АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СЛОЖНОСТИ.

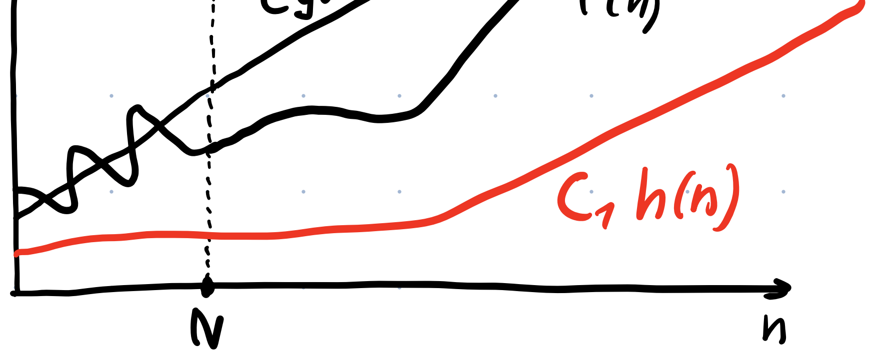
```
def f(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            for k in range(n):
                print("lalala")        } n^3

    for i in range(n):
        for j in range(n):             } n^2     ) x2
            print("lalala")                      ) x3
                                                   x10
```

$n^3 + 2n^2$

$5n^3 + 10n^2$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{def.: } f(n) = O(g(n)) \\ &\exists\, C > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N \hookrightarrow f(n) \leq C g(n)\end{aligned}}$$



$f(n) \stackrel{?}{=} O(f(n))$

$$\left.\begin{aligned} c&=1 \\ N&=1 \end{aligned}\right) \qquad \forall n \geq N \hookrightarrow f(n) \leq 1 \cdot f(n)$$

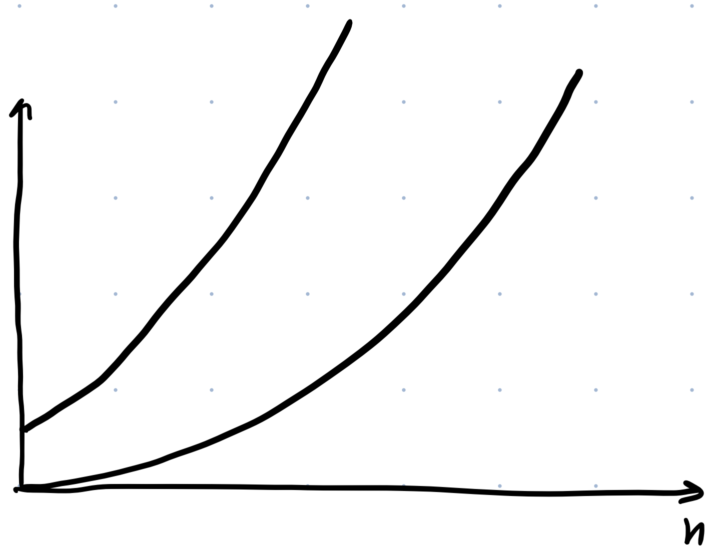
$2n^2 \stackrel{?}{=} O(n^2)$

$N = 1$

$C = 2$

$$2n^2 \leq 2 \cdot n^2$$

$2n^2 + 100n + 3 \stackrel{?}{=} O(n^2)$



$C = 4$

$N = 100$

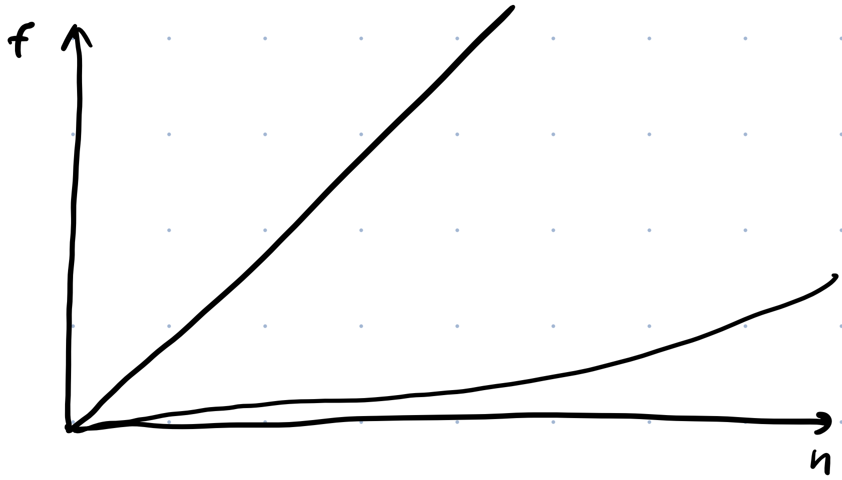
$2n^2 + 100n + 3 \stackrel{?}{\leq} 4 \cdot n^2$

$100n + 3 \leq 2n^2$

$100 + \frac{3}{n} \leq 2n$

$\leq 100 + \frac{3}{100}$ $\qquad \geq 200$

$0{,}0001 n^2 = O(n)$



Отрицание определения:

$\forall C > 0,\ \forall N \ :\ \exists n \geq N \hookrightarrow f(n) > C g(n)$

$0{,}0001 n^2 > C n$

$n > 10000 C$

$n = 10000C + 5$

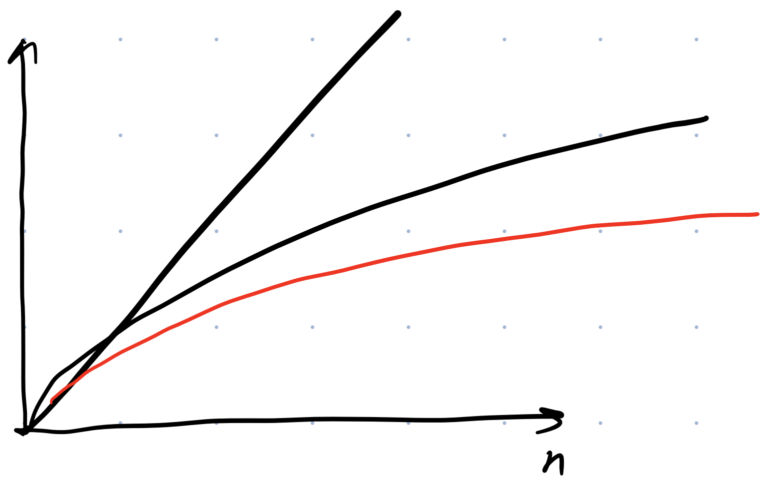
для такого n определение O не выполн.

(выполн. отриц. опред. O)

$\varepsilon > 0$

$n^{1+\varepsilon} \overset{?}{=} O(n \log n)$

неверно



$\forall C > 0,\ \forall N \ :\ \exists n > N \hookrightarrow n^{1+\varepsilon} > n \log n \cdot C$

$n^{\varepsilon} > C \cdot \log n$

$$\frac{n^{\varepsilon}}{\log n} > C$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\varepsilon}}{\log n} \overset{\text{ЛОПИТАЛЬ}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon \cdot n^{\varepsilon-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \varepsilon \cdot n^{\varepsilon} = +\infty$$

$f(n) = O(g(n))$

$f(n) = \Omega(g(n))$:

$\exists C, N : \forall n > N \hookrightarrow f(n) \geq C g(n)$

$\Theta = O + \Omega$

$f(n) = \Theta(g(n))$:

$\exists C_1, C_2 > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$

НАЙДЁМ Ф-Ю С РАЗНЫМИ O и Ω

$f(n)$ – ???? n^3 n

$f(n) = O(n^3)$

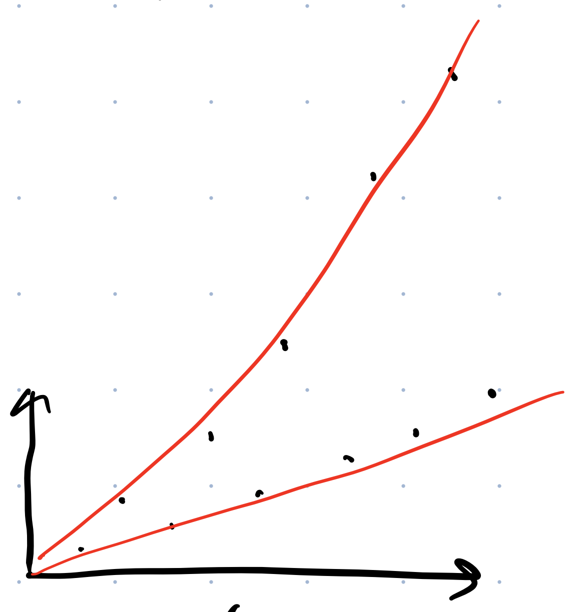
$f(n) = \Omega(n)$

$f(n) \neq O(n^{k_1})$; $k_1 < 3$

$f(n) \neq \Omega(n^{k_2})$; $k_2 > 1$

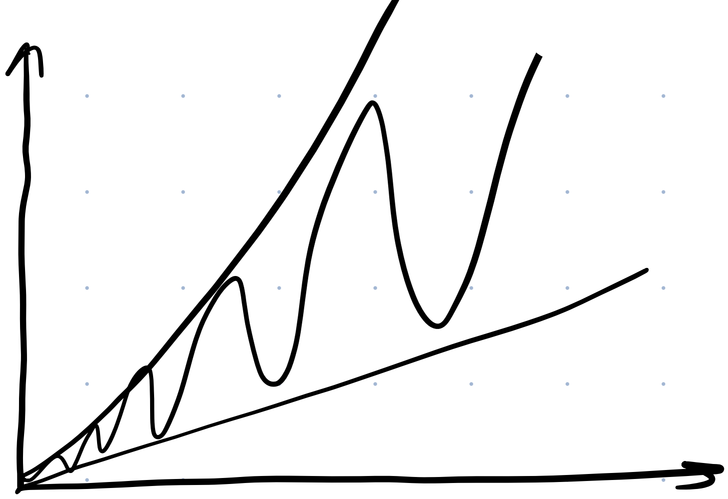
пример:

$$f(n) = \begin{cases} n^3 & ; n \vdots 2 \\ n & ; n \not\vdots 2 \end{cases}$$



ПРИМЕР:

$f(n) = n^{2+\sin n}$



ОЦЕНИМ $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \ominus$

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{i+1-i}{i(i+1)}$$

$$\ominus \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \ldots - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \leq 1 \qquad O(1)$$

$$\geq \frac{1}{2} \qquad \Omega(1)$$

$$f(n) = \Theta(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} = \mathrm{const}$$

$a_i > 0$

$$P(n) = a_1 n^{b_1} + a_2 n^{b_2} + \dots a_k \cdot n^0$$

$$b_1 > b_2 > \dots > 0$$

$$P(n) = O(n^{b_1})$$

$f(n) = 5 + \sin n$

$f(n) = \Theta(1)$

$\lim \frac{f(n)}{1} \nexists$

ОЦЕНКА ЕСТЬ

ПРЕДЕЛА НЕТ

$\exists \quad a_{max} = \max(a_1, \dots, a_k)$

// Let

$$P(n) \le a_{max} n^{b_1} + \dots + a_{max} n^0 = a_{max}(n^{b_1} + \dots + n^0) \le \underbrace{a_{max} \cdot k}_{C} \cdot n^{b_1}$$

$A, B > 0$

ДЛЯ $g(n)$ РАСТУЩЕЙ НЕ МЕДЛ. КОНСТ.:

$$f(n) = A\, g(n) + B \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(g(n))$$

A — МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ КОНСТАНТА

B — АДДИТИВНАЯ

$$f(n) = O(\log_a n)$$

$$= O\left(\frac{\log_e n}{\log_e a}\right)$$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$a + b \stackrel{def}{=}$ ОСТ. ОТ ДЕЛ. $a+b$ НА 5

$0 + 2 \equiv 2 \pmod 5$

СРАВНИМО

$3 + 4 \equiv 2 \pmod 5$

$-1 \equiv 4 \pmod 5$

0 : 0, 5, −5, 10, ...

1 : 1, 6, 11, −6, ...

2 : ....

3 : ....

4 : ....

O, Ω, Θ – ДЕЛЕНИЕ НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

$f(n) = O(g(n))$ // $f(n) \in O(g(n))$

ф-я МН-ВО

НЕВЕРНО:

~~$O(g(n)) = f(n)$~~

~~$f(n) = O(g(n)) = O(h(n))$~~

КАК "РАБОТАЕТ" ДЛИНА ВХОДА?

$$\underbrace{1011010111}_{10\ \text{БИТ}}$$

СЛОЖНОСТЬ ИЗМЕРЯЕТСЯ ОТ ДЛИНЫ ВХОДА В БИТАХ

```
def print_all(inp_val):
    for i in range(inp_val):
        print(i)
```

ДЛИНА БИТ. ЗАПИСИ n (inp_val)

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{00\ldots1}^{n} \\ 00\ldots10 \\ 00\ldots11 \\ \ldots\ldots \\ 1\ldots\ldots \leftarrow \text{inp\_val} \end{array}\right\} \text{inp\_val чисел}$$

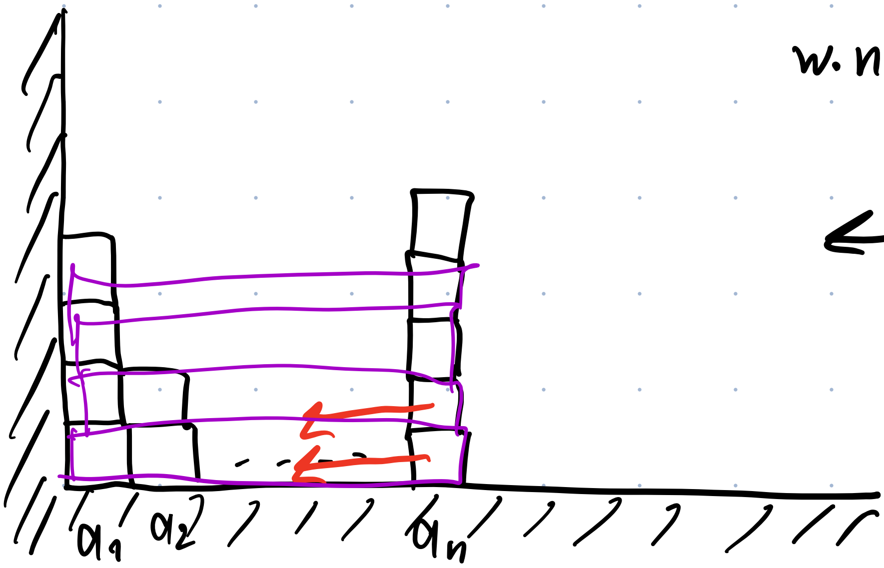
$$100\ldots0 = 2^{n-1}$$

$$11\ldots11 = 2^n - 1$$

$$\text{inp\_val} \le 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

ЧИСЛО ПЕЧАТЕЙ $= \Theta(2^n)$

$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$



$$w \cdot n = s = \frac{g t^2}{2}$$

$$T(n) = O(\sqrt{n})$$