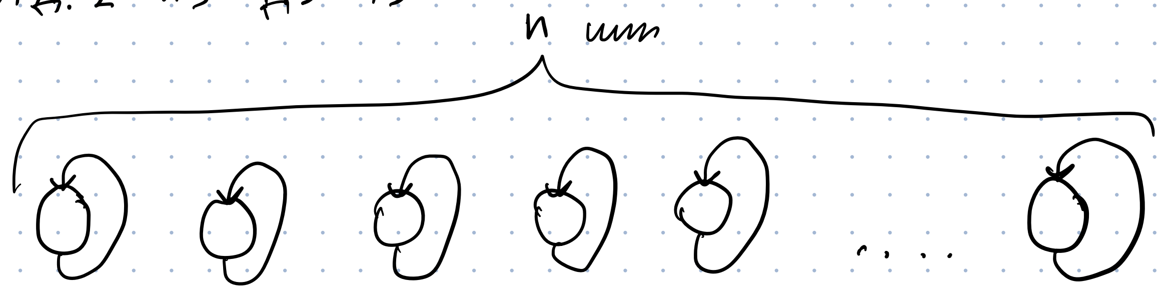
26.12.25

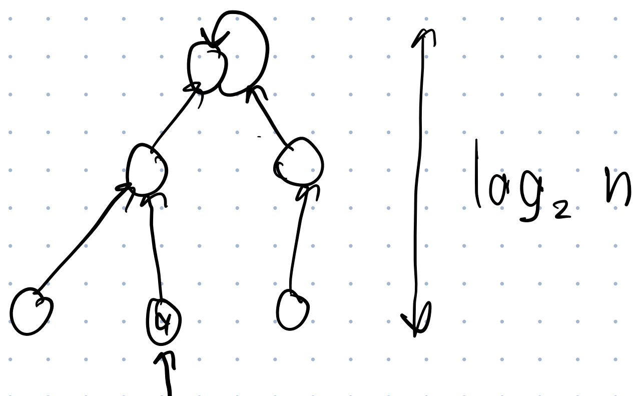
ЗАД. 2 ИЗ ДЗ 13



$m > 2n$

m ОПЕРАЦИЙ

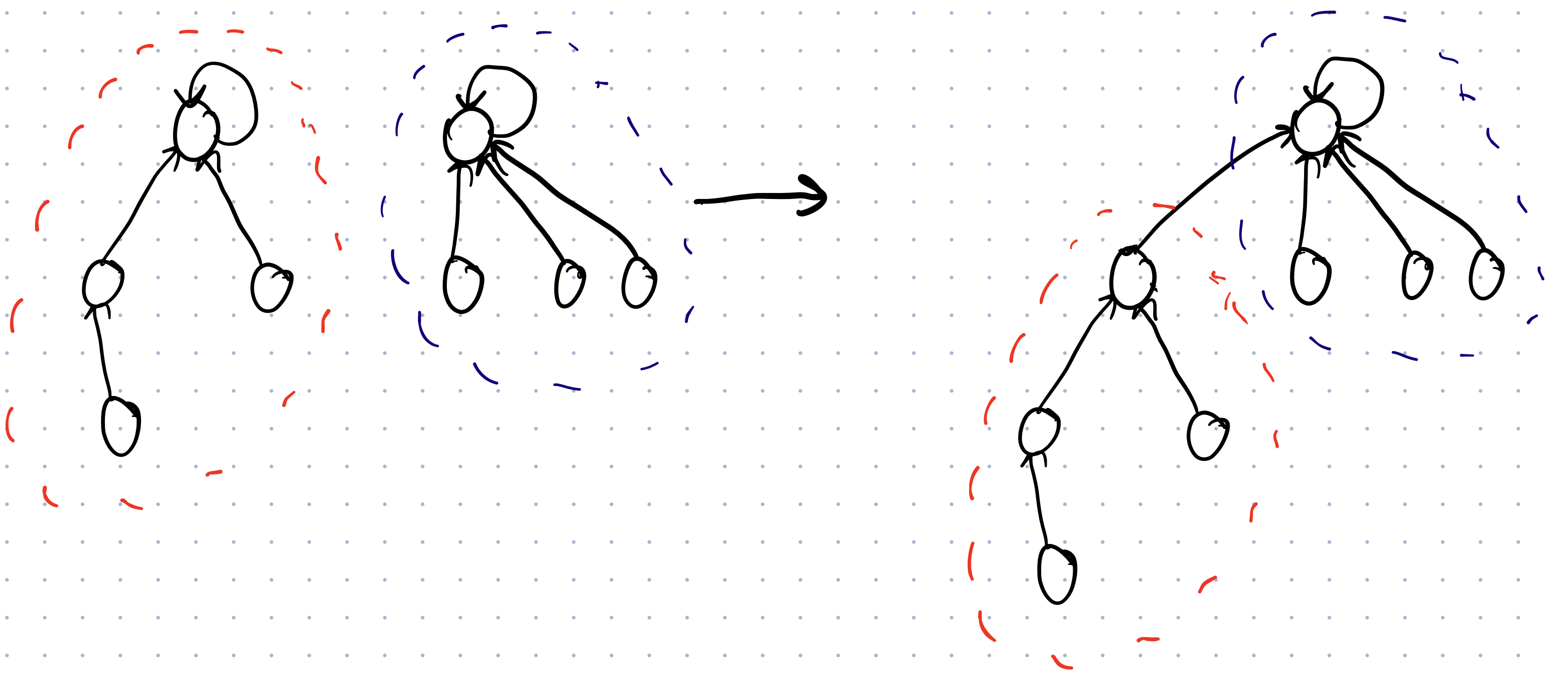
$n-1$ union



find(a) $m-(n-1)$ РАЗ

$$(m-n+1)\log n = \Omega(m \log n)$$

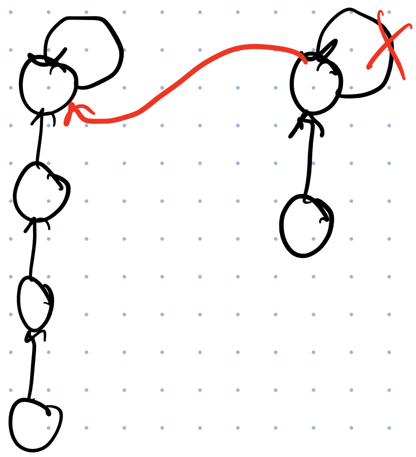
union:



коммутат. ли union?

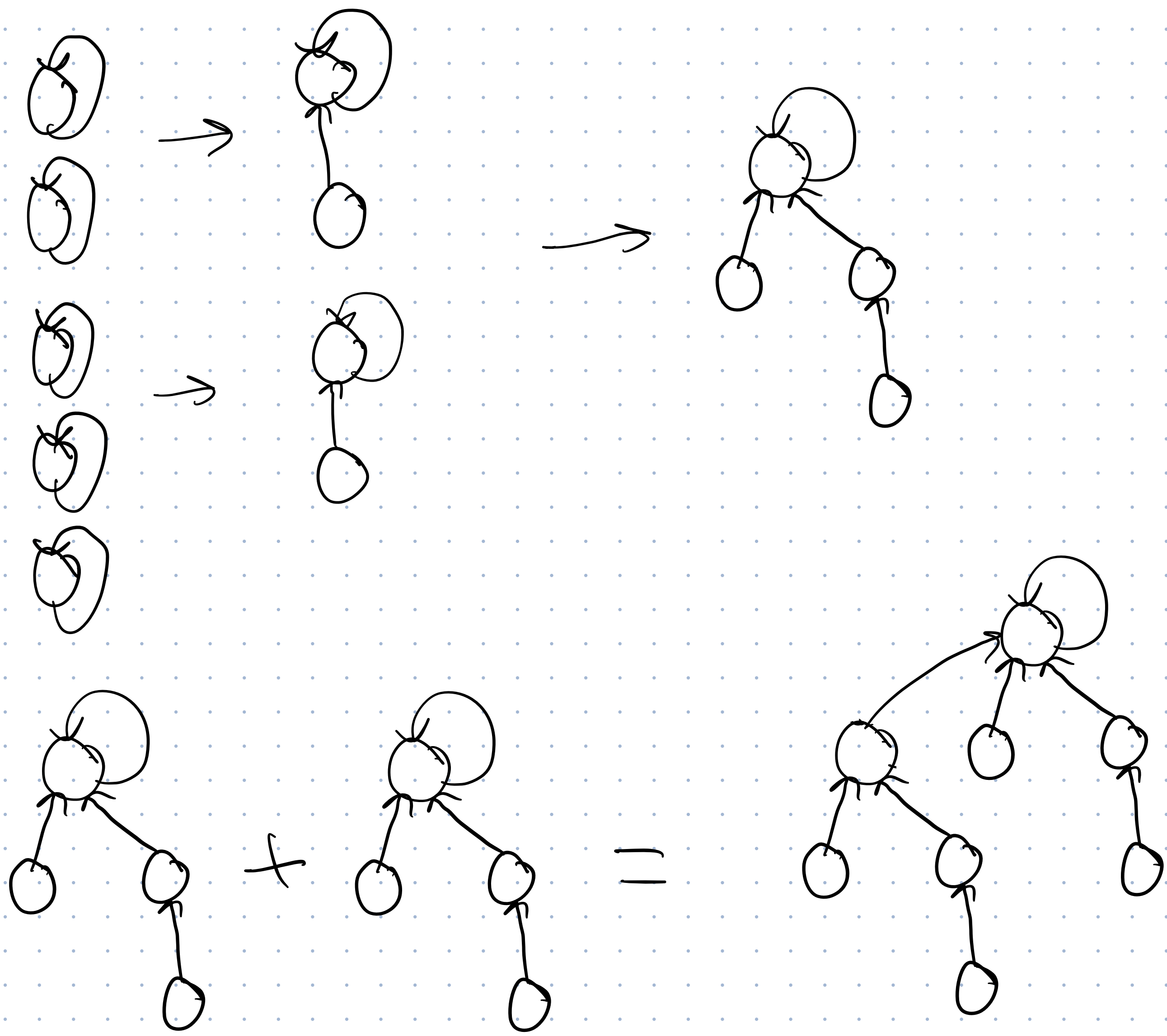
union(A,B) = union(B,A)

ДА:



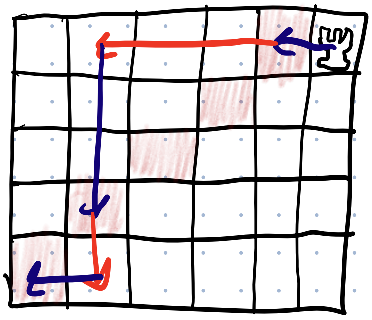
НЕТ, если подвеш. 1 под 2

как постр. дерево:



ИГРЫ

"БАЛОВСТВО С ЛАДЬЁЙ"



2 ИГРОКА

1 ХОД – ДВИЖ. НА ≥ 1 КЛЕТКУ ВЛЕВО **ИЛИ** ВНИЗ
(ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ)

ПРОИГР. НЕ МОЖЕТ СДЕЛАТЬ ХОД

ВЫИГР. СТР. 1 ИГР. ДЛЯ СТАРТА ВНЕ ДИАГ.

1 : НА ДИАГ.

2 : $\forall$

1 : ОБР. НА ДИАГОНАЛЬ

…

1 : НА ДИАГ.

2 : ПРОИГР. (НЕ МОЖЕТ ПОХОДИТЬ)

1 2

РАССМ. РАЗНЫЕ НАЧ. ПОЗ. НА ДОСКЕ

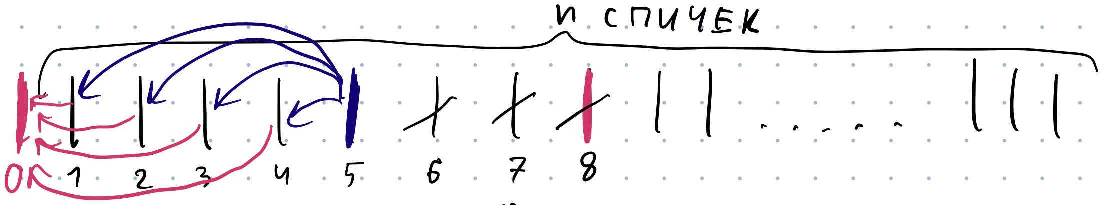
ВВЕДЁМ N-ПОЗИЦИИ (next): ВЫИГР. ТОТ, КТО ХОДИТ ИЗ ПОЗ.

P-ПОЗИЦИИ (previous): ВЫИГР. ТОТ, КТО ПРИШЁЛ В ПОЗ.

N	N	P	N
N	P	N	N
P	N	N	N

1) ЕСЛИ ВСЕ ХОДЫ ВЕДУТ В N-ПОЗИЦИИ, ЭТО P-ПОЗИЦИЯ
2) ЕСЛИ ЕСТЬ ХОД В P-ПОЗ., ЭТО N-ПОЗИЦИЯ

Зачёркивание спичек

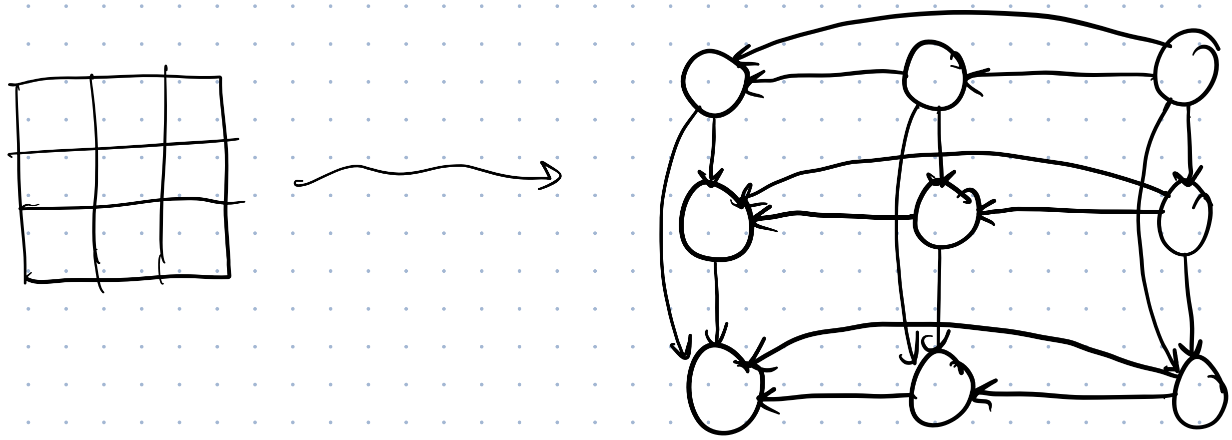


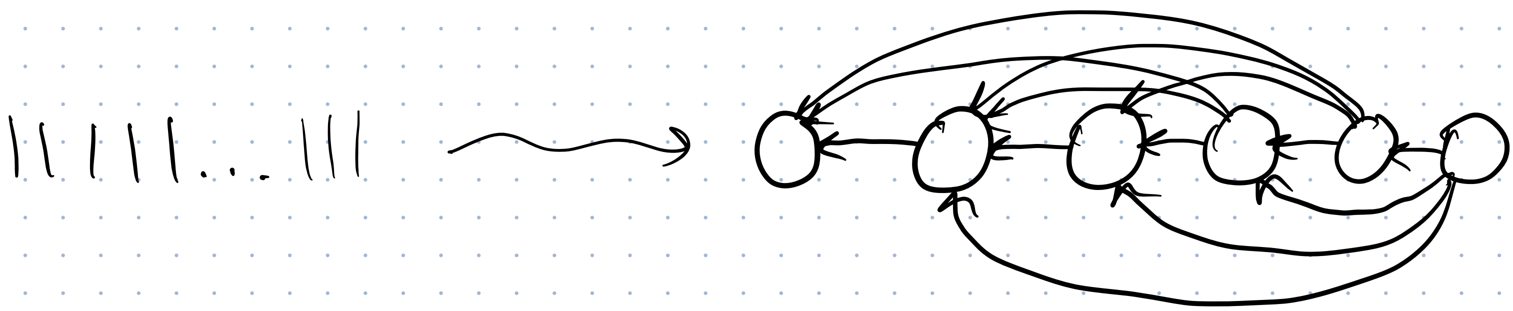
2 игрока зачёрк. от 1 до 4 (вкл.) спичек; проигр. не может походить

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
P	N	N	N	N	P	N	N	N	N	P		...

Если номер поз. делится на 5, это P и выигр. второй, в прот. случае первый

То же самое можно делать на DAG



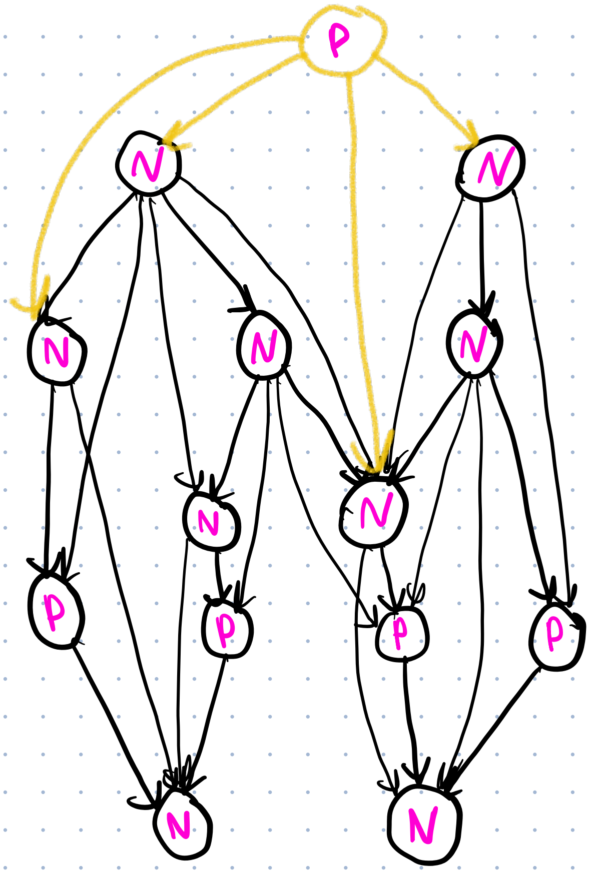


Пример DAG и игры на нём:

2 игр.

проигр. делает посл. ход

1 или 2 хода



ПРАВИЛА:

1) ВСЁ В N => P

2) ЕСТЬ В P => N

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ

max ВЕС $W \in \mathbb{N}$

n ТОВАРОВ (ЮВ. ИЗДЕЛИЙ):

w_i, c_i

weight cost

ФОРМАЛИЗУЕМ:

$x \in \{0, 1\}^n$

$$\max_{x \in \{0,1\}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le W$$

ПОЧЕМУ ЗАД. СЛОЖНА?

1) ЦЕЛОЧИСЛ. ПРОГР.

2) ЭКСП. ЧИСЛО ВАР.

ПОПРОБУЕМ РЕШИТЬ

ВАР. 1: БЕРЁМ САМЫЙ ДОРОГОЙ

КОНТРПРИМЕР:

$W = 5$

$w_1 = 4$; $c_1 = 100$

$w_2 = 2$; $c_2 = 99$

$w_3 = 2$; $c_3 = 99$

АЛГ. w_1, $\Sigma = 100$

ОПТ. $w_2 + w_3$, $\Sigma = 198$

ВАР. 2: САМЫЙ "ДОРОГОЙ НА КГ"

$\rho_1 = 25$

$\rho_2 = 49{,}5$

$\rho_3 = 49{,}5$

АЛГ. ДАСТ $w_2 + w_3$; $\Sigma = 198$

КОНТРПРИМЕР:

$W = 6$

$w_1 = 4$; $c_1 = 100$

$w_2 = 2$; $c_2 = 99$

$w_2 = 2$; $c_3 = 99$

АЛГ. ДАСТ w_2, w_3 ; $\Sigma = 198$

ОПТ. $w_1 + w_2$; $\Sigma = 199$

ЗАДАЧА РЕШАЕТСЯ, ПРОСТО НЕ БЫСТРО. СДЕЛАЕМ ПЕРЕБОР

2^n ВАР. : $000\ldots00, \ldots, 111\ldots11$

МОЖНО ПОПРОБОВАТЬ СОКРАТИТЬ ПЕРЕБОР:

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

$x, y \in \{0,1\}^n$; ТОГДА

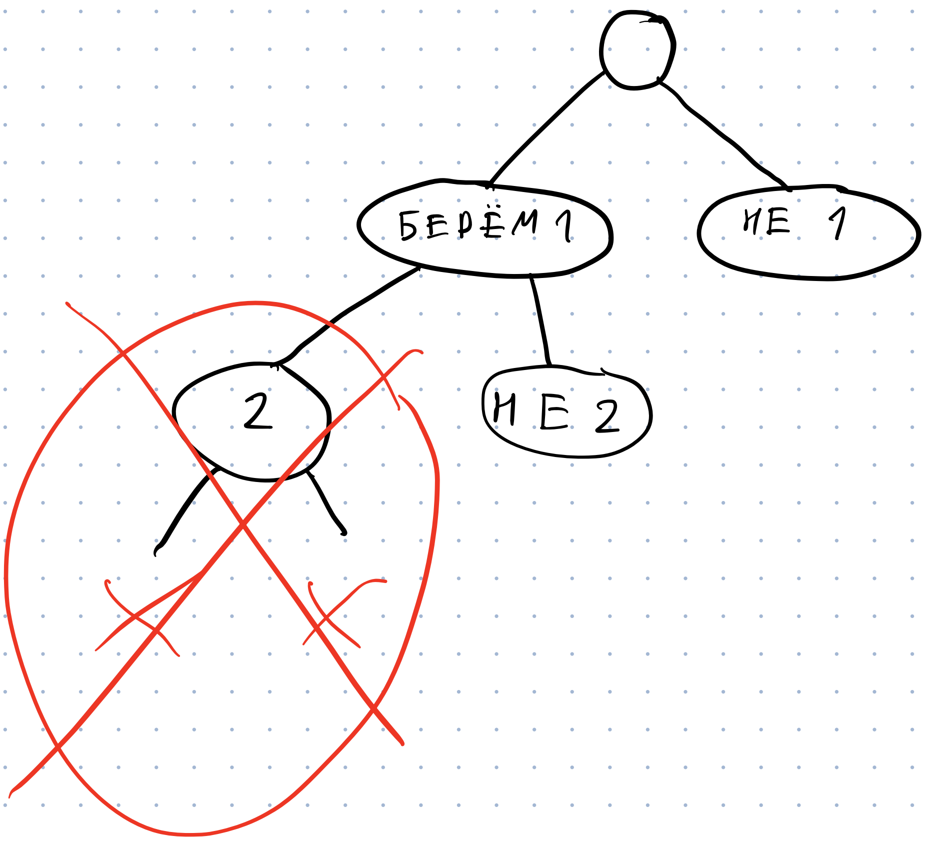
$x \le y \iff x_i \le y_i$

НАПРИМЕР:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \not\le \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ф-Я $w(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ ОБЛ. СВОЙСТВОМ

$x \le y \implies w(x) \le w(y)$



СФОРМУЛИРУЕМ РЕШЕНИЕ, КОТОРОЕ МОЖНО ЗАПРОГАТЬ ДЛЯ РЮКЗАКА 0-1

Построим таблицу C

$C[w, i]$ – max. стоим. набора весом $\le w$ с использ. предм. вплоть до i-го

→ номер предм.

↓ огр. по весу

	0	1	2	3	...	n
0	0	0	0	0	...	0
1	0					
⋮	...					
W	0					

max стоим. поднаб. при Σ весе $\le W$

$$C[w, i] = \max\left(\overbrace{C[w, i-1]}^{\text{не взяли}}, \overbrace{C[w-w_i, i-1] + c_i}^{\text{взяли}}\right)$$

$w_i \le w$

2 вар-та: берём i-й или нет

Время работы: $\Theta(Wn)$

Рассм. пример:

$W = 6$

$w = [1, 1, 2, 3]$

$c = [2; 3{,}5; 4; 5]$

$\max(2; 2+3{,}5)$

$\max(C[1,0], C[1-1, 1-1]+2) =$
$= \max(0, 0+2) = 2$

$\max(2; 0+3{,}5)$

$\max(5{,}5; 3{,}5+4) =$
$= 7{,}5$

$\max(5{,}5; 5{,}5+4) = 9{,}5$

i →, w ↓

C =

w \ i	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	2	3,5	3,5	3,5
2	0	2	5,5	5,5	5,5
3	0	2	5,5	7,5	7,5
4	0	2	5,5	9,5	9,5
5	0	2	5,5	9,5	10,5
6	0	2	5,5	9,5	12,5

$12{,}5 = \underset{2}{3{,}5} + \underset{3}{4} + \underset{4}{5}$