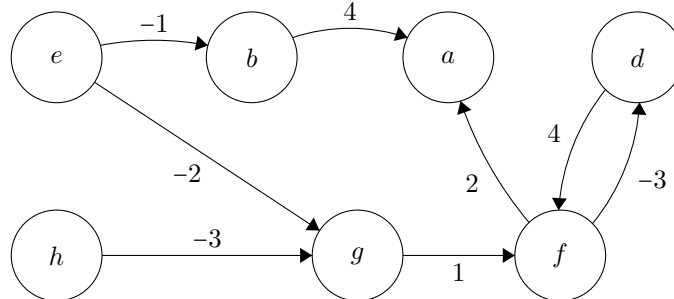


Задание 12. Графы IV: кратчайшие пути II.

Сильно связная компонента ориентированного графа - это множество вершин, каждые два элемента которого достижимы друг из друга.

1 Примените алгоритм Беллмана-Форда к графу для поиска кратчайших путей от вершины e до всех остальных



2 Пусть сильно связный граф, в котором кратчайшие расстояния между всеми парами вершин имеют реберную длину не более k , называется *k -плотненьким*. Предложите эффективный алгоритм поиска кратчайших путей в *k -плотненьких* графах. Оцените его асимптотику.

3 Постройте алгоритм, определяющий, содержит ли данный неориентированный граф простой цикл длины 4. Решите в двух случаях, когда имеется в виду реберная длина и вес пути.

4 Дан ориентированный граф на n вершинах ($V = 1, \dots, n$), который получен из графа-пути (рёбра которого ведут из вершины i в $i + 1$) добавлением ещё каких-то m данных ребер. Найдите количество сильно связных компонент в этом графе за $O(m \log m)$.

5 В орграфе есть ребра отрицательного веса, но нет циклов с отрицательным весом. Предложите алгоритм, который находит для данной вершины вершину, **от которой** она удалена на максимальное расстояние. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

6 Кастелянша ходит по общежитию и производит устное внушение о последствиях ненадлежащего поведения живущих там студентов. Между двумя комнатами или можно пройти напрямую, или нельзя (в таком случае можно пройти через промежуточные комнаты). В общежитии $|V|$ комнат и $|E|$ коридоров между ними. Время прохождения каждого коридора известно и положительно. У одной комнаты может быть не более k коридоров. Оказавшись в комнате, кастелянша всегда производит воспитательную работу, время которой составляет 3 минуты. Постройте алгоритм, позволяющий кастелянше по заданной конфигурации общежития быстро узнать, за какое минимальное время она может прийти от своего кабинета до заданной комнаты, докажите его корректность и оцените асимптотику.

7 Диаметр графа - это максимальное кратчайшее расстояние между двумя его вершинами. Рассмотрим граф состояний кодового замка с 4 разрядами. Каждая комбинация соответствует одной вершине. Ребрами соединены комбинации, между которыми возможен переход вращением одного из колесиков на единицу вверх или вниз. Все ребра имеют единичный вес. Найдите диаметр этого графа.