# Tratado Completo:
# Integrales Impropias y Diagonalización de Matrices

Jose Labarca

9 de febrero de 2026

## Índice

# Parte I
# Integrales Impropias

## 1. Fundamentos y Motivación

### 1.1. El Problema de lo Infinito

Desde los tiempos de los antiguos griegos, la humanidad ha luchado con el concepto del infinito. Las paradojas de Zenón cuestionaban si podíamos realmente ”sumarïnfinitas cantidades. Cuando estudiamos integrales en cálculo básico, trabajamos siempre con intervalos finitos $[a, b]$ y funciones acotadas. Pero la realidad física y matemática frecuentemente nos presenta situaciones que escapan a estas restricciones.

**Intuición**

Imagina que quieres calcular el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ desde $x = 1$ hasta el infinito. A primera vista, parece que estamos sumando infinitas áreas pequeñas, lo que debería dar infinito. Sin embargo, como los rectángulos se hacen cada vez más angostos muy rápidamente, la suma total puede ser finita. Es como llenar un recipiente con gotas cada vez más pequeñas: si las gotas disminuyen suficientemente rápido, el recipiente nunca se desborda.

### 1.2. ¿Qué es una Integral Impropia?

En cálculo elemental, la integral definida de Riemann se define para funciones continuas (o con discontinuidades finitas) sobre intervalos cerrados y acotados. Una integral es impropia cuando violamos alguna de estas condiciones.

**Definición 1.1** (Integral Impropia)**.** Una integral impropia es una integral que presenta al menos una de las siguientes características:

(I) El intervalo de integración es infinito: $(a, \infty)$, $(-\infty, b)$, o $(-\infty, \infty)$.

(II) El integrando tiene una discontinuidad infinita (singularidad) en algún punto del intervalo de integración.

(III) Ambas condiciones simultáneamente.

### 1.3. Contexto Histórico

El estudio riguroso de las integrales impropias comenzó en el siglo XIX con Cauchy y Riemann. Antes de eso, matemáticos como Euler y Leibniz trabajaban con estas integrales de manera más intuitiva, a veces obteniendo resultados contradictorios. La formalización mediante límites permitió distinguir claramente entre integrales que çonvergen”(tienen un valor finito) y las que ”divergen”(son infinitas o no existen).

## 2. Tipos de Integrales Impropias

### 2.1. Tipo I: Límite de integración infinito

Estas son las integrales más comunes en aplicaciones físicas y de probabilidad.

**Definición 2.1** (Integral impropia de Tipo I)**.** (a) Si $f$ es integrable en $[a, t]$ para todo $t \geq a$, definimos:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

(b) Si $f$ es integrable en $[t, b]$ para todo $t \leq b$, definimos:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$

(c) Para integrales sobre toda la recta real:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$, siempre que ambas integrales del lado derecho converjan.

Si el límite existe y es finito, decimos que la integral **converge**. Si el límite es infinito o no existe, decimos que la integral **diverge**.

**Advertencia Importante**

Para integrales de $-\infty$ a $\infty$, NO podemos usar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

Este último se llama "valor principal de Cauchyz puede existir incluso cuando la integral impropia diverge. Los límites hacia $+\infty$ y $-\infty$ deben tomarse **independientemente**.

## 2.2. Tipo II: Integrandos con singularidades

Cuando la función tiene una discontinuidad infinita en algún punto del intervalo.

**Definición 2.2** (Integral impropia de Tipo II)**.** (a) Si $f$ es continua en $(a, b]$ pero tiene una singularidad en $x = a$:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

(b) Si $f$ es continua en $[a, b)$ pero tiene una singularidad en $x = b$:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

(c) Si $f$ tiene una singularidad en $c \in (a, b)$:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

donde cada integral se calcula según los casos anteriores.

**Ejemplo 2.1** (Singularidad en el extremo)**.** Considerar $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ tiene una singularidad en $x = 0$ (tiende a infinito).

**Solución**:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_{\epsilon}^{1} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) \\
&= 2
\end{aligned}$$

La integral **converge** a 2.

# 3. El Criterio de Convergencia Fundamental: La Integral p

El resultado más importante para clasificar integrales impropias es el comportamiento de las ïntegrales p".

## 3.1. Integral p en el infinito

**Teorema 3.1** (Criterio p para el infinito)**.** *Para* $p \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$*:*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

*Demostración.* **Caso 1**: $p \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{1}{x^p}\,dx &= \int_a^t x^{-p}\,dx \\ &= \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_a^t \\ &= \frac{1}{1-p}\left[x^{1-p}\right]_a^t \\ &= \frac{1}{1-p}\left(t^{1-p} - a^{1-p}\right) \end{aligned}$$

Analizamos el límite cuando $t \to \infty$:

- Si $p > 1$: entonces $1 - p < 0$, así que $t^{1-p} = \frac{1}{t^{p-1}} \to 0$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(t^{1-p} - a^{1-p}\right) = \frac{1}{1-p}(0 - a^{1-p}) = \frac{a^{1-p}}{p-1}$$

  La integral converge.

- Si $p < 1$: entonces $1 - p > 0$, así que $t^{1-p} \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(t^{1-p} - a^{1-p}\right) = \infty$$

  La integral diverge.

**Caso 2**: $p = 1$

$$\int_a^t \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_a^t = \ln(t) - \ln(a)$$

Cuando $t \to \infty$: $\ln(t) \to \infty$, por lo que la integral diverge. □

**Intuición**

**¿Por qué $p = 1$ es el umbral crítico?**
La función $\frac{1}{x}$ decrece, pero no lo suficientemente rápido. Piensa en apilar bloques donde cada bloque tiene altura $\frac{1}{n}$: la torre crece sin límite (serie armónica).
Para $p > 1$, como $\frac{1}{x^2}$, los bloques se hacen tan pequeños tan rápido que la altura total permanece finita.
Para $p < 1$, como $\frac{1}{\sqrt{x}}$, los bloques decrecen muy lentamente y la torre crece infinitamente.

### 3.2. Integral p en una singularidad

**Teorema 3.2** (Criterio p para singularidades). *Para $p \in \mathbb{R}$ y $b > 0$:*

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \textit{converge} & \textit{si } p < 1 \\ \textit{diverge} & \textit{si } p \geq 1 \end{cases}$$

**Observación 3.1.** Nota que los criterios son **opuestos**: lo que converge en el infinito diverge en la singularidad y viceversa (excepto $p = 1$ que diverge en ambos casos).

Esto tiene sentido: cerca del origen necesitamos que la función no crezca demasiado rápido (no sea ”muy singular”), mientras que en el infinito necesitamos que decrezca rápido.

## 4. Criterios de Convergencia por Comparación

Muchas veces no podemos calcular una integral explícitamente, pero podemos determinar si converge comparándola con integrales conocidas.

### 4.1. Criterio de Comparación Directa

**Teorema 4.1** (Comparación Directa). *Sean $f$ y $g$ funciones continuas en $[a, \infty)$ con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$.*

(I) *Si* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *converge, entonces* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *converge.*

(II) *Si* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *diverge, entonces* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *diverge.*

**Intuición**

**Analogía**: Si puedes llenar un recipiente más grande sin que se desborde, entonces también puedes llenar uno más pequeño. Si un recipiente pequeño se desborda, entonces uno más grande definitivamente se desbordará.

**Ejemplo 4.1** (Uso de comparación directa). Determinar si converge $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$.

**Análisis**: Para $x \geq 1$, tenemos $x^2 + 1 \geq x^2$, por lo que:

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (integral p con $p = 2 > 1$), por comparación directa:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx \text{ converge.}$$

De hecho, podemos calcularla explícitamente:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \arctan(x)\Big|_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty} (\arctan(t) - \arctan(1)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

### 4.2. Criterio de Comparación al Límite

A veces es difícil encontrar una desigualdad exacta. El criterio al límite es más flexible.

**Teorema 4.2** (Comparación al Límite)**.** *Sean $f$ y $g$ funciones positivas y continuas en $[a, \infty)$. Si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

*donde $0 < L < \infty$ (es decir, $L$ es un número positivo finito), entonces las integrales $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ tienen el **mismo comportamiento**: ambas convergen o ambas divergen.*

**Estrategia de Resolución**

**Cómo usar el criterio al límite**:

1. Identificar el término dominante de $f(x)$ cuando $x \to \infty$.
2. Elegir una función de prueba $g(x)$ simple (típicamente una integral p).
3. Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
4. Si el límite es un número positivo finito, $f$ y $g$ tienen el mismo comportamiento.

**Ejemplo 4.2** (Comparación al límite)**.** Determinar si converge $\int_2^\infty \frac{3x^2+5x+1}{x^4-2x+7}\,dx$.

**Solución**:
*Paso 1*: Para $x$ grande, el término dominante del numerador es $3x^2$ y del denominador es $x^4$. Así que $f(x) \approx \frac{3x^2}{x^4} = \frac{3}{x^2}$ para $x$ grande.
*Paso 2*: Elegimos $g(x) = \frac{1}{x^2}$ como función de prueba.
*Paso 3*: Calculamos el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2+5x+1}{x^4-2x+7}}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2+5x+1)\cdot x^2}{x^4-2x+7} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+5x^3+x^2}{x^4-2x+7}
\end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador por $x^4$:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^4}} = \frac{3}{1} = 3$$

Como el límite es $L = 3$ (positivo y finito), y $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, concluimos que:

$$\int_2^\infty \frac{3x^2+5x+1}{x^4-2x+7}\,dx \text{ converge.}$$

## 5. Integrales con Funciones Oscilatorias

### 5.1. Convergencia Absoluta vs Condicional

Cuando la función cambia de signo, necesitamos conceptos más refinados.

**Definición 5.1** (Convergencia absoluta y condicional)**.** Sea $f$ integrable en $[a, t]$ para todo $t > a$.

(i) Decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **converge absolutamente** si

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$$

(ii) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge pero $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ diverge, decimos que converge **condicionalmente**.

**Teorema 5.1.** *Si una integral converge absolutamente, entonces converge.*

**Ejemplo 5.1** (Integral de Dirichlet)**.** La integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

es un ejemplo clásico de convergencia condicional.
**Análisis**:

- La integral converge (su valor es $\pi/2$).
- Pero $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$ (diverge).

La convergencia se debe a la **cancelación** entre partes positivas y negativas de $\sin x$.

### 5.2. Criterio de Dirichlet para Integrales

**Teorema 5.2** (Criterio de Dirichlet)**.** *Sea $f$ una función monótona con $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, y sea $g$ una función cuya integral*

$$G(t) = \int_a^t g(x)\,dx$$

*está acotada para todo $t \geq a$. Entonces*

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx \text{ converge.}$$

**Ejemplo 5.2.** Para $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$:

- $f(x) = \frac{1}{x}$ es monótona decreciente con límite 0
- $G(t) = \int_1^t \sin x\,dx = -\cos t + \cos 1$ está acotada: $|G(t)| \leq 2$

Por Dirichlet, la integral converge.

## 6. Técnicas de Cálculo de Integrales Impropias

### 6.1. Sustitución

El método de sustitución funciona igual que en integrales propias, pero debemos cambiar también los límites.

**Ejemplo 6.1** (Sustitución en integral impropia)**.** Calcular $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$.
**Solución**:
Hacemos $u = 1 + x^2$, entonces $du = 2x\,dx$, o sea $x\,dx = \frac{1}{2}du$.
Límites:

- Cuando $x = 0$: $u = 1$
- Cuando $x \to \infty$: $u \to \infty$

La integral se transforma:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int_1^\infty \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty u^{-2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^t \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

### 6.2. Integración por Partes

**Ejemplo 6.2** (Integración por partes)**.** Calcular $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

**Solución**:
Usamos integración por partes: $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$
Elegimos:

$$\begin{aligned}
u = \ln x \quad &\Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx \\
dv = \frac{1}{x^2}\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = -\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^t - \int_1^t\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= -\frac{\ln t}{t} + \frac{\ln 1}{1} + \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{\ln t}{t} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t \\
&= -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $t \to \infty$:
Para $\frac{\ln t}{t}$, aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1/t}{1} = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 0 - 0 + 1 = 1$$

## 7. Ejercicios Resueltos Completos

### 7.1. Ejercicio 1: Comparación y cálculo directo

**Ejercicio 7.1.** Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ y, si converge, estimar su valor.

**Solución**:
*Paso 1 - Convergencia por comparación*:
Para $x \geq 1$: $e^{-x} \leq e^{-1}$, por lo que:

$$\frac{e^{-x}}{x} \leq \frac{e^{-1}}{x}$$

Sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge, pero esto no nos ayuda directamente.
Mejor: para $x \geq 1$, $\frac{1}{x} \leq 1$, así que:

$$\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$$

Y $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = e^{-1}$ converge.
Por comparación directa, nuestra integral converge.
*Paso 2 - Estimación*:
Podemos acotar:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} \cdot \frac{x}{x} = (\text{difícil de acotar por abajo})$$

Por otro lado:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx = e^{-1} \approx 0{,}368$$

La integral está entre 0 y 0.368.

## 7.2. Ejercicio 2: Singularidad en el interior

**Ejercicio 7.2.** Determinar si converge $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$.

**Solución**:
La función tiene una singularidad en $x = 1$ (punto interior del intervalo). Debemos dividir la integral:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$$

*Análisis de la primera integral*:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{2/3}}\,dx$$

Esto es una integral p en la singularidad con $p = 2/3 < 1$, por lo que **converge**.
Calculamos explícitamente:

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\epsilon} (1-x)^{-2/3}\,dx &= \left[\frac{(1-x)^{1/3}}{-1/3} \cdot (-1)\right]_0^{1-\epsilon} \\ &= 3(1-x)^{1/3}\Big|_0^{1-\epsilon} \\ &= 3\epsilon^{1/3} - 3 \cdot 1 = 3\epsilon^{1/3} - 3\end{aligned}$$

Cuando $\epsilon \to 0^+$: $3\epsilon^{1/3} \to 0$, así que la integral converge a $-3 - 0 = 3$.
*Análisis de la segunda integral*:
Por simetría (o cálculo directo similar), también converge a 3.
**Conclusión**: La integral converge y

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = 3 + 3 = 6$$

### 7.3. Ejercicio 3: Integral con parámetro

**Ejercicio 7.3.** Para qué valores de $a > 0$ converge $\int_0^{\infty} x^a e^{-x}\, dx$?

**Solución**:
Debemos analizar dos regiones:
*Cerca de $x = 0$*:
Para $x$ pequeño, $e^{-x} \approx 1$, por lo que:

$$x^a e^{-x} \approx x^a$$

La integral $\int_0^1 x^a\, dx$ converge si $a > -1$.
*Cerca de $x = \infty$*:
Para $x$ grande, el término exponencial $e^{-x}$ domina sobre cualquier potencia. Podemos usar comparación al límite con $e^{-x/2}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x\to\infty} x^a e^{-x/2} = 0$$

(Se puede probar que $x^n e^{-x} \to 0$ para cualquier $n$ usando L'Hôpital repetidamente).
Como $\int_1^{\infty} e^{-x/2}\, dx$ converge, también converge $\int_1^{\infty} x^a e^{-x}\, dx$ para cualquier $a$.
**Conclusión**: La integral converge para $a > -1$.
**Nota**: Esta integral define la función Gamma: $\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} x^a e^{-x}\, dx$ para $a > -1$.

## 8. Aplicaciones de las Integrales Impropias

### 8.1. Probabilidad: Distribuciones Continuas

**Aplicación Práctica**

En teoría de probabilidad, las densidades de probabilidad sobre $\mathbb{R}$ deben satisfacer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

**Ejemplo - Distribución Normal**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ es fundamental para normalizar esta distribución.

### 8.2. Física: Energía Potencial

**Aplicación Práctica**

El trabajo para mover una carga desde $r_0$ hasta el infinito contra un campo eléctrico:

$$W = \int_{r_0}^{\infty} \frac{kQ}{r^2}\, dr = \frac{kQ}{r_0}$$

Esta integral impropia converge (es una integral p con $p = 2 > 1$) y da la energía potencial electrostática.

### 8.3. Ingeniería: Transformada de Laplace

**Aplicación Práctica**

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ es:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Esta es una integral impropia que converge para valores apropiados de $s$, y es fundamental en el análisis de sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales.

# Parte II
# Diagonalización de Matrices

## 9. Fundamentos de Álgebra Lineal

### 9.1. Transformaciones Lineales: El Corazón del Álgebra

Antes de hablar de diagonalización, debemos entender qué representa una matriz.

**Intuición**

Una matriz no es solo una tabla de números. Es la representación de una **transformación del espacio**. Cuando multiplicamos un vector por una matriz, estamos aplicando una transformación: rotación, reflexión, estiramiento, proyección, o una combinación de estas.
Imagina que estás en una habitación mirando hacia el norte. Una matriz podría representar "gira 90° a la derecha y da dos pasos adelante". Diferentes matrices representan diferentes ïnstrucciones"de movimiento.

**Definición 9.1** (Transformación lineal)**.** Una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es **lineal** si satisface:

(I) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ (preserva sumas)

(II) $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$ (preserva escalares)

Toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ puede representarse mediante una matriz $A$ de $n \times n$:

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

### 9.2. El Problema: ¿Existen Direcciones Especiales?

Cuando aplicamos una transformación a un vector cualquiera, generalmente cambia tanto su dirección como su magnitud. Pero para ciertas transformaciones, existen direcciones privilegiadas que solo se estiran o comprimen, sin cambiar de dirección.

**Intuición**

Imagina que soplas aire sobre una superficie elástica. La mayoría de los puntos se mueven en direcciones complicadas. Pero puede haber líneas especiales que solo se estiran o comprimen en su propia dirección, sin desviarse. Estas líneas son análogas a los vectores propios.

## 10. Valores y Vectores Propios

### 10.1. Definición y Significado Geométrico

**Definición 10.1** (Vector propio y valor propio)**.** Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Un vector no nulo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de $A$ si existe un escalar $\lambda$ tal que:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

El escalar $\lambda$ se llama **valor propio** (o eigenvalor) asociado a $\vec{v}$.

**Observación 10.1** (Interpretación geométrica)**.** La ecuación $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dice que multiplicar $\vec{v}$ por $A$ es lo mismo que multiplicarlo por el escalar $\lambda$. Es decir:

- Si $\lambda > 1$: $\vec{v}$ se estira
- Si $0 < \lambda < 1$: $\vec{v}$ se comprime

- Si $\lambda < 0$: $\vec{v}$ se invierte y escala
- Si $\lambda = 0$: $\vec{v}$ se colapsa al origen

Pero en todos los casos, la **dirección se preserva**.

## 10.2. Cálculo de Valores Propios

La ecuación $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ puede reescribirse como:

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Para que exista un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ que satisfaga esto, la matriz $(A - \lambda I)$ debe ser singular (no invertible), es decir:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

**Definición 10.2** (Polinomio característico)**.** El **polinomio característico** de una matriz $A$ de $n \times n$ es:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Este es un polinomio de grado $n$ en $\lambda$. Sus raíces son los valores propios de $A$.

## 10.3. Ejemplo Completo 2×2

**Ejemplo 10.1** (Cálculo completo de valores y vectores propios)**.** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Paso 1: Encontrar valores propios**
Calculamos $\det(A - \lambda I)$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (4-\lambda)(3-\lambda) - (1)(2) \\ &= 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Igualando a cero: $(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$
Por lo tanto: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$.
**Paso 2: Encontrar vectores propios**
*Para* $\lambda_1 = 5$:
Resolvemos $(A - 5I)\vec{v}_1 = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primera ecuación: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$
Tomando $v_1 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
*Para* $\lambda_2 = 2$:
Resolvemos $(A - 2I)\vec{v}_2 = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primera ecuación: $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$

Tomando $v_1 = 1$: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

**Verificación**:

$$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \vec{v}_1 \quad \checkmark$$
$$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \vec{v}_2 \quad \checkmark$$

# 11. Diagonalización: Teoría

## 11.1. La Idea Central

**Intuición**

Diagonalizar una matriz es como encontrar el ”sistema de coordenadas natural”para una transformación. En ese sistema especial, la transformación es trivial: cada coordenada simplemente se multiplica por un número.
Es como describir la rotación de la Tierra: en coordenadas arbitrarias es complicada, pero si usamos el eje de rotación como referencia, todo se simplifica enormemente.

**Definición 11.1** (Matriz diagonalizable)**.** Una matriz $A$ de $n \times n$ es **diagonalizable** si existe una matriz invertible $P$ y una matriz diagonal $D$ tales que:

$$A = PDP^{-1}$$

Equivalentemente: $P^{-1}AP = D$, o $AP = PD$.

## 11.2. El Teorema Fundamental

**Teorema 11.1** (Condición de diagonalización)**.** *Una matriz $A$ de $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene $n$ vectores propios linealmente independientes.*

*En tal caso:*

- *Las columnas de $P$ son los vectores propios de $A$*
- *Los elementos diagonales de $D$ son los valores propios correspondientes*

*Es decir, si $P = [\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \cdots \mid \vec{v}_n]$, entonces:*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

*Idea de la demostración.* Si $A = PDP^{-1}$, multiplicando por $P$ a la derecha:

$$AP = PD$$

Escribiendo $P$ por columnas: $P = [\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \cdots \mid \vec{v}_n]$:

$$A[\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \cdots \mid \vec{v}_n] = [\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \cdots \mid \vec{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Esto da:

$$[A\vec{v}_1 \mid A\vec{v}_2 \mid \cdots \mid A\vec{v}_n] = [\lambda_1\vec{v}_1 \mid \lambda_2\vec{v}_2 \mid \cdots \mid \lambda_n\vec{v}_n]$$

Por lo tanto: $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ para todo $i$, es decir, los $\vec{v}_i$ son vectores propios. □

### 11.3. Criterios Prácticos de Diagonalización

**Proposición 11.1** (Valores propios distintos). *Si $A$ tiene $n$ valores propios* ***distintos****, entonces $A$ es diagonalizable.*

**Razón**: Vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.

**Advertencia Importante**

La recíproca es FALSA: una matriz puede tener valores propios repetidos y aún ser diagonalizable.
Ejemplo: La matriz identidad $I$ tiene $\lambda = 1$ con multiplicidad $n$, pero es trivialmente diagonal (ya está diagonalizada).

### 11.4. Multiplicidad Algebraica vs Geométrica

**Definición 11.2** (Multiplicidades). Sea $\lambda$ un valor propio de $A$.

- La **multiplicidad algebraica** de $\lambda$ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico.
- La **multiplicidad geométrica** de $\lambda$ es la dimensión del espacio propio $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ (es decir, el número de vectores propios linealmente independientes asociados a $\lambda$).

**Teorema 11.2** (Criterio general de diagonalización). *$A$ es diagonalizable $\iff$ para cada valor propio $\lambda$:*

$$\textit{multiplicidad geométrica} = \textit{multiplicidad algebraica}$$

## 12. Proceso Completo de Diagonalización

### 12.1. Algoritmo Paso a Paso

**Estrategia de Resolución**

**Proceso para diagonalizar una matriz $A$:**
**Paso 1**: Calcular el polinomio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.
**Paso 2**: Encontrar las raíces (valores propios) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.
**Paso 3**: Para cada valor propio $\lambda_i$:

- Resolver el sistema $(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$
- Encontrar una base del espacio nulo (vectores propios)
- Verificar que la multiplicidad geométrica = multiplicidad algebraica

**Paso 4**: Si hay $n$ vectores propios linealmente independientes en total:

- Formar $P$ con estos vectores como columnas
- Formar $D$ con los valores propios correspondientes en la diagonal

**Paso 5**: Verificar que $AP = PD$ (o calcular $P^{-1}AP = D$).

### 12.2. Ejemplo Detallado 3×3

**Ejemplo 12.1** (Diagonalización completa). Diagonalizar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Paso 1: Polinomio característico**

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(2-\lambda)^2-1] \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4-1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-3)
\end{aligned}$$

Valores propios: $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad 2), $\lambda_2 = 3$ (multiplicidad 1).

**Paso 2: Vectores propios para $\lambda_1 = 1$**

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos $(A-I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}
v_2 + v_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_3 = -v_2 \\
v_1 \text{ es libre}
\end{aligned}$$

Base del espacio propio:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicidad geométrica = 2 = multiplicidad algebraica.

**Paso 3: Vectores propios para $\lambda_2 = 3$**

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned}
-2v_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_1 = 0 \\
-v_2 + v_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_3 = v_2
\end{aligned}$$

Vector propio:

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Paso 4: Formar P y D**

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Paso 5: Verificación**

Calculamos $P^{-1}$ (usando determinante e inversa o eliminación gaussiana):

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Verificamos $P^{-1}AP = D$ (el cálculo es largo pero directo).

# 13. Casos Especiales y Propiedades

## 13.1. Matrices Simétricas: El Teorema Espectral

Las matrices simétricas tienen propiedades extraordinarias.

**Teorema 13.1** (Teorema Espectral - versión real)**.** *Sea $A$ una matriz simétrica real ($A = A^T$). Entonces:*

(I) *Todos los valores propios de $A$ son reales.*

(II) *Vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.*

(III) *$A$ es diagonalizable mediante una matriz ortogonal $Q$:*

$$A = QDQ^T$$

*donde $Q^TQ = I$ (las columnas de $Q$ forman una base ortonormal).*

**Intuición**

Este teorema es profundo: dice que toda transformación simétrica tiene un sistema de coordenadas ortogonales natural donde actúa de manera simple. En física, esto significa que toda cantidad observable (representada por operadores simétricos) tiene una base de estados propios ortogonales.

## 13.2. Ejemplo: Diagonalización Ortogonal

**Ejemplo 13.1** (Matriz simétrica 2×2)**.** Diagonalizar ortogonalmente

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Paso 1: Valores propios**

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$.

**Paso 2: Vectores propios**

Para $\lambda_1 = 4$:

$$(A - 4I)\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Paso 3: Normalización**

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Vectores normalizados:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

**Paso 4: Matriz ortogonal**

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

**Verificación de ortogonalidad**:

$$Q^T Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = I \quad \checkmark$$

### 13.3. Matrices No Diagonalizables

No todas las matrices son diagonalizables.

**Ejemplo 13.2** (Matriz no diagonalizable)**.** La matriz

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$$

NO es diagonalizable.

**Análisis**:

Polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \text{ (multiplicidad 2)}$$

Espacio propio:

$$A - 2I = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Resolviendo $(A-2I)\vec{v} = \vec{0}$: solo obtenemos $v_2 = 0$, $v_1$ libre.

Base del espacio propio: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$

Multiplicidad geométrica $= 1 \neq 2 =$ multiplicidad algebraica.

Por lo tanto, NO es diagonalizable.

**Observación 13.1.** Las matrices no diagonalizables aparecen en la teoría de forma canónica de Jordan. En aplicaciones prácticas, son relativamente raras (en cierto sentido, son .$^{\text{ex}}$cepcionales”).

## 14. Aplicaciones de la Diagonalización

### 14.1. Potencias de Matrices

Una de las aplicaciones más directas e importantes.

**Proposición 14.1** (Cálculo de potencias)**.** *Si $A = PDP^{-1}$, entonces:*

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

*donde*

$$D^n = \begin{bmatrix}\lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n\end{bmatrix}$$

*Demostración.* Por inducción:

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1}$$

Y así sucesivamente. □

**Ejemplo 14.1** (Potencia de matriz)**.** Calcular $A^{10}$ donde $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Del ejemplo anterior, sabemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Entonces:

$$A^{10} = P \begin{bmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 9765625 & 0 \\ 0 & 1024 \end{bmatrix} P^{-1}$$

Calculando explícitamente (con $P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$):

El resultado es mucho más fácil que calcular $A \cdot A \cdot A \cdots$ (10 veces).

## 14.2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

**Aplicación Práctica**

Considerar el sistema lineal:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Si $A$ es diagonalizable con $A = PDP^{-1}$, hacemos el cambio de variable $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = D\vec{y}$$

Este sistema es **desacoplado**:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n \end{cases}$$

Cada ecuación se resuelve independientemente:

$$y_i(t) = y_i(0)e^{\lambda_i t}$$

Solución final: $\vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$.

**Ejemplo 14.2** (Sistema de EDOs)**.** Resolver:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

**Solución**:

En forma matricial: $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Ya diagonalizamos esta matriz: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$.

Cambio de variable con $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$:

$$\vec{y} = P^{-1}\vec{x}, \quad \vec{y}(0) = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Sistema desacoplado:

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{2}{3}e^{5t} \\ y_2(t) = \frac{1}{3}e^{2t} \end{cases}$$

Solución original:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = P\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{1}{3}e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{5t} + \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{2}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t} \end{bmatrix}$$

### 14.3. Análisis de Estabilidad

**Aplicación Práctica**

En sistemas dinámicos, la estabilidad se determina por los valores propios:
Para $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$:

- Si todos los $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$: el origen es **estable** (atractor).
- Si algún $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$: el origen es **inestable** (repulsor).
- Si todos los $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ con al menos uno igual a 0: análisis más delicado (centro o inestabilidad débil).

**Aplicación**: Modelos poblacionales, circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, redes neuronales.

### 14.4. Análisis de Componentes Principales (PCA)

**Aplicación Práctica**

En estadística y ciencia de datos, PCA usa diagonalización de la matriz de covarianza para:

- Reducir dimensionalidad de datos
- Identificar direcciones de máxima varianza
- Eliminar correlaciones entre variables

Los vectores propios de la matriz de covarianza son las çomponentes principales", y los valores propios indican cuánta varianza explica cada componente.

### 14.5. Mecánica Cuántica

**Aplicación Práctica**

En mecánica cuántica:

- Los observables físicos (energía, momento, posición) se representan como matrices/operadores simétricos (hermitianos).
- Los valores propios son los valores medibles de la cantidad física.
- Los vectores propios son los .estados propios"donde la medición da un valor definido.
- El Teorema Espectral garantiza que siempre existe una base ortonormal de estados propios.

El principio de superposición cuántica está íntimamente ligado a la estructura de espacios propios.

# 15. Ejercicios Resueltos Completos

## 15.1. Ejercicio 1: Diagonalización con valor propio repetido

**Ejercicio 15.1.** Determinar si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable. Si lo es, diagonalizarla.

**Solución**:
*Paso 1*: Matriz triangular superior, así que los valores propios son los elementos diagonales:

$$\lambda = 2 \text{ (con multiplicidad algebraica 3)}$$

*Paso 2*: Encontrar el espacio propio:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_2 &= 0 \\ v_3 &\text{ es libre} \end{aligned}$$

Base del espacio propio: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
Multiplicidad geométrica $= 1 \neq 3 =$ multiplicidad algebraica.
**Conclusión**: $A$ NO es diagonalizable.

## 15.2. Ejercicio 2: Aplicación a potencias

**Ejercicio 15.2.** Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Calcular $A^{50}$.

**Solución**:
*Paso 1*: Valores propios:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 \\ &= 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 6)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$.
*Paso 2*: Vectores propios:
Para $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

*Paso 3*: Formar P y calcular $P^{-1}$:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

*Paso 4*: Calcular potencia:

$$\begin{aligned} A^{50} &= P \begin{bmatrix} 6^{50} & 0 \\ 0 & 1^{50} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6^{50} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primer producto:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 6^{50} & 1 \\ 1 \cdot 6^{50} & -2 \end{bmatrix}$$

Segundo producto:

$$\begin{aligned} A^{50} &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \cdot 6^{50} & 1 \\ 6^{50} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \cdot 6^{50} + 1 & 2 \cdot 6^{50} - 2 \\ 2 \cdot 6^{50} - 2 & 6^{50} + 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Respuesta**:

$$A^{50} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \cdot 6^{50} + 1 & 2(6^{50} - 1) \\ 2(6^{50} - 1) & 6^{50} + 4 \end{bmatrix}$$

## 15.3. Ejercicio 3: Diagonalización ortogonal

**Ejercicio 15.3.** Diagonalizar ortogonalmente

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Solución**:
*Paso 1*: Verificar que es simétrica: $A = A^T$
*Paso 2*: Valores propios:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\ &= (2-\lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 4) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ (multiplicidad 2).
*Paso 3*: Vectores propios:

Para $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

De la segunda fila: $v_2 = 0$. De la primera: $v_3 = v_1$.

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, normalizado: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

$v_1 + v_3 = 0$, $v_2$ libre.

Base: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Ya normalizados: $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

*Paso 4*: Matriz ortogonal:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## 16. Conexiones entre Ambos Temas

Aunque integrales impropias y diagonalización parecen no relacionados, comparten filosofías profundas:

- **Extensión al infinito**: Las integrales impropias extienden la integración a dominios infinitos o singulares. La diagonalización en espacios infinito-dimensionales (operadores en mecánica cuántica) extiende estos conceptos matriciales a dimensión infinita.
- **Convergencia y completitud**: En integrales impropias preguntamos si una suma infinita converge. En diagonalización preguntamos si existe una base completa de vectores propios.
- **Análisis espectral**: La teoría espectral unifica ambos: estudia los "valores propios"(espectro) de operadores integrales, donde las integrales impropias y la diagonalización se encuentran.

## 17. Conclusión

Hemos recorrido dos territorios fundamentales de las matemáticas avanzadas:

**Integrales impropias** nos enseñan que el infinito puede ser manejable cuando las cantidades decrecen apropiadamente. Los criterios de convergencia proporcionan herramientas poderosas para determinar cuándo una suma infinita tiene sentido.

**Diagonalización** revela la estructura oculta de las transformaciones lineales, mostrando que bajo la representación correcta, incluso las transformaciones más complicadas se vuelven transparentes.

Ambos temas son indispensables en:

- Física teórica y aplicada
- Ingeniería de sistemas
- Ciencia de datos y aprendizaje automático

- Economía matemática
- Biología matemática

El dominio de estos conceptos abre las puertas a áreas avanzadas como análisis funcional, teoría de operadores, mecánica cuántica y sistemas dinámicos.

---

*"La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes."*
— Henri Poincaré