18.12.25

ОЦЕНКА СЛОЖН. РАЗНЫХ АЛГ.

```
def print_hehehe(n):
    for i in range(n):
        print("hehehe")
```

$f(n)$ – КОЛ-ВО ПЕЧАТЕЙ СТРОКИ

$$f(n) = \Theta(?)$$

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n = \Theta(n)$$

```
def print_hehehe(n):
    for i in range(n):
        for (j=1; j<n; j*=2):
            print("hehehe")
        for (j=0; j<i; j+=1):
            print("hehehe")
```

$m = \log_2 j$; $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$j = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^m < n$; $j = 2^m$

$g(n)$

$n = 5$

$\log_2 n = 2$, хвостик

$i = 1, 2, 4$

$m = 0, 1, 2$

$$g(n) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{m=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 1 + \sum_{j=0}^{i-1} 1\right] = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\log n + i\right] =$$

$$= \log n \sum_{i=0}^{n-1} 1 + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} i}_{0+1+\ldots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}} = n \log n + \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= n \log n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \Theta(n^2)$$

ПОДЗАДАЧА

```
for (j=1; j<n; j*=2):
    print("hehehe")
```

$h(n)$

$j = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^m$

УСЛОВИЕ ВЫХ. ИЗ ЦИКЛА: $2^{M+1} \geq n$ $\quad\Big|\ \log_2$ С ОБЕИХ СТОРОН

$$\log_2\left(2^{M+1}\right) \geq \log_2 n$$

$$M+1 \geq \log_2 n$$

$$M = \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$$

$$h(n) = \Theta(\log n)$$

СКОЛЬКО БИТ В ЗАПИСИ ЧИСЛА N?

ЧИСЛО БИТ $= \lceil \log_2 (N+1) \rceil$

НАПРИМЕР:

$$29 = 1\cdot 16 + 1\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = \underbrace{1\ 1\ 1\ 0\ 1}_{5\ \text{БИТ}}{}_2$$

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

АЛГ. 1:

```
def Fk_def(k):
    if (k < 2):
        return k
    return Fk_def(k-1) + Fk_def(k-2)
```

СЛОЖН. ОТ ДЛИНЫ ВХОДА!

n — ДЛИНА ВХОДА

$n = \log_2 k$

В БИТ. ЗАПИСИ ДОБАВЛ. 0 В КОНЦЕ — ЭТО УМН. ЧИСЛА НА 2

$5 = 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1$

$1\ 0\ 1_2$ $\qquad 2^k$

$1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 8 + 2 = 10$

$1\ 0\ 1\ 0$

КАКОВА СЛ. АЛГ. 1?

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \geq F_{k-1} + F_{k-1} = 2F_{k-1} \geq 4F_{k-3} \geq \ldots \geq 2^{k/2} F_p = 2^{\frac{k}{2}}$$

$F_k \geq F_{k-1}$

$p = 0$ или 1

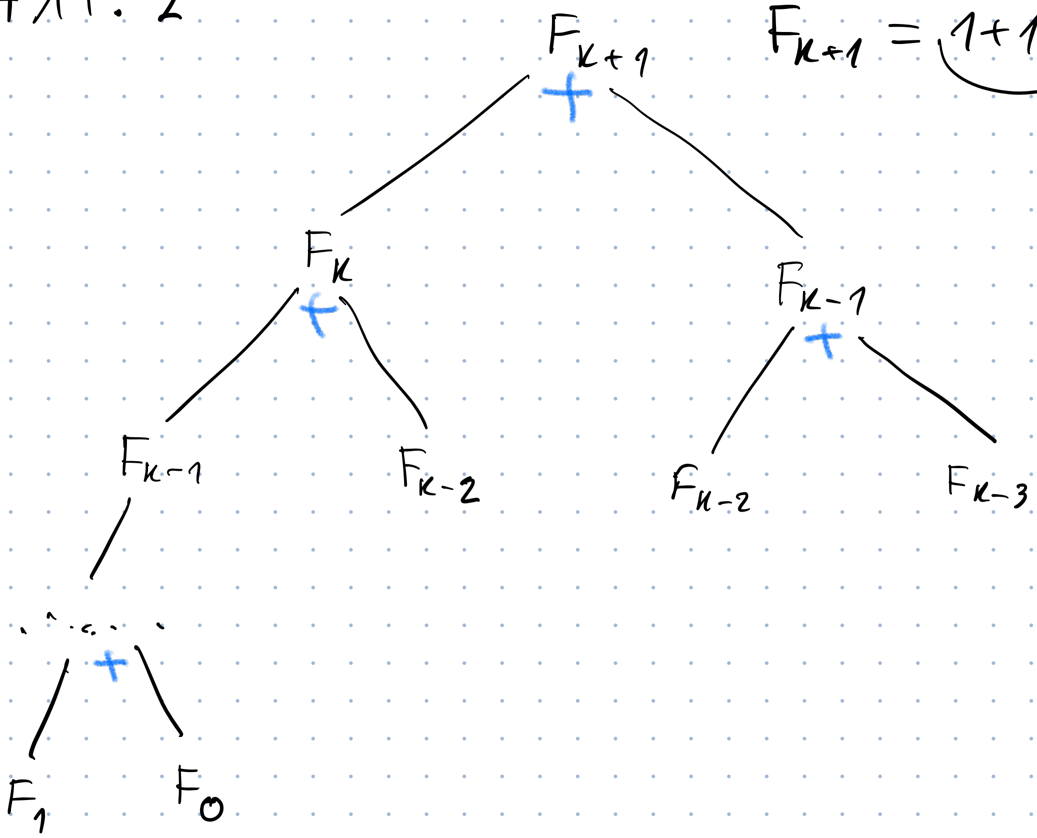
$$\underbrace{k+1,\ k-1,\ k-3,\ k-5,\ \ldots,\ 1}_{\frac{k}{2}\ \text{ШАГОВ}}$$

ИЗ ЧИСЛА F_k КАЖДОЙ 1 СООТВ. return ЗА $\Theta(1)$

ВРЕМЯ РАБ. АЛГ. $= \Omega(2^{\frac{k}{2}})$

$k = 2^n$ $\qquad \Omega(2^{2^{n-1}})$

АЛГ. 2



$$F_{k+1} = \underbrace{1+1+1+1+\ldots+1}_{\geq 2^{\frac{k}{2}}}$$

БУДЕМ СОХРАНЯТЬ ПРОМЕЖУТ. ЗНАЧ., ЧТОБЫ ПЕРЕИСПОЛЬЗ.

k	0	1	2	3	4	5	.....	..	$k-1$	$k-1$	k
F_k	0	1					.....	..			

```
def Fk_mem(k):
    Fs = [0,1]
    for _ in range(k-1):
        Fs.append(Fs[-1]+Fs[-2])
    return Fs[-1]
```

сложн.: время: $\Theta(k)$, или $\Theta(2^n)$
память $\Theta(2^n)$

БЫСТРОЕ ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots a}_{b}$
$\in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{r} \times \; 1\,2\,3\,4 \\ 5\,6\,7 \\ \hline \ldots\ldots \end{array}$$

a, b имеют дв. предст.

$a = a_1 a_2 \ldots a_p$
$b = b_1 b_2 \ldots b_q$

биты

$$a \cdot b = (a_1 \cdot 2^{p-1} + a_2 \cdot 2^{p-2} + a_3 \cdot 2^{p-3} + \ldots + a_p \cdot 2^0)(b_1 2^{q-1} + \ldots + b_q \cdot 2^0) =$$

$$= (a_1 \cdot 2^{p-1} + \ldots + a_p) \cdot b_1 \cdot 2^{q-1} + (\ldots) \cdot b_2 \cdot 2^{q-2} + \ldots + (\ldots) \cdot b_q \cdot 2^0$$

$$\begin{array}{rl} \times \; a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_p & \\ b_1\, b_2 \ldots b_q & \\ \hline \boxed{a_1\, a_2 \ldots\ldots a_p} & \text{если } b_q = 1 \\ + \; \boxed{a_1\, a_2 \ldots a_p}\, 0 & \text{если } b_{q-1} = 1 \\ \ldots\ldots & \\ \hline \text{бит. предст. } a \cdot b & \end{array}$$

; 0 в противн. сл.

```
def multiply(a, b):
    result = 0
    for i in range(0, q-1):
        result += a · b_{q-i} · 2^i
```

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ штук}}$$

$$a^{22} = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = (a^{11})^2 = ((a^5)^2 \cdot a)^2 = (((a^2)^2 \cdot a)^2 \cdot a)^2$$

21 УМНОЖ.

6 УМНОЖ.

$$a^b = a^{b_1 b_2 b_3 \ldots b_q} = a^{b_1 \cdot 2^{q-1} + b_2 \cdot 2^{q-2} + \ldots + b_q \cdot 2^0} =$$

$$= a^{b_1 \cdot 2^{q-1}} \cdot \cancel{a^{b_2 \cdot 2^{q-2}}} \cdot \ldots \cdot a^{b_q \cdot 2^0}$$

НУЛЕВЫЕ БИТЫ НЕ ВНОС. ВКЛ. В РЕЗУЛЬТАТ

ПРИМЕР: $b = 1101$

$$a^b = a^{1101} = a^{1000+100+1} = a^{1000} \cdot a^{100} \cdot \cancel{a^0} \cdot a^1 =$$

$$= (\underbrace{a^{1000}}_{a^8} \cdot \underbrace{a^{100}}_{a^4}) \cdot a^1 = ((\underbrace{\underbrace{a^{100}}_{a^4} \cdot \underbrace{a^{10}}_{a^2}}_{a^{12}})^{10}) \cdot a^1 = (((a^{10} \cdot a^1)^{10})^{10}) \cdot a^1$$

$$a^{12} = (a^6)^2$$

$$curr = a^p \longrightarrow a^{p0} : curr = curr^2$$

$$\longrightarrow a^{p1} : curr = curr^2 \cdot a$$

$a^{\boxed{1}\boxed{1}01}$

$a^{\boxed{1}} \to a^{11}$

curr $= a$ $\quad a^2 \cdot a$

$$a^{10} = (a^1)^2$$

$$a^{11} = (a^1)^2 \cdot a = a^{10} \cdot a^1 = a^{11}$$

АЛГ.

из q бит

```
def pow(a, b)
    curr = a
    for i in range(2, q+1):
        curr *= curr
        if (b_i == 1):
            curr *= a
```

$\Theta(q)$ умнож.

БЫСТР. ФИБ.

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

возв. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в k-ю степень быстро

умножений будет $\Theta(\log_2 k)$, или $\Theta(n)$

АЛГ. 1: $\Theta(2^{2^{n-1}})$

АЛГ. 2: $\Theta(2^n)$

АЛГ. 3: $\Theta(n)$