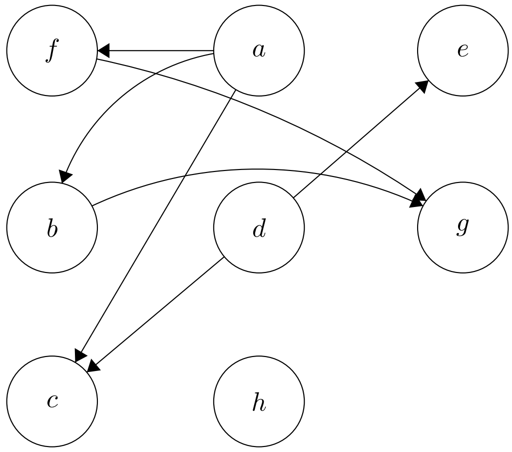
Задание 11. Графы III: кратчайшие пути.

1 Рассмотрим алгоритм Дейкстры с модификацией, в которой он сохраняет для каждой вершины предыдущую на кратчайшем пути в массиве предков $\pi[v]$. Докажите, что граф, состоящий из вершин исходного и ребер вида $\pi[v] \to v$, является деревом.

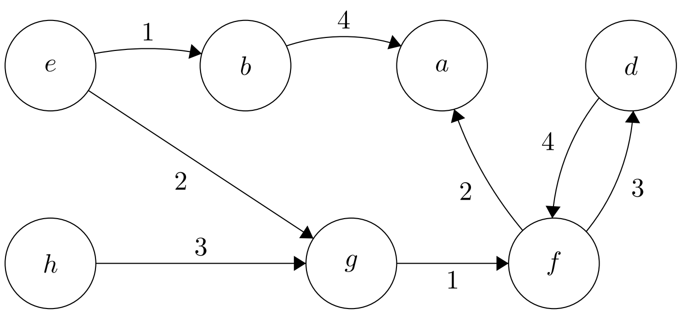
2 Предложите $O(|V| + |E|)$ алгоритм поиска кратчайших расстояний от данной вершины s до всех остальных в графе с весами ребер 0 или 1. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

3 Изучите топологическую сортировку (она делается на основе обхода в глубину). Рекомендуется использовать учебники Дасгупты и Кормена. Сделайте топологическую сортировку графа



4 В графе может быть несколько кратчайших путей между какими-то вершинами. Постройте линейный по времени алгоритм, находящий количество вершин, которые лежат **хотя бы на одном** кратчайшем пути из s в t в неориентированном графе с единичными весами на рёбрах.

5 Примените алгоритм Дейкстры к графу для поиска кратчайших путей от вершины e до всех остальных



6 Профессор О. П. Рометчивый предлагает следующий способ нахождения кратчайшего пути из s в t в ориентированном графе, содержащем рёбра отрицательного веса. Прибавим достаточно большую константу к весам всех рёбер и сделаем все веса положительными, после чего воспользуемся алгоритмом Дейкстры. Корректен ли такой подход? Если да, то докажите это, если нет — приведите контрпример.