

運動エネルギー  $T(q, \dot{q})$  が

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

で表される時,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i,j} a_{ij}(q) (\delta_{i,k} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{j,k}) = \sum_j 2a_{kj}(q) \dot{q}_j$$

となる. ここで,  $a_{ij}(q)$  は対称となるように取る. また,

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{i,j}$$

であることを用いた.

したがって,

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k,j} 2a_{kj}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j = 2T(q, \dot{q})$$

である.