

перепишем систему уравнений газовой динамики. Обозначим лагранжеву координату за m . Тогда $dm = \rho(x, 0)dx$, $\frac{\partial m}{\partial x} = \rho$, $\frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial m}$.

Подставляя в исходную систему, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho^2 \frac{\partial u}{\partial m} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial m} &= 0\end{aligned}$$

чтобы получить разностную схему первого порядка аппроксимируем производные разностными отношениями:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_k^{n+1} - \rho_k^n}{\tau} - (\rho_k^n)^2 \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} &= 0 \\ \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + \frac{p_k^n - p_{k-1}^n}{h} &= 0 \\ \frac{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k^n}{\tau} + p_k^n \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} &= 0\end{aligned}$$

где h, τ - шаги сетки по пространству и времени, k, n - индексы узлов сетки.

Для получения схемы второго порядка используем центральные разности:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_k^{n+1} - \rho_k^n}{\tau} - (\rho_k^n)^2 \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} &= 0 \\ \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + \frac{p_{k+1}^n - p_{k-1}^n}{2h} &= 0 \\ \frac{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k^n}{\tau} + p_k^n \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} &= 0\end{aligned}$$

Начальные условия:

При $t = 0$: $\rho = \rho_0, u = 0, p = p_0, \varepsilon = \varepsilon_0$ при $m > 0$, $\rho = 0, p = 0$ при $m < 0$.

Краевые условия:

На левой границе $\rho = 0, p = 0$. На правой границе $\frac{\partial \rho}{\partial m} = 0, \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \frac{\partial p}{\partial m} = 0$.

Алгоритм решения:

1. Задаем начальные условия на нулевом слое по времени

2. Находим значения газодинамических величин на следующем временном слое, используя разностную схему
3. Повторяем шаг 2 до необходимого момента времени t_{end}

Описание движения:

После снятия перегородки в вакуум начинает распространяться волна разрежения. Газ ускоряется в сторону вакуума. Плотность, давление и внутренняя энергия газа уменьшаются со временем. На контактной границе между газом и вакуумом скорость газа максимальна.

P.S

Граничные условия получены из физических соображений:

1. На левой границе, где изначально находился вакуум, плотность и давление газа должны оставаться равными нулю, то есть $\rho = 0, p = 0$ при $m = m_{left}$. Это следует из того, что газ не может мгновенно заполнить область вакуума, а будет распространяться в нее постепенно.
2. На правой границе, где находится невозмущенный газ, производные по массовой координате от плотности, скорости и давления должны быть равны нулю: $\frac{\partial \rho}{\partial m} = 0, \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \frac{\partial p}{\partial m} = 0$ при $m = m_{right}$. Это означает, что на достаточном удалении от начального положения перегородки газ остается невозмущенным и его параметры не меняются со временем.