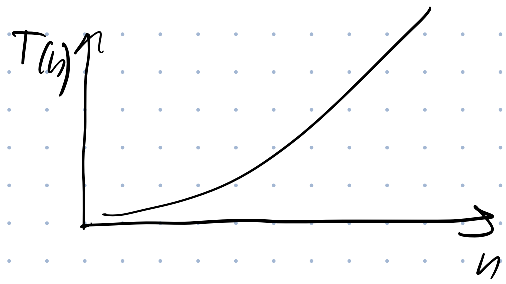
25.12.25. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

РЕКУРРЕНТЫ



$$\underset{\text{time}}{T(n)} = \underset{\in \mathbb{N}}{a}\, T\left(\underset{>1}{\frac{n}{b}}\right) + \underset{\text{ф-я}}{f(n)}$$

merge sort (СОРТИРОВКА СЛИЯНИЕМ)

≤ ≤ ≤ ... ≤	≤ .... ≤

КАК ОБЪЕД. 2 ОТСОРТ. МАССИВА В ОДИН?

ПРОЦЕДУРА merge:

i

l =

0	1	4	5	9

k

answer =

0	1	2	2	3	3	4	5	5	7	7	7	9

r =

2	2	3	3	5	7	7	7

j

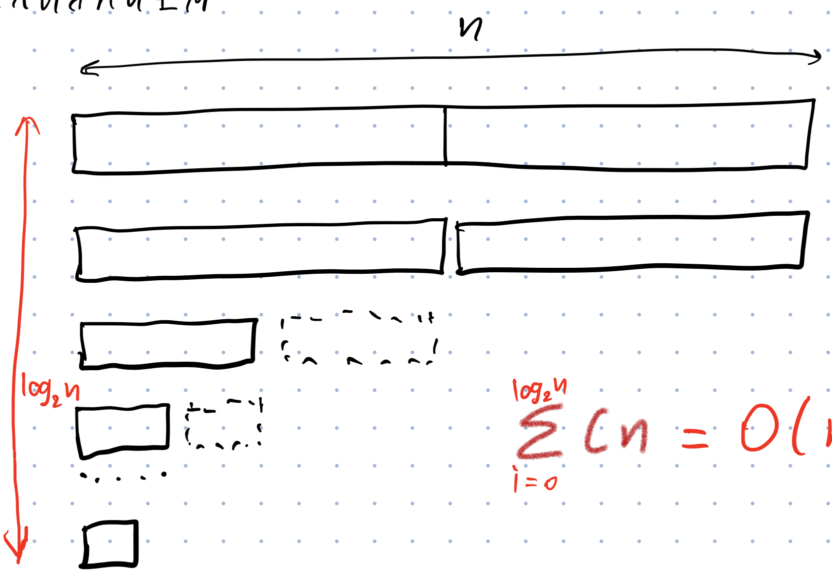
ДЛИНЫ МАССИВОВ – n И m

```
if (l[i] < r[j]):
    В ОТВЕТ l[i]
    i++
```

```
def merge(l, r):
    answer = []
    i, j = 0, 0
    ЦИКЛ НА n+m ИТЕР.
        O(1) ОПЕР.: СРАВН. И ЗАПИСЬ
```

$O(n+m)$

СОРТ. СЛИЯНИЕМ



Cn

$c\frac{n}{2}+c\frac{n}{2}$

$4\cdot c\cdot\frac{n}{4}$

$\ldots \quad \ldots$

1) sort l
2) sort r
3) merge

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n} Cn = O(n\log n)$$

$T(n)$ – время раб. merge sort

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right)+T\left(\frac{n}{2}\right)+C\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\right) = 2T\left(\frac{n}{2}\right)+Cn$$

Условие прекращ. рекурс. вызовов – достиж. длины масс. 1

Оценим рекурр. $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+Cn$

$$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+Cn = 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right)+C\frac{n}{2}\right]+Cn =$$

$$= 4T\left(\frac{n}{4}\right)+\cancel{2}\cdot C\cdot\frac{n}{\cancel{2}}+Cn = 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right)+\underbrace{Cn+\ldots+Cn}_{k} =$$

Доколе? $\frac{n}{2^k} = 1$ – усл. выхода из рек.

$n = 2^k$

$k = \log_2 n$

$$= 2^k\cdot T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right)+\underbrace{Cn+\ldots+Cn}_{\log_2 n} = 2^{\log_2 n}\underset{\text{const}}{\underset{\shortparallel}{T(1)}}+Cn\cdot\log_2 n =$$

$$= n\cdot K+Cn\log_2 n = \Theta(n\log n)$$

МАСТЕР-ТЕОРЕМА (MASTER THEOREM)

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right)+f(n)$$

$a \in \mathbb{N} \quad (a \geq 1)$

$b \in \mathbb{R} \quad (b > 1)$

$c = \log_b a$

1) $\exists \varepsilon > 0 : \quad f(n) = O(n^{c-\varepsilon})$

$T(n) = \Theta(n^c)$

2) $f(n) = \Theta(n^c)$

$T(n) = \Theta(n^c \log n)$

3) $\exists \varepsilon > 0 : \quad f(n) = \Omega(n^{c+\varepsilon})$

условие регулярности:

$\exists k < 1 : \quad k f(n) \geq a f\left(\frac{n}{b}\right)$

$T(n) = \Theta(f(n))$

Примеры:

1) $T(n) = 9T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

$c = \log_2 9 > 3{,}0001$ – 1 случай мастер-теоремы

$T(n) = \Theta(n^{\log_2 9})$

2) $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

$c = \log_2 8 = 3$

– 2 случ.

$T(n) = \Theta(n^3 \log n)$

3) $T(n) = 8T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

– 3 случай

$c = \log_3 8 < 1{,}999 < 2$

условие регулярности:

$k = \frac{17}{18} : \quad k f(n) \geq a f\left(\frac{n}{b}\right)$

$$\frac{17}{18} n^2 \geq 8\left(\frac{n}{3}\right)^2$$

$$\frac{17}{18} \cancel{n^2} \geq \frac{16}{18} \cancel{n^2}$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

4) $T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + (n-1) + n + \ldots =$

$$= T(1) + 2 + 3 + \ldots + n = \underset{\substack{\parallel \\ \text{const}}}{T(1)} - 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

5) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n} \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n = \Theta(n \log n)$

ПОЧЕМУ МАСТЕР-ТЕОР. НЕ ПОДХОДИТ?

$c = \log_2 2 = 1$

2 СЛУЧАЙ? НЕТ!

$$\frac{n}{\log n} \neq \Theta(n^1)$$

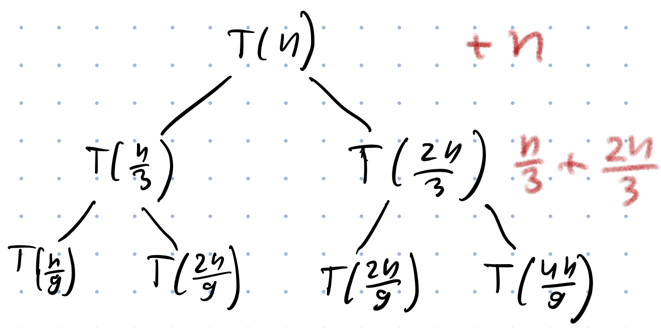
1 СЛУЧАЙ? НЕТ!

$\exists \varepsilon > 0: \frac{n}{\log n} = O(n^{\overset{1}{c} - \varepsilon})$ – ВЕРНО ЛИ? НЕТ, ТАКОГО

ε НЕ СУЩ. => 1 СЛУЧ. НЕ ПОДХ

6) $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n = T\left(\frac{n}{9}\right) + T\left(\frac{2n}{9}\right) + \frac{n}{3} +$

$$+ T\left(\frac{2n}{9}\right) + T\left(\frac{4n}{9}\right) + \frac{2n}{3} + n$$



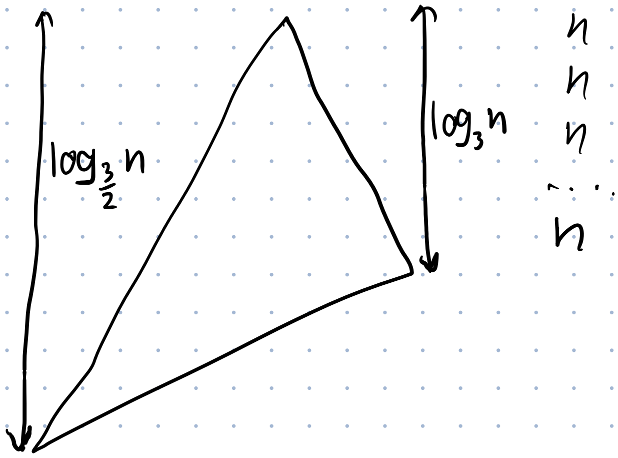
$\frac{n}{9} + \frac{2n}{9} + \frac{2n}{9} + \frac{4n}{9}$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^k = 1^k = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_2^1\,\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$



$$n\log_3 n \le T(n) \le n\log_{\frac{3}{2}} n$$

$$T(n) = \Theta(n\log n)$$

УМНОЖ. 2 n-БИТ. ЧИСЕЛ

1 1 0 1 1 . . . . . 1 0 1

1 1 1 0 0 . . . 0 0 0

$$\Theta(n^2)$$

АЛГ. КАРАЦУБЫ

$$x = ap + b$$
$$y = cp + d \quad ; \; p = 2^{\frac{n}{2}}$$

a, b, c, d – $\frac{n}{2}$ – БИТОВЫЕ ЧИСЛА

$$xy = (ap+b)(cp+d) = \underbrace{ac}\,p^2 + \underbrace{ad}\,p + \underbrace{bc}\,p + \underbrace{bd} =$$

$$n^2$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + Cn \;;\; T(n) = \Theta(n^2)$$

$$= acp^2 + (ad+bc)p + bd =$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

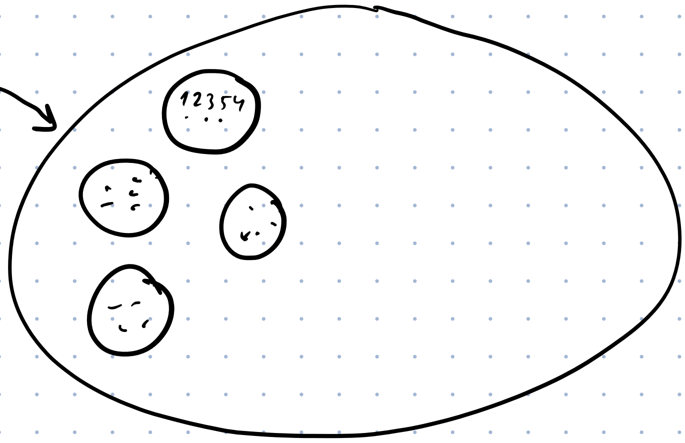
$$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

$$= \underbrace{ac}_{1}p^2 + (\underbrace{(a+b)(c+d)}_{3} - \underbrace{ac}_{1} - \underbrace{bd}_{2})p + \underbrace{bd}_{2}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + Cn; \quad T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 3}\right)$$

ОЦЕНКА СНИЗУ НА СОРТ. СРАВН.

МАСС. ИЗ n ЭЛЕМ. $n!$



НУЖНО НАЙТИ ЕДИНСТВ.
ОБРАТН. ПЕРЕСТ.

1 СРАВН. = 1 БИТ (1/0)

$$\underbrace{\boxed{0\ 1\ 1\ 0 \ldots}}_{K}$$

2^K ВОЗМОЖНЫХ КОДОВ

$$2^K \geq n!$$

$$K \geq \lceil \log_2 n! \rceil$$

$$\log_2 n! = \log_2 1 + \log_2 2 + \ldots + \log_2 n \leq n \log n = O(n \log n)$$

$$\geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log i \geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} = \Omega(n \log n)$$

$$\boxed{K = \Omega(n \log n)}$$

$$T(n) = n^{\gamma}\, T\left(\frac{n}{a}\right) + n^{k}$$

$\gamma > \frac{1}{2}$

$k > 0$

$a \geq 2$