20.01.25 ЛЕК. 3 Fib.

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

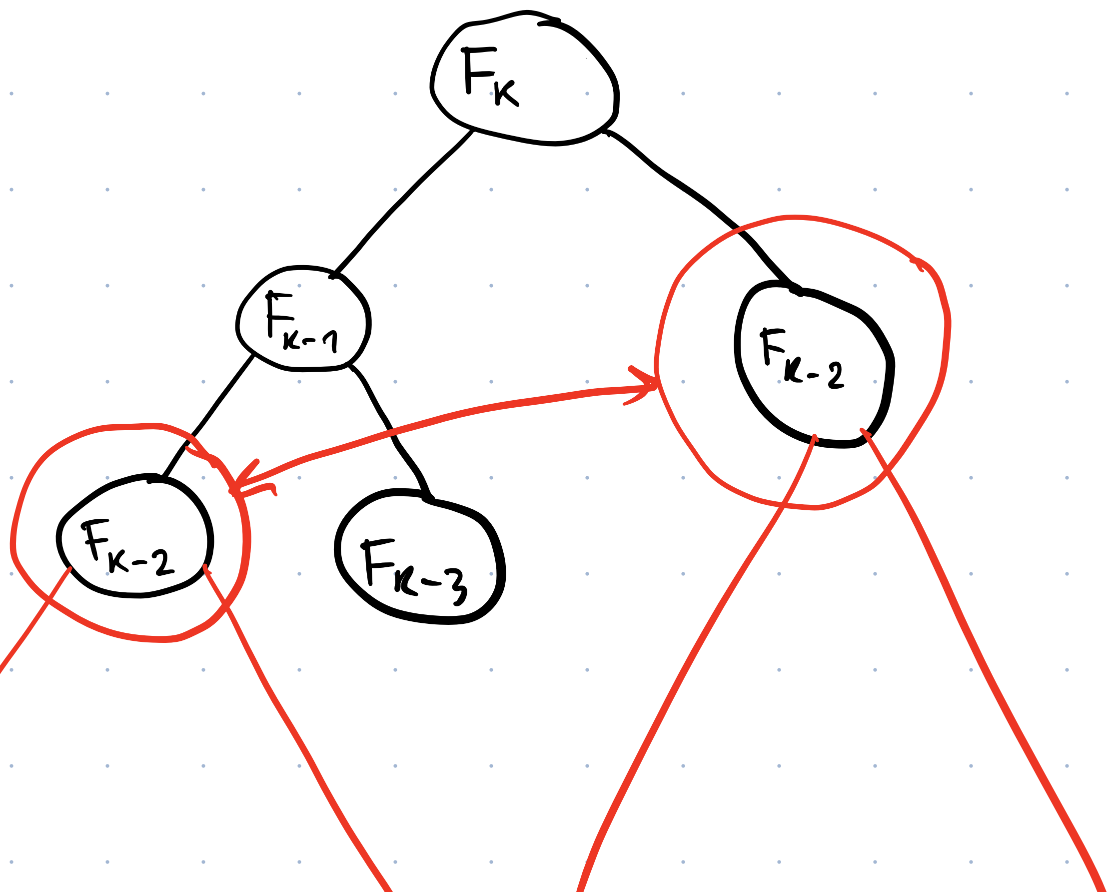
$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$

0, $\boxed{1, 1}$, 2, 3, 5, 8, 13, ...

ДЛИНА (БИТ.) ВХОДА РАВНА n

```
def fib_k(k):
    if (k == 0):
        return 0
    if (k == 1)
        return 1
    return fib_k(k-1) + fib_k(k-2)
```

// НАИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ



К – ном. числ. Фиб.

$$T(k) = O(2^k)$$

$$T(k) = \Omega(F_k)$$

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$F_{k+1} \geq F_k$$

$$\leq 2F_k$$

$$F_{k+1} \geq 2F_{k-1}$$

$$F_{k+2} \geq 2F_k \geq 4F_{k-2} \geq 8F_{k-4} \;\dots\; \geq 2^{\frac{k}{2}} \underbrace{F_1}_{=1}$$

+1   −2 F_2

$$T(n) = \Omega\left(2^{\frac{k}{2}}\right) = \Omega\left(2^{\frac{2^n}{2}}\right)$$

Альт. реализация с сохр. пром. рез.

0	1	2	3	4	5	.	..	–	..	–	.	..	F_k
0	1	1	..	.	.	..							

СЛОЖ. ЗА $O(1)$

$\left.\begin{matrix} O(k) \\ O(2^n) \end{matrix}\right]$ ПО ВРЕМЕНИ

$\left.\begin{matrix} F_k \\ F_{k+1} \end{matrix}\right) \to \begin{matrix} F_{k+1} \\ F_k + F_{k+1} \end{matrix}$ ПО ПАМЯТИ $O(1)$

БЫСТРОЕ ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

$$\underbrace{a+a+\ldots+a+a}_{b} = a \cdot b$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{b} = a^b$$

$$a^{11} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\substack{10 \\ \text{умнож.}}} = \underbrace{(a^5)^2 \cdot a}_{\substack{4+1+1 \\ =6 \\ \text{умнож.}}} = \underbrace{((a^2)^2 \cdot a)^2 \cdot a}_{\substack{5 \\ \text{умнож.}}}$$

ВЕДУЩАЯ ЕДИНИЦА

$b_2 = 1\,1\,1\,0\,0\,1\,0 \ldots 10$

i

$p = a$

```
p = p*p
if b2[i] == 1:
    p = p*a
i += 1
```

В БИТ. ВИДЕ

$2 \cdot x = x0$

$3 = 11_2$

$(a^3)^2 = a^6$

$6 = 110_2$

$(a^3)^2 \cdot a = a^7$

$7 = 111_2$

ПРИМЕР:

a^5 БЫСТРЫМ ВОЗВ.

$5 = 4 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 101_2$

$i = 0$

$i = 0$

$p = a$

$i = 1$

$p = p^2 = a^2$

$i = 2$

$p = p^2 = (a^2)^2 = a^4$

$b_2[i] == 1$

$p *= a = a^4 \cdot a = a^5$

$$a^b = a^{1101..01} = (a^{1101..00}) \cdot (a^1) = (a^{1101..0})^2 \cdot a^1$$

$$a^{k+m} = a^k \cdot a^m$$

$$1 \to 10 \to 100 \to 1000$$

$$8 = 1000_2$$

$$a^8 = a^{1000_2} = (a^{100})^2 = ((a^{10})^2)^2 = ((a^2)^2)^2$$

$$2 \cdot x = x0$$

10	2
$3 \cdot 2 = 6$	$11 \cdot 10 = 110$

$0 = 0$
$1 = 1$
$2 = 10$
$3 = 11$
$4 = 100$
$5 = 101$
$6 = 110$
$7 = 111$
$8 = 1000$
$9 = 1001$
$10 = 1010$
$11 = 1011$

В СТОЛБИК:

$$\begin{array}{r} \times\ 110\ldots11 \\ 10 \\ \hline 000\ldots00 \\ 110\ldots110 \end{array}$$

$$a^{1011} = a^{1010} \cdot a^1 = (a^{101})^2 \cdot a^1 = (a^{100} \cdot a^1)^2 \cdot a^1 =$$

$$= ((a^{10})^2 \cdot a^1)^2 \cdot a^1 = (((a^1)^2)^2 \cdot a^1)^2 \cdot a^1$$

O(1) НА КАЖД. БИТ ПОКАЗАТЕЛЯ СТЕПЕНИ

ЧИСЛО УМН. $\Theta(\log_2 b)$

$\Theta(n)$

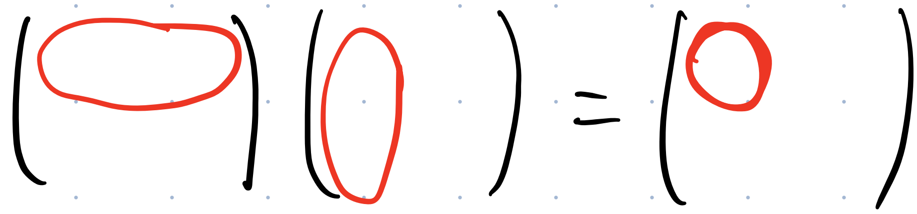
ОЧЕНЬ БЫСТР. ФИБ.

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k + F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot F_{k+1} + 1 \cdot F_k \\ 1 \cdot F_{k+1} + 0 \cdot F_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = \ldots = A^{k+1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^{k+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = A^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



(2 умн. 1 слож) $\times 4$

ВРЕМЯ: $O(\log_2 k)$

$\Theta(n)$

СРАВНИМ:

1) $\Theta\left(2^{\frac{2^n}{2}}\right)$

2) $\Theta(2^n)$

3) $\Theta(n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & \\ & \end{pmatrix}$$