01.10.25

$\dot{x} = Ax + Bu$

$u = -Kx$

$\dot{x} = Ax - BKx$

$\dot{x} = (A - BK)x$

$x(t) = e^{(A-BK)t} x_0$

1-DoF: $\overline{x} = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}$

$\overline{u} = (F)$

$K = (K_p \;\; K_d)$ gain matrix

$u = (K_p \;\; K_d)\begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix} = K_p p + K_d \dot{p}$

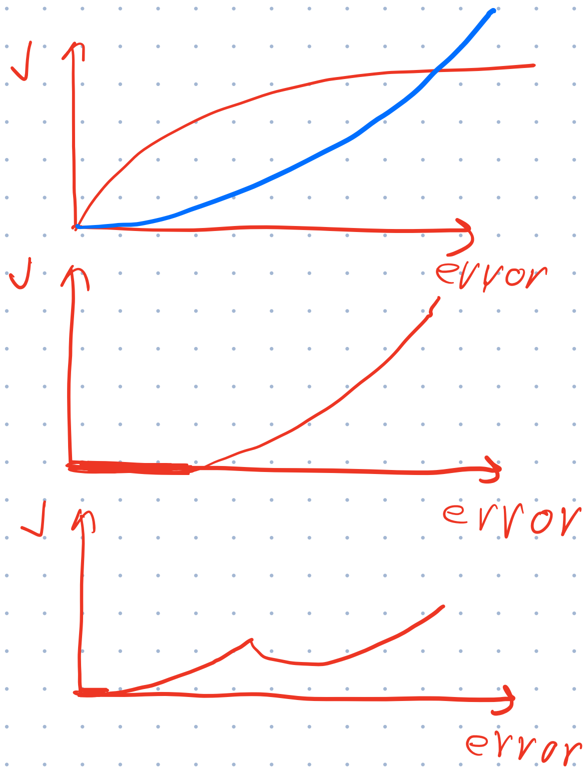
Linear Quadratic Regulator (LQR)

$\dot{x} = Ax + Bu$; $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$

$J = \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)]\, dt \; (=)$

$Q \succeq 0$ $\qquad R \succ 0$

$\forall x \neq 0 \;\; x^T Q x \geq 0 \qquad \forall u \neq 0 \;\; u^T R u > 0$



Что хотим?

Обратн. связь в форме $u = -Kx$

"Обр. св. по полн. сост."

full-state feedback

$(=)\; x_0^T P x_0 - x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \ldots\ldots = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \frac{d}{dt}[x^T P x] + \ldots\; dt =$

$\cancel{x^T(\infty) P x(\infty)} - x^T(0) P x(0)$

$= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty [\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T Q x + u^T R u]\, dt =$

$= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty [(Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu) + x^T Q x + u^T R u]\, dt =$

$$= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left[u^T B^T P x + x^T A^T P x + x^T P A x + x^T P B u + x^T Q x + u^T R u\right] dt =$$

$$= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left[x^T (A^T P + P A + Q) x + u^T R u + 2 x^T P B u\right] dt \; =$$

ВЫДЕЛИМ ПОЛНЫЙ КВАДРАТ

$$(u - m)^T R (u - m) + L = u^T R u + 2 x^T P B u =$$

$$= u^T R u - 2 m^T R u + m^T R m + L$$

$$-\cancel{2} m^T R u = \cancel{2} x^T P B u \qquad \forall u$$

$$-m^T R = x^T P B$$

$$-R m = B^T P x \qquad | \; R^{-1} \cdot$$

$$m = -R^{-1} B^T P x$$

$$L = -x^T P B \cancel{R^{-T} R} R^{-1} B^T P x = -x^T P B R^{-1} B^T P x$$

$$= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left[x^T (A^T P + P A + Q) x + (u + R^{-1} B^T P x)^T R (u + R^{-1} B^T P x) - x^T P B R^{-1} B^T P x\right] dt =$$

$$= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left[x^T (A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P) x + (u + R^{-1} B^T P x)^T R (u + R^{-1} B^T P x)\right] dt$$

1) $u = -R^{-1} B^T P x$

2) $A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0_{n \times n}$

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УР. РИККАТИ

Algebraic Riccati Equation, ARE

~~S — НЕ РЕШ. УР. РИК.~~

$\cancel{u = -R^{-1} B^T S x}$

$\cancel{x_0^T S x_0 + \int_0^\infty x^T [\pm 0]\, x \, dt}$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix} + \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1} \end{pmatrix}} (F)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad R = (1) ; \quad P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 & p_3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_3 p_2 & p_3^2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - p_2^2 & p_1 - p_2 p_3 \\ p_1 - p_2 p_3 & 2p_2 + 1 - p_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p_2^2 = 1 \\ p_1 = p_2 p_3 \\ 2p_2 + 1 = p_3^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1)\ & p_2 = 1 \\ & p_1 = p_3 \\ & 2 + 1 = p_3^2 \\ & p_3 = \overset{+}{\pm}\sqrt{3} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} 2)\ & p_2 = -1 \\ & p_1 = -p_3 \\ & -2 + 1 = p_3^2 \\ & p_3^2 = -1 \qquad \varnothing \end{aligned}$$

$$u = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \dot{h} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \dot{h} \end{pmatrix} =$$

$$= -p_2 h - p_3 \dot{h}$$

$p_1 = \sqrt{3}$

$p_2 = 1$

$p_3 = \sqrt{3}$

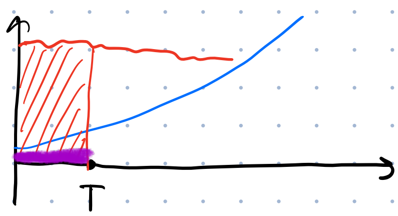
$\Rightarrow$ ОПТ. ОБР. СВЯЗЬ:

$$u = -1 \cdot h - \sqrt{3}\,\dot{h}$$

ОСОБЕННОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ

- ТОЛЬКО ЛИН. СИСТЕМЫ
- ДЛЯ КОНЕЧН. ГОР. НУЖНО ИСПОЛЬЗ. ОБОБЩ.

$\int_0^T \ldots$ $\qquad\qquad$ $\int_0^\infty$



- НЕ МОЖЕМ ПРОСТО УЧЕСТЬ $|F| \le F_{max}$
- НЕ МОЖЕМ УЧЕСТЬ $x \in \mathbb{X}$