Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 4
на тему
МЕТОДЫ И ПРОЦЕДУРЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
ПРИ МНОГИХ КРИТЕРИЯХ
Вариант 1 (способ 2)

Выполнил:
студент группы 150501
Климович А.Н.

Проверил:
Селезнёв А.И.

МИНСК 2024

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

– изучение методов и процедур многокритериального выбора альтернатив;

– изучение применения методов многокритериального выбора альтернатив для анализа и выбора управленческих решений.

2 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

2.1 Поставленные задачи

В ходе лабораторной работы будут выполнены следующие задачи:

1. Изучить теоретические сведения по лабораторной работе.
2. Получить задание на лабораторную работу.
3. Выбрать множество Парето.
4. По указанию преподавателя выполнить анализ альтернатив и выбрать лучшую альтернативу одним из следующих двух способов:

− первый способ:

а) используя методику экспресс-анализа альтернатив, выбрать три лучших альтернативы;

б) выполнить ранжирование выбранных альтернатив, используя методику скаляризации векторных оценок;

в) сравнить две лучшие альтернативы, используя методику сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования;

− второй способ:

а) по виду имеющихся экспертных суждений о важности критериев выбрать метод экспертного анализа, который следует использовать для определения весов критериев: метод предпочтений или метод ранга. Используя выбранный метод экспертного анализа, вычислить веса критериев;

б) выполнить ранжирование альтернатив на основе модифицированного алгоритма Кемени-Снелла. По результатам ранжирования отобрать три лучшие альтернативы;

в) выполнить анализ трех отобранных альтернатив по методу ЭЛЕКТРА. Для приведения оценок к безразмерному виду использовать алгоритм, применяемый в методике экспресс-анализа альтернатив. Изменяя пороговые значения индексов согласия и несогласия, выбрать: одну лучшую альтернативу.

2.2 Вариант задания

Предприятие – производитель изделий бытовой электроники выбирает торговую фирму для заключения с ней договора о распространении своей продукции. Имеется шесть торговых фирм, о которых известна информация, представленная в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Информация о торговых фирмах

Фирма	ТФ1	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
Опыт работы с данной продукцией, лет	5	2	6	5	7	4
Уровень развития торговой сети	развитая	развитая	развитая	средняя	средняя (немного хуже, чем у ТФ4)	средняя (немного лучше, чем у ТФ4 и ТФ5)
Репутация	сомнительная	хорошая	средняя	хорошая	средняя	хорошая

Важность критериев оценивается двумя экспертами.

По мнению первого эксперта, основной критерий – репутация (К3), менее важный – опыт работы (К1), еще менее важный – уровень развития торговой сети (К2).

По мнению второго эксперта, основной критерий – репутация (К3), менее важный – уровень развития торговой сети (К2), еще менее важный – опыт работы (К1).

3 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ И МЕТОДОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ МНОГИХ КРИТЕРИЯХ

В большинстве случаев решения (управленческие, проектно-технические и другие) принимаются с учетом нескольких критериев (целей, показателей качества). Поэтому большинство задач, связанных с принятием решений, являются *многокритериальными*. Другое название таких задач – задачи *векторной оптимизации*, так как решение в них принимается с учетом набора из нескольких критериев (называемых *вектором критериев*). Если при выборе решений учитывается только один критерий, то такая задача представляет собой задачу *скалярной* оптимизации. Примером задачи скалярной оптимизации может служить классическая транспортная задача (задача перевозки заданного количества грузов от поставщиков потребителям с минимальными затратами), так как в ней учитывается только один критерий – затраты на перевозки.

Среди задач принятия решений выделяют также дискретные и непрерывные задачи. В *дискретных* задачах множество возможных решений (альтернатив) конечно. Типичные примеры таких задач – выбор одного из нескольких товаров при покупке, выбор одного из возможных проектов строительства предприятия и т.д. В *непрерывных* задачах имеется бесконечное множество возможных решений (в пределах некоторого диапазона). Примеры таких задач – выбор оптимальных параметров химической реакции при разработке технологического процесса, выбор оптимального плана производства нескольких сортов бензина и т.д.

Очевидно, что задачи как скалярной, так и векторной оптимизации могут представлять собой как непрерывные, так и дискретные задачи. Например, если требуется распределить сумму в размере 10 млн ден.ед. между несколькими предприятиями, и эффективность вложения средств оценивается по одному критерию (например, только по прибыли), то решаемая задача относится к классу задач скалярной оптимизации. Если учитывается несколько критериев (например, прибыль и срок окупаемости), то решаемая задача представляет собой задачу векторной оптимизации. Если средства могут выделяться только в размерах, кратных одному миллиону, то данная задача – дискретная. Если средства могут выделяться в любых (в пределах имеющейся суммы) количествах, то задача относится к числу непрерывных.

В данной работе рассматриваются методы и процедуры решения дискретных задач многокритериального выбора альтернатив. Такие задачи относятся к числу слабоструктурированных и могут решаться на основе метода анализа иерархий (см. лабораторные работы №2 и №3). Однако метод анализа иерархий требует большого объема экспертной информации: человеком-экспертом должно быть выполнено сравнение всех критериев, а также всех альтернатив по каждому из критериев. Легко подсчитать, что для решения задачи анализа N альтернатив с использованием M критериев требуется выполнить $M\cdot(M-1)/2$ сравнений критериев по важности и $M\cdot N\cdot(N-1)$

сравнений альтернатив по критериям. Таким образом, метод анализа иерархий достаточно трудоемок. Кроме того, этот метод имеет смысл применять только при условии, что в решении задачи участвуют высококвалифицированные специалисты (эксперты), что не всегда возможно. Поэтому разработан ряд более простых методов и процедур, требующих использования небольшого объема экспертной информации. В данной работе рассматривается несколько таких методов.

4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ КРИТЕРИВ МЕТОДОМ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Метод основан на ранжировании критериев, выполняемом группой экспертов. Каждый из экспертов (независимо от других) выполняет ранжирование критериев, т.е. указывает, какой из критериев, по его мнению, является наиболее важным, какой – следующий за ним, и т.д.

Рассмотрим этот метод на примере задачи из условия.

1 Каждому эксперту предлагается выполнить ранжирование критериев по предпочтению. В данном примере каждый эксперт присваивает номер 1 критерию, который (по его мнению) оказывает наибольшее влияние, 2 – следующему по важности, и т.д. Оценки, указанные экспертами, сводятся в таблицу (матрицу) размером MхN, где M – количество экспертов, N – количество критериев. Обозначим эти оценки как X_{ij}, i=1,...,M, j=1,...,N.

Обозначим эти оценки как X_{ij}, i=1,...,M, j=1,...,N.

Пусть, например, экспертами составлена матрица оценок, приведенная в таблице 1.7.

Таблица 4.1 – Матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Критерии		
	К1	К2	К3
1	2	3	1
2	3	2	1

2 Производится преобразование матрицы оценок по формуле:

$$B_{ij} = N - X_{ij},\ \text{где}\ i=1,...,M,\ j=1,...,N.$$

Это означает, что каждая экспертная оценка вычитается из количества критериев.

Для данного примера получена матрица, приведенная в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Преобразованная матрица экспертных оценок для метода предпочтений

Эксперты	Критерии		
	К1	К2	К3
1	1	0	2
2	0	1	2

Например, $B_{12} = 3 - X_{12} = 3 - 3 = 0$.

3 Находятся суммы преобразованных оценок по каждому из критериев:

$$C_j = \sum_{i=1}^{M} B_{ij},\ \text{где}\ j=1,...,N.$$

В данном примере C_1=1+0=1; C_2=0+1=1; C_3=2+2=4.

4 Находится сумма всех оценок:

$$C = \sum_{j=1}^{N} C_j .$$

В данном примере C = 1+1+4 = 6.

5 Находятся веса альтернатив:

$$V_j = C_j/C, \text{ где } j=1,...,N.$$

В данном примере

V_1=1/6=0,167; V_2=1/6=0,167; V_3=4/6=0,666.

Чем больше вес, тем более предпочтительной является альтернатива (по мнению экспертов).

В данном примере самым важным критерием является репутация (К3), менее важны – уровень развития торговой сети (К2) и опыт работы (К1).

5 МЕТОДИКА ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗА АЛЬТЕРНАТИВ

Методика предназначена для отбора перспективных альтернатив. При этом перспективными считаются альтернативы, не имеющие существенных недостатков ни по одному из критериев.

Методика рассчитана на применение в задачах, в которых большинство критериев являются числовыми. Методика может применяться и для решения задач, в которых имеются качественные (выраженные в словесной форме) критерии; в этом случае для перехода к числовым оценкам применяются следующие процедуры:

– оценки по качественным критериям выражаются по пятибалльной шкале ("отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "плохо", "очень плохо"), а затем выполняется переход к числовым оценкам с использованием **шкалы Харрингтона**. При этом оценке "отлично" соответствуют числовые оценки от 0,8 до 1; "хорошо" – от 0,63 до 0,8; "удовлетворительно" – от 0,37 до 0,63; "плохо" – от 0,2 до 0,37; "очень плохо" – от 0 до 0,2. Числовая оценка выставляется человеком: экспертом или лицом, принимающим решения (ЛПР). Например, если по некоторому критерию две альтернативы имеют оценку “хорошо”, но одна из них очень хорошая, а другая – немного хуже, то первой из альтернатив (лучшей) можно назначить оценку 0,8, а второй, например – 0,7;

– для оценок, имеющих вид "да-нет" (т.е. выражающих наличие или отсутствие некоторого показателя), обычно используются следующие числовые оценки: "да" – 0,67, "нет" – 0,33 (здесь предполагается, что оценка "да" более желательна, чем "нет").

Принцип работы методики экспресс-анализа альтернатив следующий. Для каждой альтернативы находится худшая оценка (из всех оценок данной альтернативы по критериям, используемым в задаче). Выбираются альтернативы, худшая оценка которых *не ниже* некоторой пороговой величины.

Решение задачи из условия.

Для начала выберем множество Парето. Для этого выполним попарное сравнение альтернатив по всем критериям. Во множество Парето войдут пять альтернатив: ТФ2, ТФ3, ТФ4, ТФ5, ТФ6. Для удобства дальнейшего решения задачи приведем их оценки в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Множество Парето для задачи из условия

Показатели	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
Опыт работы с данной продукций, лет	2	6	5	7	4
Уровень развития торговой сети	развитая	развитая	средняя	средняя (немного хуже, чем у ТФ4)	средняя (немного лучше, чем у ТФ4 и ТФ5)
Репутация	хорошая	средняя	хорошо	средняя	хорошая

Обозначим оценки альтернатив по критериям как X_{ij}, i=1,...,M, j=1,...,N. Здесь M – количество критериев, N – количество альтернатив (в данной задаче M=3, N=5).

Выбор множества перспективных альтернатив на основе методики экспресс-анализа реализуется в следующем порядке.

1 Оценки альтернатив по критериям приводятся к безразмерному виду. Безразмерные оценки альтернатив P_{ij}, i=1,...,M, j=1,...,N, находятся следующим образом:

– для критериев, подлежащих максимизации, все оценки альтернатив по критерию делятся на максимальную из оценок по данному критерию:

$$P_{ij} = \frac{X_{ij}}{max_j X_{ij}};$$

– для критериев, подлежащих минимизации, из оценок по данному критерию выбирается минимальная, и она делится на все оценки альтернатив по данному критерию:

$$P_{ij} = \frac{min_j X_{ij}}{X_{ij}};$$

– для качественных (словесных) критериев выполняется переход к числовым оценкам по шкале Харрингтона.

Рассмотрим получение безразмерных оценок для данной задачи.

Критерий "опыт работы с данной продукцией" подлежит максимизации. Поэтому для него все оценки делятся на максимальную оценку (в данном примере она равна 7) по данному критерию. Например, для ТФ2 безразмерная оценка по критерию "опыт работы с данной продукцией" находится следующим образом: 2/7=0,29.

Безразмерные оценки по критериям "уровень развития торговой сети" и "репутация" назначаются экспертом по шкале Харрингтона.

Для данной задачи безразмерные оценки приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Безразмерные оценки альтернатив для задачи из условия

Показатели	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
Опыт работы с данной продукцией	0,29	0,86	0,71	1	0,57
Уровень развития торговой сети	0,71	0,71	0,50	0,45	0,55
Репутация	0,69	0,50	0,71	0,54	0,73

В результате перехода к безразмерным оценкам устранены различия исходных оценок, затруднявшие сравнение альтернатив. Безразмерные величины не измеряются в каких-либо единицах, поэтому их можно сравнивать друг с другом, складывать и т.д. Безразмерные оценки не различаются по диапазону значений: все они имеют значения в пределах от 0 до 1. Они не различаются также по направленности: чем больше безразмерная оценка, тем лучше (по любому критерию), и лучшее значение равно 1.

2 Для каждой альтернативы находится минимальная оценка, т.е. худшая из оценок данной альтернативы по всем критериям:

$$P_j = min_i P_{ij}, j = 1, \dots, N.$$

Например, для ТФ2 эта оценка равна 0,29; она находится как минимальная из 0,29, 0,71 и 0,69.

Минимальные оценки приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 – Минимальные оценки альтернатив

Альтернатива	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
P_j	0,29	0,50	0,50	0,45	0,55

3 Выбирается пороговое значение минимальной оценки P_0. Эта величина назначается ЛПР или экспертом из субъективных соображений, например, в зависимости от количества альтернатив, которые требуется отобрать для дальнейшего анализа.

Пусть в данной задаче назначено P_0=0,46.

4 Выбирается множество альтернатив, для которых $P_j > P_0$. Таким образом, для дальнейшего анализа отбираются альтернативы, у которых все оценки (в том числе худшая) не ниже предельной величины P_0.

В данной задаче отбираются альтернативы ТФ3, ТФ4, ТФ6. Окончательный выбор производится на основе одного из методов, рассматриваемых ниже.

6 МЕТОДИКА СКАЛЯРИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ОЦЕНОК

Методика предназначена для выбора рациональной альтернативы из множества альтернатив, оцениваемых по нескольким критериям.

Как и методика экспресс-анализа альтернатив, данная методика рассчитана на решение задач, в которых решение принимается на основе числовых критериев (или может быть выполнен переход к таким критериям).

Основное преимущество этой методики – минимальный объем информации, которую требуется получить от ЛПР или эксперта для выбора решения, что позволяет практически полностью автоматизировать решение задачи. В то же время недостаточный учет субъективных суждений ЛПР является недостатком этой методики.

Методика основана на вычислении обобщенной оценки каждой альтернативы (с учетом оценок по всем критериям) и сопоставлении этих оценок.

Исходные данные задачи для решения по этому методу представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Исходные данные для задачи для решения по методу скаляризации векторных оценок

Фирма	ТФ3	ТФ4	ТФ6
Опыт работы с данной продукцией, лет	6	5	4
Уровень развития торговой сети	развитая	средняя	средняя (немного лучше, чем у ТФ4 и ТФ5)
Репутация	средняя	хорошая	хорошая

Методика реализуется в следующем порядке.

1 Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду, как и в методике экспресс-анализа альтернатив. Безразмерные оценки альтернатив для данной задачи приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Безразмерные оценки альтернатив для задачи из условия

Показатели	ТФ3	ТФ4	ТФ6
Опыт работы с данной продукцией	1	0,71	0,51
Уровень развития торговой сети	0,71	0,50	0,55
Репутация	0,50	0,71	0,73

2 Определяются веса (оценки важности) критериев. В рассматриваемой методике веса находятся *на основе разброса оценок*. Веса определяются в следующем порядке:

– определяются средние оценки по каждому критерию:

$$\overline{P_i} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P_{ij},\ i = 1, \dots, M,$$

где M – количество критериев;
N – количество альтернатив;
P_{ij} – безразмерные оценки.
Для данного примера:

$$\overline{P_1} = \frac{1 + 0{,}71 + 0{,}51}{3} = 0{,}74;$$

$$\overline{P_2} = \frac{0{,}71 + 0{,}50 + 0{,}55}{3} = 0{,}59;$$

$$\overline{P_3} = \frac{0{,}50 + 0{,}71 + 0{,}73}{3} = 0{,}65.$$

– находятся величины разброса по каждому критерию:

$$R_i = \frac{1}{N \cdot \overline{P_i}}\sum_{j=1}^{N} \left|P_{ij} - \overline{P_i}\right|, i = 1, \dots, M$$

Для данного примера:

$$R_1 = \frac{|0{,}86 - 0{,}74| + |0{,}71 - 0{,}74| + |0{,}57 - 0{,}74|}{3 \cdot 0{,}74} = 0{,}144;$$

$$R_2 = \frac{|0{,}71 - 0{,}59| + |0{,}50 - 0{,}59| + |0{,}55 - 0{,}59|}{3 \cdot 0{,}59} = 0{,}141;$$

$$R_2 = \frac{|0{,}50 - 0{,}65| + |0{,}71 - 0{,}65| + |0{,}73 - 0{,}65|}{3 \cdot 0{,}65} = 0{,}149.$$

– находится сумма величин разброса:

$$R = \sum_{i=1}^{M} R_i$$

Для данного примера:

$$R = 0{,}144 + 0{,}141 + 0{,}149 = 0{,}434.$$

– находятся веса критериев, отражающие разброс оценок:

$$W_i = \frac{R_i}{R}, i = 1, \dots, M$$

Для данного примера:

$$W_1 = \frac{0{,}144}{0{,}434} = 0{,}33;$$

$$W_2 = \frac{0{,}141}{0{,}434} = 0{,}32;$$

$$W_3 = \frac{0{,}149}{0{,}434} = 0{,}34.$$

Чем больше разброс (различие) в оценках альтернатив по критерию, тем больше вес этого критерия. Таким образом, критерии, по которым оценки альтернатив существенно различаются, считаются более важными. Если оценки альтернатив по какому-либо критерию очень близки, то его вес будет небольшим, так как сравнение альтернатив при близких оценках не имеет смысла.

3 Находятся взвешенные оценки альтернатив (путем деления весов критериев на оценки по соответствующим критериям):

$$E_{ij} = \frac{W_i}{P_{ij}}, i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N.$$

Взвешенные оценки для данного примера приведены в таблице 6.3.

Таблица 6.3 – Взвешенные безразмерные оценки альтернатив

Показатели	ТФ3	ТФ4	ТФ6
Опыт работы с данной продукцией	0,33	0,46	0,65
Уровень развития торговой сети	0,45	0,64	0,58
Репутация	0,68	0,48	0,47

Здесь, например, $E_{11} = \frac{0{,}33}{1}$ =0,33, $E_{12} = \frac{0{,}33}{0{,}71}$ =0,46, $E_{13} = \frac{0{,}33}{0{,}51}$ =0,65, $E_{21} = \frac{0{,}32}{0{,}71} = 0{,}45$, $E_{22} = \frac{0{,}32}{0{,}50}$ =0,64, и т.д.

Чем большие значения принимают безразмерные оценки P_{ij}, тем меньше значения взвешенных оценок. Таким образом, чем *меньше* взвешенные оценки, тем *лучше* альтернатива.

4 Определяются комплексные оценки альтернатив (суммы взвешенных оценок):

$$E_j = \sum_{i=1}^{M} E_{ij}, j = 1, \dots, N.$$

Для данного примера:

$E_1 = 0{,}33 + 0{,}46 + 0{,}65 = 1{,}44$ (*комплексная оценка альтернативы ТФ*3);

$$E_2 = 0{,}45 + 0{,}64 + 0{,}58 = 1{,}67 \ (\text{\textit{ТФ}}4);$$

$$E_3 = 0{,}68 + 0{,}48 + 0{,}47 = 1{,}63 \ (\text{\textit{ТФ}}6).$$

Чем меньше комплексная оценка, тем лучше альтернатива. Таким образом, в данном примере лучшим является вариант ТФ3; несколько худший вариант – ТФ6, еще хуже – ТФ4.

Примечание – Возможны другие варианты реализации данной методики. Например, веса критериев могут определяться не на основе разброса оценок альтернатив, а с помощью методов экспертного анализа. Это позволяет учесть суждения эксперта или ЛПР о том, какие из критериев являются более важными.

7 МЕТОДИКА СРАВНИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ДВУХ АЛЬТЕРНАТИВ ПО СТЕПЕНИ ДОМИНИРОВАНИЯ

Методика предназначена для решения задач, в которых требуется выбрать лучшую из двух альтернатив. Такие задачи часто возникают, например, при проектировании технических систем, когда требуется выбрать лучший из двух вариантов системы: базовый (имеющийся) или новый (предлагаемый). Однако применение данной методики не ограничивается задачами проектирования.

Для применения данной методики все оценки альтернатив должны быть выражены в числовой форме.

Принцип работы методики следующий. Для каждой из двух сравниваемых альтернатив находится обобщенная оценка по всем критериям, по которым она превосходит другую альтернативу; при этом учитывается степень превосходства, а также важность критериев. Полученные обобщенные оценки сравниваются; выбирается альтернатива, имеющая большую оценку.

Рассмотрим реализацию методики на следующем примере.

Решение задачи из условия.

Исходные данные задачи для решения по методу сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Исходные данные задачи для решения по методу сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования

Фирма	ТФ3	ТФ4
Опыт работы с данной продукцией, лет	6	5
Уровень развития торговой сети	развитая	средняя
Репутация	средняя	хорошая

Возьмем лучшие альтернативы из задачи, решенной выше, – ТФ3 и ТФ4. Все качественные критерии уже были приведены к числовой форме с помощью шкалы Харрингтона (см. таблицу 7.2).

По мнению первого эксперта, основной критерий – репутация (К3), менее важный – опыт работы (К1), еще менее важный – уровень развития торговой сети (К2).

Таблица 7.2 – Безразмерные оценки альтернатив ТФ3 и ТФ4

Показатели	ТФ3	ТФ4
Опыт работы с данной продукцией	1	0,75
Уровень развития торговой сети	0,71	0,50
Репутация	0,50	0,71

Для решения такой задачи целесообразно применить методику сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования. Если при сравнении альтернатив по какому-либо критерию они имеют одинаковые оценки, то такой критерий не учитывается. В данной задаче таких критериев нет.

Методика реализуется в следующем порядке.

1 Выполняется ранжирование критериев по важности: наиболее важный критерий получает ранг 1, следующий по важности – 2, и т.д. Если какие-либо критерии близки по важности, им рекомендуется назначать одинаковые ранги. Обозначим ранги как $R_i, i = 1, \dots, M$, где M – количество критериев.

Пусть в данной задаче критериям назначены следующие ранги: R_1=2, R_2=3, R_3=1.

2 Выполняется переход от рангов к весам критериев. Веса находятся следующим образом: из всех рангов выбирается максимальный (в данном примере он равен 3), к нему прибавляется единица, и из полученного числа вычитаются ранги:

$$V_i = max_i(R_i) + 1 - R_i, i = 1, \dots M.$$

Таким образом, чем важнее критерий, тем больше его вес.

Для данной задачи веса критериев следующие:

$$V_1 = 3 + 1 - 2 = 2;$$

$$V_2 = 3 + 1 - 3 = 1;$$

$$V_3 = 3 + 1 - 1 = 3.$$

3 Находятся отношения оценок альтернатив (степени доминирования) путем деления большей оценки по каждому критерию на меньшую:

$$S_i = \frac{\max(X_{i1}, X_{i2})}{\min(X_{i1}, X_{i2})}, i = 1, \dots, M,$$

где X_{i1}, X_{i2} – оценки двух сравниваемых альтернатив по i-му критерию.

Для данной задачи:

$$S_1 = \frac{1}{0{,}75} = 1{,}33;$$

$$S_2 = \frac{0{,}71}{0{,}5} = 1{,}42;$$

$$S_3 = \frac{0{,}71}{0{,}5} = 1{,}42.$$

4 Находятся скорректированные степени доминирования альтернатив путем возведения степеней доминирования в степени, равные весам критериев:

$$C_i = S_i^{V_i}, i = 1, \dots, M.$$

Таким образом учитывается важность критериев: чем больше вес критерия, тем больше соответствующая степень доминирования будет влиять на окончательную оценку.

Для данной задачи $C_1 = 1{,}33^2 = 1{,}78$; $C_2 = 1{,}42^1 = 1{,}42$; $C_3 = 1{,}42^3 = 2{,}86$.

5 Для каждой из сравниваемых альтернатив находится оценка ее доминирования над другой альтернативой. Эта оценка вычисляется как произведение скорректированных степеней доминирования по всем критериям, по которым данная альтернатива лучше другой.

В данном примере ТФ3 лучше ТФ4 по критериям "опыт работы с данной продукцией" и "уровень развития торговой сети". Оценка доминирования ТФ3 над ТФ4 находится следующим образом: $D_1 = 1{,}78 \cdot 1{,}42 = 2{,}52$.

Торговая фирма ТФ4 лучше, чем ТФ3, по критерию "репутация". Оценка доминирования ТФ4 над ТФ3: $D_2 = 2{,}86$.

6 Находится обобщенная оценка доминирования:

$$D = \frac{D_1}{D_2}.$$

Если $D > 1$, то первая альтернатива (оценка которой указана в числителе) лучше второй; если $D < 1$, то вторая альтернатива превосходит первую. В данном примере $D = \frac{2{,}52}{2{,}86} = 0{,}88$. Таким образом, ТФ4 лучше, чем ТФ3.

8 МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ КЕМЕНИ-СНЕЛЛА

Рассматриваемый алгоритм предназначен для ранжирования альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям.

Основное преимущество алгоритма – возможность анализа и выбора альтернатив, оцениваемых по критериям различных видов: числовым, качественным, “да-нет” и т.д. Алгоритм также позволяет учитывать суждения ЛПР о важности критериев.

Алгоритм основан на ранжировании и попарном сравнении альтернатив по каждому критерию.

Решение задачи из условия.

По мнению второго эксперта, основной критерий – репутация (К3), менее важный – уровень развития торговой сети (К2), еще менее важный – опыт работы (К1).

Прежде чем приступать к выбору решения с использованием данного алгоритма (как и любого другого метода), следует отобрать множество Парето, т.е. множество перспективных альтернатив (см. таблицу 8.1).

Таблица 8.1 – Множество Парето для задачи из условия

Показатели	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
Опыт работы с данной продукций, лет	2	6	5	7	4
Уровень развития торговой сети	развитая	развитая	средняя	средняя (немного хуже, чем у ТФ4)	средняя (немного лучше, чем у ТФ4 и ТФ5)
Репутация	хорошая	средняя	хорошо	средняя	хорошая

Выбор альтернативы на основе модифицированного алгоритма Кемени–Снелла реализуется в следующем порядке.

1 С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности.

В данном случае имеется два суждения о важности критериев. Поэтому в разделе 4 был применен метод предпочтений:

$$V_1=1/6=0{,}167;\ V_2=1/6=0{,}167;\ V_3=4/6=0{,}666.$$

2 Выполняется ранжирование альтернатив по каждому из критериев. При этом лучшая альтернатива по данному критерию получает оценку (ранг) 1, следующая за ней – оценку 2, и т.д. Если альтернативы по данному критерию одинаковы, то они получают *одинаковые* оценки. Результаты ранжирования сводятся в матрицу. Для данной задачи матрица ранжирований приведена в таблице 8.2.

Таблица 8.2 – Матрица ранжирований

	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
К1	5	2	3	1	4
К2	1	1	3	4	2
К3	1	2	1	2	1

3 На основе ранжирования альтернатив по каждому из критериев составляется матрица парных сравнений. Всего составляется M таких матриц, где M – количество критериев. Матрицы заполняются по правилам, приведенным в таблице 8.3.

Примечание – Матрицы парных сравнений альтернатив по критериям могут быть составлены и непосредственно на основе данных об альтернативах. В этом случае ранжирование альтернатив по критериям (шаг 2) не требуется. Однако при программной реализации данного алгоритма удобнее вводить матрицу ранжирований, так как при этом от человека (эксперта или ЛПР) требуется значительно меньший объем информации, чем при попарном сравнении всех альтернатив по каждому из критериев.

Таблица 8.3 – Правила заполнения матриц парных сравнений в модифицированном алгоритме Кемени–Снелла

R_{jk}^{i}	Значение
1	По i-му критерию j-я альтернатива лучше k-й
-1	По i-му критерию j-я альтернатива хуже k-й
0	По i-му критерию j-я и k-я альтернативы одинаковы

Здесь i – номер матрицы (номер критерия).

Для рассматриваемой задачи матрицы парных сравнений по критериям К1 – К3 приведены в таблицах 8.4 – 8.6.

Таблица 8.4 – Парные сравнения по критерию К1

	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
ТФ2	—	-1	-1	-1	-1
ТФ3	1	—	1	-1	1
ТФ4	1	-1	—	-1	1
ТФ5	1	1	1	—	1
ТФ6	1	-1	-1	-1	—

Таблица 8.5 – Парные сравнения по критерию К2

	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
ТФ2	—	0	1	1	1
ТФ3	0	—	1	1	1
ТФ4	-1	-1	—	1	-1
ТФ5	-1	-1	-1	—	-1
ТФ6	-1	-1	1	1	—

Таблица 8.6 – Парные сравнения по критерию К3

	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
ТФ2	—	1	0	1	0
ТФ3	-1	—	-1	0	-1
ТФ4	0	1	—	1	0
ТФ5	-1	0	-1	—	-1
ТФ6	0	1	0	1	—

Здесь, например, в таблице 8.4 элемент R_{12}^1 = -1 означает, что по критерию “опыт работы с данной продукцией” фирма ТФ2 хуже, чем ТФ3. Элемент R_{23}^1 = 1 означает, что по критерию “опыт работы с данной продукцией” фирма ТФ3 лучше, чем ТФ4; R_{13}^3 = 0 означает, что по критерию “репутация” фирмы ТФ2 и ТФ4 одинаковы.

4 Составляется матрица потерь. Размерность матрицы – $N \times N$, где N – количество альтернатив. Элементы матрицы потерь рассчитываются по следующей формуле:

$$R_{jk} = \sum_{i=1}^{M} V_i \cdot \left|R_{jk}^i - 1\right|, j = 1, \dots N, k = 1, \dots N.$$

Матрица потерь для рассматриваемой задачи приведена в таблице 8.7.

Таблица 8.7 – Матрица потерь

	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
ТФ2	—	0,500	1,000	0,333	1,000
ТФ3	1,500	—	1,333	1,000	1,333
ТФ4	1,000	0,667	—	0,333	1,000
ТФ5	1,667	1,000	1,667	—	1,667
ТФ6	1,000	0,667	1,000	0,333	—

Приведем примеры расчета некоторых элементов матрицы потерь.

$$R_{12} = V_1 \cdot |R_{12}^1 - 1| + V_2 \cdot |R_{12}^2 - 1| + V_3 \cdot |R_{12}^3 - 1| =$$
$$= 0{,}166 \cdot |-1 - 1| + 0{,}166 \cdot |0 - 1| + 0{,}666 \cdot |1 - 1| = 0{,}500;$$

…..

$$R_{25} = V_1 \cdot |R_{25}^1 - 1| + V_2 \cdot \left|R_{25}^2 - 1\right| + V_3 \cdot \left|R_{25}^3 - 1\right| =$$
$$= 0{,}166 \cdot |-1 - 1| + 0{,}166 \cdot |1 - 1| + 0{,}666 \cdot |1 - 1| = 1{,}333.$$

Смысл элементов матрицы потерь следующий: чем больше элемент R_{jk}, тем больше отставание j-й альтернативы от k-й (тем хуже j-я альтернатива по сравнению с k-й).

5 Выполняется предварительное ранжирование альтернатив. Для этого находятся суммы строк матрицы потерь. Смысл этих сумм следующий: сумма

j-й строки представляет собой оценку *отставания* j-й альтернативы от *всех остальных* альтернатив.

Альтернатива, которой соответствует *минимальная* сумма, предварительно считается *лучшей*. Строка и столбец этой альтернативы исключаются из матрицы потерь.

Суммирование строк матрицы потерь и исключение альтернатив выполняются до тех пор, пока не будет исключена вся матрица. Чем раньше исключена альтернатива, тем она лучше.

Выполним предварительное ранжирование для рассматриваемой задачи. Найдем суммы строк матрицы потерь:

$$P_2 = 0{,}500+1{,}000+0{,}333+1{,}000 = 2{,}833;$$

$$P_3 = 1{,}500+1{,}333+1{,}000+1{,}333 = 5{,}166;$$

$$P_4 = 1{,}000+0{,}667+0{,}333+1{,}000 = 3{,}000;$$

$$P_5 = 1{,}667+1{,}000+1{,}667+1{,}667 = 6{,}001;$$

$$P_6 = 1{,}000+0{,}667+1{,}000+0{,}333 = 3{,}000.$$

Предварительно лучшей считается альтернатива ТФ2. Она исключается из матрицы потерь. Сокращенная матрица потерь приведена в таблице 8.8.

Таблица 8.8 – Первая сокращенная матрица потерь

	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
ТФ3	—	1,333	1,000	1,333
ТФ4	0,667	—	0,333	1,000
ТФ5	1,000	1,667	—	1,667
ТФ6	0,667	1,000	0,333	—

Суммы строк этой матрицы: $P_3 = 3{,}666$; $P_4 = 2{,}000$; $P_5 = 4{,}334$; $P_6 = 2{,}000$. Исключается альтернатива ТФ6. Вторая сокращенная матрица потерь приведена в таблице 8.9.

Таблица 8.9 – Вторая сокращенная матрица потерь

	ТФ3	ТФ4	ТФ5
ТФ3	—	1,333	1,000
ТФ4	0,667	—	0,333
ТФ5	1,000	1,667	—

Суммы строк этой матрицы: $P_3 = 2{,}333$; $P_4 = 1{,}000$; $P_5 = 2{,}667$. Исключается альтернатива ТФ4. Третья сокращенная матрица потерь приведена в таблице 8.10.

Таблица 8.10 – Третья сокращенная матрица потерь

	ТФ3	ТФ5
ТФ3	—	1,000
ТФ5	1,000	—

Суммы строк этой матрицы: P_3 = 1,000; P_5 = 1,000. Лучшая альтернатива (из двух оставшихся) – ТФ3.

Предварительное ранжирование альтернатив: ТФ2, ТФ6, ТФ4, ТФ3, ТФ5.

6 Выполняется окончательное ранжирование альтернатив. Для этого альтернативы сравниваются попарно, начиная с конца предварительного ранжирования. Если сравниваются j-я и k-я альтернативы (при этом j-я альтернатива в предварительном ранжировании находится выше k-й) и выполняется условие $R_{jk} \leq R_{kj}$ (где R_{jk} и R_{kj} – элементы матрицы потерь), то альтернативы остаются в ранжировании на прежних местах (j-я альтернатива лучше k-й). Если $R_{jk} > R_{kj}$, то альтернативы меняются местами (j-я альтернатива хуже k-й).

Выполним окончательное ранжирование для данной задачи.

Сравниваем ТФ3 и ТФ5. R_{35}=1,000; R_{53}=1,000. Так как R_{35}<=R_{53}, альтернативы остаются на своих местах (ТФ3 выше, чем ТФ5).

Сравниваем ТФ4 и ТФ3. R_{43}=0,667; R_{34}=1,333. Так как R_{43}<R_{34}, альтернативы остаются на своих местах (ТФ4 выше, чем ТФ3).

Сравниваем ТФ6 и ТФ4. R_{64}=1,000; R_{46}=1,000. Так как R_{64}<=R_{46}, альтернативы остаются на прежних местах (ТФ6 выше, чем ТФ4).

Сравниваем ТФ2 и ТФ6. R_{26}=1,000; R_{62}=1,000. Так как R_{62}<=R_{26}, альтернативы остаются на прежних местах (ТФ2 выше, чем ТФ6).

Таким образом, окончательное ранжирование альтернатив следующее: ТФ2, ТФ6, ТФ4, ТФ3, ТФ5. Лучшая торговая фирма – ТФ2.

9 МЕТОД ЭЛЕКТРА

Метод предназначен для решения задач, в которых из имеющегося множества альтернатив требуется выбрать заданное количество лучших альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям, а также важности этих критериев.

Принцип работы метода следующий. Для каждой пары альтернатив (A_j и A_k) выдвигается предположение (гипотеза) о том, что альтернатива A_j лучше, чем A_k. Затем для каждой пары альтернатив находятся два индекса: индекс согласия (величина, подтверждающая предположение о превосходстве A_j над A_k) и индекс несогласия (величина, опровергающая это предположение). На основе анализа этих индексов выбирается одна или несколько лучших альтернатив ("ядро" альтернатив).

Решение задачи из условия.

Следует отметить, что предприятие может выбрать несколько торговых фирм для заключения с ними договора о распространении своей продукции.

Выберем множество Парето. Выполнив попарное сравнение альтернатив, получим, что во множество Парето входят все торговые фирмы, кроме ТФ1.

Веса критериев были найдены в разделе 4:

$$V_1=1/6=0{,}167;\ V_2=1/6=0{,}167;\ V_3=4/6=0{,}666.$$

Выбор лучших альтернатив по методу ЭЛЕКТРА реализуется в следующем порядке.

1 Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду. Эта операция может выполняться разными способами, например, так же, как в методике экспресс-анализа альтернатив. Безразмерные оценки приведены в таблице 9.1.

Таблица 9.1 – Безразмерные оценки альтернатив

	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
К1	0,29	0,86	0,71	1	0,57
К2	0,71	0,71	0,50	0,45	0,55
К3	0,69	0,50	0,71	0,54	0,73

2 Определяются индексы согласия C_{jk}, j=1,...,N, k=1,...,N (где N – количество альтернатив). Индекс согласия отражает степень согласия с предположением о том, что j-я альтернатива лучше k-й. В рассматриваемой реализации метода ЭЛЕКТРА индексы согласия находятся по формуле

$$C_{jk} = \sum_{i \in K^+} V_i\,, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, N,$$

где V_i – веса критериев;

K^+ – подмножество критериев, по которым j-я альтернатива не хуже k-й.

Таким образом, индекс согласия C_{jk} находится как сумма весов критериев, по которым j-я альтернатива *не хуже* k-й. Чем больше индекс согласия, тем более выражено превосходство j-й альтернативы над k-й.

Индексы согласия для данной задачи приведены в таблице 9.2.

Таблица 9.2 – Матрица индексов согласия

	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
ТФ2	—	0,833	0,167	0,833	0,167
ТФ3	0,167	—	0,334	0,167	0,334
ТФ4	0,833	0,666	—	0,833	0,167
ТФ5	0,167	0,833	0,167	—	0,167
ТФ6	0,833	0,666	0,833	0,833	—

Приведем примеры расчета индексов согласия. Найдем, например, индекс согласия C_{23} (оценку согласия с предположением о превосходстве альтернативы А2 над А3). Альтернатива А2 (ТФ2) не хуже альтернативы А3 (ТФ3) по критериям К2 и К3. Их веса равны 0,167 и 0,666 соответственно; таким образом, C_{23}=0,167+0,666=0,833. Аналогично найдем индекс согласия C_{32}. Альтернатива А3 не хуже, чем А2, по критерию К1 поэтому C_{32}=0,167.

Найдем индекс согласия C_{34}. Альтернатива А3 (ТФ3) не хуже альтернативы А4 (ТФ4) по критериям К1 и К2. Таким образом, C_{34}=0,167+0,167=0,334.

Аналогично найдем индекс согласия C_{43}. Альтернатива А4 не хуже, чем А3, по критерию К3, поэтому C_{43}=0,666.

3 Определяются индексы несогласия D_{jk}, j=1,...,N, k=1,...,N. Индекс несогласия отражает степень несогласия с предположением о том, что j-я альтернатива лучше k-й. Индексы D_{jk} находятся по формуле:

$$D_{jk} = \max_{i\in K^{-}}\left(P_{ik} - P_{ij}\right), j = 1, \dots N, k = 1, \dots N,$$

где P_{ik}, P_{ij} – безразмерные оценки альтернатив (для данного примера они приведены в таблице 9.1);

K^{-} – подмножество критериев, по которым j-я альтернатива не превосходит k-ю.

Таким образом, индекс несогласия D_{jk} находится как максимальная из разностей оценок по критериям, по которым j-я альтернатива *не лучше* k-й. Чем больше индекс несогласия, тем менее выражено превосходство j-й альтернативы над k-й.

Индексы несогласия для данной задачи приведены в таблице 9.3.

Таблица 9.3 – Матрица индексов несогласия

	ТФ2	ТФ3	ТФ4	ТФ5	ТФ6
ТФ2	—	0,57	0,42	0,71	0,28
ТФ3	0,19	—	0,21	0,14	0,23
ТФ4	0,21	0,21	—	0,29	0,05
ТФ5	0,26	0,26	0,17	—	0,19
ТФ6	0,16	0,29	0,14	0,43	—

Приведем примеры расчета индексов несогласия. Найдем индекс несогласия D_{23} (оценку несогласия с предположением о превосходстве альтернативы А2 над А3). Альтернатива А2 (ТФ2) не имеет превосходства над А3 (ТФ3) по критериям К1, К2. Разности безразмерных оценок по этим критериям следующие: 0,86 – 0,29 = 0,57; 0,71 – 0,71 = 0. Таким образом, D_{23}=0,57.

Аналогично найдем индекс несогласия D_{32}. Альтернатива А3 не имеет превосходства над А2 по критериям К2 и К3. Разность оценок по этим критериям: 0,71 – 0,71 = 0; 0,69 – 0,50 = 0,19. Таким образом, D_{32}=0,19.

4 Для каждой альтернативы находится предельное значение индекса согласия:

$$C_j = min_k C_{jk}, j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, предельное значение индекса согласия для j-й альтернативы находится как *минимальный* элемент j-й строки матрицы индексов согласия. Эта величина отражает степень согласия с предположением о том, что j-я альтернатива имеет превосходство над всеми другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера C_1=0,167; C_2=0,167; C_3=0,167; C_4=0,167; C_5=0,666.

5 Для каждой альтернативы находится предельное значение индекса несогласия:

$$D_j = max_k D_{jk}, j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, предельное значение индекса несогласия для j-й альтернативы находится как *максимальный* элемент j-й строки матрицы индексов несогласия. Эта величина отражает степень несогласия с предположением о превосходстве j-й альтернативы над другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера D_1=0,71; D_2=0,23; D_3=0,29; D_4=0,26; D_5=0,43.

6 Выделяются лучшие альтернативы (“ядро” альтернатив), удовлетворяющие условиям:

$$C_j > C^*,$$

$$D_j < D^*,$$

где C^*, D^* – пороговые значения индексов согласия и несогласия.

Эти величины назначаются в зависимости от того, какое количество альтернатив требуется выбрать. Обычно сначала принимаются пороговые значения C^*=0,5, D^*=0,5; затем они изменяются в соответствии с количеством отбираемых альтернатив. Выбираются альтернативы, удовлетворяющие *обоим* условиям.

Пусть в рассматриваемом примере требуется выбрать *одну* торговую фирму. Назначим пороговые значения C^*=0,5, D^*=0,5. Условию $C_j > C^*$ удовлетворяет альтернатива А6 (ТФ6), условию $D_j < D^*$ – альтернативы А3, А4, А5, А6. Таким образом, выбирается альтернатива А6, т.е. ТФ6.

Пусть требуется выбрать *две* торговые фирмы. Снизим пороговое значение индекса согласия и несогласия до C^*=0,15 и D^*=0,28. Тогда условию $C_j > C^*$ будут соответствовать альтернативы А2, А3, А4, А5, А6, а условию $D_j < D^*$ – альтернативы А3 и А5. Таким образом, выбираются альтернативы А3 и А5, т.е. ТФ3 и ТФ5.