Задание 4. Рекурренты.

1 Злодей Анти-человек придумал последовательность чисел Анти-начи. Она продолжает последовательность чисел Фибоначчи влево. Например, поскольку $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, выполняется равенство $1 = 0 + F_{-1}$, из чего следует, что $F_{-1} = 1$. Дальнейшие числа Анти-начи определяются аналогично.

Анти-человек умеет быстро возводить матрицы в степень. Подскажите, как ему находить F_k для отрицательных k.

3 Найдите асимптотическую оценку функции $T(n)$. Примените мастер-теорему в тех случаях, когда ее можно использовать, **и посчитайте асимптотику иначе, когда нельзя**. Варианты есть следующие. Можно выписать рекурренту в виде суммы и найти, чему она равна. Можно подставить рекурренту саму в себя и посмотреть, что получается. Можно обратиться к литературе (учебник Кормена, учебник Дасгупты)

1. $T(n) = 25T(\frac{n}{5}) + n^2$
2. $T(n) = 16T(\frac{n}{2}) + n^3$
3. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n^3$
4. $T(n) = T(n-1) + 3n$
5. $T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4}) + n$
6. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{2n}{3}) + n^2$
7. $T(n) = T(n-1) + n^2$
8. $T(n) = 4T(\frac{n}{16}) + \sqrt{n}$
9. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n^3$
10. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$

3 Выведите первый случай мастер-теоремы (основной теоремы о рекуррентных соотношениях) для целых степеней (пренебрегая округлениями). Формально, нужно показать, что если

- $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$, $1 \le a \in \mathbb{N}$, $1 < b \in \mathbb{R}$
- $T(n) = \Theta(1)$ для $n < N_f$
- $\exists \varepsilon > 0 : f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$

то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.