# Задание 2. Нижние оценки и числа Фибоначчи.

**1** Найдите $\Theta$-асимптотику функции $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

**2** Дан набор из $n$ монет, одна из которых фальшивая и легче других, и чашечные весы, на которые можно положить две группы монет одинакового размера и узнать, какая из них тяжелее, или что они равны по весу. Придумайте алгоритм, докажите его корректность и оцените асимптотику.

**3** Найдите нижнюю оценку для задачи поиска фальшовой монеты, не предполагая ничего про алгоритм. **Нужно найти нижнюю оценку сложности именно для задачи, а не для какого-либо конкретного алгоритма, решающего ее.**

Приведите асимптотически оптимальный алгоритм поиска фальшивой монеты. Если алгоритм из прошлой задачи уже асимптотически оптимален, ничего дополнительного делать не нужно.

**4** Найдите $7^{13} \mod 167$ с помощью быстрого возведения в степень. Нужно привести последовательность умножений и промежуточные результаты. $\mod 167$ - это остаток от деления на 167.

**5** Рассмотрим последовательность $L_i$, которая похожа на числа Фибоначчи, но в обратную сторону. Она будет начинаться с двух положительных целых чисел $L_0 = a$ и $L_1 = b \leq a$, а следующие элементы будут определяться как $L_{i+1} = \max(L_i, L_{i-1}) - \min(L_i, L_{i-1})$. Определите, сколько ненулевых элементов может быть в такой последовательности, если она начинается с двух чисел, запись большего из которых состоит из $n$ бит. Как изменится ответ, если вместо вычитания брать остаток от деления нацело?