

Задание 14. Динамическое программирование.

1 Два афериста играют в поезде в следующую игру. На поле из $(N + 1) \times (N + 1)$ клеток (нумерация от 0 до N) в клетке $(0, 0)$ стоит фишка. Её разрешено разрешено двигать из клетки с координатами (x, y) в клетку с координатами $(x + a_i, y + b_i)$, где пары неотрицательных целых чисел (a_i, b_i) обговорены перед началом игры; при этом a_i и b_i не равны нулю одновременно. Выигрывает тот игрок, который первым вывел фишку в клетку, находящуюся на расстоянии не менее чем R от $(0, 0)$. Необходимо определить, кто из игроков выигрывает при безошибочных действиях соперника. Игроки ходят по очереди, пропускать ход нельзя.

1. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию при безошибочной игре соперника, если $N = 5$, $R = 5$, а список допустимых ходов - это $(1, 2), (2, 1), (1, 1)$.
2. Постройте алгоритм, который определяет победителя и его выигрышную стратегию в общем случае и оцените его сложность.

2 Как модифицировать алгоритм Флойда-Уоршелла, чтобы он находил не только длины кратчайших путей между всеми парами вершин, но и сами пути?

3 Перед Дедом Морозом всталая задача развоза подарков. В его распоряжении имеется мешок вместимостью W литров и много разных подарков, каждый из которых встречается в неограниченном количестве экземпляров (отличие этой задачи от семинарской состоит в том, что там каждого подарка было по одному экземпляру). Помогите ему найти оптимальный набор подарков для очередного вояжа, если каждый подарок характеризуется объемом w_i в литрах и количеством радости r_i , которую он доставит ребенку. Объемы целочисленные. В Великом Устюге принято придумывать не хуже чем псевдополиномиальные решения.

4 Снегурочка производит программное обеспечение для шоколадных банкоматов разных стран мира. Банкомату нужно выдавать запрашиваемую ребенком сумму минимальным количеством шоколадных медалей.

1. Если у банкомата есть медали номиналом 1, 2, 5, 10, 20, 50, а сумма — 71, то набор медалей будет $50 + 20 + 1$. Постройте алгоритм, который будет решать задачу для данного набора медалей и произвольной суммы, которая является входом задачи.
2. Постройте алгоритм, который решает задачу, когда на вход помимо суммы подаются и номиналы медалей. Является ли он полиномиальным?

5 Назовём последовательность x_1, x_2, \dots, x_n строго унимодальной, если существует такой индекс k , что $x_1 < x_2 < \dots < x_k > x_{k+1} > \dots > x_n$. Постройте алгоритм, который получает на вход конечную последовательность натуральных чисел и находит её самую длинную строго унимодальную подпоследовательность.

6 На вход задачи подаётся число n и последовательность целых чисел a_1, \dots, a_n . Необходимо найти такие номера i и j ($1 \leq i < j \leq n$), что сумма $\sum_{k=i}^j a_k$ максимальна. Постройте линейный алгоритм, решающий задачу.

7 На вход задачи подаются положительные целые числа n , a_1, \dots, a_n , и t . Необходимо проверить, представимо ли число t в виде суммы из некоторых членов последовательности a_1, \dots, a_n . Каждое число разрешено использовать не более одного раза, можно не использовать вовсе. Постройте алгоритм со временем работы $O(nt)$.

8 Субподрядчик Деда Мороза получил отрез ткани $n \times m$ сантиметров. Ему известно, что из куска ткани $a_i \times b_i$ можно спить изделие стоимостью c_i , всего разных типов изделий n . Разрезать ткань можно только прямолинейными разрезами в целых координатах. Дорезать до половины и повернуть ножницы нельзя. Помогите субподрядчику найти оптимальную последовательность разрезов и максимальную стоимость изделий, которые можно изготовить из отреза ткани.