

Задание 13. Графы V: оставные деревья наносят ответный удар.

1 На вход задачи подаётся неориентированный взвешенный граф $G(V, E)$ и подмножество вершин $U \subseteq V$. Необходимо построить оставное дерево, минимальное (по весу) среди деревьев, в которых все вершины U являются листьями (но могут быть и другие листья) или обнаружить, что таких оставных деревьев нет. Постройте алгоритм, который решает задачу за $O(|E| \log |V|)$. Обратите внимание, что искомое дерево может не быть минимальным оставным деревом.

2 Рассмотрим алгоритм Union-Find без улучшения со сжатием путей¹. Приведите последовательность из m операций Union и Find над множеством из n элементов, которая потребует времени $\Omega(m \log n)$, если $2n < m$. В начале выполнения последовательности операций все n элементов находятся в отдельных множествах.

3 Дан неориентированный граф $G = (V, E)$, веса рёбер которого не обязательно различны. Для каждого из утверждений ниже приведите доказательство, если оно истинно, или постройте контрпример, если оно ложно:

1. Если к каждому ребру графа прибавить вес w , то каждое минимальное оставное дерево G перейдёт в минимальное оставное дерево модифицированного графа.
2. Если самое лёгкое ребро графа G уникально, то оно входит в любое минимальное оставное дерево.
3. Если ребро e входит в некоторое минимальное оставное дерево, то оно является самым лёгким ребром из пересекающих некоторый разрез.
4. Кратчайший путь между двумя вершинами является частью некоторого минимального оставного дерева.

¹При использовании этого улучшения после вызова $\text{Find}(x)$ все предки x вместе с x становятся детьми корня.