍ້ ຈາກ 6 ຂໍ້ ສຸດທ້າຍ.

$$C_6^5 C_6^5 = \frac{6!}{5!(6\sim5)!} \times \frac{6!}{5!(6\sim5)!} = 6 \times 6 = 36 \text{ ວິທີ.}$$

- ກໍລະນີເລືອກແກ້ 6 ຂໍ້ ຈາກ 6 ຂໍ້ ທຳອິດ ແລະ 4 ຂໍ້ ຈາກ 6 ຂໍ້ ສຸດທ້າຍ.

$$C_6^6 C_6^4 = \frac{6!}{6!(6-6)!} \times \frac{6!}{4!(6-2)!} = 15 \text{ ວິທີ}$$

ຈຳນວນວິທີທັງໝົດທີ່ສາມາດເລືອກແກ້ຂໍ້ສອບໃຫ້ຄົບ 10 ຂໍ້ເທົ່າກັບ $36 + 15 = 51$ ວິທີ.

ຕົວຢ່າງ11: ໃນການແຂ່ງຂັນເຕະບານເພື່ອຂໍ່ານັບຮັບຕ້ອນວັນສ້າງຕັ້ງ ທະນາຄານແຫ່ງ ສປປ ລາວ ຄົບຮອບ 44 ປີ ທີ່ຜ່ານມາ ມີທີມເຕະບານເຂົ້າແຂ່ງຂັນຮອບທຳອິດທັງໝົດ 24 ທີມ, ແບ່ງເປັນ 6 ສາຍໆລະ 4 ທີມ ຊຶ່ງແຕ່ລະທີມໃນແຕ່ລະສາຍຕ້ອງໄດ້ແຂ່ງຂັນແບບພົບກັນໝົດ. ຖາມວ່າ ໃນຮອບທຳອິດນີ້ຈະມີການແຂ່ງຂັນທັງໝົດຈັກຄັ້ງ?

ວິທີແກ້:

ຮູ້ວ່າສາຍໜຶ່ງມີ 4 ທີມ, ການແຂ່ງຂັນຄັ້ງໜຶ່ງຕ້ອງມີ 2 ທີມ ການແຂ່ງຂັນແບບພົບກັນໝົດ ໝາຍຄວາມວ່າເຮົາຕ້ອງເລືອກ 2 ທີມ ຈາກ 4 ທີມເຂົ້າມາແຂ່ງຂັນ ສາມາດເລືອກໄດ້

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ ຄັ້ງ.}$$

ໃນນັ້ນຮອບທີ່ໜຶ່ງມີ 6 ສາຍ, ແຕ່ລະສາຍຕ້ອງໄດ້ແຂ່ງຂັນກັນ 6 ຄັ້ງ. ດັ່ງນັ້ນໃນການແຂ່ງຂັນຮອບທຳອິດຈະໄດ້ແຂ່ງຂັນກັນທັງໝົດແມ່ນ: $6 \times 6 = 36$ ຄັ້ງ.

ຕົວຢ່າງ12: ໃນກັບອັນໜຶ່ງມີປາກາ 4 ປາກ, ບິກ 3 ກ້ານ ແລະ ສໍດຳ 2 ກ້ານ ຈົກເອົາເຄື່ອງອອກຈາກກັບ 1 ເທື່ອ 3 ອັນ ພ້ອມກັນ. ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນວິທີທີ່ຈະເລືອກໄດ້

ກ. ສິ່ງຂອງແຕ່ລະຢ່າງແນວລະ 1 ອັນ?

ຂ. ສໍດຳຢ່າງໜ້ອຍ 1 ອັນ?

ວິທີແກ້: ການເລືອກສິ່ງຂອງອອກຈາກກັບເປັນການຈັດໝວດເນື່ອງຈາກວ່າລຳດັບຂອງສິ່ງຂອງບໍ່ສຳຄັນ

ກ. ໄດ້ສິ່ງຂອງແຕ່ລະຢ່າງແນວລະ 1 ອັນ ເລືອກໄດ້

$$C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

ຂ. ໄດ້ສໍດຳຢ່າງໜ້ອຍ 1 ອັນໝາຍຄວາມວ່າໄດ້ສໍດຳ 1 ອັນ ຫຼື ໄດ້ ສໍດຳ 2 ອັນເລືອກໄດ້

$$C_2^1 \times C_7^2 + C_2^2 \times C_7^1 = \frac{2! \times 7!}{1! \times 5! \times 2!} + \frac{2! \times 7!}{2! \times 6! \times 1!}$$

$$= 42 + 7 = 49$$

ຫຼື $$C_9^3 - C_7^3 = \frac{9!}{6! \times 3!} - \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} - \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 84 - 35 = 49$$

- ຄຸນລັກສະນະ
    1. $C_n^n = C_n^0 = 1$
    2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
    3. $C_n^k = C_n^{n-k}$
    4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$
    5. $C_n^k = C_n^p$ ກໍ່ຕໍ່ເມື່ອ $p + k = n$

1.4. ສຳປະສິດທະວິພົດ

ໃນການຂະຫຍາຍ $(a+b)^n$ ເມື່ອ $a; b \in R$ ແລະ $n \in N$

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = a + b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ຫຼື $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ຫຼື $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ຫຼື $(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3b + C_4^2 a^2b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$

- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

ຫຼື $(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4b + C_5^2 a^3b^2 + C_5^3 a^2b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5$

ໃນທຳນອງດຽວກັນເຮົາຈະໄດ້

$$(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n a^{n-n} b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$; ຈຳນວນ C_n^k ແມ່ນສຳປະສິດຂອງພົດທີ່ $k+1$

ຄ່າຂອງ C_n^k ອາດຊອກໄດ້ຈາກຕາຕະລາງຂອງຮູບສາມແຈ Pascal's ດັ່ງນີ້:

1				←	$(a+b)^0$
1	1			←	$(a+b)^1$
1	2	1		←	$(a+b)^2$
1	3	3	1	←	$(a+b)^3$

ພົດທົ່ວໄປຂອງການຂະຫຍາຍ $(a+b)^n$

ສັງເກດເຫັນວ່າ: $(a+b)^n$

$T_1 = C_n^0 a^{n-0} b^0$ ຫຼື $T_{0+1} = C_n^0 a^{n-0} b^0$

$T_2 = C_n^1 a^{n-1} b^1$ ຫຼື $T_{1+1} = C_n^1 a^{n-1} b^1$

$T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2$ ຫຼື $T_{2+1} = C_n^2 a^{n-2} b^2$

ດັ່ງນັ້ນຈະໄດ້ພົດທີ່ k+1 ແມ່ນ: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

ຕົວຢ່າງ 13: ຊອກຫາພົດທີ່ 4 ຂອງການຂະຫຍາຍ $\left(x-\frac{2}{x}\right)^{10}$

ວິທີແກ້:

ເຮົາມີ $a = x$; $b = -\frac{2}{x}$; $n = 10$

ຈາກສູດ: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

ເຮົາໄດ້ $T_{3+1} = C_{10}^3 x^{10-3}\left(-\frac{2}{x}\right)^3$

$$= \frac{10!}{3!7!}x^7\left(-\frac{8}{x^3}\right)$$

$$= \frac{10.9.8.7!}{3!7!}(-8)x^4$$

$$\Rightarrow \quad T_4 = -960\,x^4$$

ຕົວຢ່າງ14: ຈົ່ງຊອກຫາພົດທີ່ບໍ່ມີ x ຈາກການຂະຫຍາຍ $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$

ວິທີແກ້:

ສົມມຸດວາງ T_{k+1} ແມ່ນພົດທີ່ບໍ່ມີ x (ໝາຍຄວາມພົດທີ່ x^0)

ຊອກຫາຄ່າຂອງ k

ຈາກສູດ $T_{k+1} = C_{12}^k (x^2)^{12-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$

$$= C_{12}^k (x^2)^{12-k}(x^{-1})^k = C_{12}^k x^{24-3k}$$

$$24 - 3k = 0 \Rightarrow k = 8$$

ພົດທີ່ບໍ່ມີ x ແມ່ນພົດທີ່ : $T_{8+1} = C_{12}^8 x^0$

$$\Rightarrow \quad T_9 = \frac{12!}{8!4!} = 495$$

ຕົວຢ່າງ15: ຈົ່ງຫາພົດທີ່ມີ x^6 ໃນການຂະຫຍາຍ $(x^2+2x)^5$

ເຮົາມີ $T_{k+1} = C_5^k (x^2)^{5-k}(2x)^k = C_5^k x^{10-k}$

ຊອກຄ່າຂອງ k ເຮົາໄດ້ $10 - k = 6$

$$\Rightarrow k = 4$$

ເຮົາໄດ້ $T_5 = C_5^4 2^4 x^6$

$$= \frac{5!}{4!}\times 16\times x^6 = 5\times 16x^6 = 80x^6$$

$$\Rightarrow \quad T_5 = 80x^6$$

ບົດຝຶກຫັດ

1. ເມື່ອສອບຖາມລູກຄ້າຂອງທະນາຄານແຫ່ງໜຶ່ງຈຳນວນ 800 ຄົນ, ເຫັນວ່າແຕ່ລະຄົນລ້ວນແຕ່ມີບັນຊີເງິນຝາກປະຢັດ ຫຼື ບັນຊີເງິນຝາກປະຈຳ ຫຼື ມີທັງສອງຢ່າງ. ຖ້າວ່າ 80% ເປັນລູກຄ້າທີ່ມີບັນຊີເງິນຝາກປະຢັດ ແລະ 30% ເປັນລູກຄ້າທີ່ມີບັນຊີເງິນຝາກປະຈຳ. ຈະມີລູກຄ້າທີ່ມີບັນຊີເງິນຝາກປະຢັດ ແລະ ບັນຊີເງິນຝາກປະຈຳຈັກຄົນ ?

2. ກຳນົດໃຫ້ A, B, C ເປັນກຸ່ມ ຖ້າ $n(B) = 42$; $n(C) = 28$; $n(A \cap B \cap C) = 3$
$n(A \cap B \cap C') = 2$; $n(A \cap B' \cap C') = 20$ ແລະ $n(A \cup B \cup C) = 80$.
ຈົ່ງຊອກຫາ $n(A' \cap B \cap C) = ?$

3. ຫ້ອງປະຊຸມໜຶ່ງມີປະຕູຢູ່ 4 ປ່ອງ, ຖ້າເຂົ້າປະຕູໜຶ່ງແລ້ວໃຫ້ອອກອີກປະຕູໜຶ່ງ ຊຶ່ງບໍ່ຊ້ຳກັບປະຕູທີ່ເຂົ້າມາ ຈະມີວິທີເຂົ້າ ແລະ ອອກໄດ້ທັງໝົດຈັກວິທີ?

4. ຈາກການສຳຫຼວດຄວາມຄິດເຫັນຂອງນັກສຶກສາ 50 ຄົນເຫັນວ່າ ມີນັກສຶກສາມັກເບິ່ງເຕະບານ 29 ຄົນ, ມີນັກສຶກສາມັກເບິ່ງຕີບານ 21 ຄົນ ແລະ ມີນັກສຶກສາ 10 *ຄົນ*ມັກເບິ່ງກິລາທັງສອງປະເພດນີ້. ຖາມວ່າ:

ກ. ມີນັກສຶກສາມັກເບິ່ງເຕະບານ ຫຼື ຕີບານຈັກຄົນ ?

ຂ. ມີນັກສຶກສາບໍ່ມັກເບິ່ງເຕະບານ ແລະ ບໍ່ມັກເບິ່ງຕີບານຈັກຄົນ?

ຄ. ມີນັກສຶກສາມັກເບິ່ງເຕະບານແຕ່ບໍ່ມັກເບິ່ງຕີບານຈັກຄົນ ?

5. ກຳນົດໃຫ້*ຕົວ*ເລກ 0,1,2,3,4 ແລະ 5. ເອົາມາສ້າງເປັນຈຳນວນທີ່ມີຄ່າຢູ່ລະຫວ່າງ 99 ຫາ 999 ໂດຍມີເງື່ອນໄຂວ່າ

ກ. ຕົວເລກໃນແຕ່ລະຫຼັກຕ້ອງບໍ່ຊ້ຳກັນ

ຂ. ຕົວເລກໃນແຕ່ລະຫຼັກຕ້ອງບໍ່ຊ້ຳກັນ ແລະ ເປັນຈຳນວນຄີກ

ຄ. ຕົວເລກໃນແຕ່ລະຫຼັກຕ້ອງບໍ່ຊ້ຳກັນ ແລະ ມີຄ່າໃຫຍ່ກວ່າ 350

ງ. ຕົວເລກໃນແຕ່ລະຫຼັກຕ້ອງບໍ່ຊ້ຳກັນ ແລະ ເປັນຈຳນວນທີ່ຫານຂາດໃຫ້ 10

6. ຈາກຕົວເລກ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. ໃຫ້ສ້າງເປັນເລກ 3 ຫຼັກທີ່ບໍ່ຊ້ຳກັນ ໄດ້ຈັກຈຳນວນຖ້າວ່າ:

ກ. ເປັນຈຳ*ນວນ*ຄູ່ທີ່ນ້ອຍກວ່າ 400 ?

ຂ. ເປັນຈຳນວນຄີກທີ່ໃຫຍ່ກວ່າ 400 ?

7. ກຳນົດໃຫ້ນຳຕົວເລກ 0, 3, 5, 6, 9 ມາສ້າງເປັນເລກ 3 ຫຼັກທີ່ມີຄວາມໝາຍ, ເລກບໍ່ຊ້ຳກັນຈະໄດ້ຈັກຈຳນວນຖ້າວ່າ

ກ. ເປັນຈຳນວນຫານຂາດໃຫ້ 5 ແລະ ນ້ອຍກວ່າ 500 ?

ຂ. ເປັນຈຳນວນຄີກທີ່ໃຫຍ່ກວ່າ 600 ?

8. ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນວິທີທີ່ຈະຈັດໃຫ້ຊາຍ 4 ຄົນ ແລະ ຍິງ 4 ຄົນ ຢືນລຽນແຖວຖ່າຍຮູບໂດຍທີ່:

ກ. ຊາຍ *ແລະ* ຍິງຕ້ອງຢືນສະຫຼັບກັນ.

ຂ. ຍິງທັງ 4 ຄົນຕ້ອງຢືນຕິດກັນ.

9. ຈະມີຈັກວິທີຈັດໃຫ້ຊາຍ 5 ຄົນ ແລະຍິງ 4 ຄົນຢືນລຽນກັນເປັນແຖວຊື່ ໂດຍບໍ່ໃຫ້ຍິງ 2 ຄົນໃດຢືນຕິດກັນ?

10. ຈະມີວິທີຈັດໃຫ້ຄົນ 3 ຄົນນັ່ງຕັ່ງອີ້ ຊຶ່ງລຽນກັນເປັນແຖວຍາວ 10 ໜ່ວຍ ໄດ້ຈັກວິທີ ໂດຍທີ່ວ່າຄົນທັງ 3 ຕ້ອງນັ່ງຕິດກັນສະເໝີ?

11. ມີປຶ້ມບັນຊີທະນາຄານ 3 ຫົວຄືກັນ, ປຶ້ມບັນຊີວິສາຫະກິດ 2 ຫົວຄືກັນ ແລະ ປຶ້ມ ບໍລິຫານການທະນາຄານ 2 ຫົວຄືກັນ. ຈະມີຈັກວິທີທີ່ຈະຈັດປຶ້ມເຫຼົ່ານີ້ມາໄວ້ເທິງຖ້ານໃນຫ້ອງສະມຸດໂດຍໃຫ້ຈັດລຽນກັນເປັນແຖວຊື່ ?

12. ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນວິທີທີ່ຈະຈັດໃຫ້ຊາຍ 7 ຄົນ ແລະ ຍິງ 6 ຄົນນັ່ງອ້ອມໂຕະມົນໜ່ວຍໜຶ່ງໂດຍບໍ່ໃຫ້ຜູ້ຍິງ 2 ຄົນໃດນັ່ງຕິດກັນ ?

13. ຈະມີວິທີທີ່ຈະຈັດຊາຍ 3 ຄົນ, ຍິງ 2 ຄົນ ແລະ ເດັກນ້ອຍ 1 ຄົນນັ່ງອ້ອມໂຕະມົນໂດຍຄົນທີ່ນັ່ງກົງກັນຂ້າມກັບເດັກນ້ອຍ ຕ້ອງເປັນຜູ້ຊາຍ ?

14. ຈະມີວິທີຈັດໃຫ້ຄົນ 8 ຄົນນັ່ງອ້ອມໂຕະມົນ 2 ໜ່ວຍ, ໜ່ວຍລະ 4 ຄົນໄດ້ຈັກວິທີ ?

15. ມີສະຫຼາກ 10 ໃບຢູ່ກັບອັນໜຶ່ງ ຊຶ່ງມີໝາຍເລກ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ຈັບສະຫຼາກອອກຈາກກັບ 2 ໃບ ເທື່ອລະໃບແລ້ວບໍ່ເອົາໃສ່ຄືນ ຈະມີວິທີເລືອກໄດ້ທັງໝົດຈັກວິທີ ໂດຍທີ່ຜົນບວກຂອງໝາຍເລກເທິງສະຫຼາກທັງສອງໃບທີ່ຈັບໄດ້ເປັນຈຳນວນຄີກ ?

16. ມີເສັ້ນຂະໜານຊຸດໜຶ່ງຈຳນວວນ 4 ເສັ້ນ ຕັດກັບເສັ້ນຂະໜານອີກຊຸດໜຶ່ງຊຶ່ງມີຈຳນວນ 3 ເສັ້ນເຮັດໃຫ້ເກີດຮູບສີ່ແຈຂ້າງຂະໜານຈັກຮູບ ?

17.ໃນການແຂ່ງຂັນກິລາບານເຕະເພື່ອຕ້ອນຮັບວັນສ້າງຕັ້ງທະນາຄານແຫ່ງ ສປປ ລາວ ຄົບຮອບ 45 ປີ ໃນປີ 2013 ທີ່ຜ່ານມາມີທີມເຂົ້າຮ່ວມໃນຮອບທຳອິດທັງໝົດ 24 ທີມ, ແບ່ງອອກເປັນ 4 ສາຍໆລະ 6 ທີມ ຊຶ່ງແຕ່ລະທີມໃນແຕ່ລະສາຍຕ້ອງໄດ້ແຂ່ງຂັນແບບພົບກັນໝົດ. ຖາມວ່າໃນຮອບທຳອິດນີ້ ຈະມີການແຂ່ງຂັນທັງໝົດຈັກຄັ້ງ ?

18. ຫົວບົດສອບເສັງວິຊາໜຶ່ງມີທັງໝົດ 13 ຂໍ້, ນັກສຶກສາຄົນໜຶ່ງຕ້ອງແກ້ໃຫ້ໄດ້ 10 ຂໍ້ ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂທີ່ວ່າຕ້ອງເລືອກແກ້ໃຫ້ໄດ້ 4 ຂໍ້ ຈາກ 5 ທຳອິດ. ຖາມວ່າຈະມີຈັກວິທີທີ່ຈະເລືອກແກ້ໃຫ້ຄົບ 10 ຂໍ້ ?

19. ໃນງານລ້ຽງຂອງສະມາຄົມແຫ່ງໜຶ່ງ ແຂກທຸກຄົນທີ່ມາຮ່ວມງານຕ່າງກໍ່ທັກທາຍກັນດ້ວຍການຈັບມືສະບາຍດີ. ສັງເກດເຫັນວ່າຈຳນວນຄັ້ງໃນການຈັບມືຂອງແຂກໃນງານນີ້ເທົ່າກັບ 66 ຄັ້ງ. ຖາມວ່າໃນງານລ້ຽງຂອງສະມາຄົມດັ່ງກ່າວມີແຂກມາຮ່ວມງານທັງໝົດຈັກຄົນ ?

20. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ n ຈາກສົມຜົນ:

1. $\frac{n!}{(n-2)!}=56$ 2. $\frac{n!}{(n-3)!}=24$

3. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=72$ 4. $p_n^5=2p_n^3$

5. $C_n^{n-2}=10$ 6. $C_n^{15}=C_n^{11}$

21. ກຳນົດໃຫ້ $P_n^k=3024$ ແລະ $C_n^k=126$ ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $k=?$

22. ຈົ່ງຊອກພົດ 5 ຂອງການຂະຫຍາຍ $\left(x^2-2y\right)^6$

23. ຈົ່ງຊອກພົດທີ່ມີ x^6 ໃນການຂະຫຍາຍ $\left(x^2+2x\right)^5$

24. ຈົ່ງຊອກສຳປະສິດຂອງພົດທີ່ມີ x^{14} ໃນການຂະຫຍາຍ $\left(2x^2-3x\right)^{10}$

25. ຈົ່ງຊອກສຳປະສິດຂອງພົດ x^4y^5 ໃນການຂະຫຍາຍ $\left(2x+3y\right)^9$

26. ຈົ່ງຊອກຫາພົດທີ່ບໍ່ມີ x ໃນການຂະຫຍາຍ $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$

27. ຈົ່ງຊອກຫາພົດທີ່ບໍ່ມີ x ໃນການຂະຫຍາຍ $\left(x^3+\dfrac{3}{x^2}\right)^{10}$

28. ຈົ່ງຊອກຫາພົດທີ່ມີ x^9 ໃນການຂະຫຍາຍ $\left(3x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12}$

ບົດທີ 2

ຕຳລາ

(Functions)

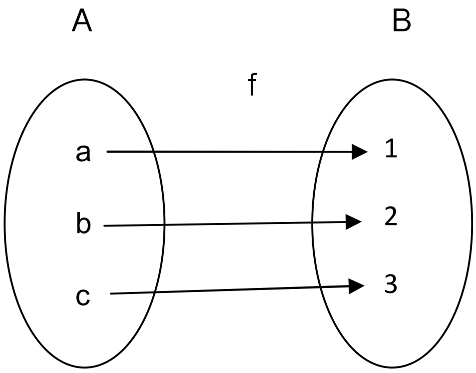
2.1 ນິຍາມ

ໃຫ້ສອງກຸ່ມ A ແລະ B ເມື່ອແຕ່ລະອົງປະກອບ x ຂອງກຸ່ມ A ຫາກພົວພັນກັບອົງປະກອບ y ຂອງກຸ່ມ B ບໍ່ເກີນໜຶ່ງຄ່າຕາມກົດເກນ f ໃດໜຶ່ງເພິ່ນເວົ້າວ່າ f ແມ່ນຕຳລາແຕ່ກຸ່ມ A ຫາກຸ່ມ B

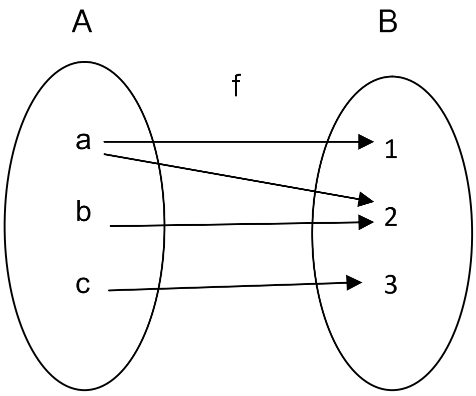
ແທນດ້ວຍ $$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto y = f\ (x)$$

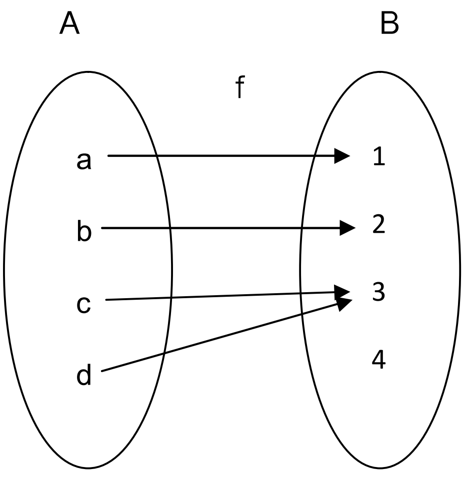
ຕົວຢ່າງ 1:



f ເປັນຕຳລາ



f ບໍ່ເປັນຕຳລາ



f ເປັນຕຳລາ

ຕົວຢ່າງ 2: ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)=x^2+2x-3$

$$f(2)=2^2+2\times 2-3=5$$

$$f(-3)=(-3)^2+2(-3)-3=0$$

$$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})-3=-\frac{7}{4}$$

ຕົວຢ່າງ 3: ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)=\begin{cases} x, x<-1 \\ x^2, -1\le x<1 \\ 2x+1, x\ge 1 \end{cases}$

$$f(-3)=-3$$

$$f(-\frac{2}{3})=(-\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

$$f(2)=2\times 2+1=5$$

$$f(t^2+1)=2(t^2+1)+1=2t^2+3$$

ທ່ານ Euler ຂຽນ $y=f(x)$ ແທນ y ແມ່ນຕໍາລາທີ່ມີຕົວປ່ຽນແມ່ນ x ຫຼື y ເທົ່າກັບ f ຂອງ x ກຸ່ມຄ່າຂອງ x ທີ່ເຮັດໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)$ ມີຄວາມໝາຍ ຫຼື ສາມາດຄິດໄລ່ໄດ້ເອີ້ນວ່າເຂດກໍານົດຂອງຕໍາລາ f (Domain of f function) ສັນຍາລັກດ້ວຍ D_f

$\left\{ y/y=f(x), \forall x\in D_f \right\}$ ເອີ້ນວ່າກຸ່ມຄ່າຂອງ f (Rang of f function) ສັນຍາລັກດ້ວຍ R_f

ຕົວຢ່າງ 4: 1) ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)=-2x+3$

$D_f =]-\infty,+\infty[$, $R_f =]-\infty,+\infty[$

2) ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)=\sqrt{2x+2}$

$D_f = [-1,+\infty[$, $R_f = [0,+\infty[$

3) ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)=3^x$

$D_f =]-\infty,+\infty[$, $R_f =]0,+\infty[$

4) ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)=\log_2 x$

$D_f =]0,+\infty[$, $R_f =]-\infty,+\infty[$

2.2 ການຄໍານວນກ່ຽວກັບຕໍາລາ

ໃຫ້ສອງຕໍາລາ $f(x)$ ແລະ $g(x)$ ຕາມໃຈ ເຮົາສາມາດບວກ, ລົບ, ຄູນ, ຫານ ແລະ ຊ້ອນຕໍາລາໄດ້ດັ່ງນີ້:

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
2. $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
3. $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$

5. $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$

6. $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$

ຕົວຢ່າງ 5: ໃຫ້ຕຳລາ $f(x)=2x+1$; $g(x)=x^2-2$

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ = $2x+1+x^2-2=x^2+2x-1$

2. $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ = $2x+1-x^2+2=-x^2+2x+3$

3. $(f.g)(x)=f(x).g(x)$ = $(2x+1)(x^2-2)=2x^3+x^2-4x-2$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ = $\dfrac{2x+1}{x^2-2}$

5. $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ = $2(x^2-2)+1=2x^2-3$

6. $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$ = $(2x+1)^2-2=4x^2+4x-1$

- ການກຳນົດເຂດກຳນົດຂອງ $(f\circ g)(x)$ ຫຼື $D_{f\circ g}$

  ແມ່ນການຊອກຄ່າຂອງ x ທີ່ຕອບສະໜອງສອງເງື່ອນໄຂ

  1. $g(x)$ ຕ້ອງມີຄວາມໝາຍ
  2. $g(x)\in D_f$

- ການກຳນົດເຂດກຳນົດຂອງ $(g\circ f)(x)$ ຫຼື $D_{g\circ f}$

  ແມ່ນການຊອກຄ່າຂອງ x ທີ່ຕອບສະໜອງສອງເງື່ອນໄຂ

  1. $f(x)$ ຕ້ອງມີຄວາມໝາຍ
  2. $f(x)\in D_g$

ຕົວຢ່າງ 6: ໃຫ້ຕຳລາ $f(x)=x^2$; $g(x)=\sqrt{x+1}$

$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ = $[g(x)]^2$ = $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x+1$

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ \forall x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ \forall x \end{cases} \Rightarrow x\geq -1 \Rightarrow D_{f\circ g}=[-1,+\infty[$$

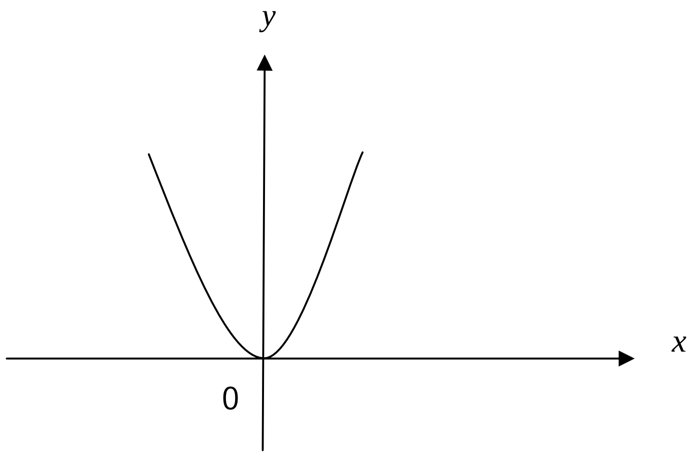
$(g\circ f)(x)=g[f(x)]$ = $\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}$

$$\begin{cases} \forall x \\ x^2+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \\ \forall x \end{cases} \Rightarrow \forall x \Rightarrow D_{g\circ f}=]-\infty,+\infty[$$

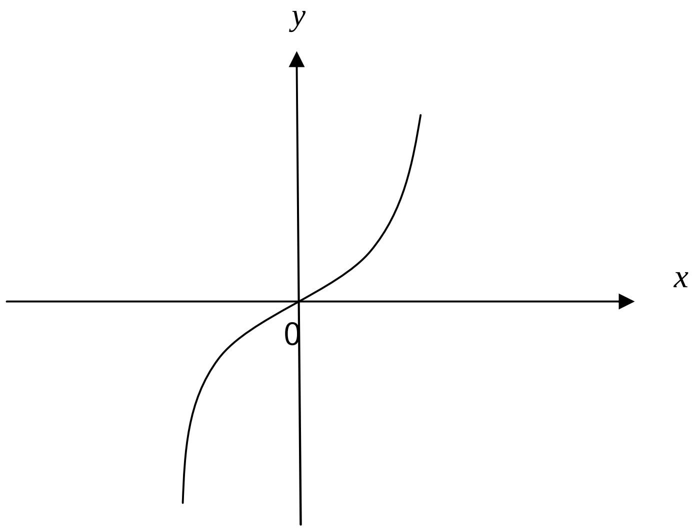
2.3 ລັກສະນະຂອງຕຳລາ

ໃຫ້ຕຳລາ $y=f(x)$

ເມື່ອ $f(-x)=f(x)$ ເພິ່ນເວົ້າວ່າ $y=f(x)$ ເປັນຕຳລາຄູ່. ເສັ້ນສະແດງຂອງຕຳລາຄູ່ເຄິ່ງຄືກັນທຽບກັບແກນ oy



ເມື່ອ $f(-x)=-f(x)$ ເພິ່ນເວົ້າວ່າ $y=f(x)$ ເປັນຕຳລາຄີກ. ເສັ້ນສະແດງຂອງຕຳລາຄີກເຄິ່ງຄືກັນທຽບກັບເມັດເຄົ້າ



ຕົວຢ່າງ 7: ໃຫ້ຕຳລາ $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$

ເຮົາມີ $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ ສະແດງວ່າ $f(x)$ ແມ່ນຕຳລາຄູ່

$g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$ ສະແດງວ່າ $g(x)$ ແມ່ນຕຳລາຄີກ

2.4 ຂອບເຂດຂອງຕຳລາ

ໃຫ້ຕຳລາ $y=f(x)$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ເອີ້ນວ່າຂອບເຂດເບື້ອງຊ້າຍຂອງຕຳລາ $f(x)$ ເມື່ອ $x\to a$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ເອີ້ນວ່າຂອບເຂດເບື້ອງຂວາຂອງຕຳລາ $f(x)$ ເມື່ອ $x\to a$

ເພິ່ນເວົ້າວ່າຕຳລາ $f(x)$ ມີຂອບເຂດເມື່ອ $x \to a$ ກໍຕໍ່ເມື່ອຂອບເຂດເບື້ອງຊ້າຍເທົ່າກັບຂອບເຂດເບື້ອງຂວາຂອງ a ໝາຍຄວາມວ່າ ມີ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

ຕົວຢ່າງ 7: ໃຫ້ຕຳລາ $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^-} = \infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{aligned}\right\} \text{ ສະນັ້ນ } \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2} = \infty$$

ຫຼັກເກນພື້ນຖານ

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$
6. $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
7. $\lim\limits_{x\to a} \log_a f(x) = \log_a \lim\limits_{x\to a} f(x)$

ຕົວຢ່າງ 8:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4}$

3) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$-\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}} = -\lim_{x\to -\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}} = -1$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{\sqrt{x+1}}}{2^{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}2^{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}=2^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}=2^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}$

$$2^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}=2^0=1$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_3\dfrac{9x+2}{x}=\log_3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x+2}{x}=\log_3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(9+\dfrac{2}{x}\right)}{x}$ = $\log_3 9=2$

2.5 ຂອບເຂດຂອງຕຳລາທີ່ກຳນົດຫຼາຍຫວ່າງຕ່າງກັນ

ຕົວຢ່າງ 9: ໃຫ້ຕຳລາ $f(x)=\begin{cases}30-3x^2, x\le -3\\ -2x-3, -3<x\le 5\\ 2x+10, x>5\end{cases}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-3^-}f(x)&=\lim_{x\to-3^-}(30-3x^2)=3\\ \lim_{x\to-3^+}f(x)&=\lim_{x\to-3^+}(-2x-3)=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \lim_{x\to-3}f(x)=3$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to5^-}f(x)&=\lim_{x\to5^-}(-2x-3)=-13\\ \lim_{x\to5^+}f(x)&=\lim_{x\to5^+}(2x+10)=20\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \text{ບໍ່ມີ}\quad \lim_{x\to5}f(x)$$

2.6 ການຕໍ່ເນື່ອງຂອງຕຳລາ

ເມື່ອຕຳລາ $f(x)$ ກຳນົດຢູ່ເມັດ $x=a$ ມີຂອບເຂດເມື່ອ $x\to a$ ແລະ $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ = $f(a)$ ເພິ່ນເວົ້າວ່າຕຳລາ $f(x)$ ຕໍ່ເນື່ອງຢູ່ເມັດ $x=a$

ຕົວຢ່າງ 10: ໃຫ້ຕຳລາ $f(x)=\begin{cases}3-x^2, x<1\\ x+1, x\ge 1\end{cases}$

1. ຕຳລາ $f(x)$ ກຳນົດຢູ່ເມັດ $x=1$
2. $\left.\begin{aligned}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)&=\lim\limits_{x\to1^-}\left(3-x^2\right)=3-1=2\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)&=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+1\right)=1+1=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow$ ສະແດງວ່າ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$
3. $f(1)=1+1=2 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

ດັ່ງນັ້ນ ຕຳລາ $f(x)$ ຕໍ່ເນື່ອງຢູ່ເມັດ $x=1$

ບົດຝຶກຫັດ

1. ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x) = x^2 - 3x + 2$

   ຈົ່ງຊອກ $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(3)$

2. ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2 - 1, 0 \le x < 2 \\ 2x + 1, x \ge 2 \end{cases}$

   ຈົ່ງຊອກຄ່າ $f(-2)$, $f(1)$, $f(\frac{3}{2})$, $f(4)$, $f(100)$

3. ຊອກເຂດກໍານົດຂອງຕໍາລາລຸ່ມນີ້ :

   1. $f(x) = \log_2(x^2 + 2x)$
   2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{\log_2 x + 1}$
   3. $f(x) = 3^{\frac{1}{|x|-1}}$
   4. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \log_3(5 - x^2)$
   5. $f(x) = \lg \log_2(x - 3)$
   6. $f(x) = \frac{2x + 1}{(x - 1)\log_4(1 - x^2)}$
   7. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}\log_2(x^2 + x + 2)$
   8. $f(x) = \log_2 |x^2 - 4x + 3|$
   9. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} + \frac{1}{\sqrt{10 + 9x - x^2}}$
   10. $f(x) = \sqrt{-(|2x - 1| - 3)}$
   11. $f(x) = \log_2 \log_3 |x - 1|$
   12. $f(x) = \ln(1 - x^2)$
   13. $f(x) = \sqrt{\lg \frac{1 - 2x}{x + 3}}$
   14. $f(x) = \frac{1}{\lg(3 - x)} + \sqrt{49 - x^2}$
   15. $f(x) = \sqrt{\log_3^2(x - 3) - 1}$
   16. $f(x) = f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{|x - 1|}$
   17. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{|x + 1| + 2}$
   18. $f(x) = \ln(\ln x)$
   19. $f(x) = \frac{1 - x}{\sqrt[3]{3x - 6}}$
   20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

4. ຈົ່ງກວດເບິ່ງລັກສະນະຄູ່, ຄີກ ຫຼື ບໍ່ຄູ່ບໍ່ຄີກຂອງຕໍາລາລຸ່ມນີ້:

   1. $f(x) = x^2 + x$
   2. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$
   3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
   4. $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$
   5. $f(x) = \log_3 \frac{x - 1}{x + 1}$
   6. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$

5. ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)$ ແມ່ນຕໍາລາຄູ່ ແລະ $f(x) = 2x + 3$ ເມື່ອ $x \in [3,5]$. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $f(-4)$ =?

6. ໃຫ້ຕໍາລາ $f(x)$ ແມ່ນຕໍາລາຄີກ ແລະ $f(x) = 7 - 3x$ ເມື່ອ $x \in [1,3]$. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $f(-2)$ =?

7. ໃຫ້ຕໍາລາ $f(2x + 1) = x^2 + 2x + 6$. ຈົ່ງຊອກຫາຕໍາລາ $f(x)$ = ?

8. ໃຫ້ຕຳລາ $f(9^x)=x$. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $f(\sqrt{3})$ = ?

9. ໃຫ້ຕຳລາ $f(2x-3)=x^2+3x-5$. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $f(3)$ = ?

10.ໃຫ້ $f(x+1)+f(2x+1)=2x^2+x+1$ ແລະ $2f(x+1)-f(2x+1)=x^2-4x+2$. ຊອກ $f(4)$?

11. ໃຫ້ຕຳລາ $f(x+1)=3x+2+f(x)$ ແລະ $f(0)=1$. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $f(2)$ = ?

12. ໃຫ້ຕຳລາ $f(x)=x+3$ ແລະ $g(x)=x^2-5$.ຈົ່ງຊອກຕຳລາ $(f\circ g)(x)$ ແລະ $(g\circ f)(x)$=?

13. ຈົ່ງຊອກຕຳລາ $f(x)$. ຖ້າວ່າ $g(x)=3x+4$ ແລະ $(g\circ f)(x)=x^2$?

14. ຈົ່ງຊອກຕຳລາປີ້ນຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

1. $y=2^{-x}+2$ 2. $y=2^{x-1}$ 3. $y=e^{x+1}$

4. $y=\log_4\dfrac{1-x}{1+x}$ 5. $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-2})$ 6. $y=x^2-4x+4$

15. ໃຫ້ຕຳລາ $f(3x-1)=2x+8$. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $f^{-1}(10)$ = ?

16. ໃຫ້ຕຳລາ $f(\frac{x}{2}+1)=\frac{x}{2}-1$. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $f^{-1}(2)$ = ?

17. ໃຫ້ຕຳລາ $f(x-1)=x^3-3x^2+3x+5$. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ $f^{-1}(5)-f^{-1}(-2)$ = ?

18. ຄິດໄລ່ຂອບເຂດຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-6x-7}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}}{1-\sqrt{2-x}}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$

4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{x+5}-2}$ 5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}$ 6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+x^2+x+1}$ 8. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$ 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$

10. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$ 11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ 12. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt[3]{x-5}+2}{x+3}$

13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$ 14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ 15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{1-\sqrt{2-x}}$

16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^{x+1}}{4^{x-1}}$ 17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-1}{2^x+2}$ 18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$

19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ 20. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-2x})$

19. ຈົ່ງກວດເບິ່ງຕຳລາລຸ່ມນີ້ຕໍ່ເນື່ອງຢູ່ເມັດທີ່ກຳນົດໃຫ້ ຫຼື ບໍ່?

1. $f(x)=\begin{cases}2x, x\le 0\\ x^2, x>0\end{cases}$ ຢູ່ເມັດ $x=0$

2. $f(x)=\begin{cases}x^2+3, x\le 3\\ 2x+6, x>3\end{cases}$ ຢູ່ເມັດ $x=3$

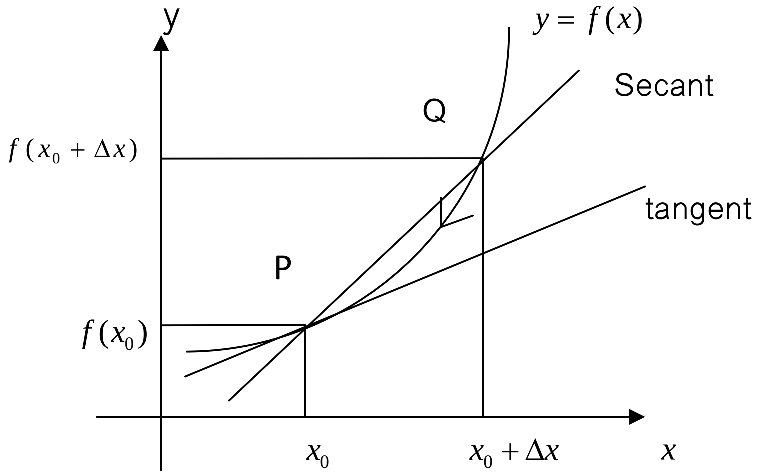
ບົດທີ 3

ຜົນຕຳລາ

(Derivatives)

3.1 ຜົນຕຳລາ

3.1.1 ສຳປະສິດມູມຂອງເສັ້ນຕິດ ແລະ ຜົນຕຳລາ



ໃຫ້ P$(x_0, f(x_0))$ ແລະ Q$(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ ແມ່ນສອງເມັດໃນເສັ້ນສະແດງຂອງຕຳລາ $y = f(x)$ ເສັ້ນຊື່ທີ່ໄປຜ່ານເມັດ P ແລະ Q ເອີ້ນວ່າເສັ້ນຕັດກັບ $y = f(x)$ ສະນັ້ນສຳປະສິດມູມຂອງເສັ້ນຕັດ PQ ແມ່ນ

$$m_{\sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ເມື່ອ $\Delta x \to 0$ ເມັດ Q ຈະເຄື່ອນທີ່ຕາມເສັ້ນໂຄ້ງມາເຕັ້ງກັບເມັດ P $(Q \to P)$ ເວລານັ້ນເສັ້ນຕັດ (secant) ຈະມາເຕັ້ງກັບເສັ້ນຕິດ (tangent) ຂອງ $y = f(x)$ ຢູ່ເມັດ $x = x_0$ ແລະ ຈະໄດ້ $m_{\tan}\Big|_{x=x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ແມ່ນສຳປະສິດມູມຂອງເສັ້ນຕິດກັບ $y = f(x)$ ຢູ່ເມັດ $x = x_0$ ອີກດ້ານໜຶ່ງ $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ແມ່ນອັດຕາປ່ຽນແປງຂອງຕຳລາ $y = f(x)$ ເມື່ອ x ປ່ຽນແປງແຕ່ເມັດ x_0 ຫາເມັດ $x_0 + \Delta x$ ແລະ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ແມ່ນອັດຕາປ່ຽນແປງຂອງຕຳລາ $y = f(x)$ ເມື່ອ x ປ່ຽນແປງແຕ່ເມັດ x_0 ຫາຄ່າທີ່ຢູ່ອ້ອມແອ້ມເມັດ x_0 ຊຶ່ງ x ປ່ຽນແປງໜ້ອຍທີ່ສຸດ. ຄ່າຂອງອັດຕາປ່ຽນແປງຂອງຕຳລາ $y = f(x)$ ເມື່ອ x ປ່ຽນແປງໜ້ອຍທີ່ສຸດຈາກເມັດ x_0 ເອີ້ນວ່າຜົນຕຳລາຂອງຕຳລາ $y = f(x)$ ຢູ່ເມັດ $x = x_0$ ແລະ ສັນຍາລັກດ້ວຍ

$$y'(x_0) \quad = \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} \quad ຫຼື \quad f'(x_0) \quad = \quad \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

ດັ່ງນັ້ນ,

$$\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0} = m_{\tan}\bigg|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

3.1.2 ສູດການຄິດໄລ່ຜືນຕຳລາ

ລ/ດ	ຕຳລາ $y=f(x)$	ຜືນຕຳລາ $y'(x)$	ຕຳລາ $y=f(u)$	ຜືນຕຳລາ $y'(u)$
1	k	0		
2	x	1		
3	x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu^{n-1}u'$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
5	a^x	$a^x \ln a$	a^u	$a^x u' \ln a$
6	e^x	e^x	e^u	$e^u u'$
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\log_a u$	$\frac{u'}{u\ln a}$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$

3.1.3 ຫຼັກການຄິດໄລ່ຜືນຕຳລາ

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(f.g)' = f'g + g'f$
3. $(k.f)' = k.f'$ (k = const)
4. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

ຕົວຢ່າງ 1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$

$f'(x) = (x^3+3x^2-2x)'$ = $(x^3)' + (3x^2)' - (2x)'$ = $3x^2+6x-2$

2. $f(x) = (x^2-1)(x^3+2)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)(x^3+2)\right] = (x^3+2)\frac{d}{dx}(x^2-1) + (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^3+2)$$

= $(x^3+2)2x + (x^2-1)(3x^2)$ $= 5x^4 - 3x^2 + 4x$

$$\frac{df}{dx} = 5x^4 - 3x^2 + 4x$$

3. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$

$$f^{'}(x)=\left(\frac{3x-1}{2x+3}\right)^{'}=\frac{(3x-1)^{'}(2x+3)-(2x+3)^{'}(3x-1)}{(2x+3)^2}$$

$$=\frac{3(2x+3)-2(3x-1)}{(2x+3)^2}=\frac{6x+9-6x+2}{(2x+3)^2}=\frac{11}{(2x+3)^2}$$

$$f^{'}(x)=\frac{11}{(2x+3)^2}$$

4. $f(x)=(4x^2+2)^3$

$$f^{'}(x)=3(4x^3+2)^2(4x^3+2)^{'}=3(4x^3+2)^2(12x^2)=36x^2(4x^3+2)^2$$

5. $f(x)=4^{\ln x}$

$$f^{'}(x)=\left(4^{\ln x}\right)^{'}=4^{\ln x}.\ln 4.(\ln x)^{'}=\frac{1}{x}4^{\ln x}.\ln 4$$

6. $f(x)=e^{x^2+x-1}$

$$f^{'}(x)=e^{x^2+x-1}(x^2+x-1)^{'}=e^{x^2+x-1}(2x+1)$$

3.1.4 ຜົນຕຳລາຂັ້ນສູງ

$$y^{''}=(y^{'})^{'}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y^{'''}=(y^{''})^{'}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$$

.

.

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})^{'}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

ຕົວຢ່າງ:

$$y=x^4-x^3+3x^2+5x+2$$

$$y^{'}=4x^3-3x^2+6x+5$$

$$y^{''}=12x^2-6x+6$$

$$y^{'''}=24x-6$$

$$y^{(4)}=24$$

$$y^{(5)}=0$$

3.2 ການນຳໃຊ້ຜົນຕຳລາ

3.2.1 ເພື່ອຄິດໄລ່ຂອບເຂດ

ຫຼັກເກນ ໂລປີຕານ (L'$\hat{H}ospital$)

ເມື່ອ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ມີຮູບຮ່າງບໍ່ກຳນົດ $\dfrac{0}{0}$ ຫຼື $\dfrac{\infty}{\infty}$ ຈະໄດ້

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \ldots$$

ຕົວຢ່າງ:

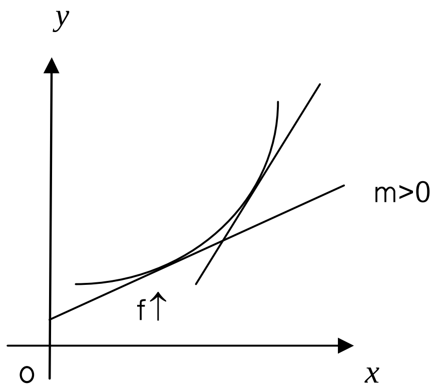
1. $$\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-x^2-x-1}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^3-x^2-x-1)'}{(x^3-x^2-x+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{9x^2-2x-1}{3x^2-2x-1}$$
$$= \frac{9-2-1}{3-2-1} = \frac{6}{0} = \infty$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2+6x+10}{4x^3+2x^2+x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+5x^2+6x+10)'}{(4x^3+2x^2+x+3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+6}{12x^2+4x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+10x+6)'}{(12x^2+4x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+10}{24x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+10)'}{(24x+4)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

3. $$\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x(-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} e^{(-\frac{1}{x}\ln x)} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$$
$$= e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}} = e^0 = 1$$

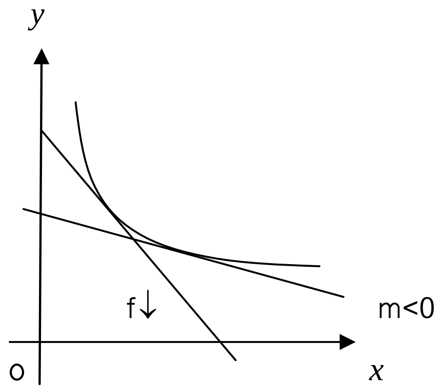
4. $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\lim\limits_{x0}\frac{\ln x}{x}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x0}\frac{1/(1+x)}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x}} = e$$

3.2.2 ເພື່ອຊອກຫາຫວ່າງຂື້ນ, ຫວ່າງແຮມ, ຄ່າໃຫຍ່ສຸດ ແລະ ຄ່ານ້ອຍສຸດທຽບຖານ



ເມື່ອ $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in \left]a,b\right[$
f ເປັນຕຳລາຂື້ນໃນ $\left]a,b\right[$ ຫຼື $\left]a,b\right[$ ແມ່ນຫວ່າງຂື້ນຂອງ f ສັນຍາລັກ f↑$\left]a,b\right[$

- ສັງເກດເຫັນວ່າເມື່ອ f↑$\left]a,b\right[$ $\Rightarrow$ ສຳປະສິດມູມຂອງເສັ້ນຕິດກັບ $y=f(x)$ ຢູ່ແຕ່ລະເມັດ $x\in\left]a,b\right[$ ມີຄ່າບວກ ແລະ ສາມາດພິສູດໃຫ້ເຫັນວ່າເມື່ອ $f'(x)>0\ \ \forall x\in\left]a,b\right[\ \Rightarrow$ f↑$\left]a,b\right[$



ເມື່ອ $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in]a,b[$
f ເປັນຕຳລາແຮມໃນ $]a,b[$ ຫຼື $]a,b[$ ແມ່ນຫວ່າງແຮມຂອງ f ສັນຍາລັກ f↓$]a,b[$

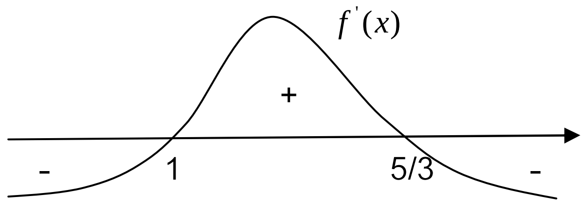
- ສັງເກດເຫັນວ່າເມື່ອ f↓$]a,b[\;\Rightarrow$ ສຳປະສິດມູມຂອງເສັ້ນຕິດກັບ $y = f(x)$ ຢູ່ແຕ່ລະເມັດ $x \in]a,b[$ ມີຄ່າລົບ ແລະ ສາມາດພິສູດໃຫ້ເຫັນວ່າເມື່ອ $f^{'}(x) < 0 \quad \forall x \in]a,b[\;\Rightarrow$ f↓$]a,b[$

- ເມື່ອ $f(x)$ ຕໍ່ເນື່ອງຢູ່ເມັດ x_0 , f↑$]x_0 - £, x_0[$ ແລະ f↓$]x_0, x_0 + £[$ ເພິ່ນເວົ້າວ່າ $(x_0, f(x_0))$ ແມ່ນເມັດໃຫຍ່ສຸດທຽບຖານ (ທຽບໃສ່ບັນດາມັດຢູ່ໃກ້ໆກັບເມັດ x_0) ຫຼື ເມັດ x_0 ແມ່ນເມັດທີ່ພາໃຫ້ $f(x)$ ມີຄ່າໃຫຍ່ສຸດທຽບຖານ ແລະ ສັນຍາລັກຄ່າໃຫຍ່ສຸດທຽບຖານຂອງ f ດ້ວຍ f_{max}
- ເມື່ອ $f(x)$ ຕໍ່ເນື່ອງຢູ່ເມັດ x_0 , f↓$]x_0 - £, x_0[$ ແລະ f↑$]x_0, x_0 + £[$ ເພິ່ນເວົ້າວ່າ $(x_0, f(x_0))$ ແມ່ນເມັດນ້ອຍສຸດທຽບຖານ (ທຽບໃສ່ບັນດາມັດຢູ່ໃກ້ໆກັບເມັດ x_0) ຫຼື ເມັດ x_0 ແມ່ນເມັດທີ່ພາໃຫ້ $f(x)$ ມີຄ່ານ້ອຍສຸດທຽບຖານ ແລະ ສັນຍາລັກຄ່ານ້ອຍສຸດທຽບຖານຂອງ f ດ້ວຍ f_{min}

ຕົວຢ່າງ: ຈົ່ງຊອກຫວ່າງຂຶ້ນ, ຫວ່າງແຮມ, ຄ່າໃຫຍ່ສຸດ ແລະ ຄ່ານ້ອຍສຸດທຽບຖານຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

$f^{'}(x) = -3x^2 + 8x - 5$



$f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 8x - 5 = 0$

$x_1 = 1$ ຫຼື $x_2 = \frac{5}{3}$

$f^{'}(x) < 0 \qquad \forall x \in]-\infty, 1[\cup \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[\;\Rightarrow$ f↓$]-\infty, 1[$ ແລະ f↓$\left]\frac{5}{3}, +\infty\right[$

$f^{'}(x) > 0 \qquad \forall x \in \left]1, \frac{5}{3}\right[\qquad \Rightarrow$ f ↑$\left]1, \frac{5}{3}\right[$

$(1, f(1)) = (1, -1)$ ແມ່ນເມັດນ້ອຍສຸດທຽບຖານ

$(\frac{5}{3}, f(\frac{5}{3})) = (\frac{5}{3}, -\frac{23}{27})$ ແມ່ນເມັດໃຫຍ່ສຸດທຽບຖານ

ບົດຝຶກຫັດ

1. ຈົ່ງຄິດໄລ່ຜົນຕຳລາຂັ້ນໜຶ່ງຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

1.	$f(x)=x^2(3x^4-6x+4)$	2.	$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$
3.	$f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1-x^2}$	4.	$f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$
5.	$f(x)=\sqrt{e^{2x}-1}$	6.	$f(x)=x^3e^{-3x}$
7.	$f(x)=3^{x^2+2}$	8.	$f(x)=e^{x^2-2x+3}$
9.	$f(x)=\ln(x^2+1)$	10.	$f(x)=\ln^3 x$
11.	$f(x)=(x^2+2)^4$	12.	$f(x)=\ln(\ln x)$
13.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3}}$	14.	$f(x)=\frac{1}{e^{x^2+x+1}}$
15.	$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$	16.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+4}}$
17.	$f(x)=e^{x^2}$	18.	$f(x)=e^{x\ln x}$
19.	$f(x)=\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})$	20.	$f(x)=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$

2. ຊອກຜົນຕຳລາຂັ້ນສອງຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

1.	$f(x)=5x^3-4x^2+x$	2.	$f(x)=\frac{1+x}{x}$
3.	$f(x)=\sqrt[3]{2x+9}$	4.	$f(x)=3^{x^2}$

3. ຄິດໄລ່ຂອບເຂດລຸ່ມນີ້:

1.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$	2.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$
3.	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x\ln x}{x+\ln x}$	4.	$\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$
5.	$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$	6.	$\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$
7.	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$	8.	$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{2x}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

4. ຈົ່ງຊອກຫວ່າງຂຶ້ນ, ຫວ່າງແຮມ, ຄ່າໃຫຍ່ສຸດ, ຄ່ານ້ອຍສຸດທຽບຖານຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+1$

2. $f(x)=3x^4-4x^3$

ບົດທີ 4

ມາຕຣິດສ໌

(Matrix)

4.1 ນິຍາມ ແລະ ກົດການຄຳນວນລະຫວ່າງມາຕຣິດສ໌

ຕາຕະລາງຈຳນວນເຊັ່ນ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ ເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ m ແຖວ n ຖັນ ຫຼື ມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດ mxn

ສັນຍາລັກ A = (a_{ij})$_{m \times n}$; ແຕ່ລະຈຳນວນໃນມາຕຣິດສ໌ເອີ້ນວ່າອົງປະກອບຂອງ ມາຕຣິດສ໌

ຕົວຢ່າງ 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$ ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດ 3 X 3

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$ ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດ 2 X 3

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$ ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດ 3 X 2

- ມາຕຣິສ໌ຂະໜາດ ($1 \times n$) ເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ແຖວເຊັ່ນ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
- ມາຕຣິສ໌ຂະໜາດ ($m \times 1$) ເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ຖັນ ຫຼື ມາຕຣິດສ໌ເສົາເຊັ່ນ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$
- ມາຕຣິດສ໌ທີ່ມີຈຳນວນແຖວເທົ່າກັບຈຳນວນຖັນເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ຈະຕຸລັດ

ໃຫ້ສອງມາຕຣິດສ໌ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ແລະ $B = (b_{ij})_{m \times n}$

A = B $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

ການບວກສອງມາຕຣິດສ໌ເຂົ້າກັນຈະປະຕິບັດໄດ້ກໍຕໍ່ເມື່ອສອງມາຕຣິດສ໌ຕ້ອງມີຂະໜາດເທົ່າກັນ

ຕົວຢ່າງ 2:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ -2 & 3 & 2\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1-1 & 2+3 & 3+2\\ 0+4 & -1+1 & 4+3\\ -2+2 & 3-3 & 2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 4 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}1+1 & 2-3 & 3-2\\ 0-4 & -1-1 & 4-3\\ -2-2 & 3+3 & 2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -4 & -2 & 1\\ -4 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

ໃຫ້ມາຕຣິດສ໌ $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}$ ແລະ ຈຳນວນຄົງຄ່າ k

ການຄູນຈຳນວນຄົງຄ່າໃສ່ມາຕຣິດສ໌ປະຕິບັດໄດ້ດັ່ງນີ້

$$kA=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n}\\ . & . & . & .\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mn}\end{bmatrix}$$

ຕົວຢ່າງ 3: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ -2 & 3 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow 2A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -2 & 8\\ -4 & 6 & 4\end{bmatrix}$

ການບວກມາຕຣິດສ໌ ແລະ ການຄູນຈຳນວນຄົງຄ່າໃສ່ມາຕຣິດສ໌ມີຄຸນລັກສະນະພື້ນຖານດັ່ງລຸ່ມນີ້:

- A + B = B + A
- k(A + B) = kA + kB
- (-1)A = - A
- A – A = 0

ໃຫ້ສອງມາຕຣິດສ໌ $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ແລະ $B=(b_{ij})_{n\times k}$

AB = C , C = $(c_{ij})_{m\times k}$; $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+....+a_{in}b_{nj}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

ຈະດຳເນີນການຄູນ AB ໄດ້ກໍຕໍ່ເມື່ອຈຳນວນຖັນຂອງ A ເທົ່າຈຳນວນແຖວຂອງ B ຫຼື ຈຳນວນຖັນຂອງມາຕຣິດສ໌ທີໜຶ່ງຕ້ອງເທົ່າກັບຈຳນວນແຖວຂອງມາຕຣິດສ໌ທີສອງ

ຕົວຢ່າງ 4:

1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} 1.1+2.2 & 1.3+2.4 \\ (-1).1+3.2 & (-1).3+3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

2. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} 1.(-1)+2.4+3.2 & 1.3+2.1+3.(-3) & 1.2+2.3+3.0 \\ 0.(-1)+(-1).4+4.2 & 0.3+(-1).1+4.(-3) & 0.2+(-1).3+4.0 \\ (-2).(-1)+3.4+2.2 & (-2).3+3.1+2.(-3) & (-2).2+3.3+2.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -4 & 8 \\ 4 & -13 & -3 \\ 18 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

3. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} 1.4+2.0+4.2 & 1.1+2.(-1)+4.7 & 1.4+2.3+4.5 & 1.3+2.1+4.2 \\ 2.4+6.0+0.2 & 2.1+6.(-1)+0.7 & 2.4+6.3+0.5 & 2.3+6.1+0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

ການຄູນລະຫວ່າງມາຕຣິດສ໌ມີຄຸນລັກສະນະພື້ນຖານກັ່ງລຸ່ມນີ້ :

- (kA)B = k(AB)
- A(BC) = (AB)C
- A(B + C) = AB + AC
- (B+C)A = BA + CA

ໂດຍທົ່ວໄປແລ້ວ $AB \neq BA$

ມາຕຣິດສ໌ທີ່ມີອົງປະກອບໃນເສັ້ນເນັ່ງຈອມແຕ່ຊ້າຍຫາຂວາແມ່ນ 1 ສ່ວນອົງປະກອບອື່ນແມ່ນ 0 ໝົດ ເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ຫົວໜ່ວຍສັນຍາລັກດ້ວຍ I

ຕົວຢ່າງ 5:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ມາຕຣິດສ໌ທີ່ທຸກໆອົງປະກອບແມ່ນ 0 ໝົດເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ສູນ

ຕົວຢ່າງ 6:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2 ມາຕຣິດສ໌ປີ້ນ , ການຜັນປ່ຽນມາຕຣິດສ໌ , ມາຕຣິດສ໌ເຄິ່ງຄື

ສັງເກດເຫັນວ່າ AI = IA = A

ຖ້າວ່າ AB = BA = I

ເພິ່ນເວົ້າວ່າ B ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ປີ້ນຂອງ A (Inverse matrix) ແລະ ສັນຍາລັກດ້ວຍ $B = A^{-1}$

ມາຕຣິດສ໌ໃດໜຶ່ງຈະມີມາຕຣິດສ໌ປີ້ນກໍຕໍ່ເມື່ອແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຈະຕຸລັດ

- ສຳລັບມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດ 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ຈະໄດ້} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ຕົວຢ່າງ 7:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ຈະໄດ້} \quad A^{-1} = \frac{1}{2.3 - 1.5} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

• ສຳລັບມາຕຣິດສ໌ທີ່ມີຂະໜາດໃຫຍ່ກວ່າ 2 x 2 ແມ່ນບໍ່ສາມາດນຳໃຊ້ວິທີຂ້າງເທິງຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນໄດ້

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ເພິ່ນເອີ້ນ A^T ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຜັນປ່ຽນຂອງ A .

ຕົວຢ່າງ 8:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ການຜັນປ່ຽນມາຕຣິດສ໌ມີຄຸນລັກສະນະພື້ນຖານດັ່ງລຸ່ມນີ້

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

ຖ້າວ່າ $A^T = A$ ເພິ່ນວ່າ A ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ເຄິ່ງຄື

ຕົວຢ່າງ 8:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ເຄິ່ງຄື

4.3 ລະບົບສົມຜົນລີເນແອ, ວິທີລຶບຂອງກາວສ໌

ຄວາມຮູ້ກ່ຽວກັບລະບົບສົມຜົນລີເນແອ

ລະບົບສົມຜົນລີເນແອທີ່ມີ m ສົມຜົນ ແລະ n ຕົວລັບແມ່ນລະບົບສົມຜົນທີ່ມີຮູບຮ່າງ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \dots & a_{2n}x_n = & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \dots & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

ຊຶ່ງແມ່ນລະບົບສົມຜົນ (mxn) ໃນນັ້ນ $a_{ij}, b_j \in R$, $1 \le i \le m$; $1 \le j \le n$

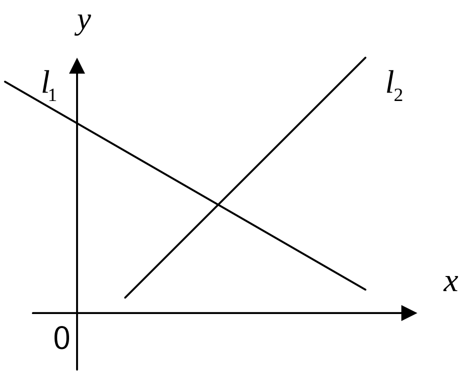
4.3.1 ລະບົບສົມຜົນລີເນແອທີ່ປະກອບດ້ວຍສອງສົມຜົນ ແລະ ສອງຕົວລັບ

ຮູບຮ່າງທົ່ວໄປຂອງລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວແມ່ນ:

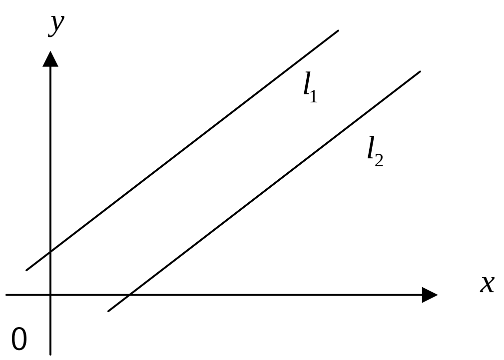
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$$

ຊຶ່ງ a_1 ; a_2 ; b_1 ; b_2 ; c_1 ; c_2 ແມ່ນຈຳນວນຈິງ. ລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວແມ່ນລະບົບສົມຜົນ (2x2). ໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນນີ້ຈະມີຮູບຮ່າງ (x, y) ຊຶ່ງເອີ້ນວ່າແຜດຂອງຈຳນວນຈິງ x ແລະ y ທີ່ຕອບສະໜອງສົມຜົນທັງສອງ.

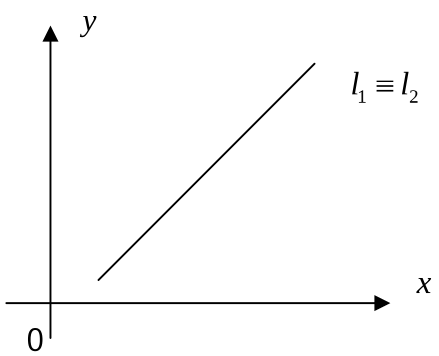
ການຊອກຫາໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວແມ່ນການຊອກຫາເມັດຕັດກັນລະຫວ່າງສອງເສັ້ນຊື່ທີ່ບັນຈຸໃນລະບົບສົມຜົນນັ້ນຊຶ່ງສາມາດສະແດງທາງດ້ານເລຂາຄະນິດໄດ້ດັ່ງນີ້:



ລະບົບສົມຜົນມີໃຈຜົນດຽວເມື່ອສອງເສັ້ນຊື່ຕັດກັນຢູ່ເມັດໜຶ່ງ



ລະບົບສົມຜົນບໍ່ມີໃຈຜົນເມື່ອສອງເສັ້ນຊື່ບໍ່ຕັດກັນ ຫຼື ສອງເສັ້ນຊື່ຂະໜານກັນ



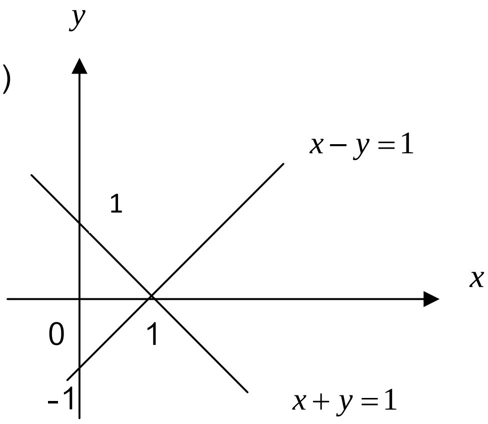
ລະບົບສົມຜົນມີຫຼາຍໃຈຜົນເມື່ອສອງເສັ້ນຊື່ເຕັງກັນ

4.3.1.1 ການແກ້ລະບົບສົມຜົນ (2x2) ດ້ວຍເສັ້ນສະແດງ

ຕົວຢ່າງ 9: ຈົ່ງຊອກຫາໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້:

1) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$

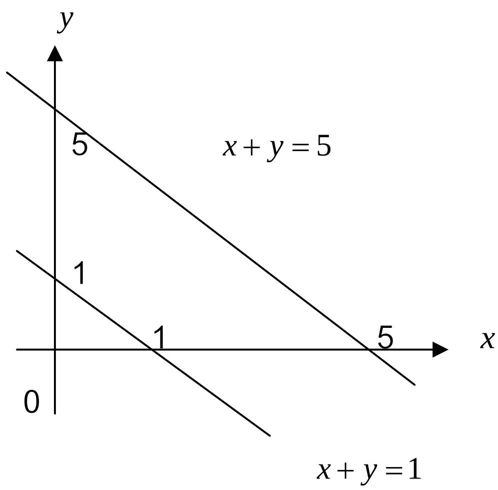
1)



ເຮົາສັງເກດເຫັນວ່າສອງເສັ້ນຊື່ຕັດກັນຢູ່ເມັດທີ່ມີຕົວປະສານ x ເທົ່າ 1 ແລະ ຕົວປະສານ y ເທົ່າ 0

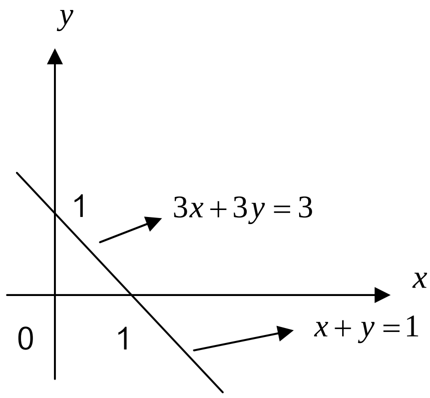
ດັ່ງນັ້ນລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວມີໃຈຜົນແມ່ນ (1 , 0)

2)



ເຮົາສັງເກດເຫັນວ່າສອງເສັ້ນຊື່ຂະໜານກັນ ສະແດງວ່າລະບົບສົມຜົນບໍ່ມີໃຈຜົນ

3)



ສອງເສັ້ນຊື່ເຕັ່ງກັນສະແດງວ່າລະບົບສົມຜົນມີຫຼາຍໃຈຜົນ ຫຼື ລະບົບສົມຜົນມີໃຈຜົນບໍ່ສິ້ນສຸດ

4.3.1.2 ການແກ້ລະບົບສົມຜົນ (2x2) ດ້ວຍວິທີຄັດແທນ

- ຂັ້ນຕອນທີ 1 ຖອນເອົາ x ຫຼື y ຈາກສົມຜົນ (1)
- ຂັ້ນຕອນທີ 2 ເອົາຄ່າ x ຫຼື y ທີ່ຖອນໄດ້ຈາກສົມຜົນ (1) ແທນໃສ່ສົມຜົນ (2)
- ຂັ້ນຕອນທີ 3 ຊອກຫາຄ່າ x ຫຼື y ຈາກສົມຜົນ (2)
- ຂັ້ນຕອນທີ 4 ເອົາຄ່າ x ຫຼື y ທີ່ຊອກໄດ້ຈາກສົມຜົນ (2) ແທນໃສ່ສົມຜົນທີ່ຖອນໄດ້ຈາກສົມຜົນ (1)

ຕົວຢ່າງ 10: ແກ້ລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້ດ້ວຍວິທີຄັດແທນ

$$\begin{cases} x+3y=270 & (1) \\ x-y=10 & (2) \end{cases}$$

ຈາກສົມຜົນ (1) ຈະໄດ້ $x=270-3y$ (3)

ເອົາ (3) ແທນໃສ່ (2) ຈະໄດ້

$$270-3y-y=10$$
$$\Leftrightarrow\ 270-4y=10$$
$$\Leftrightarrow\ 4y=260$$
$$\Rightarrow\ y=\frac{260}{4}=65$$

ຈາກ (3) $\Rightarrow$ $x=270-3\times 65=75$

ລະບົບສົມຜົນທີໃຫ້ມາມີໃຈຜົນແມ່ນ (75 , 65)

4.3.1.3 ການແກ້ລະບົບສົມຜົນ (2x2) ດ້ວຍວິທີລົບລ້າງ

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$$

- ຂັ້ນຕອນທີ 1 ຄູນຈຳນວນຄົງຄ່າ a_1 ແລະ a_2 ໃສ່ສົມຜົນທີ (2) ແລະ (1) ຕາມລຳດັບ ແລ້ວເອົາຜົນໄດ້ຮັບລົບອອກຈາກກັນຈະໄດ້ສົມຜົນທີ່ມີຕົວລັບ y ພຽງຕົວດຽວ

$$-\ \begin{matrix} a_2 \\ a_1 \end{matrix}\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$$

$$a_2b_1y-a_1b_2y=a_2c_1-a_1c_2$$

- ຂັ້ນຕອນທີ 2 ແກ້ສົມຜົນທີ່ໄດ້ຈາກຂັ້ນຕອນທີ 1 ຈະໄດ້ຄ່າຂອງ y

$$y=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}$$

• ຂັ້ນຕອນທີ 3 ເອົາຄ່າ ຂອງ y ແທນໃສ່ (1) ຫຼື (2) ຈະໄດ້ຄ່າຂອງ x

ຕົວຢ່າງ 11: ແກ້ລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້ດ້ວຍວິທີລົບລ້າງ

$$\begin{cases} 3x+5y=21 & (1) \\ 5x+9y=37 & (2) \end{cases}$$

ຄູນ 5 ໃສ່ (1) ແລະ 3 ໃສ່ (2) ຈະໄດ້

$$-\begin{array}{r} 5 \\ 3 \end{array}\begin{cases} 3x+5y=21 & (1) \\ 5x+9y=37 & (2) \end{cases}$$

$$25y-27y=105-111$$

$$\Leftrightarrow \quad -2y=-6$$

$$\Rightarrow \quad y=3$$

ແທນຄ່າ y = 3 ໃສ່ສົມຜົນ (1) ຈະໄດ້ $3x+5\times3=21$

$$\Rightarrow \quad x=2$$

ດັ່ງນັ້ນໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາແມ່ນ (2 , 3)

4.3.2 ລະບົບສົມຜົນລີເນແອທີ່ປະກອບດ້ວຍສາມສົມຜົນ ແລະ ສາມຕົວລັບ

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

$$a_{ij}, b_j \in R \quad , \quad 1\le i\le 3; 1\le j\le 3$$

ໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວມີຮູບຮ່າງ (x,y,z)

• ສອງລະບົບສົມຜົນທີ່ມີຕົວລັບເທົ່າກັນ ແລະ ມີກຸ່ມໃຈຜົນເທົ່າກັນເອີ້ນວ່າທຽບເທົ່າກັນ. ເຮົາສາມາດນຳໃຊ້ຫຼັກການຄຳນວນ 3 ວິທີຕໍ່ໄປນີ້ກັບລະບົບສົມຜົນລີເນແອຈະໄດ້ລະບົບສົມຜົນລີເນແອທີ່ທຽບເທົ່າກັບລະບົບສົມຜົນເດີມ.

1. ເຮົາສາມາດປ່ຽນລຳດັບຂອງສົມຜົນໃນລະບົບສົມຜົນໄດ້.
2. ເຮົາສາມາດຄູນຈຳນວນຄົງຄ່າຕ່າງສູນກັບສົມຜົນໃດໜຶ່ງ.
3. ເຮົາສາມາດບວກສອງສົມຜົນເຂົ້າກັນເພື່ອໃຫ້ໄດ້ສົມຜົນໃໝ່.

• ລະບົບສົມຜົນລີເນແອຂະໜາດ $n\times n$ ຊຶ່ງໃນສົມຜົນທີ່ k ສຳປະສິດຂອງຕົວລັບ k-1 ຕົວທຳອິດເທົ່າສູນໝົດແຕ່ສຳປະສິດຂອງຕົວລັບ x_k ຕ່າງສູນ (k=1,2,3,…,n) ເອີ້ນວ່າລະບົບສົມຜົນໃນຮູບຮ່າງສາມແຈ.

ຕົວຢ່າງ 12: ລະບົບສົມຜົນ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & (1) \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 2 & (2) \\ \quad\quad\quad 2x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

ແມ່ນລະບົບສົມຜົນໃນຮູບຮ່າງສາມແຈ.

ສັງເກດເຫັນວ່າລະບົບສົມຜົນໃນຮູບຮ່າງສາມແຈແກ້ງ່າຍ. ເຊັ່ນລະບົບສົມຜົນຂ້າງເທິງນີ້ຈາກສົມຜົນ (3) ຈະໄດ້ $x_3 = 2$. ເມື່ອແທນ $x_3 = 2$ ໃສ່ສົມຜົນ (2) ຈະໄດ້ $x_2 = 4$. ເມື່ອແທນ $x_3 = 2$ ແລະ $x_2 = 4$ ໃສ່ສົມຜົນ (1) ຈະໄດ້ $x_1 = -3$. ຂະບວນການແທນຄ່າຂອງຕົວລັບແຕ່ລຸ່ມຂຶ້ນເທິງເອີ້ນວ່າຂະບວນການແທນຄືນຫຼັງ.

ເມື່ອລະບົບສົມຜົນລີເນແອຂະໜາດ n×n ບໍ່ຢູ່ໃນຮູບຮ່າງສາມແຈເຮົາສາມາດນໍາໃຊ້ຫຼັກການຄໍານວນ 3 ວິທີສໍາລັບລະບົບສົມຜົນເພື່ອປ່ຽນຮູບຮ່າງລະບົບສົມຜົນໃຫ້ໄປສູ່ລະບົບສົມຜົນຮູບຮ່າງສາມແຈຊຶ່ງທຽບເທົ່າກັບລະບົບສົມຜົນເດີມ.

ຕົວຢ່າງ 13: ແກ້ລະບົບສົມຜົນ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 & (2) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

-3(1)+ (2) $\rightarrow$ (4)

-2(1) + (3) $\rightarrow$ (5) ຈະໄດ້ລະບົບສົມຜົນໃໝ່ທຽບເທົ່າກັບສົມຜົນເດີມດັ່ງນີ້

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ \quad -7x_2 - 6x_3 = -10 & (4) \\ \quad -x_2 - x_3 = -2 & (5) \end{cases}$$

-7(5) + (4) $\rightarrow$ (6) ຈະໄດ້ລະບົບສົມຜົນໃໝ່ທຽບເທົ່າກັບສົມຜົນເດີມດັ່ງນີ້

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ \quad -7x_2 - 6x_3 = -10 & (4) \\ \quad\quad\quad x_3 = 4 & (6) \end{cases}$$

ໂດຍໃຊ້ຂະບວນການແທນຄືນຫຼັງຈະໄດ້ $x_3 = 4$, $x_2 = -2$, $x_1 = 3$

ເມື່ອເບິ່ງແຕ່ສຳປະສິດຂອງຕົວລັບໃນລະບົບສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາຂ້າງເທິງນີ້ຈະເຫັນຕາຕະລາງຈຳນວນທີ່ມີສາມແຖວ ແລະ ສາມຖັນດັ່ງລຸ່ມນີ້:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ ຕາຕະລາງນີ້ເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ສຳປະສິດຂອງລະບົບສົມຜົນ

ເມື່ອຕື່ມສຳປະສິດເອກະລາດໃສ່ມາຕຣິດສ໌ສຳປະສິດຂອງລະບົບສົມຜົນຈະໄດ້ມາຕຣິສ໌

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$ ເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນ

ຫຼັກການຄຳນວນ 3 ວິທີທີ່ໃຊ້ກັບລະບົບສົມຜົນສາມາດນຳໃຊ້ກັບມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຈະໄດ້ມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນໃໝ່ທີ່ທຽບເທົ່າກັບລະບົບສົມຜົນເດີມ. ເຊັ່ນການຄຳນວນກັບລະບົບສົມຜົນໃນຕົວຢ່າງຂ້າງເທິງເມື່ອຂຽນໃນຮູບຮ່າງມາຕຣິດສ໌ຈະໄດ້:

$$(-3)R_1 + R_2 \to R_{2.1}$$

$$(-3)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_3 \end{array}$$

$$(-2)R_1 + R_3 \to R_{3.1}$$

$$(-2)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_3 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_{3.1} \end{array}$$

$$(-7)R_3 + R_{2.1} \to R_{3.1.2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_{3.1} \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_{3.1.2} \end{array}$$

ຊຶ່ງເປັນມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນທີ່ທຽບເທົ່າກັບລະບົບສົມຜົນເດີມຊຶ່ງເອີ້ນວ່າ ມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຮູບຮ່າງສາມແຈ.

ຈາກມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍສຸດທ້າຍເຮົາຈະໄດ້ລະບົບສົມຜົນ

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 0x-7y-6z=-10 \\ 0x+0y+z=4 \end{cases}$$

ໂດຍໃຊ້ຂະບວນການແທນຄືນຫຼັງຈະໄດ້ $x_3=4$, $x_2=-2$, $x_1=3$

ມີບາງກໍລະນີເຮົາບໍ່ສາມາດປ່ຽນມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນໄປສູ່ຮູບຮ່າງສາມແຈ.

ຕົວຢ່າງ 14:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

ມາຕຣິດສ໌ທີ່ໄດ້ມາບໍ່ແມ່ນຮູບຮ່າງສາມແຈ. ມາຕຣິດສ໌ສຸດທ້າຍຂອງລະບົບສົມຜົນຂ້າງເທິງນີ້ມີຮູບຮ່າງຂັ້ນໃດ . ຂະບວນການປ່ຽນມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນລີເນແອໃຫ້ເປັນມາຕຣິດສ໌ຮູບຮ່າງຂັ້ນໃດເອີ້ນວ່າວິທີລຶບຂອງກາວສ໌

ສັງເກດເຫັນວ່າເມື່ອມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນທີ່ຢູ່ໃນຮູບຮ່າງຂັ້ນໃດໃນກໍລະນີລຸ່ມນີ້:

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$ ລະບົບສົມຜົນບໍ່ມີໃຈຜົນ

2. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$ ລະບົບສົມຜົນມີໃຈຜົນດຽວ

3. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$ ລະບົບສົມຜົນມີຫຼາຍໃຈຜົນ

4.3.2.1 ການແກ້ລະບົບສົມຜົນລີເນແອ (3×3) ດ້ວຍວິທີຂອງ ກາວສ໌ - ຈໍແດນ

ຂັ້ນຕອນຂອງວິທີ ກາສ໌ - ຈໍແດນ

ຈາກລະບົບສົມຜົນ $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

- ຂັ້ນຕອນທີ 1 ຜັນປ່ຽນສຳປະສິດຂອງ x

ເຮັດໃຫ້ສຳປະສິດຂອງ x ເທົ່າ 1 ສຳລັບສົມຜົນທີ 1 ແລະ ເທົ່າ 0 ສຳລັບສົມຜົນທີ 2 ແລະ 3 ໝາຍຄວາມວ່າໃນເບື້ອງຕົ້ນສຳປະສິດຂອງ x ມີ

ຮູບຮ່າງ $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$ ຈະຖືກຜັນປ່ຽນເປັນ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1} \\ R_{3.1} \end{matrix}$

- ຂັ້ນຕອນທີ 2 ຜັນປ່ຽນສຳປະສິດຂອງ y

ເຮັດໃຫ້ສຳປະສິດຂອງ y ເທົ່າ 1 ສຳລັບສົມຜົນທີ 2 ແລະ ເທົ່າ 0 ສຳລັບສົມຜົນທີ 1 ແລະ 3 ໝາຍຄວາມວ່າໃນເບື້ອງຕົ້ນສຳປະສິດຂອງ y ມີ

ຮູບຮ່າງ $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$ ຈະຖືກຜັນປ່ຽນເປັນ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1} \\ R_{3.1} \end{matrix}$

- ຂັ້ນຕອນທີ 3 ຜັນປ່ຽນສຳປະສິດຂອງ z

ເຮັດໃຫ້ສຳປະສິດຂອງ z ເທົ່າ 1 ສຳລັບສົມຜົນທີ 3 ແລະ ເທົ່າ 0 ສຳລັບສົມຜົນທີ 1 ແລະ 2 ໝາຍຄວາມວ່າໃນເບື້ອງຕົ້ນສຳປະສິດຂອງ z ມີ

ຮູບຮ່າງ $\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$ ຈະຖືກຜັນປ່ຽນເປັນ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1} \\ R_{3.1} \end{matrix}$

ຕົວຢ່າງ 15: ຈົ່ງນຳໃຊ້ວິທີຂອງ ກາວສ໌ - ຈໍແດນ ແກ້ລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້:

$$\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 20 & (R_1) \\ 4x + 2y - 2z = -2 & (R_2) \\ 3x - y + z = 11 & (R_3) \end{cases}$$

ວິທີແກ້:

- ຂັ້ນຕອນທີ 1 ຜັນປ່ຽນສຳປະສິດຂອງ x

$$\frac{1}{2}(R_1) \to (R_{1.1})$$

$$\begin{cases} 2x+8y+6z=20 & (R_1) \\ 4x+2y-2z=-2 & (R_2) \\ 3x-y+z=11 & (R_3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+4y+3z=10 & (R_{1.1}) \\ 4x+2y-2z=-2 & (R_2) \\ 3x-y+z=11 & (R_3) \end{cases}$$

$$-4(R_{1.1})+(R_2) \to (R_{2.1})$$

$$\begin{cases} x+4y+3z=10 & (R_{1.1}) \\ 4x+2y-2z=-2 & (R_2) \\ 3x-y+z=11 & (R_3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+4y+3z=10 & (R_{1.1}) \\ 0x-14y-14z=-2 & (R_{2.1}) \\ 3x-y+z=11 & (R_3) \end{cases}$$

$$-3(R_{1.1})+(R_3) \to (R_{3.1})$$

$$\begin{cases} x+4y+3z=10 & (R_{1.1}) \\ 0x-14y-14z=-2 & (R_{2.1}) \\ 3x-y+z=11 & (R_3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+4y+3z=10 & (R_{1.1}) \\ 0x-14y-14z=-2 & (R_{2.1}) \\ 0x-13y-8z=-19 & (R_{3.1}) \end{cases}$$

- ຂັ້ນຕອນທີ 2 ຜັນປ່ຽນສຳປະສິດຂອງ y

$$-\frac{1}{14}(R_{2.1}) \to (R_{2.1.2})$$

$$\begin{cases} x+4y+3z=10 & (R_{1.1}) \\ 0x-14y-14z=-42 & (R_{2.1}) \\ 0x-13y-8z=-19 & (R_{3.1}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+4y+3z=10 & (R_{1.1}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x-13y-8z=-19 & (R_{3.1}) \end{cases}$$

$$-4(R_{2.1.2})+(R_{1.1}) \to (R_{1.1.2})$$

$$\begin{cases} x+4y+3z=10 & (R_{1.1}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x-13y-8z=-19 & (R_{3.1}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+0y-z=-2 & (R_{1.1.2}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x-13y-8z=-19 & (R_{3.1}) \end{cases}$$

$13(R_{2.1.2})+(R_{3.1}) \to (R_{3.1.2})$

$$\begin{cases} x+0y-z=-2 & (R_{1.1.2}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x+0y-8z=-19 & (R_{3.1}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+0y-z=-2 & (R_{1.1.2}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x+0y+5z=20 & (R_{3.1.2}) \end{cases}$$

- ຂັ້ນຕອນທີ 3 ຜັນປ່ຽນສຳປະສິດຂອງ z

$\frac{1}{5}(R_{3.1.2}) \to (R_{3.1.2.3})$

$$\begin{cases} x+0y-z=-2 & (R_{1.1.2}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x+0y+5z=20 & (R_{3.1.2}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+0y-z=-2 & (R_{1.1.2}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x+0y+z=4 & (R_{3.1.2.3}) \end{cases}$$

$(R_{3.1.2.3})+(R_{1.1.2}) \to (R_{1.1.2.3})$

$$\begin{cases} x+0y-z=-2 & (R_{1.1.2}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x+0y+z=4 & (R_{3.1.2.3}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+0y+0z=2 & (R_{1.1.2.3}) \\ 0x+y+z=3 & (R_{2.1.2}) \\ 0x+0y+z=4 & (R_{3.1.2.3}) \end{cases}$$

$-1(R_{3.1.2.3})+(R_{2.1.2}) \to (R_{2.1.2.3})$

$$\begin{cases} x+0y+0z=2 & (R_{1.1.2.3}) \\ 0x+y+0z=-1 & (R_{2.1.2.3}) \\ 0x+0y+z=4 & (R_{3.1.2.3}) \end{cases}$$

ດັ່ງນັ້ນໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນແມ່ນ $x=2$; $y=-1$ ແລະ $z=4$

4.3.2.2 ການນຳໃຊ້ວິທີຂອງກາວສ໌ - ຈໍແດນເຂົ້າໃນມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນ

ຈາກລະບົບສົມຜົນ $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

ເຮົາຈະໄດ້ມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍແມ່ນ: $\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$

- ຂັ້ນຕອນທີ 1 ຜັນປ່ຽນເສົາທີ 1

ຜັນປ່ຽນມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍໄປສູ່ມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍໃໝ່ໂດຍເຮັດໃຫ້ອົງປະກອບທີ 1 ໃນເສົາທີ 1 ມີຄ່າເທົ່າກັບ 1 ສ່ວນອົງປະກອບອື່ນໃນເສົາທີ 1 ໃຫ້ມີຄ່າເທົ່າ 0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right]$$

- ຂັ້ນຕອນທີ 2 ຜັນປ່ຽນເສົາທີ 2

ຜັນປ່ຽນມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍທີ່ໄດ້ຈາກຂັ້ນຕອນທີ 1 ໄປສູ່ມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍໃໝ່ໂດຍເຮັດໃຫ້ອົງປະກອບທີ 2 ໃນເສົາທີ 2 ມີຄ່າເທົ່າກັບ 1 ສ່ວນອົງປະກອບອື່ນໃນເສົາທີ 2 ໃຫ້ມີຄ່າເທົ່າ 0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$

- ຂັ້ນຕອນທີ 3 ຜັນປ່ຽນເສົາທີ 3

ຜັນປ່ຽນມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍທີ່ໄດ້ຈາກຂັ້ນຕອນທີ 2 ໄປສູ່ມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍໃໝ່ໂດຍເຮັດໃຫ້ອົງປະກອບທີ 3 ໃນເສົາທີ 3 ມີຄ່າເທົ່າກັບ 1 ສ່ວນອົງປະກອບອື່ນໃນເສົາທີ 3 ໃຫ້ມີຄ່າເທົ່າ 0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

- ຂັ້ນຕອນສຸດທ້າຍອ່ານໃຈຜົນຈາກເສົາເບື້ອງຂວາມື

$$\begin{cases} x+0y+0z=a \\ 0x+y+0z=b \\ 0x+0y+z=c \end{cases}$$

ສະແດງວ່າໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນ ແມ່ນ: $(x,y,z)=(a,b,c)$

ຕົວຢ່າງ 16: ຈົ່ງຊອກຫາໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້ດ້ວຍວິທີຂອງກາວສ໌ - ຈໍແດນ

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y+6z=22 \\ 3x+6y+z=18 \end{cases}$$

ຈາກລະບົບສົມຜົນເຮົາຈະໄດ້ມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍແມ່ນ: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 22 \\ 3 & 6 & 1 & 18 \end{array}\right]$

- ຂັ້ນຕອນທີ 1 ຜັນປ່ຽນເສົາທີ 1

$-2R_1+R_2 \to R_{2.1}$

$$(-2)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 22 \\ 3 & 6 & 1 & 18 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \quad \to \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 1 & 18 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_3 \end{array}$$

$-3R_1+R_3 \to R_{3.1}$

$$(-3)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 1 & 18 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_3 \end{array} \quad \to \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_{3.1} \end{array}$$

- ຂັ້ນຕອນທີ 2 ຜັນປ່ຽນເສົາທີ 2

$-R_{2.1} \to R_{2.1.2}$

$$(-1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_{3.1} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1} \end{matrix}$$

$$(-1)R_{2.1.2} + R_1 \rightarrow R_{1.1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1} \end{matrix}$$

$$(-3)R_{2.1.2} + R_{3.1} \rightarrow R_{3.1.2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1.2} \end{matrix}$$

- ຂັ້ນຕອນທີ 3 ຜັນປ່ຽນເສົາທີ 3

$$(\frac{1}{10})R_{3.1.2} \rightarrow R_{3.1.2.3}$$

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1.2} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1.2.3} \end{matrix}$$

$$(-5)R_{3.1.2.3} + R_{1.1} \rightarrow R_{1.1.2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1} \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1.2.3} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{1.1.2} \\ R_{2.1.2} \\ R_{3.1.2.3} \end{matrix}$$

$$(4)R_{3.1.2.3} + R_{2.1.2} \rightarrow R_{2.1.2.3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & -4 & -10\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]\begin{array}{c}R_{1.1.2}\\R_{2.1.2}\\R_{3.1.2.3}\end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]\begin{array}{c}R_{1.1.2}\\R_{2.1.2.3}\\R_{3.1.2.3}\end{array}$$

ຈາກມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍສຸດທ້າຍເຮົາຈະໄດ້ລະບົບສົມຜົນ

$$\begin{cases}x+0y+0z=1\\0x+y+0z=2\\0x+0y+z=3\end{cases}$$ ສະແດງວ່າໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນ ແມ່ນ: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

4.3.3 ການຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນດ້ວຍວິທີຂອງກາວສ໌

ການຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນຕາມແຜນຫວາດ

$\left[A / I\right] \leftrightarrow \left[I / A^{-1}\right]$ ເອີ້ນວ່າການຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນດ້ວຍວິທີຂອງກາວສ໌

ຕົວຢ່າງ 16: ໃຫ້ມາຕຣິດສ໌ $A = \begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\-1 & -2 & 0\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

ເຮົາສາມາດຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນຂອງ A ໄດ້ດັ່ງນີ້:

$R_1 + R_2 \rightarrow R_{2.1}$ ແລະ $(-2)R_1 + R_3 \rightarrow R_{3.1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\-1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}R_1\\R_2\\R_3\end{array} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0\\0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}R_1\\R_{2.1}\\R_{3.1}\end{array}$$

$(3)R_{2.1} + R_{3.1} \rightarrow R_{3.2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0\\0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}R_1\\R_{2.1}\\R_{3.1}\end{array} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}R_1\\R_{2.1}\\R_{3.2}\end{array}$$

$-\frac{1}{2}R_{3.2} + R_1 \rightarrow R_{1.1}$ ແລະ $-\frac{1}{2}R_{3.2} + R_{2.1} \rightarrow R_{2.2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_{2.1} \\ R_{3.2} \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_{1.1} \\ R_{2.2} \\ R_{3.2} \end{array}$$

$$(-2)R_{2.2} + R_{1.1} \to R_{1.2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 2 & 3 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_{1.1} \\ R_{2.1} \\ R_{3.2} \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_{1.2} \\ R_{2.2} \\ R_{3.2} \end{array}$$

$$\frac{1}{2}R_{2.1} \to R_{2.2} \quad \text{ແລະ} \quad \frac{1}{6}R_{3.2} \to R_{3.3}$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

4.3.4 ການສະແດງລະບົບສົມຜົນດ້ວຍມາຕຣິດສ໌

ໃນພຶດຊະຄະນິດລີເນແອເພິ່ນສາມາດສະແດງລະບົບສົມຜົນລີເນແອດ້ວຍມາຕຣິດສ໌ໄດ້ເຊັ່ນ ລະບົບສົມຜົນ

$$\begin{cases} 7x + 3y = 45 \\ 4x + 5y = 29 \end{cases}$$ ສາມາດສະແດງລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວດ້ວຍມາຕຣິດສ໌ດັ່ງນີ້:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 29 \end{bmatrix}$$

ຫຼື ສາມາດຂຽນໄດ້ດັ່ງນີ້ : AX = B

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 45 \\ 29 \end{bmatrix}$$

ໃຫ້ລະບົບສົມຜົນ

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 3x-y-3z=-1 \\ 2x+3y+z=4 \end{cases}$$ ສາມາດສະແດງລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວດ້ວຍມາຕຣິດສ໌ດັ່ງນີ້:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ຫຼື ສາມາດຂຽນໄດ້ດັ່ງນີ້ : AX = B

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ເຮົາສາມາດແກ້ລະບົບສົມຜົນຂ້າງເທິງດ້ວຍມາຕຣິດສ໌ປີ້ນໄດ້ ຖ້າວ່າມາຕຣິດສ໌ A ມີມາຕຣິດສ໌ປີ້ນ ໃນກໍລະນີມາຕຣິດສ໌ A ບໍ່ມີມາຕຣິດສ໌ປີ້ນແມ່ນບໍ່ສາມາດແກ້ລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວດ້ວຍມາຕຣິດສ໌ໄດ້.

4.3.4.1 ການແກ້ລະບົບສົມຜົນດ້ວຍມາຕຣິດສ໌ປີ້ນ:

$$AX = B$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}A\,X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad I\,X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

ຕົວຢ່າງ 17: ແກ້ລະບົບສົມຜົນ $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ເຮົາຈະໄດ້ລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວມີຮູບຮ່າງ AX = B

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$ ຈະໄດ້ $X = A^{-1}B$

$$X=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

ດັ່ງນັ້ນເຮົາຈະໄດ້ໃຈຜົນ $x=\frac{5}{3}$ ແລະ $y=-\frac{1}{3}$

ຕົວຢ່າງ 18: ແກ້ລະບົບສົມຜົນ $\begin{cases} x+y+2z=3\\ 2x+3y+2z=4\\ x+y+3z=5\end{cases}$

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&2\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&2\\1&1&3\end{bmatrix}\quad,\quad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

ເຮົາຈະໄດ້ລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວມີຮູບຮ່າງ AX = B

ຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນຂອງ A ຕາມສູດຂອງກາວສ໌ $\left[A/I\right]\leftrightarrow\left[I/A^{-1}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\2&3&2&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right]\leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&31&-1&0&1\end{array}\right]\leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&7&-1&-4\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ດັ່ງນັ້ນເຮົາຈະໄດ້ໃຈຜົນ $x = -3$; $y = 2$ ແລະ $z = 2$

ບົດຝຶກຫັດ

1. ໃຫ້ A,B,C,D,E ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດ 4×5, 4×5, 5×2, 4×2 ແລະ 5×4 ຕາມລຳດັບ ຈົ່ງບອກວ່າສຳນວນໃດລຸ່ມນີ້ສາມາດຄິດໄລ່ໄດ້ ແລະ ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດເທົ່າໃດ ?

a.	BA	b.	AC+D	c.	AE+B
d.	AB+B	e.	E(A+B)	f.	E(AC)
g.	BE+A	h.	E^T A	i.	(A^T+E)D

2. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ a, b, c, d ຈາກສະເໝີຜົນລຸ່ມນີ້:

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. ໃຫ້ສອງມາຕຣິດສ໌ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

ຈົ່ງຄິດໄລ່ຄ່າຂອງສຳນວນລຸ່ມນີ້:

a.	2A	b.	A+B	c.	2A-3B
d.	$(2A)^T$-$(3B)^T$	e.	AB	f.	BA
g.	$A^T B^T$	h.	$B^T A^T$	i.	$(BA)^T$

4. ຈົ່ງຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນຂອງມາຕຣິດສ໌ A ລຸ່ມນີ້:

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ d. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

5. ຈົ່ງຊອກມາຕຣິດສ໌ A ຈາກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນລຸ່ມນີ້ :

a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ b. $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c. $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ d. $(I+2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6. ໃຫ້ສອງມາຕຣິດສ໌ $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

ຈົ່ງຊອກມາຕຣິດສ໌ x ທີ່ຕອບສະໜອງສະເໝີຜົນລຸ່ມນີ້:

a. AX = B b. XA = B

7. ໃຫ້ສາມມາຕຣິດສ໌ $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ແລະ $C=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -6 & 3\end{bmatrix}$

ຈົ່ງຊອກມາຕຣິດສ໌ x ທີ່ຕອບສະໜອງສະເໝີຜົນລຸ່ມນີ້:

a. AX + B = C b. XA + B = C

c. AX + B = X d. XA + C = X

8. ຈົ່ງແກ້ລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້ດ້ວຍວິທີຂອງກາວສ໌ ແລະ ວິທີຂອງກາສ໌ - ຈໍແດນ

a. $\begin{cases} x+2y=30\\ 5x+4y=54\end{cases}$ b. $\begin{cases} x+4y=17\\ 2x+6y=28\end{cases}$

c. $\begin{cases} x-2y+2z=1\\ 3x+2y-3z=4\\ 2x+4y+3z=-5\end{cases}$ d. $\begin{cases} x+y+2z=0\\ 2x+4y+6z=4\\ 4x+2y+7z=-2\end{cases}$

e. $\begin{cases} x+2y+z=3\\ 3x-y-3z=-1\\ 2x+3y+z=4\end{cases}$ f. $\begin{cases} 2x+3y+2z=9\\ x+2y-3z=14\\ 3x+4y+z=16\end{cases}$

9. ຈົ່ງກວດເບິ່ງມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້ວ່າລະບົບສົມຜົນໃດມີໃຈຜົນ.ຖ້າມີໃຈຜົນດຽວໃຫ້ຊອກໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນດັ່ງກ່າວ?

a. $\left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ b. $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$ c. $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$

10. ໃຫ້ມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂອງລະບົບສົມຜົນດັ່ງລຸ່ມນີ້:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 3 & 0\\ -1 & 1 & x & 0\end{array}\right]$$

a. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ x ເພື່ອໃຫ້ລະບົບສົມຜົນມີໃຈຜົນດຽວ ?

b. ຈົ່ງຊອກຄ່າຂອງ x ເພື່ອໃຫ້ລະບົບສົມຜົນມີຫຼາຍໃຈຜົນ ?

11. ຈົ່ງຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນຂອງມາຕຣິດສ໌ລຸ່ມນີ້ດ້ວຍວິທີຂອງກາວສ໌

a. $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ b. $A=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

c. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$ d. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & -3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$

12. ໃຫ້ A ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດ 3×3

ຖ້າວ່າ $A\begin{bmatrix}15 & 0 & 12\\ -9 & 3 & -6\\ 0 & -3 & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$ ຈົ່ງຊອກ A^{-1} = ?

13. ຈົ່ງແກ້ລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້ດ້ວຍມາຕຣິດສ໌ປີ້ນ

a. $\begin{cases}6x+5y=49\\ 3x+4y=32\end{cases}$ b. $\begin{cases}2x+y-3z=0\\ 4x+5y+z=8\\ -2x-y+4z=2\end{cases}$

c. $\begin{cases}x+2y+z=3\\ 3x-y-3z=-1\\ 2x+3y+z=4\end{cases}$ d. $\begin{cases}2x+3y+2z=9\\ x+2y-3z=14\\ 3x+4y+z=16\end{cases}$

ບົດທີ 5

ເດແຕກມີນັງ

(Determenang)

5.1 ນິຍາມ ແລະ ສູດການຄຳນວນເດແຕກມີນັງ

5.1.1 ນິຍາມ

ສົມມຸດ J = ($j_1, j_2, j_3, ...j_n$) ແມ່ນການຈັດລຽນໜຶ່ງຈາກຈຳນວນ 1, 2, 3, 4,..., n ເຊັ່ນວ່າ (1, 2, 4) ແມ່ນການຈັດລຽນໜຶ່ງຈາກ 1, 2, 3, 4. ໃນ J ສາມາດສ້າງບັນດາແຝດ (j_m, j_n) ຊຶ່ງ m < n ແລະ ໃນບັນດາແຝດເຫຼົ່ານີ້ຖ້າວ່າ $j_m > j_n$ ເພິ່ນເວົ້າວ່າແຝດບໍ່ເປັນລະບຽບ ໃນ J. ຈຳນວນແຝດທີ່ບໍ່ເປັນລະບຽບທັງໝົດໃນ J ເອີ້ນວ່າຄວາມບໍ່ເປັນລະບຽບຂອງ J ສັນຍາລັກ ດ້ວຍ $¢(J)$

ຕົວຢ່າງ 1: ເມື່ອ J = (3, 2, 1, 4) ຈະມີແຝດ (3.2) , (3,1) , (2,1) ບໍ່ເປັນລະບຽບ

ດັ່ງນັ້ນ $¢(J)$ = 3

ສົມມຸດ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ແລະ J = ($j_1, j_2, j_3, ...j_n$)

ນິຍາມ: ເດແຕກມີນັງຂອງມາຕຣິດສ໌ A ສັນຍາລັກ det(A) ຫຼື $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

ແລະມີຄ່າເທົ່າກັບ $\sum (-1)^{¢(J)} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$, ຊຶ່ງການບວກນີ້ແມ່ນບວກຕາມທຸກໆການຈັດລຽນໃນ J ທີ່ເປັນໄປໄດ້.

ໝາຍເຫດ: ສຳລັບມາຕຣິດສ໌ຈະຕຸລັດຂັ້ນ n , ຜົນບວກໃນເດແຕກມີນັງຈະມີ n! ພົດ. ເພາະວ່າຈຳນວນ J ທັງໝົດທີ່ເປັນໄປໄດ້ເທົ່າກັບ n! .

5.1.2 ສູດການຄຳນວນເດແຕກມີນັງ

1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{¢(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{¢(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{¢(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{¢(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{¢(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{¢(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{¢(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{¢(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

ຖ້າຈະຄິດໄລ່ເດແຕກມີນັງລະດັບສູງ (ເດແຕກມີນັງຂອງມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດໃຫຍ່) ຈາກນິຍາມຂ້າງເທິງນີ້ເຫັນວ່າມີຄວາມຫຍຸ້ງຍາກຫຼາຍດັ່ງນັ້ນອາດຈະໃຊ້ສູດທີ່ໄດ້ຈາກນິຍາມຂ້າງເທິງ.

ຈາກສູດ det(A) = $\sum(-1)^{¢(J)} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$

ເຫັນວ່າແຕ່ລະພົດຂອງຜົນບວກເດແຕກມີນັງນີ້ມີສ່ວນຄູນໜຶ່ງຈາກແຖວທີ i. ຖ້າເຮົາໂຮມພົດທີ່ມີ a_{i1} ແລ້ວແຍກ a_{i1} ອອກເປັນສ່ວນຄູນແລ້ວແທນສຳນວນຢູ່ໃນວົງເລັບຂອງຜົນຄູນກັບ a_{i1} ດ້ວຍ A_{i1}. ຕໍ່ໄປກໍໂຮມພົດທີ່ມີ a_{i2} ແລ້ວແຍກ a_{i2} ອອກເປັນສ່ວນຄູນແລ້ວແທນສຳນວນຢູ່ໃນວົງເລັບຂອງຜົນຄູນກັບ a_{i2} ດ້ວຍ A_{i2} ສືບຕໍ່ເຮັດຄ້າຍຄືກັນໄປເລື້ອຍໆຈະໄດ້

det(A) = $a_{i1} A_{i1}$ + $a_{i2} A_{i2}$ + $a_{i3} A_{i3}$ +.... + $a_{in} A_{in}$

ສູດນີ້ເອີ້ນວ່າການແຈກເດແຕກມີນັງຕາມອົງປະກອບໃນແຖວທີ່ i ແລະ A_{ij} ເອີ້ນວ່າຕົວຕື່ມເຕັມຂອງ a_{ij} ໃນ det(A). A_{ij} ໄດ້ຈາກການລຶບແຖວທີ່ i ແລະຖັນທີ່ j ໃນເດແຕກມີນັງຂອງ A .

ເຊັ່ນ :

1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)} a_{11}a_{22} + (-1)^{(2+1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{2} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

ຕົວຢ່າງ 2:

1) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3 - 1\times4 = 6 - 4 = 2$$

2) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2\times1 - 6\times4) - 3(1\times1 - 3\times4) + 5(1\times6 + 3\times2)$$

$$= 2\times(-26) - 3\times(-11) + 5\times12 = -52 + 33 + 60 = 41$$

ຖ້າເປັນເດແຕກມີນັງຂະໜາດ 3×3 ເຮົາສາມາດຄິດໄລ່ຄ່າຂອງເດແຕກມີນັງຄືດັ່ງລຸ່ມນີ້

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

ຕົວຢ່າງ 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\times(-2)\times 1 + 3\times 4\times 3 + 5\times 1\times 6 - 3\times 1\times 1 - 2\times 4\times 6$$

$$-5\times(-2)\times 3 = -4 + 36 + 30 - 3 - 48 + 30 = 41$$

ຖ້າເຮົາວາງ

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

M_{ij} ເອີ້ນວ່າ Minor ຂອງ a_{ij} ຊຶ່ງແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຂະໜາດນ້ອຍກວ່າຂະໜາດຂອງມາຕຣິດສ໌ A ໜຶ່ງຂັ້ນ ແລະ ອົງປະກອບຂອງ M_{ij} ໄດ້ຈາກການລຶບອົງປະກອບຂອງ A ໃນແຖວທີ່ i ແລະຖັນທີ່ J ດັ່ງນັ້ນ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|M_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12}|M_{12}| + (-1)^{1+3}a_{13}|M_{13}|$$

ສາມາດສະແດງໃຫ້ເຫັນວ່າເມື່ອ A ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຈະຕຸລັດຂະໜາດ n×n

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|M_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|M_{i2}| + (-1)^{i+3}a_{i3}|M_{i3}| + \dots(-1)^{i+n}a_{in}|M_{in}|$$

ຫຼື $$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|M_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|M_{2j}| + (-1)^{3+j}a_{3j}|M_{3j}| + \dots(-1)^{n+j}a_{nj}|M_{nj}|$$

ຕົວຢ່າງ 4:

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}3\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8(12 - 7) - 3(18 - 35) + 2(6 - 20)$$

$$= 40 + 51 - 28 = 63$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}6\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 8\ (\ 12 - 7\ ) - 6\ (\ 9 - 2\ ) + 5\ (\ 21 - 8\ )$

$= 40 - 42 + 65 = 63$

5.2 ຄຸນລັກສະນະຂອງເດແຕກມີນັງ

1) det (A) = det (A^T)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$$

2) ເມື່ອອົງປະກອບຂອງມາຕຣິດສ໌ A ມີແຖວ ຫຼື ຖັນໃດໜຶ່ງແມ່ນສູນໝົດຈະໄດ້ det(A) = 0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 0\times 3 + 3\times 0\times 5 + 2\times 4\times 0 - 2\times 0\times 5 - 3\times 0\times 3 + 1\times 4\times 0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 0 + 4\times 0\times 1 + 0\times 5\times 2 - 0\times 3\times 1 - 4\times 5\times 0 + 2\times 2\times 0 = 0$$

3) ເມື່ອອົງປະກອບຂອງມາຕຣິດສ໌ A ມີສອງແຖວ ຫຼື ສອງຖັນຄືກັນຈະໄດ້ det (A) = 0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 3\times 3 + 3\times 2\times 5 + 2\times 4\times 1 - 2\times 3\times 5 - 3\times 1\times 3 - 1\times 4\times 2$$

$= 3 + 30 + 8 - 30 - 9 - 8 = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 1 + 4\times 5\times 1 + 2\times 5\times 2 - 2\times 3\times 1 - 4\times 5\times 1 + 2\times 2\times 5$$

$= 6 + 20 + 20 - 6 - 20 - 20 = 0$

4) det (AB) = det (A) . det (B)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

det (A) = $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\times 4-2\times 3=-2$

det (B) = $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\times(-1)-1\times 3=-5$

det (A) . det (B) = (-2)(-5) = 10

A.B = $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 10 & 5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ det (AB) = $\begin{vmatrix}4 & 1\\ 10 & 5\end{vmatrix}=4\times 5-10\times 1=20-10=10$

5) ເມື່ອ A ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ຈະຕຸລັດຂະໜາດ $n\times n$ ຈະໄດ້ det (kA) = k^n det (A)

- $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ det (A) = $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\times 4-2\times 3=-2$

  3A = $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$det (3A) = $\begin{vmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{vmatrix}=3\times 12-9\times 6=36-54=-18$

  3^2 det (A) = $9\times$(-2) = -18 ສະແດງວ່າ det (3A) = 3^2 det (A)

- $A=\begin{bmatrix}8 & 3 & 2\\ 6 & 4 & 7\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ det (A) = $\begin{vmatrix}8 & 3 & 2\\ 6 & 4 & 7\\ 5 & 1 & 3\end{vmatrix}=63$

  2A = $\begin{bmatrix}16 & 6 & 4\\ 12 & 8 & 14\\ 10 & 2 & 6\end{bmatrix}$

  $\Rightarrow$det (2A) = $\begin{vmatrix}16 & 6 & 4\\ 12 & 8 & 14\\ 10 & 2 & 6\end{vmatrix}=768+840+96-432-448-320=504$

  2^3 det (A) = 8 $\times$ 63 = 504 ສະແດງວ່າ det (2A) = 2^3 det (A)

6) det (A^{-1}) = $\dfrac{1}{\det(A)}$

A = $\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ det (A) = $\begin{vmatrix}4 & 6\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\frac{1}{2})(-1) - (\frac{1}{2})(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{\det(A)}$$

7) ການຄູນຈຳນວນຄົງຄ່າໃຫ້ເດແຕກມີນັງແມ່ນຄູນຈຳນວນຄົງຄ່າເຂົ້າແຖວໃດໜຶ່ງ ຫຼື ຄູນຈຳນວນຄົງຄ່າເຂົ້າຖັນໃດໜຶ່ງ .

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ ka_{i1} & \dots & ka_{ij} & \dots & ka_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & ka_{1j} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & . & ka_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & ka_{nj} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$2\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(96 + 105 + 12 - 40 - 54 - 56) = 2 \times 63 = 126$$

$$= \begin{vmatrix} 16 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 192 + 210 + 24 - 108 - 112 - 80 = 126$$

$$= \begin{vmatrix} 16 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & 7 \\ 10 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 192 + 210 + 24 - 108 - 112 - 80 = 126$$

8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{ij}+c_{ij} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 35 + 28 = 63$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48 + 60 + 6 - 20 - 27 - 32 = 35$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48+45+6-20-27-24 = 28$$

9) ຄ່າຂອງເດແຕກມີນັງບໍ່ປ່ຽນແປງເມື່ອເຮົາຄູນຈຳນວນຈິງຕ່າງສູນໃສ່ແຖວໃດໜຶ່ງ ຫຼື ຖັນໃດໜຶ່ງ ແລ້ວເອົາໄປບວກກັບແຖວອື່ນ ຫຼື ຖັນອື່ນອີກ.

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \begin{matrix} (-1)R_1 + R_2 \\ (-1)R_1 + R_3 \\ (-1)R_1 + R_4 \end{matrix}$ ຈະໄດ້ເດແຕກມີນັງລຸ່ມນີ້

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$(-1)R_2 + R_3$ ຈະໄດ້ເດແຕກມີນັງ

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2[-2 \times 2 - (-2)(-2)] = -16$$

- $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (-2)(-1)^{3+3} 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -6(10-12) = 12$$

5.3 ການຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນດ້ວຍເດແຕກມີນັງ ແລະ ສູດກຣາແມ.

5.3.1 ການຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນດ້ວຍເດແຕກມີນັງ

ໃຫ້ມາຕຣິດສ໌ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

ມາຕຣິດສ໌ $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ ເອີ້ນວ່າມາຕຣິດສ໌ຕົວຕື່ມເຕັມຂອງ A

ຊຶ່ງ A_{ij} ແມ່ນຕົວຕື່ມເຕັມຂອງ a_{ij} ໃນ det (A) ສັນຍາລັກດ້ວຍ adj(A)

ຖ້າວ່າ A ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ທີ່ມີເດເເຕກມີນັງຕ່າງສູນຈະໄດ້ $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{\det(A)}$

ຕົວຢ່າງ 6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad ; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad ; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \quad ; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -3 \quad ; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \quad ; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

5.3.2 ການແກ້ລະບົບສົມຜົນດ້ວຍເດແຕກມີນັງ (ສູດກຣາແມ)

ສົມມຸດມາຕຣິດສ໌ A ແມ່ນມາຕຣິດສ໌ທີ່ມີເດແຕກມີນັງຕ່າງສູນລະບົບສົມຜົນລີເນແອ AX = B ຈະມີພຽງແຕ່ໜຶ່ງໃຈຜົນໃນຮູບແບບ

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad ; \quad i=1, 2, 3,\dots, n$$

ຊຶ່ງ det (A_i) ໄດ້ຈາກ det (A) ດ້ວຍການແທນຖັນທີ່ i ດ້ວຍ B

ຕົວຢ່າງ 7: ຈົ່ງແກ້ລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

det (A) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 12 + 9 + 2 - 6 + 9 = 1$

det (A_1) = $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 24 - 3 + 4 + 2 + 27 = 3$

det (A_2) = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 18 + 12 + 2 - 9 + 12 = -2$

det (A_3) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 27 + 6 - 24 + 3 = 4$

$x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{3}{1} = 3$; $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = -\dfrac{2}{1} = -2$; $x_3 = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = \dfrac{4}{1} = 4$

ບົດຝຶກຫັດ

1. ກຳນົດໃຫ້ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ຈົ່ງຊອກ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ?

2. ກຳນົດໃຫ້ $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & x \end{bmatrix}$

   ຖ້າວ່າ det (AB+B) = - 64 ຈົ່ງຊອກ B^{-1} = ?

3. ໃຫ້ມາຕຣິດສ໌

   $A=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

   det [(AB + AC)^T] = ?

4. ໃຫ້ມາຕຣິດສ໌ $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ຄ່າຂອງ det [(A + AB)^T] = ?

5. ຈົ່ງຄິດໄລ່ເດແຕກມິນັງລຸ່ມນີ້:

   a. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

   d. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

   g. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ h. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$ i. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

   j. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ k. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

6. ໃຫ້ມາຕຣິດສ໌ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -1 & -3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\4 & 5 & 1\\-2 & -1 & 4\end{bmatrix}$ ຈົ່ງຄິດໄລ່

a. det (2A) b. det (3A)

c. det (A+B) d. det (AB)

e. det (BA) f. det ($A^T B^T$)

g. det (A^{-1}) h. det ($A^{-1}B^{-1}$)

7. ຈົ່ງຊອກມາຕຣິດສ໌ປີ້ນຂອງມາຕຣິດສ໌ລຸ່ມນີ້:

a. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\1 & 2 & -3\\3 & 4 & 1\end{bmatrix}$ b. $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\-1 & -2 & 0\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}$ c. $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 2 & 1\\5 & 0 & 3\end{bmatrix}$

d. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & -1 & 1\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ e. $A=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -3\\2 & 1 & -6\\-1 & -2 & 8\end{bmatrix}$ f. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 6 & 4\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

8. ຈົ່ງແກ້ລະບົບສົມຜົນລຸ່ມນີ້ດ້ວຍເດແຕກມີນັງ (ສູດກຣາແມ)

a. $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3=0\\4x_1+5x_2+x_3=8\\-2x_1-x_2+4x_3=2\end{cases}$ b. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\x_1+x_2-x_3=0\\4x_1-x_2+5x_3=3\end{cases}$

c. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5\\x_1-2x_2+2x_3=-5\\7x_1+x_2-x_3=10\end{cases}$ d. $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0\\2x_1+4x_2+6x_3=4\\4x_1+2x_2+7x_3=-2\end{cases}$

e. $\begin{cases}x_2-3x_3+4x_4=-5\\x_1-2x_3+3x_4=-4\\3x_1+2x_2-5x_4=12\\4x_1+3x_2-5x_3=5\end{cases}$ f. $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3+2x_4=6\\x_1-2x_2-x_4=-6\\x_2+x_3+3x_4=16\\2x_1-3x_2+2x_3=6\end{cases}$

ບົດທີ 6

ໂປຣແກຣມລີເນແອ

(Linaer programming)

ໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ (ໂປຣແກຣມລີເນແອ) ເປັນເທັກນິກໃນການແກ້ໄຂບັນຫາທາງດ້ານການຈັດສັນປັດໃຈ ແລະ ຊັບພະຍາກອນໂດຍມີຈຸດປະສົງເພື່ອແກ້ໄຂໃນການຕັດສິນໃຈໃຫ້ເກີດຜົນຕາມແນວທາງການດຳເນີນງານທີ່ດີທີ່ສຸດເຊັ່ນ: ກຳໄລສູງສຸດ, ຄ່າໃຊ້ຈ່າຍໜ້ອຍສຸດ ຫຼື ການດຳເນີນງານອື່ນໆທີ່ໃຫ້ຜົນປະໂຍດຫຼາຍທີ່ສຸດໂດຍມີເງື່ອນໄຂທີ່ກຳນົດໃຫ້ເຊັ່ນ: ສະພາບຂອງຕະລາດ, ການຂາດແຄນວັດຖຸດິບ, ແຮງງານ, ເຄື່ອງຈັກ, ເງິນທຶນ, ສະຖານທີ່, ຄວາມຮູ້ຂໍ້ກຳນົດກົດໝາຍ ຫຼື ນະໂຍບາຍຕ່າງໆຂອງຜູ້ບໍລິຫານເປັນຕົ້ນ. ນັກເສດຖະສາດ, ວິສາວະກອນ ແລະ ນັກວິທະຍາສາດໃນຫຼາຍໆຂະແໜງການໄດ້ນຳໃຊ້ເທັກນິກນີ້ໃນການແກ້ບັນຫາຂອງພວກເຂົາເຈົ້າ ແລະ ໄດ້ຮັບຜົນສຳເລັດມາແລ້ວຢ່າງຫຼວງຫຼາຍ. ໃນວຽກງານກະສິກຳເພິ່ນໄດ້ນຳໃຊ້ເທັກນິກນີ້ໃນການວິເຄາະບັນຫາຈັດສັນປັດໃຈທີ່ມີຢູ່ຈຳກັດເຊັ່ນ: ທີ່ດິນ, ປຸຍ, ນ້ຳ, ແຮງງານ ແລະ ເງິນທຶນ. ຜົນທີ່ໄດ້ຮັບຊ່ວຍໃຫ້ສາມາດຕັດສິນໃຈທີ່ຖືກຕ້ອງໃນການຈັດການໃຫ້ເກີດຜົນເກັບກ່ຽວທີ່ສູງສຸດ, ສາມາດເພາະປູກຊະນິດພືດໃຫ້ເໝາະສົມກັບລະດູການ ແລະ ແທດເໝາະກັບຄວາມຕ້ອງການຂອງຕະລາດ. ໃນວົງການທຸລະກິດເຊັ່ນການຂົນສົ່ງທາງບົກ, ທາງນ້ຳ ແລະ ທາງອາກາດກໍໄດ້ພັດທະນານຳໃຊ້ເທັກນິກນີ້ເພື່ອລົດຄ່າໃຊ້ຈ່າຍໃນການຂົນສົ່ງ, ສາມາດຂົນຖ່າຍຜູ້ໂດຍສານ ຫຼື ສິນຄ້າໄດ້ຢ່າງມີປະສິດທະພາບ.

6.1 ໂຄງສ້າງຂອງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ (ໂປຣແກຣມລີເນແອ)

ຮູບແບບທາງດ້ານຄະນິດສາດຂອງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ມີດັ່ງນີ້:

- ມີຕຳລາເປົ້າໝາຍຊຶ່ງເປັນສະເໝີຜົນທີ່ສະແດງຄວາມສຳພັນລະຫວ່າງບັນດາປັດໃຈເພື່ອກຳນົດເປົ້າໝາຍສູງສຸດ ຫຼື ຕ່ຳສຸດ.
- ມີບັນດາເງື່ອນໄຂສະແດງຄວາມຈຳກັດຂອງບັນດາເງື່ອນໄຂ ຫຼື ຊັບພະຍາກອນຢູ່ໃນຮູບຮ່າງຂອງອະສະເໝີຜົນ.
- ຄວາມສຳພັນຕ່າງໆຢູ່ໃນຕຳລາເປົ້າໝາຍ ຫຼື ໃນອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂຕ້ອງຢູ່ໃນຮູບແບບເສັ້ນຊື່ໝາຍຄວາມວ່າຕ້ອງເປັນສົມຜົນ ຫຼື ອະສົມຜົນຂັ້ນໜຶ່ງ.
- ບັນດາຕົວປ່ຽນຕ້ອງມີຄ່າໃຫຍ່ກວ່າ ຫຼື ເທົ່າກັບສູນ.

ຮູບແບບ ຂອງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ (ໂປຣແກຣມລີເນແອ) ເພື່ອຊອກຄ່າຂອງຕົວປ່ຽນ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ທີ່ເຮັດໃຫ້ຕຳລາເປົ້າໝາຍມີຄ່າໃຫຍ່ສຸດ.

ຕຳລາເປົ້າໝາຍ: MaxZ = $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$

ອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂ: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$

. . . . . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_i \geq 0$; i =1, 2, 3, ... , n

$b_j \geq 0$; j =1, 2, 3,..., m

ໂດຍມີ $Z = f(x_i)$ ເປັນຕຳລາເປົ້າໝາຍ, x_i ແມ່ນບັນດາຕົວປ່ຽນຊຶ່ງເປັນຕົວແທນຂອງບັນດາປັດໃຈຕ່າງໆ , b_j ໝາຍເຖິງປະລິມານຊັບພະຍາກອນທີ່ມີຈຳກັດໃນການນຳມາໃຊ້.

ໃນການແກ້ບັນຫາໂດຍໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ (ໂປຣແກຣມລີເນແອ) ຈະຕ້ອງວິເຄາະລວບລວມເອົາບັນຫາແລ້ວຈັດໃຫ້ມີຮູບແບບຄືດັ່ງທີ່ໄດ້ກ່າວມາຂ້າງເທິງ.

ຕົວຢ່າງ1: ໂຮງງານຜະລິດສິນຄ້າແຫ່ງໜຶ່ງຜະລິດສິນຄ້າ 2 ຊະນິດ, ຊະນິດທີ່ໜຶ່ງໄດ້ກຳໄລ 2 ໂດລາຕໍ່ອັນ, ຊະນິດທີ່ສອງໄດ້ກຳໄລ 5 ໂດລາຕໍ່ອັນ. ສິນຄ້າຊະນິດທີ່ໜຶ່ງແຕ່ລະອັນຈະຕ້ອງໃຊ້ເວລາຜະລິດ 3 ຊົ່ວໂມງ ແລະ ໃຊ້ວັດຖຸດິບ 9 ຫົວໜ່ວຍ. ສິນຄ້າຊະນິດທີ່ສອງແຕ່ລະອັນຈະຕ້ອງໃຊ້ເວລາຜະລິດ 4 ຊົ່ວໂມງ ແລະ ໃຊ້ວັດຖຸດິບ 7 ຫົວໜ່ວຍ. ເວລາທຳການຜະລິດມີຈຳກັດພຽງແຕ່ 200 ຊົ່ວໂມງ, ວັດຖຸດິບມີຈຳກັດພຽງແຕ່ 300 ຫົວໜ່ວຍ. ຕະລາດຕ້ອງການສິນຄ້າຊະນິດທີ່ໜຶ່ງບໍ່ຕ່ຳກວ່າ 20 ອັນ ຈົ່ງສ້າງຮູບແບບໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ເພື່ອຊອກຫາກຳໄລສູງສຸດທີ່ໂຮງງານດັ່ງກ່າວສາມາດມີໄດ້?

ວິທີແກ້:

ສົມມຸດ Z ແມ່ນຜົນກຳໄລ

x_1 ແມ່ນປະລິມານສິນຄ້າຊະນິດທີ່ 1

x_2 ແມ່ນປະລິມານສິນຄ້າຊະນິດທີ່ 2

ຕຳລາເປົ້າໝາຍ MaxZ = $2x_1 + 5x_2$

ສຳລັບເວລາມີຈຳກັດ $3x_1 + 4x_2 \leq 200$

ສຳລັບວັດຖຸດິບມີຈຳກັດ $9x_1 + 7x_2 \leq 300$

ຄວາມຕ້ອງການສິນຄ້າ $x_1 \geq 20$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

ຕົວຢ່າງ 2: ໂຮງງານແຫ່ງໜຶ່ງຜະລິດສິນຄ້າ 3 ຊະນິດຊຶ່ງແຕ່ລະຊະນິດຈະຕ້ອງຜ່ານຂະບວນການ ແລະ ເວລາໃນການຜະລິດດັ່ງຕາຕະລາງລຸ່ມນີ້:

ຂັ້ນຕອນ	ເວລາທີ່ໃຊ້ໃນການຜະລິດສິນຄ້າ			ເວລາທີ່ມີໃຫ້
ການຜະລິດ	ຊະນິດທີ 1	ຊະນິດທີ 2	ຊະນິດທີ 3	ນາທີ/ວັນ
1	1	2	1	430
2	3	1	2	480
3	1	4	3	420

ຜົນກຳໄລທີ່ໄດ້ຂອງສິນຄ້າຊະນິດທີ 1, 2 ແລະ 3 ແມ່ນ 3$, 4$ ແລະ 5$ ຕາມລຳດັບ. ໃນການຜະລິດແຕ່ລະວັນຄວນຜະລິດສິນຄ້າແຕ່ລະຊະນິດຈຳນວນເທົ່າໃດຈຶ່ງຈະເຮັດໃຫ້ໄດ້ຜົນກຳໄລສູງສຸດ?

ສົມມຸດ Z ແມ່ນຜົນກຳໄລ

x_1 ແມ່ນປະລິມານສິນຄ້າຊະນິດທີ່ 1

x_2 ແມ່ນປະລິມານສິນຄ້າຊະນິດທີ່ 2

x_3 ແມ່ນປະລິມານສິນຄ້າຊະນິດທີ່ 3

ຕຳລາເປົ້າໝາຍ $MaxZ = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

ອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂ

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 480$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 420$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$$

6.2 ວິທີແກ້ໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ດ້ວຍເສັ້ນສະແດງ.

ການແກ້ໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ດ້ວຍເສັ້ນສະແດງເປັນວິທີທີ່ງ່າຍແຕ່ມີຂໍ້ຈຳກັດເພາະວ່າສາມາດໃຊ້ໄດ້ກັບກໍລະນີທີ່ມີ 2 ຕົວປ່ຽນເທົ່ານັ້ນ. ການແກ້ດ້ວຍວິທີນີ້ກ່ອນອື່ນເຮົາຕ້ອງປ່ຽນບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເປັນສະເໝີຜົນແລ້ວແຕ້ມເສັ້ນສະແດງຂອງພວກມັນໃສ່ລະບົບເສັ້ນເຄົ້າສາກໂດຍມີແກນນອນເປັນແກນສະແດງຕົວປ່ຽນ x_1 ແລະ ແກນຕັ້ງເປັນແກນສະແດງຕົວປ່ຽນ x_2 . ຫຼັງຈາກນັ້ນຈຶ່ງກຳນົດເຂດໃນໜ້າພຽງທີ່ຕອບສະໜອງບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂ, ເຂດດັ່ງກ່າວນັ້ນເອີ້ນວ່າເຂດຄວາມເປັນໄປໄດ້ຂອງໃຈຜົນ.

ເຂດຄວາມເປັນໄປໄດ້ຂອງໃຈຜົນແມ່ນຮູບຫຼາຍແຈ ແລະ ໜຶ່ງໃນຈຳນວນເມັດຈອມຂອງມັນຈະແມ່ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການ. ການກວດເບິ່ງວ່າເຂດໃດແມ່ນເຂດຄຳຕອບທີ່ຕອບສະໜອງແຕ່ລະອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂຄືຫຼັງຈາກທີ່ເຮົາແຕ້ມເສັ້ນສະແດງທີ່ເປັນສະເໝີຜົນແລ້ວເລືອກເອົາເມັດໃດເມັດໜຶ່ງຕາມໃຈໄປແທນໃສ່ອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂຖ້າຕອບສະໜອງສະແດງວ່າເຂດຄຳຕອບຢູ່ເບື້ອງດັ່ງກ່າວ. ແຕ່ຖ້າວ່າບໍ່ຕອບສະໜອງສະແດງວ່າເຂດຄຳຕອບຢູ່ເບື້ອງກົງກັນຂ້າມກັບເມັດດັ່ງກ່າວ.

ການກຳນົດວ່າເມັດຈອມໃດຂອງເຂດຄວາມເປັນໄປໄດ້ຂອງໃຈຜົນແມ່ນຄຳຕອບທີ່ຕ້ອງການເຮົາສາມາດນຳໃຊ້ໜຶ່ງໃນສອງວິທີຂ້າງລຸ່ມນີ້:

1. ທົດສອບບັນດາເມັດຈອມໂດຍການເອົາບັນດາເມັດຈອມແທນໃສ່ຕຳລາເປົ້າໝາຍເມັດໃດເຮັດໃຫ້ຕຳລາເປົ້າໝາຍມີຄ່າໃຫຍ່ສຸດ (ໃນກໍລະນີຊອກຄ່າສູງສຸດ) ເມັດໃດເຮັດໃຫ້ຕຳລາເປົ້າໝາຍມີຄ່ານ້ອຍສຸດ (ໃນກໍລະນີຊອກຄ່າຕ່ຳສຸດ) ຈະແມ່ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການ.
2. ແຕ້ມເສັ້ນຕຳລາເປົ້າໝາຍຄົງຄ່າ $Z = f(x_1, x_2)$ = k (k ແມ່ນຈຳນວນຄົງຄ່າ) ໃນກໍລະນີຂອງກຳໄລເອີ້ນວ່າເສັ້ນກຳໄລສະເໝີຄ່າ (Isoprofit) ແລະກໍລະນີຂອງຕົ້ນທຶນເອີ້ນວ່າເສັ້ນຕົ້ນທຶນສະເໝີຄ່າ (Isocost). ແຕ່ປົກກະຕິແລ້ວເພິ່ນນິຍົມແຕ້ມເສັ້ນຕຳລາຄົງຄ່າເທົ່າ 0. ຫຼັງຈາກນັ້ນເພິ່ນຈະຍ້າຍຂະໜານເສັ້ນຕຳລາເປົ້າໝາຍຄົງຄ່າໄປທາງເບື້ອງຂວາມື ກໍລະນີຊອກຄ່າສູງສຸດຖ້າມັນຕັດເມັດຈອມໃດເປັນເມັດສຸດທ້າຍເມັດດັ່ງກ່າວຈະແມ່ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການ . ກໍລະນີຊອກຄ່າຕ່ຳສຸດຖ້າມັນຕັດເມັດຈອມໃດເປັນເມັດທຳອິດເມັດດັ່ງກ່າວຈະແມ່ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການ.

ຕົວຢ່າງ 3: ໃຫ້ຕຳລາເປົ້າໝາຍ $MaxZ = 50x_1 + 60x_2$

ບັນດາເງື່ອນໄຂ $x_1 + 2x_2 \le 8$

$$2x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$9x_1 + 4x_2 \le 36$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

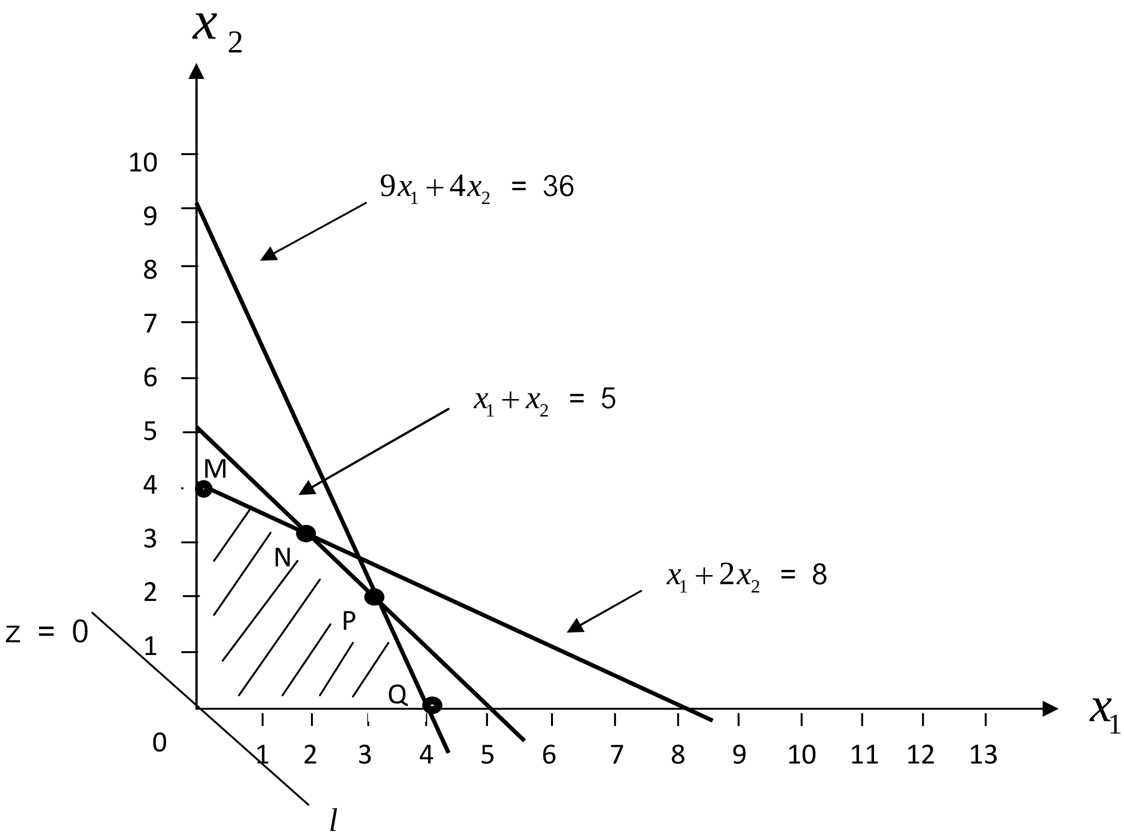
ກ່ອນອື່ນເຮົາຕ້ອງປ່ຽນບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເປັນສະເໝີຜົນແລ້ວແຕ້ມເສັ້ນສະແດງຂອງພວກມັນໃສ່ລະບົບເສັ້ນເຄົ້າສາກ

$$x_1 + 2x_2 = 8$$

$$2x_1 + 2x_2 = 10$$

$$9x_1 + 4x_2 = 36$$

ສ່ວນ $x_1, x_2 \ge 0$ ໝາຍຄວາມວ່າໃຈຜົນຈະນອນຢູ່ໃນສ່ວນສີ່ທີ່ 1 ຂອງລະບົບເສັ້ນເຄົ້າສາກ



ຈາກເສັ້ນສະແດງຂ້າງເທິງເຮົາເຫັນວ່າເຂດທີ່ເປັນໄປໄດ້ຂອງໃຈຜົນແມ່ນຮູບ 5 ແຈ OMNPQ ຊຶ່ງມີບັນດາເມັດຈອມແມ່ນ O(0,0), M(0,4), N(2,3), P(3.2,1.8), Q(4,0) ໃຈຜົນທີ່ເຮົາຕ້ອງການຈະແມ່ນໜຶ່ງໃນ 5 ເມັດນີ້ເອງ. ຢາກຮູ້ວ່າເມັດໃດແມ່ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການເຮົາຈະທົດສອບດ້ວຍການແທນຄ່າຂອງພວກມັນໃສ່ຕຳລາເປົ້າໝາຍຄືດັ່ງນີ້:

Z(O) = Z(0,0) = 50(0) + 60(0) = 0

Z(M) = Z(0,4) = 50(0) + 60(4) = 240

Z(N) = Z(2,3) = 50(2) + 60(3) = 280

Z(P) = Z(3.2,1.8) = 50(3.2) + 60(1.8) = 268

Z(Q) = Z(4,0) = 50(4) + 60(0) = 200

ເຫັນວ່າເມັດ N(2,3) ແມ່ນເມັດທີ່ເຮັດໃຫ້ຕຳລາເປົ້າໝາຍມີຄ່າສູງສຸດຄື 280 ດັ່ງນັ້ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການແມ່ນ x_1 = 2 , x_2 = 3 ແລະ $MaxZ = 280$

ອີກວິທີໜຶ່ງຄືແຕ້ມເສັ້ນຕຳລາເປົ້າໝາຍເທົ່າ 0 ຄື $MaxZ = 50x_1 + 60x_2$ = 0 ຊຶ່ງໃນເສັ້ນສະແດງຂ້າງເທິງຄືເສັ້ນ ℓ ແລ້ວຍ້າຍຂະໜານເສັ້ນດັ່ງກ່າວໄປທາງຂວາມືເມັດສຸດທ້າຍທີ່ເສັ້ນຕຳລາຄົງຄ່າເທົ່າ 0 ໄປຕັດຈະແມ່ນເມັດ N(2,3). ດັ່ງນັ້ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການແມ່ນ x_1 = 2 , x_2 = 3 ແລ້ວເອົາຄ່າຂອງໃຈຜົນໄປແທນໃສ່ຕຳລາເປົ້າໝາຍກໍຈະໄດ້ $MaxZ = 280$

ຕົວຢ່າງ 4: ໃຫ້ຕຳລາເປົ້າໝາຍ $MinZ = 2x_1 + 8x_2$

ບັນດາເງື່ອນໄຂ $x_1 + x_2 \le 9$

$4x_1 + x_2 \ge 12$

$x_1 + 2x_2 \ge 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

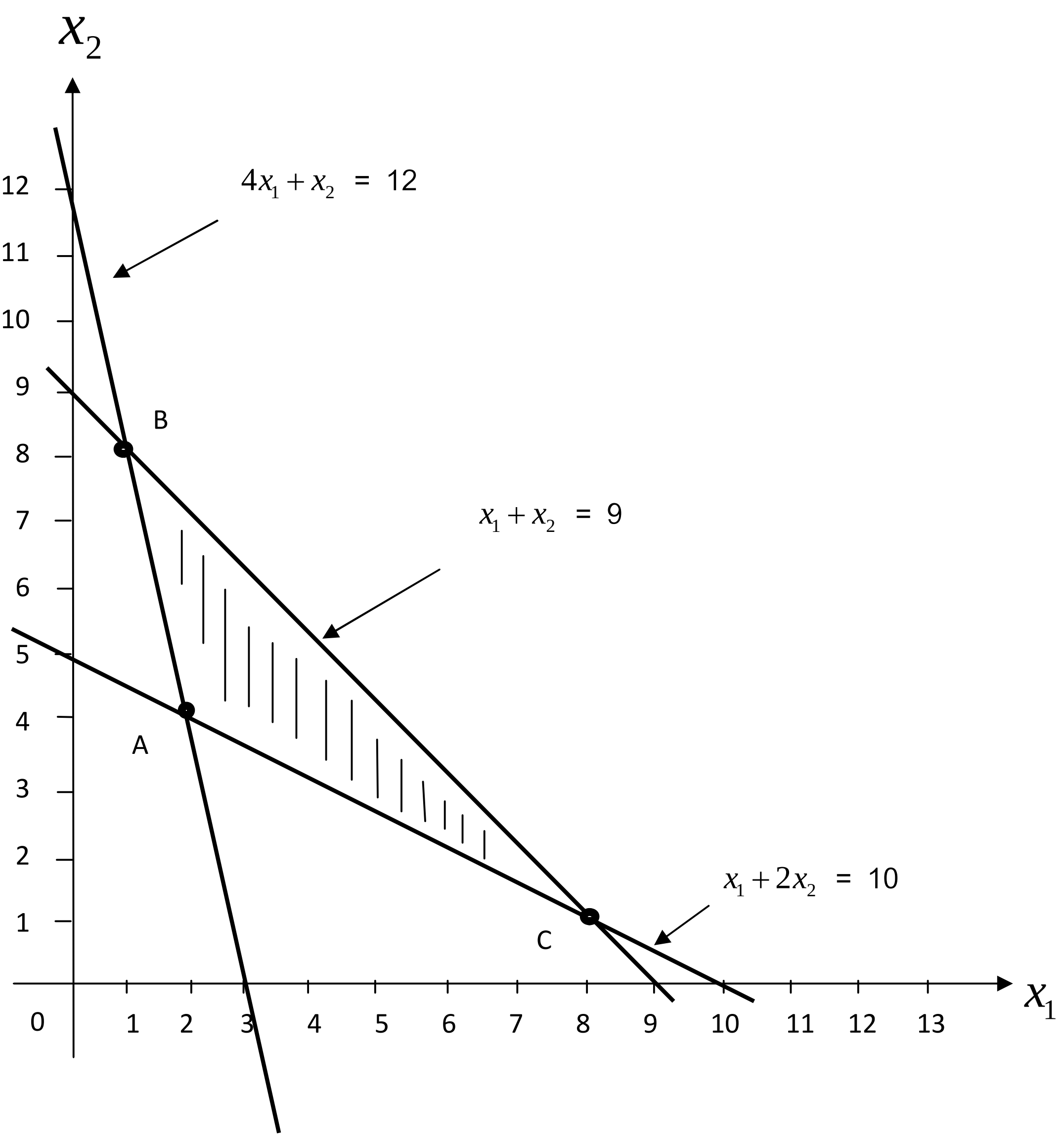
ກ່ອນອື່ນເຮົາຕ້ອງປ່ຽນບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເປັນສະເໝີຜົນແລ້ວແຕ້ມເສັ້ນສະແດງຂອງພວກມັນໃສ່ລະບົບເສັ້ນເຄົ້າສາກ

$x_1 + x_2 = 9$

$4x_1 + x_2 = 12$

$x_1 + 2x_2 = 10$

ສ່ວນ $x_1, x_2 \ge 0$ ໝາຍຄວາມວ່າໃຈຜົນຈະນອນຢູ່ໃນສ່ວນສີ່ທີ່ 1 ຂອງລະບົບເສັ້ນເຄົ້າສາກ



ຈາກເສັ້ນສະແດງຂ້າງເທິງເຮົາເຫັນວ່າເຂດທີ່ເປັນໄປໄດ້ຂອງໃຈຜົນແມ່ນຮູບ 3 ແຈ ABC ຊຶ່ງມີບັນດາເມັດຈອມແມ່ນ A(2,4), B(1,8), C(8,1) ໃຈຜົນທີ່ເຮົາຕ້ອງການຈະແມ່ນໜຶ່ງໃນ 3 ເມັດນີ້ເອງ. ຢາກຮູ້ວ່າເມັດໃດແມ່ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການເຮົາຈະທົດສອບດ້ວຍການແທນຄ່າຂອງພວກມັນໃສ່ຕຳລາເປົ້າໝາຍຄືດັ່ງນີ້:

Z(A) = Z(2,4) = 2(2) + 8(4) = 36

Z(B) = Z(1,8) = 2(1) + 8(8) = 66

Z(C) = Z(8,1) = 2(8) + 8(1) = 24

ເຫັນວ່າເມັດ C(8,1) ແມ່ນເມັດທີ່ເຮັດໃຫ້ຕຳລາເປົ້າໝາຍມີຄ່າຕ່ຳສຸດຄື 24 ດັ່ງນັ້ນໃຈຜົນທີ່ຕ້ອງການແມ່ນ x_1 = 8 , x_2 = 1 ແລະ $MinZ = 24$

6.3 ແກ້ໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ດ້ວຍວິທີຊິມເປຼັກ (Simplex Method) .

6.3.1 ກໍລະນີຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດ

ວິທີ Simplex ແມ່ນວິທີໜຶ່ງໃນການແກ້ບັນຫາການວາງແຜນແບບລີເນແອທີ່ຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດຂອງຕຳລາລີເນແອພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂທີ່ເປັນອະສະເໝີຜົນນ້ອຍກວ່າ ຫຼື ເທົ່າກັບ.

ການໝູນໃຊ້ວິທີ Simplex ເຂົ້າໃນແກ້ໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ຈະປະຕິບັດຕາມຂັ້ນຕອນດັ່ງນີ້:

1. ຂຽນບັນຫາໃຫ້ຢູ່ໃນຮູບຮ່າງມາດຕະຖານ

$$\text{MaxP} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad ; \quad i=1, 2, 3, \ldots ,n$$

$$b_j \geq 0 \; , \; j = 1,2,3,\ldots,m$$

2. ໝູນໃຊ້ຕົວປ່ຽນເພີ່ມ (Slack variables) $s_1, s_2, s_3, ..., s_m$ ເພື່ອປ່ຽນບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເປັນສະເໝີຜົນດັ່ງນີ້:

$$P - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - ...... - c_nx_n = 0$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + s_2 = b_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n + s_m = b_m$$

$$x_i \geq 0 \; ; \; b_j \geq 0 \; ; \; i=1, 2, 3, \ldots ,n \; ; \; j = 1,2,3,\ldots,m$$

3. ສ້າງຕາຕະລາງ Simplex ເບື້ອງຕົ້ນ

Row	P	x_1	x_2	…	x_n	s_1	s_2	…	s_m	RHS
0	1	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0	0
1	0	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
2	0	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
.	.	.	.	…	.	.	.	...	.	.
m	0	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	…	1	b_m

4. ເລືອກຖັນ, ແຖວ ແລະ ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

- ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ (Pivot column) ແມ່ນຖັນທີ່ວ່າໃນແຖວ 0 (ແຖວສະເໝີຜົນຂອງຕຳລາເປົ້າໝາຍ) ຫາກມີຈຳນວນລົບນ້ອຍກວ່າໝູ່.
- ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ (Pivot Row) ແມ່ນແຖວທີ່ວ່າຜົນຫານຂອງອົງປະກອບເບື້ອງຂວາມື (RHS) ໃຫ້ອົງປະກອບທີ່ມີຄ່າບວກຢູ່ໃນຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງມີຄ່ານ້ອຍສຸດ.
- ອົງປະກອບທີ່ຢູ່ບ່ອນຕັດກັນລະຫວ່າງຖັນ ແລະ ແຖວ ທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງເອີ້ນວ່າອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ (Pivot element) .

5. ປ່ຽນອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງໃຫ້ເປັນ 1 ແລະ ອົງປະກອບອື່ນໆໃນຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງໃຫ້ເປັນ 0 ໂດຍໃຊ້ວິທີຂອງກາວສ໌.

ຫຼັງຈາກປ່ຽນແລ້ວຖ້າອົງປະກອບໃນແຖວ 0 ຍັງເປັນຈຳນວນລົບແມ່ນໃຫ້ສືບຕໍ່ປະຕິບັດຂັ້ນຕອນທີ່ 4 ໄປຈົນກວ່າເວລາໃດອົງປະກອບໃນແຖວ 0 ບໍ່ມີຈຳນວນລົບນັ້ນຄືຕາຕະລາງສຸດທ້າຍແລ້ວເຮົາສາມາດອ່ານຄຳຕອບຢູ່ໃນຖັນສຸດທ້າຍ (RHS) ຊຶ່ງກົງກັບສຳປະສິດຂອງຕົວປ່ຽນທີ່ມີຄ່າເທົ່າ 1.

ຕົວຢ່າງ 5: ຈົ່ງແກ້ບັນຫາຂອງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ລຸ່ມນີ້:

ຕຳລາເປົ້າໝາຍ $MaxP = 3x_1 + 4x_2$

ບັນດາເງື່ອນໄຂ $2x_1 + 4x_2 \leq 120$

$2x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$

1. ໝູນໃຊ້ຕົວປ່ຽນເພີ່ມ (Slack variables) s_1, s_2 ເພື່ອປ່ຽນບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເປັນສະເໝີຜົນດັ່ງນີ້:

$$P - 3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 120$$

$$2x_1 + 2x_2 + s_2 = 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. ສ້າງຕາຕະລາງ Simplex ເບື້ອງຕົ້ນ

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	1	-3	-4	0	0	0
1	0	2	4	1	0	120
2	0	2	2	0	1	80

3. ເລືອກຖັນ, ແຖວ ແລະ ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	
0	1	-3	-4	0	0	0	
1	0	2	4	1	0	120	120/4=30
2	0	2	2	0	1	80	80/2=40

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	
0	1	-1	0	1	0	120	
1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	30	30/0.5=60
2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	20	20/1=20

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	140
1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	20
2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	20

มາຮອດນີ້ເຮົາໄດ້ຕາຕະລາງ Simplex ສຸດທ້າຍແລ້ວເພາະວ່າອົງປະກອບໃນແຖວ 0 ບໍ່ມີຈຳນວນລົບເຮົາສາມາດອ່ານຄຳຕອບຢູ່ໃນຖັນສຸດທ້າຍ (RHS) ຊຶ່ງກົງກັບສຳປະສິດຂອງຕົວປ່ຽນທີ່ມີຄ່າເທົ່າ 1 ດັ່ງນີ້:

x_1 = 20 , x_2 = 20 , $MaxP$ = 140

ຕົວຢ່າງ 6: ຈົ່ງແກ້ບັນຫາຂອງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ລຸ່ມນີ້:

$$MaxP = 14x_1 + 12x_2 + 8x_3$$

ບັນດາເງື່ອນໄຂ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$$

1. ໝູນໃຊ້ຕົວປ່ຽນເພີ່ມ (Slack variables) s_1, s_2 ເພື່ອປ່ຽນບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເປັນສະເໝີຜົນດັ່ງນີ້:

$$P - 14x_1 - 12x_2 - 8x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 4$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$$

$$s_1 \ge 0; s_2 \ge 0$$

2. ສ້າງຕາຕະລາງ Simplex ເບື້ອງຕົ້ນ

Row	P	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
0	1	-14	-12	-8	0	0	0
1	0	2	1	1	1	0	2
2	0	1	1	3	0	1	4

3. ເລືອກຖັນ, ແຖວ ແລະ ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	
0	1	-14	-12	-8	0	0	0	
1	0	2	1	1	1	0	2	2/2=1
2	0	1	1	3	0	1	4	4/1=4

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	
0	1	0	-5	-1	7	0	14	
1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1/0.5=2
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3	3/0.5=6

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
0	1	10	0	4	12	0	24
1	0	2	1	1	1	0	2
2	0	-1	0	2	--1	1	2

ມາຮອດນີ້ເຮົາໄດ້ຕາຕະລາງ Simplex ສຸດທ້າຍແລ້ວເພາະວ່າອົງປະກອບໃນແຖວ 0 ບໍ່ມີຈຳນວນລົບເຮົາສາມາດອ່ານຄຳຕອບຢູ່ໃນຖັນສຸດທ້າຍ (RHS)

$x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 2$, $MaxP = 24$

6.3.2 ກໍລະນີຊອກຄ່ານ້ອຍສຸດ

ຂັ້ນຕອນຕ່າງໆໃນການແກ້ບັນຫາຊອກຄ່ານ້ອຍສຸດຂອງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ມີດັ່ງນີ້:

1. ຂຽນບັນຫາໃຫ້ຢູ່ໃນຮູບຮ່າງມາດຕະຖານ

$$\text{MinC} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_i \geq 0 \; ; \; b_j \geq 0 \; ; \; i=1, 2, 3, \ldots, n \; ; \; j = 1,2,3,\ldots$$

2. ສ້າງມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຊຶ່ງໄດ້ຈາກຕຳລາເປົ້າໝາຍ ແລະ ບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂດັ່ງນີ້:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n & 0 \end{array}\right]$$

3 .ຂຽນມາຕຣິດສ໌ຜັນປ່ຽນຂອງມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂ້າງເທິງ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} & c_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} & c_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 \end{array}\right]$$

4. ໝູນໃຊ້ບັນຫາຄວບຄູ່ຖ່າຍທອດມາຕຣິດສ໌ຜັນປ່ຽນຂ້າງເທິງໃຫ້ເປັນບັນຫາຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດ.

$$\text{MaxP} = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots. + b_my_m$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \ldots + a_{m1}y_m \leq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \ldots + a_{m2}y_m \leq c_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \ldots + a_{nm}y_m \leq c_n$$

$$y_i \geq 0 \quad ; \quad i=1, 2, 3, \ldots, m$$

$$c_j \geq 0 \; , \; j = 1,2,3,\ldots,n$$

5. ໝູນໃຊ້ວິທີ Simplex ເພື່ອແກ້ບັນຫາຄວບຄູ່ຂ້າງເທິງຕາມຂັ້ນຕອນຄືທີ່ໄດ້ສະເໜີຜ່ານມາ. ຫຼັງຈາກໄດ້ຕາຕະລາງ simplex ສຸດທ້າຍແລ້ວເຮົາຈະອ່ານໃຈຜົນຂອງລະບົບໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ໃນກໍລະນີຊອກຄ່ານ້ອຍສຸດຈະແມ່ນອັນດຽວກັນກັບໃຈຜົນຂອງບັນຫາຄວບຄູ່ຂອງມັນໝາຍຄວາມວ່າ MinC = MaxP . ສ່ວນຄ່າຂອງຕົວປ່ຽນທີ່ 1, ຄ່າຂອງຕົວປ່ຽນທີ່ 2, … ໃນກໍລະນີຊອກຄ່ານ້ອຍສຸດແມ່ນອ່ານໄດ້ຈາກອົງປະກອບຢູ່ໃນແຖວ 0 ທີ່ກົງກັບຖັນຕົວປ່ຽນເພີ່ມ $s_1, s_2, ...$ ຕາມລຳດັບ.

ຕົວຢ່າງ 7: ຈົ່ງແກ້ບັນຫາຂອງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ລຸ່ມນີ້:

$$MinC = 2x_1 + 3x_2$$

ບັນດາເງື່ອນໄຂ

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

1. ສ້າງມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຊຶ່ງໄດ້ຈາກຕຳລາເປົ້າໝາຍ ແລະ ບັນດາອະສະເໜີຜົນເງື່ອນໄຂດັ່ງນີ້:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

2. ຂຽນມາຕຣິດສ໌ຜັນປ່ຽນຂອງມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂ້າງເທິງ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

3. ໝູນໃຊ້ບັນຫາຄວບຄູ່ຖ່າຍທອດມາຕຣິດສ໌ຜັນປ່ຽນຂ້າງເທິງໃຫ້ເປັນບັນຫາຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດ.

MaxP = $6y_1 + 4y_2 + 5y_3$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ

$$2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0$$

4. ໝູນໃຊ້ຕົວປ່ຽນເພີ່ມ (Slack variables) s_1, s_2 ເພື່ອປ່ຽນບັນດາອະສະເໜີຜົນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເປັນສະເໜີຜົນດັ່ງນີ້:

$$P - 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 = 0$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 + s_1 = 2$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 + s_2 = 3$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0; s_2 \geq 0$$

4. ສ້າງຕາຕະລາງ Simplex ເບື້ອງຕົ້ນ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS
0	1	-6	-4	-5	0	0	0
1	0	2	1	1	1	0	2
2	0	1	2	1	0	1	3

6. ເລືອກຖັນ, ແຖວ ແລະ ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS	
0	1	-6	-4	-5	0	0	0	
1	0	2	1	1	1	0	2	2/2=1
2	0	1	2	1	0	1	3	3/1=3

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS	
0	1	0	-1	-2	3	0	6	
1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1/0.5=2
2	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	2	2/0.5=4

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS
0	1	4	1	0	5	0	10
1	0	2	1	1	1	0	2
2	0	-1	1	0	-1	1	1

มาธอดนี้เຮົາໄດ້ຕາຕະລາງ Simplex ສຸດທ້າຍແລ້ວເພາະວ່າອົງປະກອບໃນແຖວ 0 ບໍ່ມີຈຳນວນລົບ ເຮົາສາມາດອ່ານຄຳຕອບຢູ່ໃນຖັນສຸດທ້າຍ (RHS)

$y_1 = y_2 = 0$, y_3 = 2 , $MaxP$ = 10

MinC = MaxP = 10 ; x_1 = 5 , x_2 = 0

ຕົວຢ່າງ 8: ຈົ່ງແກ້ບັນຫາຂອງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ລຸ່ມນີ້:

$$MinC = 30x_1 + 50x_2$$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $6x_1 + 2x_2 \geq 30$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 24$$

$$5x_1 + 10x_2 \geq 60$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

1. ສ້າງມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຊຶ່ງໄດ້ຈາກຕຳລາເປົ້າໝາຍ ແລະ ບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂດັ່ງນີ້:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 30 \\ 3 & 2 & 24 \\ 5 & 10 & 60 \\ 30 & 50 & 0 \end{array}\right]$$

2. ຂຽນມາຕຣິດສ໌ຜັນປ່ຽນຂອງມາຕຣິດສ໌ຂະຫຍາຍຂ້າງເທິງ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 5 & 30 \\ 2 & 2 & 10 & 50 \\ 30 & 24 & 60 & 0 \end{array}\right]$$

3. ໝູນໃຊ້ບັນຫາຄວບຄູ່ຖ່າຍທອດມາຕຣິດສ໌ຜັນປ່ຽນຂ້າງເທິງໃຫ້ເປັນບັນຫາຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດ.

MaxP = $30y_1 + 24y_2 + 60y_3$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $6y_1 + 3y_2 + 5y_3 \leq 30$

$$2y_1 + 2y_2 + 10y_3 \leq 50$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0$$

4. ໝູນໃຊ້ຕົວປ່ຽນເພີ່ມ (Slack variables) s_1, s_2 ເພື່ອປ່ຽນບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂ ໃຫ້ເປັນສະເໝີຜົນດັ່ງນີ້:

$$P - 30y_1 - 24y_2 - 60y_3 = 0$$

$$6y_1 + 3y_2 + 5y_3 + s_1 = 30$$

$$2y_1 + 2y_2 + 10y_3 + s_2 = 50$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0; s_2 \geq 0$$

5. ສ້າງຕາຕະລາງ Simplex ເບື້ອງຕົ້ນ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS
0	1	-30	-24	-60	0	0	0
1	0	6	3	5	1	0	30
2	0	2	2	10	0	1	50

6. ເລືອກຖັນ, ແຖວ ແລະ ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS	
0	1	-30	-24	-60	0	0	0	
1	0	6	3	5	1	0	30	30/5=6
2	0	2	2	10	0	1	50	50/10=5

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS	
0	1	-18	-12	0	0	6	300	
1	0	5	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	5	5/5=1
2	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	5	5/0.2=25

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS	
0	1	0	$-\frac{24}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	$\frac{21}{5}$	318	
1	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	1	$\frac{5}{2}$
2	0	0	$\frac{3}{25}$	1	$-\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{24}{5}$	40

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ   ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	RHS
0	1	12	0	0	6	3	330
1	0	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
2		$-\frac{3}{10}$	0	1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{9}{2}$

ມາຮອດນີ້ເຮົາໄດ້ຕາຕະລາງ Simplex ສຸດທ້າຍແລ້ວເພາະວ່າອົງປະກອບໃນແຖວ 0 ບໍ່ມີຈຳນວນລົບ ເຮົາສາມາດອ່ານຄຳຕອບຢູ່ໃນຖັນສຸດທ້າຍ (RHS)

$y_1 = 0$, $y_2 = \frac{5}{2}$; $y_3 = \frac{9}{2}$, $MaxP = 330$

MinC = MaxP = 330 ; $x_1 = 6$, $x_2 = 3$

6.3.3 ກໍລະນີບັນດາເງື່ອນໄຂບໍ່ຢູ່ໃນຮູບຮ່າງມາດຕະຖານ

ໝາຍຄວາມວ່າບັນດາເງື່ອນໄຂມີເຄື່ອງໝາຍອະສະເໝີຜົນບໍ່ຄືກັນ

ຕົວຢ່າງ 9:

MaxP = $20x_1 + 15x_2$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $x_1 + x_2 \geq 7$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$2x_1 + x_2 \geq 8$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

1. ປ່ຽນບັນດາເງື່ອນໄຂໃຫ້ຢູ່ໃນຮູບຮ່າງມາດຕະຖານ

MaxP = $20x_1 + 15x_2$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $-x_1 - x_2 \leq -7$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$-2x_1 - x_2 \leq -8$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

2. ໝູນໃຊ້ຕົວປ່ຽນເພີ່ມ (Slack variables) s_1, s_2, s_3 ເພື່ອປ່ຽນບັນດາອະສະເໝີຜົນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເປັນສະເໝີຜົນດັ່ງນີ້:

P - $20x_1 - 15x_2$ = 0

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $-x_1 - x_2 + s_1 = -7$

$9x_1 + 5x_2 + s_2 = 45$

$-2x_1 - x_2 + s_3 = -8$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0$

3. ສ້າງຕາຕະລາງ Simplex ເບື້ອງຕົ້ນ

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	1	-20	-15	0	0	0	0
1	0	-1	-1	1	0	0	-7
2	0	9	5	0	1	0	45
3	0	-2	-1	0	0	1	-8

ເຮົາສັງເກດເຫັນວ່າຖັນສຸດທ້າຍ (RHS) ມີຈຳນວນລົບ ສະນັ້ນເຮົາຕ້ອງກຳນົດເອົາຖັນດັ່ງກ່າວເປັນຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ. ຫຼັງຈາກນັ້ນສັງເກດໃນຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງຖ້າວ່າອົງປະກອບໃດມີຄ່າລົບນ້ອຍກວ່າໝູ່ເຮົາກຳນົດເອົາແຖວດັ່ງກ່າວເປັນແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງເຊັ່ນຕົວຢ່າງຂ້າງເທິງແມ່ນອົງປະກອບ - 8 ນ້ອຍກວ່າໝູ່ດັ່ງນັ້ນແຖວ 3 ເປັນແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ. ການກຳນົດອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງແມ່ນໃຫ້ຫານອົງປະກອບທີ່ເປັນຈຳນວນລົບຢູ່ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງໃຫ້ອົງປະກອບທີ່ເປັນຈຳນວນລົບຢູ່ໃນຖັນສຸດທ້າຍທີ່ກົງກັບແຖວດັ່ງກ່າວ. ຖ້າວ່າຜົນຫານໃດໃຫຍ່ກວ່າໝູ່ແມ່ນອົງປະກອບດັ່ງກ່າວເປັນອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ. ເຊັ່ນຕົວຢ່າງຂ້າງເທິງຈະມີ $\frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} > \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$ ດັ່ງນັ້ນ - 2 ແມ່ນ ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

4. ເລືອກຖັນ, ແຖວ ແລະ ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	1	-20	-15	0	0	0	0
1	0	-1	-1	1	0	0	-7
2	0	9	5	0	1	0	45
3	0	-2	-1	0	0	1	-8

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	1	0	-5	0	0	-10	80
1	0	0	-1/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	-3
2	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{9}{2}$	9
3	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	4

ແຖວທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

ຖັນທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

ອົງປະກອບທີ່ເປັນຕົວຕັ້ງ

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	1	0	0	-10	0	-5	110
1	0	0	1	-2	0	1	6
2	0	0	0	1	1	4	6
3	0	1	0	1	0	-1	1

5. ສັງເກດເຫັນວ່າຖັນສຸດທ້າຍບໍ່ມີຈຳນວນລົບອີກແລ້ວໝາຍຄວາມວ່າລະບົບໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ ກາຍເປັນລະບົບໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ຢູ່ໃນຮູບຮ່າງມາດຕະຖານເຮົາສາມາດນຳໃຊ້ວິທີ Simplex

ແກ້ໄຂຄືດັ່ງທີ່ໄດ້ສະເໜີຜ່ານມາເຮົາຈະໄດ້ຜົນດັ່ງນີ້:

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	1	10	0	0	0	-15	120
1	0	2	1	0	0	-1	8
2	0	-1	0	0	1	5	5
3	0	1	0	1	0	-1	1

Row	P	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	1	7	0	0	3	0	135
1	0	$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	9
2	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	1	1
3	0	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	0	2

MaxP = 135 ; $x_1 = 0$; $x_2 = 9$

ບົດຝຶກຫັດ

1. ໂຮງງານແຫ່ງໜຶ່ງຜະລິດເຫຼັກກ້າ 2 ຊະນິດຄື F_1 ແລະ F_2. ຊະນິດທີ່ 1 ຕ້ອງໃຊ້ເວລາ 2 ຊົ່ວໂມງໃນການຫຼອມ, 4 ຊົ່ວໂມງໃນການກົ່ງ ແລະ 10 ຊົ່ງໂມງໃນການຕັດ. ຊະນິດທີ່ 2 ຕ້ອງໃຊ້ເວລາ 5 ຊົ່ວໂມງໃນການຫຼອມ, 2 ຊົ່ວໂມງໃນການກົ່ງ ແລະ 5 ຊົ່ງໂມງໃນການຕັດ. ການຫຼອມເຫຼັກກ້າທັງໝົດຕ້ອງໃຊ້ເວລາພາຍໃນ 40 ຊົ່ວໂມງ, ການກົ່ງຕ້ອງໃຊ້ເວລາພາຍໃນ 20 ຊົ່ວໂມງ ແລະ ການຕັດຕ້ອງໃຊ້ເວລາພາຍໃນ 60 ຊົ່ວໂມງ. ກຳໄລໃນການຂາຍເຫຼັກກ້າຊະນິດທີ່ 1 ແມ່ນ 35 $ ແລະ ຊະນິດທີ່ 2 ແມ່ນ 30 $. ຈົ່ງສ້າງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ຂອງບັນຫາດັ່ງກ່າວ ?

2. ໂຮງງານແຫ່ງໜຶ່ງຜະລິດສິນຄ້າ 3 ຊະນິດໂດຍມີການປະສົມປະສານລະຫວ່າງຈຳນວນແຮງງານ x_1 ແລະ ຈຳນວນເຄື່ອງຈັກ x_2. ຮູ້ວ່າແຮງງານແຕ່ລະຄົນສາມາດຜະລິດສິນຄ້າຊະນິດທີ່ 1 ໄດ້ 3 ອັນ, ຊະນິດທີ່ 2 ໄດ້ 1 ອັນ ແລະ ຊະນິດທີ່ 3 ໄດ້ 3 ອັນຄ່າແຮງງານແຕ່ລະຄົນແມ່ນ 120 $. ເຄື່ອງຈັກແຕ່ລະເຄື່ອງສາມາດຜະລິດສິນຄ້າຊະນິດທີ່ 1 ໄດ້ 1 ອັນຊະນິດທີ່ 2 ໄດ້ 5 ອັນ ແລະ ຊະນິດທີ່ 3 ໄດ້ 2 ອັນຄ່າລຸ້ນຮຽ້ນຂອງເຄື່ອງຈັກແຕ່ລະເຄື່ອງແມ່ນ 60 $. ໂຮງງານດັ່ງກ່າວຕ້ອງຜະລິດສິນຄ້າຊະນິດທີ່ 1 ໃຫ້ໄດ້ຢ່າງໜ້ອຍ 15 ອັນ, ຊະນິດທີ່ 2 ໃຫ້ໄດ້ຢ່າງໜ້ອຍ 20 ອັນ ແລະ ຊະນິດທີ່ 3 ໃຫ້ໄດ້ຢ່າງໜ້ອຍ 24 ອັນ. ຈົ່ງສ້າງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ຂອງບັນຫາດັ່ງກ່າວ ?

3. ຈົ່ງແກ້ບັນຫາໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ລຸ່ມນີ້ດ້ວຍວິທີເສັ້ນສະແດງ

a. MaxP = $30x_1 + 3x_2$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ

$$5x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$x_1 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

b. MinC = $4x_1 + 5x_2$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ

$$4x_1 + 2x_2 \geq 28$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 30$$
$$x_2 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

4. ຊາວກະສິກອນຜູ້ໜຶ່ງກຳລັງພິຈາລະນາວ່າຈະຕັດສິນໃຈຊື້ໝູ ແລະ ງົວມາລ້ຽງແນວລະຈັກຕົວ. ຮູ້ວ່າເຂົາຈະມີກຳໄລຈາກການຂາຍງົວແມ່ນ 40 $ ຕໍ່ຕົວ ແລະ ເຂົາຈະມີກຳໄລຈາກການຂາຍໝູແມ່ນ 20 $ ຕໍ່ຕົວ. ງົວແຕ່ລະຕົວຈະກິນອາຫານ 3 ຖັງຕໍ່ອາທິດ, ສ່ວນໝູແຕ່ລະຕົວຈະກິນອາຫານ 1 ຖັງ

ຕໍ່ອາທິດ, ຊາວກະສິກອນຜູ້ນີ້ສາມາດຜະລິດອາຫານໄດ້ບໍ່ເກີນ 9 ຖັງຕໍ່ອາທິດແຕ່ລາວມີເງື່ອນໄຂວ່າຕ້ອງຊື້ສັດທັງສອງຊະນິດນີ້ມາລ້ຽງຢ່າງໜ້ອຍ 4 ໂຕ,ແຕ່ວ່າຈຳນວນງົວບໍ່ໃຫ້ກາຍ 4 ໂຕ ແລະ ຈຳນວນໝູບໍ່ໃຫ້ກາຍ 6 ໂຕ. ເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກຳໄລສູງສຸດລາວຄວນຊື້ສັດແຕ່ລະຊະນິດມາລ້ຽງແນວລະຈັກໂຕ. ຈົ່ງສ້າງໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ຂອງບັນຫາດັ່ງກ່າວ ແລະ ແກ້ດ້ວຍວິທີເສັ້ນສະແດງ ?

5. ທ້າວແກ້ວໄດ້ບັນຈຸເຂົ້າໜົມ 2 ຊະນິດໃສ່ກັບເພື່ອສົ່ງຂາຍໃຫ້ຮ້ານຂາຍເຄື່ອງຍ່ອຍແຫ່ງໜຶ່ງ, ໂດຍທີ່ເຂົ້າໜົມຊະນິດທີ່ 1 ລາວບັນຈຸໃສ່ກັບລະ 5 ກ້ອນ. ເຂົ້າໜົມຊະນິດທີ່ 2 ລາວບັນຈຸໃສ່ກັບລະ 4 ກ້ອນທາງຮ້ານມີຂໍ້ສະເໜີວ່າໃນແຕ່ລະວັນຈະຮັບເຂົ້າໜົມຈາກທ້າວແກ້ວບໍ່ເກີນ 19 ກັບຊຶ່ງລວມກັນແລ້ວບໍ່ເກີນ 68 ກ້ອນ. ຮູ້ວ່າເຂົ້າໜົມຊະນິດທີ່ 1 ໄດ້ກຳໄລ 500 ກີບຕໍ່ກັບ ແລະ ຊະນິດທີ່ 2 ໄດ້ກຳໄລ 600 ກີບຕໍ່ກັບ. ຖາມວ່າໃນແຕ່ລະວັນທ້າວແກ້ວຄວນສົ່ງເຂົ້າໜົມໃຫ້ທາງຮ້ານຊະນິດລະຈັກກ້ອນເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກຳໄລສູງສຸດແຕ່ຕ້ອງຕອບສະໜອງຕາມເງື່ອນໄຂຂອງທາງຮ້ານໄດ້ກຳນົດໄວ້ ?

6. ຈົ່ງແກ້ບັນຫາໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ລຸ່ມນີ້ດ້ວຍວິທີ Simplex

a. MaxP = $5x_1 + 3x_2$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $3x_1 + 5x_2 \le 29$

$5x_1 + 2x_2 \le 23$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

b. MaxP = $50x_1 + 30x_2$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $2x_1 + x_2 \le 14$

$5x_1 + 5x_2 \le 40$

$x_1 + 3x_2 \le 18$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

c. MaxP = $6x_1 + 4x_2 + 5x_3$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$

d. MaxP = $x_1 + 3x_2 + x_3$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $2x_1 + 4x_2 \le 7$

$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 12$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$

7. ຈົ່ງແກ້ບັນຫາໂປຣແກຣມແບບເສັ້ນຊື່ລຸ່ມນີ້ດ້ວຍວິທີ Simplex ໂດຍການປ່ຽນບັນຫາດັ່ງກ່າວເປັນບັນຫາຄວບຄູ່

a. MinC = $4x_1 + 6x_2$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $x_1 + 2x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

b. MinC = $4x_1 + x_2$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + 2x_2 \geq 6$

$2x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

c. MinC = $9x_1 + 4x_2 + 12x_3$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $2.5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$

$x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 1$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$

d. MinC = $20x_1 + 30x_2 + 16x_3$

ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $3x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 4$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$

ບົດທີ 7

ຕຳລາຫຼາຍຕົວປ່ຽນ

7.1 ຕຳລາຫຼາຍຕົວປ່ຽນ

ຜ່ານມາພວກເຮົາໄດ້ສຶກສາກ່ຽວກັບຕຳລາຕົວປ່ຽນດຽວ $y = f(x)$ ເຊັ່ນ: $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$ ເຮົາສັງເກດເຫັນວ່າຕຳລາ f ມີຕົວປ່ຽນພຽງຕົວປ່ຽນດຽວຄື x. ຖ້າເຮົາສຳນຶກໃນທຳນອງດຽວກັນນີ້ຕຳລາໃນຮູບແບບ $z = f(x, y)$ ເຊັ່ນ: $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4$ ເຮົາສັງເກດເຫັນວ່າຕຳລາ f ມີສອງຕົວປ່ຽນຄື x ແລະ y ເພິ່ນເອີ້ນວ່າຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ ຫຼື ຕຳລາຫຼາຍຕົວປ່ຽນ .

ຖ້າວ່າຕຳລາ $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$

$f(1)$ ໝາຍເຖິງຄ່າຂອງຕຳລາ $f(x)$ ເມື່ອແທນຄ່າ $x = 1$

ດັ່ງນັ້ນ ຈະໄດ້ $f(1) = 2(1^2) + 3(1) - 6 = -1$

ຖ້າວ່າຕຳລາ $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4$

$f(1,2)$ ໝາຍເຖິງຄ່າຂອງຕຳລາ $f(x, y)$ ເມື່ອແທນຄ່າ $x = 1$ ແລະ $y = 2$

ດັ່ງນັ້ນ ຈະໄດ້ $f(1,2) = 1^2 + 2(1)(2) + 4 = 9$

ໃນວິຊາເສດຖະສາດຈຸລະພາກຕຳລາຫຼາຍຕົວປ່ຽນຊຶ່ງນັກສຶກສາມັກຈະໄດ້ພົບຄື:

- ຕຳລາການຜະລິດ $Q = f(K, L)$

  ໃນນັ້ນ Q : ໝາຍເຖິງປະລິມານການຜະລິດ

  K : ໝາຍເຖິງຈຳນວນທຶນທີ່ໃຊ້ໃນການຜະລິດ

  L : ໝາຍເຖິງຈຳນວນແຮງງານ

- ຕຳລາການຜະລິດຂອງ Cobb – Douglas

$$Q = AK^{\sim} L^{1-\sim}$$

ຕົວຢ່າງ 1: ບໍລິສັດໜຶ່ງມີແບບຕັ້ງໃນການຜະລິດສິນຄ້າຊະນິດໜຶ່ງຕາມສູດ $Q = 30K^{0.75}L^{0.25}$. ຖ້າບໍລິສັດດັ່ງກ່າວໃຊ້ທຶນ 1620 ຫົວໜ່ວຍ ແລະ ແຮງງານ 20 ຫົວໜ່ວຍ ເພື່ອຜະລິດສິນຄ້າດັ່ງກ່າວ. ຖາມວ່າຈະໄດ້ຮັບສິນຄ້າຈັກຫົວໜ່ວຍ?

ວິທີແກ້: ຄຳຖາມແມ່ນຊອກຄ່າ $f(1620, 20)$ ດັ່ງນັ້ນຈຳນວນສິນຄ້າທີ່ຊອກແມ່ນ:

$$f(1620, 20) = 30(1620)^{0.75}(20)^{0.25}$$

$$= 30\ (2^2 \times 3^4 \times 5)^{\frac{3}{4}}(2^2 \times 5)^{\frac{1}{4}} = 30(2^2 \times 3^3 \times 5) = 16200 \text{ ຫົວໜ່ວຍ}$$

ໝາຍຄວາມວ່າຖ້າບໍລິສັດໃຊ້ທຶນ 1620 ຫົວໜ່ວຍ ແລະ ແຮງງານ 20 ຫົວໜ່ວຍ ເພື່ອຜະລິດສິນຄ້າຈະສາມາດຜະລິດສິນຄ້າໄດ້ທັງໝົດ 16 200 ຫົວໜ່ວຍ

7.2 ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນ

ນັກສຶກສາໄດ້ຮູ້ວ່າ $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ ຊຶ່ງແມ່ນຜົນຕຳລາຂັ້ນ 1 ຂອງຕຳ $y = f(x) = x^n$ ທີ່ມີຕົວປ່ຽນດຽວຄື x. ສຳລັບຕຳລາຫຼາຍຕົວປ່ຽນເຊັ່ນຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = f(x, y)$ ແມ່ນເຮົາບໍ່ສາມາດຊອກຜົນຕຳລາຂອງມັນພ້ອມກັນຕາມສອງຕົວປ່ຽນໄດ້, ແຕ່ເຮົາສາມາດຊອກຜົນຕຳລາຕາມແຕ່ລະຕົວປ່ຽນໄດ້ໂດຍຖືວ່າຕົວປ່ຽນອື່ນແມ່ນຕົວຄົງຄ່າ ເພິ່ນເອີ້ນຜົນຕຳລາແບບນີ້ວ່າຜົນຕຳລາພາກສ່ວນ.

ສັນຍາລັກດ້ວຍ:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = z_x$ ຫຼື $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$ ແມ່ນຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນໜຶ່ງຕາມຕົວປ່ຽນ x

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = z_y$ ຫຼື $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y$ ແມ່ນຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນໜຶ່ງຕາມຕົວປ່ຽນ y

ການຄິດໄລ່ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນກໍແມ່ນອີງໃສ່ກົດເກນການຄິດໄລ່ຜົນຕຳລາຂອງຕຳລາຕົວປ່ຽນດຽວທຸກປະການ, ມີແຕ່ວ່າຖ້າຄິດໄລ່ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຕາມ x ($\dfrac{\partial z}{\partial x}$) ແມ່ນໃຫ້ຖືວ່າ y ແມ່ນຕົວຄົງຄ່າ. ຖ້າຄິດໄລ່ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຕາມ y ($\dfrac{\partial z}{\partial y}$) ແມ່ນໃຫ້ຖືວ່າ x ແມ່ນຕົວຄົງຄ່າ.

ຕົວຢ່າງ 2: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = 3x^2y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 3y^3\frac{\partial (x^2)}{\partial x} = 3y^3(2x) = 6xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 3x^2\frac{\partial (y^3)}{\partial y} = 3x^2(3y^2) = 9x^2y^2$$

7.3 ຫລັກການຊອກຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນໜຶ່ງ

7.3.1 ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂອງຜົນບວກຂອງສອງຕຳລາ.

ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = f(x, y) + g(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

ຕົວຢ່າງ 3: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = 5x^3 - 3x^2y^2 + 6y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(5x^3)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(6y^4)}{\partial x} = 15x^2 - 6xy^2 + 0 \;=\; 15x^2 - 6xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(5x^3)}{\partial y} - \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(6y^4)}{\partial y} = 0 - 6x^2y + 24y^3 = -6x^2y + 24y^3$$

7.3.2 ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂອງຜົນຄູນຂອງສອງຕຳລາ.

ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = f(x,y).g(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = g(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}$$

ຕົວຢ່າງ 4: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = (3x+5)(2x+6y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x+6y)\frac{\partial(3x+5)}{\partial x} + (3x+5)\frac{\partial(2x+6y)}{\partial x}$$

$$= 3(2x+6y) + 2(3x+5) = 12x + 18y + 10$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2x+6y)\frac{\partial(3x+5)}{\partial y} + (3x+5)\frac{\partial(2x+6y)}{\partial y}$$

$$= 0(2x+6y) + 6(3x+5) = 18x + 30$$

7.3.3 ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂອງຜົນຫານຂອງສອງຕຳລາ.

ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{g(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} - f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}}{[g(x,y)]^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} - f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}}{[g(x,y)]^2}$$

ຕົວຢ່າງ 5: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = \dfrac{6x+7y}{5x+3y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(5x+3y)\dfrac{\partial(6x+7y)}{\partial x} - (6x+7y)\dfrac{\partial(5x+3y)}{\partial x}}{(5x+3y)^2} = \frac{6(5x+3y)-5(6x+7y)}{(5x+3y)^2} = -\frac{17y}{(5x+3y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(5x+3y)\dfrac{\partial(6x+7y)}{\partial y} - (6x+7y)\dfrac{\partial(5x+3y)}{\partial y}}{(5x+3y)^2} = \frac{7(5x+3y)-3(6x+7y)}{(5x+3y)^2} = \frac{17x}{(5x+3y)^2}$$

7.3.4 ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂອງຕຳລາກຳລັງ

ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = [f(x,y)]^n$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = n[f(x,y)]^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n[f(x,y)]^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y}$$

ຕົວຢ່າງ 6: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = (x^3+7y^2)^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x^3+7y^2)^3\frac{\partial(x^3+7y^2)}{\partial x} = 12x^2(x^3+7y^2)^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4(x^3+7y^2)^3\frac{\partial(x^3+7y^2)}{\partial y} = 56y\ (x^3+7y^2)^3$$

7.4 ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນສອງ

ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = f(x,y)$ ຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນສອງຂອງ z ກໍແມ່ນຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນໜຶ່ງຂອງຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນໜຶ່ງໂດຍຖືວ່າຖ້າຊອກຜົນຕຳລາຕາມຕົວປ່ຽນໃດແມ່ນໃຫ້ຕົວປ່ຽນອື່ນເປັນຕົວຄົງຄ່າ.

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f_{yy} &= (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \text{ ຜົນຕຳລາສອງຢ່າງນີ້ເອີ້ນວ່າຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນສອງໂດຍກົງ}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \\ f_{yx} &= (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\} \text{ ຜົນຕຳລາສອງຢ່າງນີ້ເອີ້ນວ່າຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນສອງໄຂ່ວ}$$

ຕາມຫຼັກເກນຂອງ Young ຖ້າວ່າ f_{xy} ແລະ f_{yx} ຫາກຕໍ່ເນື່ອງເວລານັ້ນ $f_{xy} = f_{yx}$

ຕົວຢ່າງ 7: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = 3x^2y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 18x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(6xy^3) = 18xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(9x^2y^2) = 18xy^2$$

ຕົວຢ່າງ 8: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = 7x^3 + 9xy + 2y^5$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 21x^2 + 9y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 42x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 9x + 10y^4 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 40y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(21x^2 + 9y) = 9$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(9x + 10y^4) = 9$$

7.5 ຄ່າໃຫຍ່ສຸດ ແລະ ຄ່ານ້ອຍສຸດຂອງຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ

ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $Z = f(x, y)$

- ຖ້າວ່າ :

1. $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$
2. $F(x_0, y_0) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$
3. $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

$f(x, y)$ ຈະມີຄ່ານ້ອຍສຸດທຽບຖານຢູ່ເມັດ (x_0, y_0).

- ຖ້າວ່າ :

1. $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$
2. $F(x_0, y_0) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$
3. $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$

$f(x, y)$ ຈະມີຄ່າໃຫຍ່ສຸດທຽບຖານຢູ່ເມັດ (x_0, y_0).

• ຖ້າວ່າ :

1. $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

2. $\text{F}(x_0, y_0) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$

ເມັດ (x_0, y_0) ຈະແມ່ນເມັດອານມ້າຂອງຕຳລາ $f(x, y)$

ຕົວຢ່າງ 9: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = x^2 - 4x + 2y^2 + 6y + 2$

$$\begin{matrix} f_x = 2x + 4 \\ f_y = 4y + 6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 4y + 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2, y = -\frac{3}{2}$$

$f_{xx} = 2 > 0$; $f_{yy} = 4$; $f_{xy} = 0$

$\text{F}(2, -\frac{3}{2})$ = $2 \times 4 - 0^2 = 8 > 0$

ດັ່ງນັ້ນເມັດ $(2, -\frac{3}{2})$ ແມ່ນເມັດທີ່ເຮັດໃຫ້ຕຳລາ z = $f(x, y)$ ມີຄ່ານ້ອຍສຸດທຽບຖານ

ຕົວຢ່າງ 10: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = -x^2 + 4x - y^2 - 6y$

$$\begin{matrix} f_x = -2x + 4 \\ f_y = -2y - 6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + 4 = 0 \\ -2y - 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2, y = -3$$

$f_{xx} = -2 < 0$; $f_{yy} = -2$; $f_{xy} = 0$

$\text{F}(2, -3)$ = $(-2) \times (-2) - 0^2 = 4 > 0$

ດັ່ງນັ້ນເມັດ $(2, -3)$ ແມ່ນເມັດທີ່ເຮັດໃຫ້ຕຳລາ z = $f(x, y)$ ມີຄ່າໃຫຍ່ສຸດທຽບຖານ

ຕົວຢ່າງ 11: ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = -x^2 + 8x + y^2 + 4y$

$$\begin{matrix} f_x = -2x + 8 \\ f_y = 2y + 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + 8 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 4, y = -2$$

$f_{xx} = -2 < 0$; $f_{yy} = 2$; $f_{xy} = 0$

$\text{F}(4, -2)$ = $(-2) \times 2 - 0^2 = -4 < 0$

ດັ່ງນັ້ນເມັດ $(4, -2)$ ແມ່ນເມັດອານມ້າ.

7.6 ຄ່າໃຫຍ່ສຸດ ແລະ ຄ່ານ້ອຍສຸດພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂຂອງຕົວຄູນ Lagrange

ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = f(x, y)$ ຊຶ່ງຢູ່ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $g(x, y) = k$ (k ເອີ້ນວ່າຕົວຄົງຄ່າເງື່ອນໄຂ) .

ຂັ້ນຕອນໃນການຊອກ ຄ່າໃຫຍ່ສຸດ ຫຼື ຄ່ານ້ອຍສຸດພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂຂອງຕົວຄູນ Lagrange

ສ້າງຕຳລາໃໝ່ $F(x, y, {}^{a}) = f(x, y) + {}^{a}[k - g(x, y)]$

ໂດຍວາງເງື່ອນໄຂໃຫ້ເທົ່າ 0 ຄື $k - g(x, y)$ = 0

- F($x, y,$ ª) ເອີ້ນວ່າຕໍາລາ Lagrange
- $f(x, y)$ ເອີ້ນວ່າຕໍາລາເປົ້າໝາຍ
- $g(x, y) = k$ ເອີ້ນວ່າເງື່ອນໄຂ
- ª ເອີ້ວ່າຕົວຄູນ Lagrange

ແລ້ວຊອກເມັດ $(x_0, y_0,$ ª$_0)$ ທີ່ເຮັດໃຫ້ຕໍາລາ $f(x, y)$ ມີຄ່າໃຫຍ່ສຸດ (ຫຼື ຄ່ານ້ອຍສຸດ)

ຈາກລະບົບສົມຜົນ
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \text{ª}} = 0 \end{cases}$$

ຍ້ອນວ່າຢູ່ເມັດ $(x_0, y_0,$ ª$_0)$ ນັ້ນ ª$[k - g(x, y)]$= 0 ສະນັ້ນ $f(x, y)$ = $F(x_0, y_0,$ ª$_0)$

ຕົວຢ່າງ 12: ຈົ່ງຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດຂອງຕໍາລາ $z = 4x^2 + 3xy + 6y^2$ ຢູ່ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $x + y = 56$

1. ວາງເງື່ອນໄຂໃຫ້ເທົ່າ 0 ຄື $56 - x - y = 0$ ແລະ ສ້າງຕໍາລາ Lagrange

$$F(x, y, \text{ª}) = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \text{ª}(56 - x - y)$$

2. ຊອກເມັດ $(x_0, y_0,$ ª$_0)$ ຈາກລະບົບສົມຜົນ

$$\begin{cases} F_x = 8x + 3y - \text{ª} = 0 & (1) \\ F_y = 3x + 12y - \text{ª} = 0 & (2) \\ F_{\text{ª}} = 56 - x - y = 0 & (3) \end{cases}$$

ເອົາ (1) – (2) $\Rightarrow$ $5x - 9y = 0$ (4)

ເອົາ 5(3) - (4) $\Rightarrow$ $14y = 280$ $\Rightarrow$ y = 20

$$\Rightarrow \quad x = \frac{180}{5} = 36$$

ເອົາຄ່າ x ແລະ y ແທນເຂົ້າ (1) ຈະໄດ້:

$$\text{ª} = 8x + 3y = 8 \times 36 + 3 \times 20 = 348$$

ດັ່ງນັ້ນຄ່າໃຫຍ່ສຸດທີ່ຊອກແມ່ນ:

$$f(36, 20) = 4(36)^2 + 3 \times 36 \times 20 + 6(20)^2 + 348(56-36-20)$$

$$= 4(1296)+3(720)+6(400)+ 348(0) = 9744$$

7.7 ຄວາມໝາຍຂອງຕົວຄູນ Lagrange

ຕົວຄູນ Lagrange ª ໝາຍເຖິງຜົນກະທົບທີ່ມີຕໍາລາເປົ້າໝາຍ $f(x, y)$ ເມື່ອມີການປ່ຽນແປງຕົວຄົງຄ່າເງື່ອນໄຂ k .ໝາຍຄວາມວ່າເມື່ອ k ປ່ຽນແປງ 1 ຫົວໜ່ວຍເວລານັ້ນຕໍາລາເປົ້າໝາຍຈະ

ປ່ຽນແປງ ª ຫົວໜ່ວຍໂດຍປະມານ. ໃນຕົວຢ່າງຂ້າງເທິງເຮົາມີ $ª = 348$ ຊຶ່ງໝາຍເຖິງວ່າເມື່ອຕົວຄົງຄ່າເງື່ອນໄຂ k ປ່ຽນແປງ 1 ຫົວໜ່ວຍ ເວລານັ້ນຕຳລາເປົ້າໝາຍຈະປ່ຽນແປງ 348 ຫົວໜ່ວຍ ໂດຍປະມານ.

ຕົວຢ່າງ 13: ໃນຕົວຢ່າງ 12 ເມື່ອ $k = 56$ ແລະ $ª = 348$ ຈະໄດ້ F = 9744

ຖ້າໃຫ້ $k = 57$ ເວລານັ້ນ

$$\begin{cases} F_x = 8x + 3y - ª = 0 & (1) \\ F_y = 3x + 12y - ª = 0 & (2) \\ F_ª = 57 - x - y = 0 & (3) \end{cases}$$

ແກ້ລະບົບສົມຜົນຂ້າງເທິງເຮົາຈະໄດ້ $x = 36.64$; $y = 20.36$; $ª = 354.2$

ແລະ F = 10095 ຊຶ່ງໃຫຍ່ກວ່າເກົ່າ 351 ≈ 348 ຫົວໜ່ວຍ.

7.8 ຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນ

- ສຳລັບຕຳລາຕົວປ່ຽນດຽວ $y = f(x)$ ຈຸນລະຄະນິດຂອງມັນແມ່ນ $df = f'(x)dx$
- ສຳລັບຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = f(x, y)$ ຈຸນລະຄະນິດຂອງມັນແມ່ນ

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ ຊຶ່ງເພິ່ນເອີ້ນວ່າຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນ

- ໂດຍທົ່ວໄປແລ້ວຕຳລາ n ຕົວປ່ຽນ $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນຂອງມັນແມ່ນ:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

ຕົວຢ່າງ 14 : ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = x^4 + 8xy + 3y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 8x + 9y^2$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (4x^3 + 8y)dx + (8x + 9y^2)dy$$

ຕົວຢ່າງ 15 : ໃຫ້ຕຳລາສອງຕົວປ່ຽນ $z = \frac{x - y}{x + 1}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + y}{(x + 1)^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x + 1}{(x + 1)^2} = -\frac{1}{x + 1}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{1 + y}{(x + 1)^2}\,dx - \frac{1}{x + 1}\,dy$$

7.9 ຜົນຕຳລາເຕັມສ່ວນ

ສົມມຸດໃຫ້ຕຳລາ $z = f(x, y)$ ແລະ $y = g(x)$ ເວລານັ້ນຕຳລາ z ຈະເປັນຕຳລາປະສົມຕາມ

ຕົວປ່ຽນ x ແລະ ຜົນຕໍາລາ $\frac{dz}{dx}$ ເອີ້ນວ່າຜົນຕໍາລາເຕັມສ່ວນຂອງ z ຕາມ x.

ສັນຍາລັກດ້ວຍ:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dx}$$

ຕົວຢ່າງ 16 : ໃຫ້ຕໍາລາ $z=6x^3+7y$ ແລະ $y=4x^2+3x+8$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=18x^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=7 \qquad \frac{dy}{dx}=8x+3$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dx} = 18x^2+7(8x+3)=18x^2+56x+21$$

• ໃນກໍລະນີ $z=f(x,y)$, $x=u(t)$ ແລະ $y=v(t)$ ເວລານັ້ນ z ຈະແມ່ນຕໍາລາປະສົມຕາມຕົວປ່ຽນ t ເຮົາສາມາດຂະຫຍາຍມະໂນພາບກ່ຽວກັບຜົນຕໍາລາເຕັມສ່ວນຂອງ z ຕາມ t ດັ່ງນີ້:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ຕົວຢ່າງ 17 : ໃຫ້ຕໍາລາ $z=8x^2+3y^2$; $x=4t$ ແລະ $y=5t$ ເວລານັ້ນ:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=16x \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=6y \qquad \frac{dx}{dt}=4 \qquad \frac{dy}{dt}=5$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 16x(4)+6y(5)=64x+30y=64(4t)+30(5t)=406t$$

7.10 ການນໍາໃຊ້ຜົນຕໍາລາພາກສ່ວນໃນຂົງເຂດເສດຖະກິດ

7.10.1 ການຜະລິດເພີ່ມ

ຜະລິດຜົນວັດຖຸເພີ່ມຂອງທຶນ (P_{mp_K}) ແມ່ນການຜັນປ່ຽນຂອງການຜະລິດທີ່ສືບເນື່ອງມາຈາກການປ່ຽນແປງຂອງທຶນໂດຍທີ່ຕົວປ່ຽນອື່ນຄົງຄ່າ.

ຜະລິດຜົນວັດຖຸເພີ່ມຂອງແຮງງານ (P_{mp_L}) ແມ່ນການຜັນປ່ຽນຂອງການຜະລິດທີ່ສືບເນື່ອງມາຈາກການປ່ຽນແປງຂອງແຮງງານໂດຍທີ່ຕົວປ່ຽນອື່ນຄົງຄ່າ.

ຕົວຢ່າງ 18 : ໃຫ້ຕໍາລາການຜະລິດໜຶ່ງ $Q=36KL-2K^2-3L^2$

$$P_{mp_K} = \frac{\partial Q}{\partial K}=36L-4K$$

$$P_{mp_L} = \frac{\partial Q}{\partial L}=36K-6L$$

7.10.2 ຕົວຄູນຂອງລາຍຮັບ ແລະ ການກໍານົດທາລາຍຮັບ

ໂດຍໃຊ້ຜົນຕໍາລາພາກສ່ວນເຮົາສາມາດຖອນເອົາຕົວຄູນຕ່າງໆທີ່ມີຢູ່ໃນແບບຈໍາລອງຂອງລາຍຮັບແຫ່ງຊາດໄດ້ດັ່ງຕໍ່ໄປນີ້:

ສົມມຸດມີແບບຈຳລອງລາຍຮັບ Y = C + I + G + X – Z

ຊຶ່ງໃນນັ້ນ: $C = C_0 + by$ $\quad I = I_0 + ay$ $\quad G = G_0$ $\quad X = X_0$ $\quad Z = Z_0$

Y : ລາຍຮັບ G : ການໃຊ້ຈ່າຍພາກລັດ

C : ການບໍລິໂພກ X : ການສົ່ງອອກ

I : ການລົງທຶນ Z : ການນຳເຂົ້າ

a : ທ່າອ່ຽງການລົງທຶນເພີ່ມ b : ທ່າອ່ຽງການບໍລິໂພກເພີ່ມ

ເຮົາຈະໄດ້ລາຍຮັບດຸ່ນດ່ຽງ $\bar{Y}$ ເມື່ອ $\bar{Y} = C + I + G + X - Z$

ຫຼື $\bar{Y} = C_0 + b\bar{Y} + I_0 + a\bar{Y} + G_0 + X_0 - Z_0$

$$\bar{Y} - b\bar{Y} - a\bar{Y} = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0$$

$$\bar{Y}(1 - b - a) = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0$$

ດັ່ງນັ້ນເຮົາຈະໄດ້ລາຍຮັບດຸ່ນດ່ຽງ $\bar{Y} = \frac{1}{1 - b - a}(\, C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0\,)$

ເມື່ອຄິດໄລ່ຜົນຕຳລາຕາມຕົວປ່ຽນໃດໜຶ່ງເຮົາກໍຈະໄດ້ຕົວຄູນທີ່ກົງກັບຕົວປ່ຽນນັ້ນໆ.

- ຕົວຄູນທີ່ກົງກັບການໃຊ້ຈ່າຍພາກລັດ G_0 ແມ່ນ:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - b - a}$$

- ຕົວຄູນທີ່ກົງກັບການນຳເຂົ້າ Z_0 ແມ່ນ:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial Z_0} = \frac{1}{1 - b - a}$$

- ຕົວຄູນທີ່ກົງກັບການຜັນປ່ຽນຂອງທ່າອ່ຽງການລົງທຶນເພີ່ມ a ແມ່ນ:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{(1 - b - a)(0) - (C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0)(-1)}{(1 - b - a)^2} = \frac{C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0}{(1 - b - a)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{1 - b - a}\frac{C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0}{1 - b - a} = \frac{\bar{Y}}{1 - b - a}$$

ຕົວຢ່າງ 19: ຈາກຂໍ້ 4.10.2 ສົມມຸດວ່າ a = 0.10 , b = 0.70 ແລະ Y = 1200 ເຮົາສາມາດນຳໃຊ້ການຄິດໄລ່ຈຸນລະຄະນິດເພື່ອຊອກຫາຜົນກະທົບຂອງການເພີ່ມຂຶ້ນຂອງຕົວປ່ຽນເອກະລາດໃດໜຶ່ງ.

ຮູ້ວ່າຜົນຕຳລາພາກສວ່ນຂອງລາຍຮັບທຽບໃສ່ການໃຊ້ຈ່າຍພາກລັດແມ່ນ:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - b - a}$$

ຈຸນລະຄະນິດຂອງລາຍຮັບດຸ່ນດ່ຽງ $d\bar{Y} = \frac{1}{1 - b - a} dG_0$

ດ້ວຍວ່າ $\bar{Y} = f(G_0)$ ເປັນຕຳລາລີເນແອຊຶ່ງເຫັນໄດ້ຈາກສຳປະສິດມູນຢູ່ທຸກໆຈຸດຂອງມັນ

$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0}=\frac{1}{1-b-a}$ ເປັນຈຳນວນຄົງຄ່າ. ດັ່ງນັ້ນເຮົາຈະໄດ້: $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0}=\frac{\Delta \overline{Y}}{\Delta G_0}$

ດ້ວຍເຫດນີ້ເຮົາຈຶ່ງໄດ້: $\Delta \overline{Y}=\frac{1}{1-b-a}\Delta G_0$

ສະນັ້ນໃນຕົວຢ່າງນີ້ຖ້າພາກສ່ວນລັດຖະບານເພີ່ມການໃຊ້ຈ່າຍດ້ານງົບປະມານຂຶ້ນອີກ 100 ລ້ານກີບ ($\Delta G_0=100$ ລ້ານກີບ) ລາຍຮັບແຫ່ງຊາດຈະເພີ່ມຂຶ້ນ $\Delta \overline{Y}=\frac{1}{1-0.70-0.10}100=500$ ລ້ານກີບ

7.10.3 ການຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດ ຫຼື ຕ່ຳສຸດຂອງຕຳລາຫຼາຍຕົວປ່ຽນ

ຕົວຢ່າງ 20: ວິສາຫະກິດໜຶ່ງຜະລິດ ແລະ ຈຳໜ່າຍສິນຄ້າສອງຊະນິດຄື x ແລະ y ຊຶ່ງມີຕຳລາກຳໄລດັ່ງລຸ່ມນີ້: $® = 64x-2x^2+4xy-4y^2+32y-14$. ຈົ່ງຊອກຫາປະລິມານການຜະລິດສິນຄ້າທັງສອງເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກຳໄລສູງສຸດ ແລະ ຊອກກຳໄລສູງສຸດດັ່ງກ່າວ ?

ວິທີແກ້ :

$$\begin{matrix} ®_x = 64-4x+4y \\ ®_y = 4x-8y+32 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ®_x = 0 \\ ®_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64-4x+4y=0 \\ 4x-8y+32=0 \end{cases} \Rightarrow x=40 \text{ ແລະ } y=24$$

$®_{xx}=-4 < 0$ $\quad ®_{yy}=-8$ $\quad ®_{xy}=-4$

F(40,24) = (-4)(-8) – $(-4)^2$ = 32 – 16 = 16 > 0

ດັ່ງນັ້ນ (40,24) ຈຶ່ງແມ່ນປະລິມານການຜະລິດເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກຳໄລສູງສຸດ ແລະ ກຳໄລສູງສຸດແມ່ນ:

$$®(40,24)=64\times 40-2(40)^2+4\times 40\times 24-4(24)^2+32\times 24-14=1650$$

ຕົວຢ່າງ 21: ຜູ້ຜະລິດລາຍໜຶ່ງສະເໜີຂາຍສິນຄ້າຂອງຕົນສອງຊະນິດໂດຍມີຕຳລາຄວາມຕ້ອງການສິນຄ້າທັງສອງແມ່ນ: $Q_x=25-0.5P_x$; $Q_y=30-P_y$ (1) ແລະ ຕຳລາຕົ້ນທຶນການຜະລິດສິນຄ້າທັງສອງແມ່ນ: CT = $Q_x^2+2Q_xQ_y+Q_y^2+20$. ຈົ່ງຊອກປະລິມານການຜະລິດ , ລາຄາຂາຍທີ່ເໝາະສົມເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກຳໄລສູງສຸດ ແລະ ຊອກຫາກຳໄລສູງສຸດດັ່ງກ່າວ?

ວິທີແກ້ : $® = RT-CT = P_xQ_x+P_yQ_y-Q_x^2-2Q_xQ_y-Q_y^2-20$

ຈາກ (1) $\Rightarrow$ $P_x = 50-2Q_x$; $P_y = 30-Q_y$

$$® = (50-2Q_x)Q_x+(30-Q_y)Q_y-Q_x^2-2Q_xQ_y-Q_y^2-20$$

$$® = 50Q_x-3Q_x^2+30Q_y-2Q_y^2-2Q_xQ_y-20$$

$$\begin{matrix} ®_x = 50-6Q_x-2Q_y \\ ®_y = 30-2Q_x-4Q_y \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ®_x = 0 \\ ®_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6Q_x+2Q_y=50 \\ 2Q_x+4Q_y=30 \end{cases} \Rightarrow Q_x=7 \text{ ແລະ } Q_y=4$$

$®_{xx}=-6 < 0$ $\quad ®_{yy}=-4$ $\quad ®_{xy}=-2$

F(7,4) = (-6)(-4) – $(-2)^2$ = 24 – 4 = 20 > 0

ດັ່ງນັ້ນ $Q_x=7$ ແລະ $Q_y=4$ ຈຶ່ງແມ່ນປະລິມານການຜະລິດເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກຳໄລສູງສຸດ ແລະ ລາຄາຂາຍທີ່ເໝາະສົມທີ່ສຸດຄື $P_x = 50-2\times 7=50-14=36$ $\quad P_y = 30-4=26$

ເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກຳໄລສູງສຸດຕ້ອງຜະລິດສິນຄ້າຊະນິດໜຶ່ງ 7 ຫົວໜ່ວຍ , ສິນຄ້າຊະນິດທີ່ສອງ 4 ຫົວໜ່ວຍ ແລະລາຄາຂາຍທີ່ເໝາະສົມແມ່ນສິນຄ້າຊະນິດໜຶ່ງ 36 ຫົວໜ່ວຍ , ສິນຄ້າຊະນິດທີ່ສອງ 26 ຫົວໜ່ວຍ. ກຳໄລສູງສຸດແມ່ນ:

$$\text{®}(7,4) = 50\times 7 - 3(7)^2 + 30\times 4 - 2(4)^2 - 2\times 4\times 7 - 20 = 215$$

ຕົວຢ່າງ 22: ວິສາຫະກິດໜຶ່ງຜະລິດສິນຄ້າສອງຊະນິດຄື x ແລະ y ຊຶ່ງມີຕຳລາຕົ້ນທຶນການຜະລິດທັງໝົດ $CT = 8x^2 - xy + 12y^2$. ແຕ່ບໍລິສັດຕ້ອງປະຕິບັດສັນຍາໃນການຜະລິດສິນຄ້າທັງໝົດໃຫ້ໄດ້ 42 ຫົວໜ່ວຍ. ຈົ່ງຊອກຫາປະລິມານການຜະລິດຂອງບໍລິສັດດັ່ງກ່າວເພື່ອໃຫ້ມີຕົ້ນທຶນຕ່ຳສຸດ ແລະ ຊອກຕົ້ນທຶນຕ່ຳສຸດດັ່ງກ່າວ?

ວິທີແກ້ : ບໍລິສັດມີເງື່ອນໄຂໃນການຜະລິດ $x + y = 42$

ປ່ຽນເງື່ອນໄຂໃຫ້ເທົ່າ 0 ແລະ ສ້າງຕຳລາ Lagrange

$$F(x, y, \text{ª}) = 8x^2 - xy + 12y^2 + \text{ª}(42 - x - y)$$

$$\begin{cases} F_x = 16x - y - \text{ª} = 0 & (1) \\ F_y = -x + 24y - \text{ª} = 0 & (2) \\ F_{\text{ª}} = 42 - x - y = 0 & (3) \end{cases}$$

ເອົາ (1) – (2) $\Rightarrow$ $17x - 25y = 0$ (4)

ເອົາ 17(3) - (4) $\Rightarrow$ $42y = 714$ $\Rightarrow$ y = 17

$$\Rightarrow \; x = 42 - 17 = 25$$

ເອົາຄ່າ x ແລະ y ແທນເຂົ້າ (1) ຈະໄດ້:

$$\text{ª} = 16x - y = 16\times 25 - 17 = 383$$

ດັ່ງນັ້ນ ປະລິມານການຜະລິດເພື່ອໃຫ້ມີຕົ້ນທຶນຕ່ຳສຸດ ແມ່ນ $x = 25$, $y = 17$ ແລະ ຕົ້ນທຶນຕ່ຳສຸດທີ່ຊອກແມ່ນ:

$$CT(25,17) = 8(25)^2 - 25\times 17 + 12(17)^2 = 8043$$

ບົດຝຶກຫັດ

1. ແມ່ຄ້າຄົນໜຶ່ງຂາຍໄກ່ກິໂລລະ 75000 ກີບ ແລະ ຂາຍເປັດກິໂລລະ 50000 ກີບ. ຈົ່ງຂຽນສູດລາຍຮັບ R(x, y) ຈາກການຂາຍໄກ່ x ກິໂລ ແລະ ເປັດ y ກິໂລ. ຫລັງຈາກນັ້ນໃຫ້ຄິດໄລ່ລາຍຮັບຈາກການຂາຍໄກ່ 25 ກິໂລ ແລະ ຂາຍເປັດ 30 ກິໂລ ?

2. ຈົ່ງຊອກຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນໜຶ່ງຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

   a. $z = 8x^2 + 14xy - 5y^2 + 10$

   b. $z = 3x^2(5x + 7y)$

   c. $z = 2x^2 + 6y)(5x - 3y^3)$

   d. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{3x + 2y}$

   e. $z = (7x^2 + 4y^3)^4$

3. ຈົ່ງຊອກຜົນຕຳລາພາກສ່ວນຂັ້ນສອງຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

   a. $z = x^3 + 2xy + 2y^3$

   b. $z = x^4 + x^3y^2 - 3xy^3 - 2y^4$

   c. $z = (x^2 + 2y)^4$

   d. $z = x^{0.6}y^{0.4}$

4. ຈົ່ງຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດ, ຄ່ານ້ອຍສຸດ ແລະ ເມັດອານມ້າຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

   a. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x + 6y + 8$

   b. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x + 6y$

   c. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - xy - 4x - 7y + 12$

   d. $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2 - 30x + 7y + 4xy$

   e. $f(x, y) = x^3 - 6x^2 + 2y^3 + 9y^2 - 63x - 60y$

5. ຈົ່ງຊອກຫາຈຸບລະຄະນິດເຕັມສ່ວນຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

   a. $z = 5x^3 - 12xy - 6y^5$

   b. $z = 3x^2(8x - 7y)$

   c. $z = (5x^2 + 7y)(2x - 4y^3)$

   d. $z = (x - 3y^2)^3$

6. ຈົ່ງຊອກຫາຜົນຕຳລາເຕັມສ່ວນຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

   a. $z = 6x^2 + 15xy + 3y^2$ ແລະ $y = 7x^2$

   b. $z = (13x - 18y)^2$ ແລະ $y = x + 6$

c. $z=10x^2-6xy-12y^2$ ແລະ $x=5t$; $y=4t$

7. ພໍ່ຄ້າຄົນໜຶ່ງຂາຍສິນຄ້າຂອງລາວໃນສອງຕົວເມືອງດ້ວຍລາຄາແຕກຕ່າງກັນສົມມຸດ x ແມ່ນຈຳນວນສິນຄ້າທີ່ຂາຍໃນຕົວເມືອງທີ່ໜຶ່ງ y ແມ່ນຈຳນວນສິນຄ້າທີ່ຂາຍໃນຕົວເມືອງທີ່ສອງ. ຢູ່ຕົວເມືອງທີ່ໜຶ່ງລາວຂາຍດ້ວຍລາຄາ ($97-\frac{x}{10}$) ໂດລາຕໍ່ອັນ ແລະ ຢູ່ຕົວເມືອງທີ່ສອງລາວຂາຍດ້ວຍລາຄາ ($83-\frac{y}{20}$) ໂດລາຕໍ່ອັນ. ຕົ້ນທຶນໃນການຜະລິດສິນຄ້າດັ່ງກ່າວແມ່ນ: $3x+3y+20000$ ໂດລາ. ຈົ່ງຊອກຫາປະລິມານສິນຄ້າທີ່ຕ້ອງຂາຍໃນຕົວເມືອງທີ່ໜຶ່ງ ແລະ ຕົວເມືອງທີ່ສອງເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກຳໄລສູງສຸດ.

8. ຈົ່ງຊອກຄ່າໃຫຍ່ສຸດຂອງຕຳລາລຸ່ມນີ້:

a. $z=4x^2-2xy+6y^2$ ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $x+y=72$

b. $z=64x-2x^2+4xy-4y^2+32y-14$ ພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $x+y=79$

9. ສົມມຸດມີແບບຈຳລອງໃນການກຳນົດຫາລາຍຮັບຂອງສາມຂະແໜງການດັ່ງນີ້:

$Y=C+I+G$

$C=C_0+bYd$ $\quad Yd=Y-T$ $\quad T=T_0+tY$ $\quad G=G_0$ $\quad I=I_0$

Yd : ລາຍຮັບຫັກພາສີແລ້ວ T : ພາສີ

T_0: ອາກອນ t : ອັດຕາພາສີ

ຈົ່ງຊອກຕົວຄູນຂອງລາຍຮັບທີ່ກົງກັບ

a. ການໃຊ້ຈ່າຍພາກລັດ (G_0)

b. ອາກອນ (T_0)

c. ອັດຕາພາສີ (t)

10. ສົມມຸດມີແບບຈຳລອງໃນການກຳນົດຫາລາຍຮັບຂອງສາມຂະແໜງການດັ່ງນີ້:

$Y=C+I+G$

$C=C_0+bYd$ $\quad Yd=Y-T$ $\quad T=T_0+tY$ $\quad G=G_0$ $\quad I=I_0$

$C_0=100$ $\quad G_0=330$ $\quad I_0=90$ $\quad T_0=240$ $\quad$ b = 0.75 $\quad$ t = 0.20

a. ຈົ່ງຊອກຫາລາຍຮັບດຸ່ນດ່ຽງ ($\bar{Y}$)

b. ຊອກຫາຜົນກະທົບທີ່ມີຕໍ່ລາຍຮັບດຸ່ນດ່ຽງ $\bar{Y}$ ເມື່ອມີການຜັນປ່ຽນເພີ່ມຂຶ້ນເປັນຈຳນວນເງິນເທົ່າກັບ 50 ຫົວໜ່ວຍຢູ່ໃນ

- ການໃຊ້ຈ່າຍພາກລັດ
- ອາກອນ

11. ຈາກຂໍ້ 10 (a) ຖ້າມີການນໍາໃຊ້ແຮງງານຢ່າງເຕັມສ່ວນ(ບໍ່ມີການຫວ່າງງານ) ຈະເຮັດໃຫ້ລາຍຮັບເພີ່ມຂຶ້ນເປັນ 1000 . ຖ້າລັດຕ້ອງການແກ້ໄຂໄພຫວ່າງງານລັດຈະຕ້ອງຜັນປ່ຽນແນວໃດຢູ່ໃນ

- ການໃຊ້ຈ່າຍພາກລັດ
- ການເກັບອາກອນ

12. ວິສາຫະກິດໜຶ່ງຜະລິດ ແລະ ຈໍາໜ່າຍສິນຄ້າສອງຊະນິດຄື x ແລະ y ຊຶ່ງມີຕໍາລາກໍາໄລດັ່ງລຸ່ມນີ້: $® = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18$. ຈົ່ງຊອກຫາປະລິມານການຜະລິດ ແລະ ຈໍາໜ່າຍສິນຄ້າທັງສອງເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກໍາໄລສູງສຸດ ແລະ ຊອກກໍາໄລສູງສຸດດັ່ງກ່າວ ?

13. ວິສາຫະກິດໜຶ່ງຜະລິດ ແລະ ຈໍາໜ່າຍສິນຄ້າສອງຊະນິດຄື x ແລະ y ຊຶ່ງມີຕໍາລາຕົ້ນທຶນລວມດັ່ງນີ້: $CT = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30$ ແຕ່ວິສາຫະກິດຕ້ອງປະຕິບັດສັນຍາໃນການຜະລິດສິນຄ້າທັງສອງພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $x + y = 34$. ຖາມວ່າບໍລິສັດຄວນຜະລິດສິນຄ້າຊະນິດລະເທົ່າໃດເພື່ອໃຫ້ມີຕົ້ນທຶນຕໍ່າສຸດ ແລະ ປະເມີນຜົນກະທົບທີ່ມີຕໍ່ຕົ້ນທຶນລວມຖ້າຫລຸດການຜະລິດສິນຄ້າລົງ 1 ຫົວໜ່ວຍ?

14. ວິສາຫະກິດໜຶ່ງຜະລິດ ແລະ ຈໍາໜ່າຍສິນຄ້າສອງຊະນິດຄື x ແລະ y ຊຶ່ງມີຕໍາລາກໍາໄລດັ່ງລຸ່ມນີ້: $® = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$.

   a. ຈົ່ງຊອກຫາປະລິມານການຜະລິດ ແລະ ຈໍາໜ່າຍສິນຄ້າທັງສອງເພື່ອໃຫ້ໄດ້ກໍາໄລສູງສຸດພາຍໃຕ້ເງື່ອນໄຂ $x + y = 12$
   b. ປະເມີນຜົນກະທົບທີ່ມີຕໍ່ກໍາໄລຖ້າມີການເພີ່ມປະລິມານການຜະລິດສິນຄ້າຂຶ້ນຕື່ມ 1 ຫົວໜ່ວຍ?

ບົດທີ 8

ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດ

8.1 ນິຍາມ:

ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດແມ່ນສົມຜົນທີ່ມີຜົນຕຳລາ ແລະ ຕົວລັບແມ່ນຕຳລາ

ການແກ້ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດໃດໜຶ່ງໝາຍເຖິງການຊອກຫາຕຳລາທັງໝົດທີ່ຕອບສະໜອງສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດນັ້ນໆ ແລະ ໃຈຜົນຂອງສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດໜຶ່ງໆແມ່ນຕຳລາທີ່ຕອບສະໜອງສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດນັ້ນໆຊຶ່ງສາມາດແບ່ງໃຈຜົນຂອງສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດອອກເປັນສອງຊະນິດຄືໃຈຜົນລວມ ຫຼື ໃຈຜົນທົ່ວໄປ ແລະ ໃຈຜົນສະເພາະ

ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດແບ່ງອອກເປັນສອງຊະນິດຄືດັ່ງລຸ່ມນີ້:

- ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດທຳມະດາຊຶ່ງຕຳລາເປັນຕົວລັບແມ່ນຕຳລາ 1 ຕົວປ່ຽນ
- ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດພາກສ່ວນຊຶ່ງຕຳລາທີ່ເປັນຕົວລັບແມ່ນຕຳລາ 2 ຕົວປ່ຽນ

ຕົວຢ່າງ 1: 1) $\frac{dy}{dx} = 2x + 6$ ແມ່ນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດທຳມະດາຂັ້ນ 1

2) $(\frac{dy}{dx})^2 + y + 7 = 0$ ແມ່ນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດທຳມະດາຂັ້ນ 1

3) $\frac{d^2y}{dx^2} + y + = 0$ ແມ່ນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດທຳມະດາຂັ້ນ 2

4) $(y + x)dx + (x - 2)dy = 0$ ແມ່ນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດພາກສ່ວນຂັ້ນ 1

ຂັ້ນສູງສຸດຂອງຜົນຕຳລາໃນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດເອີ້ນວ່າຂັ້ນຂອງສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດ

8.2 ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດແຍກຕົວປ່ຽນໄດ້

ສົມຜົນໃນຮູບແບບ $g(y)y' = f(x)$ ຫຼື $g(y)dy = f(x)dx$ ເອີ້ນວ່າສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດແຍກຕົວປ່ຽນໄດ້

ເມື່ອຄິດໄລ່ສັງຄະນິດສຳລັບຕຳລາຢູ່ທັງສອງພາກຂອງສົມຜົນຂ້າງເທິງຈະໄດ້

$\int g(y)dy = c$; (c = const) ຊຶ່ງແມ່ນສູດເສັ້ນສັງຄະນິດແຍກຕົວປ່ຽນໄດ້

ຕົວຢ່າງ 2: ຊອກເສັ້ນສັງຄະນິດຂອງສົມຜົນ $9yy' + 4x = 0$

ສາມາດຂຽນສົມຜົນຂ້າງເທິງໃນຮູບແບບ $9ydy = -4xdx$ ເມື່ອຄິດໄລ່ສັງຄະນິດຕາມ x

ຈະໄດ້ $\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + c$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c$$

ເສັ້ນສັງຄະນິດຂອງສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາແມ່ນບັນດາເສັ້ນແອນລິບ

ຕົວຢ່າງ 3: ຊອກຫາໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນລຸ່ມນີ້:

$$x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dx = 0$$

$$\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0$$

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx + \int \frac{y}{y^2-1}dy = c_1$$

$$\ln\left|x^2-1\right| + \ln\left|y^2-1\right| = c_1$$

$$\ln\left|(x^2-1)(y^2-1)\right| = c_1$$

$$(x^2-1)(y^2-1) \quad = \quad e^{\ln C_1} = c$$

8.3 ສົມຜົນຈຸບລະຄະນິດລີເນແອ

ສົມຜົນ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ ເອີ້ນວ່າສົມຜົນລີເນແອສໍາລັບສົມຜົນຈຸບລະຄະນິດຂັ້ນ 1

ກໍລະນີ $f(x) = 0$ ສາມາດຊອກໃຈຜົນຂອງສົມຜົນລີເນແອໄດ້ດັ່ງນີ້

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\ln y = -\int P(x)dx + c$$

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx}$$

ຕົວຢ່າງ 4: ຊອກຫາໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນລຸ່ມນີ້

$$\frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

$$y(x) = Ce^{-\int 4dx}$$

$$y(x) = Ce^{-4x}$$

ກໍລະນີ $f(x) \neq 0$ ສາມາດຊອກໃຈຜົນຂອງສົມຜົນລີເນແອໄດ້ດັ່ງນີ້

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

ຄິດໄລ່ຜົນຕໍາລາທັງສອງພາກຈະໄດ້

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

ເມື່ອແທນຄ່າ y ແລະ y' ໃສ່ສົມຜົນລີເນແອຂ້າງເທິງຈະໄດ້

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = f(x)$$

$$C'(x) = f(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$C(x)=\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx+c$$

ດັ່ງນັ້ນ $y(x)=[\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx+c]e^{-\int P(x)dx}$ ແມ່ນໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນ $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$

ຕົວຢ່າງ 5: ຊອກຫາໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນລຸ່ມນີ້

$$\frac{dy}{dx}+3x^2y=x^2$$

$$y(x)=[\int x^2e^{\int 3x^2dx}dx+c]e^{-\int 3x^2dx}$$

$$y(x)=[\int x^2e^{x^3}dx+c]e^{-x^3}$$

$$y(x)=[\int e^{x^3}d(x^3)+c]e^{-x^3}$$

$$y(x)=\frac{1}{3}(e^{x^3}+c)e^{-x^3}$$

$$y(x)=\frac{1}{3}+ce^{-x^3}$$

ຕົວຢ່າງ 6: ຊອກຫາໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນລຸ່ມນີ້

$$\frac{dy}{dx}-y=e^x$$

$$y(x)=[\int e^xe^{-\int dx}dx+c]e^{\int dx}$$

$$y(x)=[\int e^xe^{-x}dx+c]e^x$$

$$y(x)=[\int dx+c]e^x$$

$$y(x) = (x+c)e^x$$

8.4 ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນ

ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນແມ່ນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດທີ່ມີຮູບຮ່າງ $M(x,y)dy+N(x,y)dx=0$ ໃນນັ້ນ $M(x,y)dy+N(x,y)dx=0$ ຕ້ອງແມ່ນຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນຂອງຕຳລາ F(x,y) ໃດໜຶ່ງ. ໝາຍຄວາມວ່າ $\frac{\partial F}{\partial y}=M$; $\frac{\partial F}{\partial x}=N$

ແລະ $dF(x,y)=Mdy+Ndx$ ເງື່ອນໄຂຈຳເປັນ ແລະ ພຽງພໍເພື່ອໃຫ້ $M(x,y)dy+N(x,y)dx=0$ ເປັນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດພາກສ່ວນແມ່ນ: $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}$

ຕົວຢ່າງ 7: ຊອກຫາໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນລຸ່ມນີ້

$$(y+3)dx+(x-2)dy=0$$

ຈາກສົມຜົນຂ້າງເທິງເຮົາມີ

M = $x-2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial M}{\partial x}=1$

N = $y+3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial N}{\partial y}=1$

ສະນັ້ນສົມຜົນຂ້າງເທິງແມ່ນສົມຜົນຈຸລະຄະນິດເຕັມສ່ວນ.

ຈາກ $\dfrac{\partial F}{\partial y}=M=x-2 \Rightarrow F\left(x,y\right)=\int(x-2)dy+z\left(x\right)$

$F\left(x,y\right)=(x-2)y+z\left(x\right)$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+z^{'}\left(x\right)=N=y+3 \Rightarrow z^{'}\left(x\right)=3$

ຈະໄດ້ $z\left(x\right)$ = $\int 3dx$ = $3x$ + c

ດັ່ງນັ້ນ $\mathrm{F}\left(x,y\right)=(x-2)y+3x+c$ ແມ່ນໃຈຜົນທົ່ວໄປ

ຕົວຢ່າງ 8: ຊອກຫາໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນລຸ່ມນີ້

$$(6xy+9y^2)dy+(3y^2+8x)dx=0$$

ຈາກສົມຜົນຂ້າງເທິງເຮົາມີ

M = $6xy+9y^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial M}{\partial x}=6y$

N = $3y^2+8x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial N}{\partial y}=6y$

ສະນັ້ນສົມຜົນຂ້າງເທິງແມ່ນສົມຜົນຈຸລະຄະນິດເຕັມສ່ວນ.

ຈາກ $\dfrac{\partial F}{\partial y}=M=6xy+9y^2 \Rightarrow F\left(x,y\right)=\int(6xy+9y^2)dy+z\left(x\right)$

$\mathrm{F}\left(x,y\right)=3xy^2+3y^3+z\left(x\right)$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=3y^2+z^{'}\left(x\right)=N=3y^2+8x \Rightarrow z^{'}\left(x\right)=8x$

ຈະໄດ້ $z\left(x\right)$ = $\int 8xdx$ = $4x^2$ + c

ດັ່ງນັ້ນ $\mathrm{F}\left(x,y\right)=3xy^2+3y^3+4x^2+c$ ແມ່ນໃຈຜົນທົ່ວໄປ

8.5 ຕົວຄູນສັງຄະນິດ

ກໍລະນີ $M(x,y)dy+N(x,y)dx=0$ ບໍ່ແມ່ນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນໝາຍຄວາມວ່າ $\dfrac{\partial M}{\partial x} \neq \dfrac{\partial N}{\partial y}$ ແຕ່ຖ້າຫາກສາມາດຊອກຕຳລາ $«(x,y)$ ທີ່ເຮັດໃຫ້ສົມຜົນ

$«(x,y)M(x,y)dy+«(x,y)N(x,y)dx=0$ ກາຍເປັນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນເວລານັ້ນເພິ່ນເອີ້ນ $«(x,y)$ ວ່າຕົວຄູນສັງຄະນິດ.

ໃນການຊອກຫາຕົວຄູນສັງຄະນິດຈະອີງໃສ່ສອງຫຼັກການດັ່ງລຸ່ມນີ້

- **ຫຼັກການທີ1** ຖ້າວ່າ $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y})=f(y)$ ເປັນຕຳລາທີ່ມີຕົວປ່ຽນ y ພຽງຕົວດຽວ

ເວລານັ້ນຈະໄດ້ « $=e^{\int f(y)dy}$ ແມ່ນຕົວຄູນສັງຄະນິດ

- **ຫຼັກການທີ2** ຖ້າວ່າ $\frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x})=g(x)$ ເປັນຕຳລາທີ່ມີຕົວປ່ຽນ x ພຽງຕົວດຽວ

ເວລານັ້ນຈະໄດ້ « $=e^{\int g(x)dx}$ ແມ່ນຕົວຄູນສັງຄະນິດ

ຕົວຢ່າງ 9: ຈົ່ງຊອກໃຈຜົນສົມຜົນຈຸບລະຄະນິດຕໍ່ໄປນີ້: $5xydy+(5y^2+8x)dx=0$

ຈາກສົມຜົນຂ້າງເທິງເຮົາມີ

M = $5xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial x}=5y$

N = $5y^2+8x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial y}=10y$

$\frac{\partial M}{\partial x}\neq\frac{\partial N}{\partial y}$ ສະນັ້ນສົມຜົນຂ້າງເທິງບໍ່ແມ່ນສົມຜົນຈຸລະຄະນິດເຕັມສ່ວນ.

- ໝູນໃຊ້ **ຫຼັກການທີ1** $\frac{1}{5y^2+8x}(5y-10y)=-\frac{5y}{5y^2+8x}$ ບໍ່ແມ່ນຕຳລາຕາມຕົວປ່ຽນ

y ພຽງຕົວດຽວ, ສະນັ້ນພວກເຮົາບໍ່ສາມາດກຳນົດຕົວຄູນສັງຄະນິດຈາກຫຼັກເກນນີ້ໄດ້.

- ໝູນໃຊ້ **ຫຼັກການທີ2** $\frac{1}{5xy}(10y-5y)=-\frac{5y}{5xy}=\frac{1}{x}$ ແມ່ນຕຳລາທີ່ຂື້ນກັບ x ພຽງຕົວ

ດຽວ, ສະນັ້ນ « $=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$ ຈະແມ່ນຕົວຄູນສັງຄະນິດ ແລະ ສົມຜົນ

$5x^2ydy+x(5y^2+8x)dx=0$ ຈະແມ່ນສົມຜົນຈຸບລະຄະນິດເຕັມສ່ວນ

ຈາກສົມຜົນຂ້າງເທິງເຮົາມີ

M = $5x^2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial x}=10xy$

N = $x(5y^2+8x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial y}=10xy$

ສະນັ້ນສົມຜົນຂ້າງເທິງແມ່ນສົມຜົນຈຸລະຄະນິດເຕັມສ່ວນ.

ຈາກ $\frac{\partial F}{\partial y}=M=5x^2y\Rightarrow F(x,y)=\int 5x^2ydy+z(x)$

$F(x,y)=\frac{5}{2}x^2y^2+z(x)$

$\frac{\partial F}{\partial x}=5xy^2+z'(x)=N=5xy^2+8x^2\Rightarrow z'(x)=8x^2$

ຈະໄດ້ $z(x) = \int 8x^2dx = \frac{8}{3}x^3 + c$

ດັ່ງນັ້ນ $F(x,y)=\frac{5}{2}x^2y^2+\frac{8}{3}x^3+c$ ແມ່ນໃຈຜົນທົ່ວໄປ

8.6 ສົມຜົນແບກນູລີ (Bernoulli equation)

ສົມຜົນແບກນູລີ ແມ່ນສົມຜົນທີ່ມີຮູບຮ່າງ $\frac{\partial y}{\partial x}+P(x)y=Q(x)y^n$ ໃນນີ້ສົມມຸດວ່າ $n\neq 0; n\neq 1$ ໃນການແກ້ສົມຜົນແບກນູລີຈະຕ້ອງໄດ້ຜັນປ່ຽນໃຫ້ເປັນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດລີເນແອໂດຍໃຊ້ຕົວປ່ຽນໃໝ່ຄືດັ່ງຕໍ່ໄປນີ້:

- ວາງ $z=y^{1-n}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$
- ຜັນປ່ຽນສົມຜົນ $\frac{\partial y}{\partial x}+P(x)y=Q(x)y^n$ ໃຫ້ເປັນ $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$
- ແທນ $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{n-1}\frac{dy}{dx}$ ໃສ່ສົມຜົນຂ້າງເທິງຈະໄດ້ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດລີເນແອທີ່ມີຕົວ

ປ່ຽນ z ແລະ x ຄືດັ່ງຕໍ່ໄປນີ້:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

ຫຼື $$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

ຕົວຢ່າງ10: ຈົ່ງຊອກຫາໃຈຜົນຂອງສົມຜົນແບກນູລີ $\frac{dy}{dx}-y=xy^2$

ຈາກສົມຜົນຂ້າງເທິງເຫັນວ່າ n = 2 ສະນັ້ນເຮົາສາມາດປ່ຽນໃຫ້ສົມຜົນກາຍເປັນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດລີເນແອຄືດັ່ງນີ້

$$\frac{dz}{dx}+z=-x$$

ໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນດັ່ງກ່າວແມ່ນ

$$z(x)=(\int -xe^{\int xdx}dx+c)e^{-\int xdx})$$

$$z(x)=(\int -xe^{x}dx+c)e^{-x}$$

$$z(x)=(-xe^x+e^x+c)e^{-x}=-x+1+e^{-x}$$

ແທນ $z=y^{-1}$ ໃສ່ສົມຜົນສຸດທ້າຍຈະໄດ້ໃຈຜົນທົ່ວໄຂອງສົມຜົນແບກນູລີທີ່ໃຫ້ດັ່ງນີ້:

$$y(x)=(-x+1+ce^{-x})=\frac{1}{-x+1+ce^{-x}}$$

8.7 ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດຂັ້ນສອງ

ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດຂັ້ນສອງແມ່ນສົມຜົນທີ່ມີຮູບຮ່າງ

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=r(x) \qquad (1)$$

ໃນນັ້ນ $p(x); q(x); f(x)$ ແມ່ນຕຳລາທີ່ໃຫ້ກອ່ນ, ຖ້າວ່າ p, q ແລະ r ແມ່ນຈຳນວນຄົງຄ່າເພິ່ນເອີ້ນສົມຜົນ (1) ວ່າສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດຂັ້ນສອງທີ່ມີສຳປະສິດຄົງຄ່າ.

ໃນກໍລະນີ $r(x)=0$ ເພິ່ນເອີ້ນສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດລີເນແອເອກະພັນສຳລັບສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດຂັ້ນສອງ.

ຕໍ່ໄປນີ້ພວກເຮົາຈະສຶກສາການແກ້ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດລີເນແອເອກະພັນ.

ໃຫ້ສອງຕຳລາ $f(x)$ ແລະ $g(x)$ ທີ່ເປັນຕຳລາຕໍ່ເນື່ອງ, ຖ້າບໍ່ມີຈຳນວນຄົງຄ່າ k ໃດໆຕ່າງ 0 ທີ່ເຮັດໃຫ້ຕອບສະໜອງເງື່ອນໄຂ $f(x)$ = k$g(x)$ ເພິ່ນເວົ້າວ່າສອງຕຳລານີ້ເປັນເອກະລາດຕໍ່ກັນ

ຕົວຢ່າງ 11: ໃຫ້ສອງຕຳລາ $f(x)=$ x ແລະ $g(x)=$ x^2 ເຮົາສັງເກດເຫັນວ່າບໍ່ມີຈຳນວນຄົງຄ່າ $k\neq 0$ ໃດໆທີ່ເຮັດໃຫ້ຕອບສະໜອງ ເງື່ອນໄຂ $f(x)$ = k$g(x)$ ສະແດງວ່າສອງຕຳລາດັ່ງກ່າວເປັນເອກະລາດຕໍ່ກັນ.

ຫຼັກເກນ. ຖ້າວ່າ $y_1(x)$ ແລະ $y_2(x)$ ແມ່ນສອງໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \tag{2}$$

ທີ່ເປັນເອກະລາດຕໍ່ກັນ. ໃນກໍລະນີນີ້ເຮົາຈະໄດ້ໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ (2) ແມ່ນ

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

ໃນນັ້ນ c_1 ແລະ c_2 ແມ່ນຈຳນວນຄົງຄ່າ. ໃນນີ້ $y_1(x)$ ແລະ $y_2(x)$ ເອີ້ນວ່າໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນ (2).

ໃນກໍລະນີ p ແລະ q ແມ່ນຈຳນວນຄົງຄ່າສາມາດຊອກໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນ (2) ໃນຮູບແບບ

$$y=e^{mx} \tag{3}$$

ເມື່ອເອົາສົມຜົນ (3) ແທນໃສ່ສົມຜົນ (2) ຈະໄດ້

$$(m^2+pm+q)e^{mx}=0$$

$$m^2+pm+q=0 \tag{4}$$

ສົມຜົນ (4) ເອີ້ນວ່າສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນສຳລັບສົມຜົນ (2)

• ກໍລະນີ m_1 ແລະ m_2 ແມ່ນສອງຈຳນວນຈິງຕ່າງກັນທີ່ເປັນໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ (4) ຈະໄດ້

$y_1(x)$ = e^{m_1x} ແລະ $y_2(x)$ = e^{m_2x} ແມ່ນສອງໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນ (2)

• ກໍລະນີ m_1 = m_2 = m ແມ່ນໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ (4) ຈະໄດ້

$y_1(x)$ = e^{mx} ແລະ $y_2(x)$ = xe^{mx} ແມ່ນສອງໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນ (2)

• ກໍລະນີ $m_1=a+bi$ ແລະ $m_2=a-bi$ ແມ່ນສອງຈຳນວນສົນຕ່າງກັນທີ່ເປັນໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ (4) ຈະໄດ້

$y_1(x)$ = $e^{ax}\cos bx$ ແລະ $y_2(x)$ = $e^{ax}\sin bx$ ແມ່ນສອງໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນ (2)

ຕົວຢ່າງ 12: ຈົ່ງຊອກໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

ເຮົາມີສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນແມ່ນ: $m^2 - 5m + 4 = 0$

ຊຶ່ງມີໃຈຜົນຂອງສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນແມ່ນ $m_1 = 1$ ແລະ $m_2 = 4$

ດັ່ງນັ້ນຈະໄດ້ໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາແມ່ນ $y_1(x)$ = e^x ແລະ $y_2(x)$ = e^{4x}

ແລະ ໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນຂ້າງເທິງແມ່ນ $y = c_1e^x + c_2e^{4x}$

ຕົວຢ່າງ 13: ຈົ່ງຊອກໃຈຜົນສະເພາະຂອງສົມຜົນ $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, y(0) = 1 ແລະ $y'(0) = 0$

ເຮົາມີສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນແມ່ນ: $m^2 - 1 = 0$

ຊຶ່ງມີໃຈຜົນຂອງສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນແມ່ນ $m_1 = 1$ ແລະ $m_2 = -1$

ດັ່ງນັ້ນຈະໄດ້ໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາແມ່ນ $y_1(x)$ = e^x ແລະ $y_2(x)$ = e^{-x}

ແລະ ໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນຂ້າງເທິງແມ່ນ $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$

ຈາກເງື່ອນໄຂ $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$

$Y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ ແມ່ນໃຈຜົນສະເພາະຂອງສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາ

ຕົວຢ່າງ 14: ຊອກໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນ $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

ເຮົາມີສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນແມ່ນ: $m^2 - 4m + 4 = 0$

ຊຶ່ງມີໃຈຜົນແມ່ນ $m_1 = m_2 = 2$ ດັ່ງນັ້ນຈະໄດ້ໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາແມ່ນ

$y_1(x)$ = e^{2x} ແລະ $y_2(x)$ = xe^{2x}

ແລະ ໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນຂ້າງເທິງແມ່ນ $y = e^{2x}(c_1 + c_2x)$

ຕົວຢ່າງ 15: ຈົ່ງຊອກໃຈຜົນສະເພາະຂອງສົມຜົນ

$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$, y(0) = 2 ແລະ $y'(0) = 1$

ເຮົາມີສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນແມ່ນ: $m^2 - 6m + 9 = 0 = 0$

ຊຶ່ງມີໃຈຜົນຂອງສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນແມ່ນ $m_1 = m_2 = 3$

ດັ່ງນັ້ນຈະໄດ້ໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາແມ່ນ $y_1(x)$ = e^{3x} ແລະ $y_2(x)$ = xe^{3x}

ແລະ ໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນຂ້າງເທິງແມ່ນ $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$

ຈາກເງື່ອນໄຂ $y(0) = 2 \Rightarrow c_1e^0 + c_2 0\, e^0 = 2 \Rightarrow c_1 = 2$

$y'(x) = 3c_1e^{3x} + c_2e^{3x} + 3c_2\,xe^{3x}$

$y'(0) = 3c_1e^0 + c_2e^0 + 3c_2 0e^0 = 1 \Rightarrow c_2 = -6$

$y = 2e^{3x} - 6xe^{3x}$ ແມ່ນໃຈຜົນສະເພາະຂອງສົມຜົນທີ່ໃຫ້ມາ

ຕົວຢ່າງ 15: ຊອກໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$

ເຮົາມີສົມຜົນທີ່ບອກລັກສະນະໃຈຜົນແມ່ນ: $m^2 + m + 1 = 0$

ຊຶ່ງມີໃຈຜົນແມ່ນ $m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ແລະ $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ດັ່ງນັ້ນຈະໄດ້ໃຈຜົນພື້ນຖານຂອງສົມຜົນ

ທີ່ໃຫ້ມາແມ່ນ $y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ແລະ $y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

ແລະ ໃຈຜົນທົ່ວໄປຂອງສົມຜົນຂ້າງເທິງແມ່ນ $y = e^{-\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

ບົດຝຶກຫັດ

1. ຈົ່ງແກ້ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດແຍກຕົວປ່ຽນໄດ້ດັ່ງຕໍ່ໄປນີ້:

a. $y^2dx + 2xydy = 0$

b. $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0 \;\;;\;\; y(1) = 1$

c. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \;\;;\;\; y(2) = 0$

2. ຈົ່ງແກ້ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດລີເນແອດັ່ງຕໍ່ໄປນີ້:

a. $\dfrac{dy}{dx} + y = (x+1)^2; y(0) = 0$

b. $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = e^{x^2}$

c. $\dfrac{dy}{dx} + 4xy = 6x$

d. $\dfrac{dy}{dx} - (1 + \dfrac{3}{x})y = x + 2$

3. ຈົ່ງແກ້ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດເຕັມສ່ວນດັ່ງຕໍ່ໄປນີ້:

a. $(4y + 8x^2)dy + (16xy - 3)dx = 0$

b. $(12y + 7x + 6)dy + (7y + 4x - 9)dx = 0$

c. $(12y^2x^2 + 10y)dy + (8xy^3)dx = 0$

d. $2x^3(y-1)dy + 3x^2(y-1)^2dx = 0$

e. $8xy\dfrac{dy}{dx} = -3x^2 - 4y^2$

f. $60xy^2\dfrac{dy}{dx} = -12x^3 - 20y^3$

4. ຈົ່ງແກ້ສົມຜົນຈຸນລະຄະນິດຂັ້ນສອງຕໍ່ໄປນີ້:

a. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

b. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$, y(0) = 1 ແລະ y'(0) = 5

c. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

d. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

e. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

f. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

g. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$, y(0) = -3 ແລະ y'(0) = 0