СИМУЛЯЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В РОБОТОТЕХНИКЕ

ЛЕКЦИЯ 1. 17.09.25

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad // \quad \dot{x} \overset{def}{=} \frac{d}{dt} x$$

x – ВЕКТОР СОСТОЯНИЯ (state vector)

$x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$

u – ВЕКТОР УПРАВЛЕНИЯ (control vector)

$u \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m$

НЕПРЕР. СИСТ. $\qquad\qquad\qquad$ ДИСКР. СИСТ.

$$\dot{x} = f(x, u) \rightsquigarrow x_{k+1} = \hat{f}(x_k, u_k)$$

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ!

1) ХОРОШО ИЗУЧЕНЫ
2) ВСТРЕЧАЮТСЯ ВЕЗДЕ

ЗАДАЧА:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ u = u(x) \\ J = \int\limits_0^T G(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min \end{cases} \qquad (x(t), u(t));\ t \in [0, T]$$

$$\dot{x} = f(x, u) + \xi(t)$$
$$y = g(x)$$
$$\hat{x} = h(y)$$

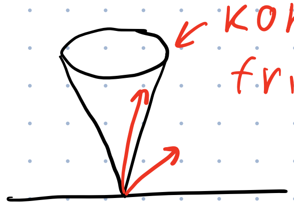
ТИПЫ "СЛОЖНОСТЕЙ":

1) ШУМЫ
2) ВОЗМУЩЕНИЯ
3) ЗАДЕРЖКИ
4) НЕТОЧНОСТЬ МОДЕЛИ
5) СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ
6) НЕЛИНЕЙНОСТЬ
7) РАЗРЫВЫ В $f(x, u)$, "ГИБРИДНЫЕ СИСТ."

ТИПЫ ОГРАНИЧЕНИЙ:

1) УГЛЫ

2) МОМЕНТЫ ($|\tau| \le 10$ Н·М) $\quad u \in \mathbb{U}$

3)  ← КОНУС ТРЕНИЯ friction cone

4) $x \in \mathbb{X}$

5) $f(x) \le \dots$

$h(x) = \dots$

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИН. СИСТЕМЫ

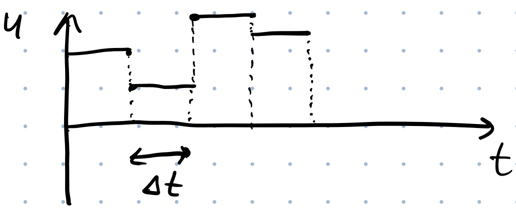
0) $\dot{x} = f(x, u) \longrightarrow \dot{x} = Ax + Bu \longrightarrow x_{k+1} = \hat{A} x_k + \hat{B} u_k$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

1)

sample-and-hold setting



$u(t) = u_k, \; t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t)$

x_k - НАЧ. СОСТ. ВНУТРИ ПОЛУИНТ. ПРОДОЛЖИТ. Δt

x_{k+1} - ???

2) $e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$; $M^0 = \mathbb{I}$

$= \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$

$$\dot{x} = Ax \quad \Big| \; e^{-At}\cdot$$

В ДЗ ПРОВЕРИМ, ЧТО A КОММ. С e^{At}

$$e^{-At}\dot{x} - e^{-At}Ax = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x\right] = -Ae^{-At}x + e^{-At}\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x\right] = 0$$

$$e^{-At}x = C \quad \Big| \; e^{At}\cdot$$

$$x(t) = e^{At}C$$

$$x(0) = x_0 = e^{A\cdot 0}\cdot C \Rightarrow C = x_0$$

$$x(t) = e^{At}x_0$$

3) $\dot{x} = Ax + Bu_k \quad \Big| \; e^{-At}\cdot$

$\tau \in [0, \Delta t)$

$x(k\Delta t) = x_k$

$x(k\Delta t + \tau) - ?$

$$e^{-At}\dot{x} - e^{-At}Ax = e^{-At}\cdot Bu_k$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x\right] = e^{-At}Bu_k \quad \Big| \int_0^{\tau} \; d\xi$$

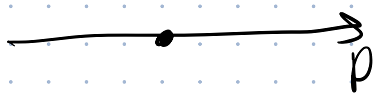
$$e^{-A\tau}x(\tau) - x_0 = \int_0^{\tau} e^{-A\xi}Bu_k\, d\xi \quad \Big| \; e^{A\tau}\cdot$$

$$x(\tau) = e^{A\tau}x_0 + \int_0^{\tau} e^{A(\tau-\xi)}Bu_k\, d\xi = $$ РАЗЛОЖ. МАТР. ЭКСП.

$$= (\mathbb{I} + A\tau)x_0 + \int_0^{\tau}\left(\mathbb{I} + A(\tau-\xi)\right)Bu_k\, d\xi + h.o.t. =$$

$$= (\mathbb{I} + A\tau)\, x_0 + \tau B u_k + h.o.t.$$

$$x(\Delta t) = x_{k+1} = \underbrace{(\mathbb{I} + \Delta t A)}_{\hat{A}}\, x_k + \underbrace{\Delta t B}_{\hat{B}}\, u_k$$



$$\overline{x} = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \end{pmatrix} = \underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}} (F)$$

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ \dot{p}_{k+1} \end{pmatrix} = (\mathbb{I} + \Delta t A) \begin{pmatrix} p_k \\ \dot{p}_k \end{pmatrix} + \Delta t B\, (F_k) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ \dot{p}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{m} \end{pmatrix} (F_k) =$$

$$= \begin{pmatrix} p_k + \Delta t\, \dot{p}_k \\ \dot{p}_k + \frac{F_k}{m} \Delta t \end{pmatrix}$$