

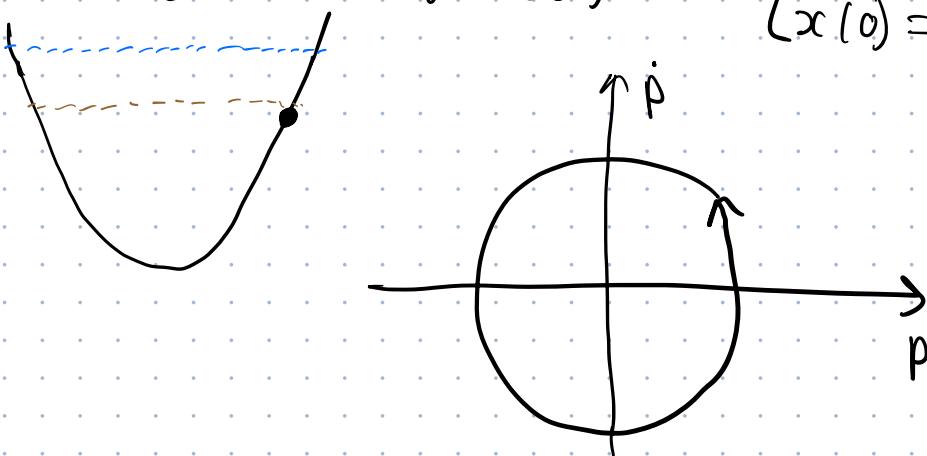
22.10.25 УСТОЙЧИВОСТЬ

$$\dot{x} = f(x) ; \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

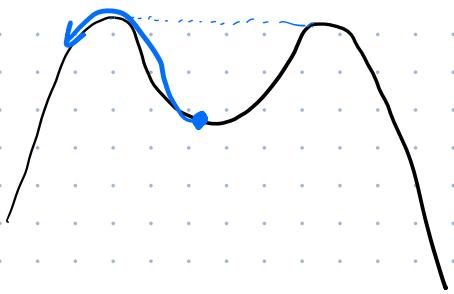
$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

def. УСТОЙЧИВОСТИ (ГЛОБАЛЬНОЙ)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_0 \in B_\varepsilon(0) \hookrightarrow \begin{cases} \forall t \geq 0 \quad \|x(t)\| \leq \delta \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



ОТСУСТИВИЕ ГЛОБ. УСТ.

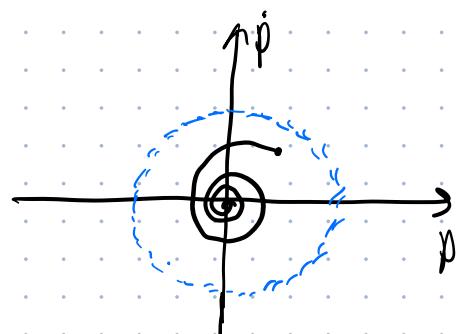


АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x(0) \in B_\varepsilon(\bar{0}) \hookrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{0}$$

КАК ПОКАЗЫВАТЬ НАЛИЧИЕ И ОТС. УСТ?

МОЖНО ПО ОПРЕД.



ПРИМЕР:

$$\bar{x} = (p)$$

$$\dot{p} = -p$$

УСТ.?

$$p(t) = e^{-t} p_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$$

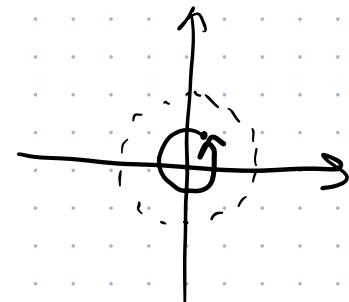
АСИМП. УСТ.

ПРИМЕР:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{p} = -p$$

$p(t)$ - КОЛЕБАНИЯ



УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

$$\dot{x} = Ax$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = V^{-1} e^{Dt} V x_0 =$$

$$= V^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & \ddots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} V x_0$$

Если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

$$e^M = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad (\approx)$$

$$M = V^{-1} D V$$

$$\approx V^{-1} V + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V^{-1} D V)^k}{k!} =$$

$$= V^{-1} V + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V^{-1} D V V^{-1} D \dots V^{-1} D V}{k!} =$$

$$= V^{-1} V + V^{-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D \dots D}{k!} \right] V =$$

$$= V^{-1} \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) V = V^{-1} e^D V$$

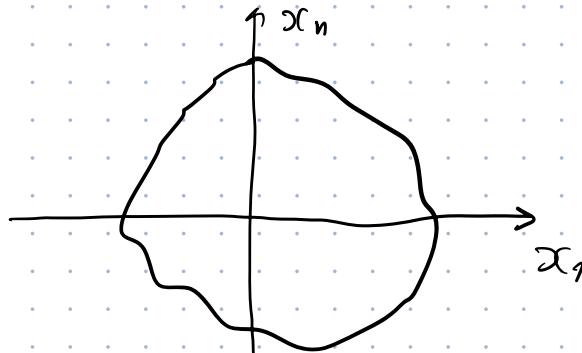
ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

$$x_{k+1} = Ax_k$$

$$A = V^{-1} D V$$

$$x_{k+1} = V^{-1} D V x_k$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$



$|\lambda_i| < 1 \Rightarrow A$ - СЖИМ. ОТОБР. И СИСТ. АСИМП. УСТ.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx$$

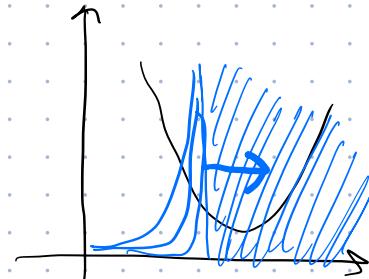
$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

ЗАДАЧУ ПРО ЭТО
В ДОМАШКУ!

НАЙТИ ТАКОЕ К, ЧТО $\operatorname{Re} \lambda(A-BK) < 0$

УСТОЙЧИВОСТЬ (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО)

ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ



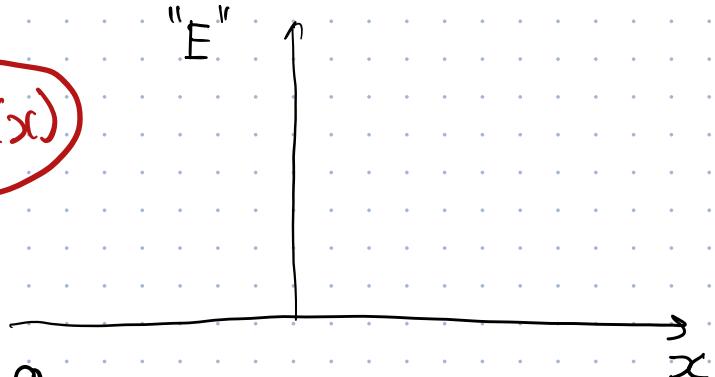
ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА

$$V(x)$$

$$C^3[0, 1]$$

$$\dot{x} = f(x)$$

"E"



1) $V(x) \in C^1(X)$ НЕПР. ДО 1 ПРОИЗВ.

2) $V(0) = 0$ И $V(x) > 0$ ПРИ $x \neq 0$

3) $V(x)$ РАДИАЛЬНО НЕОГРАНИЧЕНА

ЭКВИВ. УТВЕРЖД.: НЕОГРАНИЧ ПОСЛ-ТИ ОТОБРАЖАЕТ В НЕОГР. ПОСЛ-ТИ

4) $\frac{d}{dt} V(x(t)) < 0$

И КРОМЕ $x=0$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = (\nabla V, \dot{x}) = (\nabla V, f(x)) < 0$$

ПРИМЕР

$$\dot{p} = -p$$

КАНДИДАТ $V(x) = p^2$

ПРОВЕРИМ СВ-ВА:

1) C^1 ✓

2) $V(0) = 0$; $V(x) > 0$ ПРИ $x \neq 0$ ✓

3) РАД. НЕОГР. ✓

4) $\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} [p^2] = 2p \dot{p} = -2p^2 < 0$

✓

Ф-Я ЛЯП. ДЛЯ ЛИН. СИСТЕМ

$$\dot{x} = Ax$$

$$V(x) = x^T M x$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[V(x)] &= \dot{x}^T M x + x^T M \dot{x} = x^T A^T M x + x^T M A x = \\ &= x^T (A^T M + M A) x < 0\end{aligned}$$

ЕСЛИ Э М : $A^T M + M A < 0$, ТО $V(x) = x^T M x$ — Ф-Я ЛЯП.
И СИСТ. УСТ.

ОБОБЩЕНИЕ НА СИСТ. С УПРАВЛЕНИЕМ

Ф-Я ЛЯП. \rightsquigarrow Ф-Я УПР. ЛЯП. (CLF, Control Lyapunov Function)

ИЗМЕНЕНИЕ В ОПРЕДЕЛЕНИИ:

ч) $\exists u(t) : (\nabla V, f(x(t), u(t))) < 0$

ОБОБЩЕНИЕ НА ЦИКЛЫ

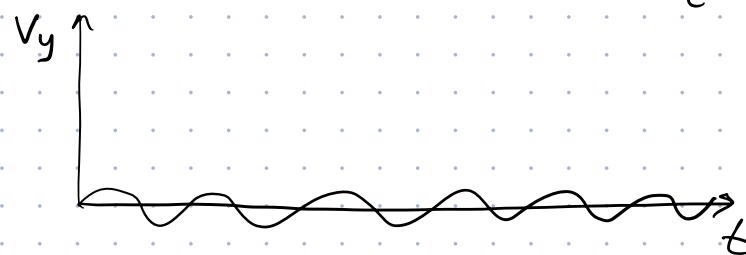
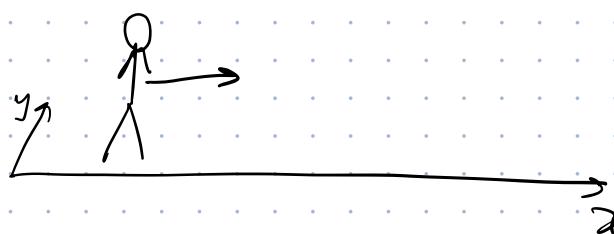
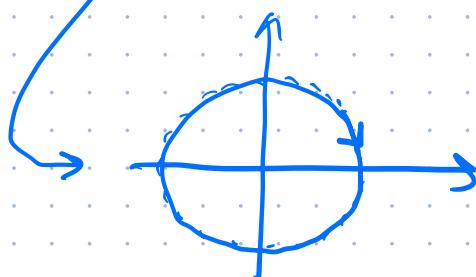
ЭВОЛ. ВЕК. СОСТ. В НЕКОТОРЫХ

СЛУЧАЯХ (ПРИ УСТАНОВИВШИХСЯ)

ХОДЬБЕ) МОЖЕТ БЫТЬ

ПРЕДСТАВЛЕН

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{\text{cyc}} \\ x_{\text{acyc}} \end{pmatrix}$$



τ - ФАЗА ЦИКЛА; $\tau \in [0, 1]$

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ $x_{\text{cyc}}^*(\tau)$ УСТ.:

$$\exists \varepsilon: \forall x_0 \in B_\varepsilon(x_{\text{cyc}}^*(\tau)) \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\tau \in [0, 1]} \|x_{\text{cyc}}^*(\tau) - x(t)\| = 0$$

УПРАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ ЭНЕРГИИ

(energy-based control)

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{\tau}{ml^2}$$

$$|\tau| \leq \tau_{\max}$$

$$E(x) = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta$$

$$V(x) = \frac{(E - E_0)^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} V(x) = \frac{d}{dt} \left[\frac{(E - E_0)^2}{2} \right] = (E - E_0) \dot{E} = (E - E_0) \left(ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - mg l \sin \theta \dot{\theta} \right) =$$

$$= (E - E_0) \dot{\theta} \left(ml^2 \frac{g}{l} \sin \theta + ml^2 \frac{\tau}{ml^2} - mg l \sin \theta \right) =$$

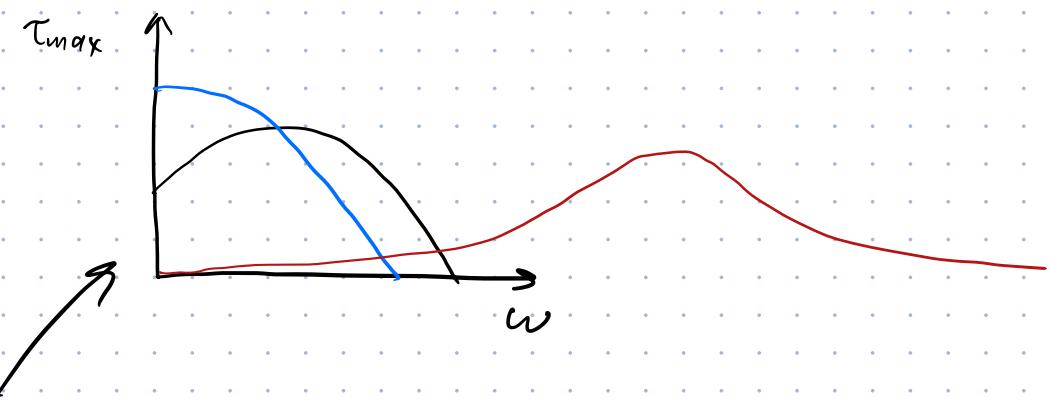
$$= (E - E_0) \dot{\theta} \tau < 0$$

$$\text{Для } \frac{d}{dt} V(x) < 0, \text{ нужно } \text{sign}(\tau) = -\text{sign}((E - E_0) \dot{\theta})$$

$$\tau = -\tau_{\max} \text{sign}((E - E_0) \dot{\theta})$$



$$W = K \gamma^2$$



МОЖНО ПОСМ. АОКУМ. DYNAMIXEL MX-106