$\to 0$

$h_1 = n \cdot f_1(n) \leq n \cdot Cn = Cn^2 \leq Cn^3 \leq Cn^4$

$h_1(n) = O(n^2)$

$\boxed{f_1(n) = n} \to \boxed{h_1(n) = n^2}$

$h_1(n) \geq \quad \frac{n}{n} \leq n^4$

$f_1(n) = 5 \Rightarrow h_1(n) = 5n$

$f_1(n) = \frac{1}{n} \to h_1(n) = 1$

$\frac{1}{n^2} \to h_1 = \frac{1}{n}$

Пусть $V(n)$ — наих. оцен. (лучшая)

$\boxed{h_1(n) \geq V(n)}$ $\forall n \geq N$

$f_1(n) = \frac{V(n)}{n^2} \to h_1(n) = \frac{V(n)}{n}$

$\forall n \geq N$

$h_2(n) = n^2(1 + f_2(n)) \leq n^2(1 + Cn) \leq n^3 \cdot (C+1)$

$f_2(n) = n \to n^2(1+n) = n^3 + n^2$

$h_2(n) = n^2 (1 + \underbrace{f_2(n)}_{\geq 0}) \geq n^2 \Rightarrow \Omega(n^2)$

$f_2(n) = 1 \Rightarrow h_2(n) = 2n^2$

$h_2(n) > 0$

$f_i(n) \leq 0$

3. Известно, что для семейства функций $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ справедливо

$$\to \exists C \geqslant 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, \forall n \geqslant N : \boxed{f_i(n) \leqslant Cn.} \; - O(n)$$

1. Верно ли, что $f_1 + f_2 = O(n)$?

2. Определим $g(n) = f_1(n) + f_2(n) + \ldots + f_n(n)$. Верно ли, что $g(n) = O(n)$? При положительном ответе приведите доказательство, при отрицательном — контрпример и лучшую верхнюю оценку.

3. Приведите верхние и нижние оценки на функции $h_1(n) = n \times f_1(n)$, $h_2(n) = n^2 \times (1 + f_2(n))$ и приведите примеры функций f_1 и f_2, на которых эти оценки достигаются.

1. $f_1 + f_2$

$\exists C \geq 0$

$\left.\begin{matrix} f_1 \leq Cn \\ f_2 \leq Cn \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1 + f_2 \leq \boxed{2C}\, n$

$\forall n \geq N$

$\forall n \geq N$

② $g(n) = f_1(n) + \ldots + f_n(n) \leq \overbrace{Cn + \ldots + Cn}^{n} = Cn^2$

$g(n) = O(n^2)$

$f_i(n) = n$

$g(n) = n + \ldots n = n^2 \neq O(n)$

4. Докажите, что $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$

$C \cdot (n \log n)$

$\log(n(n-1)) \geq 2\log n$

$n^2 - n \geq \frac{n^2}{2}$

$\log(n!) \leq \log(n \cdot \underbrace{(n-1)}_{\leq n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{1}_{\leq n}) \leq \log(n^n) = n \log n.$

$\log(n!) = \log(n \cdot \underbrace{(n-1)}_{\geq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{1}_{\geq 1}) \geq \log(n(n-1) \ldots \lceil \frac{n}{2} \rceil) \geq$

$n \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \quad n-1 \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \quad \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

MIKHAIL POPOV 20:20

log n! = log(n) + log(n - 1) + ... log(1)

$\geq$

$\geq \log\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq$

$n \geq 3$

$\geq \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} = \frac{n}{3}(\log n - \log_2 3) \geq \frac{n}{6} \log n$

$\log_2 3 < 2, \; n \geq 16$

1. Дана программа

```
for (i = 1; i < n; i += 1 ) {
  for (j = 0; j < i; j += 1) {
    печать ("алгоритм")
  }
}
```

Пусть $g(n)$ обозначает число слов "алгоритм", которые напечатает соответствующая программа. Найдите Θ–асимптотику $g(n)$.

i

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Theta(n^2)$$

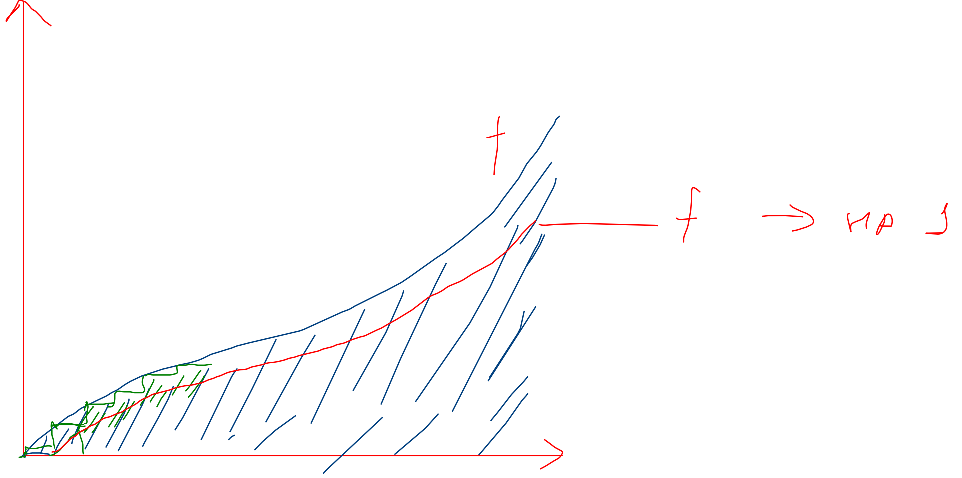
$n \geq 2$

$$\frac{n}{2} \leq n-1$$

$n \geq 2$

$$\frac{n^2}{\boxed{4}} \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n \cdot n}{\boxed{2}}$$

$\leq n$



① сумм. n.n

② $\sum_{k=1}^{\log_2 n} 2^k = \Theta\left(\int_0^{\log_2 n} 2^k \, dk\right)$

$2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$

~~Всего~~ $\cdot \underbrace{\Theta(n)}_{3/4} \left(\underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + \ldots}_{1+2+3+4}\right) < n$

6. Дана программа

```
for (bound = 1; bound < n; bound *= 2) {
    for (i = 0; i < bound; i += 1) {
        for (j = 0; j < n; j += 2)
            печать (“алгоритм”)
        for (j = 1; j < n; j *= 2)
            печать (“алгоритм”)
    }
}
```

1. 2 3 4

$k = 0$

k – пос. ит.

$\boxed{\frac{n}{2} < \underbrace{1 \cdot 2^k}_{j} < n}$

$\underbrace{\log \frac{n}{2}}\leq k$

3: $\Theta(n)$

4: $\Theta(\log n)$

$2^k < n.$

$\boxed{3+4: \ \Theta(n)}$

$\lg < k < \log n$

$C_3 n \leq C_3 n + \underbrace{C_4 \log n}_{0 \leq} \leq f_3 + f_4 \leq C_1 n + C_2 \cdot \underbrace{\log n}_{\leq n} \leq (C_1 + C_2) n$