12.12.25

relax(u, v)

АЛГ. ДЕЙКСТРЫ:

1) ПРИОР. ∞, СТАРТ. 0

2) ЦИКЛ

  2.1) min ПРИОР. $\rightsquigarrow$ u

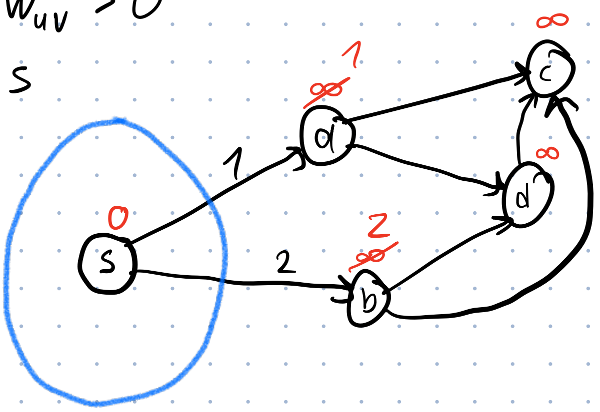
  2.2) relax ИСХ. РЁБ.

  2.3) ФИКС. КР. РАССТ. ДО u

$G=(V,E)$

$w_{uv} > 0$

s

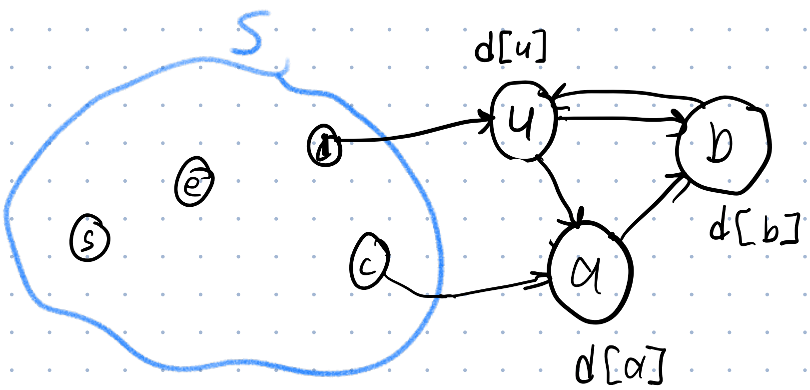


ИНВ.: ∃ МН. Т.Ч. ИЗВЕСТНЫ КРАТЧ. РАССТ. ДО ВСЕХ ЭЛ.

В НАЧАЛЕ АЛГ. ЭТО МН. $S = \varnothing$

ПОСЛЕ 1 ШАГА ОНО $\{s\}$

ДОК., ЧТО ЕСЛИ u ИМЕЕТ min МЕТКУ, ТО РАССТ. ДО u УЖЕ НЕ УМЕНЬШ.



ПРЕДП. ПРОТИВНОЕ, Т.Е. ∃ ПУТЬ КОРОЧЕ

∃ путь короче:
2 варианта

Пред. верш. на кр. пути не из S

$$d[u] > d[\pi[u]] + \underbrace{w_{\pi[u]u}}_{>0}$$

$\uparrow$ min из меток $V \setminus S$

Пред. верш. в S

$$d[\pi[u]] + w_{\pi[u]u} < d[u]$$

Противоречие: релакс. не было, а должна была быть

$$d[u] > d[b] + w_{bu}$$

$$d[b] \geq d[u] \Rightarrow d[b] = d[u] + C; \ C \geq 0$$

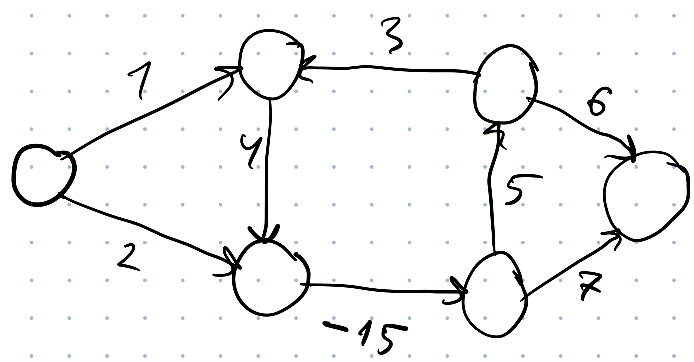
$$\cancel{d[u]} > \cancel{d[u]} + \underbrace{C}_{\geq 0} + \underbrace{w_{bu}}_{>0}$$

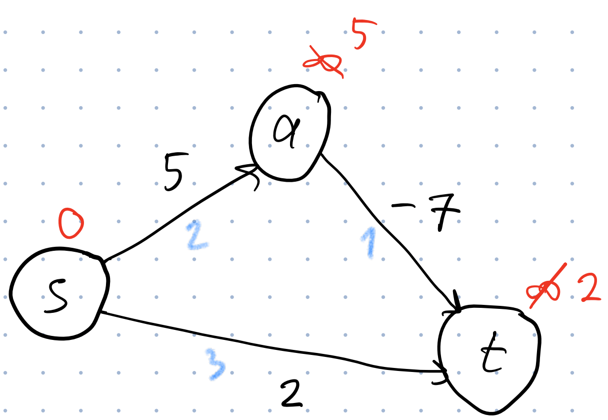
Противоречие $\boxtimes$

Алгоритм Беллмана-Форда

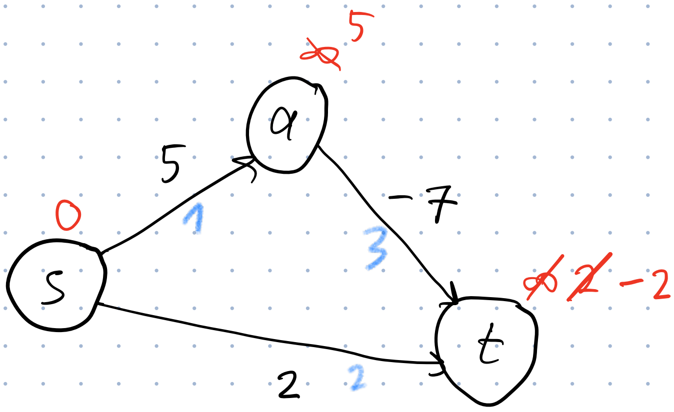
```
for _ in range(|V|-1):
    for e in E:
        relax(e)
```

Сложность: $O(|V||E|)$



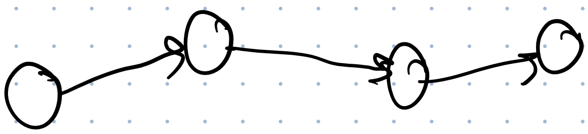


Порядок релакс.



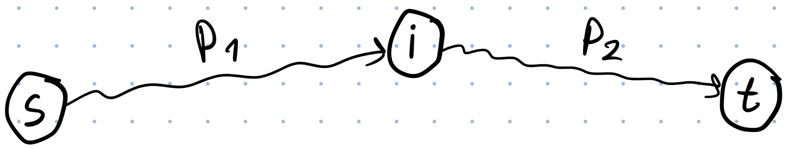
КОРРЕКТНОСТЬ

1. НЕСАМОПЕРЕС. ПУТИ В ГР. ИМЕЮТ (РЁБЕРНАЯ) ДЛИНУ $\le |V|-1$



2. ИНВАРИАНТ: ПОСЛЕ К-ТО ШАГА СТАНОВ. ИЗВЕСТНЫ КР. ПУТИ ИЗ s РЁБ. ДЛИНЫ $\le k$

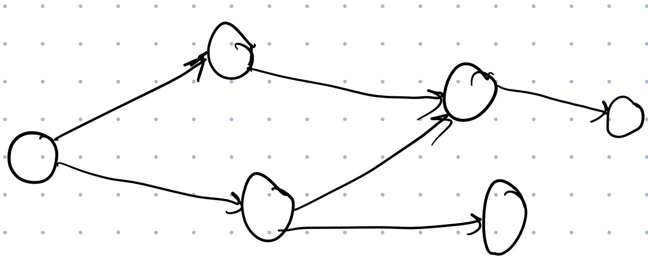
3. ПОДПУТЬ КРАТЧ. ПУТИ КРАТЧАЙШИЙ



ЕСЛИ ПУТЬ ИЗ s В t КРАТЧАЙШИЙ, ТО ПУТЬ ИЗ s В i ТОЖЕ КРАТЧ.

ПРЕДП., ЧТО ЭТО НЕ ТАК. ТОГДА $\exists$ P_3 ИЗ s В i КОРОЧЕ P_1. ТОГДА $\exists$ P_4 ИЗ s В t $= P_3 + P_2$ КОРОЧЕ ИСХ.

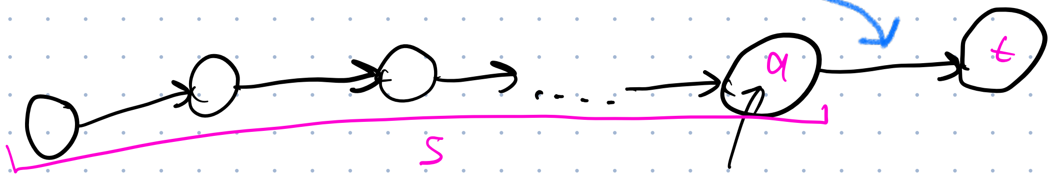
4. ИНВАРИАНТ СОХР. ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ k К $k+1$



ПОКАЖЕМ, ЧТО ЕСЛИ ИЗВ. КР. ПУТИ РЁБ. ДЛ. $\leq K$, ПОСЛЕ relax ВСЕХ E СТАНУТ ИЗВ. КР. ПУТИ РЁБ. ДЛИНЫ $\leq K+1$

ПРЕДП. ПРОТИВНОЕ, Т.Е. $\exists$ КР. ПУТЬ РЁБ. ДЛ. $K+1$, НО ОН НЕ БЫЛ НАЙДЕН

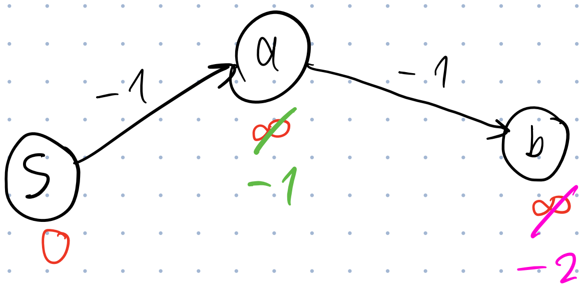
ЭТО РЕБРО ТОЖЕ БУДЕТ ОТРЕЛАКСИРОВАНО



$L_1 > L_s + W_{at}$

ЗНАЕМ КР. ПУТЬ РЁБ. ДЛ. K

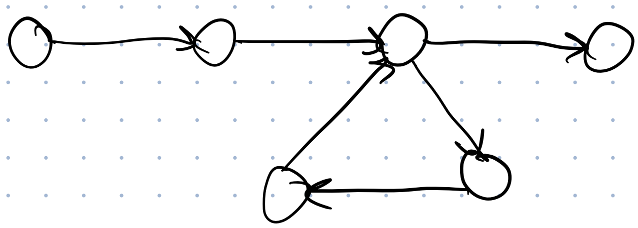
СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ЭТОТ ПУТЬ БУДЕТ НАЙДЕН АЛГ.



5. ПОСЛЕ k-ГО ШАГА ПОЛ. КР. П. РЁБ. ДЛ. $\leq k$
   ПОСЛЕ $|V|-1$-ГО Ш. . . . . . . $\leq |V|-1$

   ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО КР. ПУТИ (НЕСАМОПЕРЕС.) НАЙДЕНЫ

6. ЕСЛИ НА $|V|$-Й ИТЕР. БУДУТ relax, ТО $\exists$ ОТРИЦ. ЦИКЛ
   БЫЛ НАЙДЕН КР. ПУТЬ ДЛИНЫ $|V|$. ОН САМОПЕРЕСЕК.



ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ НЕК. ВЕРШ. min 2 РАЗА

$\underbrace{S\ p_1\ p_2\ p_3 \dots p_i}_{B}\ \underbrace{p_{i+1} \dots}_{M}\ \underbrace{p_i\ p_j\ p_{j+1} \dots p_t}_{E}$

произошла рел. => путь BE длиннее BME

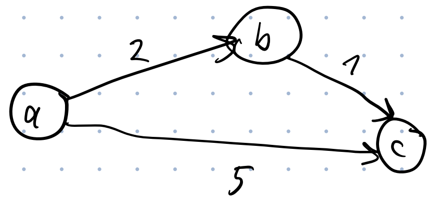
$|B|$ – длина

$\cancel{|B|} + \cancel{|E|} > \cancel{|B|} + |M| + \cancel{|E|}$

$|M| < 0$ – отриц. цикл

Найдём кр. пути от всех до всех

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty \\ & 0 & \infty & \infty \\ & & 0 & \\ \cdots & \boxed{w_{ij}} & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$



$$D^0 = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 2 & 5 \\ b & \infty & 0 & 1 \\ c & \infty & \infty & 0 \end{array}$$

На k-м шаге пыт. сокр. все пути через k-ю верш.

$$D_{ij}^{k} = \min\left(D_{ij}^{k-1},\ D_{ik}^{k-1} + D_{kj}^{k-1}\right)$$

слож. $O(|V|^3)$

Сравн. с $|V|$ раз Белл.-Ф.:

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Беллмана-Форда

$O(|V||V||E|)$

$O(|V|^2|E|)$

Флойда-Уоршелла

$O(|V|^3)$