17.02.25

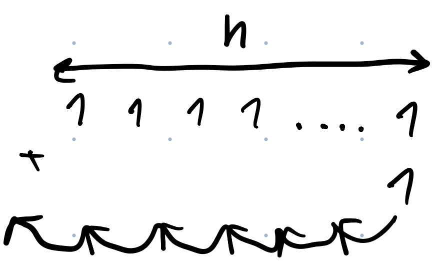
АТОМАРНЫЕ БИТОВЫЕ ОПЕРАЦИИ

$a + b$ $\quad O(1)$ $\quad$ // в "обычной"

$a + b$ $\quad O(\max(\mathrm{len}(a), \mathrm{len}(b))$ $\quad$ // в битовой

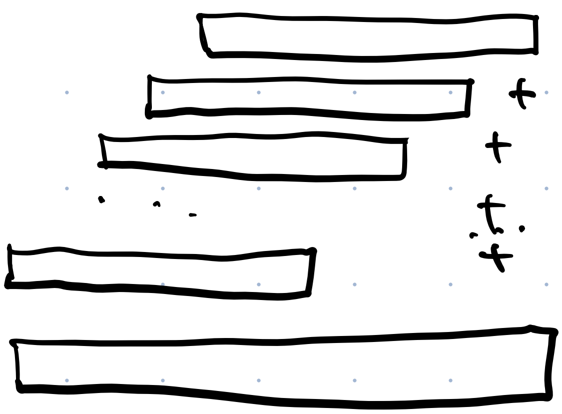
$\mathrm{len}\ a = n$ $\quad \log_2 a, \log_2 b$

$\mathrm{len}\ b = m$ $\quad \max(n, m)$



$a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$

$b_1\ b_2 \ldots b_k$



ПРИМЕР

```
 × 1101   13
    101   5        65
 +  1101 )
 +     0 ) 1101 )
  110100
```

```
 +  1101
  110100
 1000001   65
```

```
def multiply(a, b):      // a = [1, 1, 0, .... 1, 0]
    answer = [0]
```

```
for i in range(len(b)):
    if (b[len(b)-i-1] == 1):
        answer = add(a + [0]·i, answer)

return answer

def add(a, b)
    ......
    return result
```

---

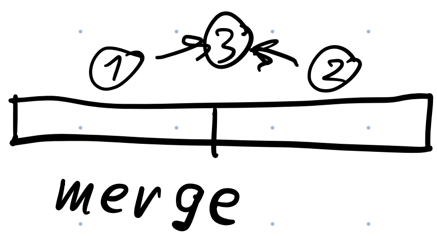
a^2 за $O(n)$

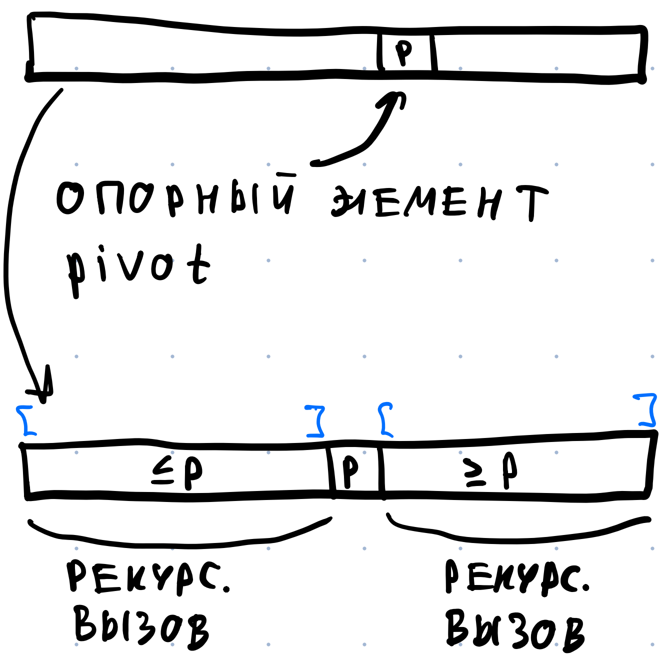
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

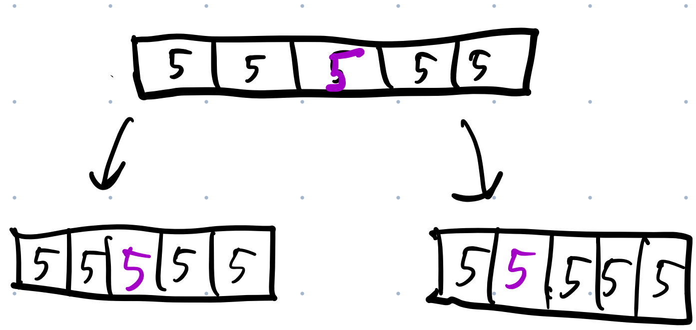
Быстрая сортировка (quick sort)

//





пример:



```
def quick_sort(arr, l, r)
    if (r-l <= 0):
        return

    pivot_ind = ...        // фикс. опорн. эл.
    new_p_index = partition(arr, l, r, pivot_ind)

    quick_sort(arr, l, new_p_index-1)
    quick_sort(arr, new_p_index+1, r)
```

$\overset{0}{1}, \overset{1}{2}, \overset{2}{3}, \overset{3}{4}, \overset{4}{5}, \overset{5}{6}$ — [1, 2, 3, 4, 5, 6]

quick_sort(arr, 0, 5)

ПУСТЬ pivot – ПРАВЫЙ ЭЛ-Т МАССИВА

[1 7 3 6 2 5 $\boxed{4}$]

$\underbrace{1 \quad 3 \quad 2}\ 4\ \underbrace{7 \quad 6 \quad 5}$

[1 2 3 4 .... n]

↓

[1 .... n-1] n [ ]

[ ] n-1 [ ]

- - - - -

[1] 2 [ ]

$$T(n) = T(n-1) + \underbrace{cn} = T(n-2) + c(n-1) + cn = \ldots =$$

$$= O(n^2)$$

Поиск ме~~диан~~ы за лин. время

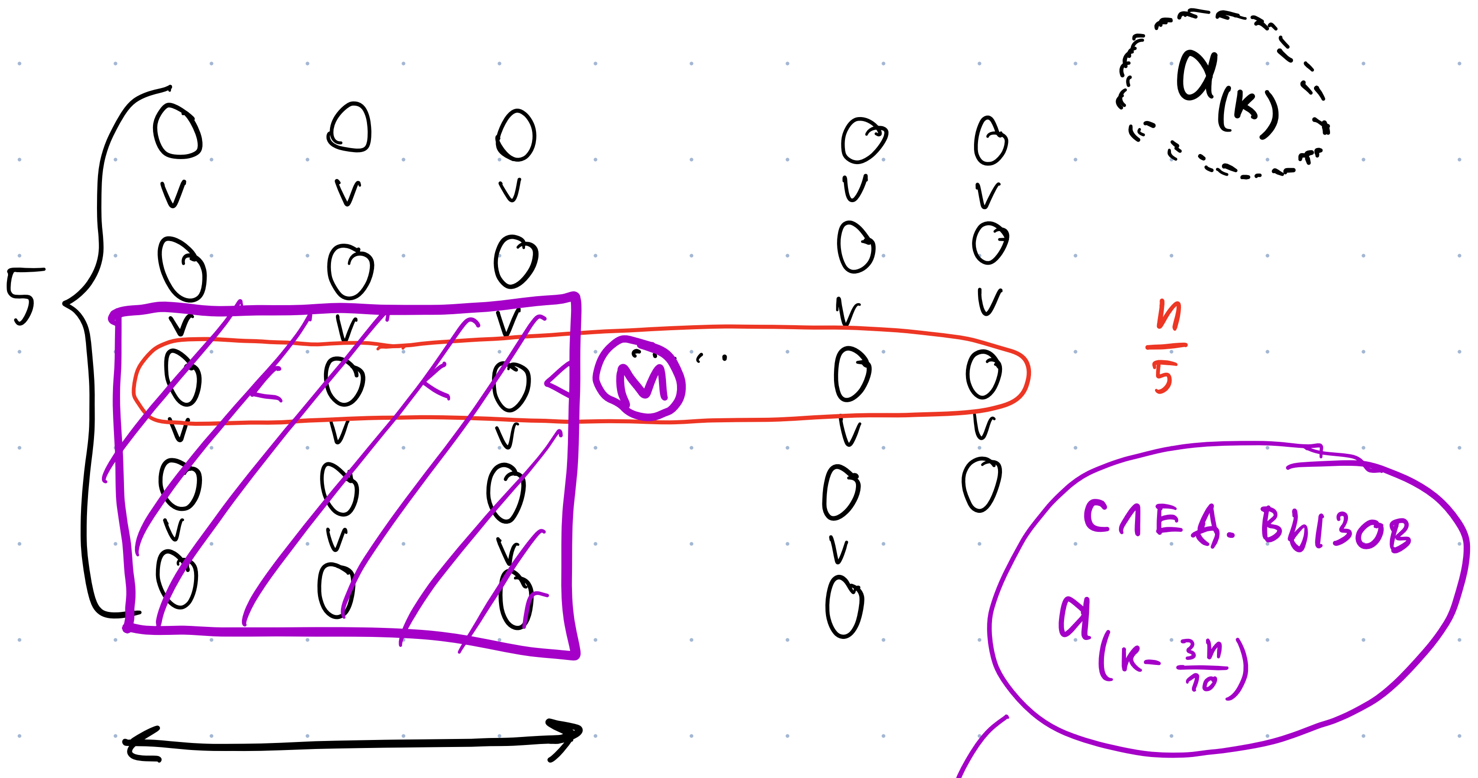
к-й порядк. стат.

$a_{(k)}$ на к-м месте в отсорт. масс

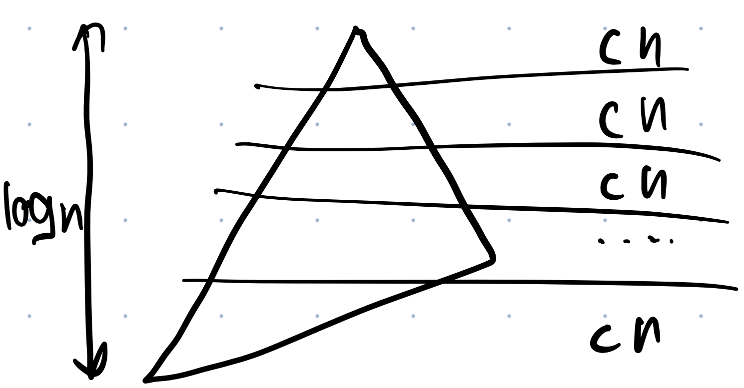
$a_{(1)}$ — min массива

$a_{(n)}$ — max

$a_{(\frac{n}{2})}$ — медиана массива



$$T(n) = cn + T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) = \Theta(n)$$

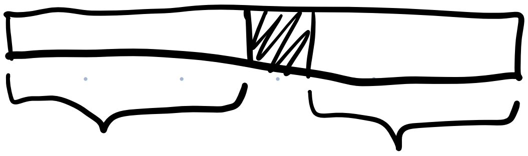


cn

$c\gamma n$

$c\gamma^2 n$

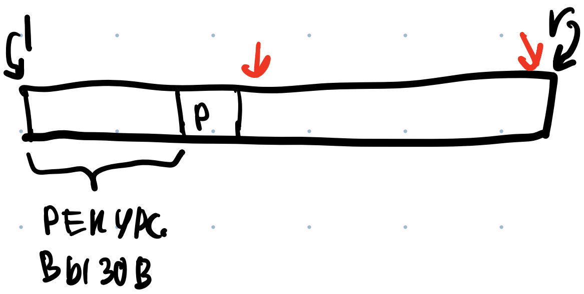
$c\gamma^{\log n} n$



$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \qquad \Theta(n \log n)$$

НАСКОЛЬКО ГЛУБОКА МОЖЕТ БЫТЬ РЕКУРСИЯ?

- С ОПОРНОЙ МЕДИАНОЙ $\log_2 n$
- НАИВН. quick sort n



АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

НОД (a, b) = НАИБОЛЬШЕЕ d т.ч. $a = d m_a$

$a \geq b$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $b = d m_b$

$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$

// $a \bmod b$ — ОСТ. ОТ ДЕЛ. a НА b

// $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ $\qquad$ $0, 1, 2, 3, 4$

// $3 \cdot 4 = 12$ $\qquad$ $3 \cdot 4 \equiv 2 \mod 5$

↑

"СРАВНИМО"

$$\gcd(a,b) \overset{???}{=} \gcd(b, a \bmod b)$$

$a = d\, m_a$ они

$b = d\, m_b$ взаимно просты

если нет, то $a = \boxed{d \cdot x} \cdot \frac{m_a}{x}$

$b = d \cdot x \cdot \frac{m_b}{x}$

$$\cancel{\gcd(a,b) = \gcd(d\,m_a, d\,m_b) = \gcd(d\,m_b, d(m_a \bmod m_b))}$$

$$\cancel{a \bmod b = d\,m_a \bmod d\,m_b = d(m_a \bmod m_b)}$$

$$\gcd(a,b) = \gcd(a-b, b)$$

$$\gcd(d\,m_a, d\,m_b) = d \qquad \gcd(d(m_a - m_b), d\,m_b)$$

НОД $= 1$

предп., что $\gcd(m_a - m_b, m_b) \neq 1$ $= y$

$$m_a - m_b = p\,y$$

$$+\; m_b = q\,y$$

$$m_a = (p+q)\,y$$

остаток от деления

$$\gcd(a,b) = \gcd(b, a \bmod b) = \ldots = \gcd(d, \underbrace{æ \bmod d}_{0})$$