21.11.25 ГРАФЫ I.

"ГРАФЫ – ЭТО ОБЪЕКТЫ И СВЯЗИ"

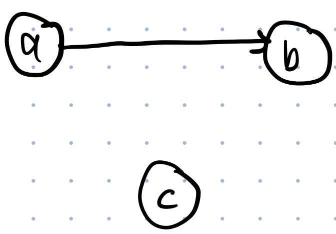
Дж. Стетхем

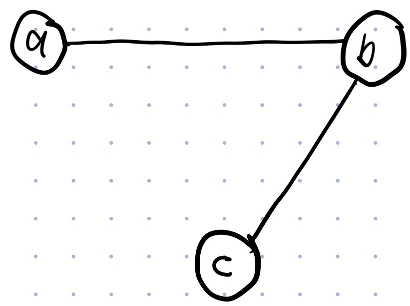
ГРАФ $G(V, E)$

ВЕРШИНЫ (vertices) РЁБРА (edges)

КАКИЕ БЫВАЮТ ГРАФЫ?

1) ОРИЕНТИРОВАННЫЕ И НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ

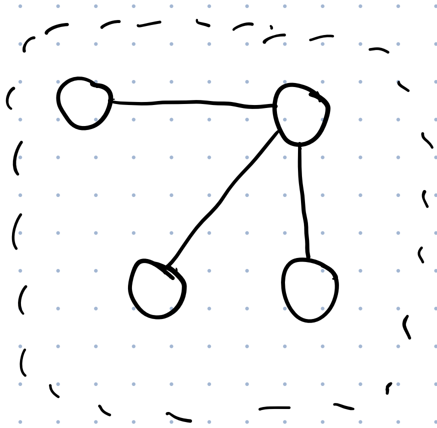


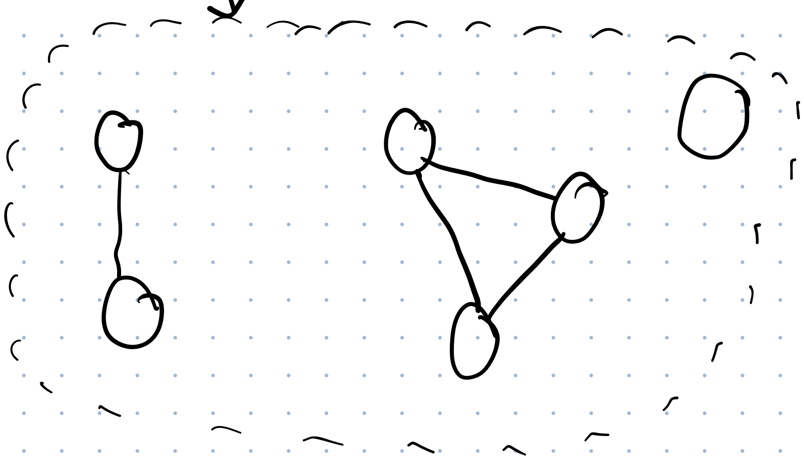


$\exists e_{ab}$; $\nexists e_{ba}$

УПОРЯДОЧЕННАЯ ПАРА

2) СВЯЗНЫЕ И НЕСВЯЗНЫЕ





ВСЕ ВЕРШ. ДОСТИЖИМЫ ДРУГ ИЗ ДРУГА

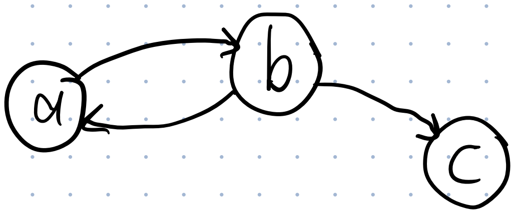
def. ПУТЬ ИЗ ВЕРШ. a В ВЕРШ. b В ГРАФЕ G:

ПОСЛ-ТЬ $[\underset{V_1}{\underset{\parallel}{a}}, V_2, V_3, \ldots, V_{n-1}, \underset{V_n}{\underset{\parallel}{b}}]$

$e_{v_i v_{i+1}} \in E$; $i \in [1, n-1]$; n – ЧИСЛО ВЕРШ. НА ПУТИ

МОЖНО ИЗМЕРЯТЬ ДЛИНЫ ПУТЕЙ В ЧИСЛЕ РЁБЕР

ОР. ГРАФ:

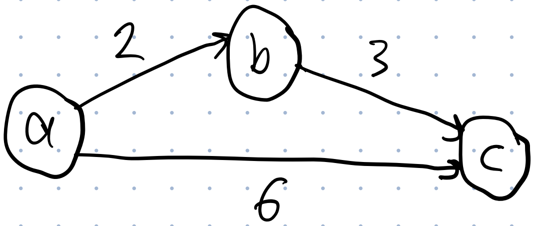


$\exists$ ПУТЬ ИЗ a В c

$\nexists$ ПУТЬ ИЗ c В a

3) ВЗВЕШЕННЫЕ (weighted)

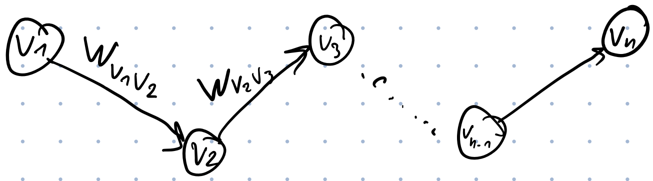
W_e ; W_{ab}



ИСПОЛЬЗ. ДЛЯ ЗАДАЧ, ТРЕБ. НЕ ТОЛЬКО ДОСТИЖИМОСТИ, НО И ОПТИМАЛЬНОСТИ

САМЫЙ ЧАСТО ВСТР. СЛУЧ. – ОПТ. ПО "ВЕСУ" ПУТИ, Т. Е.

$$W_{\text{путь}} = \sum_{i=1} W_{v_i v_{i+1}}$$

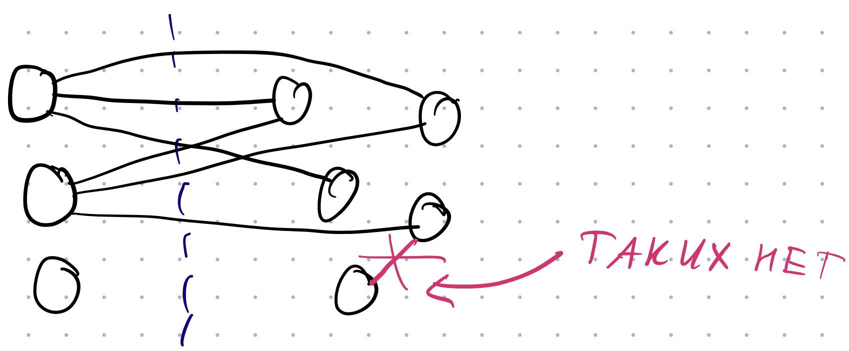


ЗАДАЧА Single Source Shortest Path:

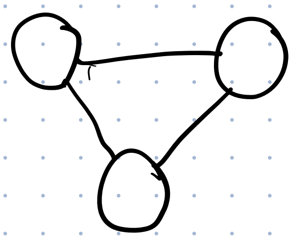
ДАН ГРАФ $G(V, E)$ И ВЕРШ. $s, t \in V$

НАЙТИ КР. ПУТЬ ИЗ s В t.

4) ДВУДОЛЬНЫЕ



НЕ ДВУД. ГРАФ:



ГРАФ $G(V,E)$ т.ч. $\exists\ V_1, V_2 \subset V,\ V_1 \neq V_2,$

ВЕРШИНЫ

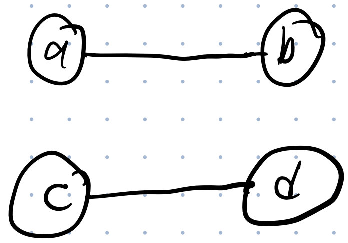
$\forall\ v', v'' \in V_1 \qquad e_{v'v''} \notin E$

$\forall\ v' \ldots\ldots \in V/V_1 \ \ldots\ldots$

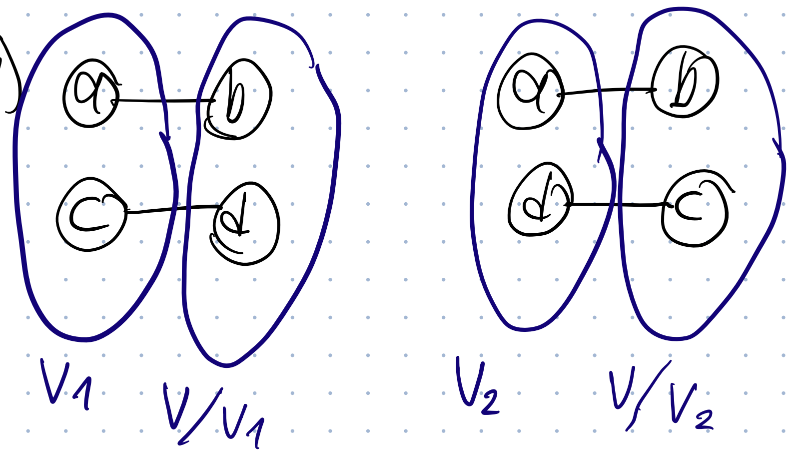
$\ldots\ldots \in V_2 \ \ldots\ldots$

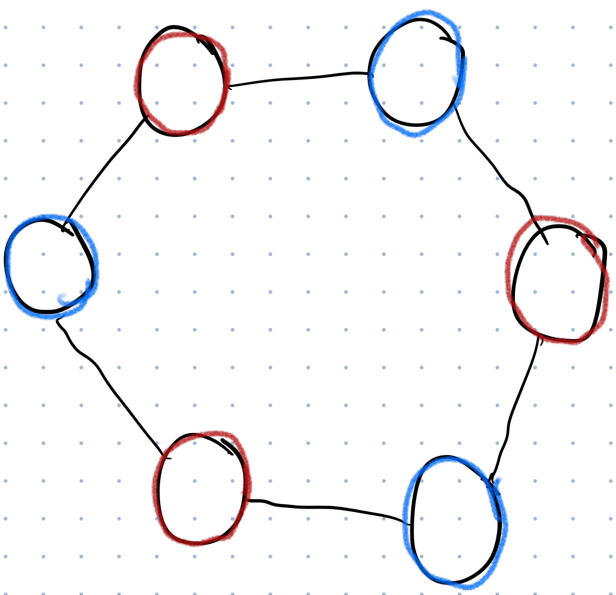
$\ldots\ldots \in V/V_2 \ \ldots\ldots$

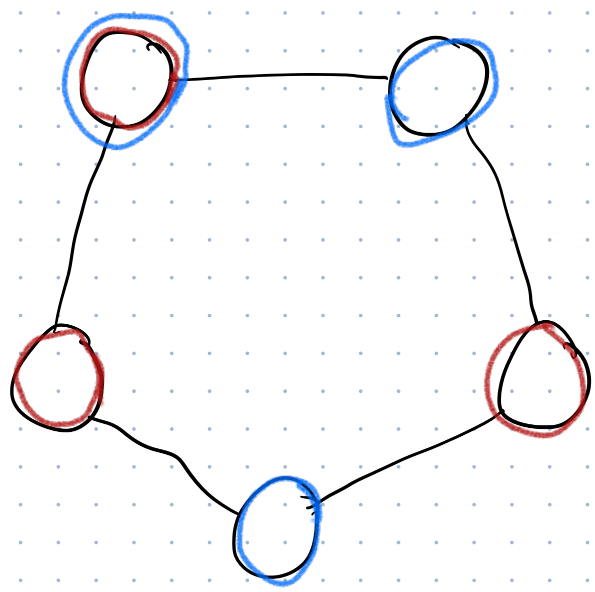
ПРИМЕР:



1)



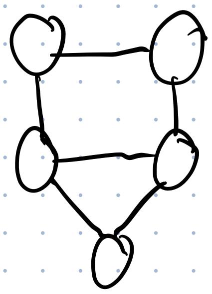




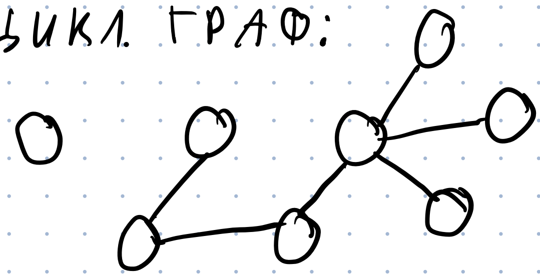
ПОЧЕМУ ВСЯКИЙ НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ АЦИКЛ. ГРАФ ДВУДОЛЕН?

АЦИКЛ. ГРАФ – ЭТО ГР., В КОТ. ∄ НЕСАМОПЕРЕС. ПУТЕЙ ИЗ ВЕРШ. В СЕБЯ

ЦИКЛ. ГРАФ:



АЦИКЛ. ГРАФ:



→ ПОКАЖЕМ, ЧТО ЭТО ТАК. ПУСТЬ G – НЕОР. АЦ. ГР.

(НЕФОРМ.) АЛГОРИТМ

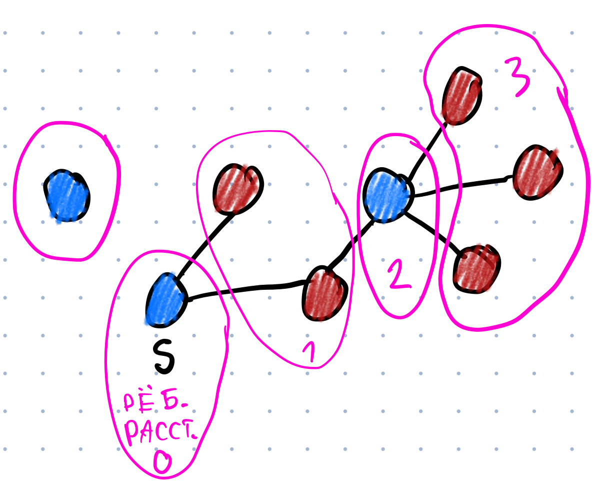
1. ПРОИЗВ. ВЕРШ. В 1 ДОЛЮ
2. ВЕРШ. НА РЁБ. РАССТ. 1 ОТ ВЕРШ. С ШАГА 1 ВО 2 ДОЛЮ
3. ВЕРШ. НА Р. РАССТ. ОТ ВЕРШ. С Ш. 2 В 1 ДОЛЮ

.....

.....

.....

В 1 ДОЛЕ ВЕРШ. С РЁБ. РАССТ. 0 ОТ S, 2 ОТ S, 4, ...
ВО 2 ДОЛЕ .... 1, 3, 5, ...

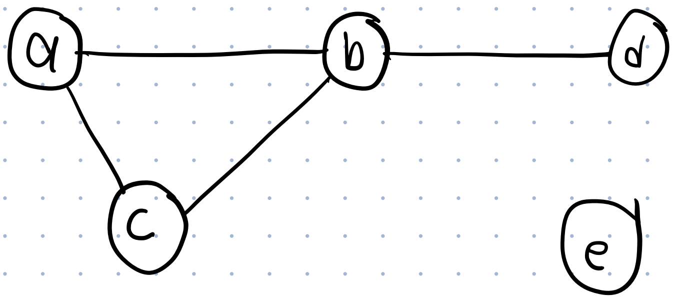


КАК ЗАДАТЬ ГРАФ НА КОМПЬЮТЕРЕ?

ВАРИАНТ 1: СПИСОК ВЕРШ., СПИСОК РЁБЕР

ПАМЯТЬ: $\Theta(|V|+|E|)$

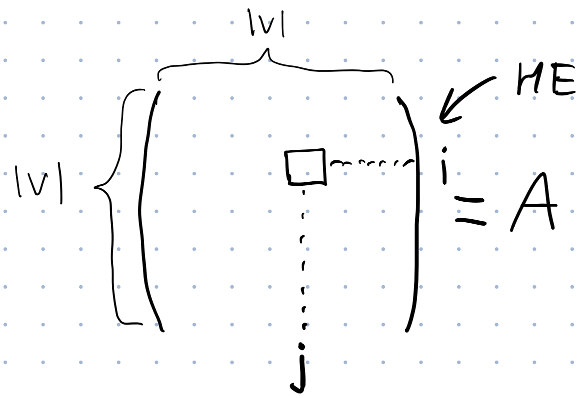
МЕДЛЕННАЯ ПРОВЕРКА СУЩ. РЕБРА МЕЖДУ ВЕРШ.: $O(|E|)$



ВЕРШИНЫ: [a, b, c, d, e]

РЁБРА: [ab, bc, ac, bd]

ВАРИАНТ 2: МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ

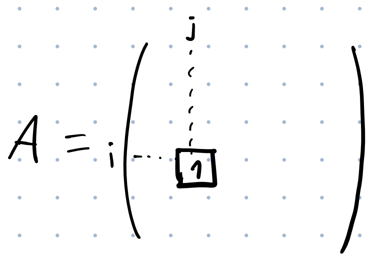


НЕОР. ГРАФ => СИММ. МАТРИЦА

($\exists e_{ab} \Leftrightarrow \exists e_{ba}$

$A[i,j]=1 \Leftrightarrow \exists$ РЕБРО МЕЖДУ i-Й И j-Й ВЕРШ.

А В ОРИЕНТ. СЛУЧАЕ?



$A[i,j]=1 \Leftrightarrow \exists e_{v_i v_j} \not\Leftrightarrow \exists e_{v_j v_i}$

ЗАТРАТЫ ПО ПАМЯТИ $O(|V|^2)$

ЗАТО ПРОВЕРКА $\exists\ e_{v_1 v_2}$ ЗА $O(1)$

ВАРИАНТ 3: СПИСКИ СМЕЖНОСТИ

СПИС. ВЕРШ.

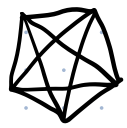
ДЛЯ КАЖД. ВЕРШ.

СПИСОК СОСЕДЕЙ

$n[v] = [v_{k_1}, v_{k_2}, \dots]$

def. ПОЛНЫЙ ГРАФ (КЛИКА) – ЭТО ГРАФ, В КОТ.

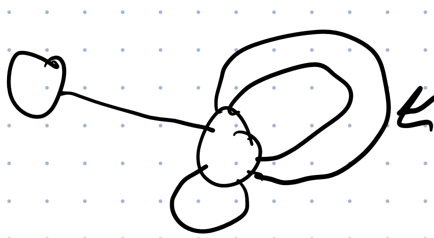
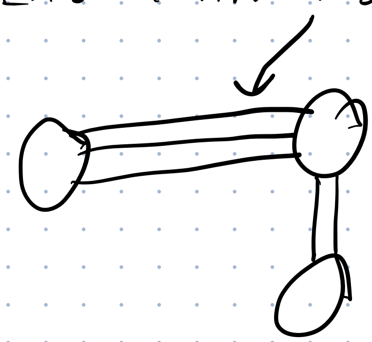
$\forall a \neq b \in V \quad \exists\ e_{ab} \in E$

K_n ; $K_5 =$ 

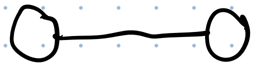
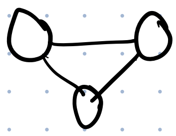
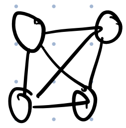
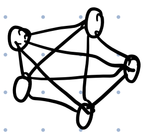
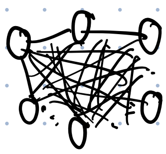
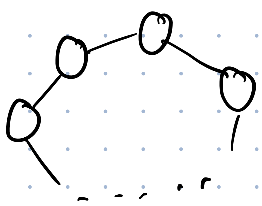
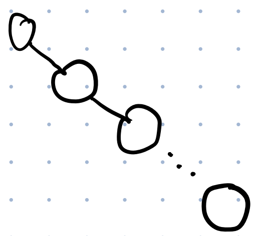
def. ПЛОТНЫЙ ГРАФ: $|E| = \Theta(|V|^2)$

РАЗРЕЖ. ГРАФ: $|E| = \Theta(|V|)$

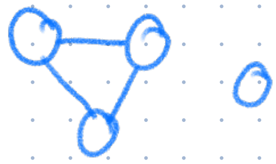
В РАМКАХ КУРСА ГРАФЫ БЕЗ ПЕТЕЛЬ И КР. РЁБЕР

ПОГОВОРИМ ПРО КЛИКИ (И НЕ ТОЛЬКО)

НАЗВАНИЕ	ГРАФ	#ВЕРШ.	#РЁБ.
K_1		1	0
K_2		2	1
K_3		3	3
K_4		4	6
K_5		5	10
K_n		n	$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{2\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)} = \frac{n(n-1)}{2}$
ГРАФ-КОЛЬЦО C_n		n	n
ГРАФ-ПУТЬ (БАМБУК) P_n		n	$n-1$

УТВ. ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ГР. НА n ВЕРШ. БЫЛ СВЯЗНЫМ, НЕОБХ. $n-1$ РЕБРО

НО НЕ ДОСТ.:  4 ВЕРШ., $4-1=3$ РЕБРА СВЯЗН. НЕТ

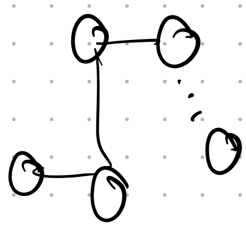
ДОКАЖЕМ ЭТО УТВ.

ДЛЯ ГР. НА 1 ВЕРШ. НЕОБХ. min 0 РЁБЕР

ДОКАЖЕМ ШАГ ИНД.:

"ДЛЯ ГР. НА n ВЕРШ. НЕОБХ. $n-1$ РЕБРО ДЛЯ ОБЕСП. СВ." $\Rightarrow$ "ДЛЯ ГР. НА $n+1$ ВЕРШ. НЕОБХ. n РЕБЕР ДЛЯ ОБЕСП. СВ."

G (НА n ВЕРШ.)



СВ.; $n-1$ РЕБРО