

Задание 3. Атомарные битовые операции. k -я порядковая статистика. Алгоритм Евклида.

Указание 1: в этом задании (кроме задачи 6) мы будем использовать алгоритм поиска k -й порядковой статистики в качестве черного ящика, принимающего массив и число k , и за линейное время находящего элемент, который будет стоять на k -м месте в отсортированном массиве. Полный вывод и реализация алгоритма будут в видео, которое будет выложено в группу, к задаче 6 можно приступать после этого.

Указание 2: для выполнения второй половины этого задания (задачи 6-10) понадобится материал следующего занятия, поэтому если сейчас что-то совсем непонятно, это нормально.

1 На прямой задано n строго вложенных отрезков в виде пар концов (l_i, r_i) . Они могут поступать на вход в произвольном порядке. Постройте алгоритм, находящий **множество точек на прямой**, покрытое ровно $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ отрезками.

2 На доске написан набор положительных целых чисел. За один ход можно взять любые два числа и вычесть из большего меньшее. Процесс останавливается, когда все числа становятся одинаковыми. Докажите, что этот процесс всегда остановится. Какие числа останутся в результате?

3 Оцените сложность алгоритма Divide, приведенного на странице 19 книги Дасгупты.

4 Предложите алгоритм возведения n -битовых чисел в степень по модулю, оцените его сложность.

5 Предложите эффективный алгоритм вычисления наименьшего общего кратного (НОК) двух чисел в битовой модели вычислений (время выполнения операций зависит от длины битовой записи чисел).

6 С какой асимптотикой будет работать алгоритм поиска k -й порядковой статистики, если делить массив на группы не по пять элементов, а по три? По семь?

7 Найдите представление НОД чисел $a = 36$ и $b = 45$ в виде их линейной комбинации, то есть таких чисел x и y , что $ax + by = \gcd(a, b)$. Воспользуйтесь расширенным алгоритмом Евклида для решения этой задачи.

8 Решите уравнения в целых числах. Нужно найти все решения, а не только частное.

1. $238x + 385y = 133$

2. $143x + 121y = 52$

9 Решите сравнение $68x + 85 \equiv 0 \pmod{561}$ с помощью расширенного алгоритма Евклида. Требуется найти все решения в вычетах.

10 Найдите обратный остаток $7^{-1} \pmod{102}$