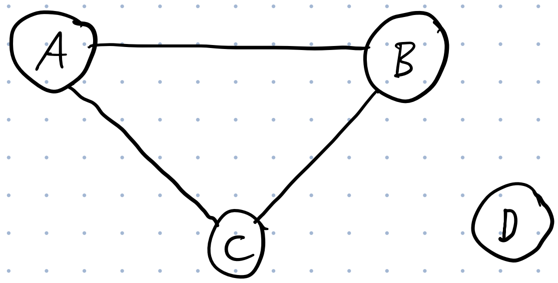
07.04.25 ГРАФЫ I.

$$\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in \mathbb{R}^3$:
1) $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 \in \mathbb{R}^3$
2) $\alpha \bar{r}_1 \in \mathbb{R}^3$; $\alpha \in \mathbb{R}$

ГРАФ $G: (V, E)$

vertices — ВЕРШИНЫ, edges — РЁБРА

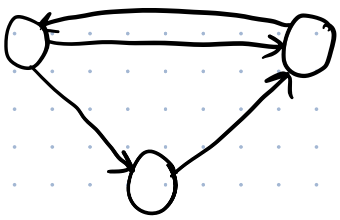


$V = \{A, B, C, D\}$

$E = \{AB, BC, CA\}$

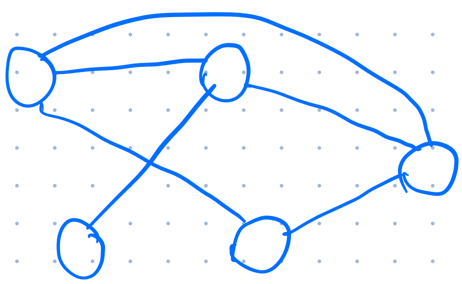
КАКИЕ БЫВАЮТ ГРАФЫ?

1) ОРИЕНТИРОВАННЫЕ/НЕОР.



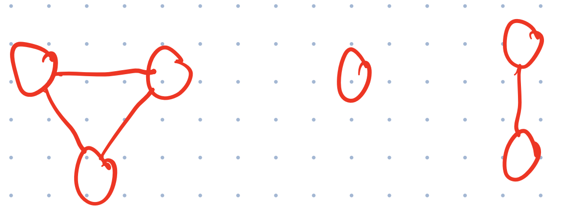
2) СВЯЗНЫЕ/НЕСВЯЗНЫЕ

G':



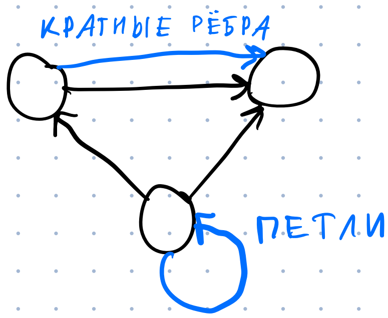
СВЯЗНЫЙ

G'':



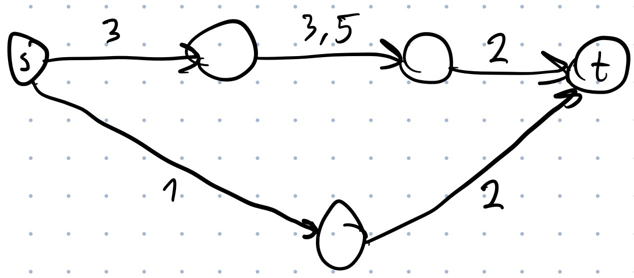
НЕСВЯЗНЫЙ

3)



В КУРСЕ ГРАФЫ БЕЗ ПЕТЕЛЬ И КР. РЁБЕР, ЕСЛИ НЕ УК. ОБРАТНОЕ

4) ВЗВЕШЕННЫЕ И НЕВЗВЕШЕННЫЕ



ПРИМЕР ВЗВЕШ. ГРАФА

ПУТЬ ИЗ ВЕРШ. s В ВЕРШ. t – ЭТО ПОСЛ-ТЬ ВЕРШ $s, p_1, \dots, p_m, t$: $\exists e \in E$ $s \to p_1, p_1 \to p_2, \dots, p_{m-1} \to p_m, p_m \to t$

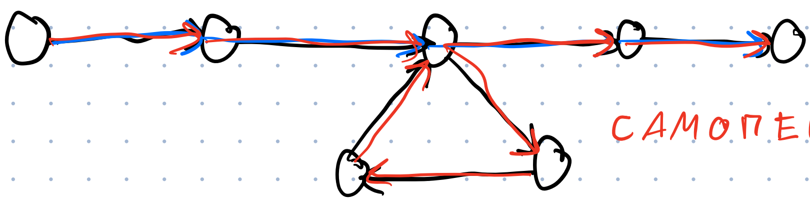
ДЛИНА ПУТИ (ВЕС, СТОИМОСТЬ) – ЭТО СУММА ВЕСОВ РЁБЕР

РЁБЕРНАЯ ДЛИНА – ЧИСЛО РЁБЕР В ПУТИ

КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ – ПУТЬ МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

ПУТИ МОГУТ БЫТЬ САМОПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ:

НЕСАМОПЕР.



САМОПЕРЕСЕК. ПО ВЕРШИНАМ

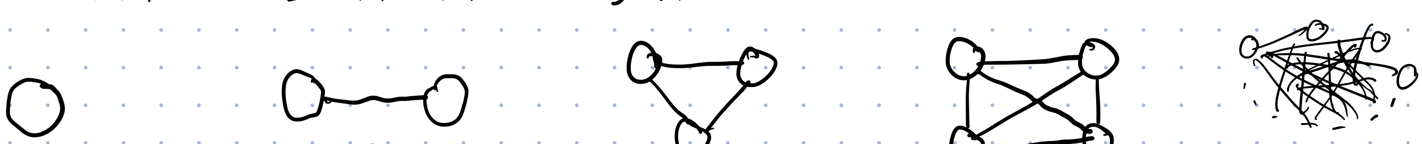
5) асимп. сложн. $O(f(|E|, |V|))$

$|E|$ – ЧИСЛО РЁБЕР

$|V|$ – ЧИСЛО ВЕРШИН

ПОЛНЫЙ ГРАФ (ПОЛНОСВЯЗНЫЙ, КЛИКА) – ГРАФ, В КОТ.
В КОТ. МЕЖДУ КАЖД. ПАРОЙ РАЗЛ. ВЕРШ. $\exists$ РЕБРО:

	1-КЛИКА	2-КЛИКА	3-КЛИКА	4-КЛИКА	n-КЛИКА



V:	1	2	3	4	n
E:	0	1	3	6	$\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} n-i = n-1+n-2+\ldots+0 = \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{2n^2-n^2-n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = M \text{ — max. число рёбер}$$

$$n(n-1) = 2M$$

$$O(|V| \log |E|)$$
$$O(|V| \log |V|)$$
$$O(|V| \log |V|^2)$$

$$|E| = O(|V|^2)$$

плотный граф: $|E| = \Omega(|V|^2)$

разреженный граф: $|V| = \Theta(|E|)$

6) Хранение графов

1. Списки рёбер

$a : [b, c, \ldots]$

$b : [\,]$

$c\ [b, a]$

$\vdots$

по памяти $O(|E| + |V|)$

2. Матрицы смежности

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ \ldots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d\ldots \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & & \boxed{1} & \\ & & & \\ & 0 & & \\ & & & \end{array} \right) \end{array} \updownarrow |V|$$

$$\longleftrightarrow |V|$$

на ij-м месте 1, когда $\exists$ ребро $V_i \longrightarrow V_j$

по памяти

$O(|V|^2)$

в случ. плотн. графов эквив. $O(|E|)$

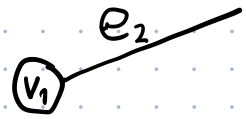
$O(|V|^2 + |E|)$

МАТРИЦА ВЕСОВ

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \boxed{w_{ij}} & \\ & & \end{pmatrix} \qquad v_i \xrightarrow{w_{ij}} v_j$$

3. МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & \dots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$



$O(|V||E|)$

7. СТЕПЕНИ ВЕРШИН

ВХОДЯЩАЯ СТЕПЕНЬ ВЕРШ. u – ЧИСЛО РЁБ., ВХ. В u

ИСХОДЯЩАЯ АНАЛОГИЧНО

СТЕПЕНЬ ВЕРШ. = ВХ. + ИСХ.

СТОК – ВЕРШ. С ИСХ. СТЕП. 0

ИСТОК – ...... ВХ.

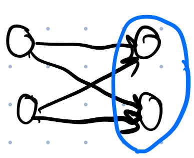
ЗАДАЧА

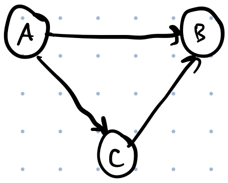
ДАН ТУРНИР (ОРИЕНТ. ПОЛН. ГРАФ, Т.Е. ДЛЯ $u \neq v$ $\left[\begin{matrix} u \to v \\ v \to u \end{matrix}\right.$)

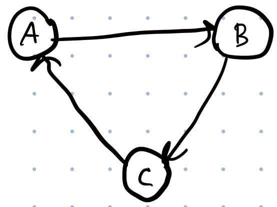
ХРАНИТСЯ В ПАМЯТИ В ВИДЕ МАТР. СМЕЖН.

$$|E| = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$$

НАЙТИ ОБЩ. СТОК ИЛИ УСТАНОВИТЬ $\nexists$







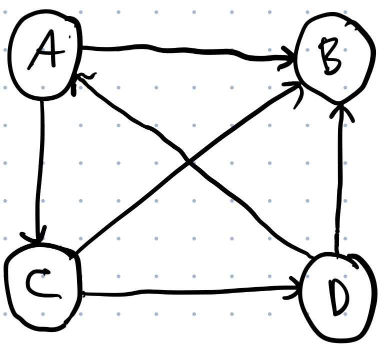
$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0 & 1 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

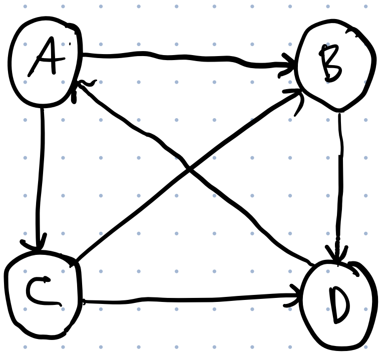
РЕШЕНИЕ ЗА КВАДРАТ:

ПРОХОДИМ ПО ВСЕМ СТРОКАМ, ЕСЛИ НАШЛИ СТРОКУ ИЗ НУЛЕЙ, ЭТО ОТВЕТ (СТОК)

ПРИМЕР ТУРН. НА 4 ВЕРШ.:



ОБЩ. СТОК



ЛИН. АЛГ.:

1) ПОДДЕРЖ. ЕДИНСТВ. КАНД. В СТОКИ (ПРИ ИНИЦ. 1 ВЕРШ.)

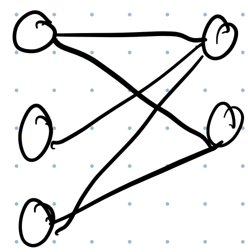
ПРОХ. В ЦИКЛЕ ВЕРШ. ОТ 2 ДО n-Й

ЗА $O(1)$ ВЫЯСН. КТО КАНДИДАТ; ЗА $n-1$ ОП. $\exists!$ КАНД.

2) ЗА ЛИНИЮ ПРОХ. ПО СТРОКЕ, СООТВ. КАНД., В ПОИСКАХ ПРАВДЫ (ВСЕ ЛИ ТАМ НУЛИ?)

```
def find_sink_if_exists(A):
    n = A.shape[0]
    cand = 0
    for i in range(1, n):
        if (A[cand, i] == 1):
            cand = i
    for i in range(n):
        if (A[cand, i] == 1):
            return -1
    return cand
```

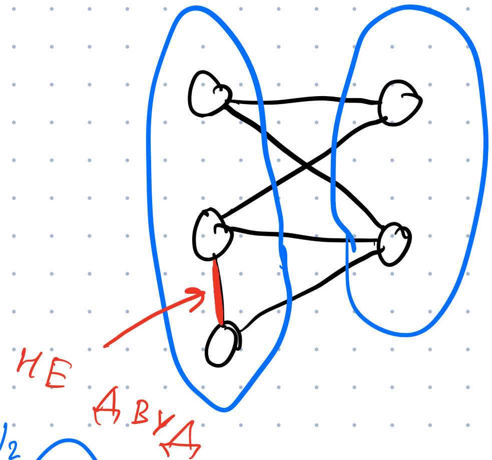
ДВУДОЛЬН. ГРАФ $G(V, E)$:

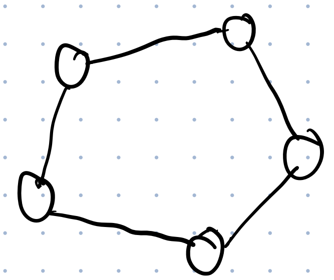


1) $\exists\ V_1, V_2$: 1) $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

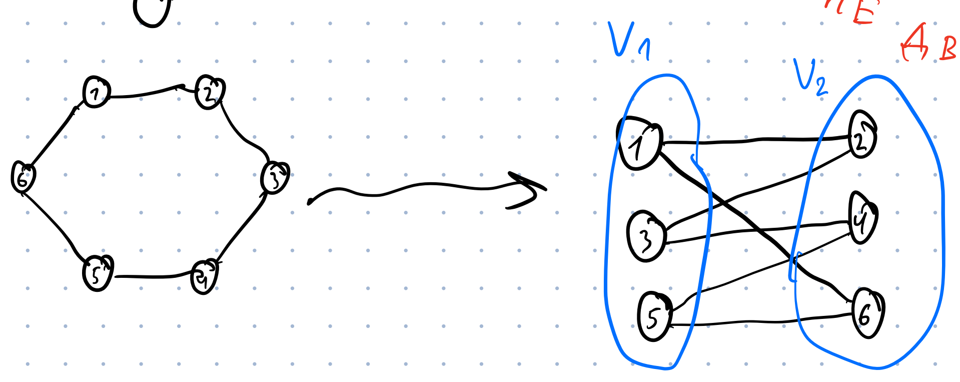
2) $V = V_1 \cup V_2$

2) "ВНУТРИ" V_1, V_2 НЕТ РЁБЕР

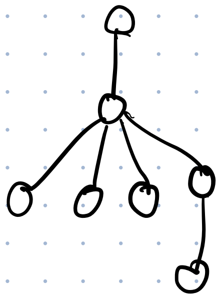




НЕ ДВУД.

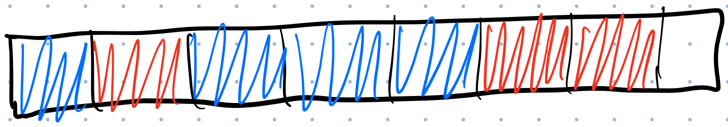


ДЕРЕВО – СВЯЗН. ГРАФ БЕЗ ЦИКЛОВ



ДЕРЕВО

НЕ ДЕРЕВЬЯ



ДЕРЕВО $D(V, E)$

$|V| = \Theta(|E|)$

$|E| = |V| - 1$

$O(\cancel{|E| +} |V|)$ $\quad$ $O(|V|)$