АЛГОРИТМЫ

КУРС = 0,3 · midterm + 0,4 · final + 0,4 · ДЗ

ДЗ:
- ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (LaTeX)
- ПРАКТ.
- КОНТЕСТЫ НА codeforces

РЕСУРСЫ:
- ЧАТ В ТГ
- Google Classroom
- ГРУППА НА codeforces
- github РЕПОЗИТОРИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СЛОЖНОСТИ (АЛГОРИТМОВ)

АЛГОРИТМЫ:
1) ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ
2) ПОСЛЕДОВ. ОПЕРАЦИЙ
3) ВХОД $\longrightarrow$ ВЫХОД
4) ВХОД - ПОСЛ-ТЬ БИТ ДЛИНЫ n: $\underbrace{10101\ldots01}_{n}$

(3 КАНАЛА)

8-БИТН. БЕЗЗН. ЧИСЛО:

00000001

$\underbrace{640 \times 480 \times 3 \times 8}$

СЛОЖНОСТЬ - ЭТО Ф-Я ОТ n

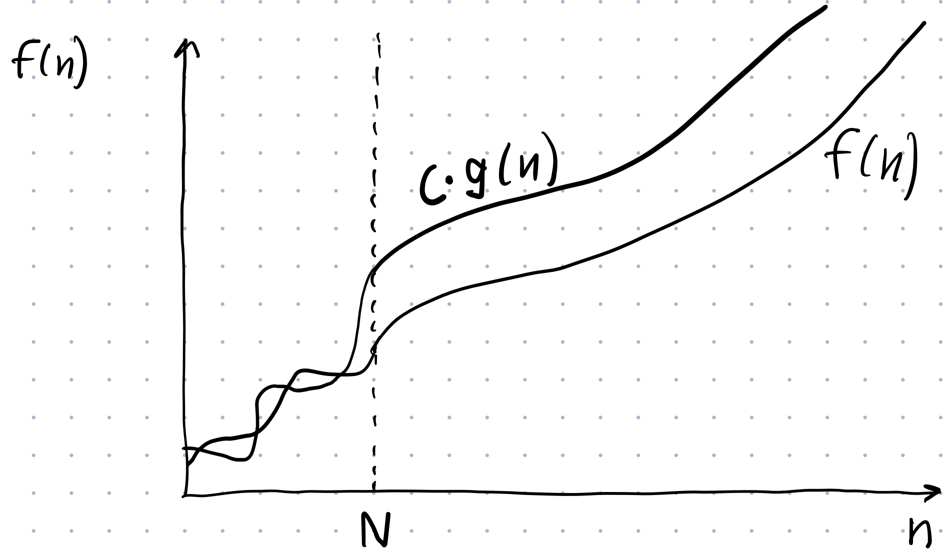
$$f_1(n) = 3n^2 + 4n + 5$$

$$f_2(n) = 2n^2 + 500n$$

$$f_3(n) = 500n^2 + 2 + n^{1,8}$$

def. $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ $\quad f(n) = O(g(n))$:

$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow f(n) \leq C \cdot g(n)$



ПОСМОТРИМ НА КОНКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

$n^3 \overset{\checkmark}{=} O\left(\frac{n^3}{2}\right)$

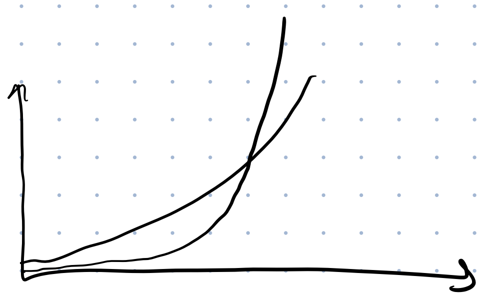
$C = 2;\ N = 1 \quad : \quad n^3 \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^3$

$n^2 \overset{\checkmark}{=} O(n^3)$

$n^2 = O\left(\frac{n^3}{10^5}\right)$

$n^2 - 1000n \overset{\checkmark}{=} O(n^2)$

$10^{-3} n^3 \overset{?}{=} O(n^2)$



ПОСТР. ОТРИЦ. ОПРЕД. $O()$:

$\forall C > 0, \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : f(n) > C \cdot g(n)$

$10^{-3} n^3 > C \cdot n^2$

$10^{-3} n > C$

$n > 1000C$

ТАКОЙ n СУЩЕСТВУЕТ: $n = \lceil 1000C \rceil + 1$

$\hat{n} = \max(N, \lceil 1000C \rceil + 1)$

СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ВЫПОЛНЯЕТСЯ ОТРИЦ. ОПРЕД. O

$O(g(n))$ – МНОЖЕСТВО!

$f(n) \in O(g(n))$

$\cancel{O(g(n)) = f(n)}$ – НЕКОРРЕКТНОЕ ИСПОЛЬЗ. ОПРЕД.

$O(n) \subset O(n^2)$ | $\forall f(n) = O(n) \Rightarrow f(n) = O(n^2)$

ВЕРНО ЛИ, ЧТО

$\exists \varepsilon > 0 : n^{1+\varepsilon} = O(n \log n)$

ПОКАЖЕМ ВЫПОЛН. ОТРИЦ. ОПРЕД.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall C > 0 \quad \forall N \quad \exists n \geq N : n^{1+\varepsilon} > C \cdot n \log n$

n^{ε} vs $\log n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{\varepsilon}}{\log n} \underset{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon n^{\varepsilon - 1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \varepsilon n^{\varepsilon \cancel{-1+1}} = +\infty$$

ПРИМЕР $f(n)$ и $g(n)$ т.ч.

1) $f(n) = O(g(n))$

2) $\nexists \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$

1) $\sin(n)$ и n

НЕ > 0

$\exists$ ПРЕДЕЛ

2) $(-1)^n + 3$ и n

В КЛАССЕ $\to \mathbb{R}_+$

$\exists$ ПРЕДЕЛ

3) c_1 и c_2

$\exists$ ПРЕДЕЛ

4) $((-1)^n \cdot n + n = n((-1)^n + 2)$ и n

$$\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \frac{n((-1)^n+2)}{n} = (-1)^n + 2$$

ВАЖНО ЛИ ОСНОВАНИЕ ЛОГАРИФМА?

$\log_a n \stackrel{?}{=} O(\log_b n)$ $(a, b > 1)$

$$O\left(\frac{\log_a n}{\log_a b}\right)$$

ЧИСЛЕННАЯ КОНСТАНТА

$$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$$

ОСН. НЕ ВАЖНО, ЛОГАРИФМ В КУРСЕ $\log n$

КАКОЕ САМОЕ МАЛ. O ?

$O(1)$?

$O(\frac{1}{n})$?

$O(\frac{1}{n^{100}})$?

НАИЛУЧШИЕ ОЦЕНКИ

$O(n^5)$

РАССМ. МН. Ф-Й n^k, $k \in \mathbb{N}$: $n^1, n^2, \ldots$

НАЙДЁМ min k Т.Ч. $f(n) = O(n^k)$

ЭТО БУДЕТ НАИЛУЧШ. ВЕРХН. ОЦ. В КЛАССЕ ПОЛИН. С ЦЕЛЫМИ СТЕПЕНЯМИ

$$\frac{n}{\log n} = O(n^k) \quad \forall k \in \mathbb{R},\ k \geq 1$$

ДОКАЖЕМ, ЧТО ПРИ $k=1$ ОЦ. НАИЛУЧШ. (ПРИ $k<1$ ОЦ. НЕ ВЫП.)

$$\frac{n}{\log n} \neq O(n^k) \text{ ПРИ } k<1$$

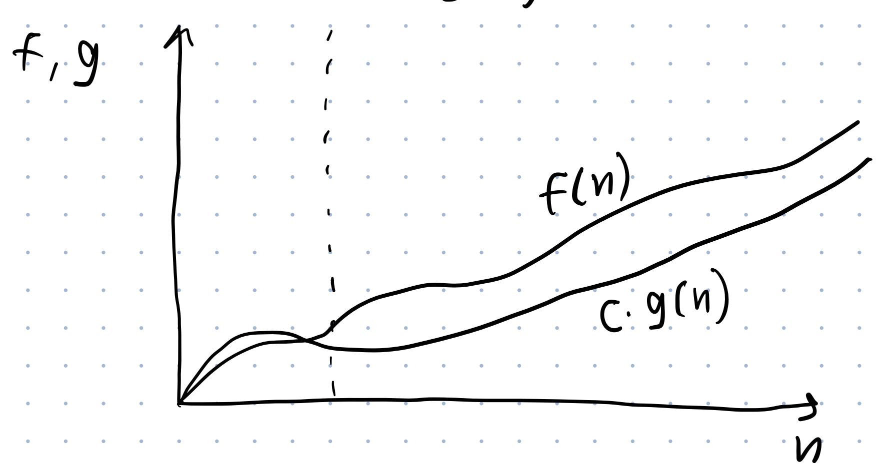
$$k = 1-\varepsilon$$

$$O(n^{1-\varepsilon})$$

$$\frac{1}{\log n} \quad O(n^{-\varepsilon})$$

def. $f(n) = \Omega(g(n))$: // ОЦЕНКА СНИЗУ, "ОМЕГА БОЛЬШОЕ"

$\exists C>0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \longrightarrow f(n) \geq C \cdot g(n)$

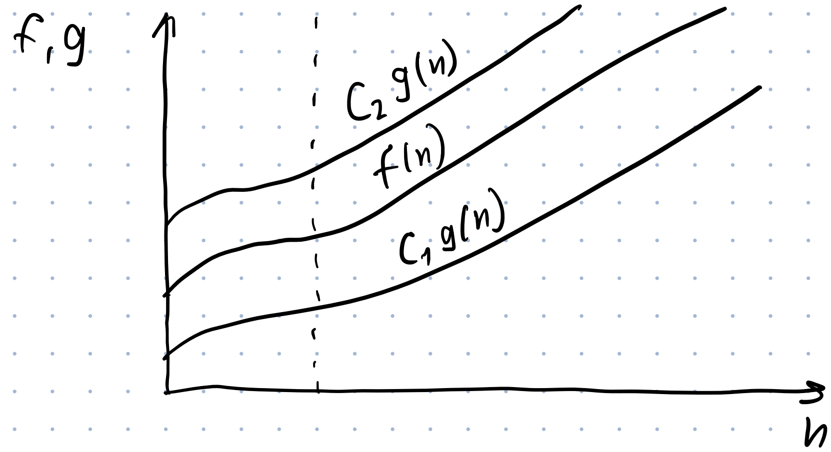


$$\left.\begin{array}{l} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

"ТЕТА БОЛЬШОЕ"

$\exists\, C_1, C_2 > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \hookrightarrow C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$

$f(n) = \Theta(f(n))$



ПРИМЕР:

$n^3 - 5n + 3 = \Theta\left(\frac{n^3}{2}\right)$

$C_1 = 1$

$C_2 = 2$

$N = 100$

$$C_1 \cdot g(n) = \underbrace{1 \cdot \frac{n^3}{2} \leq n^3 - 5n + 3}_{\text{при } n \geq 100} \leq 2 \cdot \frac{n^3}{2} = n^3 = C_2 \cdot g(n)$$

ПРИМЕР ТАКОЙ Ф-ЦИИ, ЧТО В КЛАССЕ ОЦ. n^k Ω НЕ СОВП. С O

$f(n) = n \cdot (\sin n + 3)$

$f(n) = \Theta(n)$

НЕ ПОДХОДИТ, ОЦ. СОВП.

$f(n) = \left(1 + (-1)^n\right) n + \left(1 + (-1)^{n+1}\right) n^2$