

Задание 9. Графы I.

Дерево - это связный ациклический граф.

Паросочетание - это такое множество рёбер, что никакие два из них не имеют общей вершины.

Независимое множество в неориентированном графе - это множество вершин, попарно не соединенных ребрами.

1 Вам нужно выбраться из лабиринта. Вы не знаете, сколько в нем комнат, и какая у него карта. По всем коридорам можно свободно перемещаться в обе стороны, все комнаты и коридоры выглядят одинаково (комнаты могут отличаться только количеством коридоров). Пусть m - суммарное количество коридоров между комнатами. Предложите алгоритм, который находит выход из лабиринта или доказывает, что его нет, за $O(m)$ переходов между комнатами. В вашем расположении имеется неограниченное количество монет, которые вы можете оставлять в комнатах. Минотавр мертв, так что в лабиринте больше никого.

2 Предложите алгоритм, выясняющий, есть ли в неориентированном графе циклы нечетной длины. Оцените асимптотику его работы. Докажите его корректность.

3 Предложите $O(|V| + |E|)$ алгоритм поиска максимального по размеру независимого множества в дереве.

4 На вход задачи поступает описание двудольного графа $G(L, R, E)$, степень каждой вершины которого равна двум. Необходимо найти максимальное паросочетание в G (которое содержит максимальное количество рёбер). Предложите алгоритм, решающий задачу за $O(|V| + |E|)$.

5 На вход задачи поступает граф $G(V, E)$ в виде списка исходящих ребер для каждой вершины. Опишите алгоритм, переводящий это представление графа в представление в виде матрицы смежности...

6 ...и наоборот. Докажите корректности и оцените сложность обоих алгоритмов.