

Отчет о выполнении лабораторной работы 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Выполнил: Голубович Тимур, группа Б01-108

17.09.2022

Цель работы

Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

Оборудование и приборы

Компьютер с *PicoScope 6*;
функциональный генератор *waveStation 2052*;
USB-осциллограф *АКИП-4108*.

Теоретическое введение

Рассмотрим функцию вида

$$f(x) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad (1)$$

где A_n, ω_n, α_n – постоянные величины. Множество пар (ω_i, A_i) называется спектром $f(x)$ и может быть конечным или бесконечным.

Периодический сигнал может быть представлен в виде ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n)), \quad (2)$$

где $a_0/2 = const$ – среднее значение функции, A_n – амплитуды членов разложения. Спектр любой периодической функции можно представить в виде набора гармонических колебаний с дискретными частотами $\Omega_1 = \frac{1}{T_1}, 2\Omega_1, \dots$ и постоянной составляющей с нулевой частотой. Такой спектр называется линейчатым или дискретным.

Работа 3.6.1

Непериодический сигнал представим в виде интеграла Фурье. В данной работе исследование таких сигналов не проводится.

Для периодического прямоугольного сигнала $\langle V \rangle = V_0 \frac{\tau}{T}$, $A_n \sim \frac{\sin x}{x}$. Здесь и далее шириной спектра $\Delta\nu$ называем расстояние от главного максимума до 1-го нуля огибающей. При этом выполнено соотношение неопределённостей:

$$\Delta\nu\tau \simeq 1 \quad (3)$$

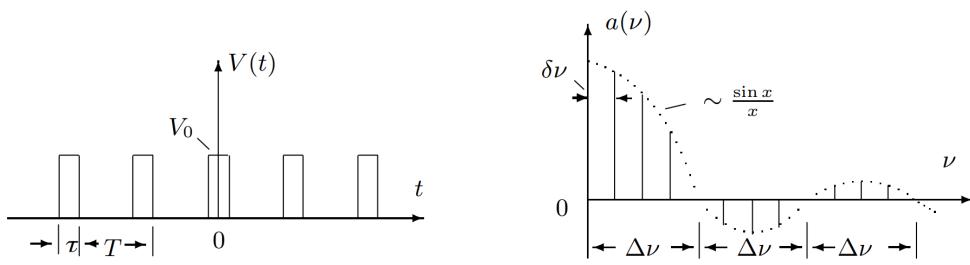


Рис. 1: Периодический прямоугольный сигнал

Для последовательности цугов с длительностью τ и периодом T разложение в спектр представлено на рисунке 2.

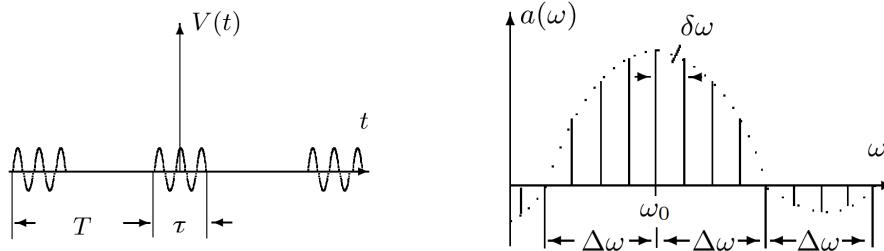


Рис. 2: Периодическая последовательность цугов

В случае АМ-колебаний, сигнал определяется формулой:

$$f(t) = A_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad (4)$$

где m – глубина модуляции. Спектр такого сигнала на рис. 3. Причём амплитуды синусов $\omega_0 \pm \Omega$ равны $m/2$, а все начальные фазы одинаковы. То есть,

$$\frac{a_{бок}}{a_{очн}} = \frac{U_{min}^S}{U_{max}^S} = \frac{m}{2} \quad (5)$$

Работа 3.6.1

Глубину модуляции можно рассчитать по формуле:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (6)$$

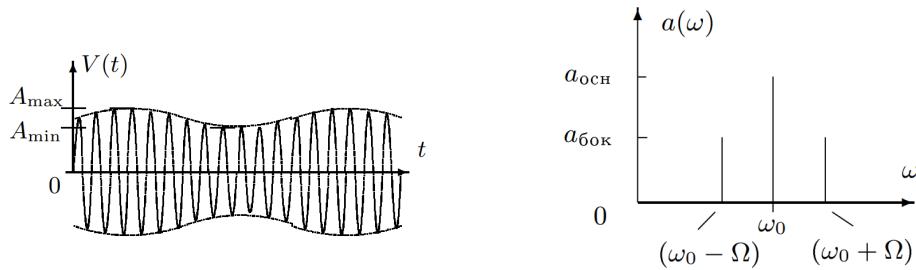


Рис. 3: АМ-сигнал

При частотной модуляции мгновенная частота колебания равна:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_m \cdot \sin \Omega t, \quad (7)$$

где $\Delta\omega = 2\pi\Delta f_m$ - амплитуда отклонения частоты (девиация частоты), $\Omega = 2\pi F$ – модулирующая частота.

Величина $\beta = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} = \frac{\Delta f_m}{F}$ называется индексом частотной модуляции.

Экспериментальная установка

Установка, используемая в работе, представлена на рис. 4.

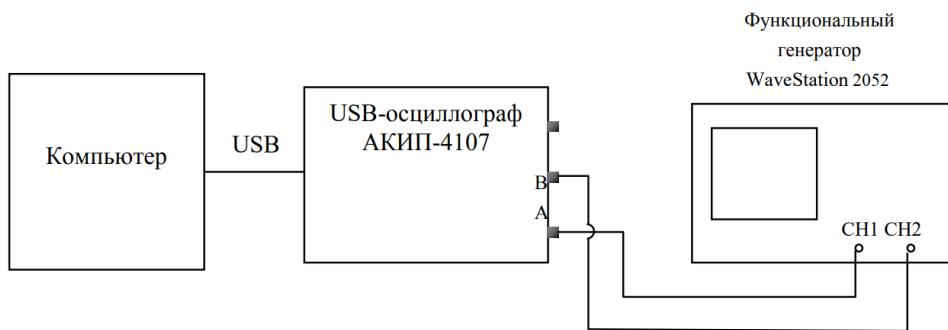


Рис. 4: Схема экспериментальной установки

Функциональный генератор позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала

Работа 3.6.1

USB-осциллографа. Инструментальные погрешности считаются малыми.

Ход работы

Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Как меняется спектр сигнала ($\Delta\nu$ и $\delta\nu$) при изменении τ и фиксированной $f_{\text{повт}}$, а также при изменении $f_{\text{повт}}$ и фиксированном τ видно на рисунках 6 и 7.

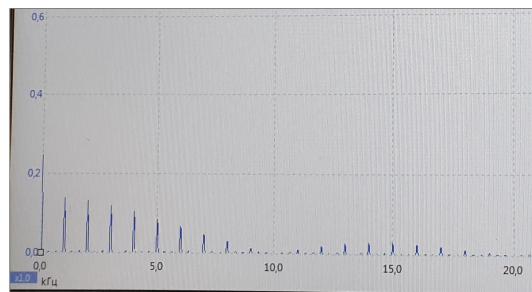


Рис. 5: Спектр при $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$

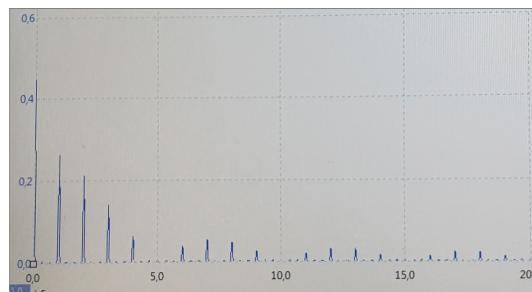


Рис. 6: Спектр при $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 200 \text{ мкс}$

Работа 3.6.1

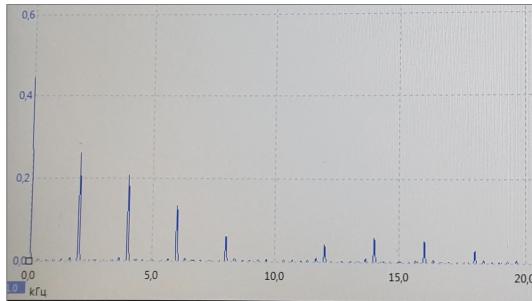


Рис. 7: Спектр при $f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$

Проведём измерения зависимости ширины спектра $\Delta\nu$ от длительности импульса τ и запишем их в таблицу 1.

$\tau, \text{ мкс}$	$\Delta\nu, \text{ кГц}$	$\frac{1}{\tau}, \text{ мкс}^{-1}$
40	25,0	0,0250
60	16,0	0,0167
80	13,0	0,0125
100	10,0	0,0100
120	8,0	0,0083
140	7,0	0,0071
160	6,0	0,0063
180	5,5	0,0056
200	5,0	0,0050

Таблица 1: Зависимость $\Delta\nu(\tau)$ для $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$

По графику коэффициент наклона $k = (0,999 \pm 0,05) \quad \varepsilon_k = 5\%$, что отлично сходится с теоретическим значением $k = 1$.

Измерим частоты и амплитуды спектральных составляющих сигнала при $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ для $\tau = 50 \text{ мкс}$ и $\tau = 100 \text{ мкс}$. Запишем результаты в таблицу 2.

Работа 3.6.1

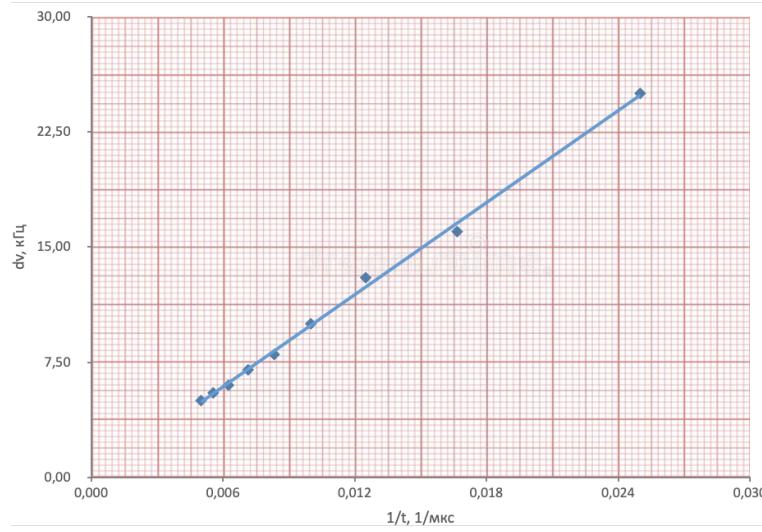


Рис. 8: График $\Delta\nu(\tau)$

$\tau = 50 \text{ мкс}$			$\tau = 100 \text{ мкс}$		
№ гармоники	$\nu, \text{ кГц}$	$A, \text{ мВ}$	№ гармоники	$\nu, \text{ кГц}$	$A, \text{ мВ}$
0	0,04	94,10	0	0,1	142,70
1	1,00	32,60	1	1,0	65,80
2	2,04	33,20	2	2,0	62,70
3	2,99	31,98	3	3,0	57,20
4	3,99	30,14	4	4,0	48,59
5	4,95	28,29	5	5,0	41,21
6	6,03	27,00	6	6,0	33,21
7	6,99	25,00	7	7,0	22,74
8	7,90	22,00	8	8,0	14,15
9	9,03	20,10	9	9,0	6,77
10	10,00	19,00	10	10,0	0,00
11	11,00	17,22			
12	12,00	16,60			
13	13,00	14,15			
14	13,90	11,67			
15	15,00	9,84			
16	16,00	7,38			
17	17,00	5,50			
18	18,00	6,15			

Таблица 2: Измерения спектров для $\tau = 50 \text{ мкс}$ и $\tau = 100 \text{ мкс}$

Работа 3.6.1

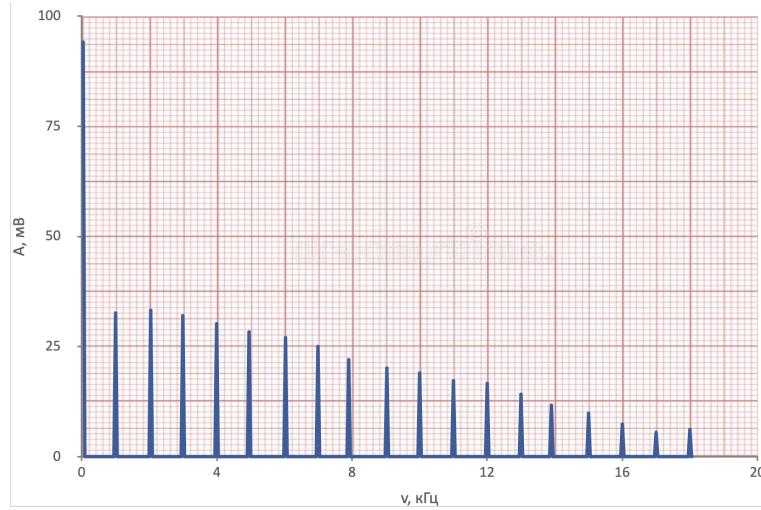


Рис. 9: Спектр для $\tau = 50$ мкс

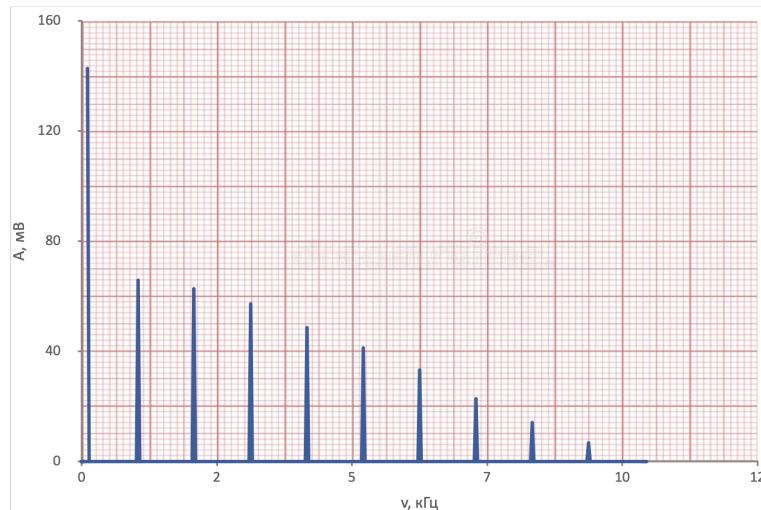


Рис. 10: Спектр для $\tau = 100$ мкс

Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Посмотрим, как изменяется вид спектра при увеличении длительности τ импульса вдвое от 100 до 200 мкс.

Работа 3.6.1

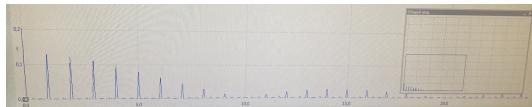


Рис. 11: Спектр при $\tau = 100$ мкс

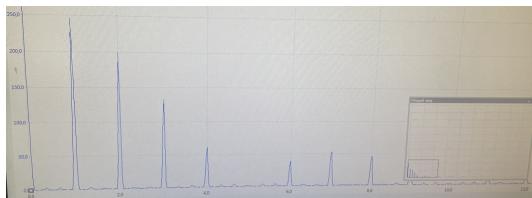


Рис. 12: Спектр при $\tau = 200$ мкс

Также посмотрим, как меняется картина спектра при изменении несущей частоты ν_0 ($\nu_0 = 10, 25$ и 40 кГц).



Рис. 13: Спектр при $\nu_0 = 10$ кГц

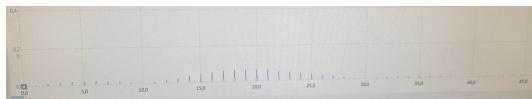


Рис. 14: Спектр при $\nu_0 = 25$ кГц



Рис. 15: Спектр при $\nu_0 = 40$ кГц

Установим частоту несущей $\nu_0 = 30$ кГц, длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Будем определять расстояние $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами для разных частот повторения импульсов $f_{\text{повт}}$. Проведём измерения для $f_{\text{повт}} = 0,5, 1, 2, 4$ и 5 кГц и запишем их в таблицу 3.

Работа 3.6.1

$\delta\nu$, кГц	$f_{\text{повт}}$, кГц
0,5	0,5
1	1
2	2
4	4
5	5

Таблица 3: Зависимость $\delta\nu$ от $f_{\text{повт}}$

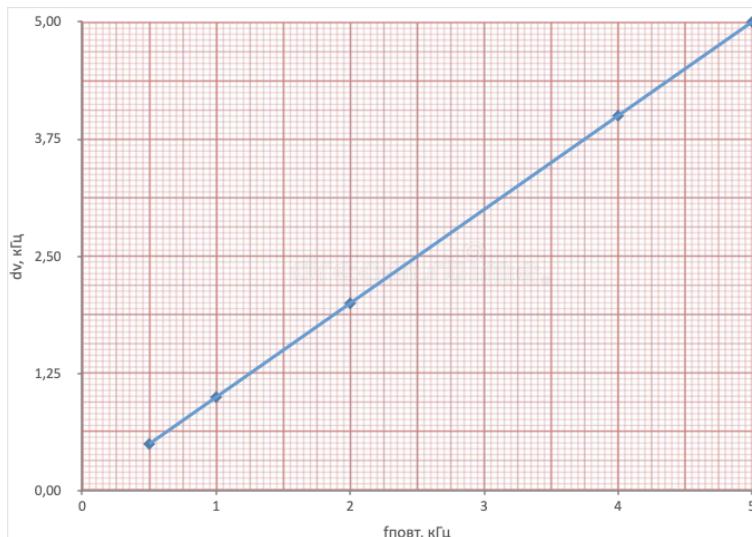


Рис. 16: График $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Коэффициент наклона графика 16 1, что опять-таки сходится с теоретическим значением.

Установим $\tau = 100$ мкс, $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и проведём измерения амплитуды и частоты спектра. Результаты запишем в таблицу 4. Аналогично измерения проведём для импульса с $\tau = 100$ мкс и $f_{\text{повт}} = 2$ кГц. Построим графики этих спектров.

Работа 3.6.1

$f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$			$f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$		
№ гармоники	$\nu, \text{ кГц}$	$A, \text{ мВ}$	№ гармоники	$\nu, \text{ кГц}$	$A, \text{ мВ}$
30	30	73	15	30	130
31	31	55	31	32	105
32	32	54	32	34	84
33	33	48	33	36	55
34	34	40	34	38	38
35	35	33	35	40	24
36	36	26			
37	37	19			
38	38	11			
39	39	5			
40	40	1			

Таблица 4: Измерения спектров для $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ и $f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$

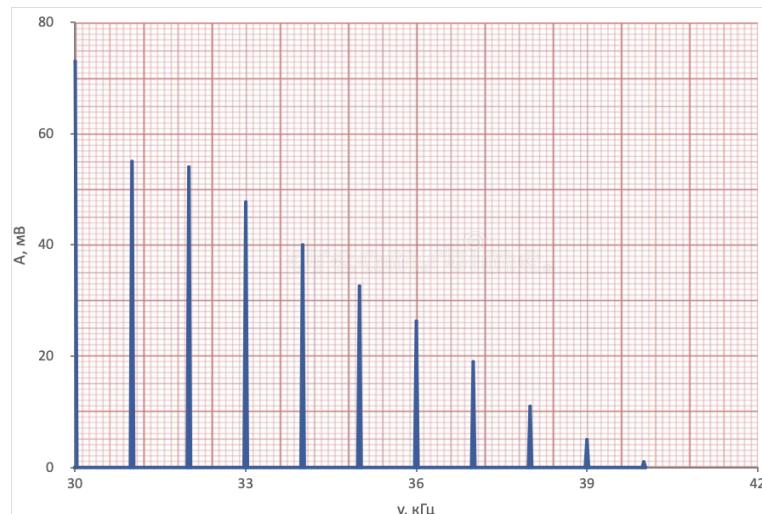


Рис. 17: Спектр при $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$

Работа 3.6.1

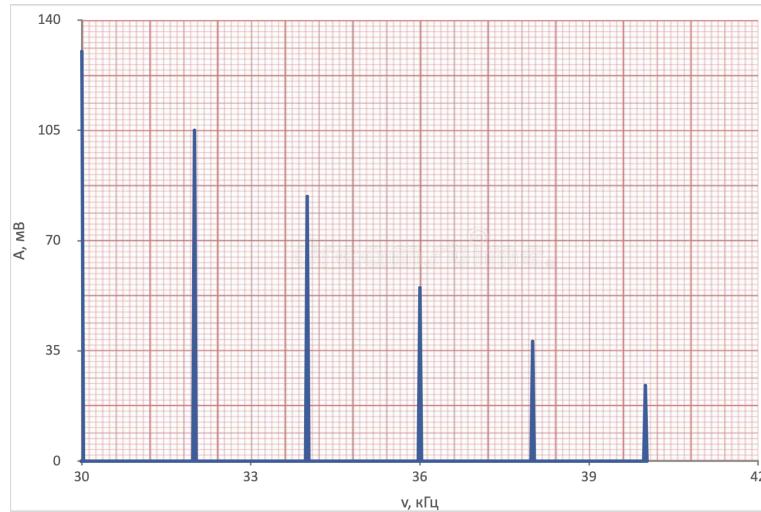


Рис. 18: Спектр при $f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$

Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Будем менять двойную амплитуду сигнала канала *CH1* от 0,2 до 2 В, измеряя для каждого значения боковую $A_{\text{бок}}$, основную боковую $A_{\text{осн}}$ (в спектре), максимальную $A_{\text{макс}}$ и минимальную $A_{\text{мин}}$ амплитуды сигналов. Измерения запишем в таблицу 5.

$2A, \text{ В}$	$A_{\text{макс}}, \text{ мВ}$	$A_{\text{мин}}, \text{ мВ}$	$A_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	$A_{\text{осн}}, \text{ мВ}$	m	$\frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}$
0,2	555	450	1,6	33,33	0,104	0,048
0,4	602	402	3,2	32,99	0,199	0,097
0,6	659	349	4,8	32,21	0,308	0,149
0,8	716	294	6,4	32,49	0,418	0,197
1,0	756	255	7,8	31,71	0,496	0,246
1,2	806	202	9,4	32,53	0,599	0,289
1,4	864	149	11,0	32,26	0,706	0,341
1,6	916	98	12,8	32,32	0,807	0,396
1,8	991	56	14,2	32,27	0,893	0,440
2,0	1000	17	16,2	32,40	0,967	0,500

Таблица 5: Измерения сигналов, модулированных по амплитуде

Построим график 19 отношения $\frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}$ в зависимости от m (рассчитываются по формуле 6). Коэффициент его наклона $k = (0,508 \pm 0,03) \quad \varepsilon_k =$

Работа 3.6.1

6% (рассчитан по МНК) отлично согласуется с теоретическим значением 0,5.

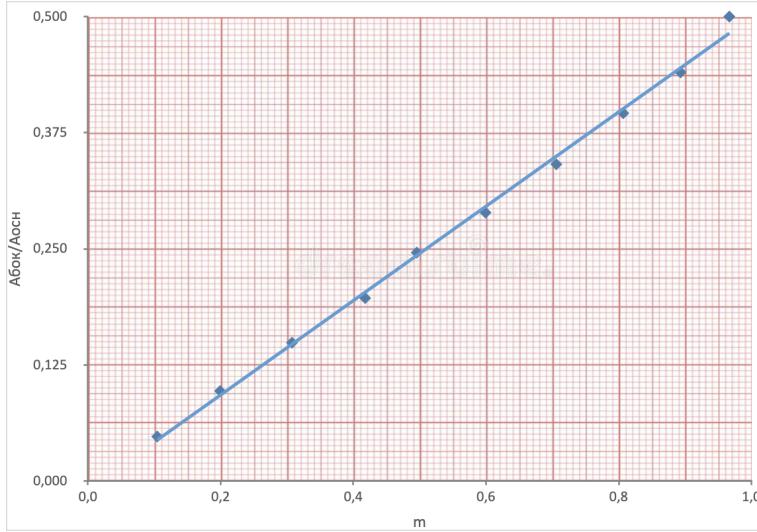


Рис. 19: График зависимости $\frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{очн}}} (m)$

Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по частоте (дополнительное задание)

Будем на генераторе изменять девиацию частоты Δf_m от 100 до 1000 Гц, записывая амплитуду A_0 компоненты на основной частоте ν_0 и амплитуды $A_{\pm 1}$ на частотах $\nu_0 \pm F$ в таблицу 6. При больших значениях Δf_m запишем также $A_{\pm 2}$ компонент на частотах $\nu_0 \pm 2F$.

Δf_m , Гц	A_0 , мВ	$A_{\pm 1}$, мВ	$A_{\pm 2}$, мВ	β	$\frac{A_{\pm 1}}{A_0} (\beta)$
100	308,1	15,38		0,1	0,050
200	305,7	30,75	1,57	0,2	0,101
300	302,6	44,86	3,45	0,3	0,148
400	297,7	58,43	6,15	0,4	0,196
500	289,7	72,57	9,23	0,5	0,251
700	271,8	99,02	17,22	0,7	0,364
1000	236,2	132,20	35,06	1,0	0,560

Таблица 6: Спектр гармонического сигнала, модулированного по частоте

При частотах Δf_m от 1 до 10 кГц спектр становится намного более сложным. Рассчитаем индекс модуляции β для каждой Δf_m и построим

Работа 3.6.1

график 20 $\frac{A_{\pm 1}}{A_0}(\beta)$. Проведём сглаживающую прямую. Её коэффициент наклона 0,4968 (рассчитан по МНК), что очень близко к теоретическому значению 0,5.

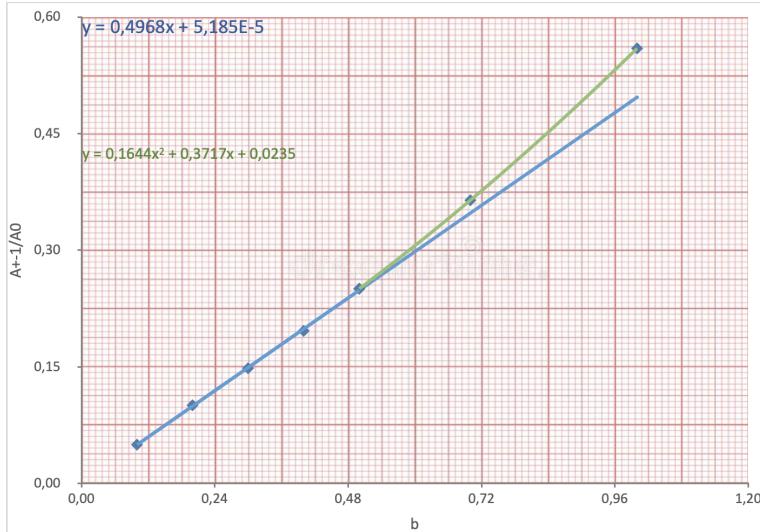


Рис. 20: График зависимости $\frac{A_{\pm 1}}{A_0}(\beta)$

Проекстраполируем часть графика, плохо ложащуюся на проведённую прямую полиномом 2 степени. Тогда можно составить такое уравнение:

$$\begin{aligned}
 0,1644 \cdot \beta_{kp}^2 + 0,3717 \cdot \beta_{kp} + 0,0235 - (0,4968 \cdot \beta_{kp} + 5,185E - 5) = \\
 = 0,1 \cdot (0,4968 \cdot \beta_{kp} + 5,185E - 5) \Rightarrow \beta_{kp} = 0,906
 \end{aligned}$$

Т. е. $\beta_{kp} = 0,906$.

Вывод

Зависимость ширины спектра последовательности импульсов от длительности импульса полностью совпали с теоретическими расчетами. По наклону графика 8 можно убедиться в соотношении неопределенностей ($\Delta\nu\tau \simeq 1$).

Зависимость расстояния между ближайшими спектральными компонентами от частоты повторения цугов также подтвердилась.

Коэффициенты, получаемые в результате зависимости отношения амплитуд спектральных линий сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции сошлись с теоретически рассчитанными.

В последней части работы был определён диапазон индексов модуляции, для которых амплитуда частотно-модулированного колебания практически не меняется.

Список литературы

- [1] *Лабораторный практикум по общей физике. В 3 томах. Том 2. Электричество и магнетизм: учебное пособие* под ред. А. В. Максимычева, М. Г. Никулина