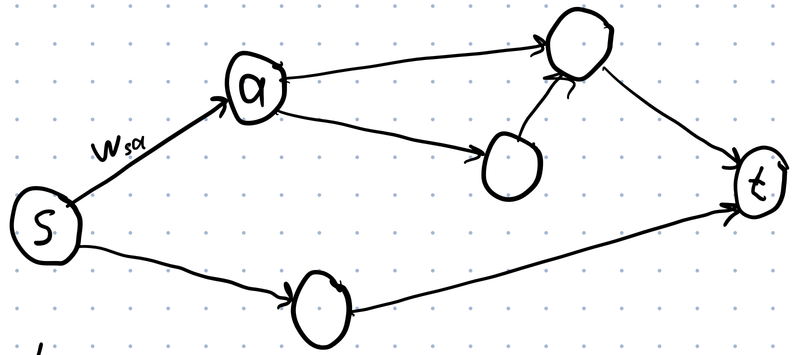
05.12.25

Поиск кр. путей

$G(V, E)$

$e_{ij}: w_{ij}$



Путь из верш. s в верш. t:

$p_1, p_2, \dots, p_n$

$p_1 = s$

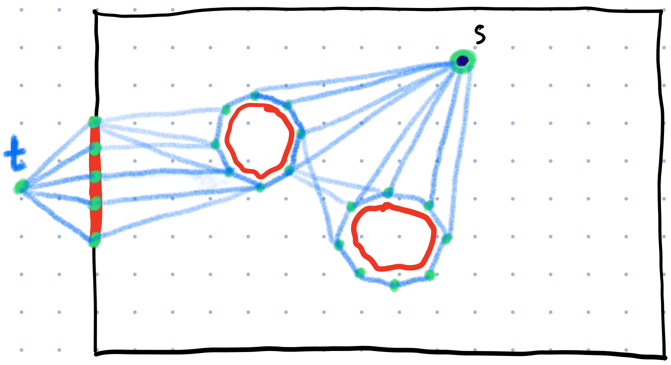
$p_n = t$

$\forall i \in [1, n-1] \cap \mathbb{N} : e_{p_i p_{i+1}} \in E$

Вес пути – сумма весов всех рёбер

$$W(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} w_{p_i p_{i+1}}$$

Сведение зад. обх. преп. к поиску кр. пути



Чего мы хотим?

1) путь из s в ворота
2) обход препятствий
3) min длину пути

Вес ребра ~ длина

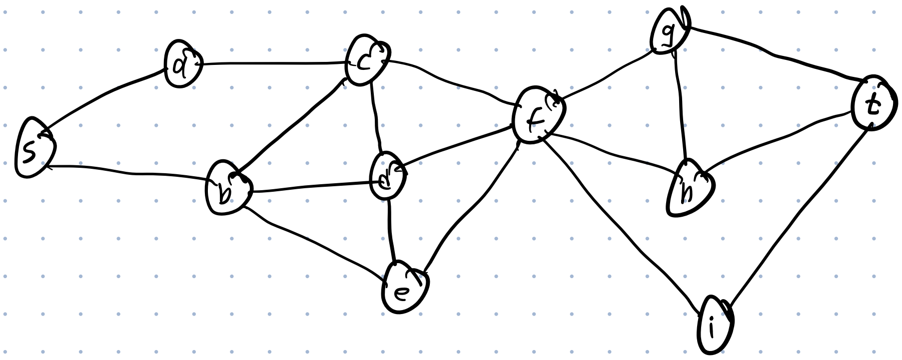
Алг.:

1) получ. карту преп., расставляем вокруг вершины, добавл. старт, финиш
2) перебир. всевозм. пары верш., добавл. подход. рёбра
3) вес = длина
4) поиск кр. пути

РАССМ. СЛУЧАЙ ЕД. ВЕСОВ

$w_{uv} = 1$

КР. ПУТЬ ИЗ s В t



1 ШАГ: ПОСЕЩ. ВСЕХ СОСЕДЕЙ s

2 ШАГ: ПОСЕЩ. ЕЩЁ НЕ ПОСЕЩ. СОСЕДЕЙ s

3 ШАГ: И ТАК ДАЛЕЕ

ЗАПИШЕМ BFS В ВИДЕ АЛГ.:
(BFS = Breadth-First search)

СТАТУС ВЕРШ. (ПОСЕЩЁННОСТЬ)

= status

ОЧЕРЕДЬ:

$d =$

s	
0	

КР. ПУТИ ОТ s ДО ВЕРШ. ГРАФА

s								

= q

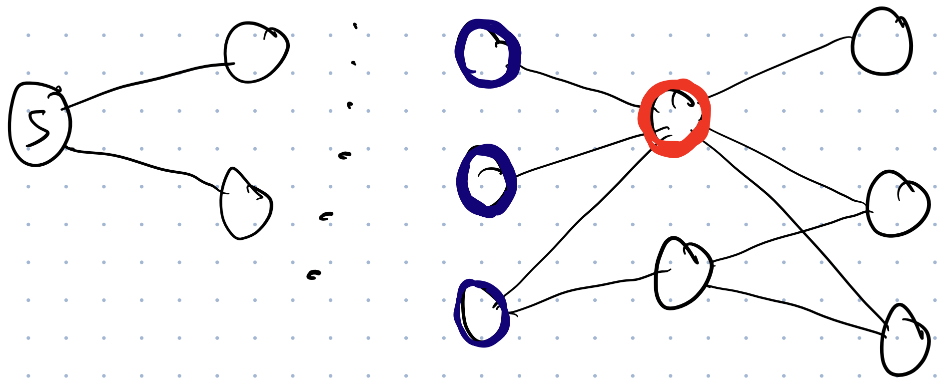
```
d[s] = 0
while (q.not_empty()):
    u = q.pop()
    for e_uv in E:
        if (status[v] == "not visited"):
            q.push(v)
            status[v] = "visited"
```

$d[v] = d[u] + 1$

КР. РАССТ. ОТ s ДО u

ПУСТЬ u - ВЕРШ. G; ИЗВЕСТНО, ЧТО $d[u] = d_u$

ПУСТЬ v – ТАКАЯ ВЕРШ., ЧТО $e_{uv} \in E$ И v НЕ БЫЛА ПОСЕЩЕНА



$d[v] = d[u] + 1$

ОБОСНУЕМ КОРРЕКТНОСТЬ BFS ДЛЯ ПОИСКА КР. ПУТЕЙ В ГР. С ЕД. ВЕСАМИ

ПУСТЬ КР. ПУТЬ ДО ВЕРШ. v СОСТ. K;

ДОКАЖЕМ, ЧТО АЛГ. НАЙДЁТ ТУ ЖЕ ДЛИНУ

ПРЕДП. ПРОТ.:

УТВ.: НА i-М ШАГЕ В ОЧЕРЕДЬ ДОБАВЛ. ВЕРШ. С КР. РАССТ. i

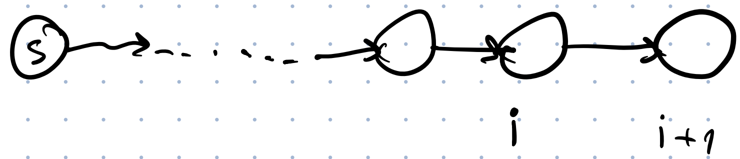
ДЛЯ 0 ШАГА ЭТО ВЕРНО

ПУСТЬ ВЕРНО ДЛЯ i-ГО

ДОКАЖ. ДЛЯ $i+1$-ГО

1) РАССМ. МН-ВО ВЕРШ. С КР. РАССТ. $i+1$

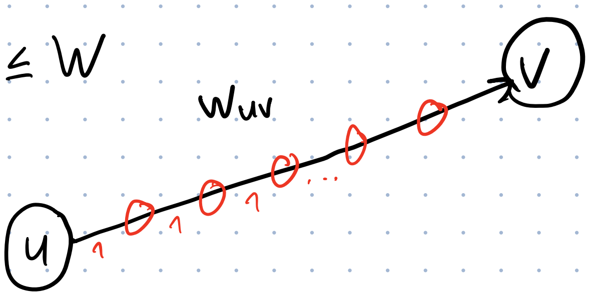
2) НА ПУТИ ИЗ s В ЛЮБУЮ ИЗ НИХ ПРЕДП. ВЕРШ. ИЗ i-ГО СЛОЯ



3) СОГЛАСНО АЛГ. ВЕРШ. ИЗ $i+1$-ГО СЛОЯ БУДЕТ ДОБ. В ОЧ. И ПОМЕЧЕНА РАССТ. $i+1$

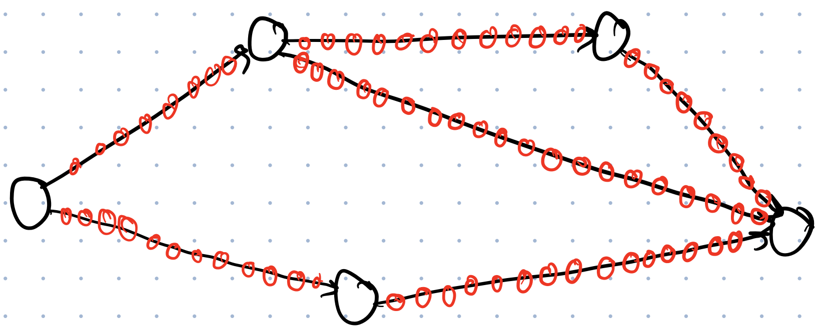
КАК БЫТЬ, ЕСЛИ ВЕСА НЕ ЕДИНИЧНЫЕ, А ЦЕЛЫЕ ПОЛОЖ. И ОГР.

$w_{uv} \le W$

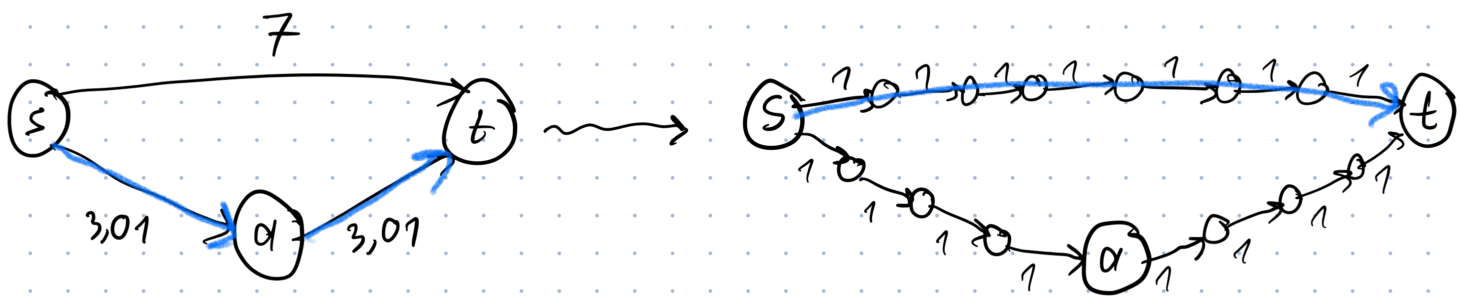


$$|V| \longrightarrow |V_{new}| \le |V| + |E|(W-1)$$

$$|E| \longrightarrow |E_{new}| \le |E| + |E|(W-1) = W|E|$$



ЕСЛИ ВЕСА НЕ ЦЕЛЫЕ, МОЖНО ОКРУГЛ., НО ОТВЕТ ИЗМЕНИТСЯ

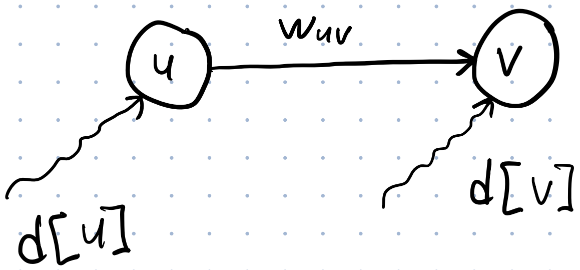


АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ

НАЗВ. ВЕРШ.	s	a	b	c	...			t			
ПРИОРИТЕТ =	0	∞	∞	∞	....						
СТАТУС											

= КР. РАССТ. ОТ s ДО ВЕРШ. = d[v]

РЕЛАКСАЦИЯ (relax(u,v))



$$d[v] = \min(d[v], d[u] + w_{uv})$$

$$O(1)$$

АЛГ. ДЕЙКСТРЫ:

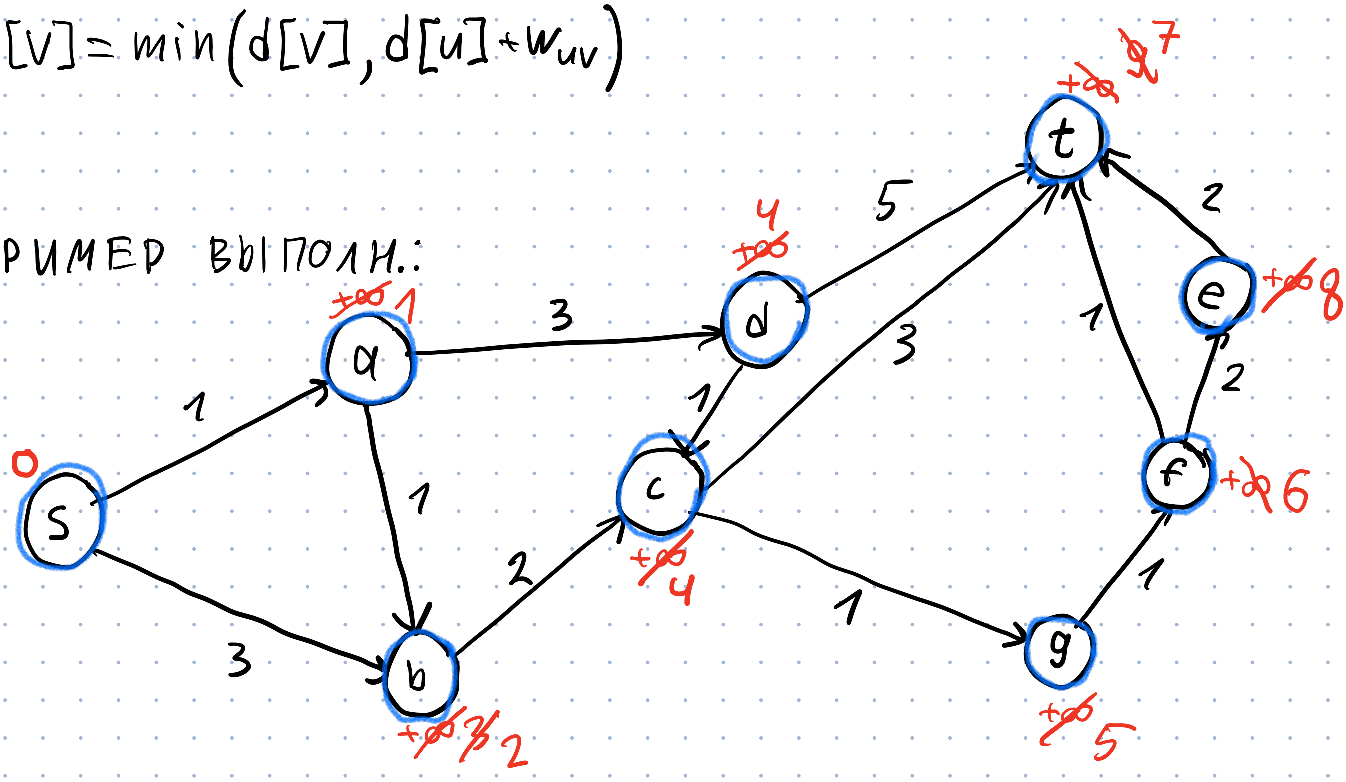
$d[\dots] = +\infty$
$d[s] = 0$

```
while (exist not closed vertices):
    u = vertex with min d   // d[v] = min(d[v], d[u] + w_uv)
    for e_uv in E:
        relax(u, v)
    "ЗАКРЫВАЕМ" ВЕРШИНУ
```

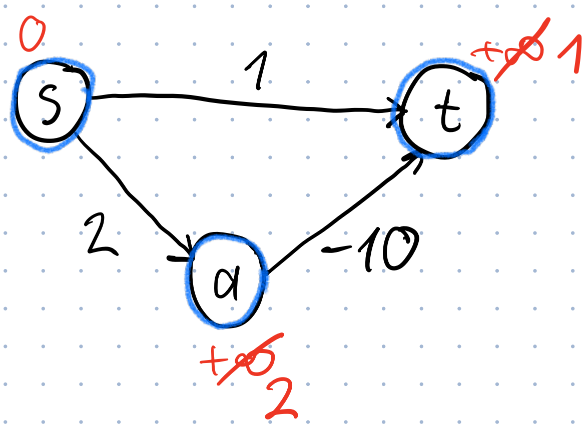
ВАЖНО! АЛГ. ДЕЙКСТРЫ РАБОТАЕТ ТОЛЬКО С ГРАФАМИ С ПОЛОЖИТ. РЁБРАМИ

$d[v] = \min(d[v], d[u] + w_{uv})$

ПРИМЕР ВЫПОЛН.:



ПРИМЕР ГРАФА С ОТР. ВЕСАМИ, НА КОТ. ДЕЙКСТРА РАБОТАЕТ НЕПРАВИЛЬНО:



АСИМП.: $O(|V|^2 + |E|)$ (В ТАКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ)