

## Задание 14. Динамическое программирование.

**1** Два афериста играют в поезде в следующую игру. На поле из  $(N + 1) \times (N + 1)$  клеток (нумерация от 0 до  $N$ ) в клетке  $(0, 0)$  стоит фишка. Её разрешено двигать из клетки с координатами  $(x, y)$  в клетку с координатами  $(x + a_i, y + b_i)$ , где пары неотрицательных целых чисел  $(a_i, b_i)$  обговорены перед началом игры; при этом  $a_i$  и  $b_i$  не равны нулю одновременно. Выигрывает тот игрок, который первым вывел фишку в клетку, находящуюся на расстоянии не менее чем  $R$  от  $(0, 0)$ . Необходимо определить, кто из игроков выигрывает при безошибочных действиях соперника. Игроки ходят по очереди, пропускать ход нельзя.

1. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию при безошибочной игре соперника, если  $N = 5$ ,  $R = 5$ , а список допустимых ходов - это  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 1)$ .
2. Постройте алгоритм, который определяет победителя и его выигрышную стратегию в общем случае и оцените его сложность.

**2** Как модифицировать алгоритм Флойда-Уоршелла, чтобы он находил не только длины кратчайших путей между всеми парами вершин, но и сами пути?

**3** Перед Дедом Морозом встала задача развоза подарков. В его распоряжении имеется мешок вместимостью  $W$  литров и много разных подарков, каждый из которых встречается в неограниченном количестве экземпляров (отличие этой задачи от семинарской состоит в том, что там каждого подарка было по одному экземпляру). Помогите ему найти оптимальный набор подарков для очередного вояжа, если каждый подарок характеризуется объемом  $w_i$  в литрах и количеством радости  $r_i$ , которую он доставит ребенку. Объемы целочисленные. В Великом Устюге принято придумывать не хуже чем псевдополиномиальные решения.

**4** Снегурочка производит программное обеспечение для шоколадных банкоматов разных стран мира. Банкомату нужно выдавать запрашиваемую ребенком сумму минимальным количеством шоколадных медалей.

1. Если у банкомата есть медали номиналом 1, 2, 5, 10, 20, 50, а сумма — 71, то набор медалей будет  $50 + 20 + 1$ . Постройте алгоритм, который будет решать задачу для данного набора медалей и произвольной суммы, которая является входом задачи.
2. Постройте алгоритм, который решает задачу, когда на вход помимо суммы подаются и номиналы медалей. Является ли он полиномиальным?

**5** Назовём последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n$  строго унимодальной, если существует такой индекс  $k$ , что  $x_1 < x_2 < \dots < x_k > x_{k+1} > \dots > x_n$ . Постройте алгоритм, который получает на вход конечную последовательность натуральных чисел и находит её самую длинную строго унимодальную подпоследовательность.

**6** На вход задачи подаётся число  $n$  и последовательность целых чисел  $a_1, \dots, a_n$ . Необходимо найти такие номера  $i$  и  $j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ), что сумма  $\sum_{k=i}^j a_k$  максимальна. Постройте линейный алгоритм, решающий задачу.

**7** На вход задачи подаются положительные целые числа  $n$ ,  $a_1, \dots, a_n$ , и  $t$ . Необходимо проверить, представимо ли число  $t$  в виде суммы из некоторых членов последовательности  $a_1, \dots, a_n$ . Каждое число разрешено использовать не более одного раза, можно не использовать вовсе. Постройте алгоритм со временем работы  $O(nt)$ .

**8** Субподрядчик Деда Мороза получил отрез ткани  $n \times t$  сантиметров. Ему известно, что из куска ткани  $a_i \times b_i$  можно шить изделие стоимостью  $c_i$ , всего разных типов изделий  $n$ . Разрезать ткань можно только прямолинейными разрезами в целых координатах. Дорезать до половины и повернуть ножницы нельзя. Помогите субподрядчику найти оптимальную последовательность разрезов и максимальную стоимость изделий, которые можно изготовить из отреза ткани.