Задание 1. Асимптотические сложности.

Определение: $f(n) = \Omega(g(n))$ - это то же самое, что $f(n) = O(g(n))$, только последнее неравенство заменено на $\geq$. Произносится как 'омега большое'.

Определение: $f(n) = \Theta(g(n))$ (тета-оценка или тета-асимптотика) эквивалентно одновременному выполнению $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) = \Omega(g(n))$. Это комбинация O-оценки и Ω-оценки, когда они обе выполняются для функций $f(n)$ и $g(n)$.

1 Известно, что $f(n) = O(n^2),\ g(n) = \Omega(1),\ g(n) = O(n)$. Положим

$$h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}.$$

1. Возможно ли, что **а)** $h(n) = \Theta(n \log n)$; **б)** $h(n) = \Theta(n^3)$? Если да, приведите конкретные фунцкии. Если нет, докажите, что это невозможно.

2. Приведите наилучшие (из возможных) верхние и нижние оценки на функцию $h(n)$ и приведите пример функций $f(n)$ и $g(n)$, для которых ваши оценки на $h(n)$ достигаются.

2 Найдите Θ-асимптотику $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{i^3 + 2i + 5}$.

3 Докажите, не используя интегрального исчисления, что асимптотика $\sum_{i=1}^{n} i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$, если $\alpha > 0$.

4 Найдите Θ-асимптотику функции $g(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;