Задача 1

(Петров «Вычислительная математика для физиков» стр. 366, №18) Получить численное решение одномерной задачи о распаде разрыва в идеальном газе, используя систему нестационарных уравнений газодинамики:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + A\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0,$$

где $\boldsymbol{U} = (\rho, u, \varepsilon)^T$ и матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u \end{pmatrix}$$

где p – давление, u – скорость, ρ – плотность, ε – удельная внутренняя энергия газа.

Перейдем к переменным $(\rho, u\rho, \varepsilon\rho)^T$, тогда матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & \gamma - 1 \\ -u\varepsilon\gamma & \gamma\varepsilon & u \end{pmatrix}$$

Начальные и краевые условия:

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_1 \text{ если } x \leq 0 \\ \rho_2 \text{ если } x > 0 \end{cases}$$

$$u(0, x) = 0,$$

$$p(0, x) = \begin{cases} p_1 \text{ если } x \leq 0 \\ p_2 \text{ если } x > 0 \end{cases}$$

Начальное значение ε определяется из уравнения состояния:

$$p = \rho\varepsilon(\gamma - 1), \gamma = 1.4$$

Для решения использовать:

1. Инварианты Римана с разностными схемами правого и левого уголка.
2. Сеточно-характеристичекий метод.

Собственные числа матрицы A: $u+c$, u, $u-c$, где $c=\sqrt{\gamma(\gamma-1)\varepsilon}$. Матрицы Ω определяется как:

$$\Omega = \begin{pmatrix} -uc & c & \gamma-1 \\ -c^2 & 0 & \gamma-1 \\ uc & -c & \gamma-1 \end{pmatrix}$$