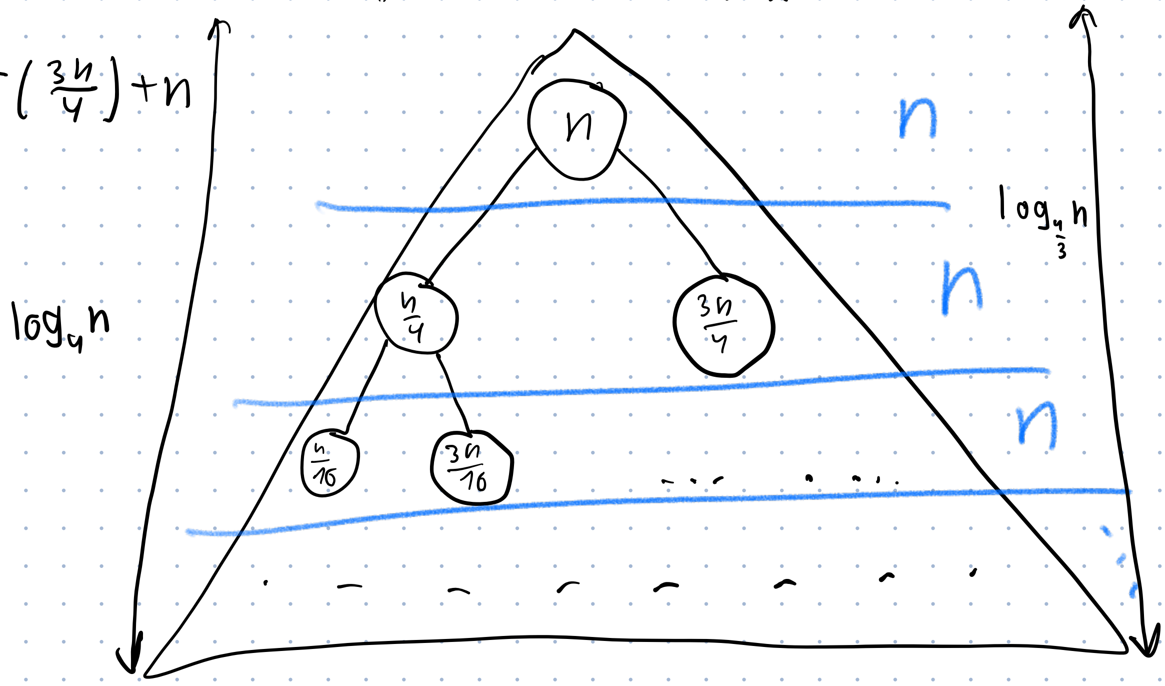
24.10.25

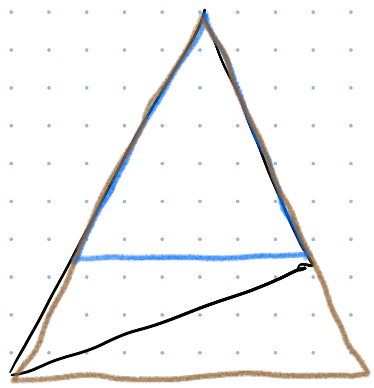
ДЗ 4, ЗАД. 3(1)

ПУНКТ 5

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$

ДЕРЕВО РЕК. ВЫЗОВОВ:





$$T(n) \le n \log_{\frac{4}{3}} n$$

$$T(n) \ge n \log_4 n$$

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n = T\left(\frac{n}{16}\right) + T\left(\frac{3n}{16}\right) + \frac{n}{4} + T\left(\frac{3n}{16}\right) + T\left(\frac{9n}{16}\right) + \frac{3n}{4} + n$$

ЧУТЬ ДРУГАЯ ЗАДАЧА

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + n \le 2T\left(\frac{4n}{5}\right) + n$$

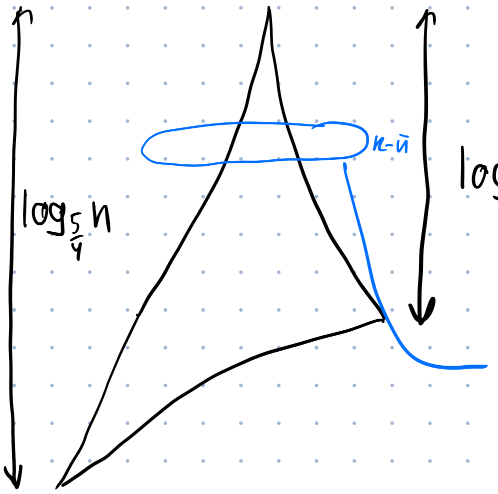
$$c = \log_{\frac{5}{4}} 2 > 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(n) = O(n^{c-\varepsilon})$$

$$T^u(n) = \Theta\left(n^{\log_{\frac{5}{4}} 2}\right) ; \quad T^L(n) = \Theta\left(n^{\log_{\frac{3}{2}} 2}\right)$$

$$= T\left(\frac{4n}{9}\right) + T\left(\frac{8n}{15}\right) + \frac{2n}{3} + T\left(\frac{8n}{15}\right) + T\left(\frac{16n}{25}\right) + \frac{4n}{5} + n$$

$$= n + \frac{10+12}{15}n = \frac{22}{15}n + n$$

$$\left(\frac{22}{15}\right)^2 n$$



$$n\cdot\left(\frac{22}{15}\right)^k \qquad \frac{22}{15} = \beta$$

$$\Sigma \;\to\; n\left(1+\beta+\ldots+\beta^k\right) = \frac{\beta^{k-1}-1}{\beta-1}n$$

Оц. сверху: $T(n) \le \sum_{k=0}^{\lceil \log_{\frac{5}{4}} n\rceil} n\,\beta^k = n\cdot C\cdot\left(\left(\frac{22}{15}\right)^{\lceil \log_{\frac{5}{4}} n\rceil} - 1\right) \le$

$$\le \tilde{C}\cdot n\cdot\left(\frac{22}{15}\right)^{\log_{\frac{5}{4}} n} = \tilde{C}\cdot n^{1+\log_{\frac{5}{4}}\frac{22}{15}}$$

$$a^{\log_b n} = \left(e^{\log_e a}\right)^{\frac{\log_e n}{\log_e b}} = e^{\ln a\cdot\frac{\ln n}{\ln b}} = \left(e^{\ln n}\right)^{\frac{\ln a}{\ln b}} =$$

$$= n^{\log_b a}$$

Пункт 6

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n^2 \le 2T\left(\frac{2n}{3}\right) + n^2$$

Мастер-теор.: $c = \log_{\frac{3}{2}} 2 < 2 \quad \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25\right)$

$\exists\, \varepsilon > 0:\; f(n) = \Omega\left(n^{c+\varepsilon}\right)$

$k = \frac{8}{9}:\; k\cdot f(n) \ge a\cdot f\left(\frac{n}{b}\right)$

$\frac{8}{9}n^2 \overset{?}{\ge} 2\cdot\left(\frac{2n}{3}\right)^2$

$\frac{8}{9}n^2 \overset{?}{\ge} \frac{8n^2}{9}$

$$\Rightarrow T^u(n) = \Theta(n^2)$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

СЛОЖНОСТЬ АРИФМЕТИКИ В БИТОВОЙ МОДЕЛИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

АТОМАРНАЯ ОП. – ЭТО ОП. С БИТАМИ $O(1)$

РАССМ. АЛГ. СЛОЖЕНИЯ ДВУХ n-БИТОВЫХ ЧИСЕЛ

$a = 10\ldots01\overset{\text{0 разряд}}{0}$

$b = 001\ldots01$

$a[i]$ – i-й ПО СТАРШ. РАЗРЯД

АЛГ.:

```
r = 0
for i in range(n):
    s = a[i] + b[i] + r
    if (s == 0):
        answer[i] = 0; r = 0
    elif (s == 1):
        answer[i] = 1 ; r = 0
    elif (s == 2):
        answer[i] = 0 ; r = 1
    elif (s == 3):
        answer[i] = 1; r = 1
```

$\Theta(n)$

ОТВЕТ "ЗАВИСИТ" ОТ ВСЕХ БИТОВ ВХОДА:

ПРИ $a \neq b$

$\underset{-c}{a+c} \neq \underset{-c}{b+c}$ (ДЛЯ ВСЕХ c)

$< 2n$

$a = 10\ldots\boxed{0}101$ $\qquad a + b = a + b$

$b = 1001\ldots\ldots100$

Умножение n-бит. чисел

$$a = \overbrace{101\ldots\ldots10}^{n\text{ бит}}$$

$$b = \underbrace{1110\ldots00}_{n\text{ бит}}$$

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots + a}_{b-1\text{ слож.}} \equiv$$

Сложность умнож. "по определению" (наивного, очень медленного) — $O(n2^n)$

$b-1$ слож., каждое за $O(n)$

$\max b = 2^n - 1$

$\max.$ число слож. $= 2^n - 2$

$$\equiv a(\underbrace{1+1+1+\ldots\ldots+1}_{b\text{ единиц}}) =$$

$$= \underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{\lfloor \frac{b}{2} \rfloor} \overset{1\text{ оп.}}{\cdot 2} + \overset{1\text{ оп.}}{r \cdot a}$$

$$r = b - 2\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

$$a \cdot b = 2a \cdot \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + r_1 =$$

$$= 2\left(2 \cdot a \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{b}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor + r_2\right) + r_1$$

Битовый сдвиг:

```
 1101101
  ×2
11011010
```

	0	1
0	0	0
1	0	1

	00	01	10	11
00				
01				
10				
11				

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ 1011 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ 0000 \\ 1101 \end{array}$$

Умн. в столбик за $O(n^2)$

$a\cdot\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor$ $\quad O(n) \quad O(1) \quad O(1) \quad r$

$$a\cdot b = a+a+a+\dots+a = \underbrace{(a+a+\dots+a)}_{\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor}\cdot 2 + a\cdot\left(b-2\cdot\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor\right) =$$

бит. сдвиг $O(1)$

n-битовое на n-битовое

n-бит. на n-1-бит.

$$= \left(a\cdot\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor\right)\cdot 2 + a\cdot r_1 = (a\cdot b_1)\cdot 2 + a\cdot r_1 =$$

$b_0 = b$

$b_1 = \left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor$

$b_2 = \left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor}{2}\right\rfloor$

$\dots$

$$= ((a\cdot b_2)\cdot 2 + a\cdot r_2)\cdot 2 + \underbrace{a\cdot r_1}_{O(1)} = \dots\dots =$$

$n \quad 1 \quad 1 \quad O(n)$

$$= a\cdot(((y_n\cdot 2 + y_{n-1})\cdot 2 + y_{n-2})\cdot 2) + \dots$$

$$= a\cdot\left(y_n\cdot 2^{n-1} + y_{n-1}\cdot 2^{n-2} + \dots + y_1\cdot 2^0\right) = ab$$

$$b = 1101\dots10 = 1\cdot 2^{n-1} + 1\cdot 2^{n-2} + 0\cdot 2^{n-3} + \dots + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$$

$O(n^2)$

$x \cdot y =$

ЗА СКОЛЬКО МОЖНО УМН. 2 n-БИТН. ЧИСЛА?

$\lfloor 101\ldots10 \rfloor \lfloor 1010\ldots1 \rfloor$

$x = a \cdot \underbrace{2^{\frac{n}{2}}}_{p} + b = ap + b$

a, b, c, d ДЛИНЫ $\frac{n}{2}$

$y = cp + d$

$= (ap+b)(cp+d) = acp^2 + adp + bcp + bd =$

4 ЗАДАЧИ РАЗМЕРА $\frac{n}{2}$

слож: $= 3 + 2 + 2$

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + Qn$

ПО МАСТЕР-ТЕОРЕМЕ:

$c = \log_2 4 = 2$

$\exists \varepsilon > 0: \; Qn = O(n^{2-\varepsilon})$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

$= acp^2 + (ad + bc)p + bd =$

УЖЕ ВЫЧИСЛЕНЫ ac, bd

$\cancel{(a+d)(b+c) = ab + ac} + bd + cd$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$

$= \overset{2n}{a \cdot c}\, p^2 + \overset{n}{(}(\overset{n}{a+b}) \cdot (\overset{n}{c+d}) \overset{n}{-} ac - \overset{n}{bd})\overset{n}{p} + \overset{n}{b \cdot d}$

$T\left(\frac{n}{2}\right)$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n(\underset{\text{бит. сдвиги}}{3} + \underset{\text{слож}}{6}) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 9n$$

МАСТ. ТЕОР. $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$

ШТРАССЕН ЗА $\Theta(n^{\log_2 7})$

МОДУЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА, ОСТАТКИ ОТ ДЕЛЕНИЯ

$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

ОПЕРАЦИИ: $+$, $*$

$a + b \overset{def}{\iff} a + b \bmod 5$ ОСТ. ОТ ДЕЛЕНИЯ

$3 + 4 = 7$

$3 + 4 \equiv 2 \mod 5$

"СРАВНИМО ПО МОДУЛЮ 5"

$2 \cdot 4 \equiv 3 \mod 5$

def. GCD (Greatest Common Divisor, НАИБОЛЬШ. ОБЩ. ДЕЛ.)
ЧИСЕЛ a, b:

$gcd(a, b) = d$

$\left.\begin{array}{l} a \vdots d \text{ (НАЦЕЛО)} \\ b \vdots d \end{array}\right\}$

d - max. ТАКОЕ ЧИСЛО

$a = 16$

$b = 24$

$\cancel{*}$ $gcd(16, 24) = 8$

УТВ.: $\forall a, b$ ($a > b$ БЕЗ ОГР. ОБЩ.)

$gcd(a, b) = gcd(a - b, b)$

В ДОМАШКУ