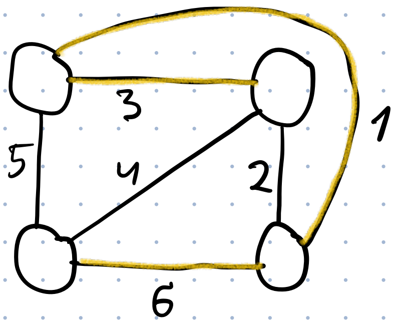
19.12.25

МИНИМАЛЬНЫЕ ОСТОВНЫЕ ДЕРЕВЬЯ

ДЕРЕВО – СВЯЗН. АЦИКЛ. ГРАФ

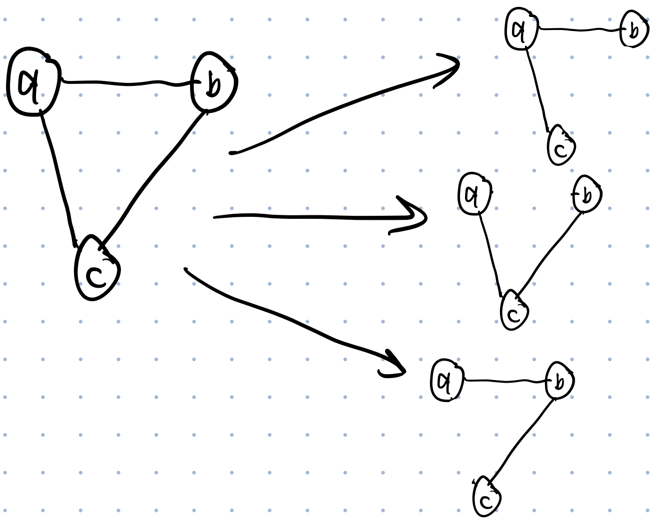
ПУСТЬ G – НЕОР. СВЯЗН. ВЗВЕШ. ГРАФ

ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО ГР. G – ЭТО ДЕРЕВО НА ВСЕХ ВЕРШ. G И НЕКОТОРЫХ РЁБРАХ



ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО

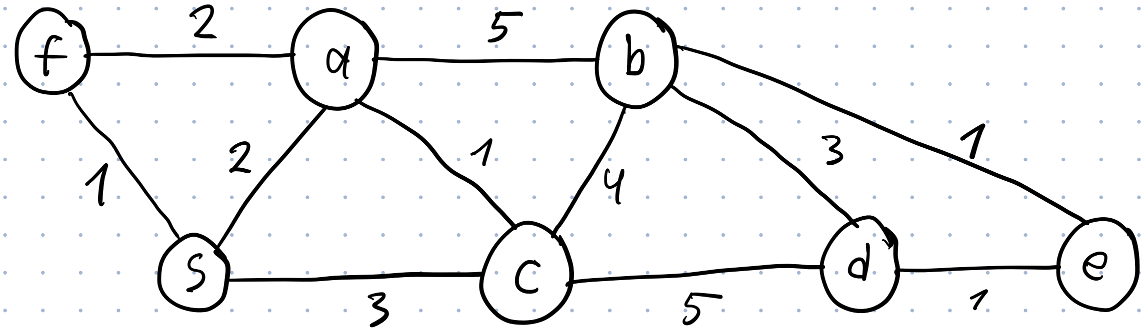
ОСТОВН. ДЕРЕВЬЕВ МОЖЕТ БЫТЬ НЕСКОЛЬКО, НАПРИМЕР

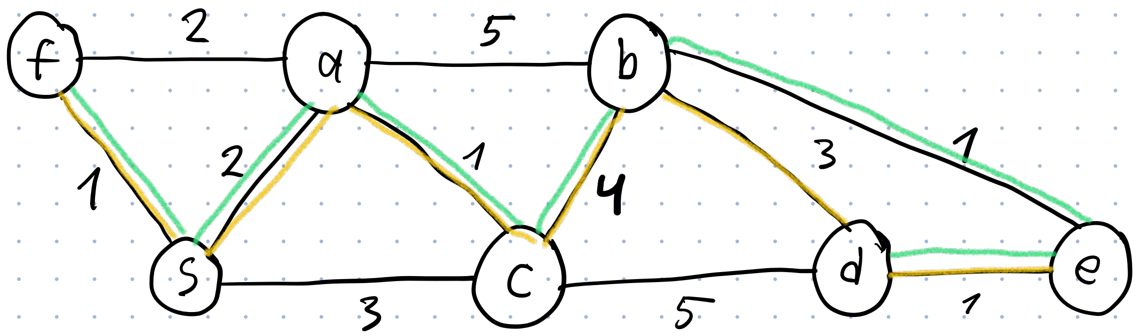


В ОСТ. ДЕРЕВЕ (SPANNING tree) |V|−1 РЕБРО

МИН. ОСТ. ДЕРЕВО (MST) – ЭТО ОСТ. ДЕР. С min СУММОЙ РЁБЕР

РАССМОТРИМ ПРИМЕР





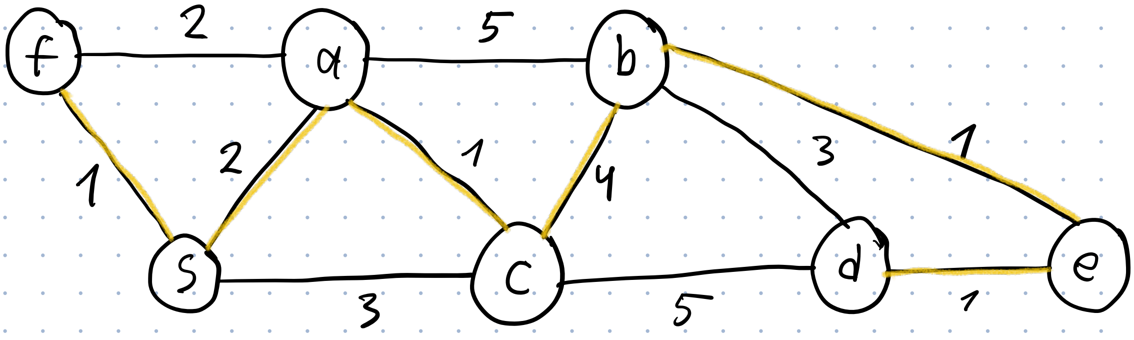
12

10

АЛГОРИТМ КРАСКАЛА

1) СОРТ. РЁБРА ПО ВОЗР.: $\overbrace{fs, ac, de, be}^{1}, \overbrace{sa, \cancel{fa}}^{2}, \overbrace{\cancel{bd}, \cancel{sc}}^{3}, \overbrace{cb}^{4}, \overbrace{ab, cd}^{5}$

2) ДОБАВЛ. РЁБРА, НЕ ПРИВОД. К ПОЯВЛ. ЦИКЛОВ



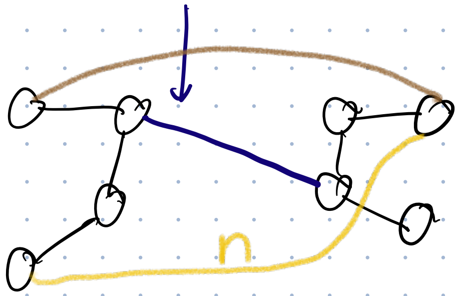
ДОКАЖЕМ, ЧТО ЕСЛИ ВЕСА РЁБЕР УНИКАЛЬНЫ, MST ЕДИНСТВЕННО

ГРАФ G

ПУСТЬ $MST_1(G) \neq MST_2(G)$

$\forall i \neq j \quad w_i \neq w_j$

1. $\exists$ РЕБРО $e \in MST_1(G)$, $e \notin MST_2(G)$



УДАЛИМ ЕГО. ГРАФ ТЕРЯЕТ СВЯЗНОСТЬ

2. $\exists$ РЕБРО $n \in MST_2(G)$ МЕЖДУ ВЕРШ. ИЗ ДВУХ ПОЛОВИН

3. 2 ВАР.: $w_n > w_e$ ИЛИ $w_n < w_e$

$$\Downarrow$$

$$w_{n'} < w_{e'}$$

$e_1, e_2, \ldots \in MST_1(G)$

$n_1, n_2, \ldots \in MST_2(G)$

ПУСТЬ $w_e = \max$ ИЗ ОТЛИЧАЮЩИХСЯ РЁБ.

G – ГРАФ; $T_1 \neq T_2$ – РАЗНЫЕ $MST(G)$

$\exists$ РЁБРА, ВХ. ТОЛЬКО В ОДНОМ MST, ПУСТЬ ЭТО $\underbrace{S_1 < \ldots < S_q}_{\text{УПОРЯД. ПО ВЕСУ}}$

ПУСТЬ БЕЗ ОГР. ОБЩ. $S_q \in T_1$

РАССМ. T_1 БЕЗ S_q; T_1 РАЗДЕЛ. НА H_L И H_R

∃ ребро из T_2 между верш. из H_L и H_R, не равн. S_q, назовём его y

$w_y > w_{s_q}$

тогда y лежит в обоих деревьях, в т.ч. в T_1 вместе с S_q. Они образ. цикл. Противоречие

$w_y < w_{s_q}$

заменим S_q на y, т.е.

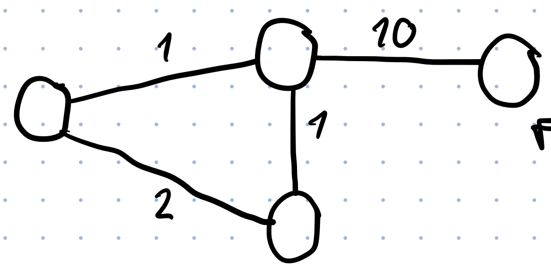
$$T_3 = (T_1 \setminus \{S_q\}) \cup \{y\}$$

$W(T_3) < W(T_1) \Rightarrow T_1$ не MST

Противоречие

Докажем или опровергнем несколько утв. для неор. графа $G = (V, E)$; веса не обяз. различны

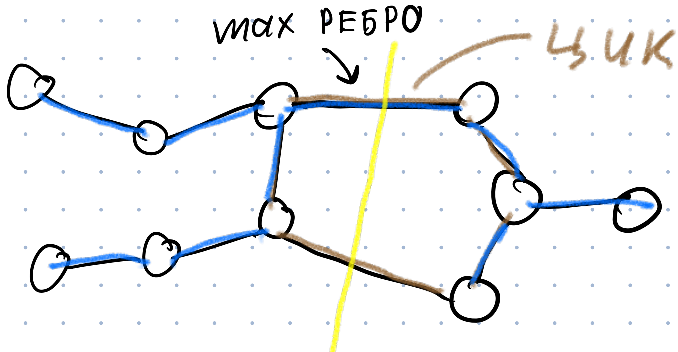
1. Если в G больше $|V|-1$ ребра и самое тяж. уник., то оно не вх. в MST

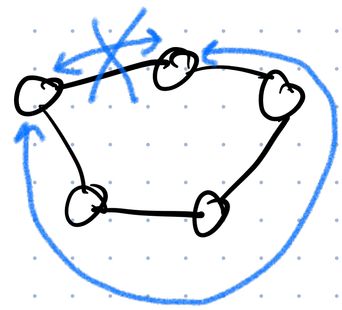


Это неправда, вот контрпример

2. Если в G есть цикл с уник. max ребром, то оно не вх. в MST

От противн.: предп., что входит

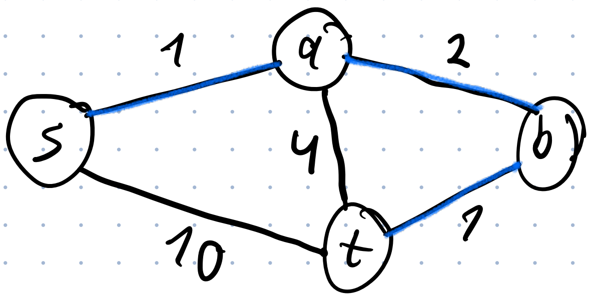


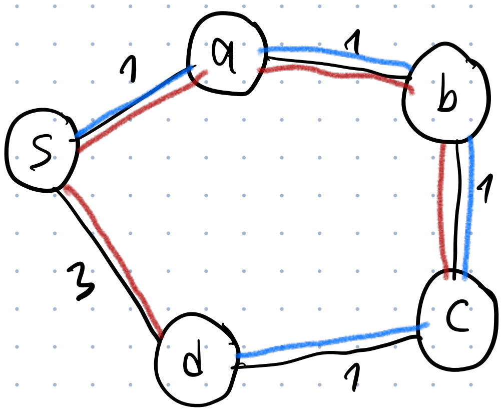


∃ ребро цикла не из MST. Оно легче max

ЗАМЕНИМ max НА ДРУГОЕ. ПОЛУЧИЛИ MST ЛЕГЧЕ =>
=> ПЕРВЫЙ MST НЕ БЫЛ MST

3. ДЕРЕВО КР. ПУТЕЙ ДЕЙКСТРЫ ЯВЛ. MST





4. ЕСЛИ УМЕНЬШ. ВЕС РЕБРА e ИЗ $T_1 = MST(G)$, ТО ДЕРЕВО ПРОДОЛЖИТ БЫТЬ MST

$\exists$ T_2 - MST В НОВОМ ГР., $T_1 \neq T_2$; $W(T_2) < W(T_1 e')$
e' - ОБЛЕГЧЁННАЯ ВЕРСИЯ e

$W_1, W_2, \ldots, W_{T_1 e}, \ldots$ - ВСЕ ST

ПОСЛЕ $e \to e'$

ВЕС КАЖДОГО ИЛИ НЕ ИЗМ., ИЛИ УМЕНЬШ. НА $w_e - w_{e'}$.

ИСХ. MST : $W(T_1 e) = \min(w_1, w_2, \ldots)$

$T_1 e'$: $W(T_1 e') = \min(w_1, w_2, \ldots) - (w_e - w_{e'})$

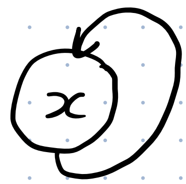
СЛЕДОВАТЕЛЬНО, $W(T_1 e') = \min(w_1 e', w_2 e', \ldots)$

Система непересекающихся мн-в
(disjoint set; union-find)

Операции:

1) makeset(x)

$O(1)$

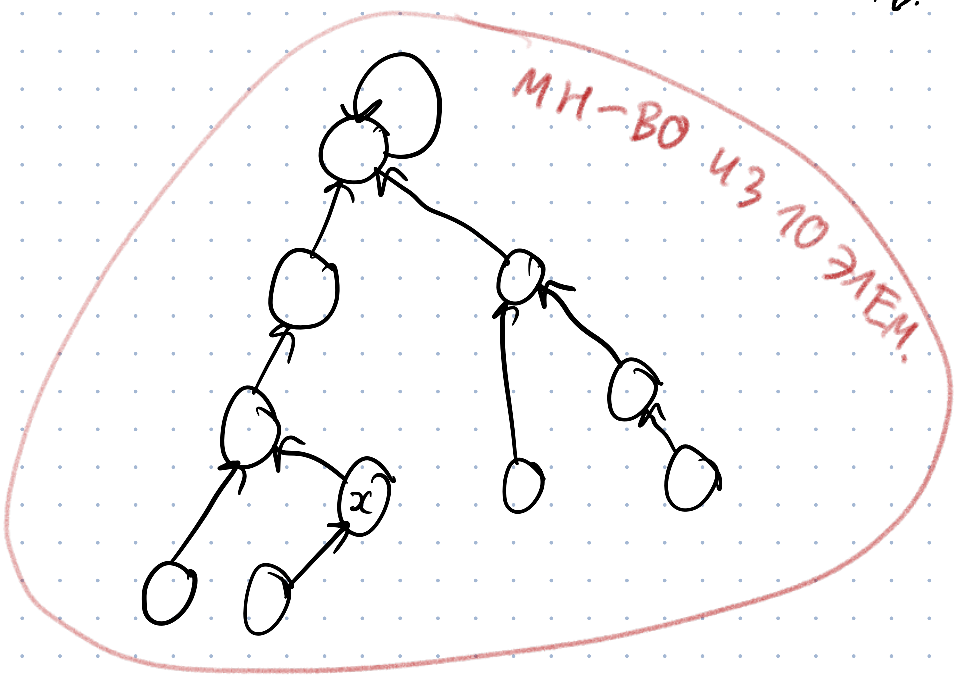


мн-во из 1 эл.
Его представ.-он сам

2) find (x)

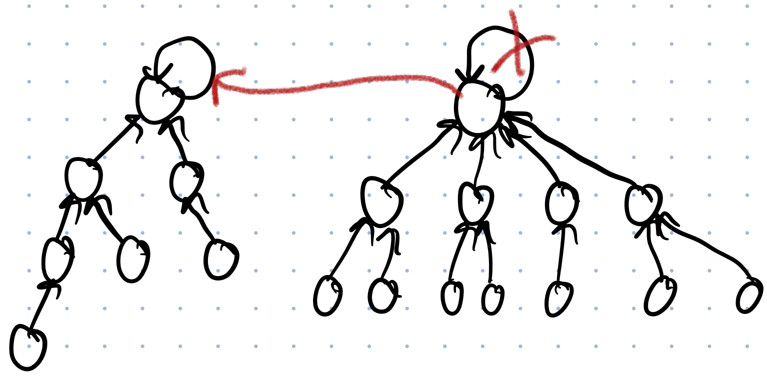
$O(h)$

h – высота дерева

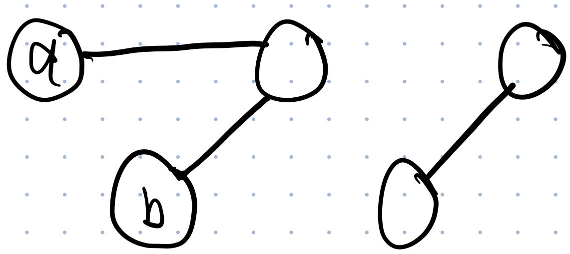


3) union(A, B)

два мн-ва



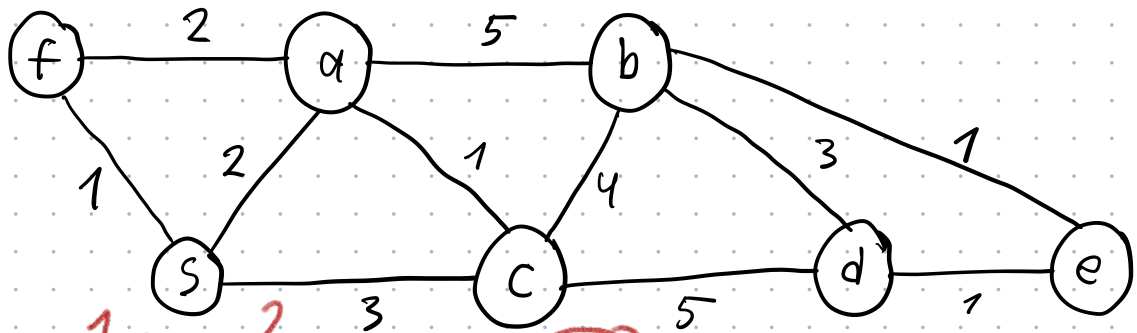
Примен. к алг. Краскала



1) каждая изол. верш. в начале – мн-во

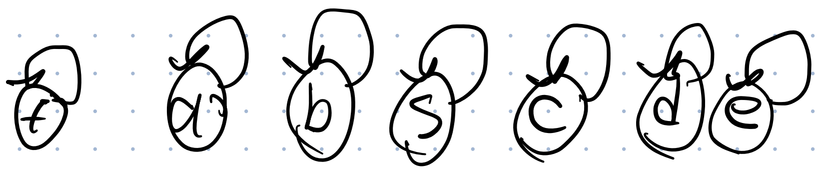
2) в цикле по рёбрам
find(a), find(b)
если совп., continue
else union

ПРИМЕР



$\underbrace{\overset{1}{fs}, \overset{2}{ac}, be, de}_{1}, \underbrace{fa, \cancel{sa}}_{2}, \underbrace{\cancel{bd}, \cancel{sc}}_{3}, \underbrace{cb}_{4}, \underbrace{ab, cd}_{5}$

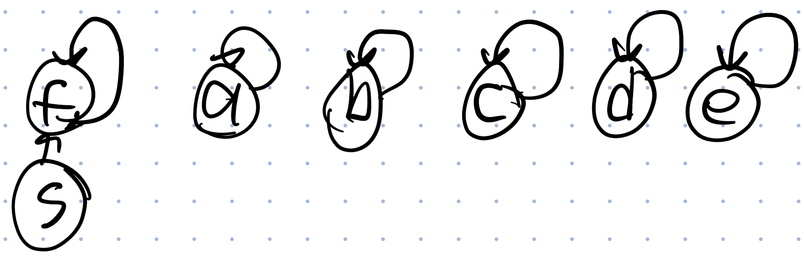
0) строим СНМ (disjoint set)



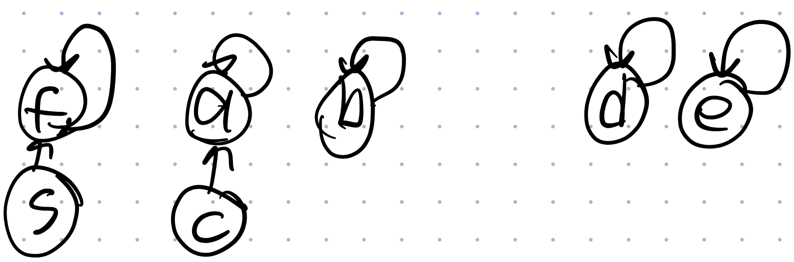
1) find(f) → f

find(s) → s

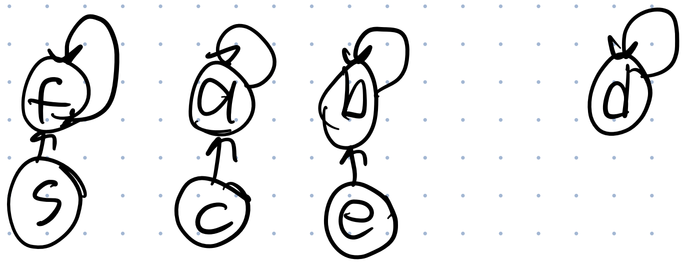
f ≠ s => доб. ребро; union(f,s)



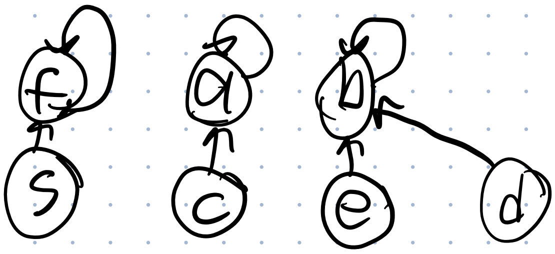
2) доб. ac



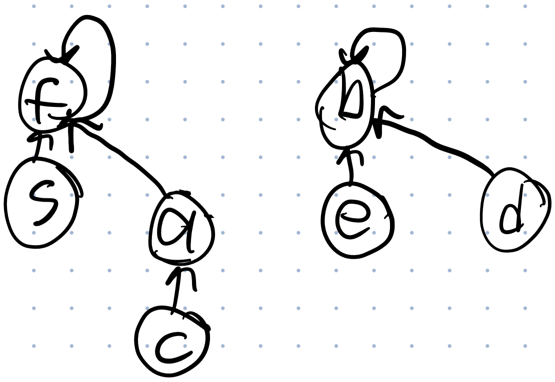
3) доб. be



4) de



5) fa

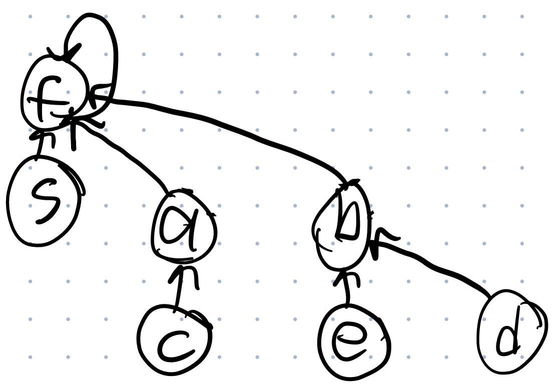


6) sa добавл. не нужно, поскольку
find(s) = find(a)

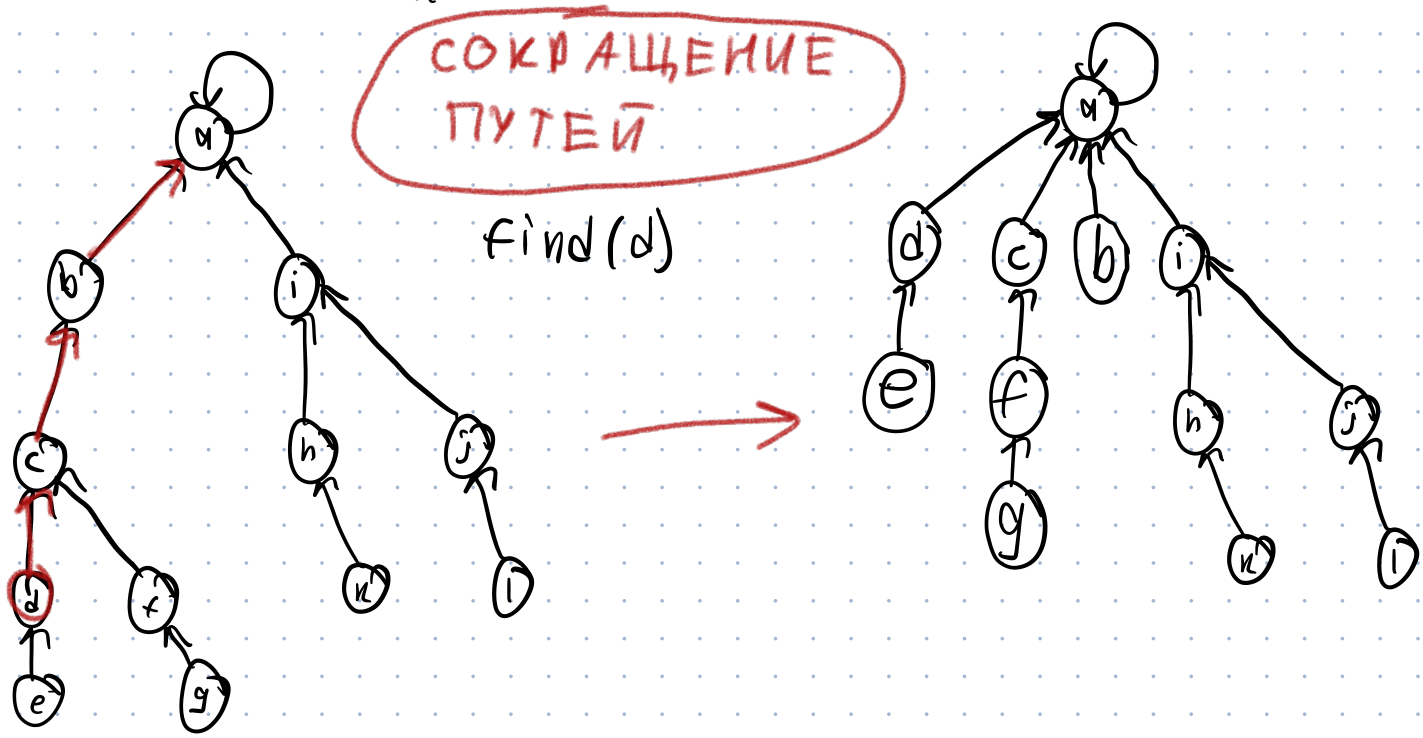
7) bd не добавл.

8) sc не доб.

9) cb добавл.



Ускорение при вып. find!



$O(|E|\,\alpha(|E|))$; $\alpha(\ )$ – обр. функ. Аккермана