

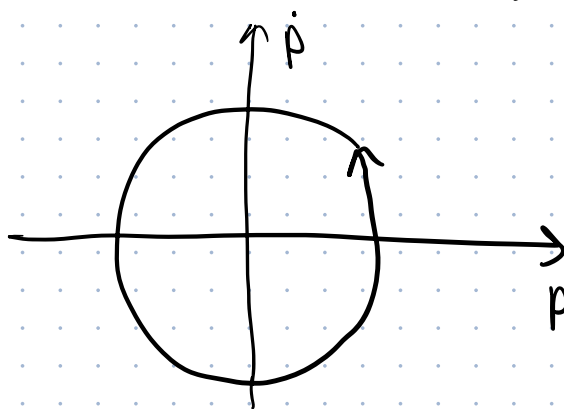
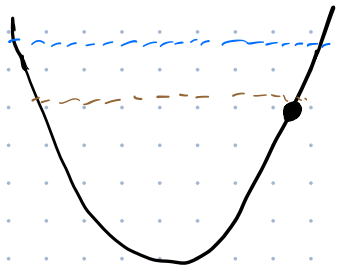
22.10.25 УСТОЙЧИВОСТЬ

$$\dot{x} = f(x) ; x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

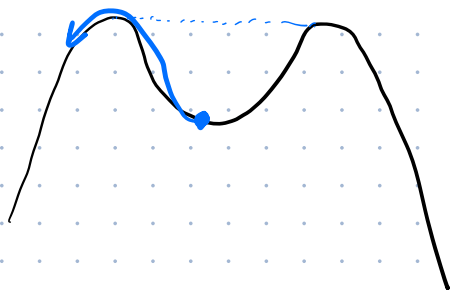
$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

def. устойчивости (глобальной)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0 \in B_\varepsilon(0) \leftrightarrow \begin{cases} \forall t \geq 0 \|x(t)\| \leq \delta \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



ОТСУТСТВИЕ ГЛОБ. УСТ.

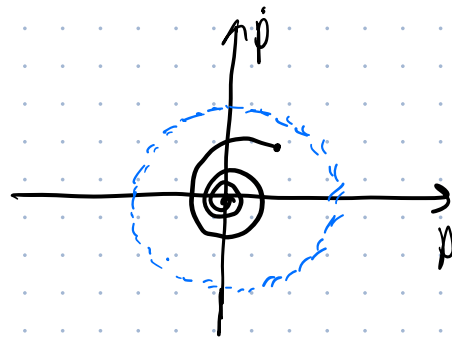


АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x(0) \in B_\varepsilon(\bar{0}) \hookrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

КАК ПОКАЗЫВАТЬ НАЛИЧИЕ И ОТС. УСТ.?

МОЖНО ПО ОПРЕД.



ПРИМЕР:

$$\bar{x} = (p)$$

$$\dot{p} = -p$$

уст.?

$$p(t) = e^{-t} p_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$$

Асимпт. уст.

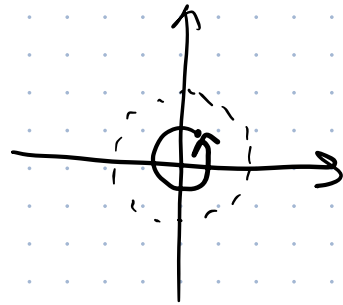
ПРИМЕР:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{p} = -p$$

$p(t)$  - колебания

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$



УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИН. СИСТЕМ

$$\dot{x} = Ax$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = \bar{V}^{-1} e^{Dt} V x_0 =$$

$$= \bar{V}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} V x_0$$

Если  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

$$e^M = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad \text{③}$$

$$M = \bar{V}^{-1} D V$$

$$\text{③} \quad \bar{V}^{-1} V + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{V}^{-1} D V)^k}{k!} =$$

$$= \bar{V}^{-1} V + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{V}^{-1} D \cancel{V} \bar{V}^{-1} D \dots \bar{V}^{-1} D V}{k!} =$$

$$= \bar{V}^{-1} V + \bar{V}^{-1} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D \dots D}{k!} \right] V =$$

$$= \bar{V}^{-1} \left( I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) V = \bar{V}^{-1} e^D V$$

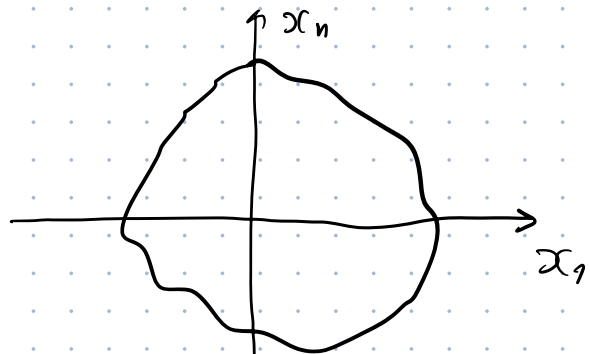
ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

$$x_{k+1} = A x_k$$

$$A = \bar{V}^{-1} D V$$

$$x_{k+1} = \bar{V}^{-1} D V x_k$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$



$|\lambda_i| < 1 \Rightarrow A$  - сжим. отобр. и сист. асимпт. уст.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

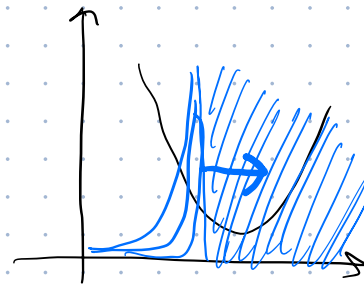
$$u = -Kx$$

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

ЗАДАЧУ ПРО ЭТО  
В ДОМАШКУ!

НАЙТИ ТАКОЕ  $K$ , ЧТО  $\operatorname{Re} \lambda(A - BK) < 0$

УСТОЙЧИВОСТЬ (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО)  
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ



ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА

$$V(x)$$

$$C^3[0, 1]$$

$$\dot{x} = f(x)$$

$$1) V(x) \in C^1(\mathbb{X}) \quad \text{НЕПР. ДО  
ПРОИЗВ.}$$

$$2) V(0) = 0 \text{ и } V(x) > 0 \text{ при } x \neq 0$$

$$3) V(x) \text{ РАДИАЛЬНО НЕОГРАНИЧЕНА}$$

ЭКВИВ. УТВЕРЖД.: НЕОГРАНИЧ. ПОСЛ-ТИ ОТОБРАЖАЕТ  
В НЕОГР. ПОСЛ-ТИ

$$4) \frac{d}{dt} V(x(t)) < 0$$

И КРОМЕ  $x=0$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = (\nabla V, \dot{x}) = (\nabla V, f(x)) < 0$$

ПРИМЕР

$$\dot{p} = -p$$

ПРОВЕРИМ СВ-ВА:

$$1) C^1 \quad \checkmark$$

$$2) V(0) = 0; V(x) > 0 \text{ при } x \neq 0 \quad \checkmark$$

$$3) \text{ РАД. НЕОГР. } \quad \checkmark$$

$$\text{КАНДИДАТ} \quad V(x) = p^2$$

$$4) \frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} [p^2] = 2p \dot{p} = -2p^2 < 0 \quad \checkmark$$

Ф-я Ляп. для лине. систем

$$\dot{x} = Ax$$

$$V(x) = x^T M x$$

$$\frac{d}{dt} [V(x)] = \dot{x}^T M x + x^T M \dot{x} = x^T A^T M x + x^T M A x =$$

$$= x^T (A^T M + M A) x < 0$$

Если  $\exists M : A^T M + M A < 0$ , то  $V(x) = x^T M x$  — Ф-я Ляп.  
и сист. уст.

Обобщение на сист. с управлением

Ф-я Ляп.  $\rightsquigarrow$  Ф-я упр. Ляп. (CLF, Control Lyapunov Function)

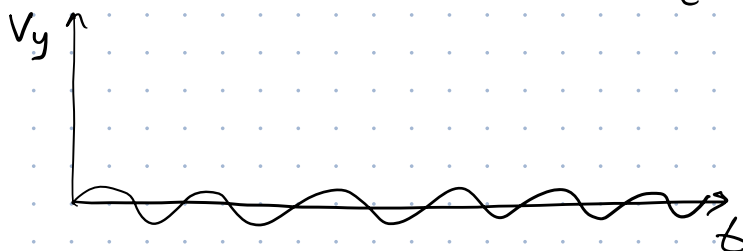
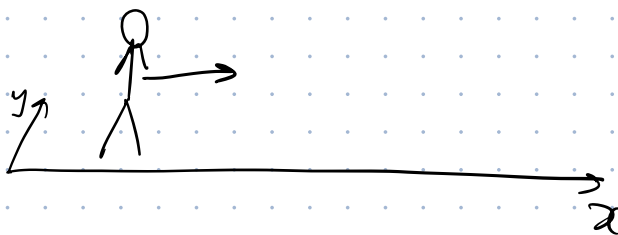
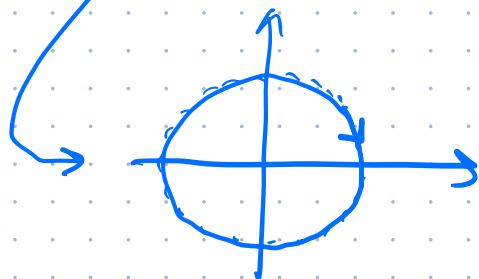
Изменение в определении:

$$4) \exists u(t) : (\nabla V, f(x(t), u(t))) < 0$$

Обобщение на циклы

Эвол. век. сост. в некот.  
случаях (при установивш.  
ходе) может быть  
предст. как

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{\text{cycl}} \\ x_{\text{acycl}} \end{pmatrix}$$



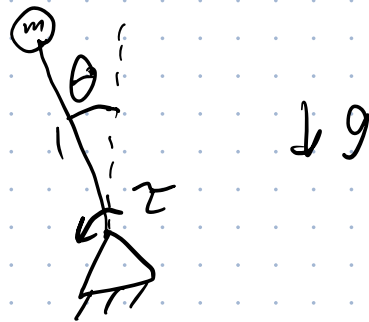
$\tau$  - фаза цикла;  $\tau \in [0, 1)$

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ  $x_{\text{cycl}}^*(\tau)$  УСТ.:

$$\exists \varepsilon: \forall x_0 \in B_\varepsilon(x_{\text{cycl}}^*(\tau)) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\tau \in [0, 1)} \|x_{\text{cycl}}^*(\tau) - x(t)\| = 0$$

УПРАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ ЭНЕРГИИ  
(energy-based control)

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$



$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{\tau}{ml^2}$$

$$|\tau| \leq \tau_{\max}$$

$$E(x) = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta$$

$$V(x) = \frac{(E - E_0)^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} V(x) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{(E - E_0)^2}{2} \right] = (E - E_0) \dot{E} = (E - E_0) (ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - mgl \sin \theta \dot{\theta}) =$$

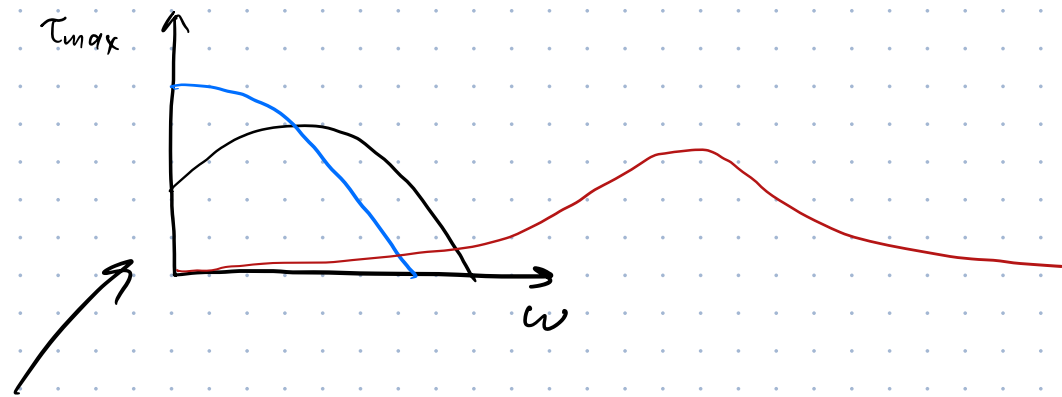
$$= (E - E_0) \dot{\theta} \left( \cancel{ml^2 \frac{g}{l} \sin \theta} + \cancel{ml^2 \frac{\tau}{ml^2}} - \cancel{mgl \sin \theta} \right) =$$

$$= (E - E_0) \dot{\theta} \tau < 0$$

$$\text{Для } \frac{d}{dt} V(x) < 0, \text{ нужно } \text{sign}(\tau) = -\text{sign}((E - E_0) \dot{\theta})$$

$$\tau = -\tau_{\max} \text{sign}((E - E_0) \dot{\theta})$$

$$W = K \tau^2$$



МОЖНО ПОСМ. ДОКУМ. DYNAMIXEL MX-106