

А. КОФМАН

# Введение в прикладную комбинаторику

---

*Перевод с французского*

*В. П. МЯКИШЕВА и В. Е. ТАРАКАНОВА*

*Под редакцией*

*Б. А. СЕВАСТЬЯНОВА*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1975



518  
K74  
УДК 519.1

INTRODUCTION  
A  
LA COMBINATORIQUE  
EN VUE DES APPLICATIONS

PAR  
A. KAUFMANN

DUNOD  
PARIS  
1968

K 20203 — 019 51-74  
053(02)-75



# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие редактора перевода . . . . .	6
Список основных обозначений . . . . .	7
<b>Г л а в а I. Пересчет. Применение производящих функций . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Введение . . . . .	9
§ 2. Теоретико-множественное произведение. Понятие $r$ -выборки . . . . .	9
§ 3. Размещения. Сочетания . . . . .	10
§ 4. Пересчет. Перечисление. Классификация. Оптимизация . . . . .	16
§ 5. Производящие функции . . . . .	18
§ 6. Сведения о конечноразностных операторах . . . . .	20
§ 7. $z$ -преобразование . . . . .	24
§ 8. Применение производящей функции. Энумераторы и денумераторы сочетаний . . . . .	37
§ 9. Денумераторы размещений . . . . .	44
§ 10. Основные последовательности и формулы для пересчета . . . . .	47
<b>Г л а в а II. Развитие методов пересчета . . . . .</b>	<b>60</b>
§ 11. Введение . . . . .	60
§ 12. Формула включения и исключения . . . . .	60
§ 13. Использование общего метода решета в теории чисел . . . . .	70
§ 14. Задача о встречах. Беспорядки и совпадения . . . . .	73
§ 15. Перманент матрицы . . . . .	78
§ 16. Группы подстановок. Перестановки. Транспозиции . . . . .	87
§ 17. Денумераторы цикловых классов . . . . .	97
§ 18. Классифицирование. Схема размещения элементов по ячейкам . . . . .	114
§ 19. Урновые схемы . . . . .	125
§ 20. Задача о супружеских парах, или задача Люка . . . . .	127
§ 21. Перестановки с запретными положениями. Размещение по ячейкам . . . . .	133
§ 22. Противоречивые перестановки . . . . .	145
§ 23. Латинские прямоугольники . . . . .	151

Глава III. Свойства графов . . . . . 154

§ 24. Введение . . . . .	154
§ 25. Граф. Определение . . . . .	155
§ 26. Понятие пути . . . . .	161
§ 27. Сильно связный граф. Разложение на максимальные сильно связные подграфы. Транзитивное замыкание и пересчет путей	164
§ 28. Порядковая функция графа без контуров . . . . .	172
§ 29. Функция Гранди . . . . .	177
§ 30. Внутренняя устойчивость. Внешняя устойчивость . . . . .	180
§ 31. Ядра графа . . . . .	186
§ 32. Основные понятия для неориентированных графов . . . . .	191
§ 33. Хроматическое число. Хроматический класс . . . . .	195
§ 34. Клика. Максимальная клика . . . . .	201
§ 35. $p$ -цветный граф. Граф с $p$ отображениями. Неориентированный мультиграф, или неориентированный $p$ -граф . . . . .	204
§ 36. Плоские $p$ -графы . . . . .	205
§ 37. Подмножество сочленения . . . . .	210
§ 38. Прaderево. Дерево . . . . .	217
§ 39. Конечные структуры . . . . .	223

Глава IV. Перечисление . . . . . 243

§ 40. Введение . . . . .	243
§ 41. Метод латинской композиции . . . . .	243
§ 42. Перечисление путей . . . . .	246
§ 43. Перечисление элементарных путей . . . . .	248
§ 44. Перечисление элементарных контуров . . . . .	252
§ 45. Перечисление последовательностей с повторением . . . . .	255
§ 46. Перечисление факторов графа . . . . .	257
§ 47. Перечисление рассечений . . . . .	263
§ 48. Другие методы и задачи перечисления . . . . .	265

Глава V. Оптимизация . . . . . 271

§ 49. Введение . . . . .	271
§ 50. Числовая функция на графике . . . . .	271
§ 51. Оптимизация пути в графике без контуров. Теоремы оптимальности . . . . .	277
§ 52. Метод динамического программирования . . . . .	279
§ 53. Последовательные графы . . . . .	291
§ 54. Метод прогрессивных разделений и оценок (метод ветвления и ограничения) . . . . .	299
§ 55. Нахождение хорошего решения эвристическим методом . . . . .	324
§ 56. Применение методов Монте-Карло . . . . .	338

§ 57. Понятие $k$ -оптимальности . . . . .	341
§ 58. Оптимизация на прадереве. Отыскание оптимального дерева, являющегося частичным графом . . . . .	350
§ 59. Задачи о временном упорядочении . . . . .	355
§ 60. Оптимизация потока в сети . . . . .	361
§ 61. Простой граф. Покрытие. Паросочетание . . . . .	381
§ 62. Задача о назначении . . . . .	405
 Приложение А. Бинарная булева алгебра. Кольцо классов вычетов по модулю $n$ . Поля Галуа характеристики $p$ . . . . .	415
A1. Введение . . . . .	415
A2. Булева алгебра . . . . .	415
A3. Кольцо классов вычетов по модулю $n$ . . . . .	427
A4. Поля Галуа . . . . .	432
A5. Алгебра по модулю 2 . . . . .	435
 Приложение Б. Кодирование. Коды, обнаруживающие ошибки . . . . .	439
B1. Введение . . . . .	439
B2. Передача $r$ -выборки . . . . .	439
B3. Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки . . . . .	445
B4. Аналогия между циклическими и линейными кодами . . . . .	460
B5. Коды сцепления . . . . .	465
B6. Декодирование перестановками . . . . .	468
Литература . . . . .	472
Именной указатель . . . . .	475
Предметный указатель . . . . .	477

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

---

Развитие вычислительной техники и исследования операций вызвало повышенный интерес к комбинаторной математике. Оно привело, с одной стороны, к постановке новых комбинаторных задач, а с другой стороны, дало эффективные способы их решения с помощью электронных цифровых вычислительных машин.

В предлагаемой книге известного французского математика и педагога А. Кофмана излагаются основы прикладной комбинаторики. В ней рассматриваются математические вопросы, представляющие большой интерес для практических приложений, а именно: элементы теории перечисления, теории графов, оптимизации и некоторые другие. Наряду с доказательствами основных предложений приводится большое число практических рецептов и алгоритмов решения комбинаторных задач, позволяющих зачастую получить численный результат.

При написании книги автор стремился к тому, чтобы читатель, не обладающий предварительной подготовкой, получил дополнительный стимул к изучению этой области математики. Этому способствует большое количество примеров и иллюстративного материала. Простота и наглядность изложения делают ее доступной самому широкому кругу читателей.

В процессе перевода и редактирования было выявлено и исправлено значительное количество ошибок и неточностей оригинала, особенно большим изменениям подверглись главы IV и V.

*Севастьянов Б. А.*

# СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

---

$\{a, b, \dots, l\}$	<b>E</b>	Множество.
$\mathcal{P}(E)$		Множество частей множества <b>E</b> .
$a \in A$		Элемент $a$ принадлежит множеству <b>A</b> .
$\emptyset$		Пустое множество.
$A = B$		Множество <b>A</b> совпадает с множеством <b>B</b> .
$ A $ , $\text{Card}(A)$		Число элементов конечного множества <b>A</b> .
$B \subset A$		Множество <b>B</b> содержится в множестве <b>A</b> .
$B \subseteq A$		Множество <b>B</b> строго содержится в множестве <b>A</b> .
$B \not\subseteq A$		Множество <b>B</b> не содержитя в множестве <b>A</b> .
$A \cup B$		Объединение двух множеств.
$A \cap B$		Пересечение двух множеств.
$C_A B$ , $\bar{B}$		Дополнение <b>B</b> по отношению к <b>A</b> .
$A - B$		Разность.
$\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$		Из свойства $\mathcal{P}_1$ следует свойство $\mathcal{P}_2$ .
$\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2$		Свойства $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ эквивалентны.
$\forall x$		Для всех $x$ . Квантор общности.
$\exists x$		Существует $x$ . Квантор существования.
$\exists! x$		Существует одно и только одно $x$ .
$N$		Множество целых неотрицательных чисел: $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
$N_0$		$N - \{0\}$ .
$Z$		Множество всех целых чисел: $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
$R$		Множество всех действительных чисел.
$R_0$		$R - \{0\}$ .
$C$		Множество всех комплексных чисел.
$E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(n)}$		Произведение $n$ множеств $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n)}$ .
$(E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \dots, E_{\alpha_r})$		Упорядоченная $r$ -выборка.
$[E_{\beta_1}, E_{\beta_2}, \dots, E_{\beta_s}]$		Неупорядоченная $r$ -выборка.
$A_m^n$		Число размещений без повторения из $m$ элементов по $n$ .
$C_m^n$		Число сочетаний без повторения из $m$ элементов по $n$ .
$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$		Число разбиений множества на $k$ неупорядоченных выборок без повторения.
$\ln A$		Натуральный логарифм числа <b>A</b> .
$f^*(z)$		Производящая функция, или $z$ -преобразование функции $f(n)$ , определенной на <b>N</b> .
$f^e(z)$		Экспоненциальная производящая функция, или экспоненциальное $z$ -преобразование функции $f(z)$ , определенной на <b>N</b> .
$Ef(x)$		Оператор, переводящий $f(x)$ в $f(x + h)$ .
$\Delta f(x)$		Оператор, переводящий $f(x)$ в $f(x + h) - f(x)$ .
$Df(x)$		Оператор взятия производной $\frac{d}{dx} f(x)$ от $f(x)$ .
$kf(x)$		Оператор умножения $f(x)$ на действительное число $k$ .
$s(n, r)$		Числа Стирлинга первого рода.

$\bar{s}(n, r)$	Числа Стирлинга второго рода.
$\delta_{ij}$	Символ Кронекера.
$[A]$	Целая часть числа $A$ .
$D_n$	Число беспорядков $n$ элементов.
$D_{n, k}$	Число перестановок $n$ элементов с $k$ совпадениями.
$\det \ a\ $ , $ a $	Определитель матрицы $\ a\ $ .
$\operatorname{per} \ a\ $	Перманент матрицы $\ a\ $ .
$P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n)$	Денумератор цикловых классов.
$\delta(n, k)$	Присоединенные числа Стирлинга первого рода.
$\gamma(n, k)$	Присоединенные числа Стирлинга второго рода.
$M_n$	Число перестановок $n$ «супружеских пар».
$L(r, n)$	Число латинских прямоугольников размера $r \times n$ .
$K(r, n)$	Число нормализованных латинских прямоугольников размера $r \times n$ .
$\Gamma \mathbf{A}$	Многозначное отображение $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}$ .
$\Gamma^{-1} \mathbf{A}$	Отображение, обратное к $\Gamma \mathbf{A}$ .
$\mathbf{G} \subset \mathbf{E} \times \mathbf{E}$	Граф, определенный на $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ .
$\mathbf{U}_\mathbf{A}^-$	Множество дуг, исходящих из подмножества $\mathbf{A}$ .
$\mathbf{U}_\mathbf{A}^+$	Множество дуг, заходящих в подмножество $\mathbf{A}$ .
$G = (\mathbf{E}, \Gamma)$ или $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$	Граф, определенный на $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ посредством отображения $\Gamma$ или посредством множества $\mathbf{U}$ его дуг.
$G^*$	Граф, дополнительный к $G$ .
$(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$	Путь, проходящий через вершины $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}$ .
$\hat{\Gamma}$	Транзитивное замыкание.
$a \prec b$	Пара элементов, находящихся в отношении строгого порядка.
$a \leqslant b$	Пара элементов, находящихся в отношении нестрогого порядка.
$\alpha(G)$	Число внутренней устойчивости графа $G$ .
$\beta(G)$	Число внешней устойчивости графа $G$ .
$\overline{\mathbf{U}}$	Множество ребер графа.
$\overline{G} = (\mathbf{E}, \overline{\mathbf{U}})$	Неориентированный граф, соотнесенный графу $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$ .
$(\overline{X_{i_1}}, \overline{X_{i_2}}, \dots, \overline{X_{i_n}})$	Цепь в графе.
$d(X_i)$	Степень вершины $X_i$ .
$\gamma(\overline{G})$	Хроматическое число неориентированного графа $\overline{G}$ .
$\sup(\mathbf{A})$	Верхняя грань подмножества $\mathbf{A}$ .
$\inf(\mathbf{A})$	Нижняя грань подмножества $\mathbf{A}$ .
$A \triangleright B$	Верхняя грань $\{A, B\}$ .
$A \triangle B$	Нижняя грань $\{A, B\}$ .
$s_1 * s_2$	Латинская композиция последовательностей $s_1$ и $s_2$ .
$\lambda(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$	Значение пути через вершины.
$\mu(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})$	Значение пути через дуги.
$\operatorname{opt}$	Оптимум.
$\max$	Максимум.
$\min$	Минимум.
$C(\mathbf{U}_\mathbf{A}^-)$	Пропускная способность разреза.
$G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$	Простой граф с множествами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ и отображением $\Gamma$ .
$+ \quad F(\mathbf{A}; x), f_a(x)$	Булево сложение. Характеристическая булева функция подмножества $\mathbf{A}$ .
$a \equiv b \pmod{n}$	Сравнение по модулю $n$ .
$\stackrel{+}{+} \quad CG(p)$	Сложение по модулю 2. Поле Галуа характеристики $p$ .

# ГЛАВА I

## ПЕРЕСЧЕТ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

---

### § 1. Введение

Мы начнем с таких хорошо известных понятий, как размещения, перестановки и сочетания; далее читатель подробно познакомится здесь также с производящими функциями, которые дают возможность систематизировать пересчеты в комбинаторике. Затем напомним вкратце теорию конечноразностных операторов. Понятие производящей функции можно ввести с помощью так называемого  $z$ -преобразования, эквивалентного в некотором смысле преобразованию Лапласа, но относящегося к случаю счетных множеств, образующих последовательности. Некоторые последовательности играют важную роль: числа Стирлинга, числа Белла, последовательность полиномов Белла, формула Бруно; они будут выписаны в явном виде. Все эти понятия непосредственно используются во многих задачах пересчета, но, к сожалению, они, вообще говоря, мало распространены.

### § 2. Теоретико-множественное произведение. Понятие $r$ -выборки

Пусть заданы  $r$  множеств (конечных или нет)  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(r)}$ , причем

$$E_i^{(1)} \in E^{(1)}, \quad E_j^{(2)} \in E^{(2)}, \quad \dots, \quad E_l^{(r)} \in E^{(r)}. \quad (2.1)$$

Упорядоченная совокупность

$$P_\alpha = (E_i^{(1)}, E_j^{(2)}, \dots, E_l^{(r)}) \quad (2.2)$$

называется  $r$ -выборкой<sup>1</sup>), и множество всех таких  $r$ -выборок  $P_\alpha$

---

<sup>1)</sup> Как правило, это понятие будет использоваться для обозначения элемента теоретико-множественного произведения, размерность которого не фиксирована (размерность — число сомножителей в произведении).

называется теоретико-множественным произведением или произведением  $r$  множеств  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(r)}$ . Это теоретико-множественное произведение обозначается

$$P = E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(r)}. \quad (2.3)$$

В дальнейшем будут рассматриваться и теоретико-множественные произведения более специального вида:

$$P = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{r \text{ раз}} = E^r, \quad (2.4)$$

где  $E$  — конечное множество.

Если  $E_i, E_j, \dots, E_l$  — элементы  $E$ , то будем обозначать  $r$ -выборки из  $P$  следующим образом:

$$P_a = (E_i, E_j, \dots, E_l). \quad (2.5)$$

Напомним, что  $r$ -выборка есть не множество, а элемент теоретико-множественного произведения. Вот почему мы используем для обозначения  $r$ -выборки круглые скобки, а не фигурные, которые обычно служат для обозначения совокупности элементов, образующих множество.

В  $r$ -выборке каждый элемент, называемый также компонентой, может повторяться, но порядок компонент фиксирован раз и навсегда. Говорят, что  $E_i$  — первая,  $E_j$  — вторая,  $\dots, E_l$  —  $r$ -я компонента в  $r$ -выборке (2.5).

### § 3. Размещения. Сочетания

Рассмотрим конечное множество  $E$  с числом элементов  $|E| = n$  ( $n > 0$ ) и образуем следующее теоретико-множественное произведение:

$$P = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{r \text{ раз}}. \quad (3.1)$$

Исходя из  $P$ , введем два понятия.

**Упорядоченные  $r$ -выборки.**  $r$ -выборку, которая определена в § 2 формулой (2.2) и в которой порядок компонент фиксирован по определению, будем называть упорядоченной  $r$ -выборкой \*).

Говорят, что две упорядоченные  $r$ -выборки

$$P_a = (E_{a_1}, E_{a_2}, \dots, E_{a_r}) \quad \text{и} \quad P_b = (E_{b_1}, E_{b_2}, \dots, E_{b_r}) \quad (3.2)$$

равны, или эквивалентны, тогда и только тогда, когда

$$E_{a_1} = E_{b_1}, \quad E_{a_2} = E_{b_2}, \quad \dots, \quad E_{a_r} = E_{b_r}. \quad (3.3)$$

Упорядоченная 2-выборка называется также *двойкой*, упорядоченная 3-выборка — *тройкой*.

---

\*.) Здесь автор  $r$ -выборку (2.2) называет просто упорядоченной  $r$ -выборкой. (Прим. ред.)

Упорядоченная  $r$ -выборка называется также *размещением из  $n$  элементов по  $r$*  ( $n = |\mathbf{E}|$ ). Когда  $r = n$ , это размещение называется *перестановкой  $n$  элементов*.

**Неупорядоченные  $r$ -выборки.** Неупорядоченная  $r$ -выборка не есть  $r$ -выборка в смысле данного выше определения. Если в определении упорядоченной  $r$ -выборки не учитывать порядок компонент, то мы приходим к неупорядоченной  $r$ -выборке, которую будем обозначать

$$\bar{P}_\alpha = [E_i, E_j, \dots, E_l]. \quad (3.4)$$

Говорят, что две неупорядоченные  $r$ -выборки *равны*, или *эквивалентны*, если каждая из них состоит из одних и тех же элементов  $\mathbf{E}$ , взятых одно и то же число раз.

Неупорядоченная 2-выборка называется также *парой*, неупорядоченная 3-выборка — *триадой*\*).

Неупорядоченная  $r$ -выборка называется также *сочетанием из  $n$  элементов по  $r$*  ( $n = |\mathbf{E}|$ ).

Пример. Пусть  $\mathbf{E} = \{A, B, C, D\}$  и  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} = \mathbf{E}^5$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_\alpha &= (A, A, C, A, D), & P_\beta &= (A, A, C, A, D), \\ P_\gamma &= (A, C, A, A, D), & P_\alpha &= P_\beta, \quad P_\gamma \neq P_\beta, \\ \bar{P}_\alpha &= [A, A, C, A, D], & \bar{P}_\beta &= [A, A, C, A, D], \\ \bar{P}_\gamma &= [A, C, A, A, D], & \bar{P}_\alpha &= \bar{P}_\beta = \bar{P}_\gamma. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Метод последовательного пересчета упорядоченных  $r$ -выборок, обладающих заданным свойством.** Прежде чем описать общие алгебраические методы перечисления и пересчета\*\*) упорядоченных или неупорядоченных  $r$ -выборок, напомним некоторые классические приемы и результаты.

Пусть  $\mathbf{Q} = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ , где  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{E}'$  ( $|\mathbf{E}'| = n$ ) — множество  $r$ -выборок  $P_\alpha$ , обладающих заданным свойством. Подсчитаем их число, обозначая его через  $N(n, r) = |\mathbf{Q}|$ .

Обозначим через

$$P_\alpha = (E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \dots, E_{\alpha_r}) \quad (3.6)$$

$r$ -выборку, принадлежащую  $\mathbf{E}'$ .

Чтобы определить  $N(n, r)$ , подсчитаем число  $N_1$  элементов  $E_{\alpha_1}$ , которые могут быть взяты для образования первой компоненты  $r$ -выборки  $P_\alpha$  (если такая  $P_\alpha$  существует), затем число  $N_2$  элементов  $E_{\alpha_2}$ , которые могут быть взяты для образования

\* ) В оригинале для упорядоченных 2-выборки и 3-выборки употребляются соответственно термины «couple» и «triple», а для неупорядоченных 2-выборки и 3-выборки — термины «paire» и «brelan». (Прим. перев.)

\*\*) Относительно этих терминов см. примечание к § 4 на стр. 16 (Прим. перев.)

второй компоненты  $r$ -выборки  $P_\alpha$ , когда первые компоненты уже известны; действуя дальше аналогично, доходим до  $N_r$ .

Получаем

$$N(n, r) = N_1 N_2 \dots N_r. \quad (3.7)$$

**Число упорядоченных  $r$ -выборок с повторением (размещения с повторением).** Определим число упорядоченных  $r$ -выборок. Каждую из компонент  $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \dots, E_{\alpha_r}$  выбираем  $n$  различными способами ( $n = |\mathbf{E}|$ ). Имеем

$$N_1 = N_2 = \dots = N_r = n. \quad (3.8)$$

Из (3.7) получаем

$$N(n, r) = N_1 N_2 \dots N_r = n^r. \quad (3.9)$$

Следовательно, существует  $n^r$  упорядоченных  $r$ -выборок с повторением.

Например, если  $\mathbf{E} = \{A, B, C, D, E\}$ , то можно образовать  $5^3 = 125$  упорядоченных 3-выборок:

$$(A, A, A), (A, A, B), (A, A, C), (A, A, D), (A, A, E), \\ (A, B, A), (A, B, B), (A, B, C), (A, B, D), \dots, (E, E, E). \quad (3.10)$$

**Число упорядоченных  $r$ -выборок без повторения (размещения без повторения).** Определим число упорядоченных  $r$ -выборок, которые можно образовать, выбирая первую компоненту  $E_{\alpha_1}$   $n$  различными способами ( $n = |\mathbf{E}|$ ,  $n \geq r$ ), вторую компоненту  $E_{\alpha_2}$  ( $n - 1$ ) различными способами из оставшихся элементов, ...,  $r$ -ю компоненту  $E_{\alpha_r}$  ( $n - r + 1$ ) различными способами из оставшихся элементов.

Имеем

$$N_1 = n, \quad N_2 = n - 1, \quad \dots, \quad N_r = n - r + 1.$$

В силу (3.7)

$$N(n, r) = N_1 N_2 \dots N_r = n(n - 1) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!} = A_n^{r-1}. \quad (3.11)$$

В частности, при  $n = r$

$$N(n, n) = A_n^n = n!. \quad (3.12)$$

Число  $A_n^n$  называют числом *перестановок* из  $n$  элементов и обозначают

$$P_n = n!. \quad (3.13)$$

Например, если  $\mathbf{E} = \{A, B, C, D, E\}$ , то можно образовать  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  следующих упорядоченных 3-выборок без повторения:

$$(A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (A, C, D), \dots, (E, D, C). \quad (3.14)$$

---

<sup>1)</sup> Это число обозначается также  $(n)_r$ .

**Число неупорядоченных  $r$ -выборок с повторением (сочетания с повторением).** Поскольку формула (3.7) не может быть использована, так как рассматриваются неупорядоченные  $r$ -выборки, мы применим другой метод.

Пусть  $\bar{N}(n, r)$  — число неупорядоченных  $r$ -выборок с повторением из  $E^r$ , где  $|E| = n$ .

Мы покажем, что

$$\bar{N}(n, r) = C_{n+r-1}^r, \quad (3.15)$$

где

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}^1). \quad (3.16)$$

При  $r = 1$  формула (3.15) справедлива, так как  $C_n^1 = n$  и существует в точности  $n$  неупорядоченных  $r$ -выборок. Покажем теперь, что

$$\bar{N}(n, r+1) = \bar{N}(n, r) + \bar{N}(n-1, r) + \dots + \bar{N}(1, r). \quad (3.17)$$

Для доказательства (3.17) предварительно представим каждую выборку таким образом, чтобы индексы  $\alpha_i$  ее компонент  $E_{\alpha_i}$  шли в неубывающем порядке слева направо. Тогда число  $(r+1)$ -выборок, начинающихся единицей, равно  $\bar{N}(n, r)$ , число  $(r+1)$ -выборок, начинающихся двойкой, равно  $\bar{N}(n-1, r)$ , ..., число  $(r+1)$ -выборок, начинающихся  $n$ , равно  $\bar{N}(1, r) = 1$ .

Действуем по индукции. Пусть  $\mathcal{P}(r)$  означает, что соотношение

$$\bar{N}(n, r) = C_{n+r-1}^r \quad (3.18)$$

выполняется. Покажем, что

$$\mathcal{P}(r) \Rightarrow \mathcal{P}(r+1). \quad (3.19)$$

Для  $k \leq n$  имеем

$$\bar{N}(k, r) = C_{k+r-1}^r. \quad (3.20)$$

Учитывая хорошо известное соотношение (треугольник Паскаля)

$$C_{k+r-1}^r = C_{k+r}^{r+1} - C_{k+r-1}^{r+1}, \quad (3.21)$$

получаем

$$\bar{N}(k, r) = C_{k+r}^{r+1} - C_{k+r-1}^{r+1}. \quad (3.22)$$

Подставим (3.22) в (3.17):

$$\begin{aligned} \bar{N}(n, r+1) &= \bar{N}(n, r) + \bar{N}(n-1, r) + \dots + \bar{N}(1, r) = \\ &= C_{n+r}^{r+1} - C_{n+r-1}^{r+1} + C_{n+r-1}^{r+1} - C_{n+r-2}^{r+1} + \dots + C_{r+2}^{r+1} - \\ &\quad - C_{r+1}^{r+1} + C_{r+1}^{r+1} = C_{n+r}^{r+1}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

<sup>1)</sup> Это число обозначается также  $\binom{n}{r}$ .

Итак,

$$\bar{N}(n, r+1) = C_{n+r}^{r+1}, \quad (3.24)$$

т. е.  $\mathcal{P}(r+1)$  выполняется и (3.15) доказано.

Например, если  $E = \{A, B, C, D, E\}$ , то можно образовать  $C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = 7!/3!4! = 35$  следующих неупорядоченных 5-выборок с повторением:  $[A, A, A]$ ,  $[A, A, B]$ ,  $[A, A, C]$ ,  $[A, A, D]$ ,  $[A, A, E]$ ,  $[A, B, B]$ ,  $[A, B, C]$ ,  $[A, C, D]$ , ...,  $[E, E, E]$ .

**Число неупорядоченных  $r$ -выборок без повторения (сочетания без повторения).** Число упорядоченных  $r$ -выборок без повторения ( $r \leq n$ ) в силу (3.11) (с учетом (3.16)) равно

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = r! C_n^r. \quad (3.25)$$

Следовательно, число неупорядоченных  $r$ -выборок без повторения равно  $A_n^r$ , деленному на  $r!$ , т. е.

$$N(n, r) = \frac{A_n^r}{r!} = C_n^r. \quad (3.26)$$

Например, если  $E = \{A, B, C, D, E\}$ , то можно образовать  $C_n^r = C_5^3 = 5!/3!2! = 10$  следующих неупорядоченных 3-выборок без повторения:

$$\begin{aligned} &[A, B, C], [A, B, D], [A, B, E], [A, C, D], [A, C, E], \\ &[A, D, E], [B, C, D], [B, C, E], [B, D, E], [C, D, E]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Число разбиений множества на  $k$  неупорядоченных  $r$ -выборок без повторения.** Отметим, что неупорядоченную  $r$ -выборку без повторения можно рассматривать как множество. Заметив это, разобьем конечное множество  $E$  из  $n$  элементов на  $k$  подмножеств  $E_1, E_2, \dots, E_k$  таких, что

$$E_\lambda \neq \emptyset, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k, \quad (3.28)$$

$$E_\lambda \cap E_\mu = \emptyset, \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots, k, \quad (3.29)$$

$$\bigcup_{\lambda} E_\lambda = E, \quad (3.30)$$

$$|E_i| = n_i, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n. \quad (3.31)$$

Каждое из подмножеств  $E_\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, k$  можно рассматривать как неупорядоченную выборку без повторения. Чему равно количество таких разбиений множества  $E$ ? Обозначим это число через  $\bar{N}(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$  и докажем, что

$$\bar{N}(n, n_1, n_2, \dots, n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}. \quad (3.32)$$

Для образования неупорядоченной  $n_1$ -выборки элементы берутся из всего множества  $E$  и, следовательно, число таких выборок равно  $C_n^{n_1}$ . Для образования неупорядоченной  $n_2$ -выборки

в нашем распоряжении остается  $n - n_1$  элементов  $E$ , поэтому число таких выборок равно  $C_{n-n_1}^{n_1}$  и т. д. Перемножая эти выражения, получаем число различных разбиений.

Выражение (3.32) можно упростить. В самом деле,

$$C_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}, \quad C_{n-n_1}^{n_2} = \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}, \dots \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.32), имеем

$$\bar{N}(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (3.34)$$

Часто это выражение обозначают символически  $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ .

Пример. Пусть  $E = \{A, B, C, D, E\}$ . Найдем число разбиений  $E$  с  $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1$ . Имеем

$$N(4; 1, 2, 1) = \frac{4!}{1! 2! 3!} = 12. \quad (3.35)$$

Приведем их:

$$\begin{aligned} & ([A], [B, C], [D]), \quad ([B], [A, C], [D]), \quad ([A], [B, D], [C]), \\ & ([B], [A, D], [C]), \quad ([A], [C, D], [B]), \quad ([B], [C, D], [A]), \\ & ([C], [A, B], [D]), \quad ([D], [A, B], [C]), \quad ([C], [A, D], [B]), \\ & ([D], [A, C], [B]), \quad ([C], [B, D], [A]), \quad ([D], [B, C], [A]). \end{aligned} \quad (3.36)$$

### УПРАЖНЕНИЯ

3А. Пусть  $E = \{A, B, C, D, E, F\}$ . Сколько можно образовать из элементов  $E$ : а) упорядоченных 3-выборок с повторением; б) упорядоченных 4-выборок с повторением; в) упорядоченных 3-выборок без повторения; г) неупорядоченных 4-выборок с повторением; д) неупорядоченных 5-выборок с повторением; е) неупорядоченных 5-выборок без повторения.

3Б. Пусть  $E = \{A, B, C, D, E, F\}$ . Сколько можно образовать различных разбиений  $E$ , если: а)  $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$ ; б)  $n_1 = n_2 = \dots = n_6 = 1$ ; в)  $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ ; г)  $n_1 = n_2 = 3$ .

3В. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова ИНТЕГРАЛ? (Под «словом» понимается размещение.)

3Г. Рассмотрим пять букв слова ГИПЕР. а) Сколько пятибуквенных слов можно образовать из букв этого слова (буквы могут повторяться, порядок не существен); в скольких из этих слов. б) либо одновременно не встречаются Г и И, либо не встречается какая-либо одна из этих букв; в) встречаются либо одновременно Г и И, либо одна из них; г) не встречаются одновременно П и Р; д) встречаются П и Р.

3Д. Рассмотрим слово ФРАГМЕНТЫ. Сколько совокупностей из букв, не повторяя их, можно образовать: а) беря все буквы; б) беря восемь букв; в) беря две буквы.

3Е. В концерте участвуют три певца и две певицы, каждый участник с одним номером. Сколько способами можно составить программу, если концерт должен начинаться и оканчиваться выступлением певца.

<sup>1)</sup> Это число обозначается также  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Оно равно числу перестановок с повторением из  $n$  элементов, среди которых  $n_1$  равных между собой,  $n_2$  равных между собой, ...,  $n_k$  равных между собой, и  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

**3Ж.** Сколькими способами можно вытащить 13 карт из колоды в 52 карты: а) если карта после вытаскивания возвращается обратно; б) если карта не возвращается.

**3З.** Сколько чисел между 1000 и 9999 (множество четырехзначных чисел, больших или равных 1000), в которых: а) 3 встречается один раз; б) 3 не встречается; в) 3 встречается три раза?

**3И.** Сколько диагоналей в правильном 20-угольнике? Сколько сторон у правильного многоугольника с 35 диагоналями?

**3К.** Сколькими способами можно разместить 12 человек по трем комнатам, если в первую можно поместить два, во вторую шесть, в третью четыре человека.

**3Л.** У дяди 14 пар перчаток. Сколькими способами можно выбрать одну левую перчатку и одну правую так, чтобы они были не из одной пары.

**3М.** Экзамен состоит из десяти вопросов, три из них по математике. Сколькими способами можно поставить десять вопросов так, чтобы никакие два вопросы по математике не следовали один за другим.

## § 4. Пересчет. Перечисление. Классификация. Оптимизация

Основная задача комбинаторики — изучение вопросов следующего типа о конечных множествах. Если мы интересуемся тем, сколько элементов, принадлежащих конечному множеству, обладает некоторым свойством или некоторой совокупностью свойств, то это — задача пересчета. Если же при этом интересуются списком элементов, обладающих этим (этими) свойством

	○			
○				
				○
		○		
			○	

Рис. 1.

	A	B	C	D	E
A	5	3	9	2	7
B	3	2	1	4	6
C	1	3	8	2	2
D	3	4	9	6	3
E	9	2	3	1	4

Рис. 2.

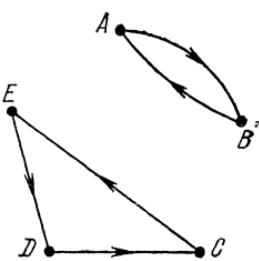


Рис. 3

(свойствами), то приходим к задаче перечисления \*). Разумеется, если пересчет приводит к слишком большим числам, что часто случается в комбинаторике, то отказываются от соответствующего перечисления и только классифицируют элементы с помощью какого-либо соотношения; это — задача классификации. В некоторых задачах на множестве решений можно ввести функцию величины и эта функция приводит к полному упорядочению на этом множестве; тогда можно рассматривать понятия максимума и минимума и мы приходим к задаче оптимизации, которая формулируется следующим образом: каково подмноже-

\*) Автор различает термины «dénombrement» (пересчет) и «énumération» (перечисление), хотя в литературе обычно в обоих значениях употребляется «énumération» (по-английски — enumeration). (Прим. перев.)

ство решений, для которого функция величины максимальна (соответственно минимальна), и каков соответствующий максимум (минимум).

Чтобы проиллюстрировать эти различные аспекты в конкретном случае, мы рассмотрим один пример, в котором результаты ясны без доказательства, но читатель найдет в дальнейшем строгие рассуждения и доказательства на эту тему.

Рассмотрим квадрат, разделенный на 25 клеток (рис. 1). Предположим, что в эти клетки размещаются пять кружков так,

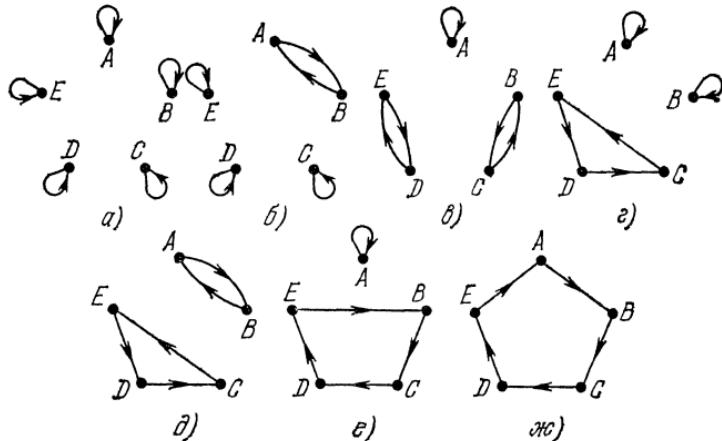


Рис. 4.

что в каждую строку и каждый столбец попадает в точности по одному кружку. Каждой клетке  $(X_i, X_j)$  сопоставим двойку  $(X_i, X_j)$ , изображаемую стрелкой. Тем самым размещению кружков по клеткам будет соответствовать диаграмма вида рис. 3. Первый вопрос: сколько различных размещений можно реализовать? Легко доказать, что число равно числу перестановок из пяти элементов, а именно  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  (рис. 1—3). Задача пересчета решена. Выпишем эти 120 решений, используя метод, который будет изложен в дальнейшем. Получим

$$\begin{aligned}
 & ((A, A), (B, B), (C, C), (D, D), (E, E)), \\
 & ((A, B), (B, A), (C, C), (D, D), (E, E)), \\
 & \dots \\
 & ((A, B), (B, C), (C, D), (D, E), (E, A)).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Это и есть перечисление.

Предположим теперь, что нас интересует число решений (возможно, и их список), обладающих специальной структурой. Рассмотрим, например, рис. 3 и назовем контуром замкнутый путь на этой диаграмме. Она состоит тогда из двух контуров длин 3 и 2 соответственно (длина — число стрелок, образующих контур). Интересной является задача распределения на классы

контуров, имеющих одинаковую структуру, например, пять контуров длины 1 (4, а), три контура длины 1 и один контур длины 2 (рис. 4, б) и т. д. Отыскание числа таких классов и их состава — важная комбинаторная задача.

Предположим, далее, что каждой клетке  $(X_i, X_j)$  сопоставлена числовая функция, а каждому решению — величина, равная сумме этих чисел; найдем решение с минимальной величиной. Если функция величины задана, как на рис. 2, то решение, указанное на рис. 1 или на рис. 3, имеет величину  $3 + 3 + 2 + + 9 + 1 = 18$ . Отыскивая решение с минимальной величиной, мы приходим к одному из двух решений, представленных на рис. 5, для которых эта величина равна 9.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>A</i>		○			
<i>B</i>			○		
<i>C</i>	○				
<i>D</i>				○	
<i>E</i>				○	

*a)*
*b)*

Рис. 5.

Таким образом, читатель уже может получить представление о том, чем мы будем заниматься в этой книге.

В последующих параграфах сначала систематически излагаются методы пересчета. Эти методы, по существу, основаны на понятии производящей функции, и поэтому мы начнем с некоторых классических понятий анализа. Если читатель забыл некоторые понятия (комплексная плоскость, последовательность, голоморфная функция и т. д.), ему следует, не затрачивая излишних усилий, заглядывать время от времени в курс анализа. Математика представляет собой единое целое, и трудно изучать комбинаторные структуры без подходящей базы математики непрерывного.

## § 5. Производящие функции

Пусть  $a_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , — последовательность. Этой последовательности поставим в соответствие ряд по целым степеням  $z$ :

$$f^*(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (5.1)$$

Предположим, что всегда существует неотрицательное  $\alpha$ , для которого  $|a_n| < \alpha^n$ , и в этом случае всякой последовательности  $a_n$  однозначно соответствует ряд  $f^*(z)$  по целым степеням  $z$ , который является голоморфной функцией в области  $|z| < 1/\alpha$ .

Соответствие между  $a_n$  и  $f^*(z)$  в этом случае взаимно однозначно. Функция  $f^*(z)$  называется *производящей функцией* последовательности  $a_n$ . Последовательность  $a_n$  представляет собой функцию от  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Обозначим ее через  $f(n)$  и будем говорить, что между совокупностями  $f(n)$  и  $f^*(z)$  существует взаимно однозначное соответствие.

Вводятся также производящие функции другого типа, называемые *экспоненциальными производящими функциями*:

$$f^e(z) = a_0 + a_1 z + a_2 \frac{z^2}{2!} + \dots + a_n \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (5.2)$$

которыми в некоторых случаях пользоваться более удобно. Между  $f^e(z)$  и  $f(n)$  в области  $|z| < 1/\alpha$  также существует взаимно однозначное соответствие.

Производящие функции (5.1) и (5.2) допускают следующее обобщение:

$$\Phi^*(z) = a_0 \varphi_0(z) + a_1 \varphi_1(z) + \dots + a_n \varphi_n(z) + \dots \quad (5.3)$$

Нужно, чтобы соответствие  $a_n \leftrightarrow \varphi^*(z)$  было взаимно однозначно, что приводит к условию линейной независимости всех функций  $\varphi_n(z)$ .

Важен следующий частный случай:

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= 1, \quad \varphi_1(z) = z, \quad \varphi_2(z) = z(z-1), \dots \\ &\dots, \quad \varphi_n(z) = z(z-1)(z-n+1), \dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi^*(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z(z-1) + \dots \\ &\dots + a_n z(z-1)(z-n+1) + \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Дальше будут рассматриваться также производящие функции других типов.

Понятие производящей функции можно распространить на случай функций многих переменных. Последовательности  $a_{m,n}$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$ , т. е. функции  $f(m, n)$ , можно поставить в соответствие такую производящую функцию:

$$\begin{aligned} f^*(z_1, z_2) &= a_{00} + a_{10} z_1 + a_{01} z_2 + a_{20} z_1^2 + a_{11} z_1 z_2 + a_{02} z_2^2 + \dots \\ &\dots + a_{k0} z_1^k + a_{k-1,1} z_1^{k-1} z_2 + \dots + a_{1,k-1} z_1 z_2^{k-1} + a_{0k} z_2^k + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

или более общую:

$$\begin{aligned} \Phi^*(z_1, z_2) &= a_{00} \lambda_0(z_1) \mu_0(z_2) + a_{10} \lambda_1(z_1) \mu_0(z_2) + a_{01} \lambda_0(z_1) \mu_1(z_2) + \\ &+ a_{20} \lambda_2(z_1) \mu_0(z_2) + a_{11} \lambda_1(z_1) \mu_1(z_2) + a_{02} \lambda_0(z_1) \mu_2(z_2) + \dots \\ &\dots + a_{m,0} \lambda_m(z_1) \mu_0(z_2) + a_{m-1,1} \lambda_{m-1}(z_1) \mu_1(z_2) + \dots \\ &\dots + a_{1,n-1} \lambda_1(z_1) \mu_{n-1}(z_2) + a_{0,n} \lambda_0(z_1) \mu_n(z_2) + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Используется также симметрическая форма, получаемая из (5.6):

$$\begin{aligned} f^*(z_1, z_2) + f^*(z_2, z_1) &= 2a_{00} + (a_{10} + a_{01})(z_1 + z_2) + \\ &+ (a_{20} + a_{02})(z_1^2 + z_2^2) + 2a_{11}z_1z_2 + (a_{30} + a_{03})(z_1^3 + z_2^3) + \\ &+ (a_{21} + a_{12})(z_1 + z_2)z_1z_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

## § 6. Сведения о конечноразностных операторах

В исчислении конечных разностей вводится ряд основных операторов. Оператор можно рассматривать как символ, который ставится перед функцией для указания некоторого способа получения новой функции. Основными операторами, используемыми в теории конечных разностей, являются

$$Ef(x) = f(x + h), \quad h > 0; \quad (6.1)$$

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x), \quad h > 0; \quad (6.2)$$

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x); \quad (6.3)$$

$$kf(x) = kf(x), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (6.4)$$

В данной книге операторы  $E$  и  $\Delta$  будут рассматриваться только при  $h = 1$ , хотя в начале этого параграфа величина положительного числа  $h$  не фиксируется.

Если один оператор действует на некоторую функцию, а второй оператор — на результат действия первого, то можно образовать композицию этих операторов, записывая последующий оператор слева от предыдущего. Легко доказать, что порядок применения операторов  $E$ ,  $\Delta$ ,  $D$  и  $k$  не играет роли.

Например,

$$\begin{aligned} \Delta [Df(x)] &= \Delta \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} f(x + h) - \frac{d}{dx} f(x) = \\ &= \frac{d}{dx} [f(x + h) - f(x)] = D[\Delta f(x)]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Следовательно, можно записать

$$\Delta Df(x) = D \Delta f(x). \quad (6.6)$$

Если оператор действует  $n$  раз, то это обозначают  $E^n$ ,  $\Delta^n$ ,  $D^n$ ,  $k^n$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta \Delta f(x) = \Delta [f(x + h) - f(x)] = \\ &= f(x + 2h) - f(x + h) - f(x + h) + f(x) = \\ &= f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x), \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$E^3 f(x) = EEE f(x) = EEf(x + h) = Ef(x + 2h) = f(x + 3h). \quad (6.8)$$

Оператор с показателем 0 означает тождественный оператор 1, который будет отождествляться с числом  $k = 1$ ; например,

$$\Delta^0 f(x) = 1f(x) = f(x). \quad (6.9)$$

Операторы  $E$ ,  $\Delta$ ,  $D$  и  $k$  удовлетворяют следующим двум основным экспоненциальным законам:

$$D^m D^n f(x) = D^n D^m f(x) = D^{m+n} f(x), \quad m, n \in \mathbb{N}; \quad (6.10)$$

$$(D^m)^n f(x) = (D^n)^m f(x) = D^{mn} f(x), \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (6.11)$$

Сумма (разность) двух операторов, действующих на некоторую функцию, определяется как сумма (разность) функций, получающихся при применении каждого оператора к этой функции; например,

$$(E + D)f(x) = Ef(x) + Df(x) = f(x + h) + f'(x). \quad (6.12)$$

Опишем алгебру операторов  $E$ ,  $\Delta$ ,  $D$ ,  $k$ , 1. Мы будем говорить, что два оператора равны, если в применении к одной и той же функции они дают один и тот же результат, например

$$\Delta = E - 1. \quad (6.13)$$

Рассмотрим множество конечноразностных операторов  $\mathbf{O} = \{E, \Delta, D, k, 1\}$ . Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  принадлежат  $\mathbf{O}$ , то

$$A + (B + C) = (A + B) + C — ассоциативность по сложению, \quad (6.14)$$

$$A + B = B + A — коммутативность по сложению, \quad (6.15)$$

$$A(BC) = (AB)C — ассоциативность по умножению, \quad (6.16)$$

$$AB = BA — коммутативность по умножению, \quad (6.17)$$

$$A(B + C) = AB + AC — дистрибутивность слева, \quad (6.18)$$

$$(B + C)A = BA + CA — дистрибутивность справа. \quad (6.19)$$

Таким образом, над операторами  $E$ ,  $\Delta$ ,  $D$ ,  $k$ , 1 можно производить действия по законам алгебры действительных чисел с тем исключением, что отсутствуют операторы, обратные к  $D$  и  $\Delta$  по умножению.

Например,

$$E^n Df(x) = E^n f'(x) = f'(x + nh) = Df(x + nh) = DE^n f(x), \quad (6.20)$$

$$(D - \Delta)(D - \Delta)f(x) = (D^2 - 2D\Delta + \Delta^2)f(x) = \\ = f''(x) - 2f'(x + h) - 2f'(x) + f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x). \quad (6.21)$$

Операторы  $E$ ,  $\Delta$ ,  $D$ ,  $k$ , 1 удовлетворяют следующим основным условиям:

$$Ef(x) = f(x + h) =$$

$$= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots = \\ = \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots + \frac{h^n D^n}{n!} + \dots\right) f(x) = e^{hD} f(x). \quad (6.22)$$

Отсюда следует, что можно принять

$$E = e^{hD}. \quad (6.23)$$

Имеем также

$$1 + \Delta = e^{\Delta} \quad (6.24)$$

или

$$\Delta = e^{\Delta} - 1. \quad (6.25)$$

Иногда используется оператор  $(xD)$ , определяемый следующим образом:

$$(xD) f(x) = xf'(x). \quad (6.26)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (xD)^2 f(x) &= (xD)[(xD)f(x)] = (xD)[xf'(x)] = xf'(x) + x^2 f''(x), \\ (xD)^3 f(x) &= (xD)[(xD)^2 f(x)] = (xD)[xf'(x) + x^2 f''(x)] = \\ &= x[f'(x) + xf''(x) + 2x^2 f''(x) + x^3 f'''(x)] = \\ &= xf'(x) + 3x^2 f''(x) + x^3 f'''(x) \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.27)$$

Не следует смешивать

$$(xD)^k f(x) \text{ с } x^k D^k f(x) \quad (6.28)$$

при  $k > 1$ .

Оператор  $D^n$ , примененный к произведению двух функций  $f(x)g(x)$ , дает знаменитую формулу Лейбница:

$$D^n[f(x)g(x)] = \sum_{r=0}^n C_n^r (D^{n-r}f)(D^r g) = \sum_{r=0}^n C_n^r f^{(n-r)}(x) g^{(r)}(x). \quad (6.29)$$

При выводе формулы Лейбница часто используется символическое разложение, очевидное при рассмотрении второго члена (6.29):

$$(f + g)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r f^{n-r} g^r. \quad (6.30)$$

Достаточно затем заменить  $f^k$  на  $f^k(x)$  и  $g^l$  на  $g^l(x)$ . Этот метод символического разложения получит дальнейшее развитие в последующем изложении.

С точки зрения дальнейших приложений интересно уточнить некоторые результаты. Пусть

$$u_n = n^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.31)$$

Имеем

$$E u_n = E n^k = (n+1)^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (6.32)$$

$$E^r u_n = E^r n^k = (n+r)^k, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (6.33)$$

Можно положить

$$E^r 0^k = r^k. \quad (6.34)$$

Используя оператор  $\Delta$ , имеем

$$\begin{aligned}\Delta u_n &= \Delta n^k = (n+1)^k - n^k, \\ \Delta^2 u_n &= \Delta^2 n^k = \Delta [(n+1)^k - n^k] = (n+2)^k - 2(n+1)^k + n^k, \\ \Delta^3 u_n &= \Delta^3 n^k = \Delta [(n+2)^k - 2(n+1)^k + n^k] = \\ &= (n+3)^k - 3(n+2)^k + 3(n+1)^k - n^k, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\end{aligned}\tag{6.35}$$

Условимся вместо  $n^{k+l}$  писать  $(n+i)^k$  в биномиальном разложении, что символически обозначим

$$n^{k+l} \doteq (n+i)^k \quad (\text{заменить } n^{k+l} \text{ на } (n+i)^k);\tag{6.36}$$

тогда

$$\begin{aligned}\Delta^r n^k &= n^k (n-1)^r, \quad n^{k+l} \doteq (n+i)^k, \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, r.\end{aligned}\tag{6.37}$$

Выпишем теперь

$$\begin{aligned}\Delta 0^k &= 1^k - 0^k, \\ \Delta^2 0^k &= \Delta (1^k - 0^k) = 2^k - 2 \cdot 1^k + 0^k, \\ \Delta^3 0^k &= \Delta (2^k - 2 \cdot 1^k + 0^k) = 3^k - 3 \cdot 2^k + 3 \cdot 1^k - 0^k, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\end{aligned}\tag{6.38}$$

и полагаем

$$\Delta^r 0^k = 0^k (0-1)^r, \quad 0^{k+l} \doteq i^k.\tag{6.39}$$

Без труда можно получить рекуррентную формулу:

$$\Delta^r 0^{k+1} = r \Delta^r 0^k + r \Delta^{r-1} 0^k, \quad r \leq k.\tag{6.40}$$

Таблица 6.1 дает числа  $\Delta^r 0^n$  для  $n = 1, 2, \dots, 8$  и  $r = 1, 2, \dots, 8$ ,  $r \leq k$ .

Укажем еще один важный результат, касающийся  $E^r 0^n$  и  $\Delta^r 0^n$ . Имеем

$$\begin{aligned}\Delta^r 0^n &= (E-1)^r 0^n = \sum_{k=0}^r C_r^k (-1)^k E^{r-k} 0^n = (\text{разлагая } (E-1)^r) \\ &= \sum_{k=0}^r C_r^k (-1)^k (r-k)^n \quad (\text{в силу (6.34)}).\end{aligned}\tag{6.41}$$

Это — общая формула для чисел  $\Delta^r 0^n$ .

В следующем параграфе мы изучим вопрос о том, как использовать некоторые определенные выше операторы при вычислении различных производящих функций.

Таблица чисел  $\Delta^r 0^n$ 

$\Delta^r 0^n$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$
$\Delta^r 0^1$	1							
$\Delta^r 0^2$	1	2						
$\Delta^r 0^3$	1	6	6					
$\Delta^r 0^4$	1	14	36	24				
$\Delta^r 0^5$	1	30	150	240	120			
$\Delta^r 0^6$	1	62	540	1 560	1 800	720		
$\Delta^r 0^7$	1	126	1806	8 400	16 800	15 120	5 040	
$\Delta^r 0^8$	1	254	5796	40 824	126 000	191 520	141 120	40 320

## УПРАЖНЕНИЯ

- 6А. Пусть  $f(x) = x^2 + 1$ ; вычислить при  $h = 1$ : а)  $E^n f(x)$ ,  $n = 1, 2, 3$ ;  
б)  $\Delta^n f(x)$ ,  $n = 1, 2, 3$ .
- 6Б. Пусть  $f(x) = x^3$ ; вычислить при  $h = 1$ : а)  $\Delta E f(x)$ ; б)  $\Delta^2 D f(x)$ ;  
в)  $E^2 \Delta D f(x)$ .
- 6В. Пусть  $f(x) = 1/x$ ; вычислить  $\Delta^n f(x)$ .
- 6Г. Пусть  $f(x) = \sin x$ ; вычислить  $(xD)^2 f(x)$ .
- 6Д. Доказать тождество

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 \equiv \frac{n}{30} (6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1).$$

6Е. Просуммировать

$$(3^2 + 8) + (5^2 + 11) + (7^2 + 14) + (9^2 + 17) + \dots$$

## § 7. z-преобразование

Производящую функцию

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (7.1)$$

часто называют «преобразованием в z», или *z-преобразованием*. Некоторые авторы предпочитают ей следующую функцию:

$$\bar{f}^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad (7.2)$$

называемую *отрицательным z-преобразованием*. Кроме того, как мы видели в § 5, используется также функция

$$f^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}, \quad (7.3)$$

называемая *экспоненциальным z-преобразованием*.

Эти функциональные преобразования применяются самым различным образом во многих областях: комбинаторике, теории вероятностей, математической статистике, электронике (импульсные режимы), исчислении конечных разностей, дискретных физических теориях и т. д. Хотя в комбинаторике эти преобразования используются весьма специфически, нам кажется уместным напомнить здесь несколько свойств этого важного метода.

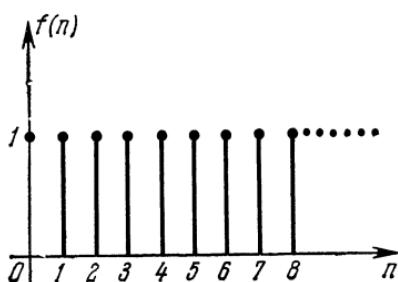


Рис. 6.



Рис. 7.

Для удобства последовательность  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , будем обозначать через  $f(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Таким образом, при *z*-преобразовании  $f(n)$  будет соответствовать  $f^*(z)$  и обратно. Подобными обозначениями будем пользоваться и для других преобразований. В настоящем параграфе будет рассматриваться только преобразование (7.1). Прежде чем перечислить некоторые его свойства, приведем несколько примеров.

Пример 1 (рис. 6). Пусть

$$f(n) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

Тогда

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \quad (7.5)$$

Итак, *z*-преобразованием для (7.4) будет  $1/(1 - z)$ .

Пример 2 (рис. 7). Пусть

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, 3, 4, \\ 0, & n = 5, 6, \dots \end{cases} \quad (7.6)$$

Тогда

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^4 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=5}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^5 \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1 - z^5}{1 - z}. \quad (7.7)$$

Пример 3 (рис. 8). Пусть

$$f(n) = kn, \quad k \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.8)$$

Тогда

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} knz^n = kz \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = kz \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{kz}{(1-z)^2}. \quad (7.9)$$

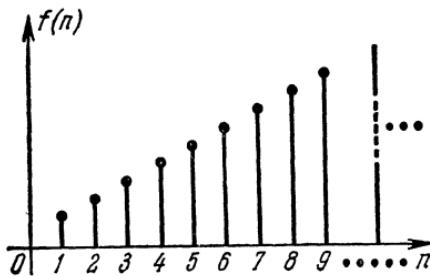


Рис. 8.

### Основные свойства

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) \Leftrightarrow f^*(z) = f_1^*(z) + f_2^*(z), \quad (7.10)$$

$$F(n) = kf(n), \quad k \in \mathbb{R}, \Leftrightarrow F^*(z) = kf^*(z), \quad (7.11)$$

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ f(n-1), & n = 1, 2, \dots \end{cases} \Leftrightarrow F^*(z) = zf^*(z), \quad (7.12)$$

$$F(n) = f(n+1) \Leftrightarrow F^*(z) = \frac{f^*(z) - f(0)}{z}, \quad (7.13)$$

$$F(n) = f(n+k) \Leftrightarrow F^*(z) = z^{-k}f^*(z) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r)z^{r-k}, \quad (7.14)$$

$$F(n) = \alpha^n f(n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \Leftrightarrow F^*(z) = f^*(\alpha z), \quad (7.15)$$

$$F(n) = nf(n) \Leftrightarrow F^*(z) = z \frac{d}{dz} f^*(z), \quad (7.16)$$

$$F(n) = \sum_{i=0}^n f(i) \Leftrightarrow F^*(z) = \frac{f^*(z)}{1-z}, \quad (7.17)$$

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \dots, k-1, \\ f(n-k), & n = k, k+1, \dots \end{cases} \Leftrightarrow F^*(z) = z^k f^*(z), \quad (7.18)$$

$$F(n) = \sum_{r=0}^n f(r)g(n-r) \Leftrightarrow F^*(z) = f^*(z)g^*(z), \quad (7.19)$$

$$F(n) = f(n+1) - f(n) \Leftrightarrow F^*(z) = \frac{(1-z)f^*(z) - f(0)}{z}, \quad (7.20)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z)f^*(z). \quad (7.21)$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  существует, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z) f^*(z)^{-1}, \quad (7.22)$$

$$f^*(0) = f(0). \quad (7.23)$$

### Таблица основных преобразований

$$f(n) \qquad \qquad \qquad f^*(z)$$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n=1, 2, \dots, \end{cases} \qquad f^*(z) = 1, \quad (7.24)$$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n=a (a \in \mathbb{N}), \\ 0, & n \neq a, \end{cases} \qquad f^*(z) = z^a, \quad (7.25)$$

$$f(n) = 1, \quad n=0, 1, 2, \dots, \qquad f^*(z) = \frac{1}{1-z}, \quad (7.26)$$

$$f(n) = a^n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \qquad f^*(z) = \frac{1}{1-az}, \quad (7.27)$$

$$f(n) = na^n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \qquad f^*(z) = \frac{az}{(1-az)^2}, \quad (7.28)$$

$$f(n) = an, \quad n=0, 1, 2, \dots, \qquad f^*(z) = \frac{az}{(1-z)^2}, \quad (7.29)$$

$$f(n) = C_{n+p-1}^n a^n, \quad n=0, 1, 2, \dots; p=1, 2, 3, \dots, \qquad f^*(z) = \frac{1}{(1-az)^p}, \quad (7.30)$$

$$f(n) = C_{n+p-2}^{n-1} a^n, \quad n=0, 1, 2, \dots; p=0, 1, 2, \dots, \qquad f^*(z) = \frac{az}{(1-az)^p}, \quad (7.31)$$

$$f(n) = n^2, \quad n=0, 1, 2, \dots, \qquad f^*(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}, \quad (7.32)$$

$$f(n) = n^k, \quad n=0, 1, 2, \dots, \qquad f^*(z) = z \frac{d}{dz} g^*(z),$$

где  $g(n) = n^{k-1}, \quad (7.33)$

$$f(n) = n^2 a^n, \qquad f^*(z) = \frac{az(1+az)}{(1-az)^3}, \quad (7.34)$$

$$f(n) = n^3 a^n, \qquad f^*(z) = \frac{az(a^2 z^2 + 4az + 1)}{(1-az)^4},$$

(7.35)

<sup>1)</sup> Если все полюсы  $f^*(z)$  принадлежат области  $|z| \geq 1$ .

$$f(n) = n^k a^n, \quad f^*(z) = z \frac{d}{dz} g^*(az),$$

где  $g(n) = n^{k-1}$ , (7.36)

$$f(n) = \begin{cases} C_n^k a^n \beta^{n-k}, & n = 0, 1, \dots, k, \\ 0 & n > k, \end{cases} \quad f^*(z) = (\beta + az)^k, \quad (7.37)$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{a^n}{n}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad f^*(z) = -\ln(1 - az), \quad (7.38)$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ четно}, \\ \frac{a^n}{n}, & n \text{ нечетно}, \end{cases} \quad f^*(z) = \operatorname{Arth} az \\ = \frac{1}{2} \ln \frac{1+az}{1-az}, \quad (7.39)$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ или } n \text{ нечетно}, \\ \frac{a^n}{n}, & n = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad f^*(z) = -\frac{1}{2} \ln(1 - a^2 z^2),$$

(7.40)

$$f(n) = \frac{a^n}{n!}, \quad f^*(z) = e^{az}, \quad (7.41)$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ четно}, \\ \frac{a^n}{n!}, & n \text{ нечетно}, \end{cases} \quad f^*(z) = \sinh az, \quad (7.42)$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно}, \\ \frac{a^n}{n!}, & n \text{ четно}, \end{cases} \quad f^*(z) = \cosh az, \quad (7.43)$$

$$f(n) = \frac{(\ln a)^n}{n!}, \quad f^*(z) = a^z, \quad a > 0, \quad (7.44)$$

$$f(n) = \sin an, \quad f^*(z) = \frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1},$$

(7.45)

$$f(n) = \cos an, \quad f^*(z) = \frac{1 - z \cos a}{z^2 - 2z \cos a + 1},$$

(7.46)

$$f(n) = a^{-\beta n} \sin an, \quad f^*(z) = \frac{z \sin a}{a^{-\beta} z^2 - 2z \cos a + a^\beta},$$

(7.47)

$$f(n) = a^{-\beta n} \cos an, \quad f^*(z) = \frac{a^\beta - z \cos a}{a^{-\beta} z^2 - 2z \cos a + a^\beta}.$$

(7.48)

Формулы (7.45) — (7.48) останутся справедливыми, если заменить тригонометрические функции соответствующими гиперболическими.

**Обратное преобразование.** Коэффициенты разложения  $f^*(z)$  в ряд Тейлора образуют исходную последовательность  $f(n)$ .

Теория интегрирования функций комплексной переменной на плоскости  $z = x + iy$  с помощью вычетов дает возможность получения коэффициентов этого ряда.

Если  $f^*(z)$  — рациональная дробь, каждый из полюсов которой по модулю больше или равен 1, то можно получить удобные формулы. Пусть

$$f^*(z) = \frac{u(z)}{v(z)} \quad (7.49)$$

— рациональная дробь, причем полиномы  $u(z)$  и  $v(z)$  не имеют общих корней. Предположим, что степень полинома  $u(z)$  меньше степени полинома  $v(z)$  (в противном случае достаточно заменить  $z$  на  $1/z$ ) и что корни  $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, \dots, 1/\alpha_L$  полинома  $v(z)$  по модулю больше или равны 1, т. е. что  $|\alpha_i| \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ . Известно, что такую рациональную дробь можно разложить на простые дроби, а именно

$$f^*(z) = \sum_{i=1}^L \sum_{p=1}^{P_i} \frac{A_{pi}}{(1 - \alpha_i z)^p}, \quad (7.50)$$

где  $P_i$  — кратность корня  $1/\alpha_i$ .

Учитывая (7.10), (7.11) и (7.30), из (7.50) получаем обратное преобразование:

$$f(n) = \sum_{i=1}^L \sum_{p=1}^{P_i} C_{n+p-1}^n A_{pi} \alpha_i^n = \sum_{i=1}^L B_i(n) \alpha_i^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.51)$$

где

$$B_i(n) = \sum_{p=1}^{P_i} C_{n+p-1}^n A_{pi}. \quad (7.52)$$

Представить коэффициенты  $B_i(n)$  в виде функции от полиномов  $u(z)$  и  $v(z)$ , вообще говоря, сложно; однако отметим, что если  $\alpha_1$  (например) — простой корень  $v(z)$ , т. е.  $P_1 = 1$ , то

$$B_1(n) = C_n^n A_{11} = A_{11}. \quad (7.53)$$

Далее, если положим

$$v(z) = (1 - \alpha_1 z) w(z), \quad (7.54)$$

то, сравнивая (7.49) и (7.50), имеем

$$B_1(n) = A_{11} = \frac{u(1/\alpha_1)}{w(1/\alpha_1)} = -\alpha_1 \frac{u(1/\alpha_1)}{v'(1/\alpha_1)} = \lim_{z \rightarrow 1/\alpha_1} (1 - \alpha_1 z) f^*(z), \quad (7.55)$$

где  $v'(z)$  обозначает производную от  $v(z)$  по  $z$ .

**Замечание.**  $z$ -преобразование приводит, в сущности, к некоторому «символическому исчислению» или «операционному исчислению», аналогичному тому, которое получается с помощью

преобразования Лапласа (или Карсона — Лапласа, если угодно) для функций, непрерывных на отрезках, хотя  $z$ -преобразование и применяется к последовательностям. Как уже отмечалось,  $z$ -преобразование — это не что иное, как особое представление производящей функции, в наибольшей степени используемое в теории вероятностей. Как  $z$ -преобразование, так и само преобразование Лапласа восходят к Эйлеру и Лапласу.

Некоторые свойства преобразования Лапласа:

$$f_L(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, \quad t \in \mathbf{R}^+, \operatorname{Re} p \geq c_0 > 0, \quad (7.56)$$

легко переносятся на  $z$ -преобразование:

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n \quad (7.57)$$

при замене  $p$  на  $1 - z$ .

Заметим также, что преобразованию Карсона — Лапласа

$$f_{CL}(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, \quad t \in \mathbf{R}^+, \operatorname{Re} p \geq c_0 > 0, \quad (7.58)$$

можно сопоставить видоизмененное  $z$ -преобразование

$$f^*(z) = (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n, \quad (7.59)$$

при этом некоторые формулы упрощаются.

**Пример применения  $z$ -преобразования к уравнениям в конечных разностях.** Рассмотрим уравнение в конечных разностях

$$f(n+2) - f(n+1) - f(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.60)$$

с

$$f(0) = a_0 \quad \text{и} \quad f(1) = a_1. \quad (7.61)$$

Применяя (7.13) к  $f(n+1)$ , а затем к  $f(n+2)$ , имеем

$$\frac{f^*(z) - f(0) - zf(1)}{z^2} - \frac{f^*(z) - f(0)}{z} - f^*(z) = 0 \quad (7.62)$$

или

$$\frac{f^*(z) - a_0 - a_1 z}{z^2} - \frac{f^*(z) - a_0}{z} - f^*(z) = 0, \quad (7.63)$$

откуда

$$f^*(z) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0) z}{1 - z - z^2}. \quad (7.64)$$

Представляя  $1 - z - z^2$  в виде

$$1 - z - z^2 = \left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} z\right) \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} z\right), \quad (7.65)$$

имеем

$$f^*(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{a_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}a_0}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{a_1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}a_0}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z} \right). \quad (7.66)$$

Используя (7.27), получаем

$$f(n) = \frac{a_1 - a_0}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + \\ + \frac{a_0}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]. \quad (7.67)$$

**Другие важные соотношения.** Пусть

$$g^*(z) = \frac{1}{f^*(z)}. \quad (7.68)$$

Тогда

откуда

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{1}{f(0)}, \\ g(1) &= -\frac{f(1)}{[f(0)]^2}, \\ g(2) &= \frac{[f(1)]^2}{[f(0)]^3} - \frac{f(2)}{[f(0)]^2} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (7.70)$$

Вообще, исходя из (7.19), имеем

$$F(n) = \sum_{r=0}^n f(r) g(n-r) \Leftrightarrow F^*(z) = f^*(z) g^*(z). \quad (7.71)$$

Если рассмотрим три последовательности, связанные между собой соотношением (7.71), то задание двух из этих последовательностей определяет третью. По внутреннему закону композиции,

определеному формулой (7.71), можно указать некоторый обратный внутренний закон. Относительно первого последовательности образуют группу \*), а относительно второго не образуют группы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} f^*(z) &= \sum_{r=1}^{\infty} r f(r) z^{r-1}, \\ \frac{d^2}{dz^2} f^*(z) &= \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) f(r) z^{r-2}, \\ \dots &\dots \\ \frac{d^k}{dz^k} f^*(z) &= \sum_{r=k}^{\infty} r(r-1)\dots(r-k+1) f(r) z^{r-k} \end{aligned} \quad (7.72)$$

или

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} f^*(z) &= \sum_{r=1}^{\infty} r f(r) z^r, \\ z^2 \frac{d^2}{dz^2} f^*(z) &= \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) f(r) z^r, \\ \dots &\dots \\ z^k \frac{d^k}{dz^k} k f^*(z) &= \sum_{r=k}^{\infty} r(r-1)\dots(r-k+1) f(r) z^r = \sum_{r=k}^{\infty} A_r^k f(r) z^r. \end{aligned} \quad (7.73)$$

**Экспоненциальное  $z$ -преобразование.** Можно показать, что это преобразование обладает свойствами, подобными свойствам, которые были установлены для обычного  $z$ -преобразования. Вот некоторые из них:

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) \Leftrightarrow f^e(z) = f_1^e(z) + f_2^e(z), \quad (7.74)$$

$$F(n) = k f(n), \quad k \in \mathbb{R}, \Leftrightarrow F^e(z) = k f^e(z), \quad (7.75)$$

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n=0, \\ f(n-1), & n=1, 2, \dots, \end{cases} \Leftrightarrow F^e(z) = \int_0^z f^e(z) dz, \quad (7.76)$$

$$F(n) = f(n+1), \quad n=0, 1, 2, \dots, \Leftrightarrow F^e(z) = \frac{d}{dz} f^e(z), \quad (7.77)$$

\*)  $f_0 \neq 0$ . (Прим. ред.)

$$F(n) = n \mathfrak{f}(n) \Leftrightarrow F^e(z) = z \frac{d}{dz} \mathfrak{f}^e(z), \quad (7.78)$$

$$F(n) = a^n \mathfrak{f}(n) \Leftrightarrow F^e(z) = \mathfrak{f}^e(az), \quad (7.79)$$

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, \dots, k-1, \\ \mathfrak{f}(n-k), & n = k, k+1, \dots, \end{cases} \Leftrightarrow F^e(z) = \underbrace{\int_0^z \int_0^z \dots \int_0^z}_{k \text{ раз}} \mathfrak{f}^e(z) dz, \quad (7.80)$$

$$F(n) = \sum_{r=0}^n \mathfrak{f}(r) g(n-r) \Leftrightarrow F^e(z) = \mathfrak{f}^e(z) g^e(z), \quad (7.81)$$

$$F(n) = \mathfrak{f}(n+1) - \mathfrak{f}(n) \Leftrightarrow F^e(z) = \frac{d}{dz} \mathfrak{f}^e(z) - \mathfrak{f}^e(z). \quad (7.82)$$

**Основные свойства преобразований  $\mathfrak{f}^*(z)$  и  $\mathfrak{f}^e(z)$ .** Найдем  $z$ -преобразование для

$$F(n) = \sum_{r=0}^n \mathfrak{f}(r). \quad (7.83)$$

Из (7.83) следует, что

$$\mathfrak{f}(n) = F(n) - F(n-1). \quad (7.84)$$

Если  $F^*(z)$  —  $z$ -преобразование для  $F(n)$ , а  $\mathfrak{f}^*(z)$  —  $z$ -преобразование для  $\mathfrak{f}(n)$ , то

$$\mathfrak{f}^*(z) = F^*(z) - zF^*(z). \quad (7.85)$$

Итак,

$$F^*(z) = \frac{\mathfrak{f}^*(z)}{1-z}. \quad (7.86)$$

Этот результат можно обобщить. Положим

$$F_1(n) = \sum_{r=0}^n \mathfrak{f}(r),$$

$$F_2(n) = \sum_{r=0}^n F_1(r), \quad (7.87)$$

• • • • • •

$$F_k(n) = \sum_{r=0}^n F_{k-1}(r).$$

Легко получить

$$F_k^*(z) = \frac{\mathfrak{f}^*(z)}{(1-z)^k}. \quad (7.88)$$

Это как раз  $z$ -преобразование для последовательности, получаемой суммированием порядка  $k$  из  $f(n)$ ; эту последовательность можно получить индукцией:

$$F_1(n) = f(n) + f(n-1) + \dots + f(0),$$

$$F_2(n) = \sum_{r=0}^n (f(r) + f(r-1) + \dots + f(0)) = \\ = f(n) + 2f(n-1) + 3f(n-2) + \dots + (n+1)f(0),$$

$$F_3(n) = \sum_{r=0}^n [f(r) + 2f(r-1) + 3f(r-2) + \dots + (r+1)f(0)] = \\ = f(n) + 3f(n-1) + 6f(n-2) + \dots + \frac{(n+2)(n+1)}{2} f(0),$$

$$F_k(n) = f(n) + kf(n-1) + \dots + C_{i+k-1}^{k-1}f(n-i) + \dots + C_{n+k-1}^{k-1}f(0). \quad (7.89)$$

Оператор  $D = d/dz$ , примененный к функции  $f^*(z)$  ( $z$ -преобразованию для  $f(n)$ ), дает (см. (7.72) и (7.73))

$$Df^*(z) = \sum_{r=1}^{\infty} rf(r) z^{r-1},$$

$$D^2 f^*(z) = \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) f(r) z^{r-2}, \quad (7.90)$$

$$D^k f^*(z) = \sum_{r=k}^{\infty} A_r^k f(r) z^{r-k}.$$

Имеет место другая основная формула:

$$(zD)^k f^*(z) = \sum_{r=0}^{\infty} r^k f(r) z^r. \quad (7.91)$$

Рассматривают также оператор  $P(zD)$  (полином относительно  $zD$ ):

$$P(zD) f^*(z) = \sum_{r=0}^{\infty} P(r) f(r) z^r. \quad (7.92)$$

Приведем теперь несколько основных свойств экспоненциального  $z$ -преобразования.

По определению (см. (7.33))

$$\begin{aligned} f^e(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{z^n}{n!} = \\ &= f(0) + zf(1) + \frac{z^2}{2!} f(2) + \dots + \frac{z^k}{k!} f(k) + \dots \quad (7.93) \end{aligned}$$

Полагаем символически

$$f^k \doteq f(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.94)$$

где  $\doteq$  означает, что член справа заменяется на члены слева. Тогда разложение (7.93) запишется символически так (полагаем  $f^0 = 1$ ):

$$f^e(z) = 1 + zf + \frac{z^2}{2!} f^2 + \dots + \frac{z^k}{k!} f^k + \dots = e^{zf}. \quad (7.95)$$

Исходя из (7.95), можно построить символическое исчисление, приводящее к интересным упрощениям.

Например, если

$$f^e(z) = e^{zf}, \quad g^e(z) = e^{zg}, \quad (7.96)$$

$$\begin{aligned} F^e(z) &= f^e(z) g^e(z) = e^{z(f+g)} = \\ &= 1 + z(f+g) + \frac{z^2}{2!} (f+g)^2 + \dots + \frac{z^k}{k!} (f+g)^k + \dots, \quad (7.97) \end{aligned}$$

то, полагая

$$f^k \doteq f(k), \quad g^k \doteq g(k), \quad 1 \doteq f(0)g(0),$$

имеем

$$(f+g)^k = f^k g^0 + kf^{k-1} g^1 + \dots + C_k^r f^{k-r} g^r + \dots + f^0 g^k \quad (7.98)$$

и

$$\begin{aligned} F(k) &= f(k)g(0) + kf(k-1)g(1) + \frac{k(k-1)}{2} f(k-2)g(2) + \dots \\ &\quad \dots + C_k^r f(k-r)g(r) + \dots + f(0)g(k). \quad (7.99) \end{aligned}$$

Можно определить произведение экспоненциальных разложений

$$F(n) = \sum_{r=0}^n C_n^r f(n-r) g(r) = \sum_{r=0}^n C_n^r f(r) g(n-r). \quad (7.100)$$

Это символическое разложение обобщается на любое число функций:

$$F^e(z) = \prod_{i=1}^m f_i^e(z) = \exp\left(z \sum_{i=1}^m f_i(z)\right)^1, \quad (7.101)$$

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_m)^k = \sum \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_m!} f_1^{k_1} f_2^{k_2} \dots f_m^{k_m}, \quad (7.102)$$

<sup>1)</sup> Мы не будем различать символы  $e^x$  и  $\exp(x)$ .

где суммирование производится по всем целым неотрицательным  $k_1, k_2, \dots, k_m$  таким, что  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k$ .

Переходя к несимволическому соотношению, получаем

$$F(n) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} f_1(k_1) f_2(k_2) \dots f_m(k_m). \quad (7.103)$$

Это символическое экспоненциальное исчисление может быть использовано для вычисления по последовательности  $f(n)$  такой последовательности  $g(n)$ , что

$$f^e(z) g^e(z) = 1. \quad (7.104)$$

Чтобы получить  $g(n)$ , исходя из (7.104), можно, очевидно, воспользоваться экспоненциальным  $z$ -преобразованием, отыскивая последовательность, соответствующую  $1/f^e(z)$ , но можно также использовать символическое разложение:

$$(f + g)^k = f^k \cdot g^0 + kf^{k-1}g^1 + \frac{k(k-1)}{2}f^{k-2}g^2 + \dots \\ \dots + C_k^r f^{k-r}g^r + \dots + f^0g^k = 0, \quad k > 1, \quad (7.105)$$

добавляя условие

$$f^0g^0 = 1. \quad (7.106)$$

Это дает

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{1}{f(0)}, \\ g(1) &= -\frac{f(1)}{[f(0)]^2}, \\ g(2) &= -\frac{f(2)}{[f(0)]^2} + 2 \frac{[f(1)]^2}{[f(0)]^3}, \\ g(3) &= -\frac{f(3)}{[f(0)]^2} + 6 \frac{f(2)f(1)}{[f(0)]^3} - 6 \frac{[f(1)]^3}{[f(0)]^4}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.107)$$

## УПРАЖНЕНИЯ

**7А.** Найти  $z$ -преобразование следующих функций, где  $n = 0, 1, \dots$

a)  $f(n) = n + 1$ ; б)  $f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{1}{n^2}, & n > 0; \end{cases}$  в)  $f(n) = -\frac{n+1}{n!}$ .

**7Б.** Указать функцию  $f(n)$ , соответствующую функции  $f^*(z)$ : а)  $f^*(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ ; б)  $f^*(z) = (1+z)^3$ ; в)  $f^*(z) = \ln \frac{1}{1+z}$ .

**7В.** Используя  $z$ -преобразование, решить следующие уравнения в конечных разностях: а)  $f(n+1) - 3f(n) = 2$ , где  $f(0) = 1$ ; б)  $f(n+2) - f(n) = n$ , где  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 2$ ; в)  $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0$ , где  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

**7Г.** Следующее конечноразностное уравнение порождает последовательность  $f(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , называемую «последовательностью Фибоначчи»:

$$f(n+2) - f(n+1) - f(n) = 0, \quad f(0) = 0, f(1) = 1.$$

Полагаем

$$\Phi(n) = f(2n), \quad \Psi(n) = f(2n+1).$$

а) Найти  $z$ -преобразования  $\Phi(n)$  и  $\Psi(n)$ . б) Указать соотношение между  $\Phi^*(z)$  и  $\Psi^*(z)$ . в) Выписать в явном виде последовательности  $f(n)$ ,  $\Phi(n)$  и  $\Psi(n)$ .

7Д. Получить экспоненциальное  $z$ -преобразование следующих функций  $f(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ : а)  $f(n) = n!$ , б)  $f(n) = 1$ , в)  $f(n) = n$ .

7Е. Пусть

$$f(n) = \sum_{j=0}^n C_{n+j}^{2j}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{и} \quad g(n) = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{2j+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

а) Показать, что

$$f(n+1) = f(n) + g(n+1), \quad g(n+1) = f(n) + g(n),$$

учитывая, что  $f(0) = 1$  и  $g(0) = 0$ .

б) Показать, что для функций  $f^*(z)$  и  $g^*(z)$  выполняются соотношения:

$$f^*(z) - 1 = zf^*(z) + g^*(z), \quad g^*(z) = zf^*(z) + zg^*(z).$$

в) Показать, что

$$f^*(z) = \frac{1-z}{\sqrt{(1-z)^2 - z}} \quad \text{и} \quad g^*(z) = \frac{z}{\sqrt{(1-z)^2 - z}}.$$

7Ж. Числа Бернулли. Рассмотрим последовательность  $B(n)$ :

$$B^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \frac{z^n}{n!} e^{Bz},$$

$$B^n \doteq B(n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad B^0 = B(0) = 1,$$

где

$$B^e(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты в правой и левой частях равенства

$$e^{Bz} = \frac{z}{e^z - 1},$$

получаем соотношение

$$(B+1)^n - B(n) = \delta_{n1},$$

где  $B^n \doteq B(n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $B^0 = B(0) = 1$ ,

$$\delta_{n1} = 0, \quad n \neq 1, \quad \delta_{n1} = 1, \quad n = 1.$$

Исходя из этого соотношения, вычислить последовательность  $B(n)$ , которая известна под названием «числа Бернулли». Показать, что при  $n > 2$  все нечетные числа Бернулли равны нулю.

## § 8. Применение производящей функции. Энумераторы и денумераторы сочетаний

Рассмотрим некоторое множество объектов  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ; этому множеству сопоставим последовательность  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) так, что  $a_i$  соответствует  $A_i$ . Образуем производящую функцию

$$e^*(z) = (1 + a_1 z)(1 + a_2 z) \dots (1 + a_n z). \quad (8.1)$$

Осуществим разложение (8.1):

$$e^*(z) = 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)z + (a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n)z^2 + \\ + (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n)z^3 + \dots + a_1a_2a_3 \dots a_n z^n. \quad (8.2)$$

## Полагаем

$$\begin{aligned}
 E_0 &= 1, \\
 E_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\
 E_2 &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n, \\
 E_3 &= a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n, \\
 &\dots \\
 E_r &= a_1 a_2 a_3 \dots a_n.
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Коэффициенты  $E_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , дают перечисление неупорядоченных  $r$ -выборок без повторения, или сочетаний без повторения из  $n$  объектов  $A_i$  по  $r$ , если заменить  $a_i$  на  $A_i$ . Производящую функцию вида (8.1) назовем энумератором. Положим в (8.1)

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1. \quad (8.4)$$

Тогда

$$d_n^*(z) = (1+z)^n = 1 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + \dots + C_n^n z^n. \quad (8.5)$$

Если положим теперь

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = C_n^1, \quad \alpha_2 = C_n^2, \quad \dots, \quad \alpha_n = C_n^n, \quad (8.6)$$

то коэффициенты  $\alpha_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , дают пересчет неупорядоченных  $r$ -выборок без повторения, или сочетаний без повторения из  $n$  объектов  $A_i$  по  $r$ . Производящую функцию вида (8.5) назовем *денумератором*.

Рассмотрим сначала, как используются некоторые денумераторы, а к энумераторам вернемся несколько позднее.

Подставим в (8.5)  $z = 1$ . Получаем

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (8.7)$$

Подставим теперь в (8.5)  $z = -1$ :

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (8.8)$$

Складывая (8.7) и (8.8) и деля результат на 2, получаем

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}, \text{ если } n \text{ четно,} \quad (8.9)$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}, \text{ если } n \text{ нечетно.} \quad (8.10)$$

Вычитая, получаем

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}, \text{ если } n \text{ нечетно,} \quad (8.11)$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}, \text{ если } n \text{ четно.} \quad (8.12)$$

Подставим теперь денумератор (8.5) так:

$$d_n^*(z) = (1+z) \cdot d_{n-1}^*(z) = d_{n-1}^*(z) + zd_{n-1}^*(z). \quad (8.13)$$

В силу (8.5) имеем

$$d_n^*(z) = \sum_{r=0}^n C_n^r z^r. \quad (8.14)$$

Подставим (8.14) в (8.13):

$$\sum_{r=0}^n C_n^r z^r = \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r z^r + \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r z^{r+1}. \quad (8.15)$$

Во второй сумме справа в (8.15) заменяем  $r+1$  на  $u$ :

$$\sum_{r=0}^n C_n^r z^r = \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r z^r + \sum_{u=1}^n C_{n-1}^{u-1} z^u. \quad (8.16)$$

Заметим, что  $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$  и  $C_n^n = C_{n-1}^{n-1} = 1$ . Сокращаем члены с соответствующими коэффициентами в (8.16):

$$\sum_{r=1}^{n-1} C_n^r z^r = \sum_{r=1}^{n-1} (C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}) z^r. \quad (8.17)$$

Это тождество относительно  $z$  дает

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (8.18)$$

Найденное соотношение хорошо известно из треугольника Паскаля.

Запишем теперь (8.5) по-другому:

$$d_n^*(z) = d_{n-m}^*(z) \cdot d_m^*(z) = (1+z)^{n-m} (1+z)^m. \quad (8.19)$$

Разлагая  $(1+z)^{n-m}$ ,  $(1+z)^n$  и  $(1+z)^m$  согласно (8.14), получаем в левой и правой частях выражения

$$(1+z)^n = (1+z)^{n-m} (1+z)^m \quad (8.20)$$

следующие коэффициенты при  $z^r$ :

$$C_n^r = \sum_{l=0}^r C_{n-m}^l C_m^{r-l}. \quad (8.21)$$

Для удобства будем пользоваться обозначением

$$C_{-n}^r = (-1)^r C_{n+r}^r. \quad (8.22)$$

ввиду следующего свойства. По определению

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}. \quad (8.23)$$

<sup>1)</sup> Некоторые авторы называют это соотношение «равенством Вандермонда».

Ничто не препятствует в этой формуле взять  $n$  отрицательным ( $C_n^r$  не будет тогда числом сочетаний из  $n$  по  $r$ ) и обозначить через  $C_{-n}^r$  величину

$$\begin{aligned} C_{-n}^r &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-r+1)}{r!} = \\ &= (-1)^r \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!(n-1)!} = (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = (-1)^r C_{n+r-1}^r. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Посмотрим теперь, как используются другие производящие функции для сочетаний с повторением. Пусть

$$d_n^*(z) = (1 + z + z^2 + \dots)^n = (1 - z)^{-n}. \quad (8.25)$$

Осуществляя разложение  $(1 - z)^v$  и заменяя затем  $v$  на  $-n$ , имеем

$$d_n^*(z) = \sum_{r=0}^{\infty} C_{-n}^r (-z)^r, \quad (8.26)$$

т. е.

$$d_n^*(z) = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r z^r. \quad (8.27)$$

Таким образом, способом, отличным от § 3, мы опять получили число  $C_{n+r-1}^r$  сочетаний с повторением (число неупорядоченных  $r$ -выборок с повторением).

Попытаемся подсчитать число неупорядоченных  $r$ -выборок с повторением, в которых каждый объект встречается не менее одного раза. С этой целью рассмотрим такой денумератор:

$$d_n^*(z) = (z + z^2 + z^3 + \dots)^n = z^n (1 - z)^{-n} = z^n \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r z^r. \quad (8.28)$$

Полагая  $u = r + n$  и учитывая, что  $C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1}$ , находим

$$d_n^* = \sum_{u=n}^{\infty} C_{u-1}^{n-1} z^u = \sum_{u=n}^{\infty} C_{u-n}^u z^u. \quad (8.29)$$

Таким образом, число неупорядоченных  $r$ -выборок с повторением, в которых каждый объект встречается не менее одного раза, равно

$$C_{r-1}^{r-n}, \quad r = n, \quad n+1, \dots$$

Пример. Даны два объекта  $A$  и  $B$ . Сколько всего существует четырехэлементных сочетаний из этих двух объектов, в которых каждый объект встречается не менее одного раза? Это число равно

$$C_{r-1}^{r-n} = C_{4-1}^{4-2} = C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

Выписываем эти сочетания:

$$[AAAB], [AABB] \text{ и } [ABBB].$$

Подсчитаем теперь вообще число сочетаний из  $n$  объектов по  $r$  элементов с повторением, в которых каждый объект встречается не менее  $k$  раз. С этой целью рассмотрим такой денумератор:

$$d_n^*(z) = (z^k + z^{k+1} + \dots)^n = z^{nk} (1-z)^{-n} = z^{kn} \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r z^r. \quad (8.30)$$

Если положим  $u=r+kn$ , то

$$d_n^*(z) = \sum_{u=kn}^{\infty} C_{u-(k-1)n-1}^{u-kn} z^u. \quad (8.31)$$

Таким образом, искомое число равно  $C_{r-(k-1)n-1}^{r-kn}$ ,  $0 \leq k \leq r$ ;  $r = kn, kn+1, \dots; r, k, n \in \mathbb{N}$ .

Пример. Даны три объекта  $A, B, C$ . Каково число восьмиэлементных сочетаний с повторением из этих объектов по 8, в которых каждый объект встречается не менее двух раз? Имеем

$$C_{r-(k-1)n-1}^{r-kn} = C_{8-3-1}^{8-6} = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Выпишем эти сочетания:

$$\begin{aligned} & [AAAABBCC], \quad [AABBBBCC], \quad [AABBCCCC], \\ & [AAABBCCC], \quad [AABBCCCC], \quad [AAABBBCC]. \end{aligned}$$

Подсчитаем число сочетаний из  $n$  объектов по  $r$  элементов с повторением, в которых каждый объект встречается четное число раз. Для этого рассмотрим денумератор

$$d_n^*(z) = (1 + z^2 + z^4 + \dots)^n = (1 - z^2)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r z^{2r}. \quad (8.32)$$

Таким образом,

$$\bar{N}(n, 2r) = C_{n+r-1}^r \quad \text{и} \quad \bar{N}(n, 2r+1) = 0.$$

Вообще при условии, что каждый объект встречается число раз, кратное  $k$ , следует использовать такой денумератор:

$$d_n^*(z) = (1 + z^k + z^{2k} + \dots)^n = (1 - z^k)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r z^{kr}. \quad (8.33)$$

Итак,

$$\bar{N}(n, kr) = C_{n+r-1}^r \quad \text{и} \quad \bar{N}(n, s) = 0, \quad \text{если} \quad s \neq kr.$$

Рассмотрим теперь условия более общего вида, чем те, что встречались до сих пор в этом параграфе.

Предположим, что объект  $A_1$  встречается не менее  $k_1$  раз,  $A_2$  — не менее  $k_2$  раз, ...,  $A_n$  — не менее  $k_n$  раз. Тогда в качестве энумератора можно взять

$$e^*(z) = \prod_{i=1}^n (a_i^{k_i} z^{k_i} + a_i^{k_i+1} z^{k_i+1} + \dots), \quad (8.34)$$

а в качестве денумератора

$$d^*(z) = \prod_{i=1}^n (z^{k_i} + z^{k_i+1} + \dots). \quad (8.35)$$

Предположим, что объект  $A_1$  встречается не более  $k_1$  раз,  $A_2$  — не более  $k_2$  раз, ...,  $A_n$  — не более  $k_n$  раз. Тогда в качестве энумератора можно взять

$$e^*(z) = \prod_{i=1}^n (1 + a_i z + a_i^2 z^2 + \dots + a_i^{k_i} z^{k_i}), \quad (8.36)$$

а в качестве денумератора

$$d^*(z) = \prod_{i=1}^n (1 + z + z^2 + \dots + z^{k_i}). \quad (8.37)$$

Пусть теперь количество появлений объекта  $A_1$  — одно из чисел

$$\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \quad \text{где } \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \lambda_1;$$

количество появлений объекта  $A_2$  — одно из чисел

$$\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \quad \text{где } \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \lambda_2; \dots;$$

количество появлений объекта  $A_n$  — одно из чисел

$$\alpha_n, \beta_n, \dots, \lambda_n, \quad \text{где } \alpha_n < \beta_n < \dots < \lambda_n.$$

Тогда в качестве энумератора можно взять

$$e^*(z) = \prod_{i=1}^n (a_i^{\alpha_i} z^{\alpha_i} + a_i^{\beta_i} z^{\beta_i} + \dots + a_i^{\lambda_i} z^{\lambda_i}), \quad (8.38)$$

а в качестве денумератора

$$d^*(z) = \prod_{i=1}^n (z^{\alpha_i} + z^{\beta_i} + \dots + z^{\lambda_i}). \quad (8.39)$$

Любой разумной комбинации условий, относящихся к наличию или отсутствию объектов в неупорядоченных  $r$ -выборках с повторением, соответствует некоторый энумератор и некоторый денумератор.

Пример. Перечислить сочетания с повторением из 3 объектов  $A_1, A_2, A_3$  по  $r$  элементов при условии, что  $A_1$  встречается не более одного раза,  $A_2$  — не более двух, а  $A_3$  — один или два раза. Тогда энумератором служит

$$\begin{aligned} e^*(z) &= (1 + a_1 z)(1 + a_2 z + a_2^2 z^2)(a_3 z + a_3^2 z^2) = \\ &= a_3 z + (a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_3 a_3) z^2 + (a_1 a_2 a_3 + a_2 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_3 + a_2 a_3 a_3) z^3 + \\ &\quad + (a_1 a_2 a_2 a_3 + a_2 a_2 a_3 a_3 + a_1 a_2 a_2 a_3) z^4 + (a_1 a_2 a_2 a_3 a_3) z^5. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Для возможных значений  $r$  имеем

- $r = 1: [A_3].$
- $r = 2: [A_1 A_3], [A_2 A_3], [A_3 A_3].$
- $r = 3: [A_1 A_2 A_3], [A_2 A_2 A_3], [A_1 A_3 A_3], [A_2 A_3 A_3]. \quad (8.41)$
- $r = 4: [A_1 A_2 A_3 A_3], [A_2 A_2 A_3 A_3], [A_1 A_2 A_2 A_3].$
- $r = 5: [A_1 A_2 A_2 A_3 A_3].$

Денумератор равен

$$d^*(z) = (1+z)(1+z+z^2)(z+z^2) = \\ = (1+3z^2+4z^3+3z^4+z^5). \quad (8.42)$$

Если  $\bar{N}(n, r)$  обозначает число сочетаний с указанными ограничениями, то

$$\begin{aligned} \bar{N}(3, 1) &= 1, \quad \bar{N}(3, 2) = 3, \quad \bar{N}(3, 3) = 4, \\ \bar{N}(3, 4) &= 3, \quad \bar{N}(3, 5) = 1. \end{aligned} \quad (8.43)$$

**Общий метод.** Для нахождения энумератора и соответствующего денумератора достаточно рассматривать ограничения, относящиеся к подмножествам, на элементы которых накладываются условия. Для этого используется изоморфизм между алгеброй Буля и формальной логикой.

Например, пусть  $A_1 \in \mathbf{A}$  таково, что выполняются следующие условия:

- $\mathcal{P}_1: A_1$  встречается четное число раз, тогда множеством коэффициентов будет  $\{1, a_1^2, a_1^4, \dots\}.$
- $\mathcal{P}_2: A_1$  встречается три или большее число раз, тогда множеством коэффициентов будет  $\{a_1^3, a_1^4, a_1^5, \dots\};$
- $\mathcal{P}_3: A_1$  встречается не более семи раз, тогда множеством коэффициентов будет  $\{1, a_1, a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^7\}.$

Тогда  $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3$  будет соответствовать пересечение

$$\{1, a_1^2, a_1^4, \dots\} \cap \{a_1^3, a_1^4, a_1^5, \dots\} \cap \{1, a_1, a_1^2, \dots, a_1^7\} = \\ = \{a_1^4, a_1^6\}. \quad (8.44)$$

Член энумератора, соответствующий  $A_1$  и удовлетворяющий условиям, будет  $a_1^4 z^4 + a_1^6 z^6.$

Еще один пример.

Предположим, что на  $A_1$  и  $A_2$  наложено следующее условие:

$\mathcal{P}_1:$  присутствие  $A_1$  исключает присутствие  $A_2$  ( $A_1$  и  $A_2$  никогда не встречаются вместе).

Пусть также дано условие:

$\mathcal{P}_2:$  присутствуют как  $A_1$ , так и  $A_2$ ; тогда соответствующим множеством коэффициентов будет

$$\{a_1 a_2, a_1 a_2^2, a_1^2 a_2, a_1 a_2^3, a_1^2 a_2^2, a_1^3 a_2, \dots\}.$$

$\mathcal{P}_1 =$  не  $\mathcal{P}_2$ ; для нахождения  $\mathcal{P}_1$  нужно взять дополнение указанного множества по отношению к множеству, дающему все неупорядоченные  $r$ -выборки с повторением, образованные с  $A_1$  и  $A_2$ , т. е. по отношению к множеству

$$\{1, a_1, a_2, a_1^2, a_1 a_2, a_2^2, a_1^2 a_2, a_1 a_2^2, a_1^3, a_2^3, \dots\}; \quad (8.45)$$

следовательно, множеством коэффициентов, соответствующим  $\mathcal{P}_1$ , будет

$$\{1, a_1, a_2, a_1^2, a_2^2, a_1^3, a_2^3, \dots\}. \quad (8.46)$$

Тогда энумератор есть

$$1 + (a_1 + a_2)z + (a_1^2 + a_2^2)z^2 + (a_1^3 + a_2^3)z^3 + \dots \quad (8.47)$$

Рассмотрим вкратце еще один пример. Даны четыре объекта  $A, B, C, D$ , на которые наложены следующие условия:

$\mathcal{P}_1$ : если  $A$  встречается четное число раз, то  $B$  встречается нечетное число раз и наоборот;

$\mathcal{P}_2$ : число появлений  $C$  меньше 3;

$\mathcal{P}_3$ : число появлений  $D$  больше 2.

Имеем

$$\begin{aligned} e^*(z) = & [bz + (a^2b + b^3)z^3 + (a^2b^3 + a^4b)z^5 + \\ & + (a^2b^5 + a^4b^3 + a^6b)z^7 + \dots] (1 + cz + c^2z^2)(d^3z^3 + d^4z^4 + \dots). \end{aligned} \quad (8.48)$$

## УПРАЖНЕНИЯ

8А. Указать денумератор неупорядоченных  $r$ -выборок с повторением, в которых каждый объект встречается: а) не менее двух раз; б) не больше четырех раз; в) не менее одного и не больше пяти раз; г) в количестве раз, кратном трем.

8Б. Указать денумератор сочетаний из  $n$  объектов по  $r$  элементов с повторением, в которых объект  $A_i$  встречается не меньше  $i$  раз. Привести также энумератор. Рассмотреть случай пяти объектов  $A, B, C, D, E$ .

8В. Показать, что денумератор сочетаний из  $n$  объектов по  $r$  элементов с повторением, в которых каждый объект встречается четное число раз, имеет вид

$$d^*(z) = \frac{1}{(1 - z^2)^n}.$$

8Г. Даны пять объектов  $A, B, C, D, E$ . Указать энумераторы и денумераторы, учитывая следующие условия, наложенные на сочетания с повторением (здесь  $x$  обозначает число вхождений объекта  $X$  в сочетание): а)  $A, B, C$  встречаются четное число раз, а  $D, E$  — нечетное; б)  $a, b, c$  — нечетные числа и  $d + e \leq 3$ ; в)  $a < b < c$ ; г) всегда  $a \geq 2d$ ; д) присутствие  $A$  исключает  $B$ , но разрешает присутствие  $C$ , если  $D$  присутствует;  $D$  исключает  $E$ .

## § 9. Денумераторы размещений

Для получения энумератора размещений следовало бы построить некоммутативную алгебру производящих функций. Это возможно, но очень сложно и в конечном счете не дает преимущества.

ществ по сравнению с методом § 3. Напротив, для получения денумераторов размещений пользоваться производящими функциями удобно.

Учитывая (8.5) и (3.25), можно записать

$$\begin{aligned} d_n^*(z) &= (1+z)^n = 1 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + C_n^3 z^3 + \dots + C_n^n z^n = \\ &= 1 + A_n^1 \frac{z}{1!} + A_n^2 \frac{z^2}{2!} + A_n^3 \frac{z^3}{3!} + \dots + A_n^n \frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Таким образом, число упорядоченных  $r$ -выборок без повторения (размещений без повторения из  $n$  элементов по  $r$ ) равно коэффициенту при  $z^r/r!$  в (9.1).

Для получения числа упорядоченных  $r$ -выборок с повторением (размещений с повторением из  $n$  элементов по  $r$ ) используем денумератор

$$\begin{aligned} d_n^*(z) &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right)^n = (e^z)^n = e^{nz} = \\ &= 1 + nz + \frac{n^2 z^2}{2!} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{z^r}{r!}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Приходим к результату, полученному ранее (см. (3.9)): число упорядоченных  $r$ -выборок с повторением равно  $n^r$ .

Употребление денумераторов размещений, если накладывать условия на повторение элементов, — вещь более сложная и тонкая.

Попробуем, например, получить число таких упорядоченных  $r$ -выборок, что каждый элемент встречается не менее одного раза. С этой целью возьмем денумератор

$$\begin{aligned} d_n^*(z) &= \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)^n = (e^z - 1)^n = \\ &= e^{nz} - ne^{(n-1)z} + \frac{n(n-1)}{2} e^{(n-2)z} + \dots + (-1)^n. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Пример. Приведем числовой пример для  $n=3$ .

$$\begin{aligned} d_3^*(z) &= (e^z - 1)^3 = e^{3z} - 3e^{2z} + 3e^z - 1 = \\ &= 1 + 3z + \frac{(3z)^2}{2!} + \frac{(3z)^3}{3!} + \frac{(3z)^4}{4!} + \dots - \\ &- 3\left(1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \dots\right) + \\ &+ 3\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right) - 1 = \\ &= (3^3 - 3 \cdot 2^3 + 3) \frac{z^3}{3!} + (3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3) \frac{z^4}{4!} + \\ &+ (3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3) \frac{z^5}{5!} + \dots + (3^r - 3 \cdot 2^r + 3) \frac{z^r}{r!} + \dots \end{aligned} \quad (9.4)$$

Итак, число упорядоченных  $r$ -выборок с повторением, в которых каждый элемент встречается не менее одного раза, равно

$$3^r - 3 \cdot 2^r + 3, \quad r = 3, 4, 5, \dots$$

Найдем теперь число таких упорядоченных  $r$ -выборок с повторением, в которых каждый элемент встречается не более двух раз.

Возьмем

$$d_n^*(z) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)^n. \quad (9.5)$$

Например, при  $n = 3$

$$\begin{aligned} d_3^*(z) &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)^3 = \\ &= 1 + 3z + \frac{9}{2}z^2 + 4z^3 + \frac{9}{4}z^4 + \frac{3}{4}z^5 + \frac{1}{8}z^6 = \\ &= 1 + 3 \cdot z + \frac{9}{2} \cdot 2 \cdot \frac{z^2}{2} + 4 \cdot 3! \frac{z^3}{3!} + \frac{9}{4} \cdot 4! \cdot \frac{z^4}{4!} + \\ &\quad + \frac{3}{4} \cdot 5! \cdot \frac{z^5}{5!} + \frac{1}{8} \cdot 6! \frac{z^6}{6!}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Итак, имеем

$$\frac{9}{4} \cdot 4! = 9 \cdot 3 \cdot 2 = 54$$

упорядоченных 4-выборок с повторением, образуемых тремя элементами, каждый из которых встречается не более двух раз.

Приведем еще один пример. Дано множество из  $n$  элементов, подсчитаем число упорядоченных  $r$ -выборок, в которых элемент  $E_1$  встречается  $n_1$  раз,  $E_2$  встречается  $n_2$  раз, ...,  $E_k$  встречается  $n_k$  раз, причем  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , а  $E_1, E_2, \dots, E_k$  — некоторые элементы этого множества.

$$\begin{aligned} d_n^*(z) &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n_1}}{n_1!}\right) \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n_2}}{n_2!}\right) \dots \\ &\quad \dots \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n_k}}{n_k!}\right). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Коэффициент при  $z^{n_1+n_2+\dots+n_k} = z^n$  равен  $\frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ , а коэффициент при  $\frac{z^n}{n!}$  равен  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ . Это число — не что иное, как число разбиений (см. (3.34)).

## УПРАЖНЕНИЯ

**9A.** Найти денумератор упорядоченных  $r$ -выборок с повторением, образуемых  $n$  элементами, в которых каждый элемент встречается: а) не менее двух раз, б) точно два раза, в) не более двух раз, г) четное число раз, д) нечетное число раз.

**9Б.** Указать денумератор упорядоченных  $r$ -выборок с повторением, образуемых четырьмя элементами, с условием, что каждый элемент встречается не более одного раза. Выписать эти выборки.

**9В.** Рассмотрим  $p$  объектов  $A$  и  $q$  объектов  $B$ , расположенных на прямой так, что никакие два объекта  $B$  не стоят подряд. Показать, что число таких упорядоченных  $(p+q)$ -выборок равно  $C_{p+q}^q$ .

**9Г.** Рассмотрим  $n$  объектов двух видов  $A$  и  $B$ , расположенных на прямой так, что никакие два объекта вида  $B$  не стоят подряд. Обозначим через  $f(n)$  число таких  $n$ -выборок. Показать, что

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n)$$

с  $f(0) = 1$  и  $f(1) = 2$ .

Вычислить  $f^*(z)$  и выписать последовательность  $f(n)$  (числа Фибоначчи, см. упражнение 7Г).

**9Д.** Найти денумератор упорядоченных  $r$ -выборок с повторением, в которых встречается точно  $p$  элементов одного вида и точно по одному элементу каждого из  $n-p$  других видов. Показать, что число таких  $r$ -выборок равно

$$f(n, r, p) = C_{n-p}^r + C_{n-p}^{r-1} + \dots + C_{n-p}^{r-p}.$$

Доказать рекуррентную формулу

$$f(n, r, p) - f(n, r-1, p) = C_{n-p}^r - C_{n-p}^{r-p-1}.$$

## § 10. Основные последовательности и формулы для пересчета

**Числа Стирлинга.** Рассмотрим производящую функцию

$$\varphi_n^*(z) = z(z-1)\dots(z-n+1), \quad n=1, 2, 3, \dots; \quad \varphi_0(z) = 1. \quad (10.1)$$

Будучи упорядоченной по возрастающим степеням  $z$ , эта производящая функция для начальных значений  $n$  имеет следующий вид:

$$\varphi_0^*(z) = 1,$$

$$\varphi_1^*(z) = z,$$

$$\varphi_2^*(z) = z(z-1) = z^2 - z,$$

$$\varphi_3^*(z) = z(z-1)(z-2) = z^3 - 3z^2 + 2z,$$

$$\varphi_4^*(z) = z(z-1)(z-2)(z-3) = z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z. \quad (10.2)$$

Обозначим через  $s(n, r)$  коэффициент при  $z^r$  в разложении (10.1) и тогда запишем

$$\varphi_n^*(z) = \sum_{r=0}^n s(n, r) \cdot z^r, \quad s(0, 0) = 1. \quad (10.3)$$

Целые числа  $s(n, r)$  называются *числами Стирлинга первого рода*. Рассмотрим следующие тождества:

$$z^0 = 1,$$

$$z^1 = z,$$

$$z^2 = z(z-1) + z, \quad (10.4)$$

$$z^3 = z(z-1)(z-2) + 3z(z-1) + z,$$

$$z^4 = z(z-1)(z-2)(z-3) + 6z(z-1)(z-2) + 7z(z-1) + z,$$

.....

Обозначим через  $\tilde{s}(n, r)$  коэффициент при  $\phi_r^*(z)$  в разложении  $z^n$  такого вида и запишем

$$z^n = \sum_{r=0}^n \bar{s}(n, r) \cdot \varphi_r^*(z), \quad \bar{s}(0, 0) = 1. \quad (10.5)$$

Целые числа  $\tilde{s}(n, r)$  называются *числами Стирлинга второго рода*. В таблицах 10.1 и 10.2 приведены числа  $s(n, r)$  и  $\tilde{s}(n, r)$  до  $n = 8$ .

Для простоты полагают также

$$s(n, 0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ и } \bar{s}(n, 0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.6)$$

Таблица 10.1

### Таблица чисел Стирлинга первого рода до $n = 8$

$s(n, r)$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$
$s(1, r)$	1							
$s(2, r)$	-1	1						
$s(3, r)$	2	-3	1					
$s(4, r)$	-6	11	-6	1				
$s(5, r)$	24	-50	35	-10	1			
$s(6, r)$	-120	274	-225	85	-15	1		
$s(7, r)$	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
$s(8, r)$	-5040	13068	-13182	6769	-1960	322	-28	1

Таблица чисел Стирлинга второго рода  $n = 8$ 

$\bar{s}(n, r)$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$
$\bar{s}(1, r)$	1							
$\bar{s}(2, r)$	1	1						
$\bar{s}(3, r)$	1	3	1					
$\bar{s}(4, r)$	1	7	6	1				
$\bar{s}(5, r)$	1	15	25	10	1			
$\bar{s}(6, r)$	1	31	90	65	15	1		
$\bar{s}(7, r)$	1	63	301	350	140	21	1	
$\bar{s}(8, r)$	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Рекуррентные формулы для чисел Стирлинга. Имеем

$$\varphi_{n+1}^*(z) = \varphi_n^*(z) \cdot (z - n). \quad (10.7)$$

Таким образом,

$$\sum_{r=1}^{n+1} s(n+1, r) z^r = \sum_{r=1}^n (z - n) \cdot s(n, r) \cdot z^r. \quad (10.8)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $z^r$  в правой и левой частях (10.8), получаем рекуррентную формулу:

$$s(n+1, r) = s(n, r-1) - ns(n, r), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad r \leq n, \quad (10.9)$$

позволяющую легко вычислять числа Стирлинга первого рода. Например,

$$s(4, 3) = s(3, 2) - 3s(3, 3) = -3 - 3 = -6. \quad (10.10)$$

Чтобы получить рекуррентную формулу для чисел Стирлинга второго рода, воспользуемся (10.5):

$$z^{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} \bar{s}(n+1, r) \cdot \varphi_r^*(z). \quad (10.11)$$

Представляя  $z^{n+1} = z^n \cdot z$ , можно записать

$$z^{n+1} = \sum_{r=1}^n \bar{s}(n, r) \cdot z \cdot \varphi_r^*(z). \quad (10.12)$$

В силу (10.7)

$$z\varphi_r^*(z) = \varphi_{r+1}^*(z) + r\varphi_r^*(z). \quad (10.13)$$

Подставляем (10.13) в (10.12):

$$z^{n+1} = \sum_{r=1}^n \bar{s}(n, r) [\varphi_{r+1}^*(z) + r\varphi_r^*(z)]. \quad (10.14)$$

Сравнивая (10.11) и (10.14), имеем

$$\sum_{r=1}^{n+1} \bar{s}(n+1, r) \cdot \varphi_r^*(z) = \sum_{r=1}^n \bar{s}(n, r) [\varphi_{r+1}^*(z) + r\varphi_r^*(z)]. \quad (10.15)$$

Приравниваем коэффициенты при  $\varphi_r^*(z)$  в правой и левой частях (10.15):

$$\bar{s}(n+1, r) = \bar{s}(n, r-1) + r\bar{s}(n, r), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad r \in \mathbb{N}, \quad r \leq n. \quad (10.16)$$

Например,

$$\bar{s}(5, 3) = \bar{s}(4, 2) + 3\bar{s}(4, 3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25. \quad (10.17)$$

Между числами  $s(n, r)$  и  $\bar{s}(n, r)$  существует важное соотношение. Подставим (10.5) в (10.3):

$$\begin{aligned} \varphi_n^*(z) &= \sum_{r=1}^n s(n, r) \sum_{k=1}^r \bar{s}(r, k) \cdot \varphi_k^*(z) = \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^r s(n, r) \bar{s}(r, k) \varphi_k^*(z) = \\ &= s(n, 1) \bar{s}(1, 1) \varphi_1^*(z) + s(n, 2) \bar{s}(2, 1) \varphi_1^*(z) + \\ &\quad + s(n, 2) \bar{s}(2, 2) \varphi_2^*(z) + s(n, 3) \bar{s}(3, 1) \varphi_1^*(z) + \\ &\quad + s(n, 3) \bar{s}(3, 2) \varphi_2^*(z) + s(n, 3) \bar{s}(3, 3) \varphi_3^*(z) + \dots \\ &\dots + s(n, n) \bar{s}(n, 1) \varphi_1^*(z) + \dots + s(n, n) \bar{s}(n, n) \varphi_n^*(z). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Сравнивая выражения при  $\varphi_r^*(z)$  в правой и левой частях (10.18), получаем

$$\sum_{r=1}^n s(n, r) \bar{s}(r, k) = \begin{cases} 0, & 1 \leq k < n, \\ 1, & k = n. \end{cases} \quad (10.19)$$

Пользуясь символом Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

записываем

$$\sum_{r=1}^n s(n, r) \bar{s}(r, k) = \delta_{nk}. \quad (10.20)$$

Если подставим, наоборот, (10.3) в (10.5), то получим симметричное соотношение:

$$\sum_{r=1}^n \bar{s}(n, r) s(r, k) = \delta_{nk}. \quad (10.21)$$

Рассмотрим две бесконечные матрицы:

$$\|s\| = \begin{vmatrix} s(1, 1) & 0 & 0 & \dots \\ s(2, 1) & s(2, 2) & 0 & \dots \\ s(3, 1) & s(3, 2) & s(3, 3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (10.22)$$

и

$$\|\bar{s}\| = \begin{vmatrix} \bar{s}(1, 1) & 0 & 0 & \dots \\ \bar{s}(2, 1) & \bar{s}(2, 2) & 0 & \dots \\ \bar{s}(3, 1) & \bar{s}(3, 2) & \bar{s}(3, 3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (10.23)$$

С их помощью (10.20) и (10.21) можно записать так:

$$\|s\| \cdot \|\bar{s}\| = \|\bar{s}\| \cdot \|s\| = \|1\|, \quad (10.24)$$

где  $\|1\|$  — единичная матрица бесконечного порядка.

Итак,

$$\|\bar{s}\| = \|s\|^{-1} \Leftrightarrow \|s\| = \|\bar{s}\|^{-1}, \quad (10.25)$$

т. е.  $\|s\|$  и  $\|\bar{s}\|$  — взаимно обратные матрицы.

**Числа Белла.** Полагаем

$$\|s_k\| = \|s\|^k, \quad (10.26)$$

$$\|\bar{s}_k\| = \|\bar{s}\|^k. \quad (10.27)$$

Элементы матриц  $\|s_k\|$  и  $\|\bar{s}\|^k$  назовем соответственно *числами Белла первого и второго рода порядка*  $k$ .

Числа Белла порядка 1 — это числа Стирлинга.

Из (10.25), (10.26), (10.27) видно, что

$$\|\bar{s}_k\| = \|s_k\|^{-1} \Leftrightarrow \|s_k\| = \|\bar{s}_k\|^{-1}, \quad (10.28)$$

$$\|s_m\| = \|s_{m-k}\| \cdot \|s_k\|, \quad (10.29)$$

$$\|\bar{s}_m\| = \|\bar{s}_{m-k}\| \cdot \|\bar{s}_k\|. \quad (10.30)$$

Если обозначить элементы  $\|s_r\|$  и  $\|\bar{s}_r\|$  соответственно через  $s(n, j; r)$  и  $\bar{s}(n, j; r)$ , то

$$s(n, l; r) = \sum_{j=1}^n s(n, j; r-k) s(j, l; k), \quad (10.31)$$

$$\bar{s}(n, l; r) = \sum_{j=1}^n \bar{s}(n, j; r-k) \bar{s}(j, l; k). \quad (10.32)$$

**Полиномы Белла и формула Бруно.** Рассмотрим сложную функцию

$$y = f(u) \quad \text{и} \quad u = g(x), \quad (10.33)$$

т. е.

$$y = f[g(z)] = h(z). \quad (10.34)$$

Последовательные производные  $h(z)$  запишутся так:

$$\begin{aligned} y'_z &= y'_u \cdot u'_z, \\ y''_z &= y'_u \cdot u''_z + y''_u \cdot (u'_z)^2, \\ y'''_z &= y'_u \cdot u'''_z + 3y''_u \cdot u''_z \cdot u'_z + y'''_u \cdot (u'_z)^3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (10.35)$$

Можно ли дать общий вид этих формул? Ответ утвердительный. Мы докажем следующую формулу, называемую *формулой Бруно*, правая часть которой называется *полиномом Белла*. Оба эти понятия часто используются в комбинаторике.

Обозначая последовательные производные через  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(i)}, \dots$ , докажем сначала формулу Бруно:

$$y_z^{(n)} = \sum \frac{n! y_u^{(k)}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{u^{(1)}}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)^{k_n}, \quad (10.36)$$

где  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — такие целые неотрицательные числа, что  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ , а суммирование производится по всем решениям  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  уравнения  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ .

Правые части для  $n = 1, 2, 3, \dots$  называются *полиномами Белла*.

Докажем (10.36), следуя Риордану [36]. Любая производная  $y_z^{(n)}$  — линейная функция  $n$  производных  $y_u^{(1)}, y_u^{(2)}, \dots, y_u^{(n)}$ , коэффициенты которой являются функциями производных  $u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}$ :

$$y_z^{(n)} = \sum_{r=1}^n a_r^{(n)} y_u^{(r)}, \quad (10.37)$$

где

$$a_r^{(n)} = a_r^{(n)}(u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}). \quad (10.38)$$

Так как  $a_r^{(n)}$  не зависят от  $y_u^{(r)}$ , то для определения  $a_r^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) функцию  $y = f(u)$  можно выбрать произвольно.

Возьмем

$$y(u) = e^{au}, \quad (10.39)$$

где  $a$  — действительное число, отличное от нуля.

Тогда

$$y_u^{(r)} = a^r e^{au}. \quad (10.40)$$

Подставим (10.40) в (10.37):

$$y_z^{(n)} = \sum_{r=1}^n a_r^{(n)}(u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}) a^r e^{au}, \quad (10.41)$$

или

$$e^{-au} y_z^{(n)} = \sum_{r=1}^n \alpha_r^{(n)} (u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}) a^r. \quad (10.42)$$

Полагаем

$$\alpha^{(n)} (u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}; a) = \sum_{r=1}^n \alpha_r^{(n)} (u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}) a^r. \quad (10.43)$$

Перепишем (10.42), учитывая (10.43):

$$\alpha^{(n)} (u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}; a) = e^{-au} y_z^{(n)}. \quad (10.44)$$

Согласно (10.44)

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= e^{-au} y_z^{(n+1)} = e^{-au} D_z^{n+1} y = e^{-au} D_z^{n+1} e^{au} = \\ &= e^{-au} D_z^n (D e^{au}) = e^{-au} D_z^n [a e^{au} u_z^{(1)}] = \\ &= e^{-au} a D_z^n [e^{au} u_z^{(1)}] = e^{-au} a \sum_{k=0}^n C_n^k D_z^{(n-k)} (e^{au}) D_z^k u_z^{(1)} = 1 \\ &= a \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{-au} D_z^{n-k} (e^{au})) D_z^k u_z^{(1)} = \\ &= a \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{-au} y_z^{(n-k)}) D_z^k u_z^{(1)} = a \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^{(n-k)} u_z^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Таким образом, символически можно записать

$$a^{n+1} = a u_z (a + u_z)^n, \quad a^k = a^{(k)}, \quad u_z^k = u_z^{(k)}. \quad (10.46)$$

При  $n = 0, 1, 2, \dots$  из этой формулы вытекает

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= a u_z^{(1)}, \\ a^{(2)} &= a u_z^{(1)} a^{(1)} + a u_z^{(2)} = a u_z^{(1)} (a u_z^{(1)}) + a u_z^{(2)} = \\ &= a^2 (u_z^{(1)})^2 + a u_z^{(2)}, \\ a^3 &= a u_z^{(1)} a^{(2)} + 2 a u_z^{(2)} a^{(1)} + a u_z^{(3)} = \\ &= a u_z^{(1)} [a^2 (u_z^{(1)})^2 + a u_z^{(2)}] + 2 a u_z^{(2)} (a u_z^{(1)}) + a u_z^{(3)} = \\ &= a^3 (u_z^{(1)})^3 + 3 a^2 u_z^{(2)} u_z^{(1)} + a u_z^{(3)}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (10.47)$$

К обеим частям (10.46) применим экспоненциальное  $z$ -преобразование. По формулам (7.74) — (7.77) получаем

$$a e^{at} = a u_z e^{(a+u_z)t}, \quad (10.48)$$

или

$$a = a u_z e^{u_z t} = a \left( u_z^1 + u_z^2 t + \frac{u_z^3 t^2}{2!} + \dots \right). \quad (10.49)$$

<sup>1)</sup> Используется известная формула Лейбница (6.29).

Интегрируем (10.49) от 0 до  $t$ :

$$at = a \left( u_z^{(1)} t + \frac{u_z^{(2)} t^2}{2!} + \frac{u_z^{(3)} t^3}{3!} + \dots \right). \quad (10.50)$$

Потенцируем (10.50):

$$e^{at} = \exp \left[ a \left( u_z^{(1)} t + \frac{u_z^{(2)} t^2}{2!} + \frac{u_z^{(3)} t^3}{3!} + \dots \right) \right]. \quad (10.51)$$

Переходя к несимволическим обозначениям, получаем

$$\begin{aligned} \left( 1 + a^{(1)} t + \frac{a^{(2)} t^2}{2!} + \frac{a^{(3)} t^3}{3!} + \dots \right) &= \\ &= \left[ 1 + au_z^{(1)} t + \frac{a^2 (u_z^{(1)})^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 (u_z^{(1)})^3 t^3}{3!} + \dots \right] \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{au_z^{(2)} t^2}{2!} + \frac{1}{2!} \left( \frac{au_z^{(2)} t^2}{2!} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{au_z^{(2)} t^2}{2!} \right)^3 + \dots \right] \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{au_z^{(3)} t^3}{3!} + \frac{1}{2!} \left( \frac{au_z^{(3)} t^3}{3!} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{au_z^{(3)} t^3}{3!} \right)^3 + \dots \right] \times \dots \end{aligned} \quad (10.52)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в (10.52), приходим к (10.47). Бруно дал следующую общую формулу, получаемую этим способом:

$$a^{(n)} = \sum \frac{n! a^k}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{u_z^{(1)}}{1!} \right)^{k_1} \left( \frac{u_z^{(2)}}{2!} \right)^{k_2} \dots \left( \frac{u_z^{(n)}}{n!} \right)^{k_n}, \quad (10.53)$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ ,  $k_i$  — целые неотрицательные числа и суммирование производится по всем решениям  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  уравнения  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ .

Переходя от коэффициентов  $a^{(n)}$  к производным  $y_z^{(n)}$ , имеем окончательно

$$y_z^{(n)} = \sum \frac{n! y_u^{(k)}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{u_z^{(1)}}{1!} \right)^{k_1} \left( \frac{u_z^{(2)}}{2!} \right)^{k_2} \dots \left( \frac{u_z^{(n)}}{n!} \right)^{k_n}. \quad (10.54)$$

В заключение приведем полиномы Белла для  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ :

$$\begin{aligned} y_z^{(1)} &= y_u^{(1)} u_z^{(1)}, \\ y_z^{(2)} &= y_u^{(1)} u_z^{(2)} + y_u^{(2)} (u_z^{(1)})^2, \\ y_z^{(3)} &= y_u^{(1)} u_z^{(3)} + y_u^{(2)} (3u_z^{(2)} u_z^{(1)}) + y_u^{(3)} (u_z^{(1)})^3, \\ y_z^{(4)} &= y_u^{(1)} u_z^{(4)} + y_u^{(2)} [4u_z^{(3)} u_z^{(1)} + 3(u_z^{(2)})^2] + \\ &\quad + y_u^{(3)} [6u_z^{(2)} (u_z^{(1)})^2] + y_u^{(4)} (u_z^{(1)})^4, \\ y_z^{(5)} &= y_u^{(1)} u_z^{(5)} + y_u^{(2)} [5u_z^{(4)} u_z^{(1)} + 10u_z^{(3)} u_z^{(2)}] + \\ &\quad + y_u^{(3)} [10u_z^{(3)} (u_z^{(1)})^2 + 15(u_z^{(2)})^2 u_z^{(1)}] + \\ &\quad + y_u^{(4)} [10u_z^{(2)} (u_z^{(1)})^3] + y_u^{(5)} (u_z^{(1)})^5. \end{aligned} \quad (10.55)$$

**Числа Стирлинга и числа  $\Delta'0^n$ .** Покажем, что числа Стирлинга второго рода и числа  $\Delta'0^n$  связаны простым и интересным соотношением, которое будет использоваться в дальнейшем. Напомним рекуррентное соотношение (10.16), определяющее числа Стирлинга второго рода:

$$\bar{s}(n+1, r) = \bar{s}(n, r-1) + r\bar{s}(n, r), \quad r \leq n, \quad (10.56)$$

и рекуррентное соотношение (6.40) для  $\Delta'0^n$ :

$$\Delta'0^{n+1} = r\Delta'0^n + r\Delta'^{-1}0^n, \quad r \leq n. \quad (10.57)$$

Обозначим

$$f(n, r) = r! \bar{s}(n, r). \quad (10.58)$$

Умножаем обе части (10.56) на  $r!$ :

$$r! \bar{s}(n+1, r) = r! \bar{s}(n, r-1) + r! r\bar{s}(n, r). \quad (10.59)$$

Отсюда

$$f(n+1, r) = rf(n, r-1) + rf(n, r). \quad (10.60)$$

Так как начальные значения  $f(n, r)$  и  $\Delta'0^n$  совпадают для всех  $n$  и рекуррентные соотношения, порождающие  $f(n, r)$  и  $\Delta'0^n$ , также совпадают, то

$$r! \bar{s}(n, r) = \Delta'0^n. \quad (10.61)$$

Таким образом, таблицы 6.1 и 10.2 могут быть получены одна из другой.

**Основные свойства формул моментов.** Числа Стирлинга первого и второго рода могут появиться при вычислении моментов вероятностного закона, определенного на множестве  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

В самом деле, пусть  $p(n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — распределение вероятностей случайной величины  $N$ .

*Моментом порядка  $k$  случайной величины  $N$*  называется математическое ожидание  $N^k$ :

$$a_k = E[N^k] = \sum_{n=0}^{\infty} n^k p(n), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.62)$$

Рассмотрим производящую функцию для  $p(n)$ :

$$a^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n. \quad (10.63)$$

Беря последовательные производные  $\alpha^*(z)$  по  $z$  и полагая затем  $z = 1$ , легко получаем

$$E[N(N-1)(N-2)\dots(N-r+1)] = \frac{d^r}{dz^r} \alpha^*(z) \Big|_{z=1}. \quad (10.64)$$

Числа  $E[N(N-1)\dots(N-r+1)]$  дают возможность последовательно вычислить  $E[N^i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

*Факториальным моментом порядка  $k$  случайной величины  $N$*  называется математическое ожидание

$$\beta_k = E[N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1)], \quad N = k, k+1, \dots; \quad (10.65)$$

$$\beta_k = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot p(n).$$

Следовательно,

$$\beta_k = \frac{d^k}{dz^k} \alpha^*(z) \Big|_{z=1}. \quad (10.66)$$

Можно определить также моменты третьего типа, биномиальные моменты<sup>1)</sup>

$$\gamma_k = E[C_N^k] = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p(n) = \frac{\beta_k}{k!}, \quad N = k, k+1, \dots \quad (10.67)$$

Между  $\beta_k$  и  $\alpha_k$  имеет место символическое соотношение

$$\beta_k = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1), \quad \alpha^r \doteq \alpha_r, \quad r = 1, 2, \dots, k. \quad (10.68)$$

Таким образом, опять приходим к числам Стирлинга первого рода

$$\beta_k = \sum_{r=1}^k s(k, r) \alpha^r, \quad \alpha^r \doteq \alpha_r, \quad r = 1, 2, \dots, k \quad (10.69)$$

и второго рода

$$\alpha_k = \sum_{r=1}^k \bar{s}(k, r) \beta^r, \quad \beta^r \doteq \beta_r, \quad r = 1, 2, \dots, k. \quad (10.70)$$

Производящие функции моментов  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  и  $\gamma_k$  связаны между собой следующими соотношениями.

Предварительно обозначим

$$\alpha^*(z) = E[Z^N] = p(0) + p(1)z + p(2)z^2 + p(3)z^3 + \dots \quad (10.71)$$

<sup>1)</sup> Попутно заметим, что  $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 1$ .

Осуществим разложения

$$\begin{aligned}
 \alpha^*(e^z) &= E[e^{Nz}] = p(0) + p(1)e^z + p(2)e^{2z} + p(3)e^{3z} + \dots = \\
 &= p(0) + p(1)\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right] + \\
 &\quad + p(2)\left[1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \dots\right] + \\
 &\quad + p(3)\left[1 + 3z + \frac{(3z)^2}{2!} + \frac{(3z)^3}{3!} + \dots\right] + \dots = \\
 &= p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + \dots \\
 &\quad + [p(1) + 2p(2) + 3p(3) + \dots]z + \\
 &\quad + [p(1) + 2^2p(2) + 3^2p(3) + \dots]\frac{z^2}{2!} + \\
 &\quad + [p(1) + 2^3p(2) + 3^3p(3) + \dots]\frac{z^3}{3!} + \dots = \\
 &= \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 \frac{z^2}{2!} + \alpha_3 \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \frac{z^r}{r!} = e^{\alpha z}, \\
 \alpha' &\doteq \alpha_r, \quad r = 1, 2, 3, \dots; \quad \alpha^0 \doteq 1. \tag{10.72}
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\alpha^*(e^z) = e^{\alpha z}, \quad \alpha' \doteq \alpha_r, \quad r = 1, 2, 3, \dots; \quad \alpha^0 \doteq 1. \tag{10.73}$$

Рассмотрим разложение

$$\begin{aligned}
 \alpha^*(z+1) &= p(0) + p(1)(1+z) + p(2)(1+z)^2 + p(3)(1+z)^3 + \dots = \\
 &= p(0) + p(1) + p(1)z + p(2) + 2p(2)z + p(2)z^2 + \\
 &\quad + p(3) + 3p(3)z + 3p(3)z^2 + p(3)z^3 + \dots = \\
 &= C_0^0 p(0) + C_1^0 p(1) + C_1^1 p(1)z + C_2^0 p(2) + C_2^1 p(2)z + C_2^2 p(2)z^2 + \\
 &\quad + C_3^0 p(3) + C_3^1 p(3)z + C_3^2 p(3)z^2 + C_3^3 p(3)z^3 + \dots = \\
 &= C_0^0 p(0) + C_1^0 p(1) + C_2^0 p(2) + C_3^0 p(3) + \dots \\
 &\quad + [C_1^1 p(1) + C_2^1 p(2) + C_3^1 p(3) + \dots]z + \\
 &\quad + [C_2^2 p(2) + C_3^2 p(3) + C_4^2 p(4) + \dots]z^2 + \\
 &\quad + [C_3^3 p(3) + C_4^3 p(4) + C_5^3 p(5) + \dots]z^3 + \dots = \\
 &= \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \dots \tag{10.74}
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Gamma^*(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \dots \tag{10.75}$$

Сравнивая (10.74) и (10.75), получаем

$$\Gamma^*(z) = \alpha^*(z+1). \tag{10.76}$$

Выпишем символическое представление  $e^{\beta z}$ :

$$\begin{aligned}
 B^*(z) &= e^{\beta z} = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 \frac{z^2}{2!} + \beta_3 \frac{z^3}{3!} + \dots = \\
 &= p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + \dots \\
 &\dots + [1 \cdot p(1) + 2p(2) + 3p(3) + \dots] z + \\
 &+ [2 \cdot 1 p(2) + 3 \cdot 2 p(3) + \dots] z^2 / 2! + \\
 &+ [3 \cdot 2 \cdot 1 p(3) + \dots] z^3 / 3! + \dots = \\
 &= p(0) \cdot 1 + p(1)(1+z) + p(2)(1+2z+z^2) + p(3)(1+ \\
 &+ 3z+3z^2+z^3) + \dots (\beta^r \doteq \beta_r, r=1, 2, 3, \dots; \beta^0 \doteq \beta_0). \tag{10.77}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^*(z) &= p(0) + p(1)(1+z) + p(2)(1+z)^2 + p(3)(1+z)^3 + \dots = \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} p(r) \cdot (z+1)^r = a^*(z+1). \tag{10.78}
 \end{aligned}$$

Итак,

$$a^*(e^z) = e^{az}, \tag{10.79}$$

$$\Gamma^*(z) = a^*(z+1) = e^{\beta z}, \tag{10.80}$$

$$e^{az} = \Gamma^*(e^z - 1), \tag{10.81}$$

где в некоторых из этих формул предполагается, что

$$a^r \doteq a_r, \quad r=1, 2, \dots; \quad a^0 \doteq 1, \quad \beta^r \doteq \beta_r, \quad r=1, 2, \dots; \quad \beta^0 \doteq 1.$$

Из (10.80) вытекает

$$a^*(z) = e^{\beta(z-1)}. \tag{10.82}$$

Напомним, что

$$a^*(z) = p(0) + p(1)z + p(2)z^2 + \dots + p(n)z^n + \dots \tag{10.83}$$

Представим правую часть (10.82) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 e^{\beta(z-1)} &= e^{\beta z} e^{-\beta} = e^{-\beta} \left[ 1 + \beta z + \frac{\beta^2 z^2}{2!} + \frac{\beta^3 z^3}{3!} + \dots + \frac{\beta^n z^n}{n!} + \dots \right] \\
 &(\beta^n \doteq \beta_n, n=1, 2, \dots; \beta^0 \doteq 1). \tag{10.84}
 \end{aligned}$$

Сравниваем (10.83) и (10.84) относительно  $z$ :

$$p(n) = e^{-\beta} \cdot \frac{\beta^n}{n!}, \quad \beta^n \doteq \beta_n, \quad n=1, 2, \dots; \quad \beta^0 \doteq 1. \tag{10.85}$$

Разлагаем  $e^{-\beta}$ :

$$\begin{aligned}
 e^{-\beta} &= 1 - \beta + \frac{\beta^2}{2!} - \frac{\beta^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{\beta^k}{k!} + \dots, \\
 \beta^r \doteq \beta_r, \quad r &= 1, 2, \dots; \quad \beta^0 \doteq 1. \tag{10.86}
 \end{aligned}$$

Подставляя (10.86) в (10.85), получаем из этого символического разложения

$$p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_{n+k}}{n! k!}, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \tag{10.87}$$

Наконец, ввиду (10.67) имеем

$$p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k}^k \gamma_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.88)$$

Это — соотношение, обратное к (10.67).

### УПРАЖНЕНИЯ

**10А.** Вычислить числа Стирлинга  $s(9, r), s(10, r), \bar{s}(9, r), \bar{s}(10, r)$ .

**10Б.** Рассмотрим экспоненциальное  $z$ -преобразование  $s^e(z, r)$  для последовательности  $s(n, r)$ :

$$s^e(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n, r) \frac{z^n}{n!} = e^{zs}(\cdot, r), \quad s(0, 0) = 1, \quad r \leq n.$$

В разложении  $e^{zs}(\cdot, r)$  члены  $s(\cdot, r)^n$  заменяются на  $s(n, r)$ .

Показать, что  $s^e(z, r)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1+z) \frac{d}{dz} s^e(z, r) = s^e(z, r-1),$$

решение которого есть

$$s^e(z, r) = \frac{\ln(1+z)^r}{r!}.$$

**10В.** Доказать, что

$$\bar{s}(n+1, r) = \sum_{i=0}^n C_n^i \bar{s}(i, r-1).$$

**10Г.** Показать, что оператор  $(zD)^n$  (см. (6.26)) и оператор  $z^n D^n$  удовлетворяют уравнениям

$$(zD)^n = \sum_{r=0}^n \bar{s}(n, r) z^r D^r, \quad z^n D^n = \sum_{r=0}^n s(n, r) (zD)^r.$$

**10Д.** Вычислить элементы первых пяти строк и столбцов матриц  $\|s_2\|$  и  $\|\bar{s}_2\|$  — числа Белла первого и второго рода порядка 2.

**10Е.** Представить с помощью формулы Бруно  $y_z^{(n)}$  как функции от  $y_u^{(k)}$ ,  $k \leq n$ , и  $u^{(k)}$ ,  $k \leq n$ , для  $n = 6$ .

**10Ж.** Вычислить  $a_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , и  $\alpha^*(z)$  для следующих функций  $p(n)$ :

а)  $p(N, n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$ ,  $0 < p < 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ;    б)  $p(n) = \begin{cases} p(1-p)^{n-1}, & 0 < p < 1, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0, & n = 0; \end{cases}$     в)  $p(n, r) = C_{n+r-1}^n p^r (1-p)^n$ ,

$0 < p < 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $r + n \geq 2$ ,  $r = 1, 2, \dots$ ;    г)  $p(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\lambda > 0$ .

**10З.** Вычислить факториальные моменты  $\beta_k$  и биномиальные моменты  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , для функций из упражнения 10Ж.

## ГЛАВА II

### РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ПЕРЕСЧЕТА

---

#### § 11. Введение

Мы ознакомим теперь читателя с наиболее общим методом пересчета, который можно назвать «методом просеивания» или «комбинаторным просеиванием». Принцип его прост: с любым свойством  $\mathcal{P}$  можно связать его расщепление на некотором множестве  $A$ , в соответствии с которым  $A$  разбивается на две части: подмножество  $A_1$ , образованное элементами, обладающими свойством  $\mathcal{P}$ , и  $A_2$ , образованное элементами, не обладающими свойством  $\mathcal{P}$ , т. е. обладающими свойством  $\bar{\mathcal{P}}$ . Выбирая свойства подходящим образом, можно последовательным просеиванием пересчитать подмножества с наложенными на них теми или иными ограничениями.

Эти методы давно известны, их можно найти в работах математиков Бернулли (XVIII век). Веком позже Сильва указал общие формулы просеивания (или пропускания через решето; в теории чисел этот метод известен под названием «решета Эратосфена»). Но только в работах выдающегося современного математика Пойя подобные методы оказались исключительно плодотворными.

Принцип просеивания применим не только к пересчету, но также к перечислению и оптимизации. Перечисление с помощью латинских прямоугольников — метод, который осуществляет исключение путем разделения. Оптимизация по методу «ветвления и ограничения» и принцип оптимальности Беллмана — Понtryгина также находятся в рамках этих понятий. В последующих главах общность этих методов проявится более четко.

#### § 12. Формула включения и исключения

Пусть  $A$  — конечное множество и  $A_1 \subset A$ . Будем обозначать через  $\bar{A}_1$  дополнение  $A_1$  по отношению к  $A$ , а через  $\text{Card } A$  — число элементов в  $A$ . Тогда

$$\bar{A}_1 \cup A_1 = A \Rightarrow \text{Card } \bar{A}_1 = \text{Card } A - \text{Card } A_1. \quad (12.1)$$

Если  $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}$ , то

$$(\overline{\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2}) \cup (\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) = \mathbf{A} \Rightarrow \text{Card}(\overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2}}) = \text{Card } \mathbf{A} - \text{Card } \mathbf{A}_1 - \text{Card } \mathbf{A}_2 + \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2). \quad (12.2)$$

В самом деле<sup>1)</sup>,

$$\overline{\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2} = \overline{\mathbf{A}_1} \cap \overline{\mathbf{A}_2} \quad (12.3)$$

и

$$\overline{\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2, \quad (12.4)$$

откуда

$$\overline{\mathbf{A}_1} \cap \overline{\mathbf{A}_2} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \quad (12.5)$$

и

$$\text{Card}(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) = \text{Card } \mathbf{A}_1 + \text{Card } \mathbf{A}_2 - \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2). \quad (12.6)$$

Покажем, что формула (12.2) обобщается на случай  $n$  подмножеств  $\mathbf{A}_i \subset \mathbf{A}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2} \cap \dots \cap \overline{\mathbf{A}_{n-1}} \cap \overline{\mathbf{A}_n}}) &= \text{Card } \mathbf{A} - \text{Card } \mathbf{A}_1 - \\ &- \text{Card } \mathbf{A}_2 - \dots - \text{Card } \mathbf{A}_n + \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) + \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3) + \dots \\ &\dots + \text{Card}(\mathbf{A}_{n-1} \cap \mathbf{A}_n) - \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3) - \dots \\ &\dots - \text{Card}(\mathbf{A}_{n-2} \cap \mathbf{A}_{n-1} \cap \mathbf{A}_n) + \dots \\ &\dots + (-1)^n \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \dots \cap \mathbf{A}_n). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Действуем по индукции. Имеем

$$\begin{aligned} \text{Card}(\overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2} \cap \dots \cap \overline{\mathbf{A}_n}}) &= \\ &= \text{Card}(\overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2} \cap \dots \cap \overline{\mathbf{A}_{n-1}}}) - \text{Card}(\overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2} \cap \dots \cap \overline{\mathbf{A}_n}}). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Предположим, что (12.7) выполняется для случая  $n-1$  подмножеств  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2} \cap \dots \cap \overline{\mathbf{A}_{n-1}}}) &= \text{Card } \mathbf{A} - \text{Card } \mathbf{A}_1 - \dots \\ &\dots - \text{Card } \mathbf{A}_{n-1} + \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) + \dots + \text{Card}(\mathbf{A}_{n-2} \cap \mathbf{A}_{n-1}) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \dots \cap \mathbf{A}_{n-1}). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Рассмотрим следующие подмножества множества  $\mathbf{A}_n$ :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_n}, \dots, \overline{\mathbf{A}_{n-1} \cap \mathbf{A}_n}, \overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2} \cap \mathbf{A}_n}, \dots, \overline{\mathbf{A}_{n-2} \cap \overline{\mathbf{A}_{n-1}} \cap \mathbf{A}_n}, \dots \\ \dots, \overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2} \cap \dots \cap \overline{\mathbf{A}_{n-1}} \cap \mathbf{A}_n}. \end{aligned}$$

Применяя (12.9) с  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n$ , имеем

$$\begin{aligned} \text{Card}(\overline{\mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}_2} \cap \dots \cap \overline{\mathbf{A}_{n-1}} \cap \mathbf{A}_n}) &= \\ &= \text{Card } \mathbf{A}_n - \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_n) - \dots - \text{Card}(\mathbf{A}_{n-1} \cap \mathbf{A}_n) + \\ &+ \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_n) + \dots + \text{Card}(\mathbf{A}_{n-2} \cap \mathbf{A}_{n-1} \cap \mathbf{A}_n) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \dots \cap \mathbf{A}_{n-1} \cap \mathbf{A}_n). \end{aligned} \quad (12.10)$$

<sup>1)</sup> По хорошо известной теореме де Моргана.

Подставляя (12.10) и (12.9) в (12.8), получаем (12.7). Таким образом, с учетом (12.2) формула (12.7) доказана по индукции.

Эту формулу называют формулой включения и исключения. Часто представляют ее в таком виде:

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \dots \cap \mathbf{A}_k \cap \bar{\mathbf{A}}_{k+1} \cap \bar{\mathbf{A}}_{k+2} \cap \dots \cap \bar{\mathbf{A}}_n) &= \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \dots \cap \mathbf{A}_k) - \\ &- \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \dots \cap \mathbf{A}_k \cap \mathbf{A}_{k+1}) - \dots - \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \dots \cap \mathbf{A}_k \cap \mathbf{A}_n) + \\ &+ \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \dots \cap \mathbf{A}_k \cap \mathbf{A}_{k+1} \cap \mathbf{A}_{k+2}) + \dots \\ &\dots + \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \dots \cap \mathbf{A}_k \cap \mathbf{A}_{n-1} \cap \mathbf{A}_n) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-k} \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \dots \cap \mathbf{A}_k \cap \mathbf{A}_{k+1} \cap \mathbf{A}_{k+2} \cap \dots \cap \mathbf{A}_n). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Формулы (12.7) и (12.11) играют основную роль в перечислении подмножеств, обладающих заданными свойствами. Посмотрим на эти формулы с другой точки зрения.

Пусть элементы  $\mathbf{A}_i \subset \mathbf{A}$  обладают свойством  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда мы скажем, что подмножество  $\mathbf{A}_{i_1} \cap \mathbf{A}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbf{A}_{i_k}$  обладает свойством  $\mathcal{P}_{i_1} \wedge \mathcal{P}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{P}_{i_k}$ . Таким образом, если элементы  $\mathbf{A}$  могут обладать  $n$  различными свойствами, то число элементов  $\mathbf{A}$ , обладающих  $k$  *указанными* свойствами и не обладающих  $n - k$  остальными, дается формулой (12.11).

**Общий метод «просеивания» или «пропускания через решето».** Решето Сильва — Сильвестра. Формула (12.11) описывает последовательный процесс пересчета, называемый *решетом Сильва — Сильвестра*. Рассмотрим предварительно пример.

Пример. Рассмотрим множество

$$\mathbf{A} = \{0, 1, 2, \dots, 10\} \quad (12.12)$$

и следующие свойства:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1: A \in \mathbf{A} &\text{ — четное число,} \\ \mathcal{P}_2: A \in \mathbf{A} &\text{ и } A > 6, \\ \mathcal{P}_3: A \in \mathbf{A} &\text{ и } 2 < A < 8. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Подсчитаем число элементов  $\mathbf{A}$ , обладающих свойством:

$\mathcal{P}_1 \wedge$  не  $\mathcal{P}_2 \wedge$  не  $\mathcal{P}_3$ , т. е.  $\mathcal{P}_1 \wedge \bar{\mathcal{P}}_2 \wedge \bar{\mathcal{P}}_3$ . Обозначим подмножества, соответствующие свойствам  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$ , через  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \bar{\mathbf{A}}_2 \cap \bar{\mathbf{A}}_3) &= \text{Card}(\mathbf{A}_1) - \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) - \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3) + \\ &+ \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3). \end{aligned} \quad (12.14)$$

«Просеиваем» сначала  $\mathbf{A}$  через  $\mathcal{P}_1$ :  $\text{Card } \mathbf{A}_1 = 6$ . Затем просеиваем  $\mathbf{A}_1$  через  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{P}_3$ :  $\text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) = 2$ ,  $\text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3) = 2$ . Просеиваем  $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2$  через  $\mathcal{P}_3$ :  $\text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3) = 0$ . Итак,

$$\text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \bar{\mathbf{A}}_2 \cap \bar{\mathbf{A}}_3) = 6 - 2 - 2 + 0 = 2. \quad (12.15)$$

Формула (12.11) не позволяет, однако, перечислить элементы искомого множества. Находим его, выписывая последовательно:

$$\mathbf{A}_1 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \quad \mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}}_2 = \{0, 2, 4, 6\}, \quad \mathbf{A}_1 \cap \overline{\mathbf{A}}_2 \cap \overline{\mathbf{A}}_3 = \{0, 2\}. \quad (12.16)$$

Разумеется, для множества с небольшим числом элементов проще выписать искомое подмножество, однако это трудно сделать при большой мощности множества.

**Случай не выделенных множеств.** Иногда подмножества не выделяются, а фиксируется только число свойств, которыми обладают их элементы. Положим

$$w(r) = \sum \text{Card}(\mathbf{A}_{i_1} \cap \mathbf{A}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbf{A}_{i_r}), \quad (12.17)$$

где суммирование производится по всем неупорядоченным  $r$ -выборкам  $[\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \dots, \mathbf{A}_{i_r}]$  и

$$w(0) = \text{Card } \mathbf{A}. \quad (12.18)$$

Обозначим через  $W(k)$  число элементов  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющих в точности  $k$  свойствам, не уточняя, каким именно, или, что тоже самое, не удовлетворяющих в точности  $n - k$  свойствам. В силу (12.11) имеем

$$\begin{aligned} W(k) = w(k) - C_{k+1}^1 w(k+1) + C_{k+2}^2 w(k+2) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-k} C_n^{n-k} w(n). \end{aligned} \quad (12.19)$$

В частности, если  $k=0$ , т. е. никакое свойство не выполняется, то

$$W(0) = w(0) - w(1) + w(2) - \dots + (-1)^n w(n). \quad (12.20)$$

**Пример.** Рассмотрим предыдущий пример (см. (12.13)):

$$w(0) = \text{Card } \mathbf{A} = 11,$$

$$w(1) = \text{Card } \mathbf{A}_1 + \text{Card } \mathbf{A}_2 + \text{Card } \mathbf{A}_3 = 6 + 4 + 5 = 15,$$

$$\begin{aligned} w(2) = \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) + \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3) + \text{Card}(\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3) = \\ = 2 + 2 + 1 = 5, \quad w(3) = \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(0) = 11 - 15 + 5 - 0 = 1, \quad W(1) = w(1) - C_2^1 w(2) + C_3^2 w(3) = \\ = 15 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 5, \quad W(2) = w(2) - C_3^1 w(3) = \\ = 5 - 3 \cdot 0 = 5. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Таким образом,

одно число  $A \in \mathbf{A}$  не удовлетворяет никакому из указанных свойств:  $A=1$ ;

пять чисел  $A$  удовлетворяют в точности одному свойству:  $A=0$  (только  $\mathcal{P}_1$ ),  $A=2$  (только  $\mathcal{P}_1$ ),  $A=3$  (только  $\mathcal{P}_3$ ),  $A=5$  (только  $\mathcal{P}_3$ ),  $A=9$  (только  $\mathcal{P}_2$ );

пять чисел  $A$  удовлетворяют в точности двум свойствам:  $A=4$  (только  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_3$ ),  $A=6$  (только  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_3$ ),  $A=7$  (только  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{P}_3$ ),  $A=8$  (только  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ ),  $A=10$  (только  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ ); ни одно из чисел  $A$  не удовлетворяет в точности трем свойствам.

**Общая формула включения и исключения.** Пусть  $\mathbf{A}$  — конечное множество. Каждому элементу  $a_i \in \mathbf{A}$  припишем вес<sup>1)</sup>  $\lambda(a_i) \in \mathbb{R}$ . Пусть  $\mathfrak{B}$  — множество из  $n$  свойств  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ , которым могут удовлетворять элементы  $\mathbf{A}$ . Обозначим через

$$\Lambda(\mathcal{P}_{i_1}, \mathcal{P}_{i_2}, \dots, \mathcal{P}_{i_r}) \quad (12.22)$$

сумму весов элементов  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющих свойствам  $\mathcal{P}_{i_1}, \mathcal{P}_{i_2}, \dots, \mathcal{P}_{i_r}$ ; полагаем  $\Lambda(\mathcal{P}_{i_1}, \mathcal{P}_{i_2}, \dots, \mathcal{P}_{i_r}) = 0$ , если ни один из элементов  $\mathbf{A}$  не удовлетворяет ни одному из указанных свойств.

Пусть

$$\pi(r) = \sum \Lambda(\mathcal{P}_{i_1}, \mathcal{P}_{i_2}, \dots, \mathcal{P}_{i_r}), \quad (12.23)$$

где суммирование производится по всем  $r$ -элементным подмножествам множества  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n\}$ , а  $\pi(0)$  — сумма весов всех элементов  $\mathbf{A}$ . Далее, пусть  $\Pi(k)$  — сумма весов элементов  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющих в точности  $k$  свойствам из  $\mathfrak{B}$ :

$$\begin{aligned} \Pi(k) = \pi(k) - C_{k+1}^k \pi(k+1) + C_{k+2}^k \pi(k+2) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-k} C_n^k \pi(n). \end{aligned} \quad (12.24)$$

Если вес каждого элемента из  $\mathbf{A}$  равен 1, то

$$\Lambda(\mathcal{P}_{i_1}, \mathcal{P}_{i_2}, \dots, \mathcal{P}_{i_r}) = \text{Card}(\mathbf{A}_{i_1} \cap \mathbf{A}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbf{A}_{i_r}), \quad (12.25)$$

и

$$\pi(r) = w(r), \quad (12.26)$$

$$\Pi(r) = W(r). \quad (12.27)$$

Формула (12.24) сводится к (12.19).

Докажем (12.24), следуя Райзеру [35]. Пусть элемент  $a_i \in \mathbf{A}$  с весом  $\lambda(a_i)$  обладает в точности  $s$  свойствами из  $\mathfrak{B}$ . При  $s < k$   $\lambda(a_i)$  не входит в правую часть (12.24). При  $s = k$  вклад  $a_i$  в правую часть (12.24) равен  $\lambda(a_i)$ , а при  $s > k$  равен

$$[C_s^k - C_{k+1}^k C_s^{k+1} + C_{k+2}^k C_s^{k+2} - \dots + (-1)^{s-k} C_s^k C_s^s] \lambda(a_i). \quad (12.28)$$

Легко видеть, что

$$C_j^k C_s^j = C_s^k C_{s-j}^{s-j}, \quad k \leq j \leq s. \quad (12.29)$$

Подставляя (12.29) в (12.28), получаем

$$C_s^k [C_{s-k}^{s-k} - C_{s-k-1}^{s-k-1} + C_{s-k-2}^{s-k-2} - \dots + (-1)^{s-k} C_{s-k}^0] \lambda(a_i) \quad (12.30)$$

<sup>1)</sup> Вообще говоря,  $\lambda(a_i)$  — элемент произвольного поля.

или

$$C_s^k [C_{s-k}^0 - C_{s-k}^1 + C_{s-k}^2 - \dots + (-1)^{s-k} C_{s-k}^{s-k}] \lambda(a_i). \quad (12.31)$$

Но в силу (8.8) выражение в скобках равно нулю, т. е. при  $s > k$  вклад  $a_i$  в правую часть (12.24) равен нулю. Таким образом, член справа в (12.24) есть сумма весов элементов из  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющих в точности  $k$  свойствам из  $\mathfrak{P}$ . При  $k = 0$

$$\Pi(0) = \pi(0) - \pi(1) + \pi(2) - \dots + (-1)^n \pi(n), \quad (12.32)$$

что обобщает (12.20).

Пример. Пусть элементы множества  $\mathbf{A} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  удовлетворяют следующим свойствам:

$\mathcal{P}_1$ : быть кратным 2;

$\mathcal{P}_2$ : быть кратным 3;

$\mathcal{P}_3$ : быть больше 3;

$\mathcal{P}_4$ : быть меньше 7.

Этим свойствам соответствуют подмножества:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8\}, & \mathbf{A}_2 &= \{0, 3, 6, 9\}, & \mathbf{A}_3 &= \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ \mathbf{A}_4 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Зададим веса  $\lambda(a_i)$  элементов  $a_i \in \mathbf{A}$  таблицей:

$a_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda(a_i)$	2	5	6	-1	0	2	5	-3	6	7

Для вычисления по формуле (12.24) требуются следующие величины:

$$\begin{aligned} \pi(0) &= 2 + 5 + 6 - 1 + 0 + 2 + 5 - 3 + 6 + 7 = 29; \\ \Lambda(\mathcal{P}_1) &= \Lambda(\mathbf{A}_1) = \Lambda\{0, 2, 4, 6, 8\} = 2 + 6 + 0 + 5 + 6 = 19, \\ \Lambda(\mathcal{P}_2) &= \Lambda(\mathbf{A}_2) = \Lambda\{0, 3, 6, 9\} = 2 - 1 + 5 + 7 = 13, \\ \Lambda(\mathcal{P}_3) &= \Lambda(\mathbf{A}_3) = \Lambda\{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = 0 + 2 + 5 - 3 + 6 + 7 = 17, \\ \Lambda(\mathcal{P}_4) &= \Lambda(\mathbf{A}_4) = \Lambda\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 2 + 5 + 6 - 1 + 0 + 2 + 5 = 19; \\ \pi(1) &= \Lambda(\mathcal{P}_1) + \Lambda(\mathcal{P}_2) + \Lambda(\mathcal{P}_3) + \Lambda(\mathcal{P}_4) = 19 + 13 + 17 + 19 = 68; \\ \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2) &= \Lambda(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) = \Lambda\{0, 6\} = 2 + 5 = 7, \\ \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_3) &= \Lambda(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3) = \Lambda\{4, 6, 8\} = 0 + 5 + 6 = 11, \\ \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_4) &= \Lambda(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_4) = \Lambda\{0, 2, 4, 6\} = 2 + 6 + 0 + 5 = 13, \\ \Lambda(\mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3) &= \Lambda(\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3) = \Lambda\{6, 9\} = 5 + 7 = 12, \\ \Lambda(\mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_4) &= \Lambda(\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_4) = \Lambda\{0, 3, 6\} = 2 - 1 + 5 = 6, \\ \Lambda(\mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4) &= \Lambda(\mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4) = \Lambda\{4, 5, 6\} = 0 + 2 + 5 = 7; \end{aligned} \quad (12.34)$$

$$\begin{aligned}
\pi(2) &= \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2) + \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_3) + \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_4) + \Lambda(\mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3) + \\
&+ \Lambda(\mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_4) + \Lambda(\mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4) = 7 + 11 + 13 + 12 + 6 + 7 = 56; \\
\Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3) &= \Lambda\{\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3\} = \Lambda\{6\} = 5, \\
\Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_4) &= \Lambda\{\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_4\} = \Lambda\{0, 6\} = 2 + 5 = 7, \\
\Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4) &= \Lambda\{\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4\} = \Lambda\{4, 6\} = 0 + 5 = 5, \\
\Lambda(\mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4) &= \Lambda\{\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4\} = \Lambda\{6\} = 5; \\
\pi(3) &= \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3) + \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_4) + \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4) + \\
&+ \Lambda(\mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4) = 5 + 7 + 5 + 5 = 22; \\
\Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4) &= \Lambda\{\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4\} = \Lambda\{6\} = 5; \\
\pi(4) &= \Lambda(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4) = 5.
\end{aligned}$$

Сумма весов элементов, не удовлетворяющих ни одному из свойств, равна

$$\begin{aligned}
\Pi(0) &= \pi(0) - C_1^0 \pi(1) + C_2^0 \pi(2) - C_3^0 \pi(3) + C_4^0 \pi(4) = \\
&= \pi(0) - \pi(1) + \pi(2) - \pi(3) + \pi(4) = 29 - 68 + 56 - 22 + 5 = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда еще не следует, что не существует элемента, не удовлетворяющего ни одному из указанных свойств, хотя в этом примере такого элемента нет.

Сумма весов элементов, удовлетворяющих одному и только одному свойству, равна

$$\begin{aligned}
\Pi(1) &= \pi(1) - C_2^1 \pi(2) + C_3^1 \pi(3) - C_4^1 \pi(4) = \\
&= \pi(1) - 2\pi(2) + 3\pi(3) - 4\pi(4) = 68 - 2 \cdot 56 + 3 \cdot 22 - 4 \cdot 5 = 2.
\end{aligned}$$

Такими элементами являются:

$$\begin{aligned}
1 \text{ (только } \mathcal{P}_4\text{): } \lambda(1) &= 5, \\
7 \text{ (только } \mathcal{P}_3\text{): } \lambda(7) &= -3.
\end{aligned}$$

Сумма их весов  $\lambda(1) + \lambda(7) = 5 - 3 = 2$ .

Сумма весов элементов, удовлетворяющих в точности двум свойствам, равна  $\Pi(2) = \pi(2) - C_3^2 \pi(3) + C_4^2 \pi(4) = \pi(2) - 3\pi(3) + 6\pi(4) = 56 - 3 \cdot 22 + 6 \cdot 5 = 20$ . Такими элементами являются:

$$\begin{aligned}
2 \text{ (только } \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_4\text{): } \lambda(2) &= 6, \\
3 \text{ (только } \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_4\text{): } \lambda(3) &= -1, \\
5 \text{ (только } \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4\text{): } \lambda(5) &= 2, \\
8 \text{ (только } \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_3\text{): } \lambda(8) &= 6, \\
9 \text{ (только } \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3\text{): } \lambda(9) &= 7.
\end{aligned}$$

Сумма их весов

$$\lambda(2) + \lambda(3) + \lambda(5) + \lambda(8) + \lambda(9) = 6 - 1 + 2 + 6 + 7 = 20.$$

Сумма весов элементов, удовлетворяющих в точности трем свойствам, равна

$$\Pi(3) = \pi(3) - C_4^3 \pi(4) = \pi(3) - 4\pi(4) = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Такими элементами являются:

$$0 \text{ (только } \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_4\text{): } \lambda(0) = 2,$$

$$4 \text{ (только } \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4\text{): } \lambda(4) = 0.$$

Сумма их весов

$$\lambda(0) + \lambda(4) = 2 + 0 = 2.$$

Сумма весов элементов, удовлетворяющих в точности четырем свойствам, равна

$$\Pi(4) = \pi(4) = 5.$$

Таким элементом является  $6(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_4)$ :  $\lambda(6) = 5$ . Итак, множество  $\mathbf{A}$  разбивается на подмножества, обладающие

ни одним из свойств:

$\emptyset$

в точности одним свойством: {1, 7}

в точности двумя свойствами: {2, 3, 5, 8, 9}

в точности тремя свойствами: {0, 4}

в точности четырьмя свойствами: {6}.

**Символическая запись формулы включения и исключения.** Риордан [36] связал с принципом включения и исключения некоторые символические операции. Чтобы изложить это, нам потребуются результаты § 10 (см. (10.62)–(10.88)).

Пусть подмножества  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \mathbf{A}_i \subset \mathbf{A}, i = 1, 2, \dots, n$ , обладают свойствами  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$  соответственно. Полагаем

$$N = \text{Card } \mathbf{A}; \tag{12.35}$$

$$w(0) = 1,$$

$$w(1) = \sum_{i=1}^n \text{Card } \mathbf{A}_i,$$

$$w(2) = \sum_{i, j=1}^n \text{Card} (\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j), \tag{12.36}$$

• • • • • • • • • •

$$w(n) = \text{Card} (\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \dots \cap \mathbf{A}_n);$$

$$s(0) = \frac{w(0)}{N},$$

$$s_1 = \frac{w(1)}{N}, \tag{12.37}$$

• • • •

$$s_n = \frac{w(n)}{n};$$

$$S_0 = \frac{W(0)}{N} \quad (W(0) \text{ берется из (12.20)}). \tag{12.38}$$

Деля (12.20) на  $N$ , записываем

$$S_0 = 1 - s_1 + s_2 - s_3 + \dots + (-1)^n s_n = (1 + s)^{-1}, \\ s^r \doteq s_r, \quad r = 1, 2, \dots; \quad s_{n+i} = 0, \quad i > 0. \quad (12.39)$$

Точно так же

$$S_k = \frac{W(k)}{N} \quad (W(k) \text{ берется из (12.19)}), \quad (12.40)$$

$$S_k = s_k - C_{k+1}^1 s_{k+1} + C_{k+2}^2 s_{k+2} - \dots + (-1)^{n-k} C_n^k s_n{}^1 = \\ = s^k (1 + s)^{-k-1}, \quad s^r \doteq s_r, \quad r = 1, 2, \dots, s^0 \doteq 1, \\ s_{n+i} = 0, \quad i > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (12.41)$$

Заметим, что величины  $S_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , можно рассматривать как вероятности того, что элемент обладает в точности  $k$  свойствами. Перепишем формулу (10.88):

$$p(k) = \gamma_k - C_{k+1}^1 \gamma_{k+1} + C_{k+2}^2 \gamma_{k+2} - \dots \\ \dots + (-1)^r C_{k+r}^r \gamma_{k+r} + \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.42)$$

Очевидно,

$$s_k = \gamma_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (12.43)$$

Итак, числа  $s_k$  — биномиальные моменты распределения с вероятностями  $S_k$ . В силу (10.67)

$$s_k = \sum_{j=k}^{\infty} C_j^k S_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (12.44)$$

$$s_k = S_k + C_{k+1}^1 S_{k+1} + C_{k+2}^2 S_{k+2} + \dots + C_{r+k}^r S_{k+r} + \dots \quad (12.45)$$

Пусть  $S^*(z)$  — производящая функция для  $S_k$ :

$$S^*(z) = S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \dots + S_n z^n. \quad (12.46)$$

Выписываем факториальные моменты  $r_k$  для  $S_j$  (согласно (10.65))

$$r_k = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) S_n \quad (12.47)$$

и производящую функцию для них

$$r^*(z) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \dots + r_n z^n. \quad (12.48)$$

В силу (10.80)

$$S^*(z) = e^{r(z-1)}, \quad r^i \doteq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad r^0 \doteq 1. \quad (12.49)$$

Введем производящую функцию для биномиальных моментов  $s_k$ :

$$s^*(z) = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots + s_n z^n + \dots, \quad s_{n+i} = 0, \quad i > 0. \quad (12.50)$$

<sup>1)</sup> Условие  $s_{n+i} = 0$ ,  $i > 0$ , здесь существенно.

Тогда в силу (10.80)

$$S^*(z) = s^*(z-1) = s_0 + s_1(z-1) + s_2(z-1)^2 + \dots \\ \dots + s_n(z-1)^n + \dots = [1 - s(z-1)]^{-1} (s_{n+i} = 0, i > 0), \\ s^r \doteq s_r, \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad s_0 \doteq 1. \quad (12.51)$$

Теперь найдем производящую функцию для  $W(k)$ . Имеем

$$W^*(z) = W(0) + W(1)z + W(2)z^2 + \dots \\ \dots + W(n)z^n + \dots, \quad W(n+i) = 0, \quad i > 0, \quad (12.52)$$

и

$$W(k) = NS_k \Rightarrow W^*(z) = NS^*(z). \quad (12.53)$$

Таким образом, производящая функция для  $W(k)$  представляется в виде

$$W^*(z) = N[1 - s(z-1)]^{-1} = \sum_{k=0}^n Ns_k(z-1)^k = \sum_{k=0}^n W(k)(z-1)^k, \\ s^r \doteq s_r, \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad s_0 \doteq 1. \quad (12.54)$$

**Пример.** Вновь рассмотрим пример (см. (12.13)). В силу (12.21)

$$w(0) = 11, \quad w(1) = 15, \quad w(2) = 5, \quad w(3) = 0;$$

$$W^*(z) = w(0) + w(1)(z-1) + w(2)(z-1)^2 = \\ = 11 + 15(z-1) + 5(z-1)^2 = 1 + 5z + 5z^2. \quad (12.55)$$

Получаем коэффициенты полинома  $W^*(z)$ , уже найденные в (12.21).

## УПРАЖНЕНИЯ

**12А.** Дано множество  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  и свойства:

$\mathcal{P}_1: A \in \mathbf{A}$  кратно 3,

$\mathcal{P}_2: A \in \mathbf{A}$  кратно 5,

$\mathcal{P}_3: A \in \mathbf{A}$  и  $2 \leq A < 7$ ,

$\mathcal{P}_4: A \in \mathbf{A}$  и  $A^2 + A > 4$ .

Сколько элементов обладают свойством: а)  $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_4$ ; б)  $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \bar{\mathcal{P}}_4$ ; в)  $\mathcal{P}_1 \wedge \bar{\mathcal{P}}_2 \wedge \bar{\mathcal{P}}_3 \wedge \mathcal{P}_4$ ; г)  $\mathcal{P}_1 \vee (\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2)$ , где  $\vee$  обозначает неисключающее «или».

**12Б.** Сколько элементов из  $\mathbf{A}$  в упражнении 12А обладают в точности 0, 1, 2, 3 или 4 свойствами? Вычислить  $W^*(z)$ .

**12В.** Рассмотрим множество  $\mathbf{A}$ , образованное парами  $(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ , и следующие свойства:

$\mathcal{P}_1: i + j$  четно,

$\mathcal{P}_2: j$  нечетно,

$\mathcal{P}_3: i$  четно,

$\mathcal{P}_4: ij < 16$ ,

$\mathcal{P}_5: i = 2j$ .

Сколько элементов обладает свойством: а)  $\mathcal{P}_1 \wedge \bar{\mathcal{P}}_2 \wedge \mathcal{P}_3$ , б)  $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \bar{\mathcal{P}}_4$ , в)  $\mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3 \wedge \mathcal{P}_5$ .

**12Г.** Сколько элементов из  $\mathbf{A}$  в упражнении 12В обладают в точности 0, 1, 2, 3, 4 или 5 свойствами? Вычислить  $W^*(z)$ .

**12Д.** Рассмотрим множество простых чисел  $\mathbf{A} = \{2, 3, 5, 7\}$ . Показать, что количество целых чисел, не превосходящих  $N$  и не делящихся на элементы из  $\mathbf{A}$ , равно

$$N - \sum \left[ \frac{N}{i} \right] + \sum \left[ \frac{N}{ij} \right] - \sum \left[ \frac{N}{ijk} \right] + \sum \left[ \frac{N}{ijkl} \right],$$

где  $\left[ \frac{N}{x} \right]$  — целая часть числа  $\frac{N}{x}$ , в  $\sum \left[ \frac{N}{i} \right]$  суммирование производится по всем элементам из  $\mathbf{A}$ , в  $\sum \left[ \frac{N}{ij} \right]$  — по всем парам  $[i, j]$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in \mathbf{A}$ , в  $\sum \left[ \frac{N}{ijk} \right]$  — по всем триадам  $[i, j, k]$  без повторения и в  $\sum \left[ \frac{N}{ijkl} \right]$  — по всем неупорядоченным четверкам  $[i, j, k, l]$  без повторения.

**12Е.** Обозначим через  $N(n)$  количество натуральных чисел, меньших  $n$  и взаимно простых с ним. Показать, что

$$N(n) = n \left( 1 - \frac{1}{n_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{n_2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{n_r} \right),$$

где  $n_1, n_2, \dots, n_r$  — простые делители  $n$ .

### § 13. Использование общего метода решета в теории чисел

Рассмотрим применение формул предыдущего параграфа в элементарной теории чисел.

Пусть  $x \in \mathbf{R}^+$ . Введем следующие обозначения:  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ; н. о. д.  $(a_i, a_j)$ ,  $a_i, a_j \in \mathbf{N}$ ,  $(a_i, a_j) \neq (0, 0)$ , — наибольший общий делитель  $a_i$  и  $a_j$  ( $a_i$  и  $a_j$  взаимно просты  $\Leftrightarrow$  н. о. д.  $(a_i, a_j) = 1$ );  $a_i | a_j$  —  $a_i$  делит  $a_j$ ,  $a_i \nmid a_j$  —  $a_i$  не делит  $a_j$ .

**Теорема I.** Пусть  $\mathbf{A} = \{1, 2, \dots, n\}$  и  $a_1, a_2, \dots, a_r$ ,  $a_i \in \mathbf{N}_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , попарно взаимно просты. Количество целых чисел  $k$  таких, что  $0 < k \leq n$ ,  $a_i \nmid k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , равно

$$n - \sum_{1 \leq i \leq r} \left[ \frac{n}{a_i} \right] + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \left[ \frac{n}{a_i a_j} \right] - \dots + (-1)^r \left[ \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_r} \right]. \quad (13.1)$$

**Доказательство.** Обозначим

$$\mathbf{A}_i = \{k \in \mathbf{A} : a_i | k\} \quad (13.2)$$

и выпишем формулу (12.7):

$$\begin{aligned} \text{Card}(\bar{\mathbf{A}}_1 \cap \bar{\mathbf{A}}_2 \cap \dots \cap \bar{\mathbf{A}}_r) &= \text{Card } \mathbf{A} - \text{Card } \mathbf{A}_1 - \dots - \text{Card } \mathbf{A}_r + \\ &+ \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) + \dots + \text{Card}(\mathbf{A}_{r-1} \cap \mathbf{A}_r) - \dots \\ &\dots + (-1)^r \text{Card}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \dots \cap \mathbf{A}_r). \end{aligned} \quad (13.3)$$

Имеем

Card A =  $n$ ,

$$\text{Card } \mathbf{A}_i = \left[ \frac{n}{a_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$\text{Card}(\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j) = \left[ \frac{n}{a_i a_j} \right], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \quad (13.4)$$

$$\text{Card } (\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \dots \cap \mathbf{A}_r) = \left[ \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_r} \right].$$

Подставляя (13.4) в (13.3), получаем (13.1).

**Числовой пример.** Пусть

$$\mathbf{A} = \{1, 2, \dots, 35\}, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 8. \quad (13.5)$$

Количество целых чисел, не превосходящих 35 и не делящихся ни на 3, ни на 7, ни на 8, равно

$$\begin{aligned}
n - \sum_{1 \leq i \leq 3} \left[ \frac{n}{a_i} \right] + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left[ \frac{n}{a_i a_j} \right] - \left[ \frac{n}{a_1 a_2 a_3} \right] = \\
= 35 - \left( \left[ \frac{35}{3} \right] + \left[ \frac{35}{7} \right] + \left[ \frac{35}{8} \right] \right) + \left( \left[ \frac{35}{3 \cdot 7} \right] + \left[ \frac{35}{3 \cdot 8} \right] + \left[ \frac{35}{7 \cdot 8} \right] \right) - \\
- \left[ \frac{35}{3 \cdot 7 \cdot 8} \right] = 35 - (11 + 5 + 4) + (1 + 1 + 0) - 0 = 17. \quad (13.6)
\end{aligned}$$

Рассмотрим другие приложения. Количество целых чисел  $k$  таких, что

$$0 < k \leq n, \quad \text{н. о. д.} \quad (k, n) = 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (13.7)$$

обозначают через  $\phi(n)$  и называют *функцией Эйлера*.

**Теорема II.** Пусть  $n \in \mathbf{N}_0$ . Тогда

$$\varphi(n) = n \prod_i \left(1 - \frac{1}{a_i}\right), \quad (13.8)$$

где произведение берется по всем простым делителям  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_n$ .

Доказательство. Так как все  $a_i$  делят  $n$  и взаимно просты, то имеем

$$\left[ \frac{n}{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}} \right] = \frac{n}{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}}. \quad (13.9)$$

По формуле (13.1)

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{n}{a_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{n}{a_i a_j} - \dots - (-1)^r \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_r} = \\ &= n \left[ 1 - \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{a_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{1}{a_i a_j} - \dots + (-1)^r \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_r} \right] = \\ &= n \left( 1 - \frac{1}{a_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{a_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{a_r} \right),\end{aligned}\quad (13.10)$$

т. е. получаем (13.8).

Пример. Пусть  $n = 84$ . Простыми делителями 84 являются 2, 3, 7; поэтому

$$\varphi(84) = 84 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{7} \right) = 24. \quad (13.11)$$

Выписываем все числа, взаимно простые с 2, 3, 7 и не превосходящие 84: 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 79, 83.

**Функция Мёбиуса.** Представим (13.8) в другом виде, используя функцию Мёбиуса  $\mu(n)$ , определяемую следующим образом:

$$\mu(1) = 1;$$

$$\mu(n) = 0, \quad \text{если } n \text{ делится на квадрат} \\ \text{простого числа}; \quad (13.12)$$

$$\mu(a_1 a_2 \dots a_r) = (-1)^r, \quad \text{если } a_i \text{ — различные простые} \\ \text{множители, } i = 1, 2, \dots, r.$$

Тогда

$$\varphi(n) = n \sum_k \frac{\mu(k)}{k}, \quad (13.13)$$

где суммирование производится по всем  $k$ , делящим  $n$  (включая 1).

Пример на функцию Мёбиуса. Имеем

$$\begin{aligned}\mu(1) &= 1, \quad \mu(2) = (-1)^1 = -1, \quad \mu(3) = (-1)^1 = -1, \\ \mu(4) &= \mu(2^2) = 0, \quad \mu(5) = (-1)^1 = -1, \\ \mu(6) &= \mu(2 \cdot 3) = (-1)^2 = 1, \quad \mu(7) = (-1)^1 = -1,\end{aligned}\quad (13.14)$$

$$\mu(8) = \mu(2^3) = 0,$$

$$\mu(9) = \mu(3^2) = 0, \dots, \mu(30) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5) = (-1)^3 = -1, \dots$$

При  $n = 84$  формула (13.13) дает

$$\varphi(84) = 84 \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{3 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right) = 24. \quad (13.15)$$

**Решето Эратосфена.** Известен следующий способ перечисления простых чисел  $p_i$ ,  $p_i \leq n$ : вычисляется  $c = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  и из последовательности 2, 3, ...,  $n$  вычеркиваются последовательно

все числа, кратные 2, затем кратные 3, ..., кратные  $c$ . Оставшиеся числа и есть искомые.

Используя теорему II, можно получить следующую формулу пересчета. Если через  $M(n)$  обозначить количество простых чисел  $q$  таких, что  $\sqrt{n} \leq q \leq n$ , то в силу (13.1)

$$M(n) = -1 + n - \sum_{1 \leq i \leq r} \left[ \frac{n}{p_i} \right] + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \left[ \frac{n}{p_i p_j} \right] - \dots + (-1)^r \left[ \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_r} \right], \quad (13.16)$$

где  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , — простые числа, не превосходящие  $\sqrt{n}$  (—1 в правой части добавляется, так как 1 не считается простым).

В силу (13.13)

$$M(n) = -1 + n \sum_k \frac{\mu(k)}{k}, \quad (13.17)$$

где суммирование в (13.17) производится по всем простым делителям  $n$  (включая 1).

Пример. Сколько простых среди чисел 2, 3, ..., 84? Имеем  $[V\sqrt{84}] = 9$ . Простыми числами между 2 и 9 будут 2, 3, 5, 7. Согласно (13.16)

$$M(84) = -1 + 84 - \left[ \frac{84}{2} \right] - \left[ \frac{84}{3} \right] - \left[ \frac{84}{5} \right] - \left[ \frac{84}{7} \right] + \left[ \frac{84}{2 \cdot 3} \right] + \left[ \frac{84}{2 \cdot 5} \right] + \\ + \left[ \frac{84}{2 \cdot 7} \right] + \left[ \frac{84}{3 \cdot 5} \right] + \left[ \frac{84}{3 \cdot 7} \right] + \left[ \frac{84}{5 \cdot 7} \right] - \left[ \frac{84}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] - \left[ \frac{84}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right] - \left[ \frac{84}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right] - \\ - \left[ \frac{84}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right] + \left[ \frac{84}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right] = -1 + 84 - 42 - 28 - 16 - 12 + \\ + 14 + 8 + 6 + 5 + 4 + 2 - 2 - 2 - 1 - 0 + 0 = 19. \quad (13.18)$$

Таким образом, имеется всего  $19 + 4 = 23$  простых числа среди 2, 3, ..., 84. Решего Эратосфена перечисляет их: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83.

## § 14. Задача о встречах. Беспорядки и совпадения

Рассмотрим множество из  $n$  элементов

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \quad (14.1)$$

и множество  $n$  ячеек, в которые размещаются эти элементы:

$$\mathbf{Q} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \quad (14.2)$$

Сколькими способами можно разместить  $n$  элементов в  $n$  ячейках (по одному в каждой) так, чтобы никакой элемент  $A_i$  не попал в ячейку  $a_i$ ? Здесь речь идет о знаменитой задаче,

предложенной Монмором и называемой *задачей о встречах*. Эта задача и ее обобщение, которое будет дано ниже, представляют интерес для различных приложений.

Перестановка<sup>1)</sup>, обладающая указанным свойством, называется *беспорядком* и обозначается через  $D_n$ .

Для перечисления беспорядков из  $n$  элементов мы будем использовать формулы, установленные в § 11. Рис. 9 дает пример беспорядка из 6 элементов.

Обозначим через  $\mathcal{P}_0$  свойство: перестановка  $P_i \in \mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}$  — множество всех  $n!$  перестановок) и такова, что  $A_i \neq a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; через  $\mathcal{P}_1$  — свойство:  $P_i$  обладает *совпадением*, т. е.

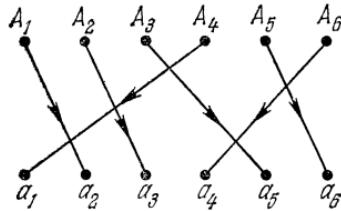


Рис. 9.

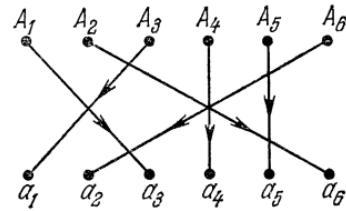


Рис. 10.

$A_i = a_i$  для одного и только одного значения  $i$  и  $A_i \neq a_i$  для остальных: через  $\mathcal{P}_r$  — свойство:  $P_i$  обладает  $r$  совпадениями, т. е.  $A_i = a_i$  в точности для  $r$  значений  $i$  и  $A_i \neq a_i$  для остальных. Например, перестановка, изображенная на рис. 10, обладает двумя совпадениями.

Следовательно, можно записать

$$\mathcal{P}_0 = \bar{\mathcal{P}}_1 \wedge \bar{\mathcal{P}}_2 \wedge \dots \wedge \bar{\mathcal{P}}_n. \quad (14.3)$$

Если нам известно  $\mathbf{P}_r \subset \mathbf{P}$ , соответствующее  $\mathcal{P}_r$ , то мы можем воспользоваться формулами (12.7) и (12.20). Имеем

$$\begin{aligned} \text{Card } (\bar{\mathbf{P}}_1 \cap \bar{\mathbf{P}}_2 \cap \dots \cap \bar{\mathbf{P}}_n) &= \text{Card } \mathbf{P} - \sum \text{Card } \mathbf{P}_i + \\ &+ \sum \text{Card } (\mathbf{P}_i \cap \mathbf{P}_j) + \dots + (-1)^n \text{Card } (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 \cap \dots \cap \mathbf{P}_n). \end{aligned} \quad (14.4)$$

Если обозначим, как и раньше (см. (12.17)),

$$w(r) = \sum \text{Card } (\mathbf{P}_{i_1} \cap \mathbf{P}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbf{P}_{i_r}), \quad (14.5)$$

то

$$W(0) = w(0) - w(1) + w(2) - \dots + (-1)^n w(n). \quad (14.6)$$

Легко вычислить  $w(r)$ :

$$w(r) = C_n^r (n-r)! = \frac{n!}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (14.7)$$

<sup>1)</sup> Мы употребляем временно слово «перестановка», хотя речь фактически идет о подстановке. См. § 16.

В самом деле,

$$\text{Card}(\mathbf{P}_{i_1} \cap \mathbf{P}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbf{P}_{i_r}) = (n - r)!, \quad (14.8)$$

т. е. равно числу перестановок из  $n - r$  элементов. Поэтому

$$\sum \text{Card}(\mathbf{P}_{i_1} \cap \mathbf{P}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbf{P}_{i_r}) = C_n^r (n - r)!. \quad (14.9)$$

Подставляя (14.7) в (14.6), получаем

$$W(0) = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]. \quad (14.10)$$

Но  $W(0)$  и есть искомое число беспорядков  $D_n$ :

$$D_n = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]. \quad (14.11)$$

Например,

$$\begin{aligned} D_6 &= \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \right] 6! = \\ &= 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265. \end{aligned} \quad (14.12)$$

При достаточно большом  $n$  существует хорошее приближение для (14.11). Из

$$\begin{aligned} D_n &= n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] = \\ &= n! \left[ e^{-1} - \left\{ (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} + (-1)^{n+2} \frac{1}{(n+2)!} + \dots \right\} \right] \end{aligned} \quad (14.13)$$

следует, что  $D_n/n!$  и  $e^{-1}$  отличаются <sup>1)</sup> не более чем на  $1/(n+1)!$ . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1}, \quad (14.14)$$

т. е.  $n! e^{-1}$  аппроксимирует  $D_n$  тем лучше, чем больше  $n$ <sup>2)</sup>.

Понятие беспорядка обобщается, если рассмотреть перестановки с  $k$  совпадениями. Беспорядок — это перестановка с 0 совпадениями. Обозначим через  $D_{n,k}$  число перестановок в точности с  $k$  совпадениями, через  $D_{n,\geq k}$  — число перестановок с не меньше чем  $k$  совпадениями, а через  $D_{n,\leq k}$  — с не больше чем  $k$  совпадениями. В этих обозначениях  $D_n = D_{n,0}$ .

Положим также  $D_0 = 1$ . Имеем

$$D_{n,k} = C_n^k D_{n-k,0} = C_n^k D_{n-k}. \quad (14.15)$$

<sup>1)</sup> Известно, что остаток абсолютно сходящегося знакопеременного ряда имеет тот же знак, что и первый отброшенный член, и по абсолютной величине не превосходит модуля этого члена.

<sup>2)</sup> Вероятность того, что вытащенная наугад перестановка есть беспорядок, равна  $p_n = \frac{D_n}{n!}$ . Для достаточно большого  $n$ , например для  $n = 10$ ,  $p_{10} \approx e^{-1}$ , но и  $p_{10000} \approx e^{-1}$ . Этот результат может показаться неожиданным.

В силу (14.11)

$$D_{n-k,0} = (n-k)! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right]. \quad (14.16)$$

Умножая обе части (14.16) на  $C_n^k$ , получаем

$$D_{n,k} = \frac{n!}{k!} \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right]. \quad (14.17)$$

Легко видеть, что

$$D_{n,n} = 1 \quad \text{и} \quad D_{n,n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14.18)$$

$$\sum_{k=0}^n D_{n,k} = \sum_{k=0}^n C_n^k D_{n-k,0} = n!. \quad (14.19)$$

Ниже приводится таблица чисел  $D_{n,k}$  для  $n \leq 8$ . Положим для удобства  $D_{0,0} = 1$ . Числа  $D_{n,\geq k}$  и  $D_{n,\leq k}$  можно представить в виде

$$D_{n,\geq k} = \sum_{r=k}^n D_{n,r}, \quad (14.20)$$

$$D_{n,\leq k} = \sum_{r=0}^n D_{n,r} = n! - \sum_{r=k+1}^n D_{n,r}. \quad (14.21)$$

Таблица 14.1

Таблица количества перестановок  $n$  элементов с  $k$  совпадениями

$D_{n,k}$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$D_{1,k}$	0	1							
$D_{2,k}$	1	0	1						
$D_{3,k}$	2	3	0	1					
$D_{4,k}$	9	8	6	0					
$D_{5,k}$	44	45	20	10	1				
$D_{6,k}$	265	264	135	40	15	0			
$D_{7,k}$	1 854	1 855	924	315	70	21	0	1	
$D_{8,k}$	14 833	14 832	7 420	2 464	630	112	28	0	1

Дадим удобную рекуррентную формулу для чисел  $D_n = D_{n,0}$ . Запишем (14.11), заменяя  $n$  на  $n-1$ :

$$D_{n-1} = (n-1)! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right]. \quad (14.22)$$

Умножим обе части (14.22) на  $n$ :

$$nD_{n-1} = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right]. \quad (14.23)$$

Прибавим к обеим частям равенства по  $(-1)^n$ :

$$\begin{aligned} nD_{n-1} + (-1)^n &= n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right] + \\ &+ (-1)^n = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] = D_n. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Таким образом<sup>1)</sup>,

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14.25)$$

так как  $D_0 = 1$ .

Получим теперь рекуррентную формулу для  $D_{n,k}$ . В силу (14.15)

$$D_{n,k} = C_n^k D_{n-k,0}, \quad (14.26)$$

$$D_{n,k+1} = C_n^{k+1} D_{n-k-1,0}. \quad (14.27)$$

Из (14.25) получаем

$$D_{n-k,0} = (n-k) D_{n-k-1,0} + (-1)^{n-k}. \quad (14.28)$$

Определяя  $D_{n-k,0}$  из (14.26), а  $D_{n-k-1,0}$  из (14.27) и подставляя их в (14.28), находим

$$\begin{aligned} D_{n,k} &= (k+1) D_{n,k+1} + (-1)^{n-k} C_n^k, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad D_{n,n} = 1. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Можно построить денумератор для чисел  $D_{n,k}$  следующим образом. Полагаем

$$\begin{aligned} d_n^*(z) &= \sum_{k=0}^n D_{n,k} z^k = \sum_{k=0}^n C_n^k D_{n-k,0} z^k = \\ &= D_n + C_n^1 D_{n-1} z + C_n^2 D_{n-2} z^2 + \dots + D_0 z^n. \end{aligned} \quad (14.30)$$

Рассмотрим разложение  $(D+z)^n$ :

$$(D+z)^n = D^n + C_n^1 D^{n-1} z + C_n^2 D^{n-2} z^2 + \dots + z^n. \quad (14.31)$$

Символически можно записать

$$d_n^*(z) = (D+z)^{(n)}, \quad (14.32)$$

где  $(D+z)^{(n)}$  разлагается как  $(D+z)^n$ , причем  $D^r$  заменяется на  $D_r$ .

<sup>1)</sup> Рекуррентная формула (14.25) подобна формуле  $n! = n(n-1)!$ , по этой причине последовательность  $D_n$  называют иногда «подфакториалом  $n$ », или «псевдофакториалом  $n$ ».

## УПРАЖНЕНИЯ

**14А.** Подсчитать число беспорядков  $D_{10}$ .

**14Б.** С помощью таблицы 14.1 составить таблицу для чисел

$$D_{n, \geq k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 8, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 8.$$

**14В.** Тем же способом составить таблицу для чисел  $D_{n, \leq k}$ .

**14Г.** Доказать, что  $e^{(D+1)z} = \frac{1}{1-z}$ , где  $D^n \doteq D_n$  и  $1 \doteq D_0$ .

**14Д.** Принимая во внимание (14.32) и упражнение 14Г, показать, что

$$e^{u(D+z)} = \frac{1}{1-u} e^{u(z-1)}, \quad D^n \doteq D_n \quad \text{и} \quad 1 \doteq D_0.$$

**14Е.** Доказать, что  $D_n = \Delta^n 0!$ , где

$$\Delta^n 0! = (E - 1)^n 0! = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (n-k)!$$

(используется символика (6.37)).

### § 15. Перманент матрицы \*)

Обозначим через  $\|a\|$  матрицу с элементами  $a_{i,j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $m \leq n$ .

Перманентом рег  $\|a\|$  матрицы  $\|a\|$  назовем сумму

$$\operatorname{per} \|a\| = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{mi_m}, \quad (15.1)$$

где суммирование производится по всем размещениям из  $n$  элементов  $1, 2, \dots, n$  по  $m$ .

Предварительно рассмотрим перманенты нескольких матриц  $\|a\|$ :

$$1) \quad \|a\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad (15.2)$$

$$\operatorname{per} \|a\| = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{23} + a_{12}a_{21} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21} + a_{13}a_{22}; \quad (15.3)$$

$$2) \quad \|a\| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \quad (15.4)$$

$$\operatorname{per} \|a\| = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 60; \quad (15.5)$$

$$3) \quad \|a\| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix}, \quad (15.6)$$

$$\operatorname{per} \|a\| = 3 \cdot 8 (-1) + 3 \cdot 11 \cdot 4 + 5 (-2) (-1) + 5 \cdot 11 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 8 \cdot 0 = 118; \quad (15.7)$$

\*) О матрицах см. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», 1967.

$$4) \quad \|a\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad (15.8)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{per} \|a\| = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{34} + a_{11}a_{23}a_{34} + a_{11}a_{23}a_{32} + \\ & + a_{11}a_{24}a_{32} + a_{11}a_{24}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{34} + a_{12}a_{24}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{33} + \\ & + a_{12}a_{21}a_{34} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{24}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{34} + a_{13}a_{22}a_{34} + \\ & + a_{13}a_{24}a_{31} + a_{13}a_{24}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{14}a_{21}a_{32} + \\ & + a_{14}a_{21}a_{33} + a_{14}a_{22}a_{31} + a_{14}a_{23}a_{31} + a_{14}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

**Основные свойства перманентов<sup>1)</sup>.** 1) Перманент матрицы инвариантен относительно любой перестановки строк и столбцов.

2) При умножении какой-либо строки (или столбца) на скаляр  $\lambda$  перманент умножается на  $\lambda$ .

3) Если  $\|a\|$  — квадратная матрица, то

$$a) \quad \operatorname{per} \|a\| = \operatorname{per} \|a'\|, \quad (15.10)$$

где  $\|a'\|$  — матрица, транспонированная к  $\|a\|$ ;

б) если  $\|\alpha_{ij}\|$  получается из  $\|a_{ij}\|$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, то

$$\operatorname{per} \|a\| = \sum_{i=1}^m a_{ij} \operatorname{per} \|\alpha_{ij}\|, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (15.11)$$

Эти свойства легко проверяются. Приведем пример применения (15.11). Например, для матрицы  $\|a\|$  из (15.6)

$$\begin{aligned} \operatorname{per} \|a\| = & a_{11} \operatorname{per} \|a_{11}\| + a_{21} \operatorname{per} \|a_{21}\| + a_{31} \operatorname{per} \|a_{31}\| = \\ = & a_{11}(a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13}) = \\ = & 3[8(-1) + 11 \cdot 4] - 5[(-2)(-1) + 11 \cdot 0] + \\ & + 0[(-2) \cdot 4 + 8 \cdot 0] = 118. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Следующая теорема облегчает вычисление перманента матрицы.

**Теорема.** Пусть  $\|a\|$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $m \leq n$ ,  $\|a_k\|$  — матрица, полученная из  $\|a\|$  заменой  $k$  столбцов ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) столбцами из нулей<sup>2)</sup>,  $b_{ik}$  — сумма элементов  $i$ -й строки ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) матрицы  $\|a_k\|$ ,  $c_k = \prod_{i=1}^m b_{ik}$ , а

<sup>1)</sup> За немногими исключениями свойства перманентов отличны от свойств определителей.

<sup>2)</sup> Вообще говоря, из нулевых элементов поля, которому принадлежат элементы матрицы  $\|a\|$ .

суммирование в  $\sum c_k$  распространено на все сочетания без повторения из  $n$  по  $n-k$ . Тогда

$$\text{per} \|a\| = \sum c_{n-m} - C_{n-m+1}^1 \sum c_{n-m+1} + C_{n-m+2}^2 \sum c_{n-m+2} - \dots \\ \dots + (-1)^{m-1} C_{n-1}^{m-1} \sum c_{n-1}. \quad (15.13)$$

Прежде чем перейти к доказательству, рассмотрим пример.

Пример. Пусть

$$\|a\| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & -7 \end{vmatrix}. \quad (15.14)$$

$$\|a_1\|_1 = \left. \begin{array}{cccc|c} 0 & 7 & -2 & 8 & 13 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & -7 & -1 \end{array} \right\} \frac{b_{i_1}}{c_1 = -130},$$

$$\|a_1\|_2 = \left. \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -2 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -7 & -9 \end{array} \right\} \frac{b_{i_1}}{c_1 = -648}, \quad (15.15)$$

$$\|a_1\|_3 = \left. \begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 0 & 8 & 18 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ -3 & 5 & 0 & -7 & -5 \end{array} \right\} \frac{b_{i_1}}{c_1 = -540}, \quad \|a_1\|_4 = \left. \begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & -2 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 12 \\ -3 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right\} \frac{b_{i_1}}{c_1 = 288}$$

$$\sum c_1 = -130 - 648 - 540 + 288 = -1030. \quad (15.16)$$

$$\|a_2\|_1 = \left. \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -6 \end{array} \right\} \frac{b_{i_2}}{c_2 = -216}, \quad \|a_2\|_2 = \left. \begin{array}{cccc|c} 0 & 7 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -7 & -2 \end{array} \right\} \frac{b_{i_2}}{c_2 = -120}$$

$$\|a_2\|_3 = \left. \begin{array}{cccc|c} 0 & 7 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right\} \frac{b_{i_2}}{c_2 = 300}, \quad \|a_2\|_4 = \left. \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -7 & -10 \end{array} \right\} \frac{b_{i_2}}{c_2 = -220}, \quad (15.17)$$

$$\|a_2\|_5 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{b_{i_2}}{-2} = \frac{c_2 = -16}{}, \quad \|a_2\|_6 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right\| \frac{b_{i_2}}{2} = \frac{c_2 = 120}{}$$

$$\sum c_2 = -216 - 120 + 300 - 220 - 16 + 120 = -152. \quad (15.18)$$

$$\|a_3\|_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \frac{b_{i_3}}{-3} = \frac{c_3 = -18}{}, \quad \|a_3\|_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right\| \frac{b_{i_3}}{5} = \frac{c_3 = 140}{}$$

(15.19)

$$\|a_3\|_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{b_{i_3}}{1} = \frac{c_3 = -12}{}, \quad \|a_3\|_4 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right\| \frac{b_{i_3}}{-7} = \frac{c_3 = 0}{}$$

$$\sum c_3 = -18 + 140 - 12 + 0 = 110. \quad (15.20)$$

$$\operatorname{per} \|a\| = \sum c_1 - C_2^1 \sum c_2 + C_3^2 \sum c_3 = \\ = (-1030) - 2 \cdot (-152) + 3 \cdot (110) = -396. \quad (15.21)$$

**Доказательство.** Воспользуемся обобщенной формулой включения и исключения (12.24).

Пусть  $S$  — множество всех сочетаний без повторения из  $n$  элементов  $1, 2, \dots, n$  по  $m$ :

$$(j_1, j_2, \dots, j_m) \in S. \quad (15.22)$$

Припишем элементам  $S$  веса

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{mj_m}. \quad (15.23)$$

Пусть свойство  $\mathcal{P}_i$  заключается в том, что (15.22) не содержит номера  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Если  $\|a_r\|$  — матрица, полученная из  $\|a\|$  заменой столбцов  $i_1, i_2, \dots, i_r$  нулевыми, то

$$\sum \Lambda(\mathcal{P}_{i_1}, \mathcal{P}_{i_2}, \dots, \mathcal{P}_{i_r}) = \sum c_r \quad (15.24)$$

и

$$\pi(r) = \sum c_r. \quad (15.25)$$

Отсюда следует, что  $\text{per} \|a\|$  равен сумме весов элементов из  $S$ , удовлетворяющих в точности  $(n-m)$  свойствам  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). В силу (12.24)

$$\begin{aligned} \text{per} \|a\| &= II(n-m) = \pi(n-m) - C_{n-m+1}^{n-m} \pi(n-m+1) + \\ &+ C_{n-m+2}^{n-m} \pi(n-m+2) - \dots + (-1)^{m-1} C_{n-1}^{n-m} \pi(n-1) + \\ &+ (-1)^m C_n^{n-m} \pi(n). \end{aligned} \quad (15.26)$$

Подставляя (15.25) в (15.26) и замечая, что  $\sum c_n = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \text{per} \|a\| &= \sum c_{n-m} - C_{n-m+1}^1 \sum c_{n-m+1} + \\ &+ C_{n-m+2}^2 \sum c_{n-m+2} + \dots + (-1)^{m-1} C_{n-1}^{m-1} \sum c_{n-1}. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Для квадратной матрицы формула (15.13) упрощается:

$$\text{per} \|a\| = c_0 - \sum c_1 + \sum c_2 - \dots + (-1)^{n-1} \sum c_{n-1}. \quad (15.28)$$

**Случай булевых матриц.** Рассмотрим матрицы, элементы которых — нули и единицы. Такие матрицы называют булевыми, например,

$$\|a\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (15.29)$$

Найдем перманенты некоторых булевых матриц.

Обозначим через  $\|1\|$  единичную матрицу порядка  $n$ :

$$\|1\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (15.30)$$

Очевидно,

$$\text{per} \|1\| = 1. \quad (15.31)$$

Рассмотрим перестановочную матрицу  $\|P\|$ , определяемую условиями

$$p_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad 1,$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15.32)$$

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Например,

$$\|P\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (15.33)$$

Для любого  $n$   $\operatorname{per}\|P\|=1$ .

Определим матрицу  $\|_n A\|$  условием

$${}_n A_{ij} = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (15.34)$$

Например,

$$\|_5 A\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно,

$$\operatorname{per}\|_1 A\|=1, \quad \operatorname{per}\|_2 A\|=2 \cdot 1, \dots, \quad \operatorname{per}\|_n A\|=n!. \quad (15.35)$$

Так как для  $\|_n A\|$  имеем

$$\begin{aligned} c_0 &= n^n, \quad \sum c_1 = C_n^1 (n-1)^n, \\ \sum c_2 &= C_n^2 (n-2)^n, \dots, \quad \sum c_{n-1} = C_n^{n-1} 1^n, \end{aligned} \quad (15.36)$$

то ввиду (15.28)

$$\operatorname{per}\|_n A\|=n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^n = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_n^r (n-r)^n. \quad (15.37)$$

Сравнивая (15.37) и (15.35), получаем

$$\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_n^r (n-r)^n = n!. \quad (15.38)$$

Определим матрицу  $\|_n B\|$  с элементами

$${}_n B_{ij} = {}_n A_{ij} - {}_n \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (15.39)$$

где

$${}_n \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (15.40)$$

Например,

$$\|_5 B\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (15.41)$$

Докажем теперь, что

$$\operatorname{per} \|_n B \| = D_n. \quad (15.42)$$

Обозначим через  $\|_n K\|$  матрицу с элементами

$${}_n K_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 1, & j = 1, \\ {}_n A_{ij} - {}_n \delta_{ij}, & i, j = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (15.43)$$

Например, для  $n = 4$

$$\|_4 K \| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (15.44)$$

По (15.11), учитывая инвариантность перманента при перестановках строк и столбцов, имеем

$$\operatorname{per} \|_n B \| = (n - 1) \operatorname{per} \|_{n-1} K \|, \quad (15.45)$$

$$\operatorname{per} \|_{n-1} K \| = \operatorname{per} \|_{n-2} B \| + (n - 2) \operatorname{per} \|_{n-2} K \|. \quad (15.46)$$

Подставим (15.46) в (15.45):

$$\operatorname{per} \|_n B \| = (n - 1) (\operatorname{per} \|_{n-2} B \| + (n - 2) \operatorname{per} \|_{n-2} K \%). \quad (15.47)$$

Заменим в (15.45)  $n$  на  $n - 1$ :

$$\operatorname{per} \|_{n-1} B \| = (n - 2) \operatorname{per} \|_{n-2} K \%. \quad (15.48)$$

Тогда (15.47) запишется так:

$$\operatorname{per} \|_n B \| = (n - 1) (\operatorname{per} \|_{n-1} B \| + \operatorname{per} \|_{n-2} B \%), \quad (15.49)$$

если заметить, что  $\operatorname{per} \|_2 B \| = 1$ .

Пример. Пусть  $n = 5$ .

$$\operatorname{per} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \operatorname{per} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \operatorname{per} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (15.50)$$

В силу (15.11) последний член справа в (15.50) запишется так:

$$\operatorname{per} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{per} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \operatorname{per} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (15.51)$$

Подставляя (15.51) в (15.50), получаем формулу, совпадающую при  $n = 5$  с (15.47):

$$\operatorname{per} \|_5 B \| = 4 \operatorname{per} \|_3 B \| + 12 \operatorname{per} \|_3 K \%. \quad (15.52)$$

В силу (15.49)

$$\operatorname{per} \|_5 B \| = 4 \left( \operatorname{per} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \operatorname{per} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right), \quad (15.53)$$

что опять приводит к (15.47) для  $n=5$ :

$$\operatorname{per} \|_5 B \| = 4 \operatorname{per} \|_3 B \| + 12 \operatorname{per} \|_3 K \|, \quad (15.54)$$

если заметить, что

$$\operatorname{per} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \operatorname{per} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \operatorname{per} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (15.55)$$

Перепишем (14.25):

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (15.56)$$

и заменим  $n$  на  $n-1$ :

$$D_{n-1} = (n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}, \quad (15.57)$$

$$-D_{n-1} = -(n-1)D_{n-2} + (-1)^n. \quad (15.58)$$

Отсюда

$$(-1)^n = D_n - nD_{n-1} = -D_{n-1} + (n-1)D_{n-2} \quad (15.59)$$

и

$$D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}], \quad (15.60)$$

если заметить, что  $D_2 = 1$ .

Сравнивая (15.49) и (15.60), видим, что последовательности  $D_n$  и  $\operatorname{per} \|_n B \|$  совпадают. Тем самым (15.42) доказано.

Разлагая  $\operatorname{per} \|_n B \|$  согласно (15.28):

$$\operatorname{per} \|_n B \| = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_n^r (n-r)^r (n-r-1)^{n-r}, \quad (15.61)$$

получаем новую формулу для числа беспорядков:

$$D_n = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_n^r (n-r)^r (n-r-1)^{n-r}. \quad (15.62)$$

**Применение перманентов булевых матриц.** Формулы (15.35) и (15.42) можно получить непосредственно следующим образом.

Подсчитаем число перестановок из  $n$  элементов, в которых не допускаются некоторые расположения элементов. Построим прямоугольную булеву матрицу, в которой на запрещенных местах стоят нули (на рис. 11 эти клетки заштрихованы), а на остальных местах — единицы.

Тогда при указанных ограничениях перманент этой матрицы совпадает, по определению, с числом перестановок. Вообще перманент булевой матрицы размера  $m \times n$  совпадает с числом размещений, удовлетворяющих соответствующим ограничениям.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1		1
2			1		1	1	1
3	1		1	1	1	1	1
4	1	1	1		1		
5	1	1	1		1	1	1
6		1	1				1
7	1		1	1	1	1	1

Рис. 11.

С помощью таких рассмотрений можно непосредственно доказать (15.38) и (15.42). В случае (15.38) ограничений нет и мы получаем все  $n!$  перестановок. Если все ограничения сводятся к наличию нулей на главной диагонали, то получаем (15.42), так как любой беспорядок есть перестановка, в которой запрещенные позиции изображаются нулями на главной диагонали в соответствующей булевой матрице.

Отметим, что перманент можно рассматривать как энумератор, хотя этот способ неудобен, когда число строк или столбцов в матрице велико. Более эффективный способ излагается в §§ 42—45 главы IV.

Мы вновь вернемся к перманенту в § 20.

### УПРАЖНЕНИЯ

**15А.** Вычислить по формуле (15.1) перманенты матриц:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -8 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

**15Б.** Вычислить перманенты матриц из упражнения 15А по формуле (15.13).

**15В.** Вычислить по формуле (15.28) перманент матрицы

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

**15Г.** Подсчитать число подстановок с ограничениями на расположение элементов, заданными матрицами:

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	1	1
B	1	1	0	1	1
C	1	1	1	0	1
D	1	1	1	1	0
E	0	1	1	1	1

a)

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	1	1
B	1	0	0	1	1
C	1	1	0	0	1
D	1	1	1	0	0
E	0	1	1	1	0

b)

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	1	0	0	0	1
C	1	1	0	0	0
D	0	1	1	0	0
E	0	0	1	1	0

c)

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	1	0	0	0	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	0	0

ι)

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	1	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1	1
E	0	0	0	1	0	1
F	0	0	0	1	1	0

α)

	A	B	C	D	E	F
A	1	1	0	0	0	0
B	0	1	1	0	0	0
C	0	0	1	1	0	0
D	0	0	0	1	1	0
E	0	0	0	0	1	1
F	1	0	0	0	0	1

ε)

## § 16. Группы подстановок. Перестановки. Транспозиции

Эти понятия играют важную роль в комбинаторике и мы напомним их.

*Подстановкой* называется биекция<sup>1)</sup> конечного множества  $E$  на себя (рис. 12).

Подстановку часто изображают в виде соответствия между двумя строками:

$$s = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & d & e & c \end{pmatrix}, \quad (16.1)$$

первую строку называют «операндом», вторую — «результатом». Порядок, в котором записывается операнд, вообще говоря, несуществен:

$$s = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & e & a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & e & a & d \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} e & d & c & b & a \\ c & a & e & d & b \end{pmatrix}. \quad (16.2)$$

Подстановку можно представить, выписывая в строку  $n$  элементов  $E$  и подписывая под каждым из них его образ при биекции.

*Перестановкой* множества  $E$  называется вполне упорядоченное множество, состоящее из всех элементов  $E$ . Если  $E$  состоит из  $n$  элементов, то имеется  $n!$  таких множеств. Таким образом, подстановку можно охарактеризовать перестановкой, задаваемой нижней строкой<sup>2)</sup>.

**Произведение двух подстановок. Структура группы.** Пусть  $y = r(x)$ ,  $x, y \in E$ ,  $y$  — образ элемента  $x$  при подстановке  $r$ ,  $z = s(y)$ ,  $y, z \in E$ ,  $z$  — образ элемента  $y$  при подстановке  $s$ . Определим подстановку

$$z = s[r(x)] = sr(x). \quad (16.3)$$

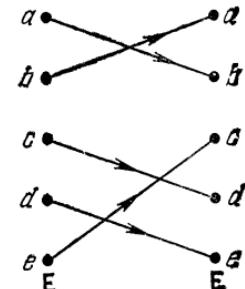


Рис. 12.

<sup>1)</sup> Биекция — взаимно однозначное соответствие.

<sup>2)</sup> На этом основании можно иногда не различать слова «перестановка» и «подстановка».

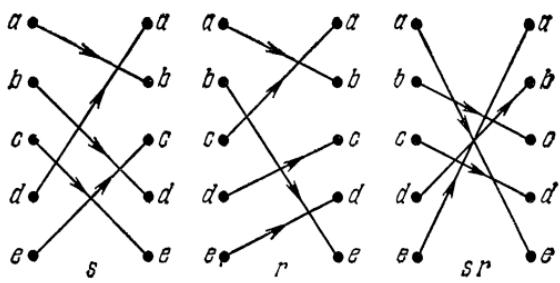


Рис. 13.

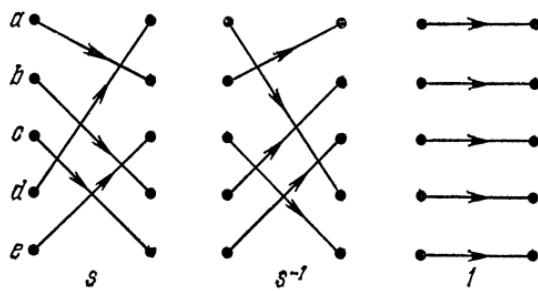
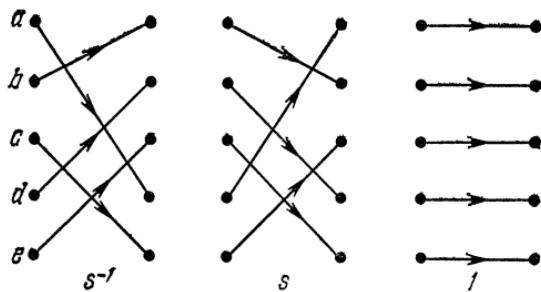


Рис. 14.

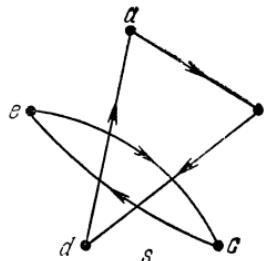


Рис. 15.

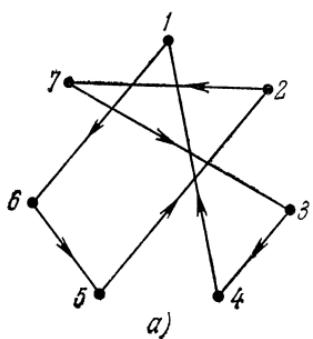
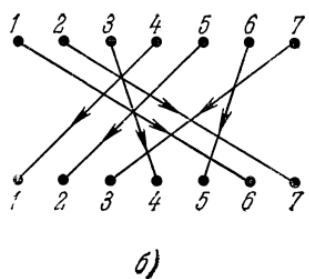


Рис. 16.



Например, если

$$s = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & e & a & c \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & e & a & c & d \end{pmatrix}, \quad (16.4)$$

то

$$sr = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & e & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & e & a & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & c & d & b & a \end{pmatrix}. \quad (16.5)$$

На рис. 13 изображено это произведение. За единичную подстановку примем

$$1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}. \quad (16.6)$$

Для каждой подстановки существуют симметричные ей слева и симметричные ей справа, совпадающие между собой (как на рис. 14).

Легко проверить свойство ассоциативности:

$$(s_1 s_2) s_3 = s_1 (s_2 s_3). \quad (16.7)$$

Таким образом, выполняются все групповые аксиомы. Множество  $n!$  подстановок  $n$  элементов образует группу, называемую *симметрической группой*  $S_n$ .

Группа  $S_n$  не коммутативна, так как для некоторых элементов

$$s_1 s_2 \neq s_2 s_1. \quad (16.8)$$

Прежде чем ввести понятие цикла, укажем еще одно изображение подстановки, пример которого приведен на рис. 15.

С другой стороны, подстановку можно записать с помощью перестановки, если первые строки всех подстановок взять одинаковыми. Например,

$$(e \ d \ c \ b \ a) \text{ представляет } \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

**Цикл.** Пусть задана биекция подмножества  $E_k \subset E$  на себя. Если мы проходим, следя ей, все элементы  $E_k$ , начиная с некоторого  $a_i \in E_k$  и возвращаясь в него, то получаемую подстановку назовем *циклом*. Например, на рис. 16 представлен цикл, (1652734), на рис. 17 представлены циклы (1427) и (365), на рис. 18 — циклы (17), (2), (3), (456). Запишем эти подстановки с помощью циклов:

$$(1652734) \quad (\text{рис. 16}),$$

$$(1427) (365) \quad (\text{рис. 17}),$$

$$(17) (2) (3) (456) \quad (\text{рис. 18}).$$

Обычно цикл записывают, начиная с наименьшего элемента (или с элемента с наименьшим индексом). Например,  $(365) \simeq (653) \simeq (536)$ . Часто удобно заменить символы в подстановке

на целые числа (или на элементы с целочисленными индексами).

Цикл, состоящий из  $k$  элементов, называют  $k$ -циклом. Например, (1652734) на рис. 16 есть 7-цикл; (1427) на рис. 17 есть 4-цикл; (2), (17), (456) на рис. 18 являются соответственно 1-циклом, 2-циклом, 3-циклом.

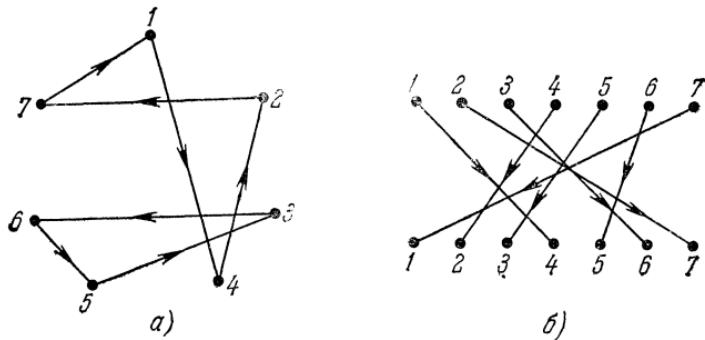


Рис. 17.

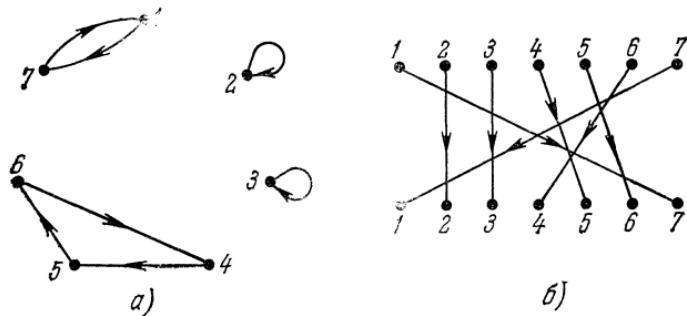


Рис. 18.

**Классы подстановок.** Пусть  $\mathbf{P}$  — множество всех  $n!$  подстановок  $n$  элементов. Разобьем это множество на классы эквивалентности согласно цикловой структуре. Подмножество из  $\mathbf{P}$  образует класс  $(k) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , если для каждой подстановки из этого подмножества число 1-циклов равно  $k_1$ , число 2-циклов равно  $k_2, \dots$ , число  $n$ -циклов равно  $k_n$ .

Пример. На рис. 16  $(k) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ , на рис. 17  $(k) = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ , на рис. 18  $(k) = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ .

Будем иногда писать  $(0, 0, 1, 1)$  вместо  $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ , если это не приводит к недоразумению.

**Теорема I.** Для любого класса  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  подстановок  $n$  элементов

$$\sum_{r=1}^n rk_r = n. \quad (16.9)$$

Это очевидно, ибо  $r$ -цикл содержит  $r$  элементов, а всего элементов в подстановке  $n$ .

**Теорема II.** Обозначим через  $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$  число подстановок класса  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Тогда

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{\prod_{r=1}^n r^{k_r} \cdot k_r!}, \quad (16.10)$$

где

$$\sum_{r=1}^n r k_r = n. \quad (16.11)$$

Рассмотрим  $k_r$   $r$ -циклов в подстановке из заданного класса. Так как безразлично, какой элемент брать в качестве начального в каждом из этих циклов, то эту подстановку можно записать  $r^{k_r}$  различными способами. Учитывая, что циклы можно

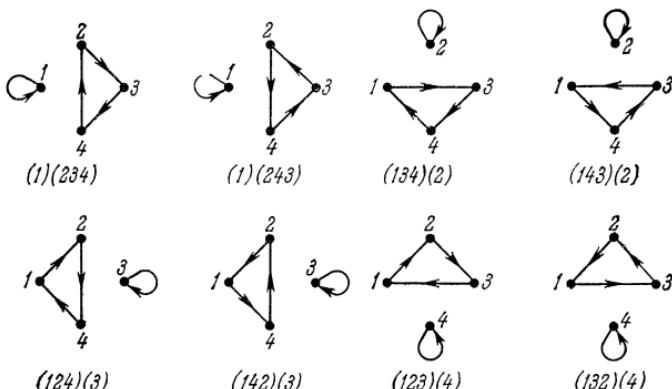


Рис. 19.

переставлять между собой, получаем  $r^{k_r} k_r!$  различных способов записи. Следовательно, любую подстановку из класса  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  можно записать  $(1^{k_1} k_1!) (2^{k_2} k_2!) \dots (n^{k_n} k_n!)$  способами. Так как всего имеется  $n!$  возможных записей подстановок из этого класса, то получаем (16.10).

**Пример.** Рассмотрим класс  $(1, 0, 1, 0)$  при  $n = 4$ . Тогда

$$P(1, 0, 1, 0) = \frac{4!}{1^1 \cdot 1! 3^1 \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3} = 8. \quad (16.12)$$

Эти подстановки представлены на рис. 19.

**Степени подстановки.** Определим последовательно

$$s^2 = ss, \quad s^3 = s^2s, \dots, \quad s^p = s^{p-1}s. \quad (16.13)$$

Очевидно, что все эти подстановки коммутативны:

$$s^p s^q = s^q s^p. \quad (16.14)$$

Например, если

$$s = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & b & e & c \end{pmatrix},$$

то

$$s^3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & b & e & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & b & e & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & b & e & c \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & d & a & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & b & e & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & e & d & b & a \end{pmatrix}. \quad (16.15)$$

Все степени некоторой подстановки можно изобразить в виде схемы, как это показано на рис. 20. Однако если подстановка обладает несколькими циклами, такая схема громоздка.

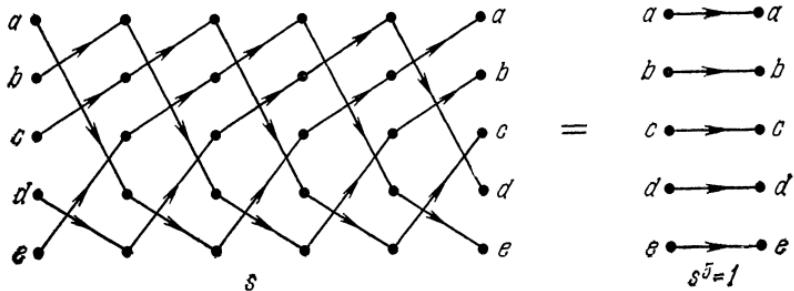


Рис. 20.

Аналогично вводятся отрицательные степени:

$$s^{-2} = s^{-1}s^{-1}, \quad s^{-3} = s^{-2}s^{-1}, \dots, \quad s^{-p} = s^{-p+1}s^{-1}; \quad (16.16)$$

$$s^{-p}s^{-q} = s^{-q}s^{-p}. \quad (16.17)$$

**Порядок подстановки.** Порядок подстановки есть наименьшее целое положительное число  $p$  такое, что

$$s^p = 1. \quad (16.18)$$

Например, как это видно из рис. 20,

$$\text{порядок подстановки } s = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & a & b & e & c \end{pmatrix} \text{ равен } 5, \quad (16.19)$$

а из рис. 21 заключаем, что

$$\text{порядок подстановки } s = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & e & a & c \end{pmatrix} \text{ равен } 6. \quad (16.20)$$

Количество элементов в цикле называют *порядком цикла*. Например,  $k$ -цикл имеет порядок  $k$ .

**Теорема III.** Порядок подстановки равен наименьшему общему кратному порядков циклов, определяющих класс эквивалентности, которому она принадлежит.

Пусть подстановка  $s$  принадлежит классу  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Ее всегда можно представить в виде произведения  $n$  подстановок  $s_1, s_2, \dots, s_n$  (перестановочных между собой), первая из которых содержит  $n - 1$ -циклов, вторая содержит  $n - 2k_2$  1-циклов и  $k_2$  2-циклов,  $\dots$ ,  $n$ -я содержит  $n - nk_n$  1-циклов и  $k_n$   $n$ -циклов. На рис. 22 дан пример такого разложения.

Таким образом,

$$s = s_1 s_2 \dots s_n. \quad (16.21)$$

В силу коммутативности

$$s^r = s_1^r s_2^r \dots s_n^r. \quad (16.22)$$

Для того чтобы  $s^r$  была единичной подстановкой, необходимо и достаточно, чтобы

$$s_1^r = s_2^r = \dots = s_n^r = 1. \quad (16.23)$$

Но наименьшее целое число  $r$ , для которого это свойство

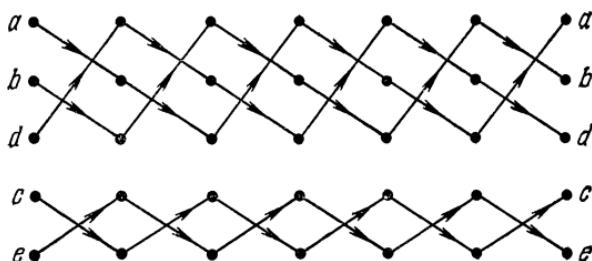


Рис. 21.

выполняется, есть наименьшее общее кратное тех чисел  $2, 3, \dots, n$ , для которых  $k_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

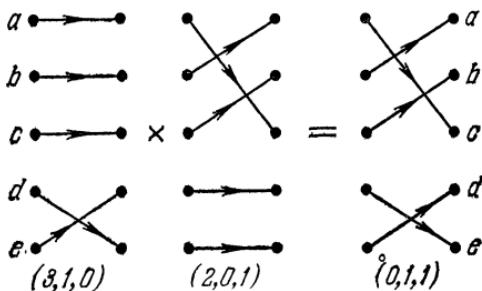


Рис. 22.

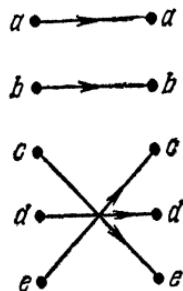


Рис. 23.

**Транспозиция.** Транспозиция есть подстановка из класса  $(n-2, 1, 0, \dots, 0)$ . (16.24)

Она переставляет между собой два элемента, не меняя расположения остальных. Пример транспозиции (рис. 23)

$$t = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & e & d & c \end{pmatrix}. \quad (16.25)$$

**Теорема IV.** Всякая подстановка разлагается в произведение транспозиций.

Способ доказательства теоремы проиллюстрируем на примере.

Пусть

$$s = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix} \quad (16.26)$$

и заданы транспозиции

$$\begin{aligned} t_1 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & d & e \end{pmatrix}, & t_2 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & b & a & d & e \end{pmatrix}, \\ t_3 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & b & c & a & e \end{pmatrix}, & t_4 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & b & c & d & a \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Тогда

$$s = t_1 t_2 t_3 t_4, \quad (16.28)$$

как видно из рис. 24.

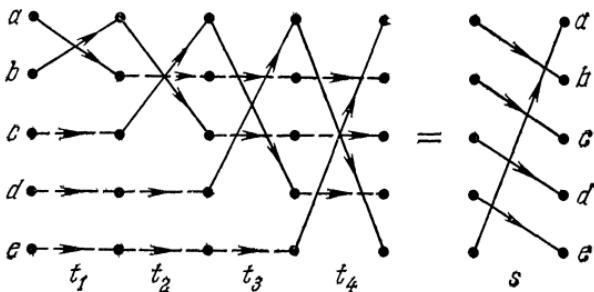


Рис. 24.

Произведение различных транспозиций не коммутативно. Например,

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & e & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & e & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & e & d \end{pmatrix}, \quad (16.29)$$

но

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & c & b & d & e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & b & d & e \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & c & b & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & c & d & e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & a & d & e \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16.30)$$

**Четность перестановки.** Рассмотрим перестановку  $\pi$  на множестве  $E$  из  $n$  элементов. С этим множеством свяжем неупорядоченное множество  $T_\pi$ , образованное  $\frac{1}{2}(n-1)n$  парами различных элементов  $E$ , причем элементы в каждой паре записываются в том же порядке, что и в  $\pi$ . Например, с перестановкой

$$\pi = (b \ e \ d \ a \ c), \quad (16.31)$$

получающейся из подстановки на рис. 25, связываем неупорядоченное множество

$$T_\pi = \{(be), (bd), (ba), (bc), (ed), (ea), (ec), (da), (dc), (ac)\}. \quad (16.32)$$

Рис. 26 показывает, как можно легко получить  $T_\pi$  без пропусков и повторений.

С другой перестановкой

$$\pi' = (c \ d \ a \ b \ e), \quad (16.33)$$

получающейся из подстановки на рис. 27, связывается множество, которое легко выписывается с помощью рис. 28.

$$T_{\pi'} = \{(cd), (ca), (cb), (ce), (da), (db), (de), (ab), (ae), (be)\}. \quad (16.34)$$

Часть пар в  $T_\pi$  и  $T_{\pi'}$  совпадают, а другие отличаются порядком их элементов. Пусть  $m$  — число таких инверсий. Если  $m$  четно, то скажем, что  $\pi'$  имеет ту же четность, что и  $\pi$ . Сравнивая (16.34) и (16.32), видим, что имеется восемь инверсий (отмеченных на рис. 28 звездочкой), т. е. четности  $\pi$  и  $\pi'$  совпадают.

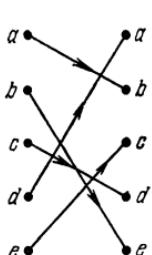


Рис. 25.

c				
a				ac
d			da	dc
e		ed	ea	ec
b	be	bd	ba	bc

Рис. 26.

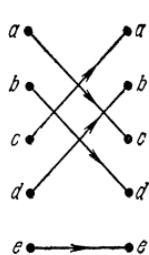


Рис. 27.

e				
b				be
a			ab*	ae*
d			da	db*
c	cd*	ca*	cb*	ce*

Рис. 28.

Отношение « $\pi'$  и  $\pi$  имеют одинаковую четность» есть отношение эквивалентности (рефлексивность, симметричность и транзитивность очевидны).

Так как всего имеется  $n!$  перестановок и каждый класс содержит одно и то же число элементов, то это число равно  $1/2n!$ . Исходная перестановка рассматривается как четная.

**Четность подстановки.** Подстановка  $s$  сопоставляет любой перестановке  $\pi$  перестановку  $\pi'$ . Например, если

$$\pi = (b \ e \ c \dots r), \quad \pi' = (d \ a \ b \dots e), \quad (16.35)$$

то

$$s = \begin{pmatrix} b & e & c & \dots & r \\ d & a & b & \dots & e \end{pmatrix}, \quad (16.36)$$

или символически

$$s = \left\{ \begin{matrix} \pi \\ \pi' \end{matrix} \right\}. \quad (16.37)$$

По последовательности перестановок  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots$  и подстановке  $s$  можно выписать последовательность образов  $\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_i, \dots$ :

$$s = \left\{ \begin{matrix} \pi_1 \\ \pi'_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \pi_2 \\ \pi'_2 \end{matrix} \right\} = \dots = \left\{ \begin{matrix} \pi_i \\ \pi'_i \end{matrix} \right\} = \dots \quad (16.38)$$

Четности  $\pi_i$  и  $\pi'_i$  либо все одинаковы, либо все противоположны ( $i = 1, 2, \dots$ ). Действительно, определим подстановку  $t$ :

$$t = \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \right\}.$$

Рассматривая  $\pi'_1$  и  $\pi'_2$  как нижние строки соответствующих подстановок, имеем

$$t\pi'_1 = \pi'_2 *). \quad (16.39)$$

Отсюда следует, что число инверсий при переходе от  $\pi_1$  к  $\pi_2$  совпадает с числом инверсий при переходе от  $\pi'_1$  к  $\pi'_2$ . Таким образом, подстановки также распадаются на два класса (подстановка  $\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \right\}$  принадлежит четному классу). Имеется  $n!/2$  четных подстановок и столько же нечетных.

**Группы и подгруппы подстановок.** Рассмотрим все подстановки множества  $E$  из  $n$  элементов. Как было показано, они образуют группу, элементы которой можно разбить на два класса: четных и нечетных подстановок. Четные подстановки образуют подгруппу:

- 1) единичная подстановка четна по определению;
- 2) обратная к четной подстановке также четная;
- 3) произведение четных подстановок четно.

Сформулируем еще несколько теорем.

**Теорема V.** *Всякая транспозиция есть нечетная подстановка.*

Теорема очевидна в силу определения транспозиции.

Так как произведение  $2n$  транспозиций дает четную подстановку, а произведение  $2n + 1$  транспозиций — нечетную, то справедливо следующее утверждение:

**Теорема VI.** *Если подстановка  $s$  разложена в произведение транспозиций, то число их четно или нечетно в зависимости от того, четна или нечетна  $s$ . Верно и обратное утверждение.*

**Теорема VII.** *Если число четных циклов четно, то подстановка четна; если это число нечетно, то подстановка нечетна.*

Приведем несколько примеров.

Подстановки класса  $(1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$  нечетны, так как содержат  $2 + 1 = 3$  четных циклов. Подстановки класса  $(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$  четны, так как содержат  $1 + 1 = 2$  четных циклов. Подстановки класса  $(3, 0, 1, 0, 0, 0)$  четны, так как не содержат четных циклов.

**Теорема VIII** (теорема Кэли). *Всякая конечная группа  $(E, *)$  изоморфна некоторой группе подстановок ее элементов.*

Доказательство предоставим читателю в виде упражнения.

\*) Соответствующая формула оригинала не верна. (Прим. перев.)

# УПРАЖНЕНИЯ

16А. Пусть заданы подстановки

$$s_1 = \begin{pmatrix} B & A & C & F & G & D & E \\ C & A & G & F & E & B & D \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} C & A & F & B & D & G & E \\ D & E & A & F & B & G & C \end{pmatrix},$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} A & B & F & E & G & D & C \\ C & A & G & F & E & D & B \end{pmatrix}.$$

Найти: а)  $s_1 s_2 s_3$ , б)  $s_3 s_2 s_1$ , в)  $s_1^3$ , г)  $(s_1 s_2 s_3)^2$ .

16Б. Представить в цикловой записи подстановки  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , а также а), б), в), г) из упражнения 16А.

16В. Перечислить классы подстановок  $n$  элементов,  $n = 1, 2, \dots, 7$ .

16Г. Пусть  $n = 5$ . Пересчитать подстановки следующих классов: (5, 0, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1).

16Д. Для подстановок  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  из упражнения 16А найти: а)  $s_1^{-1}$ , б)  $(s_1 s_2)^{-1}$ , в)  $s_1 s_2 s_1^{-1}$ , г)  $(s_1 s_2 s_3)(s_1^{-1} s_2^{-1} s_3^{-1})$ .

16Е. Указать порядки подстановок  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , а также а), б), в), г) из упражнения 16А.

16Ж. Пусть  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  — класс подстановки  $s$ . Описать класс  $k'$  подстановки  $s' = s^2$ .

16З. Разложить в произведение транспозиций подстановки  $s_1$  и  $s_2$  из упражнения 16А.

16И. Определить четность следующих перестановок: ( $DABCE$ ), ( $BCDAFE$ ), ( $CAGFEBD$ ), ( $CGAFEBD$ ).

16К. Найти группы подстановок, изоморфные группам (E, \*), заданным нижеследующими таблицами (e — единица группы):

1)	a	<table border="1"><tr><td>a</td><td>e</td></tr><tr><td>e</td><td>a</td></tr><tr><td>e</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>e</td></tr></table>	a	e	e	a	e	a	a	e
a	e									
e	a									
e	a									
a	e									

2)	b	<table border="1"><tr><td>b</td><td>e</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>e</td><td>e</td><td>a</td></tr><tr><td>e</td><td>a</td><td>b</td></tr></table>	b	e	a	a	a	b	e	e	a	e	a	b
b	e	a												
a	a	b												
e	e	a												
e	a	b												

3)	c	<table border="1"><tr><td>c</td><td>b</td><td>a</td><td>e</td></tr><tr><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>e</td><td>c</td><td>b</td></tr><tr><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr></table>	c	b	a	e	b	c	e	a	a	e	c	b	e	a	b	c
c	b	a	e															
b	c	e	a															
a	e	c	b															
e	a	b	c															

4)	c	<table border="1"><tr><td>c</td><td>b</td><td>e</td><td>a</td></tr><tr><td>b</td><td>c</td><td>a</td><td>e</td></tr><tr><td>a</td><td>e</td><td>c</td><td>b</td></tr><tr><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr></table>	c	b	e	a	b	c	a	e	a	e	c	b	e	a	b	c	e	a	b	c
c	b	e	a																			
b	c	a	e																			
a	e	c	b																			
e	a	b	c																			
e	a	b	c																			

5)	d	<table border="1"><tr><td>d</td><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>a</td></tr><tr><td>c</td><td>c</td><td>d</td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>b</td><td>b</td><td>e</td><td>d</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>c</td><td>e</td><td>d</td></tr><tr><td>e</td><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr></table>	d	b	c	e	a	c	c	d	a	b	b	b	e	d	a	a	a	c	e	d	e	e	a	b	c	e	a	b	c	d
d	b	c	e	a																												
c	c	d	a	b																												
b	b	e	d	a																												
a	a	c	e	d																												
e	e	a	b	c																												
e	a	b	c	d																												

6)	f	<table border="1"><tr><td>f</td><td>d</td><td>c</td><td>b</td><td>a</td><td>e</td></tr><tr><td>d</td><td>c</td><td>f</td><td>a</td><td>e</td><td>b</td></tr><tr><td>c</td><td>f</td><td>d</td><td>e</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>b</td><td>e</td><td>a</td><td>f</td><td>c</td><td>d</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td>e</td><td>d</td><td>f</td><td>c</td></tr><tr><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>f</td></tr></table>	f	d	c	b	a	e	d	c	f	a	e	b	c	f	d	e	b	a	b	e	a	f	c	d	a	b	e	d	f	c	e	a	b	c	d	f
f	d	c	b	a	e																																	
d	c	f	a	e	b																																	
c	f	d	e	b	a																																	
b	e	a	f	c	d																																	
a	b	e	d	f	c																																	
e	a	b	c	d	f																																	

## § 17. Денумераторы цикловых классов

В этом параграфе рассматриваются различные способы пересчета подстановок (или, что то же самое, перестановок), обладающих некоторыми свойствами. Процесс перечисления будет рассмотрен позже (гл. IV, § 41).

Напомним формулу (16.10) предыдущего параграфа:

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1} \cdot k_1! 2^{k_2} \cdot k_2! \dots n^{k_n} \cdot k_n!}, \quad (17.1)$$

где

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n. \quad (17.2)$$

Производящая функция, представляющая денумератор последовательности чисел  $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , должна быть функцией  $n$  переменных. Сопоставим  $z_1$  1-циклам,  $z_2$  2-циклам,  $\dots$ ,  $z_n$   $n$ -циклам. Таким образом,

$$P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum P(k_1, k_2, \dots, k_n) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}, \quad (17.3)$$

где суммирование производится по всем  $n$ -выборкам  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , удовлетворяющим (17.2). Подставляя (17.1) в (17.3), имеем

$$P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{z_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{z_2}{2}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{z_n}{n}\right)^{k_n}, \quad (17.4)$$

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n. \quad (17.5)$$

При суммировании по этой формуле удобно пользоваться некоторыми свойствами экспоненциального  $z$ -преобразования.

Приведем пример прямого использования (17.4). Пусть  $n = 3$ :

$$P_3^*(z_1, z_2, z_3) = \sum \frac{3!}{k_1! k_2! k_3!} \left(\frac{z_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{z_2}{2}\right)^{k_2} \left(\frac{z_3}{3}\right)^{k_3}. \quad (17.6)$$

Выборки  $(k_1, k_2, k_3)$ , для которых  $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3$ , — это  $(3, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} P_3^*(z_1, z_2, z_3) &= \\ &= 3! \left[ \frac{\left(\frac{z_1}{1}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{z_1}{1}\right)\left(\frac{z_2}{2}\right)}{1!1!} + \frac{z_3}{1!} \right] = z_1^3 + 3z_1 z_2 + 2z_3. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Отсюда следует, что имеется одна подстановка класса  $(3, 0, 0)$ , три подстановки класса  $(1, 1, 0)$  и две — класса  $(0, 0, 1)$ .

Действуя аналогично, можно получить

$$P_1^*(z_1) = z_1,$$

$$P_2^*(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2,$$

$$P_3^*(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + 3z_1 z_2 + 2z_3,$$

$$P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^4 + 6z_1^2 z_2 + 3z_2^2 + 8z_1 z_3 + 6z_4,$$

$$\begin{aligned} P_5^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &= z_1^5 + 10z_1^3 z_2 + 15z_1 z_2^2 + 20z_1^2 z_3 + \\ &\quad + 20z_2 z_3 + 30z_1 z_4 + 24z_5, \end{aligned} \quad (17.8)$$

$$\begin{aligned} P_6^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) &= z_1^6 + 15z_1^4 z_2 + 45z_1^2 z_2^2 + 40z_1^3 z_3 + \\ &\quad + 15z_2^3 + 120z_1 z_2 z_3 + 90z_1^2 z_4 + 40z_3^2 + 90z_2 z_4 + \\ &\quad + 144z_1 z_5 + 120z_6. \end{aligned}$$

**Решение уравнения**  $\sum_{r=0}^n rk_r = n$ . Можно решать это уравнение непосредственно последовательным лексикографическим перечислением. Напомним понятие лексикографического порядка.

Лексикографический порядок — это порядок, принятый в словарях.  $r$ -выборка  $(A_1, B_1, C_1, \dots, R_1)$  предшествует  $r$ -выборке  $(A_2, B_2, C_2, \dots, R_2)$ , если  $k$  первых элементов (считая слева направо или справа налево, по соглашению) этих  $r$ -выборок равны, а  $(k+1)$ -й элемент первой предшествует  $(k+1)$ -му элементу второй. Например,  $\overrightarrow{(3, 5, 7, 2, 5, 8)}$  предшествует  $\overrightarrow{(3, 5, 7, 4, 1, 3)}$ ,  $\overrightarrow{(B, C, T)}$  предшествует  $\overleftarrow{(B, D, A)}$ ,  $\overrightarrow{(0, 0, 1, 73)}$  предшествует  $\overleftarrow{(0, 0, 2, 18)}$ ,  $\overleftarrow{(3, 8, 2, 0, 0)}$  предшествует  $\overrightarrow{(7, 1, 3, 0, 0)}$  (направление отсчета указано стрелкой).

Разумеется, отношение порядка может быть произвольным: «предшествует», «больше чем», «меньше чем», «содержит» и т. д.

Решим лексикографически уравнение

$$\sum_{r=1}^8 rk_r = 8. \quad (17.9)$$

Образуем восемь колонок  $k_8, k_7, \dots, k_1$ . В строку (1) помещаем наибольшее возможное число, т. е.  $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ , в строку (2) — следующее за ним по величине и удовлетворяющее (17.9), т. е.  $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ , и т. д.

Таким образом, всего существуют 22 решения, приведенные в указанной таблице, которая читается справа налево. Там же приводятся решения при  $n = 3, 4, 5, 6$ .

Рассмотрим некоторые интересные соотношения. Имеем

$$\sum P(k_1, k_2, \dots, k_n) = n!, \quad (17.10)$$

так как каждая подстановка входит в точности в один класс, а также

$$P_n^*(1, 1, \dots, 1) = n! \quad (17.11)$$

Из (17.4) вытекает тогда

$$P_n^*(1, 1, \dots, 1) = n! \sum \left( \frac{1}{1^{k_1} k_1!} \cdot \frac{1}{2^{k_2} k_2!} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n^{k_n} k_n!} \right). \quad (17.12)$$

Сравнивая (17.11) в (17.12), получаем

$$\sum \left( \frac{1}{1^{k_1} k_1!} \cdot \frac{1}{2^{k_2} k_2!} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n^{k_n} k_n!} \right) = 1, \quad (17.13)$$

где суммирование производится по всем  $n$ -выборкам  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , для которых  $\sum_{r=1}^n rk_r = n$ . Тождество (17.13) часто называют *тождеством Коши*.

Напомним формулу (10.53) из § 10:

$$\alpha^{(n)}(u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}; a) =$$

$$= \sum \frac{n! a^k}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{u_z^{(1)}}{1!} \right)^{k_1} \left( \frac{u_z^{(2)}}{2!} \right)^{k_2} \dots \left( \frac{u_z^{(n)}}{n!} \right)^{k_n}, \quad (17.14)$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ ,  $k_i \geq 0$ , и суммирование производится по всем  $n$ -выборкам, для которых  $\sum_{r=1}^n r k_r = n$ .

Очевидно, что от формулы (17.14) можно перейти к (17.4) и обратно с помощью следующего соответствия:

$$u_z^{(r)} \leftrightarrow (r-1)! z_r, \quad \alpha^{(n)}(u_z^{(1)}, u_z^{(2)}, \dots, u_z^{(n)}; 1) \leftrightarrow P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (17.15)$$

Заметим, что при выводе формулы Бруно (см. (10.46) и (10.51)) можно считать  $u_z^{(k)}$  независимыми переменными  $z_k$ , так как там речь идет о символических биномиальных разложениях. Следовательно,

$$\begin{aligned} P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \sum P(k_1, k_2, \dots, k_n) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n} = \\ &= \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{z_1}{1} \right)^{k_1} \left( \frac{z_2}{2} \right)^{k_2} \dots \left( \frac{z_n}{n} \right)^{k_n}, \end{aligned} \quad (17.16)$$

где суммирование производится по всем  $n$ -выборкам ( $k_1, k_2, \dots, k_n$ ), для которых  $\sum_{r=1}^n r k_r = n$ ,  $k_i \geq 0$ . Используя экспоненциальное разложение, подобное (10.51), заменяя  $\alpha$  на  $P^*$ ,  $a$  на 1,  $u_z^r$  на  $(r-1)! z_r$ , можно получить

$$e^{P^* t} = e^{(z_1 t + z_2 t^2/2 + z_3 t^3/3 + \dots)}; \quad P^{*r} \doteq P_r^*, \quad r = 1, 2, 3, \dots; \quad P^{*0} = 1. \quad (17.17)$$

Соотношениям (17.16) и (17.17) отвечает аналог (10.46):

$$P^{*n+1} = w (P^* + w)^n, \quad P^{*r} \doteq P_r^*, \quad P^{*0} \doteq 1, \quad w^r \doteq w_r, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (17.18)$$

где положено

$$w_r = (r-1)! z_r. \quad (17.19)$$

Разложим (17.18) по формуле бинома:

$$\begin{aligned} P^{*n+1} &= \sum_{r=0}^n C_n^r w^{r+1} P^{*n-r} = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)! r!} w^{r+1} P^{*n-r}, \\ P^{*r} &\doteq P_r^*, \quad P^{*0} \doteq 1, \quad w^r \doteq w_r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (17.20)$$

	8	7	6	5	4	3	2	1
	$k_8$	$k_7$	$k_6$	$k_5$	$k_4$	$k_3$	$k_2$	$k_1$
(1)	1	0	0	0	0	0	0	0
(2)	0	1	0	0	0	0	0	1
(3)	0	0	1	0	0	0	1	0
(4)	0	0	1	0	0	0	0	2
(5)	0	0	0	1	0	1	0	0
(6)	0	0	0	1	0	0	1	1
(7)	0	0	0	1	0	0	0	3
(8)	0	0	0	0	2	0	0	0
(9)	0	0	0	0	1	1	0	1
(10)	0	0	0	0	1	0	2	0
(11)	0	0	0	0	1	0	1	2
(12)	0	0	0	0	1	0	0	4
(13)	0	0	0	0	0	2	1	0
(14)	0	0	0	0	0	2	0	2
(15)	0	0	0	0	0	1	2	1
(16)	0	0	0	0	0	1	1	3
(17)	0	0	0	0	0	1	0	5
(18)	0	0	0	0	0	0	4	0
(19)	0	0	0	0	0	0	3	2
(20)	0	0	0	0	0	0	2	4
(21)	0	0	0	0	0	0	1	6
(22)	0	0	0	0	0	0	0	8

	3	2	1
	$k_8$	$k_7$	$k_1$
(1)	1	0	0
(2)	0	1	1
(3)	0	0	3

	4	3	2	1
	$k_4$	$k_3$	$k_2$	$k_1$
(1)	1	0	0	0
(2)	0	1	0	1
(3)	0	0	2	0
(4)	0	0	1	2
(5)	0	0	0	4

	5	4	3	2	1
	$k_5$	$k_4$	$k_3$	$k_2$	$k_1$
(1)	1	0	0	0	0
(2)	0	1	0	0	1
(3)	0	0	1	1	0
(4)	0	0	1	0	2
(5)	0	0	0	2	1
(6)	0	0	0	1	3
(7)	0	0	0	0	5

	6	5	4	3	2	1
	$k_6$	$k_5$	$k_4$	$k_3$	$k_2$	$k_1$
(1)	1	0	0	0	0	0
(2)	0	1	0	0	0	1
(3)	0	0	1	0	1	0
(4)	0	0	1	0	0	2
(5)	0	0	0	2	0	0
(6)	0	0	0	1	1	1
(7)	0	0	0	1	0	3
(8)	0	0	0	0	3	0
(9)	0	0	0	0	2	2
(10)	0	0	0	0	1	4
(11)	0	0	0	0	0	6

или

$$P_{n+1}^* = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)! r!} w_r P_{n-r}^*. \quad (17.21)$$

Заменим  $w_r$  на  $z_r$  по формуле (17.19):

$$P_{n+1}^* = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)! r!} z_r P_{n-r}^*, \quad (17.22)$$

или

$$P_{n+1}^* = \sum_{r=0}^n A_n^r z_r P_{n-r}^*. \quad (17.23)$$

Эта формула позволяет вычислить  $P_{n+1}^*$ , зная  $P_r^*$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , и полагая  $P_0^* = 1$ .

Продифференцируем (17.17) по  $z_r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_r} e^{P^* t} &= \frac{\partial}{\partial z_r} e^{\left(z_1 t + z_2 \frac{t^2}{2} + \dots + z_r \frac{t^r}{r} + \dots\right)} = \\ &= \frac{t^r}{r} e^{\left(z_1 t + z_2 \frac{t^2}{2} + \dots\right)} = \frac{t^r}{r} e^{P^* t}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

Отсюда получаем

$$r \frac{\partial}{\partial z_r} e^{P^* t} = t^r e^{P^* t}; \quad P^{*j} \doteq P_j^*, \quad P^{*0} \doteq 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (17.25)$$

где слева стоит

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial z_r} e^{P^* t} &= r \frac{\partial}{\partial z_r} \left( 1 + P^* t + P^{*2} \frac{t^2}{2} + \dots + P^{*n} \frac{t^n}{n!} + \dots \right) = \\ &= r \left( \frac{\partial}{\partial z_r} P^* t + \frac{\partial}{\partial z_r} P^{*2} \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{\partial}{\partial z_r} P^{*n} \frac{t^n}{n!} + \dots \right), \quad P^{*j} \doteq P_j^*, \end{aligned} \quad (17.26)$$

а справа

$$\begin{aligned} t^r e^{P^* t} &= t^r \left( 1 + P^* t + P^{*2} \frac{t^2}{2!} + \dots + P^{*n-r} \frac{t^{n-r}}{(n-r)!} + \dots \right) = \\ &= t^r + P^* t^{r+1} + P^{*2} \frac{t^{r+2}}{2!} + \dots + \frac{P^{*n-r} t^n}{(n-r)!} + \dots \end{aligned} \quad (17.27)$$

Отождествляя коэффициенты при  $t$ , получаем

$$r \frac{\partial}{\partial z_r} P^{*n} = \frac{n!}{(n-r)!} P^{*n-r}, \quad P^{*n} \doteq P_n^*, \quad P^{*n-j} \doteq P_{n-j}^*, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17.28)$$

или

$$r \frac{\partial}{\partial z_r} P_n^* = A_n^r P_{n-r}^*. \quad (17.29)$$

Дадим примеры применения формул (17.23) и (17.29). Найдем  $P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , считая известными  $P_3^*(z_1, z_2, z_3)$ ,  $P_2^*(z_1, z_2)$ ,  $P_1^*(z_1)$  и  $P_0^*$ :

$$\begin{aligned} P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4) &= A_3^0 z_1 P_3^*(z_1, z_2, z_3) + A_3^1 z_2 P_2^*(z_1, z_2) + \\ &+ A_3^2 z_3 P_1^*(z_1) + A_3^3 z_4 P_0^* = z_1(z_1^3 + 3z_1 z_2 + 2z_3) + 3z_2(z_1^2 + z_2) + \\ &+ 6z_1 z_3 + 6z_4 = z_1^4 + 6z_1^2 z_2 + 3z_2^2 + 8z_1 z_3 + 6z_4. \end{aligned} \quad (17.30)$$

Пример на формулу (17.29):

$$\frac{\partial}{\partial z_3} P_5^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = 20z_1^2 + 20z_2, \quad (17.31)$$

$$\frac{A_5^3}{3} P_2^*(z_1, z_2) = \frac{5!}{3 \cdot 2!} (z_1^2 + z_2) = 20(z_1^2 + z_2). \quad (17.32)$$

Обозначим через  $P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n | z_r)$  сумму членов в  $P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , содержащих  $z_r$ . Интегрируя (17.29), имеем

$$P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n | z_r) =$$

$$= \frac{A_n^r}{r} \int_0^{z_r} P_{n-r}^*(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_r \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (17.33)$$

Эта формула дает способ рекуррентного вычисления  $P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , исходя из  $P_r^*(z_1, z_2, \dots, z_r)$ ,  $r < n$ . Получим этим способом  $P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4)$ :

$$P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4 | z_4) = \frac{A_4^4}{4} \int_0^{z_4} P_0^* dz_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4} z_4 = 6z_4, \quad (17.34)$$

$$P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4 | z_3) = \frac{A_4^3}{3} \int_0^{z_3} P_1^*(z_1) dz_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3} z_1 z_3 = 8z_1 z_3, \quad (17.35)$$

$$P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4 | z_2) =$$

$$= \frac{A_4^2}{2} \int_0^{z_2} P_2^*(z_1, z_2) dz_2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \int_0^{z_2} (z_1^2 + z_2) dz_2 = 6z_1^2 z_2 + 3z_2^2, \quad (17.36)$$

$$\begin{aligned} P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4 | z_1) &= A_4^1 \int_0^{z_1} P_3^*(z_1, z_2, z_3) dz_1 = \\ &= 4 \int_0^{z_1} (z_1^3 + 3z_1 z_2 + 2z_3) dz_1 = z_1^4 + 6z_1^2 z_2 + 8z_1 z_3. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Тогда

$$P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dot{\sum}_r P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4 | z_r), \quad (17.38)$$

где в  $\dot{S}$  суммирование производится по правилу: сумма подобных членов равна одному из них.

Например,

$$\begin{aligned} P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4) &= (z_1^4 + 6z_1^2z_2 + 8z_1z_3) + (6z_1^2z_2 + 3z_2^2) + 8z_1z_3 + 6z_4 = \\ &= z_1^4 + (6z_1^2z_2 + 6z_1^2z_2) + 3z_2^2 + (8z_1z_3 + 8z_1z_3) + 6z_4 = \\ &= z_1^4 + 6z_1^2z_2 + 3z_2^2 + 8z_1z_3 + 6z_4. \quad (17.39) \end{aligned}$$

Можно сказать, что  $\dot{S}$  есть объединение членов в выражениях

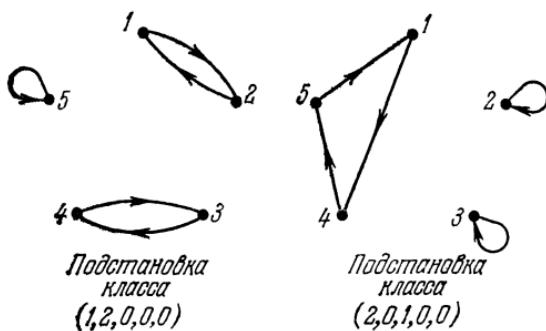


Рис. 29.

$$\begin{aligned} &P_4^*(z_1, z_2, z_3, z_4 | z_r). \\ &\text{В общем случае} \\ &(17.38) \text{ имеет вид} \\ &P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = \\ &= \dot{S} P_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n | z_r). \quad (17.40) \end{aligned}$$

Найдем теперь денумератор подстановок разлагающихся в произведение  $s$  циклов (без учета числа элементов в цикле). Рас-

смотрим, например, подстановки пяти элементов. Сколько существует циклических классов  $(k_1, k_2, \dots, k_5)$  с числом циклов, равным 3? Нетрудно увидеть, что таких классов два (рис. 29):  $(1, 2, 0, 0, 0)$  и  $(2, 0, 1, 0, 0)$ .

Общая задача сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_n &= s, \\ k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n &= n \quad (1 \leqslant s \leqslant n), \quad (17.41) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_s &= s, \\ k_1 + 2k_2 + \dots + sk_s &= n \quad (1 \leqslant s \leqslant n). \quad (17.42) \end{aligned}$$

Денумератор классов, содержащих в точности  $s$  циклов (длина которых не фиксируется), можно получить с помощью (17.16) и (17.17). Для этого полагаем

$$\Pi_n^*(z) = P_n^*(z, z, \dots, z) \quad (17.43)$$

и согласно (17.17)

$$e^{\Pi^* t} = e^{z(t + t^2/2 + t^3/3 + \dots)}. \quad (17.44)$$

Так как

$$\ln \frac{1}{1-t} = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots, \quad 0 < t < 1, \quad (17.45)$$

то

$$\begin{aligned} e^{\Pi^* t} &= e^{z \ln [1/(1-t)]} = e^{\ln [1/(1-t)^z]} = (1-t)^{-z} = \\ &= 1 + zt + z(z+1) \frac{t^2}{2!} + z(z+1)(z+2) \frac{t^3}{3!} + \dots = ^1) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z(z+1) \dots (z+n-1) \frac{t^n}{n!}, \\ \Pi^{*n} &\doteq \Pi_n^*, \quad \Pi^{*0} \doteq 1, \end{aligned} \quad (17.46)$$

или

$$\begin{aligned} 1 + \Pi_1^* t + \Pi_2^* t^2/2 + \dots + \Pi_n^* \frac{t^n}{n!} + \dots &= \\ = 1 + zt + z(z+1) \frac{t^2}{2!} + \dots + z(z+1) \dots & \\ \dots (z+n-1) \frac{t^n}{n!} + \dots & \end{aligned} \quad (17.47)$$

Окончательно для  $\Pi^*(z)$  имеем

$$\Pi_n^*(z) = z(z+1) \dots (z+n-1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.48)$$

Пример.

$$\begin{aligned} \Pi_5^*(z) &= z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4) = \\ &= z^5 + 10z^4 + 35z^3 + 50z^2 + 24z. \end{aligned} \quad (17.49)$$

Итак, для  $n = 5$  имеем соответственно 1 подстановку с 5 циклами, 10 — с 4 циклами, 35 — с 3 циклами, 50 — с 2 циклами,

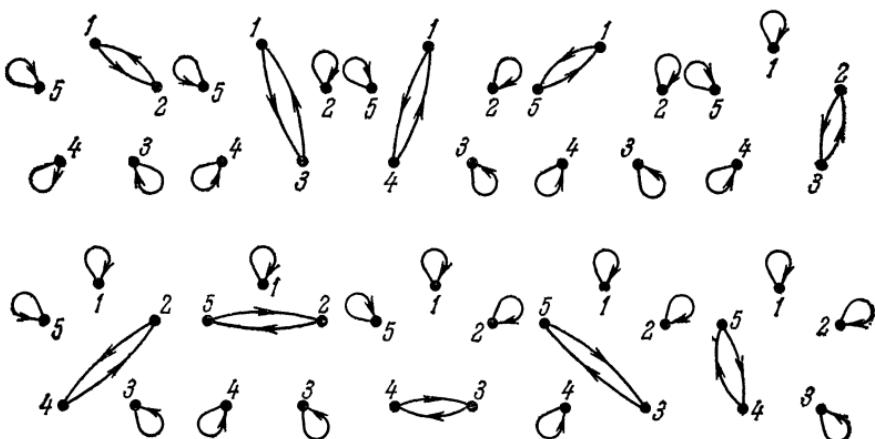


Рис. 30.

24 — с 1 циклом. На рис. 30 изображены 10 подстановок с 4 циклами (рис. 30).

<sup>1)</sup> Разлагаем  $(1-t)^{-z}$  по формуле бинома.

Из (17.48) получается рекуррентная формула

$$\Pi_n^*(z) = (z + n - 1) \Pi_{n-1}^*(z). \quad (17.50)$$

Сравним, с другой стороны, (17.48) и (10.1) (числа Стирлинга):

$$\Pi_n^*(z) = z(z + 1) \dots (z + n - 1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17.51)$$

$$\varphi_n^*(z) = z(z - 1) \dots (z - n + 1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.52)$$

Полагаем

$$\Pi_n^*(z) = \sum_{k=0}^n \pi(n, k) z^k. \quad (17.53)$$

Сравнивая (17.53) и (10.3) видим, что

$$\pi(n, k) = (-1)^{n+k} s(n, k). \quad (17.54)$$

Таким образом, таблица 10.1 дает числа  $\pi(n, k)$ , если в ней везде опустить знак «—».

Подобными рассуждениями можно найти денумератор цикловых классов, состоящих из  $k$  циклов, длина которых не фиксируется, и не содержащих 1-циклов, т. е. беспорядков с  $k$ -циклами. Рис. 31 изображает беспорядок, состоящий из двух циклов.

Положим

$$\Delta_n^*(z) = P_n^*(0, z, \dots, z); \quad (17.55)$$

тогда в силу (17.17)

$$e^{\Delta^* t} = e^{z(t^2/2 + t^3/3 + \dots)} \quad (17.56)$$

и

$$\begin{aligned} e^{\Delta^* t} &= e^{z(t + t^2/2 + t^3/3 + \dots)} \cdot e^{-zt} = (1 - t)^{-z} \cdot e^{-zt} = \\ &= \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z(z + 1) \dots (z + n - 1) \cdot \frac{t^n}{n!} \right] \left[ 1 - zt + \frac{z^2 t^2}{2!} - \dots \right] = \\ &= \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n^*(z) \frac{t^n}{n!} \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k t^k}{k!} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!} \Pi_{n-k}^*(z) (-z)^k \right] t^n, \text{ где } \Delta^{*r} \div \Delta_r^*, \Pi_0^*(z) = 1, \end{aligned} \quad (17.57)$$

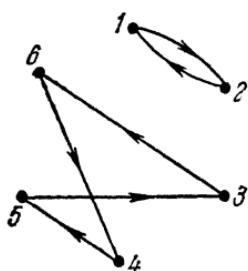


Рис. 31

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{*n} t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!} \Pi_{n-k}^*(z) (-z)^k \right] t^n, \quad \Delta^{*r} \doteq \Delta_r^*. \quad (17.58)$$

Наконец,

$$\Delta_n^*(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Pi_{n-k}^*(z) (-z)^k, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.59)$$

Положим также

$$\Delta_n^*(z) = \sum_{k=0}^n \delta(n, k) z^k. \quad (17.60)$$

Сравнивая коэффициенты в (17.59) и (17.60), имеем

$$\delta(n, k) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r (-1)^r \pi(n-r, k-r). \quad (17.61)$$

Числа  $\delta(n, k)$  называются «присоединенными числами Стирлинга первого рода».

Подсчитаем  $\delta(n, k)$  для некоторых значений  $n$  и  $k$ . Для этого запишем (17.61) с помощью (17.54):

$$\delta(n, k) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r (-1)^{n+k-r} s(n-r, k-r). \quad (17.62)$$

При  $n = 7$  и  $k = 2$  имеем

$$\begin{aligned} \delta(7, 2) &= \sum_{r=0}^1 C_7^r (-1)^{9-r} s(7-r, 2-r) = \\ &= C_7^0 (-1)^9 s(7, 2) + C_7^1 (-1)^8 s(6, 1) = -s(7, 2) + 7s(6, 1). \end{aligned} \quad (17.63)$$

По таблице 10.1 (стр. 48) находим  $s(7, 2) = -1762$  и  $s(6, 1) = -120$ :

$$\delta(7, 2) = 1764 - 7 \cdot 120 = 924. \quad (17.64)$$

В таблице 17.1 приведены значения  $\delta(n, k)$  до  $n = 8$ .

Полагаем  $\delta(0, 0) = 1$  и  $\delta(n, 0) = 0$ ,  $n > 0$ .

Для  $\delta(n, k)$  можно указать непосредственно интересную рекуррентную формулу. Используя (17.62) и (10.9) имеем

$$\delta(n+1, k) = k\delta(n, k) + n\delta(n-1, k-1). \quad (17.65)$$

Можно также выразить  $\Pi_n^*(z)$  через  $\Delta_n^*(z)$ . Для этого рассмотрим (17.57):

$$e^{\Delta^{*t}} \cdot e^{zt} = e^{z(t+t^2/2+t^3/3+\dots)} = (1-t)^{-z}, \quad \Delta^{*r} \doteq \Delta_r^*, \quad (17.66)$$

Таблица 17.1

Таблица присоединенных чисел Стирлинга  
первого рода до  $n = 8$

$\delta(n, k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\delta(1, k)$	0			
$\delta(2, k)$	1			
$\delta(3, k)$	2			
$\delta(4, k)$	6	3		
$\delta(5, k)$	24	20		
$\delta(6, k)$	120	130	15	
$\delta(7, k)$	720	924	210	
$\delta(8, k)$	5040	7308	2380	105

или

$$\begin{aligned} & \left(1 + \Delta_1^* t + \Delta_2^* \frac{t^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + zt + z^2 \frac{t^2}{2!} + \dots\right) = \\ & = 1 + zt + z(z+1) \frac{t^2}{2!} + z(z+1)(z+2) \frac{t^3}{3!} + \dots = \\ & = 1 + \Pi_1^*(z)t + \Pi_2^*(z) \frac{t^2}{2!} + \Pi_3^*(z) \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (17.67) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Pi_n^*(z) = \sum_{r=0}^n C_n^r \Delta_{n-r}^*(z) z^r. \quad (17.68)$$

Подставляя (17.53) и (17.60) в (17.68), получаем

$$\pi(n, k) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \delta(n-r, k-r), \quad (17.69)$$

или, возвращаясь к числам Стирлинга первого рода,

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \delta(n-r, n-k). \quad (17.70)$$

С помощью  $\delta(n, k)$  можно вычислить число беспорядков  $n$  элементов:

$$D_n = \sum_{k=1}^n \delta(n, k), \quad v = \begin{cases} n/2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ (n-1)/2, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (17.71)$$

Предел суммирования в (17.71) взят, исходя из того, что беспорядок не содержит 1-циклов.

Выпишем денумераторы четных и нечетных подстановок:

$$P_n^{p*}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \\ = \frac{1}{2} [P^*(z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_n) + P^*(z_1, -z_2, z_3, -z_4, \dots)] \quad (17.72)$$

$$\text{c } P_0^{p*} = 1;$$

$$P_n^{i*}(z_1, z_2, \dots, z_n) =$$

$$= \frac{1}{2} [P^*(z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_n) - P^*(z_1, -z_2, z_3, -z_4, \dots)] \quad (17.73)$$

$$c \ P_0^{i*} = 0.$$

Например, в силу (17.8) имеем

$$\begin{aligned} P_1^{p*}(z_1) &= z_1, & P_4^{p*} &= z_1^4 + 3z_2^2 + 8z_1z_3, \\ P_2^{p*}(z_1, z_2) &= z_1^2, & P_5^{p*} &= z_1^5 + 15z_1z_2^2 + \\ &&&+ 20z_1^2z_3 + 24z_5, \quad (17.74) \end{aligned}$$

$$P_3^{p*}(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + 2z_3, \quad P_6^{p*} = z_1^6 + 45z_1^2z_2^2 + \\ + 40z_1^3z_3 + 40z_3^2 + 90z_2z_4 + 144z_1z_5$$

Имеем соответственно одну четную подстановку класса  $(6, 0, 0, 0, 0, 0)$ , 45 — класса  $(2, 2, 0, 0, 0, 0)$ , 40 — класса  $(3, 0, 1, 0, 0, 0)$ , 40 — класса  $(0, 0, 2, 0, 0, 0)$ , 90 — класса  $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$ , 144 — класса  $(1, 0, 0, 0, 1, 0)$ .

Для нечетных подстановок в силу (17.8) получаем аналогично

$$\begin{aligned} P_1^{l*}(z_1) &= 0, & P_4^{l*}(z_1, z_2, z_3, z_4) &= 6z_1^2z_2 + 6z_4, \\ P_2^{l*}(z_1, z_2) &= z_2, & P_5^{l*}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &= \\ &&&= 10z_1^3z_2 + 20z_2z_3 + 30z_1z_4, \end{aligned} \quad (17.75)$$

$$P_3^{l*}(z_1, z_2, z_3) = 3z_1z_2, \quad P_6^{l*}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = 15z_1^4z_2 + \\ + 15z_2^3 + 120z_1z_2z_3 + 90z_1^2z_4 + 120z_6,$$

Имеем соответственно 15 нечетных подстановок класса  $(4, 1, 0, 0, 0, 0)$ , 15 — класса  $(0, 3, 0, 0, 0, 0)$ , 120 — класса  $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ , 90 — класса  $(2, 0, 0, 1, 0, 0)$ , 120 — класса  $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ .

Точно так же можно найти денумераторы  $\Pi_n^{p*}$  и  $\Pi_n^{t*}$  числа подстановок, обладающих заданным числом циклов. Полагаем (как в (17.43))

$$\Pi_n^{p*}(z) = P_n^{p*}(z, z, \dots, z), \quad (17.76)$$

$$\Pi_n^{i*}(z) = P_n^{i*}(z, z, \dots, z). \quad (17.77)$$

Тогда

$$e^{\Pi^{p*}(t)} = \frac{1}{2} [(1-t)^{-z} + (1+t)^z], \quad (17.78)$$

$$e^{\Pi^{i*}(t)} = \frac{1}{2} [(1-t)^{-z} - (1+t)^z]. \quad (17.79)$$

Отсюда ввиду (17.46)

$$\Pi_n^{p*}(z) = \frac{1}{2} [z(z+1)\dots(z+n-1) + z(z-1)\dots(z-n+1)], \quad (17.80)$$

$$\Pi_n^{i*}(z) = \frac{1}{2} [z(z+1)\dots(z+n-1) - z(z-1)\dots(z-n+1)]. \quad (17.81)$$

Например, для  $n=6$

$$\begin{aligned} \Pi_6^{p*}(z) &= \frac{1}{2} [z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)(z+5) + \\ &\quad + z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)] = \\ &= \frac{z}{2}[2z^5 + 170z^3 + 548z] = z^6 + 85z^4 + 274z^2. \end{aligned} \quad (17.82)$$

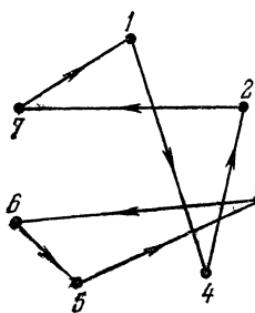
Таким образом, существуют одна четная подстановка 6 элементов, содержащая 6 циклов, 85 — содержащих 4 цикла и 274 — содержащих два цикла.

#### Денумераторы циклов с предписанным порядком элементов.

Предварительно рассмотрим пример.

Пусть задана подстановка класса  $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$  (рис. 32). По соглашению (см. стр. 89) ее можно записать так:

$$(1427)(365). \quad (17.83)$$



Это соглашение позволяет не различать циклы

$$(1427), (4271), (2714) \text{ и } (7142), \quad (17.84)$$

а также

$$(365), (653), (536). \quad (17.85)$$

Однако циклы  $(1427)$  и  $(1724)$  различны.

Пересчитаем подстановки  $n$  элементов, в циклах которых элементы расположены в предписанном порядке. Таким образом, приходим к задаче пересчета классов циклов, составленных из одних и тех же элементов. Например, если это отношение эквивалентности обозначить через  $\simeq$ , то

$$(1427) \simeq (1472) \simeq (1274) \simeq (1247) \simeq (1724) \simeq (1742). \quad (17.86)$$

Так как, очевидно, для  $r$ -цикла можно образовать  $r-1$  ему эквивалентных, то для получения искомого денумератора доста-

точно в денумераторе  $P_n^*$  (см. (17.4)) заменить каждое  $z_r$  на  $u_i/(r-1)!$ :

$$\Omega_n^*(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{u_1}{1!} \right)^{k_1} \left( \frac{u_2}{2!} \right)^{k_2} \dots \left( \frac{u_n}{n!} \right)^{k_n}, \quad (17.87)$$

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n. \quad (17.88)$$

Следовательно, подставляя в (17.8), имеем

$$\begin{aligned} \Omega_1^*(u_1) &= u_1, \quad \Omega_3^*(u_1, u_2, u_3) = u_1^3 + 3u_1u_2 + u_3, \\ \Omega_2^*(u_1, u_2) &= u_1^2 + u_2, \quad \Omega_4^*(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1^4 + 6u_1^2u_2 + 3u_2^2 + 4u_1u_3 + u_4, \\ \Omega_5^*(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) &= u_1^5 + 10u_1^3u_2 + 15u_1u_2^2 + 10u_1^2u_3 + \\ &\quad + 10u_2u_3 + 5u_1u_4 + u_5, \quad (17.89) \\ \Omega_6^*(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) &= u_1^6 + 15u_1^4u_2 + 45u_1^2u_2^2 + 20u_1^3u_3 + \\ &\quad + 15u_2^3 + 60u_1u_2u_3 + 15u_1^2u_4 + 10u_3^2 + 15u_2u_4 + 6u_1u_5 + u_6. \end{aligned}$$

Сравнивая (17.87) и (10.54), замечаем, что коэффициенты полиномов от  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , с помощью которых образуется этот денумератор, совпадают с коэффициентами полиномов Белла, если в (10.54) заменить  $y_u^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , на 1, а  $u_z^{(i)}$  на  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Из (17.87) можно вывести ряд соотношений. Аналогично (17.17) имеем

$$e^{\Omega^* t} = e^{(u_1 t + u_2 t^2/2! + u_3 t^3/3! + \dots)}, \quad \Omega^{*r} = \Omega_r^*, \quad \Omega^{*0} = 1, \quad r = 1, 2, \dots \quad (17.90)$$

Обозначим

$$\Lambda_n^*(u) = \Omega_n^*(u, u, \dots, u) \quad (17.91)$$

дenumerator, не учитывающий длины циклов, а только их число. Тогда в силу (17.90) имеем

$$e^{\Lambda^* t} = e^{u(t + t^2/2! + t^3/3! + \dots)} = e^{u(e^t - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k (e^t - 1)^k}{k!}. \quad (17.92)$$

Положим

$$Y_k^*(t) = \frac{(e^t - 1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17.93)$$

Легко убедиться, что  $Y_k^*$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(D_t - k) Y_k^*(t) = Y_{k-1}^*(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (17.94)$$

для которого

$$\begin{aligned} Z_k^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{s}(n, k) \frac{t^n}{n!} = e^{t\bar{s}(\cdot, k)}, \quad [\bar{s}(\cdot, k)]^n = \bar{s}(n, k), \\ &\quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (17.95) \end{aligned}$$

( $\bar{s}(n, k)$  — числа Стирлинга второго рода) — также решения.

Так как  $Y_k^*(0) = Z_k^*(0)$ , то

$$Y_k^*(t) = Z_k^*(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17.96)$$

как решения одного и того же дифференциального уравнения с одинаковым начальным условием.

Таким образом,

$$e^{\Lambda^* t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n \bar{s}(n, k) \cdot u^k, \\ (\Lambda^*)^r \doteq \Lambda_r^*, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (\Lambda^*)^0 \doteq 1; \quad (17.97)$$

И

$$\Lambda_n^*(u) = \sum_{k=0}^n \bar{s}(n, k) u^k. \quad (17.98)$$

Тем самым  $\Lambda_n^*(u)$  легко выписываются с помощью чисел Стирлинга второго рода (таблица 10.2). Для первых значений  $n$ :

$$\begin{aligned}\Lambda_1^*(u) &= u, & \Lambda_3^*(u) &= u + 3u^2 + u^3, \\ \Lambda_2^*(u) &= u + u^2, & \Lambda_4^*(u) &= u + 7u^2 + 6u^3 + u^4, \\ \Lambda_5^*(u) &= u + 15u^2 + 25u^3 + 10u^4 + u^5, \\ \Lambda_6^*(u) &= u + 31u^2 + 90u^3 + 65u^4 + 15u^5 + u^6.\end{aligned}\quad (17.99)$$

В силу (17.96) и (17.98) имеем

$$\Lambda_{n+1}^*(u) = u[\Lambda^*(u) + 1]^n, \quad (\Lambda^*)' = \Lambda_r^*, \quad r = 1, 2, \dots; \quad (\Lambda^*)^0 = 1. \quad (17.100)$$

Разлагая по формуле бинома, получаем

$$\begin{aligned}\Lambda_1^*(u) &= u, \quad \Lambda_2^*(u) = u[\Lambda_1^*(u) + 1] = u^2 + u, \\ \Lambda_3^*(u) &= u[\Lambda_2^*(u) + 2\Lambda_1^*(u) + 1] = u[u^2 + 2u + u + 1] = \\ &= u^3 + 3u^2 + u,\end{aligned}\tag{17.101}$$

При этом, как указал Айткен, можно использовать несколько видоизмененный треугольник Паскаля ([36]).

Приведем теперь денумератор для цикловых классов подстановок, обладающих  $k$  циклами, длина которых не фиксируется, порядок элементов в циклах не учитывается, и не содержащих 1-циклов:

$$\Gamma_n^*(u) = \Omega_n^*(0, u, \dots, u). \quad (17.102)$$

Применяем экспоненциальное  $z$ -преобразование:

$$\begin{aligned} e^{\Gamma^* t} &= e^{u(e^t - 1 - t)} = e^{t(\Lambda^* - u)}, \\ (\Gamma^*)' &\doteq \Gamma_r^*, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (\Gamma^*)^0 \doteq 1; \\ (\Lambda^*)' &\doteq \Lambda_r^*, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (\Lambda^*)^0 \doteq 1. \end{aligned} \quad (17.103)$$

Разлагая обе части (17.103) по степеням  $t$ , имеем

$$\Gamma_n^*(u) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Lambda_{n-k}^*(u) (-u)^k \quad (17.104)$$

и аналогично

$$\Lambda_n^*(u) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Gamma_{n-k}^*(u) u^k. \quad (17.105)$$

Полагая

$$\Gamma_n^*(u) = \sum_{k=0}^n \gamma(n, k) u^k, \quad (17.106)$$

получаем соотношение, подобное (17.60);  $\gamma(n, k)$  называются присоединенными числами Стирлинга второго рода. Принимают  $\gamma(0, 0) = 1$ ,  $\gamma(n, 0) = 0$ ,  $n > 0$ .

В таблице 17.2 приведены числа  $\gamma(n, k)$  до  $n = 8$ .

Таблица 17.2

Таблица присоединенных чисел Стирлинга второго рода до  $n = 8$

$\gamma(n, k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\gamma(1, k)$	0			
$\gamma(2, k)$	1			
$\gamma(3, k)$	1			
$\gamma(4, k)$	1	3		
$\gamma(5, k)$	1	10		
$\gamma(6, k)$	1	25	15	
$\gamma(7, k)$	1	56	105	
$\gamma(8, k)$	1	119	490	105

Из (17.103) или (17.104) получается рекуррентная формула  $\Gamma_{n+1}^*(u) = u [(\Gamma^*(u) + 1)^n - \Gamma_n^*(u)]$ ,

$$(\Gamma^*)' = \Gamma_r^*, \quad r = 1, 2, \dots, 1 = (\Gamma^*)^0. \quad (17.107)$$

Аналогичные результаты можно получить и при других ограничениях на классы подстановок. Различные ограничения на  $r$ -циклы могут привести к денумератору вида

$$\Phi_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{z_1}{a_1} \right)^{k_1} \left( \frac{z_2}{2a_2} \right)^{k_2} \dots \left( \frac{z_n}{na_n} \right)^{k_n}. \quad (17.108)$$

Например, если фиксировать два первых элемента каждого цикла, то в (17.108)  $a_r = r - 1$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

17А. Найти решение уравнения  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$  при  $n = 7, 9, 10$ .

17Б. Найти денумератор цикловых классов  $P_n^*(z)$  при  $n = 7$  по формуле (17.4).

17В. Решить упражнение 17Б с помощью рекуррентной формулы (17.23).

17Г. То же, что и в упражнении 17В, но с использованием (17.38).

17Д. Указать денумератор  $\Pi_n^*(z)$  для подстановок с четырьмя циклами без учета их длины. Выписать его в явном виде для  $n = 5, 6, 7$ .

17Е. Выписать денумератор  $\Delta_n^*(z)$  классов подстановок с тремя циклами произвольной длины и не содержащих 1-циклов (беспорядки в точности с тремя циклами) при  $n = 5, 6$ .

17Ж. Вычислить присоединенные числа Стирлинга первого рода при  $n = 9$ .

17З. Используя (17.72) и (17.73), найти денумераторы четных и нечетных подстановок при  $n = 7$ .

17И. По формуле (17.87) найти  $\Omega_7^*(u_1, u_2, \dots, u_7)$ .

17К. С помощью (17.98) выписать  $\Omega_7^*(u, u, \dots, u)$ .

17Л. Вычислить присоединенные числа Стирлинга второго рода для  $n = 9$ .

### § 18. Классификация. Схема размещения элементов по ячейкам

Под *классификацией* понимают распределение объектов из некоторой совокупности по классам, причем каждый объект принадлежит точно одному классу (некоторые классы могут быть пустыми). Объекты из одного и того же класса не обязательно считаются эквивалентными, т. е. рассматриваемое здесь понятие класса шире понятия класса эквивалентности в теории множеств.

Физическая интерпретация классификации — это «схема размещения» или «размещение» объектов по ячейкам; каждая ячейка соответствует классу.

Во избежание недоразумений, мы вместо классов будем говорить о ячейках<sup>1)</sup>.

В этом параграфе мы будем интересоваться различными возможными размещениями  $r$  объектов по  $n$  ячейкам в основном одного из следующих видов:

(1.1): объекты различимые и неупорядоченные, ячейки различимые и неупорядоченные;

(1.2): объекты различимые и неупорядоченные, ячейки различимые и упорядоченные;

(1.3): объекты различимые и неупорядоченные, ячейки неразличимые;

(2.1): объекты различимые и упорядоченные, ячейки различимые и неупорядоченные;

(2.2): объекты различимые и упорядоченные, ячейки различимые и упорядоченные;

<sup>1)</sup> Под множеством понимают совокупность различимых объектов, здесь же будут рассматриваться совокупности не обязательно различимых объектов.

- (2.3): объекты различимые и упорядоченные, ячейки неразличимые;  
 (3.1): объекты неразличимые, ячейки различимые и неупорядоченные;  
 (3.2): объекты неразличимые, ячейки различимые и упорядоченные;  
 (3.3): объекты неразличимые, ячейки неразличимые.

Приведем примеры этих размещений для случая восьми объектов и пяти ячеек.

Случай (1.1)

$ AC $	$ ID $	$FEG B $	$ AC $	$ DI $	$EGF B $	$ CA B EFG $	$ ID $
1	2	3	4	5			
(α)			(β)			(γ)	

$(\alpha) \simeq (\beta) \simeq (\gamma)$

Случай (1.2)

$ AC $	$ ID $	$FEG B $	$ AC $	$ DI $	$EGF B $	$ CA B EFG $	$ ID $
1	2	3	4	5			
(α)			(β)			(γ)	

$(\alpha) \simeq (\beta) \neq (\gamma)$

Случай (1.3)

$ AB $	$ ID $	$FEG B $	$ CA $	$FEG $	$ B ID $	$ ID B AC FEG $	$ $
(α)			(β)			(γ)	

$(\alpha) \simeq (\beta) \simeq (\gamma)$

Случай (1.3) не следует смешивать со случаем (1.1). Подмножество ячеек в (1.1) может быть образовано, например, ячейками 1, 2, 4, 5. В случае (1.3) понятие подмножества не имеет смысла.

В случае (1.1) размещение (α) описывается так: ячейка 1 содержит  $A$  и  $C$ , ячейка 2 пуста, ячейка 3 содержит  $D$  и  $I$ , ячейка 4 содержит  $E, F, G$ , ячейка 5 содержит  $B$ .

В случае (1.3) размещение (α) описывается так: одна ячейка содержит  $A$  и  $C$ , одна ячейка пустая, одна ячейка содержит  $E, F, G$ , одна ячейка содержит  $D$  и  $I$ , одна ячейка содержит  $B$ .

Случай (2.1)

$ AC $	$ ID $	$FEG B $	$ AC $	$ ID $	$ B FEG $	$ CA $	$ ID $	$FGE B $
1	2	3	4	5				
(α)			(β)			(γ)		

$(\alpha) \simeq (\beta) \neq (\gamma)$

					Случай (2.2)				
$ AC $		$ ID $		$ FEG $		$ B $			
1	2	3	4	5	1	3	2	5	4
(α)					(β)				
(α) $\neq$ (β) $\neq$ (γ)									(γ)

					Случай (2.3)				
$ AC $		$ ID $		$ FEG $		$ B $			
1	2	3	4	5	1	3	2	5	4
(α)					(β)				
(α) $\simeq$ (β) $\neq$ (γ)									(γ)

О случаях (2.3) и (2.1) следует сделать те же замечания, что и о случае (1.3).

					Случай (3.1)				
$ AA $		$ AA $		$ AAA $		$ A $			
1	2	3	4	5	1	3	2	5	4
(α)					(β)				
(α) $\simeq$ (β) $\neq$ (γ)									(γ)

					Случай (3.2)				
$ AA $		$ AA $		$ AAA $		$ A $			
1	2	3	4	5	1	3	2	5	4
(α)					(β)				
(α) $\neq$ (β) $\neq$ (γ)									(γ)

					Случай (3.3)				
$ AA $		$ AA $		$ AAA $		$ A $			
1	2	3	4	5	1	3	2	5	4
(α)					(β)				
(α) $\simeq$ (β) $\neq$ (γ)									(γ)

Установим теперь формулы, дающие числа  $N(r, n)$  различных размещений  $r$  объектов по  $n$  ячейкам для некоторых случаев, указанных выше.

**Число размещений  $r$  различимых и неупорядоченных объектов по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам. Случай (1.1).** Это число равно

$$N(r, n) = n^r. \quad (18.1)$$

В самом деле, пусть  $r$  объектов перенумерованы от 1 до  $r$ . Объект с номером 1 можно поместить в  $n$  ячеек в точности  $n$  способами, объекты с номерами 1 и 2 — в точности  $n^2$  способами, ...,  $r$  объектов — в точности  $n^r$  способами.

Найдем теперь денумератор таких размещений, что некоторое число объектов попадает в заданную ячейку, а затем — то же для фиксированного множества ячеек.

Пусть  $\Phi_r^*(z_1, z_2, \dots, z_n)$  — денумератор, дающий число объектов, которые могут быть помещены в ячейки с номерами  $1, 2, \dots, n$ , причем  $z_i$  соответствует ячейке  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Очевидно,

$$\Phi_1^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \quad (18.2)$$

ибо один объект можно поместить в каждую из  $n$  ячеек. Для двух объектов

$$\Phi_2^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2, \quad (18.3)$$

для  $r$  объектов

$$\Phi_r^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^r. \quad (18.4)$$

Применим экспоненциальное преобразование:

$$\begin{aligned} F^*(z_1, z_2, \dots, z_n; t) &= \sum_{r=0}^{\infty} (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^r \frac{t^r}{r!} = \\ &= e^{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)t} = e^{z_1 t} \cdot e^{z_2 t} \cdot \dots \cdot e^{z_n t} = \\ &= F_{(1)}^*(z_1; t) F_{(2)}^*(z_2; t) \dots F_{(n)}^*(z_n; t). \end{aligned} \quad (18.5)$$

Для ячейки  $i$  имеем

$$F_{(i)}^*(z_i; t) = e^{tz_i} = 1 + z_i t + z_i^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + z_i^r \frac{t^r}{r!} + \dots \quad (18.6)$$

С другой стороны, можем записать (см. (7.102))

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^r = \sum \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_n^{r_n}, \quad (18.7)$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным числам  $r_1, r_2, \dots, r_n$  таким, что  $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$ .

Отсюда следует, что число таких размещений  $r$  различимых и неупорядоченных объектов по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам, что  $r_1$  объектов попадает в ячейку 1,  $r_2$  объектов — в ячейку 2,  $r_n$  объектов — в ячейку  $n$ , равно

$$\frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!}. \quad (18.8)$$

Это число получено в (3.34).

Из

$$F^*(z, z, \dots, z; t) = \sum_{r=0}^{\infty} n^r z^r \frac{t^r}{r!} = e^{nzt} \quad (18.9)$$

следует

$$\varphi_r^*(z, z, \dots, z) = n^r z^r, \quad (18.10)$$

т. е. (18.1).

Применим (18.5) к более сложным случаям.

Подсчитаем число размещений  $r$  различимых объектов по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам при условии, что в каждую ячейку может попасть не более одного объекта. В этом случае в силу (18.6)

$$F_i^*(z_i; t) = 1 + z_i t \quad (18.11)$$

и

$$F^*(z_1, z_2, \dots, z_n; t) = (1 + z_1 t)(1 + z_2 t) \dots (1 + z_n t). \quad (18.12)$$

Полагая в (18.12)  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ , имеем

$$F^*(z, z, \dots, z; t) = (1 + z t)^n =$$

$$= 1 + C_n^1 z t + C_n^2 z^2 t^2 + \dots + C_n^r z^r t^r + \dots \quad (18.13)$$

Если  $\varphi^*(z)$  — соответствующий денумератор, то

$$F^*(z, z, \dots, z; t) = e^{\varphi^* t} = 1 + \varphi_1^* t + \varphi_2^* \frac{t^2}{2!} + \dots + \varphi_r^* \frac{t^r}{r!} + \dots,$$
$$\varphi^{*r} = \varphi_r^*, \quad r = 1, 2, \dots, \varphi^{*0} = 1. \quad (18.14)$$

Сравнение (18.13) и (18.14) дает

$$\varphi_r^*(z) = r! C_n^r z^r = A_n^r z^r; \quad (18.15)$$

таким образом, искомое число равно

$$A_n^r. \quad (18.16)$$

Вычислим теперь число размещений  $r$  различимых и неупорядоченных объектов по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам при условии, что каждая ячейка занята. В этом случае (18.6) запишется так:

$$F_i^*(z_i; t) = z_i t + z_i^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + z_i^r \frac{t^r}{r!} + \dots, \quad (18.17)$$

откуда

$$F^*(z_1, z_2, \dots, z_n; t) = (e^{z_1 t} - 1)(e^{z_2 t} - 1) \dots (e^{z_n t} - 1). \quad (18.18)$$

Полагая  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ , получаем

$$F^*(z, z, \dots, z; t) = (e^{z t} - 1)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j (-1)^j e^{(n-j) z t} =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r t^r}{r!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (n-k)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r t^r}{r!} \Delta^n 0^r =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r t^r}{r!} n! \bar{s}(r, n) \quad (\text{в силу (10.61)}). \quad (18.19)$$

Сравнивая (18.19) с  $e^{\Phi^*t}$ , имеем

$$\varphi_r^*(z) = n! \bar{s}(r, n) z^r. \quad (18.20)$$

Таким образом, искомое число равно

$$n! \bar{s}(r, n). \quad (18.21)$$

Если теперь эти  $r$  объектов размещаются по  $n$  различимым ячейкам с тем условием, что  $m$  ячеек заняты, а  $n - m$  ячеек пусты, то

$$F_i^*(z_i; t) = \begin{cases} e^{z_i t} - 1, & i = 1, 2, \dots, m, \\ 1, & i = m + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (18.22)$$

Припишем  $m$  занятых ячейкам номера от 1 до  $m$  (не уточняя, какие именно ячейки заняты). Имеем

$$\begin{aligned} F^*(z, z, \dots, z; t) &= C_n^m (e^{zt} - 1)^m = \\ &= \frac{n!}{m! (n-m)!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r t^r}{r!} \cdot m! \bar{s}(r, m) = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r t^r}{r!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!} \bar{s}(r, m) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r t^r}{r!} \cdot A_n^m \bar{s}(r, m). \end{aligned} \quad (18.23)$$

Таким образом, искомое число равно

$$A_n^m \bar{s}(r, m), \quad (18.24)$$

что обобщает (18.21).

Рассмотрим еще некоторые случаи.

Пусть  $r$  различных и неупорядоченных объектов размещаются по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам так, что в каждую ячейку попадает не более  $a$  объектов.

Запишем

$$F^*(z, z, \dots, z; t) = \left( 1 + zt + z^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{z^a t^a}{a!} \right)^n. \quad (18.25)$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение для соответствующих чисел  $g_r(n, a)$ :

$$\begin{aligned} g_r(n, a) &= g_r(n-1, a) + r g_{r-1}(n-1, a) + \dots \\ &\quad \dots + C_r^a g_{r-a}(n-1, a) \end{aligned} \quad (18.26)$$

и

$$g_{r+1}(n, a) = n g_r(n, a) - n C_r^a g_{r-a}(n-1, a). \quad (18.27)$$

Пусть  $r$  различимых и неупорядоченных объектов размещаются по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам так, что в каждую ячейку попадает не менее  $b$  объектов; тогда

$$\begin{aligned} F^*(z, z, \dots, z; t) &= \left( \frac{z^b t^b}{b!} + \frac{z^{b+1} t^{b+1}}{(b+1)!} + \dots \right) = \\ &= \left( e^{zt} - 1 - \frac{zt}{1!} - \frac{z^2 t^2}{2!} - \dots - \frac{z^{b-1} t^{b-1}}{(b-1)!} \right)^n. \end{aligned} \quad (18.28)$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение для  $h_r(n, b)$ :

$$h_r(n, b) = nh_{r-1}(n, b) + nC_{r-1}^{b-1} h_{r-b}(n-1, b). \quad (18.29)$$

**Число размещений<sup>1)</sup>  $r$  неразличимых объектов по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам. Случай (3.1).** Это число равно

$$N(r, n) = C_{n+r-1}^r. \quad (18.30)$$

В самом деле, расположим на одной строке  $r$  объектов и между ними поставим  $n-1$  черточек, соответствующих  $n$  ячейкам (рис. 33). Мы можем

теперь рассматривать черточки как объекты. Число размещений  $r$  неразличимых объектов по  $n$  ячейкам равно поэтому числу перестановок  $n+r-1$  объектов, т. е. числу  $(n+r-1)!$  упорядоченных  $(n+r-1)$ -выборок



Рис. 33.

без повторения. Так как  $n-1$  мест (чертежек) фиксированы, а остальные  $r$  объектов неразличимы, то

$$N(r, n) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! r!} = C_{n+r-1}^r.$$

Найдем денумератор, соответствующий размещению  $r$  объектов в ячейке  $i$ . Воспользуемся (18.6), учитывая, что коэффициенты при  $t^r$  нужно умножить на  $r!$  (объекты одинаковы); имеем

$$G_{(i)}(z_i; t) = 1 + z_i t + z_i^2 t^2 + \dots + z_i^r t^r + \dots = (1 - z_i t)^{-1}. \quad (18.31)$$

Если рассматривать  $n$  ячеек, то

$$\begin{aligned} G^*(z_1, z_2, \dots, z_n; t) &= (1 - z_1 t)^{-1} (1 - z_2 t)^{-1} \dots (1 - z_n t)^{-1} = \\ &= \frac{1}{(1 - z_1 t)(1 - z_2 t) \dots (1 - z_n t)}. \end{aligned} \quad (18.32)$$

<sup>1)</sup> Быть может, правильнее употреблять слово «распределение» («positionnement») вместо слова «размещение» («placement») в тех случаях, когда объекты или ячейки неразличимы, но с целью сохранения единства мы всегда будем пользоваться термином «размещение».

Полагаем

$$1 - \alpha_1^* t + \alpha_2^* t^2 + \dots + (-1)^n \alpha_n^* t^n = (1 - z_1 t)(1 - z_2 t) \dots (1 - z_n t), \quad (18.33)$$

где

$$\alpha_r^* = \alpha_r^*(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (18.34)$$

а также

$$1 + \beta_1^* t + \beta_2^* t^2 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha_1^* t + \alpha_2^* t^2 - \dots + (-1)^n \alpha_n^* t^n}, \quad (18.35)$$

где

$$\beta_r^* = \beta_r^*(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (18.36)$$

Можно дать общую формулу для  $\alpha_n^*$  и  $\beta_n^*$  с помощью формулы Бруно. Как показано ранее (см. (10.51) и (17.15)), из

$$1 + \gamma_1^* t + \gamma_2^* \frac{t^2}{2!} + \gamma_3^* \frac{t^3}{3!} + \dots = e^{u_1 t + u_2 t^2/2 + u_3 t^3/3 + \dots} \quad (18.37)$$

следует

$$\gamma_n^*(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{u_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{u_2}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{u_n}{n!}\right)^{k_n}, \quad (18.38)$$

где суммирование производится по всем решениям ( $k_1, k_2, \dots, k_n$ ) уравнения  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ .

Запишем также

$$1 - \alpha_1^* t + \alpha_2^* t^2 - \dots + (-1)^n \alpha_n^* t^n = e^{-z_1 t - z_2 t^2/2 - \dots - z_n t^n/n - \dots}. \quad (18.39)$$

Сравнивая (18.37) с (18.39), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \\ &= (-1)^n \sum \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{-z_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{-z_2}{2}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{-z_n}{n}\right)^{k_n}, \end{aligned} \quad (18.40)$$

где суммирование производится по всем решениям ( $k_1, k_2, \dots, k_n$ ) уравнения  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ .

Точно так же

$$1 + \beta_1^* t + \beta_2^* t^2 + \beta_3^* t^3 + \dots = e^{z_1 t + z_2 t^2/2 + \dots + z_n t^n/n + \dots} \quad (18.41)$$

и, сравнивая это с (18.37), получаем

$$\beta_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{z_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{z_2}{2}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{z_n}{n}\right)^{k_n}. \quad (18.42)$$

Как пример выпишем формулы (18.40) и (18.42) при  $n = 1, 2, 3$ . При  $n = 1, k_1 = 1$

$$\alpha_1^*(z_1) = (-1) \cdot (-z_1) = z_1, \quad \beta_1^*(z_1) = z_1. \quad (18.43)$$

При  $n = 2$ ,  $(k_1, k_2) = (2, 0)$  и  $(k_1, k_2) = (0, 1)$

$$\begin{aligned} a_2^*(z_1, z_2) &= (-1)^2 \left[ \frac{1}{2}(-z_1)^2 + \frac{(-z_2)}{2} \right] = \frac{1}{2}(-z_2 + z_1^2), \\ \beta_2^*(z_1, z_2) &= \left[ \frac{1}{2}(z_1)^2 + \frac{z_2}{2} \right] = \frac{1}{2}[z_2 + z_1^2]. \end{aligned} \quad (18.44)$$

При  $n = 3$ ,  $(k_1, k_2, k_3) = (3, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} a_3^*(z_1, z_2, z_3) &= (-1)^3 \left[ \frac{(-z_1)^3}{3!} + \frac{(-z_1)(-z_2)}{2} + \frac{(-z_3)}{3} \right] = \\ &= \frac{z_3}{3} - \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{z_1^3}{6}, \end{aligned} \quad (18.45)$$

$$\beta_3^*(z_1, z_2, z_3) = \left[ \frac{z_1^3}{3!} + \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{z_3}{3} \right] = \frac{z_3}{3} + \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{z_1^3}{6}. \quad (18.46)$$

Наконец, обозначая через  $d_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n)$  денумератор, соответствующий размещениям  $r$  неразличимых объектов по  $n$  различимым (указанным) ячейкам, имеем

$$\begin{aligned} d_n^*(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \\ &= n! \sum \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{z_1}{1} \right)^{k_1} \left( \frac{z_2}{2} \right)^{k_2} \dots \left( \frac{z_n}{n} \right)^{k_n}. \end{aligned} \quad (18.47)$$

Ввиду (18.43) — (18.46) получаем

$$\begin{aligned} d_1^*(z_1) &= z_1, & d_2^*(z_1, z_2) &= z_2 + z_1^2, \\ d_3^*(z_1, z_2, z_3) &= 2z_3 + 3z_1 z_2 + z_1^3. \end{aligned} \quad (18.48)$$

Денумератор, соответствующий всем возможным случаям, получается из (18.32) при  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ :

$$G^*(z, z, \dots, z; t) = (1 - zt)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+n-1}^r z^r t^r, \quad (18.49)$$

откуда

$$G_r^*(z) = C_{n+r-1}^r z^r, \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad (18.50)$$

т. е. опять приходим к (18.30).

Найдем теперь денумератор, соответствующий размещениям  $r$  неразличимых объектов по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам при условии, что все ячейки заняты.

Для фиксированной ячейки находим аналогично (18.31)

$$\begin{aligned} H_{(i)}^*(z_i; t) &= z_i t + z_i^2 t^2 + \dots + z_i^r t^r + \dots = \\ &= z_i t (1 - z_i t)^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (18.51)$$

Для всех ячеек

$$H^*(z_1, z_2, \dots, z_n; t) = z_1 z_2 \dots z_n t^n (1 - z_1 t)^{-1} \dots (1 - z_n t)^{-1}. \quad (18.52)$$

Когда ячейки конкретно не указываются, имеем

$$H^*(z, z, \dots, z; t) = z^n t^n (1 - zt)^{-n}. \quad (18.53)$$

Разлагая  $(1 - zt)^{-n}$ , запишем

$$H^*(z, z, \dots, z; t) = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{n-1} z^r t^r, \quad (18.54)$$

откуда

$$H_r^*(z) = C_{r-1}^{n-1} z^r, \quad r = n, n+1, \dots; \quad (18.55)$$

таким образом, искомое число равно

$$N(r, n) = C_{r-1}^{n-1}. \quad (18.56)$$

Наконец, выпишем денумератор, соответствующий размещениям  $r$  неразличимых объектов по  $n$  различимым ячейкам при том условии, что в каждую ячейку попадает не более одного объекта.

Для фиксированной ячейки

$$I_{(i)}^*(z_i; t) = 1 + z_i t, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (18.57)$$

для  $n$  ячеек

$$I^*(z_1, z_2, \dots, z_n; t) = (1 + z_1 t)(1 + z_2 t) \dots (1 + z_n t). \quad (18.58)$$

Для всех возможных случаев

$$I^*(z, z, \dots, z; t) = (1 + zt)^n = \sum C_n^r z^r t^r, \quad (18.59)$$

откуда

$$I_r^*(z) = C_n^r z^r, \quad (18.60)$$

следовательно,

$$N(r, n) = C_n^r. \quad (18.61)$$

**Число размещений  $r$  различимых и упорядоченных объектов по  $n$  различимым и упорядоченным ячейкам. Случай (2.2).** Это число равно

$$N(r, n) = r! C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}. \quad (18.62)$$

Докажем это. Размещаем  $r$  неразличимых объектов по  $n$  различимым и неупорядоченным ячейкам. Затем, рассматривая объекты в каждой ячейке как различимые, переставим их  $r!$  способами. Тем самым все возможные случаи рассмотрены и искомое число равно числу из (18.30), умноженному на  $r!$ .

Если при этом потребовать, чтобы все ячейки были заняты, то точно так же из (18.56) получаем

$$N(r, n) = r! C_{r-1}^{n-1}. \quad (18.63)$$

**Число размещений  $r$  различных и неупорядоченных объектов по  $n$  неразличимым ячейкам. Случай (1.3).** Это число равно

$$N(r, n) = \bar{S}(r, n), \quad (18.64)$$

где

$$\bar{S}(r, n) = \sum_{k=1}^n \bar{s}(r, k) \quad (18.65)$$

и через  $\bar{s}(r, n)$  обозначены числа Стирлинга второго рода, определяемые формулой (10.5). Числа  $\bar{S}(r, n)$  называют иногда *кумулятивными числами Стирлинга второго рода*.

Докажем (18.64). Рассмотрим сначала случай, когда каждая ячейка занята. Число таких размещений равно числу, полученному в (18.21), деленному на  $n!$ , т. е.  $\bar{s}(r, n)$ . Так как каждую пустую ячейку можно выбирать только одним способом, то, суммируя  $\bar{s}(r, k)$  от 1 до  $n$ , получаем искомое число.

Как мы уже указали, в случае, когда ни одна ячейка не пуста, это число есть

$$\bar{s}(r, n). \quad (18.66)$$

За недостатком места и чтобы сохранить элементарность изложения, мы ограничимся рассмотренными выше случаями. Более полные сведения можно получить из [36].

## УПРАЖНЕНИЯ

**18А.** Найти число размещений 7 различных и неупорядоченных объектов по 5 различимым и неупорядоченным ячейкам. Каков соответствующий денумератор?

**18Б.** Тот же вопрос, что и в упражнении 18А, но для случая, когда 3 объекта попадают в ячейку 1, 2 объекта — в ячейку 2, 2 объекта — в ячейку 3, 3 объекта — в ячейку 4, 0 объектов — в ячейку 5.

**18В.** Найти число размещений 7 различных и неупорядоченных объектов по 5 различимым и неупорядоченным ячейкам при условии, что в каждую ячейку попадает не менее одного объекта.

**18Г.** Тот же вопрос, что и в упражнении 18В, но с одним из условий: а) каждая ячейка занята, б) 2 ячейки пусты, 3 ячейки заняты, в) 3 ячейки пусты, 2 ячейки заняты, г) не более 3 объектов в каждой ячейке, д) не менее 2 объектов в каждой ячейке, кроме двух пустых. Указать соответствующие денумераторы.

**18Д.** Посчитать число размещений 9 неразличимых объектов по 4 различимым и неупорядоченным ячейкам и указать соответствующий денумератор.

**18Е.** Тот же вопрос, что и в упражнении 18Д, но с одним из условий: а) не менее одного объекта в каждой ячейке, б) не более 4 объектов в каждой ячейке.

**18Ж.** Найти число размещений 8 различных и упорядоченных объектов по 3 различимым и упорядоченным ячейкам.

**18З.** Найти число размещений 8 различных и неупорядоченных объектов по 3 неразличимым ячейкам.

**18И.** 42 пассажира садятся в автобус, который делает 7 остановок. Подсчитать все возможные ситуации при условии, что на каждой остановке сходят в точности 6 пассажиров.

**18К.** Сколько способами можно разместить 30 шаров в 100 ящиков при следующих условиях: а) шары одинаковы; б) шары различны, порядок шаров в каждом ящике существен; в) шары различны, порядок шаров в каждом ящике несуществен. В каждом случае в ящике, содержащем шары, их точно 6.

**18Л.** Сколько возможностей существует для того, чтобы среди 30 человек оказалось по крайней мере один, родившийся 1 января?

**18М.** Сколько существует возможностей для того, что среди 6 человек в точности трое родились во вторник?

**18Н.** Игрок в бридж объявляет, что среди 13 его карт есть туз. Подсчитать число возможных случаев, когда у него в точности 2 туза.

**18О.** Пусть каждая из 5 семей состоит из 4 человек. Предположим, что 6 из этих 20 человек больны скарлатиной. Пересчитать следующие случаи: а) карантину должны быть подвергнуты в точности 2 семьи, б) в точности три, в) не менее трех, г) все семьи.

## § 19. Урновые схемы

В теории вероятностей рассматриваются комбинаторные схемы, связанные с выбором  $r$  шаров из урны с  $n$  шарами. При этом шары могут различаться или нет, выбор шаров производится с возвращением или без (вынутый шар кладется обратно в урну или нет) и он может рассматриваться как упорядоченный или неупорядоченный.

Рассмотрим наиболее важные случаи.

**Неупорядоченный выбор с возвращением  $r$  шаров из урны с  $n$  различными шарами.** Число способов выбора равно числу неупорядоченных  $r$ -выборок с повторением:

$$N(r, n) = C_{n+r-1}^r. \quad (19.1)$$

**Упорядоченный выбор с возвращением  $r$  шаров из урны с  $n$  различими шарами.** Число способов выбора равно числу упорядоченных  $r$ -выборок с повторением:

$$N(r, n) = n^r. \quad (19.2)$$

**Неупорядоченный выбор без возвращения  $r$  шаров из урны с  $n$  различими шарами.** Очевидно, что должно быть  $r \leq n$ . Число способов выбора равно числу неупорядоченных  $r$ -выборок без повторения:

$$N(r, n) = C_n^r. \quad (19.3)$$

**Упорядоченный выбор без возвращения  $r$  шаров из урны с  $n$  различими шарами.** В этом случае также  $r \leq n$ . Число способов выбора равно числу упорядоченных  $r$ -выборок без повторения:

$$N(r, n) = A_n^r. \quad (19.4)$$

Эти случаи соответствуют следующим размещениям  $r$  различных элементов в  $n$  ячейк:

Таблица 19.1

Число размещений $r$ элементов в $n$ различных и неупорядоченных ячейк			
Элементы различные и неупорядоченные	Элементы неразличимые		
Без ограничений	$n^r$	$C_{n+r-1}^r$	С возвращением
В ячейку попадает не более одного элемента	$A_n^r$	$C_n^r$	Без возвращения
Упорядоченный выбор		Неупорядоченный выбор	
Число способов выбора $r$ шаров из урны с $n$ различими шарами			

### УПРАЖНЕНИЯ

19А. Сколькими способами можно осуществить неупорядоченный выбор 7 шаров из урны с 11 различими шарами: а) без возвращения, б) с возвращением?

19Б. Сколькими способами можно осуществить неупорядоченный выбор 6 шаров из урны с 10 различими шарами: а) без возвращения, б) с возвращением?

19В. Сколько существует возможностей трижды вытащить туза червей из колоды в 52 карты при пятикратном выборе с возвращением?

19Г. Сколькими способами можно получить, бросая 8 раз игральную кость, дважды 3, дважды 4, трижды 5, один раз 6 (безразлично в каком порядке)?

19Д. Колода в 52 карты раздается 4 игрокам, каждому по 13 карт. Сколько существует возможностей того, что у одного из игроков окажется: а) 13 карт одной масти, б) 4 туза и 4 короля, в) 3 туза и 3 короля?

19Е. По некоторому признаку из совокупности  $n$  лиц выбираются  $r$  человек. Сколько существует возможностей того, что  $j$  человек окажутся среди  $r$  выбранных?

19Ж. Клетка содержит  $N$  хромосом. Обмен частями в парах хромосом осуществляется, когда в клетке происходит  $r$  изменений (это может реализоваться  $(N/2)^r$  различными способами). Подсчитать число случаев, когда в таком обмене участвуют в точности  $m$  хромосом.

**193.** Сколькими способами могут появиться буквы слова АРБУЗ при пятикратном выборе из алфавита в 33 буквы: а) выбор без возвращения, б) выбор с возвращением? Тот же вопрос для слова АГАВА (выбор с возвращением).

**19И.** Телефонный коммутатор имеет 200 контактов: 100 штекеров с номерами от 1 до 100 и 100 гнезд с теми же номерами. Выбираются два контакта. Сколько существует способов выбора. а) одного штекера и одного гнезда без учета их номеров, б) пары контактов с одним и тем же номером?

## § 20. Задача о супружеских парах, или задача Люка<sup>1)</sup>

Чтобы ввести подстановки с ограничениями, налагаемыми этой задачей, напомним представление подстановки с помощью булевой матрицы.

Рассмотрим, например, рис. 16—18. Им соответствуют булевые матрицы на рис. 34—36, в которых предполагается, что на незанятых местах стоят нули. Такие матрицы иногда называют «матрицами назначений».

Поставим следующий вопрос: как пересчитать подстановки (или перестановки, см. стр. 87), для которых единицы не могут находиться на некоторых фиксированных местах? В главе IV, § 46 мы решим задачу перечисления таких подстановок.

В § 14 уже рассматривалась подобная задача: задача о беспорядках. В булевой матрице беспорядка на главной диагонали не могут стоять единицы (рис. 37). Сейчас рассмотрим другую такую задачу.

За круглым столом рассаживаются  $n$  супружеских пар, мужчины и женщины через одного, причем муж не должен сидеть рядом со своей женой. Эту задачу Люка назвал задачей о супружеских парах. Разместим сначала жен, что можно сделать  $2 \cdot n!$  способами. Тогда каждый муж может занять любое место, кроме мест справа и слева от своей жены, и число размещений мужей не зависит от размещения жен. Итак, задача сводится к задаче о соответствующем размещении мужей. Перенумеруем мужей от 1 до  $n$ . Теперь задача состоит в том, чтобы пересчитать перестановки такие, что элемент  $i$  не может стоять на местах  $i, i+1, i=1, 2, \dots, n-1$ , а элемент  $i=n$  — на местах  $n, 1$ . На рис. 38 изображены эти запрещенные места при  $n=7$ . На рис. 38 приведено одно из решений, которое в виде подстановки изображено на рис. 40, и рис. 39 показывает соответствующее расположение семи супружеских пар за круглым столом (номер жены тот же, что и у ее мужа, только со штрихом).

Пусть  $\|{}_nE\|$  — булева матрица порядка  $n$  с элементами

$${}_nE_{ij} = \begin{cases} 0, & j = i + k, \quad k = 0, 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1; \\ 0, & i = n, \quad j = n, 1; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (20.1)$$

<sup>1)</sup> Люка (E. Lucas), Théorie des nombres, 1891.

	1	2	3	4	5	6	7
1						1	
2						1	
3			1				
4	1						
5		1					
6				1			
7		1					

Рис. 34.

	1	2	3	4	5	6	7
1					1		
2							1
3							1
4				1			
5					1		
6						1	
7	1						

Рис. 35.

	1	2	3	4	5	6	7
1							1
2		1					
3			1				
4				1			
5					1		
6			1				
7	1						

Рис. 36.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2		1					
3			1				
4				1			
5					1		
6						1	
7							1

Рис. 37.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2		1					
3			1				
4				1			
5					1		
6	1						
7		1					

Рис. 38.

Полагаем

$$U_n = \operatorname{per} \|_n E\|. \quad (20.2)$$

Обозначая через  $M_n$  число перестановок  $n$  супружеских пар таких, что муж — не сосед своей жены, получаем

$$M_n = 2 \cdot n! U_n. \quad (20.3)$$

Можно вычислить  $U_n$  и  $M_n$ , исходя из  $\|_n E\|$ , но этот способ неэффективен, и приведенный ниже пример показывает, что нельзя

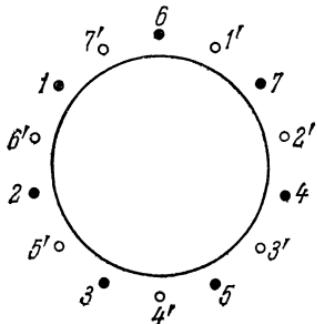


Рис. 39.

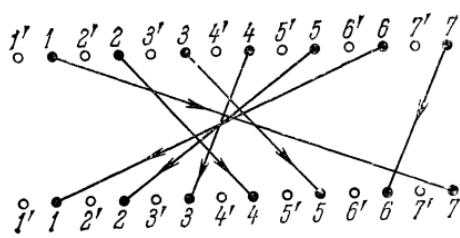


Рис. 40

непосредственно получить простую формулу вида (15.37) или (15.47). Для вычисления  $U_n$  иногда можно воспользоваться формулой Тушара. Предварительно рассмотрим пример (используем (15.28)).

Пусть

$$\|_4 E\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{2}{16}, \quad c_0 = 16; \quad (20.4)$$

$$\begin{aligned} \|_4 E_1\| &= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{2}{4}, \quad \|_4 E_1\|_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{2}{4}, \\ \|_4 E_1\|_3 &= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \frac{1}{4}, \quad \|_4 E_1\|_4 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{2}{4}. \end{aligned} \quad (20.5)$$

$$\sum c_i = 4 + 4 + 4 + 4 = 16;$$

$$\|{}_4E_2\|_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{2}{0}, \quad \|{}_4E_2\|_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \frac{1}{1},$$

$$\|{}_4E_2\|_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{1}{2},$$

$$\|{}_4E_2\|_4 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \frac{1}{0}, \quad \|{}_4E_2\|_5 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \frac{1}{1},$$

$$\|{}_4E_2\|_6 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \frac{0}{1}$$

$$\sum c_2 = 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 = 2.$$

Очевидно, что  $\|{}_4E_3\|_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , образованы из нулей, поэтому  $\sum c_3 = 0$ . Итак

$$\operatorname{per} \|{}_4E\| = c_0 - \sum c_1 + \sum c_2 - \sum c_3 = 16 - 16 + 2 = 2. \quad (20.7)$$

Мы видим, что не все  $\|{}_4E_2\|_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , равны между собой; по этой причине трудно получить непосредственно простые формулы вида (15.37) или (15.47).

Тушар<sup>1)</sup> вывел следующую формулу, используя две леммы Капланского<sup>2)</sup>;

$$U_n = n! - \frac{2n}{2n-1} C_{2n-1}^1 (n-1)! + \frac{2n}{2n-2} C_{2n-2}^2 (n-2)! - \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{2n}{n} C_n^n \cdot 0! \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (20.8)$$

Применим эту формулу к случаю  $n = 4$ :

$$U_4 = 4! - \frac{8}{7} C_7^1 \cdot 3! + \frac{8}{6} C_6^2 \cdot 2! - \frac{8}{5} C_5^3 \cdot 1! + \frac{8}{4} C_4^4 \cdot 0! =$$

$$= 24 - 48 + 40 - 16 + 2 = 2. \quad (20.9)$$

<sup>1)</sup> Тушар (Toussaint), Sur un problème de permutations, C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), 631—635.

<sup>2)</sup> Капланский (I. Kaplansky), Solution of the «Problème des ménages», Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1934), 784—785.

**Леммы Капланского.** Первая лемма. Пусть из  $n$  различных объектов, расположенных на прямой, выбираются  $k$  объектов. Тогда число  $f(n, k)$  таких наборов, что никакие два из выбранных объектов не являются последовательными, равно

$$f(n, k) = C_{n-k+1}^k, \quad k \leq \frac{n+1}{2}. \quad (20.10)$$

Прежде чем доказать лемму, рассмотрим пример. Пусть на прямой расположены семь различных объектов  $ABCDEFG$  и  $k = 3$ . Тогда в силу (20.10)  $f(7, 3) = C_5^3 = 10$ . Соответствующими наборами будут

$ACE, ACF, ACG, ADF, ADG, AEG, BDF, BDG, BEG, CEG$ .

Очевидно,

$$f(n, 1) = C_n^1 = n, \quad (20.11)$$

$$f(n, n) = 0. \quad (20.12)$$

Пусть  $1 < k < n$ . Разобьем множество таких наборов на два подмножества: наборы, содержащие первый объект, и наборы, не содержащие его. Так как набор, содержащий первый объект, не содержит второго, то число наборов в соответствующем подмножестве равно

$$f(n - 2, k - 1). \quad (20.13)$$

Но число наборов, не содержащих первого объекта, равно

$$f(n - 1, k), \quad (20.14)$$

поэтому

$$f(n, k) = f(n - 1, k) + f(n - 2, k - 1). \quad (20.15)$$

Теперь применяем индукцию. Пусть (20.10) выполняется для всех множеств с числом объектов, меньшим  $n$ :

$$f(n - 1, k) = C_{n-k}^k, \quad f(n - 2, k - 1) = C_{n-k}^{k-1}. \quad (20.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(n - 1, k) + f(n - 2, k - 1) &= C_{n-k}^k + C_{n-k}^{k-1} = \\ &= \frac{(n - k)!}{k!(n - 2k)!} + \frac{(n - k)!}{(k - 1)!(n - 2k + 1)!} = C_{n-k+1}^k \quad k \leq \frac{n+1}{2}, \end{aligned} \quad (20.17)$$

и (20.10) доказано.

Вторая лемма. Пусть из  $n$  различных объектов, расположенных на окружности, выбираются  $k$  объектов. Тогда число  $g(n, k)$  таких наборов, что никакие два из выбранных объектов не являются последовательными, равно

$$g(n, k) = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k, \quad k \leq \frac{n}{2}. \quad (20.18)$$

Например, при  $n = 7$  и  $k = 3$  (рис. 41)

$$g(7, 3) = \frac{7}{4} C_4^3 = \frac{7}{4} \cdot 4 = 7. \quad (20.19)$$

Эти наборы  $ACE, ACF, ADF, BDF, BDG, BEG, CEG$ .

Как и раньше, разобьем множество наборов на два подмножества: наборы, содержащие первый объект, и наборы, не содержащие его. Так как число наборов первого подмножества равно

$$f(n - 3, k - 1), \quad (20.20)$$

а второго

$$f(n - 1, k), \quad (20.21)$$

то

$$\begin{aligned} g(n, k) &= f(n - 1, k) + f(n - 3, k - 1) = C_{n-k}^k + C_{n-k-1}^k = \\ &= \frac{(n - k)!}{k! (n - 2k)!} + \frac{(n - k - 1)!}{(k - 1)! (n - 2k)!} = \frac{n}{n - k} \frac{(n - k)!}{(k - 1)! (n - 2k)!} = \\ &= \frac{n}{n - k} C_{n-k}^k, \quad k \leq \frac{n}{2}, \end{aligned} \quad (20.22)$$

и (20.18) доказано.

Рассмотрим теперь перестановки элементов  $1, 2, \dots, n$ . Обозначим через  $\mathcal{P}_i$  свойство: в перестановке объект  $i$  стоит на  $i$ -м

$A$

месте; через  $\mathcal{P}'_i$  — свойство: в перестановке объект  $i$  стоит на  $(i + 1)$ -м месте ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ), и через  $\mathcal{P}'_n$  — свойство: объект  $n$  стоит на первом месте.

$B$

$\bullet B$

$F$

$\bullet F$

$E$        $\bullet D$

Рассмотрим эти  $2n$  свойств в следующем порядке:

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}'_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}'_n. \quad (20.23)$$

Фиксируем  $k$  из них. Число перестановок, удовлетворяющих этим свойствам, равно  $(n - k)!$ , если свойства не противоречивы, и нулю в противном случае. Если обозначим через  $v_k$  число наборов из  $k$  непротиворечивых свойств, а через  $U_n$  — число перестановок, не удовлетворяющих ни одному из свойств (20.23), то по формуле решета (12.20) с

$$w_k = v_k (n - k)! \quad (20.24)$$

имеем

$$U_n = v_0 \cdot n! - v_1 \cdot (n - 1)! + v_2 \cdot (n - 2)! - \dots + (-1)^n v_n \cdot 0!. \quad (20.25)$$

Применяя теперь вторую лемму Капланского к множеству (20.23), получаем

$$v_k = \frac{2n}{2n - k} C_{n-k}^k, \quad k \leq n. \quad (20.26)$$

Подставляя (20.26) в (20.25), находим

$$U_n = n! - \frac{2n}{2n-1} C_{2n-1}^1 \cdot (n-1)! + \frac{2n}{2n-2} C_{2n-2}^2 \cdot (n-2)! - \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{2n}{n} C_n^n \cdot 0!, \quad n > 1. \quad (20.27)$$

## УПРАЖНЕНИЯ

20А. По формулам (20.2) и (20.3) вычислить  $M_6$ .

20Б. То же самое по формуле Тушара.

20В. Пусть из 9 различных объектов на прямой выбираются 5 объектов. Каково число таких наборов, что никакие два объекта в них не являются соседними.

20Г. То же самое для 13 объектов, расположенных на окружности, и наборов из 7 объектов.

20Д. Тот же вопрос, что и в упражнении 20Г, но: а) два фиксированных объекта должны содержаться в каждом наборе, б) два фиксированных объекта не содержатся в одном и том же наборе.

## § 21. Перестановки с запретными положениями.

### Размещение по ячейкам

Задача о встречах и задача о супружеских парах — частные случаи задач, описываемых булевыми матрицами с ограничениями на расположение единиц (рис. 37 и 38). Эти две задачи можно решать с помощью перманента соответствующих булевых матриц, но процесс его вычисления в большинстве случаев неэффективен. Поэтому попытаемся применить к задачам такого рода метод производящих функций.

Булеву матрицу можно рассматривать в некотором смысле как шахматную доску. Заштрихованным клеткам в булевой матрице соответствуют нули, а незаштрихованным — единицы.

Будем булеву матрицу называть также «сотами» \*), так как в различных задачах требуется размещать объекты по ячейкам, объединенным в «соты».

Подсчитаем сначала число различных сот порядка  $n$ , включая случаи, когда все ячейки запретные (все элементы булевой матрицы — нули) и когда все ячейки свободные (все элементы булевой матрицы — единицы). Так как соты порядка  $n$  содержат  $n^2$  ячеек, то число сот с  $k$  запретными ячейками равно  $C_{n^2}^k$ . Следовательно, искомое число равно

$$\sum_{k=0}^{n^2} C_{n^2}^k = 2^{n^2}. \quad (21.1)$$

Аналогично можно подсчитать, что число сот размера  $m \times n$  равно  $2^{mn}$ .

С точки зрения пересчета не все соответствующие задачи нужно различать. Например, все  $n^2$  задач с одной запретной

\*) В оригинале «casier». (Прим. перев.)

ячейкой, по существу, неразличимы. Поэтому общее число различных с этой точки зрения задач трудно определить.

Задачи такого типа будем называть *задачами о размещении  $k$  неразличимых объектов в соты размера  $m \times n$* . К ним относятся, например, некоторые задачи § 18 с сотами размера  $1 \times n$  и без запретных ячеек.

Будем предполагать, что выполняются условия:

соты имеют порядок  $n$ ;

в ячейке не более одного объекта (т. е. 0 или 1);

каждая строка и каждый столбец содержат не более одного объекта.

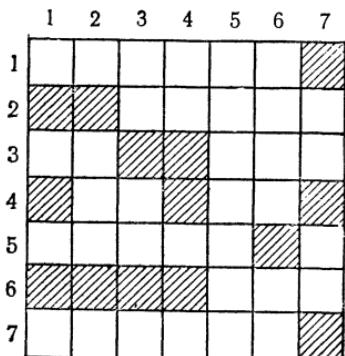


Рис. 42.

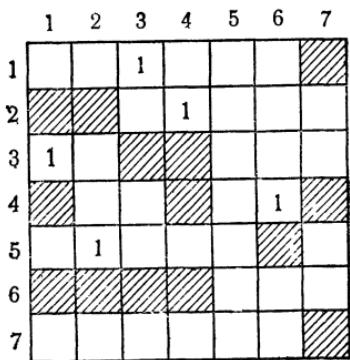


Рис. 43.

Эту задачу часто называют *задачей о ладьях*, если имеются в виду ладьи на шахматной доске, не бьющие друг друга, или *задачей о назначениях  $k$*  работников на  $n$  должностей, причем каждый работник может занять только одну должность и каждая должность может быть занята только одним работником. В § 61 мы увидим, что эта задача связана с понятием паросочетания в теории графов. На рис. 42 представлен пример такой задачи с  $n = 7$ , и рис. 43 показывает, как поместить пять объектов в соты.

Для решения таких задач с помощью денумераторов будем пользоваться формулой включения и исключения из § 12.

Рассмотрим  $s$  свойств,  $0 \leq s \leq n^2$  ( $n$  — порядок сот):

$\mathcal{P}_1$ :  $i_1$  занимает ячейку  $j_1$ ,

$\mathcal{P}_2$ :  $i_2$  занимает ячейку  $j_2$ ,

... . . . . . . . . . .

$\mathcal{P}_s$ :  $i_s$  занимает ячейку  $j_s$ .

Некоторые из этих свойств совместимы, другие — нет, например, если в какую-либо ячейку уже помещен объект, то ни в какую ячейку в том же столбце или той же строке нельзя поместить

другой объект. Пусть  $A_i$  — подмножество перестановок со свойством  $\mathcal{P}_i$ , а  $A_j$  — подмножество перестановок со свойством  $\mathcal{P}_j$ . Тогда

$A_i \cap A_j = \emptyset$ , если  $\mathcal{P}_i$  и  $\mathcal{P}_j$  соответствуют ячейкам одной

и той же строки или одного и того же столбца. (21.2)

Выберем  $r$  свойств из  $s$  (указанных ( $r \leq n$ ). Тогда  $n - r$  объектов можно разместить  $(n - r)!$  способами по остальным ячейкам. Обозначим через  $\rho_r$ ,  $r \leq n$ , число непустых пересечений вида

$(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r})$ . Тогда в силу (12.17) с

$$w(r) = \rho_r (n - r)! \quad r = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (21.3)$$

имеем

$$\begin{aligned} w^*(z) &= w(0) + w(1)z + w(2)z^2 + \dots + \\ &+ w(n)z^n + \dots, \quad w(n+j) = 0, \quad j > 0, \end{aligned} \quad (21.4)$$

и

$$\begin{aligned} W^*(z) &= W(0) + W(1)z + W(2)z^2 + \dots + W(n)z^n + \dots, \\ &W(n+j) = 0, \quad j > 0, \end{aligned} \quad (21.5)$$

где через  $W(r)$  обозначено число перестановок в точности с  $r$  свойствами. Согласно (12.54)

$$W^*(z) = \sum_{r=0}^n w(r)(z-1)^r = \sum_{r=0}^n \rho_r (n-r)!(z-1)^r. \quad (21.6)$$

Запишем производящую функцию для  $\rho_r$ :

$$\rho^*(z) = \sum_{r=0}^n \rho_r z^r. \quad (21.7)$$

Производящие функции для задач о сотах будем обозначать через

$$N^*(z) = \sum_{r=0}^n \rho_r (n-r)!(z-1)^r. \quad (21.8)$$

Полиномы  $\rho^*(z)$  называются ладейными многочленами, а  $N^*(z)$  — многочленами попаданий.

Пример. На рис. 44 изображены соты порядка 6 с шестью запретными ячейками  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_6$ <sup>1)</sup>. Подсчитаем  $\rho_r$ ,  $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

	1	2	3	4	5
1	$\mathcal{P}_1$		$\mathcal{P}_2$		
2				$\mathcal{P}_3$	
3					$\mathcal{P}_4$
4		$\mathcal{P}_5$			
5			$\mathcal{P}_6$		

Рис. 44.

<sup>1)</sup> Для изображения запретных ячеек будут использоваться те же символы, что и для соответствующих свойств  $\mathcal{P}$ .

Имеем

$$\rho_0 = 1, \quad (21.9)$$

$$\rho_1 = 6. \quad (21.10)$$

Заметим, что пары  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$  и  $\mathcal{P}_4$ ,  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{P}_6$  несовместимы. Следовательно,

$$\rho_2 = 12. \quad (21.11)$$

Легко убедиться, что 11 неупорядоченных 3-выборок из общего числа  $C_6^3 = 20$  несовместимы. Поэтому

$$\rho_3 = 9. \quad (21.12)$$

Аналогично получаем

$$\rho_4 = 2, \quad (21.13)$$

$$\rho_5 = 0, \quad (21.14)$$

$$\rho_6 = 0. \quad (21.15)$$

Следовательно,

$$w^*(z) = 1 + 6z + 12z^2 + 9z^3 + 2z^4. \quad (21.16)$$

Отсюда в силу (21.3) находим  $w(r)$ :

$$\begin{aligned} w(0) &= 120, & w(1) &= 144, & w(2) &= 72, & w(3) &= 18, \\ w(4) &= 2, & w(5) &= 0, \end{aligned} \quad (21.17)$$

$$w^*(z) = 120 + 144z + 72z^2 + 18z^3 + 2z^4. \quad (21.18)$$

Вычисляя

$$\begin{aligned} W(0) &= w(0) - w(1) + w(2) - w(3) + w(4) - w(5) = \\ &= 120 - 144 + 72 - 18 + 2 = 32, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(1) &= w(1) - C_2^1 w(2) + C_3^2 w(3) - C_4^3 w(4) + C_5^4 w(5) = \\ &= 144 - 2 \cdot 72 + 2 \cdot 18 - 4 \cdot 2 = 46, \end{aligned}$$

$$W(2) = w(2) - C_3^1 w(3) + C_4^2 w(4) - C_5^3 w(5) = 72 - 3 \cdot 18 + 6 \cdot 2 = 30,$$

$$W(3) = w(3) - C_4^1 w(4) + C_5^2 w(5) = 18 - 4 \cdot 2 = 10, \quad (21.19)$$

$$W(4) = w(4) - C_5^1 w(5) = 2,$$

$$W(5) = w(5) = 0,$$

имеем

$$N^*(z) = 32 + 46z + 30z^2 + 10z^3 + 2z^4. \quad (21.20)$$

Это же получается и из (21.6):

$$\begin{aligned} N^*(z) &= w(0) + w(1) \cdot (z-1) + w(2) \cdot (z-1)^2 + w(3) \cdot (z-1)^3 + \\ &\quad + w(4) \cdot (z-1)^4 + w(5) \cdot (z-1)^5 + w(6) \cdot (z-1)^6 = \\ &= 120 + 144(z-1) + 72(z-1)^2 + 18(z-1)^3 + 2(z-1)^4 = \\ &= 32 + 46z + 30z^2 + 10z^3 + 2z^4. \quad (21.21) \end{aligned}$$

## Разложение на минимальные непересекающиеся подсоты.

Будем рассматривать подсоты сот порядка  $n$ . Например, соты на рис. 46 — подсоты сот на рис. 45.

Пусть  $C_1$  и  $C_2$  — подсоты сот  $C$ . Назовем  $C_1$  и  $C_2$  непересекающимися, если запретные ячейки  $C_1$  не лежат на столбцах и строках, образующих  $C_2$ . Например, на рис. 47 подсоты, образованные строками и столбцами соответственно 1, 2, 3 и 4, 5, 6, 7, не пересекаются.

Для разложения сот на минимальные<sup>1)</sup> непересекающиеся подсоты достаточно заметить, что если запретна ячейка  $(i, j)$ ,

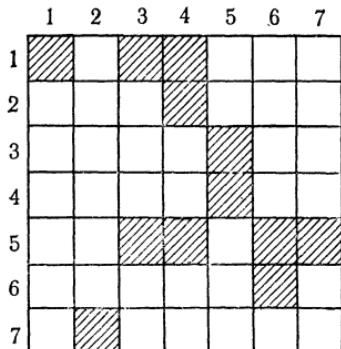


Рис. 45.

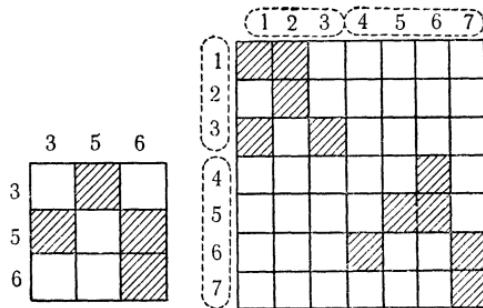


Рис. 46.

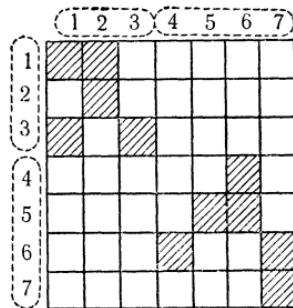


Рис. 47.

то строки и столбцы с индексами  $i$  и  $j$  принадлежат одним и тем же подсотам. Возьмем, например, соты на рис. 48.

Выписываем в столбец индексы, соответствующие одним и тем же подсотам, начиная с 1:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 8 & & 5 & & 7 \\ & & 9 & & & \end{array} \quad (21.22)$$

Таким образом, получаем следующие 5 минимальных непересекающихся подсотов:  $C_1$  — с индексами 3, 5,  $C_2$  — с индексами 1, 9, 8,  $C_3$  — с индексом 4 (без запретных ячеек),  $C_4$  — с индексами 6 и 7,  $C_5$  — с индексом 2 (см. рис. 49).

Разложение на минимальные непересекающиеся подсоты единственно, что легко доказать.

**Теорема.** Пусть  $C_1$  и  $C_2$  — непересекающиеся подсоты, на которые разлагается  $C$ . Тогда

$$\rho^*(z) = \rho_1^*(z) \rho_2^*(z), \quad (21.23)$$

где  $\rho^*(z)$ ,  $\rho_1^*(z)$ ,  $\rho_2^*(z)$  — соответствующие ладейные многочлены для  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ .

<sup>1)</sup> Подсоты минимальные, если они не могут быть разложены на непересекающиеся подсоты.

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $\rho_r$  — число  $r$ -выборок, соответствующих всевозможным  $r$  непротиворечивым свойствам. Имеем

$$\rho_r = {}_1\rho_r + {}_1\rho_{r-1} \cdot {}_2\rho_1 + {}_1\rho_{r-2} \cdot {}_2\rho_2 + \dots + {}_1\rho_1 \cdot {}_2\rho_{r-1} + {}_2\rho_r, \quad (21.24)$$

где  ${}_1\rho_i$  ( ${}_2\rho_i$ ),  $i = 1, 2, \dots, r$ , равно числу  $i$ -выборок с непроти-

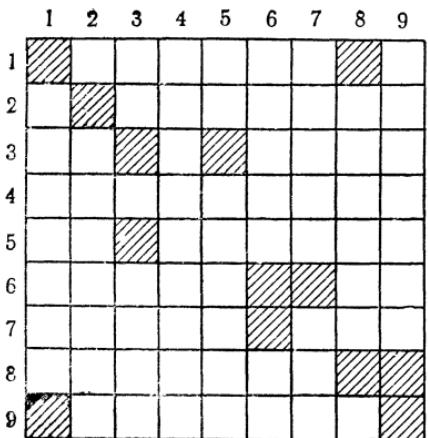


Рис. 48.

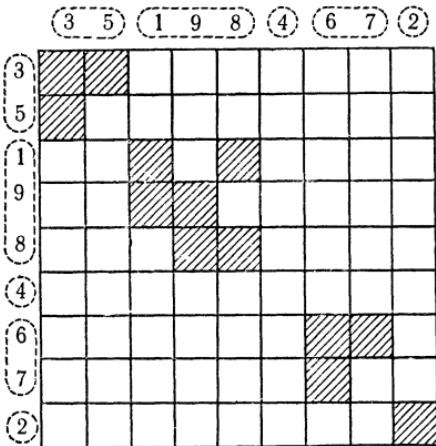


Рис. 49.

воречивыми свойствами из  $C_1$  (из  $C_2$ ), или

$$\rho_r = \sum_{i=0}^r {}_1\rho_{r-i} \cdot {}_2\rho_i, \quad {}_1\rho_0 = {}_2\rho_0 = 1. \quad (21.25)$$

Учитывая (7.19), имеем

$$\rho^*(z) = \rho_1^*(z) \rho_2^*(z). \quad (21.26)$$

**Пример** (рис. 50). Запретные клетки обозначены через  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ .

Легко получаем

$${}_1\rho_0 = 1, \quad {}_1\rho_1 = 3, \quad {}_1\rho_2 = 2, \quad {}_1\rho_3 = 0; \quad (21.27)$$

$${}_2\rho_0 = 1, \quad {}_2\rho_1 = 5, \quad {}_2\rho_2 = 8, \quad {}_2\rho_3 = 4, \quad {}_2\rho_4 = 0; \quad (21.28)$$

$$\rho_1^*(z) = 1 + 3z + 2z^2, \quad (21.29)$$

$$\rho_2^*(z) = 1 + 5z + 8z^2 + 4z^3. \quad (21.30)$$

$$\begin{aligned} \rho^*(z) &= (1 + 3z + 2z^2)(1 + 5z + 8z^2 + 4z^3) = \\ &= 1 + 8z + 25z^2 + 38z^3 + 28z^4 + 8z^5, \end{aligned} \quad (21.31)$$

а также

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1, \quad \rho_1 = 8, \quad \rho_2 = 25, \quad \rho_3 = 38, \quad \rho_4 = 28, \\ \rho_5 &= 8, \quad \rho_6 = 0, \quad \rho_7 = 0. \end{aligned} \quad (21.32)$$

Отсюда

$$w(0) = 5040, \quad w(1) = 5760, \quad w(2) = 3000, \quad w(3) = 912,$$

$$w(4) = 168, \quad w(5) = 16, \quad w(6) = 0, \quad w(7) = 0, \quad (21.33)$$

$$w^*(z) = 5040 + 5760z + 3000z^2 + 912z^3 + 168z^4 + 16z^5; \quad (21.34)$$

$$W(0) = w(0) - w(1) + w(2) - w(3) + w(4) - w(5) + w(6) - \\ - w(7) = 5040 - 5760 + 3000 - 912 + 168 - 16 = 1520,$$

$$W(1) = w(1) - C_2^1 w(2) + C_3^2 w(3) - C_4^3 w(4) + C_5^4 w(5) - C_6^5 w(6) + \\ + C_7^6 w(7) = 5760 - 6000 + 2733 - 672 + 80 = 1904,$$

		(1 2 3)			(4 5 6 7)			
		1	2	3	4	5	6	7
1				$\mathcal{P}_2$				
	2	$\mathcal{P}_1$						
	3	$\mathcal{P}_3$						
4					$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_5$		
	5						$\mathcal{P}_6$	
6							$\mathcal{P}_7$	
	7					$\mathcal{P}_8$		

Рис. 50.

$$W(2) = w(2) - C_3^1 w(3) + C_4^2 w(4) - C_5^3 w(5) + C_6^4 w(6) - C_7^5 w(7) = \\ = 3000 - 2736 + 1008 - 160 = 1112,$$

$$W(3) = w(3) - C_4^1 w(4) + C_5^2 w(5) - C_6^3 w(6) + C_7^4 w(7) = \\ = 912 - 672 + 160 = 400,$$

$$W(4) = w(4) - C_5^1 w(5) + C_6^2 w(6) - C_7^3 w(7) = 168 - 80 = 88,$$

$$W(5) = w(5) - C_6^1 w(6) + C_7^2 w(7) = 16,$$

$$W(6) = 0, \quad W(7) = 0; \quad (21.35)$$

$$W^*(z) = 1520 + 1904z + 1112z^2 + 400z^3 + 88z^4 + 16z^5. \quad (21.36)$$

З а м е ч а н и е. Легко убедиться, что соотношение  $\rho^*(z) = \rho_1^*(z) \rho_2^*(z)$  не влечет подобного соотношения для  $w^*(z)$ ,  $w_1^*(z)$ ,  $w_2^*(z)$ , а также и для  $W^*(z)$ ,  $W_1^*(z)$ ,  $W_2^*(z)$ . Формула (21.23)

обобщается на случай  $q$  минимальных непересекающихся подсотов:

$$\rho^*(z) = \rho_1^*(z) \rho_2^*(z) \dots \rho_q^*(z). \quad (21.37)$$

**Частичные соты для заданных сот.** Если в заданных сотах аннулировать запреты на некоторые ячейки, то полученные соты называются частичными. На рис. 52 изображены частичные соты для сот на рис. 51.

Понятие частичных сот вводится с целью получить представление функции  $\rho^*(z)$  через более простые функции.

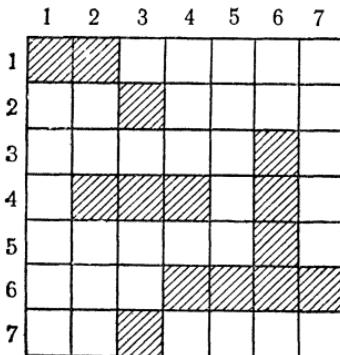


Рис. 51.

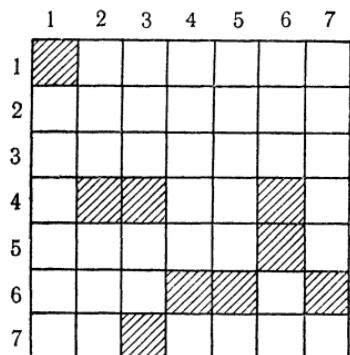


Рис. 52.

**Теорема.** Пусть заданы соты  $K$ . Через  $K_1$  обозначим частичные соты для  $K$ , которые получаются снятием запрета с ячейки  $(i, j)$ , а через  $K_2$  — частичные соты, которые получаются из  $K$  снятием запрета со всех ячеек в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце. Тогда

$$\rho_r = {}_1\rho_r + {}_2\rho_{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (21.38)$$

где  $\rho_r$ ,  ${}_1\rho_r$ ,  ${}_2\rho_r$  — ладейные многочлены соответственно для  $K$ ,  $K_1$  и  $K_2$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathcal{P}_1$  свойство, соответствующее ячейке  $(i, j)$ , а через  $\mathbf{A}_1$  — подмножество перестановок с этим свойством. Любым  $r$  множествам с непустым пересечением, не содержащим  $\mathbf{A}_1$ , однозначно соответствуют  $r$  множеств из  $K_1$ , а любым  $r$  множествам с непустым пересечением, содержащим  $\mathbf{A}_1$ , однозначно соответствуют  $r - 1$  множеств из  $K_2$  и наоборот. Теорема доказана.

Проиллюстрируем эту теорему на примере.

Через  $C$ ,  $K_1$  и  $K_2$  обозначены соты на рис. 53, 54 и 55, где  $\mathcal{P}_1$  — ячейка  $(2, 2)$ .

Выпишем непустые пересечения для  $C$  при  $r = 3$ :

$$(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4), (\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_5), (\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4), \\ (\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_6), (\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_5), (\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_6), (\mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_6). \quad (21.39)$$

Таким образом,  $\rho_3 = 7$ .

Аналогично непустые пересечения для  $K_1$  при  $r = 3$ :

$$(\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4), \quad (\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_6), \quad (\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_5), \\ (\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_6), \quad (\mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_6), \quad (21.40)$$

т. е.  ${}_1\varrho_3 = 5$ , а непустые пересечения для  $K_2$  при  $r = 2$ :

$$(\mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4), \quad (\mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_5), \quad (21.41)$$

т. е.  ${}_2\varrho_2 = 2$ . Отсюда видим, что пересечения из (21.39) и (21.41) дают все пересечения из (21.39).

1	2	3	4
1		$\mathcal{P}_3$	
2	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1$	
3			$\mathcal{P}_4$
4		$\mathcal{P}_6$	$\mathcal{P}_5$

$C$

1	2	3	4
1		$\mathcal{P}_3$	
2	$\mathcal{P}_2$	$\square$	
3			$\mathcal{P}_4$
4		$\mathcal{P}_6$	$\mathcal{P}_5$

$K_1$

1	2	3	4
1		$\square$	$\mathcal{P}_3$
2			
3			$\mathcal{P}_4$
4		$\square$	$\mathcal{P}_5$

$K_2$

Рис. 53.

Рис. 54.

Рис. 55.

Легко выписать теперь соотношение для производящих функций:

$$\rho^*(z) = {}_1\rho^*(z) + z {}_2\rho^*(z), \quad (21.42)$$

где

$$\rho^*(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_r z^r, \quad (21.43)$$

$${}_1\rho^*(z) = \sum_{r=0}^{\infty} {}_1\rho_r z^r, \quad (21.44)$$

$${}_2\rho^*(z) = \sum_{r=0}^{\infty} {}_2\rho_r z^r. \quad (21.45)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r z^r &= \sum_{r=1}^{\infty} {}_1\rho_r z^r + \sum_{r=1}^{\infty} {}_2\rho_{r-1} z^r = \sum_{r=1}^{\infty} {}_1\rho_r z^r + z \sum_{r=1}^{\infty} {}_2\rho_{r-1} z^{r-1} = \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} {}_1\rho_r z^r + z \sum_{r=0}^{\infty} {}_2\rho_r z^r. \end{aligned} \quad (21.46)$$

Так как  $\rho_0 = 1$  и  ${}_1\rho_0 = 1$ , то имеем

$$\sum_{r=0}^{\infty} \rho_r z^r = \sum_{r=0}^{\infty} {}_1\rho_r z^r + z \sum_{r=0}^{\infty} {}_2\rho_r z^r. \quad (21.47)$$

**Замечание.** Функция  $\rho^*(z)$  определяется только лишь взаимным расположением запретных ячеек, а размеры сот несущественны. Так функция

$$\rho^*(z) = 1 + 3z + 2z^2 \quad (21.48)$$

одна и та же для всех сот на рис. 56.

**Функционально эквивалентные соты.** Двою сот с одной и той же функцией  $\rho^*(z)$  называются *функционально эквивалентными*.

	1	2	3	4
1		$\mathcal{P}_1$		
2			$\mathcal{P}_2$	
3			$\mathcal{P}_3$	
4				

	1	2	3
1		$\mathcal{P}_1$	
2			$\mathcal{P}_2$
3			$\mathcal{P}_3$

	1	2	3	4
1		$\mathcal{P}_1$		
2			$\mathcal{P}_2$	
3			$\mathcal{P}_3$	
4				

	2	3
1	$\mathcal{P}_1$	
2		$\mathcal{P}_2$
3		$\mathcal{P}_3$

Рис. 56.

$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_3$
		$\mathcal{P}_2$

$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_3$
$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_4$

Рис. 57.

Это отношение является отношением эквивалентности (поскольку оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Пример двух функционально эквивалентных сот с

$$\rho^*(z) = 1 + 4z + 2z^2 \quad (21.49)$$

приведен на рис. 57 (изображены лишь запретные ячейки).

Следовательно, двою сот с функционально эквивалентных сот имеют совпадающие функции как  $w^*(z)$ , так и  $W^*(z)$ . В [36] приведены таблицы различных функций  $\rho^*(z)$ .

**Разложение сот на более простые частные соты.** Как мы видели раньше (см. (21.42)),

$$\rho^*(z) = {}_1\rho^*(z) + z_2 \rho^*(z). \quad (21.50)$$

Введем соответствующую (21.50) операцию над сотами:

$$K = K_1 \otimes K_2. \quad (21.51)$$

Аналогично можно поступать с  $K_1$  и  $K_2$ :

$$K_1 = K_3 \otimes K_4, \quad (21.52)$$

$$K_2 = K_5 \otimes K_6. \quad (21.53)$$

Тогда

$$K = (K_3 \otimes K_4) \otimes (K_5 \otimes K_6). \quad (21.54)$$

Поступаем так столько раз, сколько нужно<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Заметим, что эта операция некоммутативна, нерефлексивна и неассоциативна.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline \mathcal{P}_5 & & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline & \boxed{\phantom{0}} & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline & & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} \text{a)} \\
 K \qquad \qquad \qquad K_1 \qquad \qquad \qquad K_2 \\
 1 + 5z + 5z^2 + z^3 = (1 + 4z + 2z^2) + z(1 + 3z + z^2)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline & & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \boxed{\phantom{0}} & \mathcal{P}_2 \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline & & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline & & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} \text{b)} \\
 K_1 \qquad \qquad \qquad K_3 \qquad \qquad \qquad K_4 \\
 1 + 4z + 2z^2 = (1 + 3z) + z(1 + 2z)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline & & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \boxed{\phantom{0}} & \mathcal{P}_2 \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline & & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \mathcal{P}_3 \\ \hline & & \mathcal{P}_4 \\ \hline \end{array} \text{b)} \\
 K_2 \qquad \qquad \qquad K_5 \qquad \qquad \qquad K_6 \\
 1 + 3z + z^2 = (1 + 2z) + z(1 + z)$$

Рис. 58.

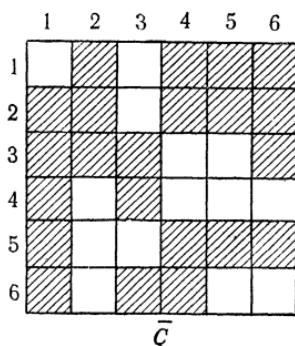
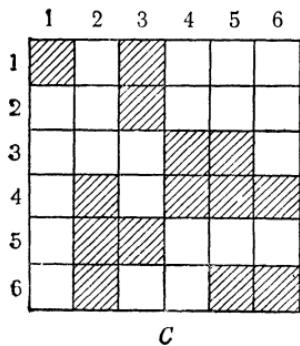


Рис. 59.

Приведем пример (рис. 58).

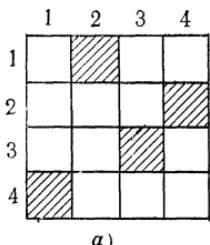
Символом  $\bar{K}$  с нечетными индексами обозначаются частичные соты, где запрет снят с одной ячейки, а символом  $\bar{K}$  с четными индексами обозначаются соты, где запрет снят с ячеек в одной строке и одном столбце. Разумеется, описанное разложение не единственno, и пересчет таких разложений является трудной задачей.

**Дополнение сот.** Дополнением сот  $C$  являются соты  $\bar{C}$ , где запретны все ячейки, которые не были запретными в  $C$  и наоборот. Соответствующий пример приведен на рис. 59.

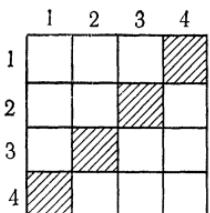
Не существует простой формулы, позволяющей выразить  $\bar{\rho}^*(z)$  через  $\rho^*(z)$  (об этом см. [36]).

### УПРАЖНЕНИЯ

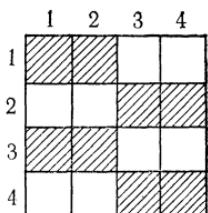
21А. Вычислить функции  $\rho_r$ ,  $w(r)$ ,  $w^*(z)$ ,  $W(r)$ ,  $W^*(z)$  и  $N^*(z)$  для сот



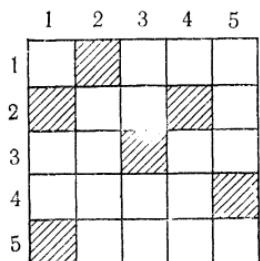
а)



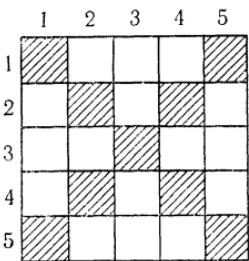
б)



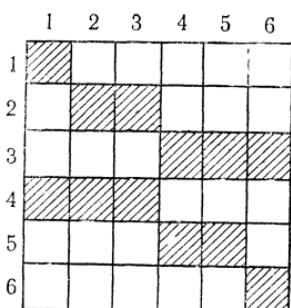
в)



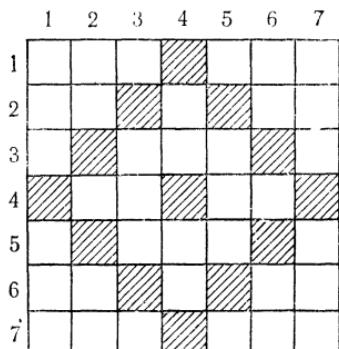
д)



е)

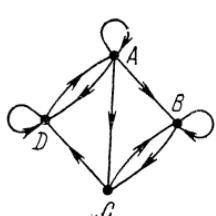


ж)

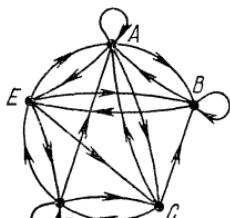


з)

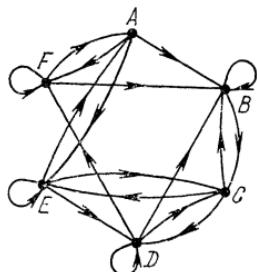
**21Б.** Подсчитать число подстановок с ограничениями, указанными стрелками, на каждой из диаграмм



1)



2)



3)

**21В.** Дать разложение на минимальные непересекающиеся подсоты указанных ниже сот и найти для каждой из них  $\rho^*(z)$  и  $N^*(z)$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	■								
2						■			
3			■				■		
4					■				
5				■					
6	■					■			
7									
8							■		
9									

a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	■										
2		■									
3											
4											
5											
6				■							
7											
8											
9											
10								■			
11									■		

б)

## § 22. Противоречивые перестановки

Перестановки из некоторого множества называются противоречивыми заданной перестановке  $\pi$ , если они удовлетворяют ограничениям, которые вытекают из рассмотрения сот с запрещенными ячейками, соответствующими подстановке  $\begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix}$ , где  $\rho = (1\ 2\ \dots\ n)$ . Например, подстановке

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (22.1)$$

соответствуют соты на рис. 60.

Можно рассматривать перестановки, противоречащие некоторым заданным перестановкам. Эти перестановки удовлетворяют ограничениям, вытекающим из рассмотрения сот, получающихся наложением сот, соответствующих каждой из заданных перестановок. Задача пересчета перестановок, противоречащих одной заданной перестановке, немедленно сводится (если переставить строки и столбцы в сотах) к задаче о встречах. Если задаются две перестановки, то одну из них можно считать тождественной.

Можно изучать также множества перестановок  $n$  объектов, противоречащих одной (или нескольким) перестановкам  $m$  из этих объектов ( $m < n$ ).

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Рис. 60.

	1	2	3	4	$\dots$	$n$
1	$\mathcal{P}_{11}$					
2		$\mathcal{P}_{22}$				
3			$\mathcal{P}_{33}$			
4				$\mathcal{P}_{44}$		
$\vdots$						
$n$						$\mathcal{P}_{nn}$

Рис. 61.

Рассмотрим теперь несколько задач о противоречивых перестановках.

**Задача о встречах.** Эта задача уже рассматривалась в § 14. Если через  $\mathcal{P}_{ii}$  обозначить свойство: элемент  $i$  занимает место  $i$ , то из рассмотрения сот на рис. 61 легко получается

$$\rho_r = C_n^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (22.2)$$

Отсюда

$$\rho^*(z) = \sum_{r=0}^n C_n^r z^r = (1+z)^n. \quad (22.3)$$

Имеем (см. 14.7))

$$w(r) = C_n^r (n-r)! = \frac{n!}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (22.4)$$

$$W^*(z) = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!} z^r = n! \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} \right). \quad (22.5)$$

Из (22.5) легко получить числа  $D_n$ , определяемые формулой (14.11).

С другой стороны,

$$N_n^*(z) = \sum_{r=0}^n C_n^r (n-r)! (z-1)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n!}{r!} (z-1)^r = \\ = n! \left[ 1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(z-1)^n}{n!} \right]. \quad (22.6)$$

Это — другое выражение для денумератора  $d_n^*(z)$  из (14.32), символически

$$N^*(z) = (D+z)^n, \quad D^n \doteq D_n, \quad n = 1, 2, \dots, 1 \doteq D_0. \quad (22.7)$$

**Задача о супружеских парах.** Задачу о супружеских парах из § 20 можно рассматривать как задачу об отыскании перестановок, противоречащих следующим двум:  $(1, 2, \dots, n-1, n)$  и  $(2, 3, \dots, n, 1)$ . Соответствующие соты указаны на рис. 62.

	1	2	3	4	...	$n$
1	$\mathcal{P}_{11}$	$\mathcal{P}_{12}$				
2		$\mathcal{P}_{22}$	$\mathcal{P}_{23}$			
3			$\mathcal{P}_{33}$	$\mathcal{P}_{34}$		
4				$\mathcal{P}_{44}$		
$\vdots$						
$n$	$\mathcal{P}_{n1}$				$\mathcal{P}_{nn}$	

Рис. 62.

	1	2	3	...	$n-1$	$n$
1	$\mathcal{P}_{11}$	$\mathcal{P}_{12}$				
2		$\mathcal{P}_{22}$	$\mathcal{P}_{23}$			
3			$\mathcal{P}_{33}$			
$\vdots$						
$n-1$				$\mathcal{P}_{n1,n}$	$\mathcal{P}_{n-1,n}$	
$n$					$\mathcal{P}_{nn}$	

Рис. 63.

По второй лемме Капланского имеем

$$\rho_r = \frac{2n}{2n-r} C_{2n-r}^r, \quad (22.8)$$

$$\rho^*(z) = \sum_{r=0}^n \frac{2n}{2n-r} C_{2n-r}^r z^r, \quad (22.9)$$

$$w(r) = \frac{2n}{2n-r} C_{2n-r}^r (n-r)!, \quad (22.10)$$

$$w^*(z) = \sum_{r=0}^n \frac{2n}{2n-r} C_{2n-r}^r (n-r)! z^r. \quad (22.11)$$

Если обозначить через  $U_n^*(z)$  производящие функции  $N^*(z)$  для  $n = 2, 3, \dots$ :

$$U_n^*(z) = \sum_{r=0}^n \frac{2n}{2n-r} C_{2n-r}^r (n-r)! (z-1)^r, \quad (22.12)$$

и положить

$$U_n^*(z) = \sum_{k=0}^n U(n, k) z^k, \quad (22.13)$$

то получим числа  $U(n, k)$ , которые для  $n$  от 2 до 8 приведены в таблице 22.1.

Таблица 22.1

Числа  $U(n, k)$  в задаче о супружеских парах

$U(n, k)$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=2$	0	0	2						
$n=3$	1	0	3	2					
$n=4$	2	8	4	8	2				
$n=5$	13	30	40	20	15	2			
$n=6$	80	192	210	152	60	24	2		
$n=7$	579	1 344	1 477	994	469	140	35	2	
$n=8$	4 738	10 800	11 672	7 888	3 660	1 232	280	48	2

**Видоизмененная задача о супружеских парах.** Рассмотрим соты на рис. 63. Они соответствуют расположению супругов в задаче о супружеских парах, если эти пары рассаживаются вдоль одной из сторон прямоугольного стола, т. е. данные соты отличаются от сот на рис. 62 только ячейкой  $(n, 1)$ .

По первой лемме Капланского

$$\rho_r = C_{n-r+1}^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{n+1}{2} \right]; \quad (22.14)$$

$$\rho^*(z) = \sum_{r=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C_{n-r+1}^r z^r; \quad (22.15)$$

$$w(r) = C_{n-r+1}^r (n-r)!; \quad (22.16)$$

$$w^*(z) = \sum_{r=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C_{n-r+1}^r (n-r)! z^r. \quad (22.17)$$

Если для этого случая обозначить через  $V_n^*(z)$  производящую функцию  $N^*(z)$ , а через  $V(n, r)$  — ее коэффициенты, то

$$V_n^*(z) = \sum_{r=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C_{n-r+1}^r (n-r)! (z-1)^r, \quad (22.18)$$

$$V_n^*(z) = \sum_{r=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} V(n, r) z^r. \quad (22.19)$$

В таблице 22.2 числа  $V(n, k)$  приведены для  $n$  от 1 до 8.

Числа  $V(n, k)$  в видоизмененной задаче о супружеских парах

$V(n, k)$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=1$	0	1							
$n=2$	0	1	1						
$n=3$	1	1	3	1					
$n=4$	3	8	6	6	1				
$n=5$	16	35	38	20	10	1			
$n=6$	96	211	213	134	50	15	1		
$n=7$	675	1 459	1 479	915	385	105	21	1	
$n=8$	5 413	11 584	11 692	7 324	3 130	952	196	28	1

Если индекс  $M_1$  относится к задаче о супружеских парах, а индекс  $M_2$  — к видоизмененной задаче о супружеских парах, то в силу (21.38) и (21.42) имеем

$${}_{M_1} \rho_r = {}_{M_2} \rho_r + {}_{M'_1} \rho_{r-1} \quad (22.20)$$

и

$${}_{M'_1} \rho_r^*(z) = {}_{M_2} \rho_r^*(z) + z \cdot {}_{M'_1} \rho_{r-1}^*(z), \quad (22.21)$$

где  $M'_1$  относится к задаче, функционально эквивалентной видоизмененной задаче о  $n-1$  супружеских парах.

**Обобщенная задача о супружеских парах.** Рассмотрим задачу пересчета перестановок, противоречащих двум заданным, одна из которых тождественна, а другая произвольная. Эта задача изучалась Тушаром<sup>1)</sup> и Риорданом [36].

На рис. 64 представлен пример при  $n=7$ , где две перестановки задаются нижними строками в

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}. \quad (22.22)$$

Рис. 64 показывает, что множества запретных ячеек, соответствующих

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

пересекаются. Напротив, если вторая подстановка является циклом (как на рис. 65), то приходим к задаче о супружеских парах.

<sup>1)</sup> Touchard, Permutations discordant with two given permutations, Scripta mathematica 19 (1953), 108—119.

Предположим, что подстановка, соответствующая второй перестановке, принадлежит классу

$$(k) = (k_1, k_2, \dots, k_n). \quad (22.23)$$

Заметим тогда, что соты разлагаются на непересекающиеся подсоты, соответствующие каждому циклу. Обозначим через

1	2	3	4	5	6	7
1	$\mathcal{P}_{11}$	$\mathcal{P}'_{13}$				
2		$\mathcal{P}_{22}$	$\mathcal{P}'_{24}$			
3	$\mathcal{P}'_{31}$	$\mathcal{P}_{33}$				
4			$\mathcal{P}_{44}$			$\mathcal{P}'_{47}$
5				$\mathcal{P}_{55}$	$\mathcal{P}'_{55}$	
6					$\mathcal{P}'_{66}$	$\mathcal{P}_{66}$
7		$\mathcal{P}'_{72}$				$\mathcal{P}_{77}$

Рис. 64.

1	2	3	4	5	6	7
1	$\mathcal{P}_{11}$			$\mathcal{P}'_{14}$		
2		$\mathcal{P}_{22}$			$\mathcal{P}'_{25}$	
3			$\mathcal{P}_{33}$			$\mathcal{P}'_{30}$
4				$\mathcal{P}_{44}$		$\mathcal{P}'_{47}$
5	$\mathcal{P}'_{51}$				$\mathcal{P}_{55}$	
6		$\mathcal{P}'_{62}$				$\mathcal{P}_{66}$
7			$\mathcal{P}'_{73}$			$\mathcal{P}_{77}$

Рис. 65.

$\rho_{\lambda_i}^*(z)$  производящую функцию для подсот, образованных с помощью цикла длины  $\lambda_i$ ; тогда

$$\rho_k^*(z) = (1+z)^{k_1} [\rho_{\lambda_2}^*(z)]^{k_2} \dots [\rho_{\lambda_n}^*(z)]^{k_n}, \quad (22.24)$$

где  $\rho_{\lambda_i}^*(z)$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , функции  $\rho^*(z)$  соответственно для сот порядка 2, 3, ...,  $n$  в задачах о супружеских парах.

Пример (рис. 64). Пусть задана подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выписываем ее циклы:

$$(5), (6), (13), (247), \quad (22.25)$$

т. е.

$$(k) = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0). \quad (22.26)$$

В силу (22.9) с  $n=2$  и  $n=3$

$$n=2: \rho^*(z) = 1 + 4z + 2z^2, \quad (22.27)$$

$$n=3: \rho^*(z) = 1 + 6z + 9z^2 + 2z^3. \quad (22.28)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \rho_{(k)}^*(z) &= (1+z)^2 (1+4z+2z^2) (1+6z+9z^2+2z^3) = \\ &= 1 + 12z + 56z^2 + 130z^3 + 161z^4 + 106z^5 + 34z^6 + 4z^7, \end{aligned} \quad (22.29)$$

и

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = 12, \quad \rho_2 = 56, \quad \rho_3 = 130, \quad \rho_4 = 161, \quad \rho_5 = 106, \quad \rho_6 = 34, \quad \rho_7 = 4. \quad (22.30)$$

По формулам (21.3) и (21.8) вычисляем  $w(r)$  и  $W(r)$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

**22А.** Пересчитать перестановки, противоречащие перестановкам, обозначенным на сотах

	1	2	3	4	5
1			■		
2				■	
3					■
4					
5	■				

1)

	1	2	3	4	5
1			■		
2		■			
3				■	
4					■
5					

2)

	1	2	3	4	5
1					■
2					
3					
4				■	
5					

3)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2		■						
3					■			
4				■				
5						■		
6							■	
7								■
8	■							

4)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5	■							
6								
7							■	
8								■

5)

- а) соты 1) и 2), б) соты 1) и 3), в) соты 1), 2) и 3), г) соты 4) и 5).

**22Б.** То же, что и в упражнении 22А, но использовать формулу (22.4).

### § 23. Латинские прямоугольники

Рассмотрим множество объектов, элементы которого обозначены через  $1, 2, \dots, n$ .

Латинским прямоугольником называется прямоугольная таблица с  $r$  строками и  $s$  столбцами, где каждая строка и каждый столбец — размещения без повторений соответственно из  $n$  объектов по  $r$  и из  $n$  объектов по  $s$  ( $r \leq n, s \leq n$ ). На рис. 66 приведен латинский прямоугольник размера  $4 \times 5$  на множестве из восьми объектов. Пусть  $s = n$ . Тогда строки латинского прямоугольника — перестановки  $n$  объектов. Такой латинский прямоугольник называется *нормализованным*, если элементы его первой строки записаны в естественном порядке (см., например, рис. 67).

Каждый латинский прямоугольник можно нормализовать, переставляя его столбцы.

Если через  $L(r, n)$  обозначить число латинских прямоугольников размера  $r \times n$ , а через  $K(r, n)$  число нормализованных, то

$$L(r, n) = n! K(r, n). \quad (23.1)$$

Очевидно, что

$$K(2, n) = D_n, \quad (23.2)$$

где  $D_n$  — число беспорядков (см. (14.11)).

2	1	5	7	3
1	3	2	4	5
7	4	1	8	2
5	2	3	1	6

Рис. 66.

1	2	3	4	5	6
3	1	2	6	4	5
2	4	6	5	3	1
5	3	4	1	6	2

Рис. 67.

Легко видеть, что число латинских прямоугольников размера  $3 \times n$  с двумя первыми строками

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{matrix} \quad (23.3)$$

равно числу  $U_n$  в задаче о супружеских парах. Число всех латинских прямоугольников размера  $3 \times n$  дает формула Риордана (см. [36]):

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1	2	3
3	4	1	2

$$K(3, n) = \sum_{k=0}^m C_n^k D_{n-k} D_k U_{n-2k}, \quad (23.4)$$

где  $m$  — наибольшее целое число, меньшее  $n/2$ , и  $U_1 = 1$ .

Пример. Вычислим  $K(3, 5)$ :

$$K(3, 5) = C_5^0 D_5 D_0 U_5 + C_5^1 D_4 D_1 U_3 + C_5^2 D_3 D_2 U_1.$$

Рис. 68.

$$(23.5)$$

По формулам (14.11), (20.8) и из таблиц 14.1 и 22.1

$$K(3, 5) = 1 \cdot 44 \cdot 1 \cdot 13 + 5 \cdot 9 \cdot 0 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 592. \quad (23.6)$$

Число латинских прямоугольников при  $r > 3$  неизвестно. Можно доказать (см. [35] и [36]), что

$$L(r, n) \simeq (n!)^r e^{C_r^2}, \quad \text{если } r < (\ln n)^{3/2}. \quad (23.7)$$

**Латинский квадрат.** При  $r=s=n$  говорят о латинском квадрате. Примером латинского квадрата служит таблица умножения конечной группы. На рис. 68 изображен латинский квадрат размера  $4 \times 4$ . Если  $l_n$  — число латинских квадратов, в которых

элементы первой строки и первого столбца записаны в естественном порядке, то

$$L(n, n) = n! (n - 1)! l_n, \quad (23.8)$$

а если в естественном порядке записаны только элементы первой строки, то

$$K(n, n) = (n - 1)! l_n. \quad (23.9)$$

Известные значения  $l_n$  приведены в таблице 23.1 (из [36]).

Т а б л и ц а 23.1

$n$	2	3	4	5	6	7
$l_n$	1	1	4	56	9 408	16 942 080

На рис. 69 перечислены латинские квадраты размера  $4 \times 4$ .

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

a)

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

б)

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

в)

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

г)

Рис. 69.

Заметим, что квадраты б) и в) — таблицы умножений двух возможных групп порядка 4.

### У П Р А Ж Н Е И Я

**23А.** Каково число нормализованных латинских прямоугольников размеров: а)  $3 \times 6$ , б)  $3 \times 7$ , в)  $3 \times 8$ . Сравнить с числами, получающимися по формуле (23.7).

**23Б.** Указать число латинских квадратов порядка 5, в которых элементы первой строки и первого столбца идут в естественном порядке. Тот же вопрос при условии, что второй столбец имеет вид 2, 3, 4, 5, 1. Выписать все решения.

## § 24. Введение

В конце предыдущего параграфа с помощью понятия сот изучались комбинаторные задачи о размещениях по ячейкам, причем в часть из них помещать элементы было запрещено. Тем самым ячейки сот разбивались на два подмножества: ячейки, обладающие некоторым свойством  $\mathcal{P}$ , и ячейки, не обладающие им (т. е. обладающие свойством  $\bar{\mathcal{P}}$ ). Всякий раз, когда это имеет место, говорят, что множество реализует *граф*.

На рис. 70 приведен пример графа. Этот термин

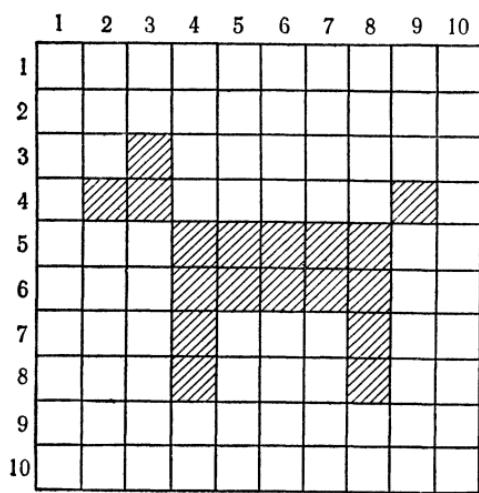


Рис. 70.

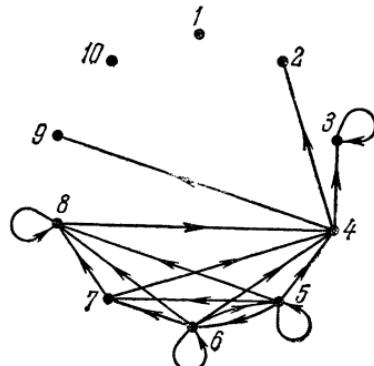


Рис. 71.

широко обсуждался, и некоторые считают, что этимологически предпочтительнее заменить его термином «грамма» (используя аналогию: телеграф — инструмент, а телеграмма — сообщение, передаваемое этим инструментом), но мы будем придерживаться обычной терминологии.

Под графом, следуя Кёнигу [21] и Бержу [8], мы будем понимать разбиение теоретико-множественного произведения некоторого счетного множества на себя на две части. Графы рассматриваются во многих областях математики, и мы посвящаем им значительную часть книги.

Рассмотрим рис. 70, изображающий граф. На нем можно разглядеть пуделя, но рассмотрения такого рода нас не интересуют (в противоположность комбинаторной топологии). Этого пуделя можно представить подмножеством пар

$$C = \{(3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 9), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (6, 8), (7, 4), (7, 8), (8, 4), (8, 8)\} \quad (24.1)$$

или так, как это сделано на рис. 71, где пара изображена стрелкой. Все эти способы изображения графа эквивалентны \*), и в

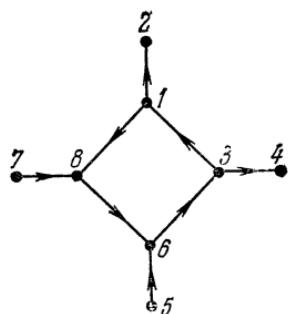


Рис. 72.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Рис. 73.

каждом конкретном случае мы будем пользоваться тем из них, который более удобен.

Например, на рис. 72 при некотором воображении можно представить себе перекресток двух улиц с односторонним движением, чего нельзя сказать о том же графе, изображенном на рис. 73; только математику легко усмотреть их изоморфизм.

На языке графов можно сформулировать многие комбинаторные задачи, а также многие задачи из физики, химии, социологии, исследования операций.

## § 25. Граф. Определение

Рассмотрим теоретико-множественное произведение множеств  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n)}$

$$P = E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(n)} \quad (25.1)$$

и его разбиение на две части

$$G \subset P \quad (25.2)$$

и

$$\bar{G} \subset P, \quad (25.3)$$

\*) См. сноску на стр. 156. (Прим. перев.)

причем

$$G \cup \bar{G} = P \quad (25.4)$$

и

$$G \cap \bar{G} = \emptyset. \quad (25.5)$$

Тогда  $G$  (а также и  $\bar{G}$ ) называют графом, определенным в  $P$ . Граф  $\bar{G}$  называют дополнением к  $G$ .

В этой главе будем рассматривать частный вид графа<sup>1)</sup>

$$G \subset P = E \times E, \quad (25.6)$$

где  $E$  — конечное множество. Графы трактуются здесь, как у Кёнига [21] и Бержа [8].

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	■■■■■■				■■■■■■	
<i>B</i>	■■■■■■		■■■■■■			
<i>C</i>	■■■■■■			■■■■■■		
<i>D</i>		■■■■■■		■■■■■■		
<i>E</i>	■■■■■■			■■■■■■		
<i>F</i>						■■■■■■

Представление в виде сот

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	1	1	0	0	1	1
<i>B</i>	1	0	1	0	0	0
<i>C</i>	1	0	0	1	0	0
<i>D</i>	0	0	1	1	0	0
<i>E</i>	1	1	0	1	0	0
<i>F</i>	0	0	0	0	0	1

Представление в виде булевой матрицы

Рис. 74.

Рис. 75.

На рис. 74—78 приведены различные представления одного и того же графа: на рис. 74 — в виде сот, на рис. 75 в виде булевой матрицы, на рис. 76 — с помощью латинской матрицы, на рис. 77 — соотвествием, на рис. 78 — с помощью стрелок.

**Описание Бержа.** В книге Бержа [8] граф описывается соотвествием  $\Gamma$  между подмножествами множества  $E$ . Например, для графа на рис. 74—78

$$\begin{aligned} \Gamma A &= \{A, B, E, F\}, & \Gamma C &= \{A, D\}, & \Gamma E &= \{A, B, D\}, \\ \Gamma B &= \{A, C\}, & \Gamma D &= \{C, D\}, & \Gamma F &= \{F\}. \end{aligned} \quad (25.7)$$

В связи с этим граф<sup>2)</sup> можно рассматривать как пару

$$G = (E, \Gamma), \quad (25.8)$$

<sup>1)</sup> Разумеется, определение графа должно включать множество  $E$ , которое порождает  $P$ .

<sup>2)</sup> Мы уже отмечали, что определение графа должно включать множество  $E \times E$ . Иначе исключаются изолированные вершины (не принадлежащие никакой паре). По Бурбаки граф определяется формулой (25.6); описание Бержа устраняет возможное недоразумение.

образованную множеством  $\mathbf{E}$  и многозначным<sup>1)</sup> отображением  $\Gamma$  множества  $\mathbf{E}$  в себя.

Отображение  $\Gamma$  можно определить для любого подмножества из  $\mathbf{E}$ . Например,

$$\begin{aligned}\Gamma\{B, D, E\} = \Gamma B \cup \Gamma D \cup \Gamma E &= \{A, C\} \cup \{C, D\} \cup \{A, B, D\} = \\ &= \{A, B, C, D\}. \quad (25.9)\end{aligned}$$

Определим граф  $G^{-1}$  с помощью обратного отображения  $\Gamma^{-1}$ :

$$G^{-1} = (\mathbf{E}, \Gamma^{-1}). \quad (25.10)$$

Например, из (25.7)

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1} A &= \{A, B, C, E\}, \quad \Gamma^{-1} B = \{A, E\}, \\ \Gamma^{-1} C &= \{B, D\}, \quad \Gamma^{-1} D = \{C, D, E\}, \\ \Gamma^{-1} E &= \{A\}, \quad \Gamma^{-1} F = \{A, F\},\end{aligned} \quad (25.11)$$

и соответствующие представления графа  $G^{-1}$  получаются, если на рис. 74 и 75 переставить строки со столбцами, на рис. 77, 78

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$A$	$AA$	$AB$	$\emptyset$	$\emptyset$	$AE$	$AF$
$B$	$BA$	$\emptyset$	$BC$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$C$	$CA$	$\emptyset$	$\emptyset$	$CD$	$\emptyset$	$\emptyset$
$D$	$\emptyset$	$\emptyset$	$DC$	$DD$	$\emptyset$	$\emptyset$
$E$	$EA$	$EB$	$\emptyset$	$ED$	$\emptyset$	$\emptyset$
$F$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$FF$

Рис. 76.

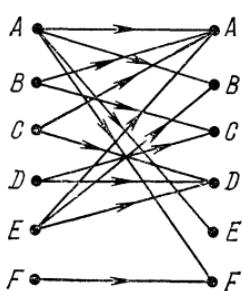


Рис. 77.

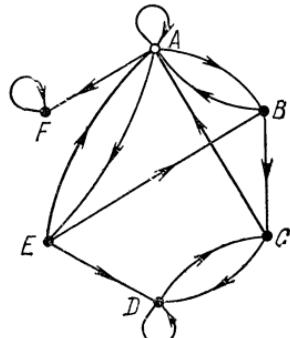


Рис. 78.

изменить направление всех стрелок, а на рис. 76 переставить строки со столбцами и изменить порядок букв в каждой клетке.

Граф  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  имеет порядок  $n$ , если  $|\mathbf{E}| = n$ . На языке теории графов элемент  $X_i \in \mathbf{E}$  называют *вершиной*, а пару  $(X_i, X_j)$ , где  $X_j \in \Gamma X_i$ , *дугой*.

Если обозначить через  $\mathbf{U}$  множество всех дуг графа (в нашем примере

$$\mathbf{U} = \{(A, A), (A, B), (A, E), (A, F), (B, A), (B, C), (C, A), (C, D), (D, C), (D, D), (E, A), (E, B), (E, D), (F, F)\}), \quad (25.12)$$

<sup>1)</sup> В современной математике термин «отображение» означает однозначное соответствие, а для многозначного отображения употребляется термин «многозначное соответствие».

то граф можно определить так:

$$G = (\mathbf{E}, \mathbf{U}). \quad (25.13)$$

Для удобства дуги обозначают также одной буквой:

$$u_k = (X_i, X_j), \text{ или } u_{ij} = (X_i, X_j), \text{ или } u = (X_i, X_j).$$

**Концевые точки.** Для дуги  $u = (X_i, X_j)$  назовем  $X_i$  *началом*, а  $X_j$  — *концом*.

**Петля.** Дуга, начало и конец которой совпадают, называется *петлей*. На рис. 78 дуги  $(A, A)$ ,  $(D, D)$ ,  $(F, F)$  — петли, а на рис. 74, 75 и 76 петли расположены на главных диагоналях.

**Смежные дуги.** Дуги называются *смежными*, если они различны и имеют общую концевую точку. Например, на рис. 78 дуги  $(AF)$  и  $(A, B)$ ,  $(A, B)$  и  $(B, A)$ ,  $(B, A)$  и  $(A, F)$  смежные.

**Смежные вершины.** Две вершины  $X_i$  и  $X_j$  *смежны*, если они различны и существует дуга, идущая от одной из них к другой. Например, на рис. 78 вершины  $A$  и  $F$ ,  $A$  и  $B$  смежны, а  $C$  и  $F$  не смежны.

**Дуги, инцидентные подмножеству вершин.** Пусть задан граф  $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$  и непустое подмножество  $\mathbf{E}_1$  множества  $\mathbf{E}$ .

Говорят, что дуга  $u = (X_i, X_j)$  *заходит* в  $\mathbf{E}_1$ , если  $X_i \notin \mathbf{E}_1$ , а  $X_j \in \mathbf{E}_1$ . Если же  $X_i \in \mathbf{E}_1$ , а  $X_j \notin \mathbf{E}_1$ , то говорят, что  $u$  *исходит* из  $\mathbf{E}_1$ . В обоих случаях дугу  $u$  называют *инцидентной* подмножеству  $\mathbf{E}_1$ .

Обозначим соответственно через  $\mathbf{U}_{\mathbf{E}_1}^-$  и  $\mathbf{U}_{\mathbf{E}_1}^+$  множества дуг, заходящих в  $\mathbf{E}_1$  и исходящих из него. Например, на рис. 79

$$\mathbf{U}_{\mathbf{E}_1}^- = \{(A, B), (A, E), (C, B)\}, \quad \mathbf{U}_{\mathbf{E}_1}^+ = \{(E, A), (B, C)\}. \quad (25.14)$$

Если подмножество сводится к одной вершине, то дугу называют *инцидентной* этой вершине (заходящей в нее или исходящей из нее).

**Полустепень подмножества.** *Внутренней полустепенью* называется число  $|\mathbf{U}_{\mathbf{E}_1}^-|$  дуг, заходящих в  $\mathbf{E}_1$ , а *внешней полустепенью* — число  $|\mathbf{U}_{\mathbf{E}_1}^+|$  дуг, исходящих из  $\mathbf{E}_1$ . Например, на рис. 79

$$|\mathbf{U}_{\mathbf{E}_1}^-| = 3, \quad |\mathbf{U}_{\mathbf{E}_1}^+| = 2. \quad (25.15)$$

**Частичный граф. Подграф.** Рассмотрим два графа:  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  и  $G_1 = (\mathbf{E}, \Gamma_1)$ . Если

$$(\forall X_i \in \mathbf{E}) (\Gamma_1 X_i \subset \Gamma X_i), \quad (25.16)$$

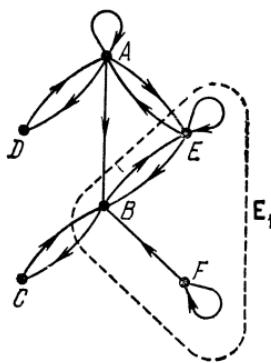


Рис. 79.

то  $G_1$  называют *частичным графом* графа  $G$ . Иначе говоря,  $G_1 = (\mathbf{E}, \mathbf{U}_1)$  есть частичный граф графа  $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$ , если  $\mathbf{U}_1 \subset \mathbf{U}$ . Граф на рис. 81 — частичный граф графа на рис. 80.

*Подграфом* графа  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  называется граф  $G_2 = (\mathbf{A}, \Gamma_2)$ , если  $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$  и

$$(\forall X_i \in \mathbf{A}) \Gamma_2 X_i = \mathbf{A} \cap \Gamma X_i. \quad (25.17)$$

Граф на рис. 82 — подграф графа на рис. 80. Подграф строится

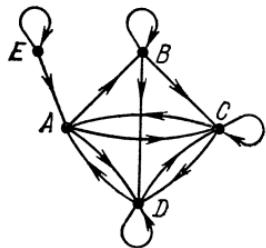


Рис. 80.

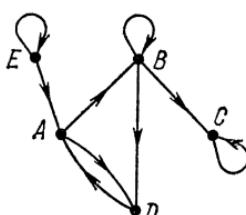


Рис. 81.

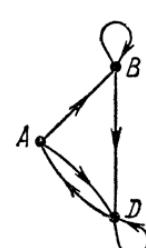


Рис. 82.

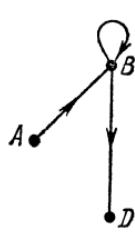


Рис. 83.

на подмножестве множества вершин графа и включает все дуги, инцидентные вершинам этого подмножества.

Можно определить частичные подграфы (пример на рис. 83).

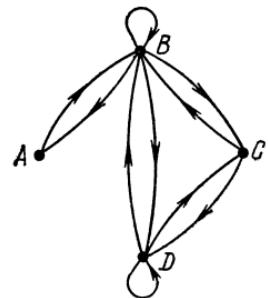


Рис. 84.

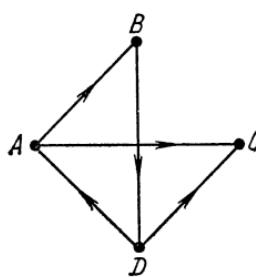


Рис. 85.

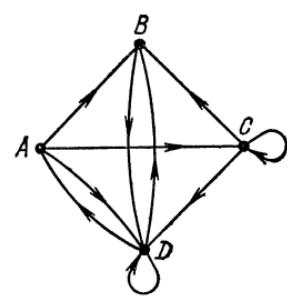


Рис. 86.

**Симметрический граф. Антисимметрический граф. Полный граф.** Граф  $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$  называется *симметрическим*, если

$$(\forall X_i \in \mathbf{E} \ \forall X_j \in \mathbf{E}) \quad (X_i, X_j) \in \mathbf{U} \Rightarrow (X_j, X_i) \in \mathbf{U} \quad (25.18)$$

(любые две вершины  $X_i$  и  $X_j$  соединены двумя противоположно направленными дугами).

Пример такого графа приведен на рис. 84.

Граф  $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$  называется *антисимметрическим*, если

$$(\forall X_i \in \mathbf{E} \ \forall X_j \in \mathbf{E}) \quad (X_i, X_j) \in \mathbf{U} \Rightarrow (X_j, X_i) \notin \mathbf{U} \quad (25.19)$$

(каждая пара смежных вершин соединена лишь в одном направлении, петли отсутствуют). Пример такого графа приведен на рис. 85.

Граф  $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$  называется *полным*, если

$$(\forall X_i \in \mathbf{E} \ \forall X_j \in \mathbf{E}) \quad (X_i, X_j) \notin \mathbf{U} \Rightarrow (X_j, X_i) \in \mathbf{U} \quad (i \neq j) \quad (25.20)$$

(любые две вершины соединены по крайней мере в одном направлении).

Пример полного графа дан на рис. 86.

**Полный граф с петлями.** Граф  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  называется *полным* графом с петлями, если

$$(\forall X_i \in \mathbf{E}) \Gamma X_i = \mathbf{E} \quad (25.21)$$

(каждая пара вершин, различных или нет, соединяется дугой; см. рис. 87). Очевидно, что каждому графу можно сопоставить полный граф с петлями.

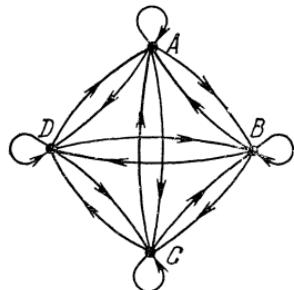


Рис. 87.

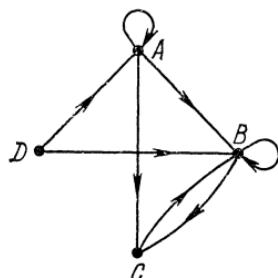


Рис. 88.

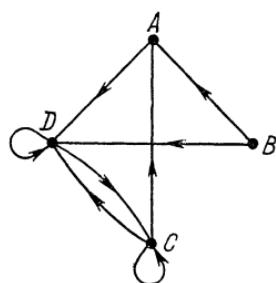


Рис. 89.

**Дополнительный график.** Пусть заданы граф  $G = (\mathbf{E}, \Gamma) = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$  и соответствующий ему полный граф с петлями  $G_p = (\mathbf{E}, \Gamma_p) = (\mathbf{E}, \mathbf{U}_p)$ .

Граф  $G^* = (\mathbf{E}, \Gamma^*) = (\mathbf{E}, \mathbf{U}_p - \mathbf{U})$  называется дополнительным к графу  $G$ .

Очевидно,

$$(G^*)^* = G. \quad (25.22)$$

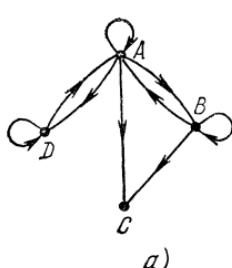
Графы на рис. 88 и 89 дополнительные друг к другу.

Можно описать дополнительный график по-другому:

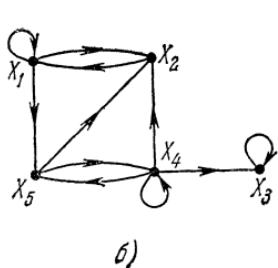
$$(\forall X_i \in \mathbf{E}) \Gamma^* X_i = \mathbf{E} - \Gamma X_i. \quad (25.23)$$

### УПРАЖНЕНИЯ

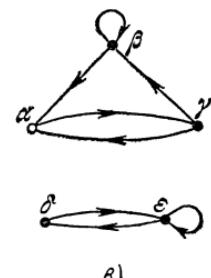
**25А.** Дать другие представления (в том числе и описание Бержа) для графов



а)



б)



в)

25Б. То же для графов

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>A</i>					X
<i>B</i>		X	X	X	
<i>C</i>					X
<i>D</i>	X				
<i>E</i>			X		X

*a)*

		X	X	X	
	X				
			X	X	
					X

*б)*

	<i>X</i> <sub>1</sub>	<i>X</i> <sub>2</sub>	<i>X</i> <sub>3</sub>	<i>X</i> <sub>4</sub>	<i>X</i> <sub>5</sub>	<i>X</i> <sub>6</sub>
<i>X</i> <sub>1</sub>		X	X	X	X	
<i>X</i> <sub>2</sub>	X					
<i>X</i> <sub>3</sub>			X	X		
<i>X</i> <sub>4</sub>	X					
<i>X</i> <sub>5</sub>					X	
<i>X</i> <sub>6</sub>		X	X	X	X	

*в)*

25В. Привести описание Бержа графов  $G^{-1} = (E, \Gamma^{-1})$ , соответствующих графам  $G$  в упражнениях 25А, *а*) и *в*) и 25Б, *б*).

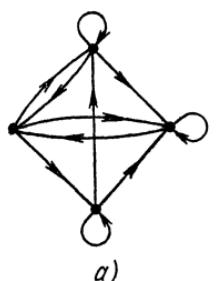
25Г. Выписать множества  $U$  дуг для графов из упражнений 25А, *а*) и *б*).

25Д. Найти множества  $U_{E_1}^-$  и  $U_{E_1}^+$  для следующих множеств  $E_1$ : а) упражнение 25А, *а*):  $E_1 = \{A, B\}$ :

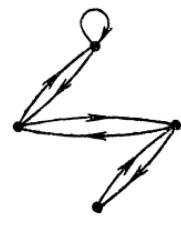
- б) упражнение 25А, *а*):  $E_1 = \{C\}$ ;
- в) упражнение 25А, *б*):  $E_1 = \{X_2, X_4, X_5\}$ ;
- г) упражнение 25Б, *б*):  $E_1 = \{D, E\}$ .

25Е. Вычислить полустепени для каждого из случаев упражнения 25Д.

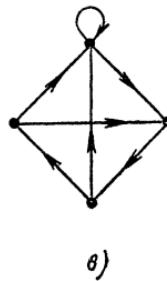
25Ж. Какие из приведенных ниже графов являются симметрическими, антисимметрическими, полными, полными с петлями:



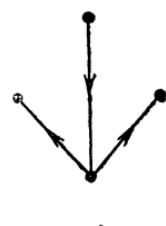
*а)*



*б)*



*в)*



*г)*

25З. С помощью стрелок изобразить дополнительные графы  $G^* = (E, \Gamma^*)$  к графикам  $G = (E, \Gamma)$  из упражнений 25А, *б*); 25А, *в*).

## § 26. Понятие пути

В комбинаторике понятие пути играет существенную роль, и мы рассмотрим его, а также понятия, тесно связанные с ним.

Путем называется такая последовательность  $(u_1, u_2, \dots)$  дуг, что конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь может быть конечным или бесконечным. Например,

$$(a, c, m, i), \quad (f, m, d, b, a), \quad (g, h, n, j, h, q) \quad (26.1)$$

— пути графа на рис. 90. Путь можно обозначить также последовательностью вершин, которые он содержит:

$$(C, A, B, E, D), \quad (C, B, E, A, C, A), \quad (C, D, E, F, D, E, G). \quad (26.2)$$

**Простой путь.** Путь называется *простым*, если никакая дуга не встречается в нем дважды, и *составным* в противном случае. Например, на рис. 90  $(a, c, m, i)$  — простой путь, а  $(g, h, n, j, h, q)$  — составной.

**Элементарный путь.** Путь называется *элементарным*, если в нем никакая вершина не встречается дважды, и *неэлементарным*

в противном случае. Например, на рис. 90  $(a, c, m, i)$  — элементарный и простой путь,  $(h, d, c, m, q)$  — неэлементарный и простой,  $(g, h, n, j, h, q)$  — неэлементарный и составной.

**Контур.** *Контур* — это конечный путь, у которого начальная вершина дуги  $u_1$  совпадает с конечной вершиной дуги  $u_k$ . Контур можно обозначать как дугами, так и вершинами, которые он содержит. Примерами контуров графа на рис. 90 являются  $(n, j, h)$ ,  $(b, g, h, n, j, h, d)$ .

Контур называется *элементарным*, если все вершины, через которые он проходит, различны (за исключением начальной и конечной, которые совпадают). На рис. 90  $(d, b, g, h)$  — элементарный контур.

Контур называется *простым*, если все его дуги различны. На рис. 90  $(n, j, h)$  и  $(b, a, e, d)$  — простые контуры.

**Длина пути.** *Длиной* пути  $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_s)$  называют число его дуг и обозначают через  $l(\mu)$ . Например (рис. 90),

$$\begin{aligned} \mu &= (a, c, m, i): \quad l(\mu) = 4; \\ \mu &= (g, h, n, j, h, q): \quad l(\mu) = 6. \end{aligned} \quad (26.3)$$

Для удобства вводят понятие пути нулевой длины (изолированная вершина).

**Замечание к понятию контура.** Контуры, которые образованы одними и теми же дугами, взятыми в одинаковом порядке, и записи которых получаются одна из другой циклическим сдвигом, можно считать либо эквивалентными, либо неэквивалентными. Например, контуры (рис. 90)

$$(h, n, j), \quad (n, j, h), \quad (j, h, n) \quad (26.4)$$

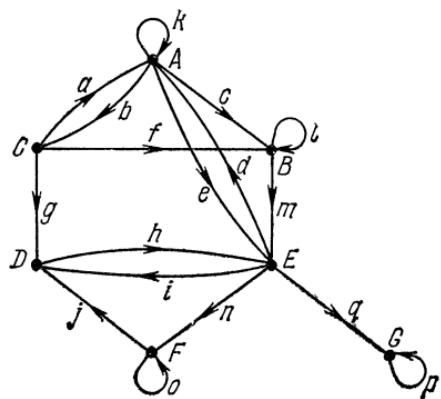


Рис. 90.

можно считать либо эквивалентными, либо неэквивалентными. То же самое относится и к представлению с помощью вершин:

$$(D, E, F, D), \quad (E, F, D, E), \quad (F, D, E, F). \quad (26.5)$$

В случае надобности указывают начало контура.

При изучении подстановок (§ 16) мы представляли их с помощью графов, при этом циклы подстановок представлялись контурами. При изучении неориентированных графов используется термин «цикл». Понятий в математике больше, чем слов, которыми мы располагаем для их обозначения. Внимательный читатель избежит возможных недоразумений.

**Гамильтонов путь.** Элементарный путь, в котором число дуг на единицу меньше числа вершин графа, называется *гамильтоновым путем*<sup>1)</sup>. Иначе говоря, такой путь проходит через все вершины в точности по одному разу. При записи с помощью вершин гамильтонов путь — перестановка вершин графа.

Например, путь  $(F, B, A, C, D, E)$  на рис. 91 гамильтонов, а в графе на рис. 90 нет гамильтонова пути.

Аналогично *гамильтонов контур* — контур, проходящий через все вершины в точности по одному разу (исключая произвольно выбранное начало).

Задача перечисления гамильтоновых путей и контуров графа будет разбираться в главе IV.

## УПРАЖНЕНИЯ

**26А.** Какие из последовательностей  $(A, B, E, D, C); (A, B, E, A, C, B); (A, B, D, E, C, B); (A, A); (C, C); (A, B, E, G); (D, E, F, D, E, F, D); (E, F, F, D, E); (D, F, E, B, A, C); (B, E, F, D, E, G)$  для графа на рис. 90 являются: а) путем, б) простым путем, в) элементарным путем, г) контуром, д) простым контуром, е) элементарным контуром.

**26Б.** Указать длины путей из упражнения 26А.

**26В.** Рассматривая непосредственно график на рис. 90, показать, что он не обладает гамильтоновым путем.

**26Г.** Перечислить элементарные пути соответственно длин 1, 2, 3, 4, 5 графа на рис. 91. (Систематический метод будет дан в § 44.)

**26Д.** Перечислить гамильтоновы контуры графа на рис. 91 (считая одинаковыми контуры, получающиеся один из другого циклическим сдвигом).

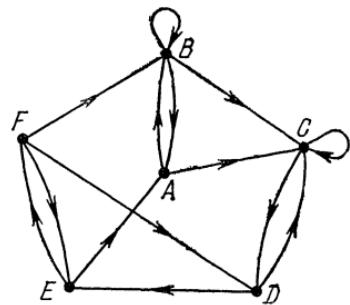


Рис. 91.

<sup>1)</sup> По имени известного английского математика Гамильтона.

## § 27. Сильно связный граф. Разложение на максимальные сильно связные подграфы. Транзитивное замыкание и пересчет путей

**Транзитивное замыкание.** Пусть задан граф  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$ . Определим многозначные отображения  $\Gamma^2, \Gamma^3, \dots$  по формулам

$$\Gamma^2 X_i = \Gamma \{ \Gamma X_i \}, \quad (27.1)$$

$$\Gamma^3 X_i = \Gamma \{ \Gamma^2 X_i \} = \Gamma \{ \Gamma \{ \Gamma X_i \} \}, \quad (27.2)$$

• • • • • • • • • • • •

а обратные многозначные отображения  $\Gamma^{-2}, \Gamma^{-3}, \dots$  — по формулам

$$\Gamma^{-2}X_i = I^{-1}\{\Gamma^{-1}X_i\}, \quad (27.3)$$

$$\Gamma^{-3}X_i = \Gamma^{-1}\{\Gamma^{-2}X_i\} = \Gamma^{-1}\{\Gamma^{-1}\{\Gamma^{-1}X_i\}\}, \quad (27.4)$$

100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

Например, для графа на рис. 92 имеем

$$\Gamma A = \{B, F, G\}, \quad \Gamma B = \{A, B, C\}, \quad \Gamma C = \{D, E\}, \quad \Gamma D = \{C\},$$

$$\Gamma E = \emptyset, \quad \Gamma F = \{B, F\}, \quad \Gamma G = \{A, E\}; \quad (27.5)$$

$$\Gamma^2 A = \Gamma \{ B, F, G \} = \Gamma B \cup \Gamma F \cup \Gamma G =$$

$$= \{A, B, C\} \cup \{B, F\} \cup \{A, E\} = \{A, B, C, E, F\},$$

$$\Gamma^2 B = \Gamma \{A, B, C\} = \Gamma A \cup \Gamma B \cup \Gamma C = \{A, B, C, D, E, F, G\}; \quad (27.6)$$

$$\Gamma^3 A = \Gamma \{A, B, C, E, F\} = \{A, B, C, D, E, F, G\}. \quad (27.7)$$

Читателю предлагается продолжить дальше и выписать обратные преобразования.

Очевидно, что  $\Gamma^n X_i$  и  $\Gamma^{-n} X_i$  являются соответственно подмножествами тех вершин, в которые можно прийти из  $X_j$ , используя

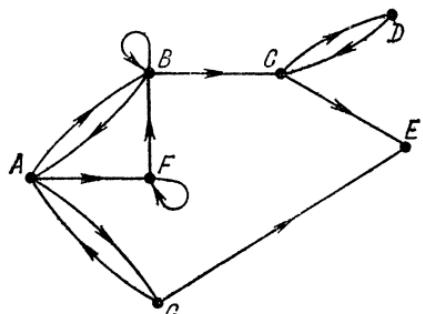


Рис. 92

пути длины  $n$  (или, быть может, меньшей), и тех вершин, из которых можно прийти в  $X_i$ , используя пути длины  $n$  (или, быть может, меньшей).

Транзитивным замыканием  $\hat{G}X_i$  называется многозначное отображение, определяемое формулой

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}X_i &= \\ &= \{X_i\} \cup \Gamma X_i \cup \Gamma^2 X_i \cup \Gamma^3 X_i \cup \dots^1).\end{aligned}\tag{27.8}$$

Другими словами  $\hat{\Gamma} X_i$  является множеством вершин, в которые можно прийти из  $X_i$  по некоторому пути.

<sup>1)</sup> Некоторые авторы определяют  $\hat{\Gamma}X_i$  и  $\hat{\Gamma}^-X_i$  так:

$$\widehat{\Gamma}X_i = \Gamma X_i \cup \Gamma^2 X_i \cup \dots, \quad \widehat{\Gamma}^{-1}X_i = \Gamma^{-1} X_i \cup \Gamma^{-2} X_i \cup \dots$$

Аналогично определяется обратное транзитивное замыкание:

$$\hat{\Gamma}^{-1}X_i = \{X_i\} \cup \Gamma^{-1}X_i \cup \Gamma^{-2}X_i \cup \dots^1), \quad (27.9)$$

т. е. множество вершин, из которых попадают в  $X_i$  по некоторому пути.

Например (рис. 92),  $\hat{\Gamma}A = E$ ,  $\hat{\Gamma}B = E$ ,  $\hat{\Gamma}C = \{C, D, E\}$ ,

$$\hat{\Gamma}D = \{C, D, E\}, \quad \hat{\Gamma}E = \{E\}, \quad \hat{\Gamma}F = E, \quad \hat{\Gamma}G = E.$$

Предоставим читателю в качестве упражнения найти соответствующие  $\Gamma^{-1}$ ).

**Сильно связный граф**<sup>2)</sup>. Граф  $G = (E, \Gamma)$  называют *сильно связным*, если

$$(\forall X_i \in E) \hat{\Gamma}X_i = E, \quad (27.10)$$

т. е. для любых двух вершин  $X_i, X_j$  такого графа существует путь, идущий из  $X_i$  в  $X_j$ . Граф на рис. 93 сильно связный, а граф на рис. 92 не является таковым.

Легко показать, что (27.10) эквивалентно условию

$$(\forall X_i \in E) \hat{\Gamma}^{-1}X_i = E. \quad (27.11)$$

Бинарное отношение «существует путь из  $X_i$  в  $X_j$ » является отношением частичного порядка на множестве вершин  $E$ , так как оно транзитивно и рефлексивно. Бинарное отношение «существует путь из  $X_i$  в  $X_j$  и путь из  $X_j$  в  $X_i$ » — отношение эквивалентности  $\mathcal{R}$ , так как оно, кроме того, симметрично.

**Разложение графа на максимальные сильно связные подграфы.** Подграф  $G'$  графа  $G = (E, \Gamma)$  называют *максимальным сильно связным*, если не существует сильно связного графа  $G''$ , строго содержащего  $G'$ .

Пример. Максимальные сильно связные подграфы графа на рис. 95 обведены пунктиром.

Фактормножество  $E/\mathcal{R}$  состоит из классов  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , каждый из которых есть максимальный сильно связный подграф.

Пример. Рассмотрим граф на рис. 94. Из его представления на рис. 95 видно, что  $E/\mathcal{R}$  состоит из шести классов.

Легко показать, что множество классов упорядочивается отношением  $\mathcal{R}'$ : существует путь из класса  $C_r$  в  $C_s$ . Отношение  $\mathcal{R}'$  рефлексивно и транзитивно. Оно также антисимметрично, так как если бы существовали пути как из  $C_r$  в  $C_s$ , так и из  $C_s$  в  $C_r$ ,

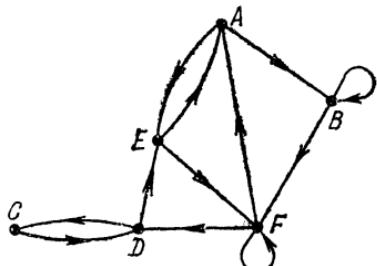


Рис. 93.

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 164.

<sup>2)</sup> Более слабое понятие связного графа будет определено в § 32.

то  $C_r$  и  $C_s$  следовало бы объединить в один класс, что противоречит их максимальности.

Пример. Рис. 96 показывает, как можно упорядочить  $C_1, C_2, \dots, C_6$  из рис. 95. Этот порядок, очевидно, частичный.

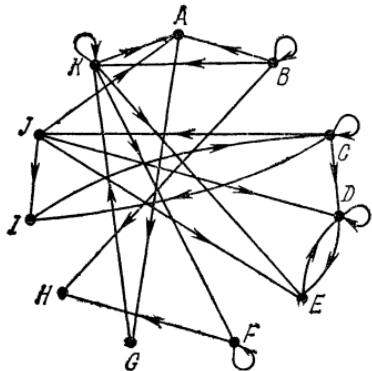


Рис. 94.

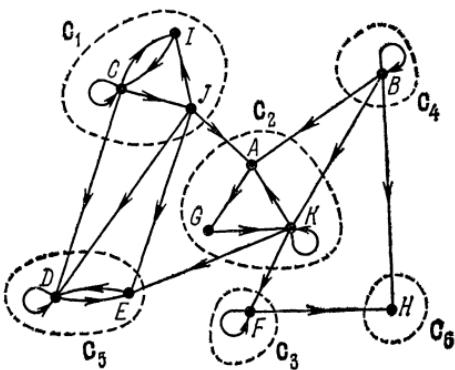


Рис. 95.

**Метод<sup>1)</sup> разложения графа на максимальные сильно связные подграфы.** Если  $C(X_i)$  — класс, содержащий  $X_i$ , то

$$C(X_i) = \hat{\Gamma}X_i \cap \hat{\Gamma}^-X_i. \quad (27.12)$$

Метод состоит в следующем. Берем произвольную вершину  $X_i$  и находим  $\hat{\Gamma}X_i$ ,  $\hat{\Gamma}^-X_i$  и  $\hat{\Gamma}X_i \cap \hat{\Gamma}^-X_i$ . Затем берем вершину  $X_j \notin C(X_i)$  и действуем аналогично. Продолжаем процесс до тех пор, пока это возможно.

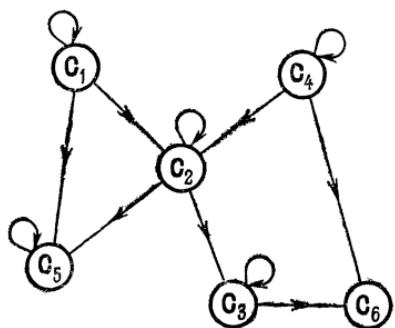


Рис. 96.

Пример. Рассмотрим представление графа на рис. 94 в виде булевой матрицы (см. рис. 97, нули опущены). Справа от матрицы поместим столбец, а внизу — строку, которые будем заполнять следующим образом. В клетку столбца напротив строки  $A$  ставим нуль. В клетку столбца напротив строки  $G$  ставим 1, так как строка  $A$  содержит 1 на месте  $G$ . Стока  $G$  матрицы

содержит 1 на месте  $K$ , поэтому напротив  $K$  помещаем 2 (это показывает, что кратчайший путь из  $A$  в  $K$  длины 2). Стока  $K$  матрицы содержит 1 на местах  $A, E, F, K$ . Ставим 3 напротив  $E$  и  $F$  (клетки напротив  $A$  и  $K$  уже заполнены). В стро-

<sup>1)</sup> Метод предложен Мальгранжем (Y. Malgrange). См. также Томеску (Tomescu), Méthode pour la détermination de la fermeture transitive d'un graphe fini, Revue AFIRO, Série rouge, № 3, 1967.

ке  $E$  на месте  $D$  стоит 1 и напротив  $D$  ставим 4. В строке  $F$  1 стоит на местах  $F$  и  $H$ . Клетка напротив  $F$  уже заполнена, и мы ставим 4 напротив  $H$ . Рассмотрение строк  $D$  и  $H$  приводит к уже заполненным клеткам. В оставшиеся клетки столбца ставим « $\times$ ». Числа в клетках этого столбца — длины кратчайших путей из  $A$  в соответствующие вершины; « $\times$ » означает, что пути не существует. Таким образом,

$$\hat{\Gamma}A = \{A, D, E, F, G, H, K\}. \quad (27.13)$$

Аналогично действуем для получения  $\hat{\Gamma}^-A$ , но при этом меняем ролями строки и столбцы матрицы. Полученные числа в

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$	$I$	$J$	$K$	$\hat{\Gamma}A$
$A$						1						0
$B$	1	1						1				$\times$
$C$			1	1					1	1		4
$D$				1	1							3
$E$					1							3
$F$						1		1				1
$G$											1	4
$H$												$\times$
$I$			1									$\times$
$J$	1			1	1				1			2
$K$	1				1	1					1	

$\hat{\Gamma}^-A$	0	1	2	$\times$	$\times$	$\times$	2	$\times$	3	1	{}
-------------------	---	---	---	----------	----------	----------	---	----------	---	---	----

Рис. 97.

строке внизу дают минимальные длины путей графа, получающегося из исходного изменением направления дуг. Имеем

$$\hat{\Gamma}^-A = \{A, B, C, G, I, J, K\}, \quad (27.14)$$

$$\mathbf{C}(A) = \hat{\Gamma}A \cap \hat{\Gamma}^-A = \{A, G, K\}. \quad (27.15)$$

Удаляя из графа вершины  $A, G, K$ , получаем подграф, представленный на рис. 98. Берем произвольную вершину, например  $D$ , и, поступая с ней точно так же, находим

$$\hat{\Gamma}_1D = \{D, E\}, \quad (27.16)$$

$$\hat{\Gamma}_1^-D = \{C, D, E, I, J\}, \quad (27.17)$$

$$\mathbf{C}(D) = \hat{\Gamma}_1D \cap \hat{\Gamma}_1^-D = \{D, E\}. \quad (27.18)$$

Удаляя из графа на рис. 98 вершины  $D$  и  $E$ , получаем граф, представленный на рис. 99. Для произвольной его вершины,

	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$H$	$I$	$J$	
$B$	1					1			
$C$		1	1				1	1	
$D$			1	1					
$E$				1					
$F$					1	1			
$H$									
$I$		1							
$J$			1	1				1	

  
 $\hat{\Gamma}_1 D$ 

×	0	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Рис. 98.

	$B$	$C$	$F$	$H$	$I$	$J$	
$B$	1			1			
$C$		1			1	1	
$F$			1	1			
$H$							
$I$		1					
$J$					1		

  
 $\hat{\Gamma}_2 C$ 

×	0	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---

  
 $\hat{\Gamma}_2^- C$ 

×	0	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---

  
 $\hat{\Gamma}_2^+ C$ 

0	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---

  
 $\hat{\Gamma}_3 B$ 

0	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---

  
 $\hat{\Gamma}_3^- B$ 

0	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---

  
 $\hat{\Gamma}_3^+ B$ 

0	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---

Рис. 99.

Рис. 100.

например  $C$ , получаем

$$\hat{\Gamma}_2 C = \{C, I, J\}, \quad (27.19)$$

$$\hat{\Gamma}_2^- C = \{C, I, J\}, \quad (27.20)$$

$$C(C) = \{C, I, J\}. \quad (27.21)$$

Продолжая, легко находим (рис. 100)

$$C(B) = \{B\}, \quad C(F) = \{F\}, \quad C(H) = \{H\}. \quad (27.22)$$

Таким образом, приходим к шести классам, показанным на рис. 95.

**Существование и пересчет путей.** Путь положительной длины из  $X_i$  в  $X_j$  существует, если

$$(\exists p \in \mathbf{N}_0) X_j \in \Gamma^p X_i. \quad (27.23)$$

Если рассматривать пути длины нуль, то (27.23) можно записать так:

$$X_j \in \hat{\Gamma} X_i. \quad (27.24)$$

Булева матрица  $\|B\|$  графа показывает, какие существуют пути длины 1. Пусть

$$\|B\|^2 = \|B\| \cdot \|B\|, \quad (27.25)$$

$$\|B\|^4 = \|B\|^2 \cdot \|B\|^2, \quad (27.26)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\|B\|^{2^k} = \|B\|^{2^{k-1}} \cdot \|B\|^{2^{k-1}}; \quad (27.27)$$

тогда

$$\begin{aligned} B_{ij}^{2^r} = & B_{i1}^{2^{r-1}} \cdot B_{1j}^{2^{r-1}} + B_{i2}^{2^{r-1}} \cdot B_{2j}^{2^{r-1}} + \\ & + \dots + B_{in}^{2^{r-1}} \cdot B_{nj}^{2^{r-1}}, \end{aligned} \quad (27.28)$$

где  $+$  означает булево сложение.

Если

$$\|B\|^{2^{k+1}} = \|B\|^{2^k}, \quad (27.29)$$

то матрица  $\|B\|^{2^k}$  показывает, какие вершины в графе связаны путями.

Пример (рис. 101). Рассмотрим матрицу  $\|B\|$ , изображенную на рис. 102.

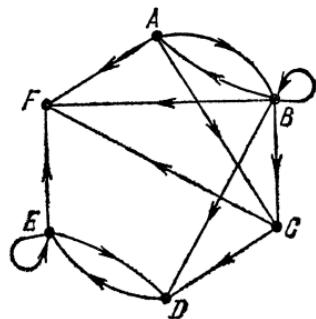


Рис. 101.

	A	B	C	D	E	F
A		1	1			1
B	1	1	1	1		1
C				1		1
D					1	
E				1	1	1
F						

$\|B\|^1$

Рис. 102.

	A	B	C	D	E	F
A	1	1	1	1		1
B	1	1	1	1	1	1
C					1	1
D				1	1	1
E				1	1	1
F						

$\|B\|^2$

Рис. 103.

Матрица  $\|B\|^2$  (рис. 103) показывает, какие существуют пути длины 2. Замечаем, что  $\|B\|^4 = \|B\|^8$  (см. рис. 104, 105). Следовательно,  $\|B\|^4$  показывает, какие вершины в графе связаны путями.

Чтобы пересчитать различные пути длины  $r$ , рассмотрим степени булевой матрицы  $\|A\|$ :

$$\|A\|^2 = \|A\| \cdot \|A\|, \quad (27.30)$$

$$\|A\|^3 = \|A\|^2 \cdot \|A\|, \quad (27.31)$$

$$\|A\|^r = \|A\|^{r-1} \cdot \|A\|, \quad (27.32)$$

$$A_{ij}^k = A_{i1}^{k-1} A_{1j} + A_{i2}^{k-1} A_{2j} + \dots + A_{in}^{k-1} A_{nj}. \quad (27.33)$$

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	1	1	1	1	1	1
<i>B</i>	1	1	1	1	1	1
<i>C</i>				1	1	1
<i>D</i>				1	1	1
<i>E</i>				1	1	1
<i>F</i>						

Рис. 104.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	1	1	1	1	1	1
<i>B</i>	1	1	1	1	1	1
<i>C</i>				1	1	1
<i>D</i>				1	1	1
<i>E</i>				1	1	1
<i>F</i>						

Рис. 105.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>		1	1			1
<i>B</i>	1	1	1	1		1
<i>C</i>				1		1
<i>D</i>					1	
<i>E</i>				1	1	1
<i>F</i>						

Рис. 106.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	1	1	1	2		2
<i>B</i>	1	2	2	2	1	3
<i>C</i>					1	
<i>D</i>				1	1	1
<i>E</i>				1	2	1
<i>F</i>						

Рис. 107.

$\|A\|$  дает число путей длины 1 между каждой

$\|A\|^2$  дает число путей длины 2 между парой вершин  $(X_i, X_j)$ ,  
каждой парой вершин  $(X_i, X_j)$ ,

$\|A\|^r$  дает число путей длины  $r$  между каждой парой вершин  $(X_i, X_j)$ .

Пример (рис. 101). Матрицы на рис. 106—109 дают число путей длин соответственно 1, 2, 3, 4 в графе. Видим, что имеется

пять путей длины 3 от  $B$  к  $D$  (см.  $\|A\|^3$ ), девять путей длины 4 от  $B$  к  $D$  (см.  $\|A\|^4$ ).

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$A$	1	2	2	2	2	3
$B$	2	3	3	5	3	6
$C$				1	1	1
$D$				1	2	1
$E$				2	3	2
$F$						

$\|A\|^3$

Рис. 108.

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$A$	2	3	3	6	4	7
$B$	3	5	5	9	8	11
$C$				1	2	1
$D$				2	3	2
$E$				3	5	3
$F$						

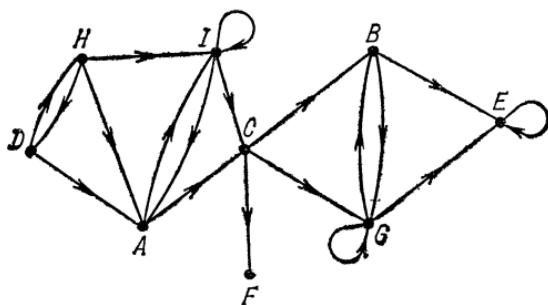
$\|A\|^4$

Рис. 109.

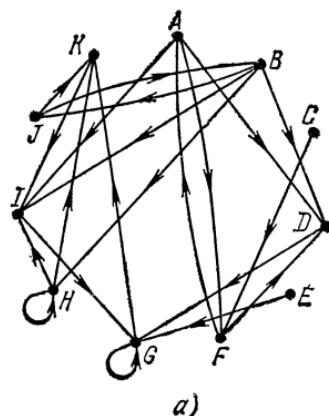
### УПРАЖНЕНИЯ

27А. Для графа на рис. 92 выписать: а)  $\Gamma^2 A$ , б)  $\Gamma^3 \{C, G\}$ , в)  $\Gamma^3 \{A, B\}$ , г)  $\Gamma^4 A$ , д)  $\Gamma^{-1} \{C, G\}$ , е)  $\Gamma^{-2} A$ , ж)  $\Gamma^{-3} E$ .

27Б. Для указанного ниже графа найти: а)  $\widehat{\Gamma} D$ , б)  $\widehat{\Gamma}^{-1} D$ , в)  $\widehat{\Gamma} \{A, C\}$ , г)  $\widehat{\Gamma}^{-1} \{A, C\}$ , д)  $\widehat{\Gamma} E$ , е)  $\widehat{\Gamma}^{-1} E$ .



27В. Разложить графы а), б), в) на максимальные сильно связные подграфы.



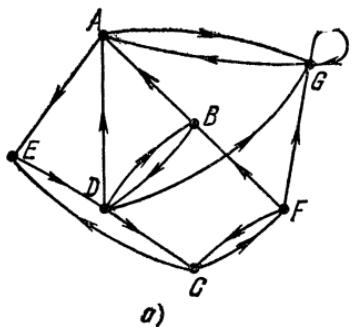
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1				1				
2				1					
3		1							
4			1						
5				1		1			
6					1				
7	1								
8			1						
9				1					

б)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$
$X_1$	1				1					
$X_2$			1	1	1				1	
$X_3$	1					1				
$X_4$				1	1	1	1			
$X_5$						1				
$X_6$					1		1			
$X_7$						1	1	1		
$X_8$						1				
$X_9$		1				1				1
$X_{10}$		1			1			1	1	1

в)

27Г. Для графа а) пересчитать пути длины 1, 2, ..., 7, а для графа б) — пути длины 1, 2, ..., 9.



а)

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$
$a$	1								
$b$			1			1			
$c$							1		
$d$		1							
$e$					1				
$f$						1			
$g$							1		
$h$		1						1	
$i$									1

б)

27Д. Используя метод булевых матриц, указать способ пересчета контуров в графе.

## § 28. Порядковая функция графа без контуров

Рассмотрим граф без контуров  $G = (E, \Gamma)$  и определим подмножества  $N_0, N_1, \dots, N_r^{-1}$ :

$$N_0 = \{X_i \mid X_i \in E, \Gamma^{-1}X_i = \emptyset\}, \quad (28.1)$$

$$N_1 = \{X_i \mid X_i \in E - N_0, \Gamma^{-1}X_i \subset N_0\},$$

<sup>1)</sup> Иногда порядковая функция вводится с помощью  $\Gamma$  (а не  $\Gamma^{-1}$  как ниже). Это приводит к другому порядку уровней.

$$\mathbf{N}_2 = \{X_i \mid X_i \subseteq \mathbf{E} - (\mathbf{N}_0 \cup \mathbf{N}_1), \quad \Gamma^{-1}X_i \subset \mathbf{N}_0 \cup \mathbf{N}_1\}, \quad \dots \quad (28.1)$$

$$\mathbf{N}_r = \left\{ X_i \mid X_i \subseteq \mathbf{E} - \bigcup_{k=0}^{r-1} \mathbf{N}_k, \quad \Gamma^{-1}X_i \subset \bigcup_{k=0}^{r-1} \mathbf{N}_k \right\},$$

где  $r$  — такое наименьшее целое число, что

$$\Gamma \mathbf{N}_r = \emptyset. \quad (28.2)$$

Легко показать, что подмножества  $\mathbf{N}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, r$ , образуют разбиение  $\mathbf{E}$  и вполне упорядочены отношением

$$\mathbf{N}_k \rightarrow \mathbf{N}_{k'} \Leftrightarrow k < k'. \quad (28.3)$$

Функция  $O(X)$ , определенная равенством

$$X_i \in \mathbf{N}_k \Rightarrow O(X_i) = k, \quad (28.4)$$

называется *порядковой функцией графа без контуров*.

Другими словами, предлагаются разбить множество вершин графа без контуров на непересекающиеся подмножества, упорядоченные так, что если вершина принадлежит подмножеству с номером  $k$ , то следующая за ней вершина входит в подмножество с номером, большим  $k$ .

Подмножества этого разбиения называются *уровнями*.

Пример. На рис. 111 показаны уровни, на которые разлагается множество вершин графа на рис. 110. Каждой вершине  $X_i$  этого графа соответствует некоторое  $\mathbf{N}_k$ , т. е. некоторое  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$ . Эта порядковая функция  $X_i \rightarrow k$  задается таблицей

Вершина	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$	$I$	$J$	$K$	$L$	$M$	$N$
Уровень	2	1	5	4	0	3	2	0	1	1	4	4	4	2

Порядковую функцию графа без контуров можно определить различными способами; в качестве начального множества можно взять произвольное множество вершин, содержащее  $\mathbf{N}_0$ . Порядковая функция позволяет перенумеровать вершины так, что вершины уровня  $\mathbf{N}_i$  имеют номера меньше, чем вершины уровня  $\mathbf{N}_{i+1}$  (рис. 112). Порядковая функция играет важную роль во многих комбинаторных задачах.

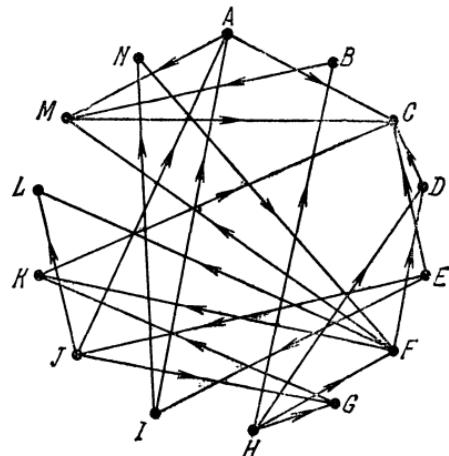


Рис. 110.

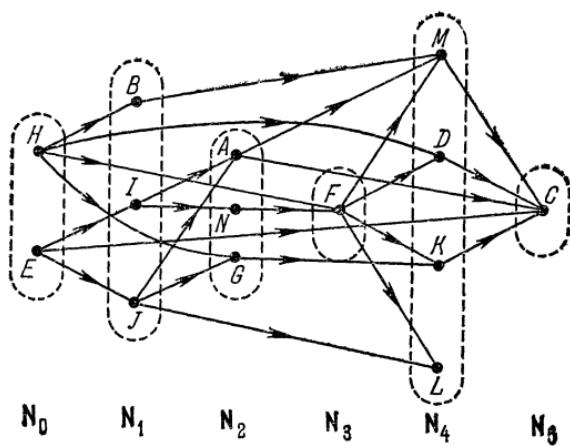
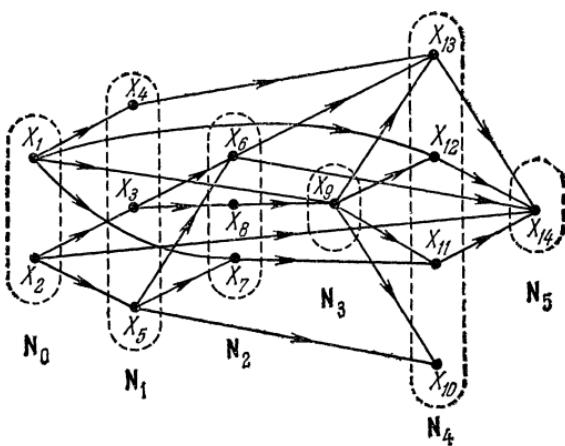


Рис. 111.



*Порядок возрастания уровней*

Рис. 112.

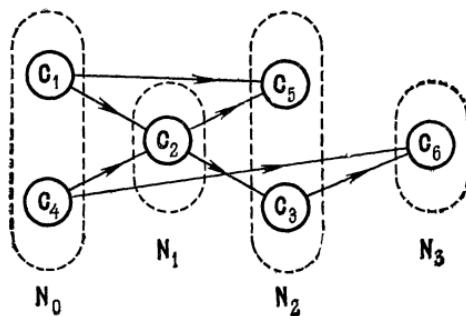


Рис. 113

**Понятие порядковой функции для графов с контурами. Порядковая функция классов графа.** Рассмотрим классы графа (максимальные сильно связные подмножества). Как мы видели в

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
A			1										1	
B													1	
C														
D			1											
E			1						1	1				
F			1								1	1	1	
G											1			
H	1		1		1	1								
I	1												1	
J	1						1					1		
K			1											
L														
M			1											
N						1								

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
$\Lambda_0$	2	1	5	2	0	2	2	0	1	1	2	2	3	1
$\Lambda_1$	2	0	4	1	$\times$	1	1	$\times$	0	0	2	2	3	1
$\Lambda_2$	0	$\times$	4	1	$\times$	1	0	$\times$	$\times$	$\times$	2	1	2	0
$\Lambda_3$	$\times$	$\times$	3	1	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	1	1	1	$\times$
$\Lambda_4$	$\times$	$\times$	3	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	0	0	$\times$
$\Lambda_5$	$\times$	$\times$	0	$\times$										

Рис. 114.

$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$
$B$	$A$		$D$		
$E$	$I$	$G$	$F$	$K$	$C$
$H$	$J$	$N$		$L$	

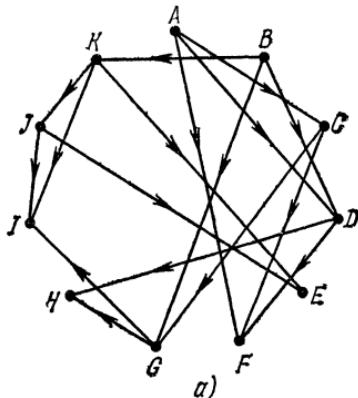
предыдущем параграфе, эти классы упорядочены и граф классов не имеет контуров, и поэтому можно определить уровни. Например, на рис. 113 показаны уровни для графа классов на рис. 96.

**Способ<sup>1)</sup> нахождения уровней графа без контуров.** Для графа на рис. 110 выпишем его булеву матрицу (рис. 114). Образуем строку  $\Lambda_0$ , выписывая для каждой вершины количество предшествующих ей вершин. В качестве уровня  $N_0$  берем  $E$  и  $H$  (им не предшествует никакая вершина). Затем выписываем строку  $\Lambda_1$ : на местах  $E$  и  $H$  ставим  $X$ , а на остальных — количество вершин, предшествующих данной, исключая  $E$  и  $H$ . Вершины, которым соответствуют нули в строке  $\Lambda_1$ , составляют уровень  $N_1$ . Далее выписываем тем же способом  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_3$ , ... и соответствующие уровни  $N_2$ ,  $N_3$ , ... до тех пор, пока это возможно. Тем самым вершины графа распределяются по уровням, как на рис. 111.

Если график содержит контур, то обязательно появится строка  $\Lambda_i$  без нулей. Отсюда следует, что описанный способ дает возможность установить наличие контуров в графике.

### УПРАЖНЕНИЯ

**28А.** Указать порядковую функцию для следующих графов без контуров при условии, что уровень  $N_0$  образует вершины, для которых  $\Gamma^{-1}X_i = \emptyset$ :



а)

$$\begin{aligned}\Gamma A &= \{E\}, \\ \Gamma B &= \{A\}, \\ \Gamma C &= \{A, I\}, \\ \Gamma D &= \{C, G\}, \\ \Gamma E &= \emptyset, \\ \Gamma F &= \{B, G, H, I\}, \\ \Gamma G &= \{B, H\}, \\ \Gamma H &= \{I, J\}, \\ \Gamma I &= \{J\}, \\ \Gamma J &= \emptyset, \\ \Gamma K &= \{A, C, E\},\end{aligned}$$

б)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_1$								
$X_2$		X				X		X
$X_3$					X			
$X_4$							X	
$X_5$								X
$X_6$		X		X				
$X_7$								
$X_8$								

в)

<sup>1)</sup> Способ предложен Демукроном (M. Demoucron).

**28Б.** То же, что и в упражнении 28А, только  $N_0$  образуют вершины, для которых  $\Gamma X_i = \emptyset$ .

**28В.** Рассмотрим граф *a*) из упражнения 28А. Существуют ли порядковые функции для графов, получающихся из этого графа добавлением дуг: 1)  $(F, K)$ ,  $(J, G)$ ,  $(H, F)$ ; 2)  $(K, F)$ ,  $(J, G)$ ,  $(E, I)$ ; 3)  $(H, F)$ ,  $(F, J)$ ?

**28Г.** Определить порядковую функцию  $N_0 = \{X_i \mid \Gamma^{-1} X_i = \emptyset\}$  графа  $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$ :

$$\mathbf{E} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R\},$$

$$\mathbf{U} = \{(A, H), (A, I), (B, O), (B, P), (C, A), (C, P), (D, K), (E, N), (E, Q), (F, B), (F, C), (F, E), (F, N), (G, L), (H, I), (I, J), (K, J), (L, I), (L, K), (M, D), (M, L), (M, R), (N, L), (N, M), (O, G), (O, M), (P, O), (P, Q), (Q, N), (R, K)\}.$$

## § 29. Функция Гранди

Рассмотрим граф  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  и функцию  $g$ , сопоставляющую каждой вершине  $X_i \in \mathbf{E}$  целое число  $g(X_i) \geq 0$ .

Будем говорить, что  $g(X)$  есть *функция Гранди* для графа  $G$ , если в каждой вершине  $X_i$  значение  $g(X_i)$  представляет собой наименьшее из тех целых неотрицательных чисел, которые не принадлежат множеству

$$\{g(X_j) \mid X_j \in \Gamma X_i\}, \quad (29.1)$$

и

$$g(X_i) = 0, \text{ если } \Gamma X_i = \emptyset. \quad (29.2)$$

Итак, для произвольной вершины  $X_i$  имеем  $g(X_i) = 0$ , если  $\Gamma X_i = \emptyset$ , и если  $\Gamma X_i \neq \emptyset$ , то  $g(X_i)$  равно наименьшему неотрицательному целому числу, не сопоставленному никакой из вершин в  $\Gamma X_i$ .

Построим функцию  $g(X)$  для графа на рис. 115 следующим образом:

(1)	(2)	(3)	(4)
$X_i$	$\Gamma X_i$	$g(X_i)$	
$A$	$\{B, D, F\}$	2	$g(B) = 0, g(D) = 1, g(F) = 1$
$B$	$\emptyset$	0	
$C$	$\{G\}$	1	$g(G) = 0$
$D$	$\{B\}$	1	$g(B) = 0$
$E$	$\{B, K\}$	1	$g(B) = 0, g(K) = 0$
$F$	$\{G\}$	1	$g(G) = 0$
$G$	$\emptyset$	0	
$H$	$\{B\}$	1	$g(B) = 0$
$I$	$\{A, D, K\}$	3	$g(A) = 2, g(D) = 1, g(K) = 0$
$J$	$\{A\}$	0	$g(A) = 2$
$K$	$\{C, H\}$	0	$g(G) = 1, g(H) = 1$

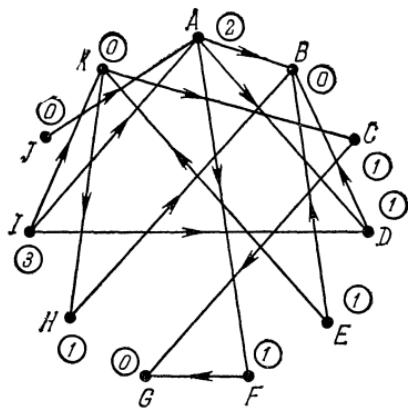


Рис. 115.

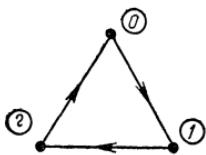


Рис. 116.

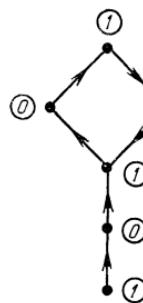


Рис. 117.

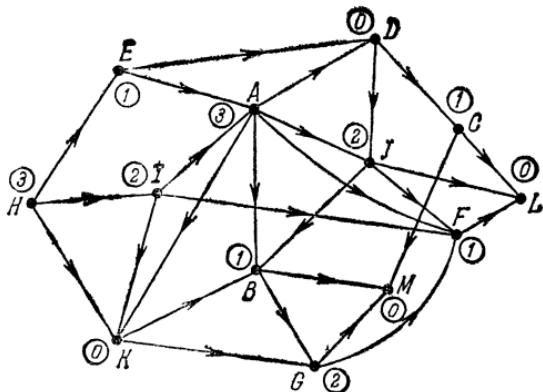


Рис. 118.

Легко убедиться, сравнивая в таблице столбцы (3) и (4), что  $g(X)$  — функция Гранди. Не всякий граф обладает функцией Гранди. Например, граф на рис. 116 не обладает такой функцией. Функция Гранди не всегда определяется однозначно (рис. 117).

Для графа без контуров каждой порядковой функции (она всегда существует) однозначно сопоставляется функция Гранди, если начать с того, что приписать нуль вершинам, из которых не исходит никакая дуга. Рассмотрим, например, граф на рис. 118. Порядковая функция этого графа, изображенная на

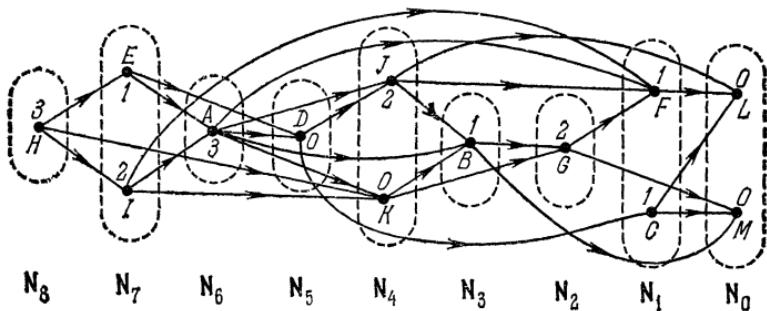
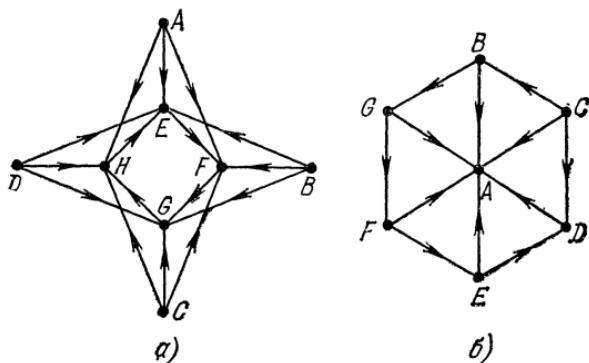


Рис. 119.

рис. 119, получается «удалением потомков». Вершинам уровня  $N_0$  приписывается 0, вершинам уровня  $N_1$  приписывается 1, вершинам уровня  $N_2$  приписывается 2, так как следующим за  $G$  вершинам  $F$  и  $M$  приписаны значения 0 и 1. Вершине  $B$  уровня  $N_3$ , предшествующей вершинам  $G$  и  $M$ , следует приписать значение 1 и т. д.

### УПРАЖНЕНИЯ

- 29А. Указать функции Гранди для графов из упражнения 28А.  
 29Б. Указать функцию Гранди для графа из упражнения 28Г.  
 29В. Найти функцию Гранди для каждого из следующих графов:



Можно ли указать функцию Гранди для графов, которые получаются изменением направления всех дуг этих графов?

## § 30. Внутренняя устойчивость. Внешняя устойчивость

**Внутренне устойчивое подмножество.** Пусть задан граф  $G = (E, \Gamma)$ ; подмножество  $S \subset E$  называется *внутренне устойчивым*, если

$$S \cap \Gamma S = \emptyset. \quad (30.1)$$

Другими словами, никакие две вершины  $S$  не смежны. Если  $S' \subset S$ , то  $S'$  — также внутренне устойчивое подмножество.

Пример. Рассмотрим граф на рис. 120. Подмножества

$$S_1 = \{A, D, G\}, \quad S_2 = \{B, G\}, \quad S_3 = \{A, C, D, G\} \quad (30.2)$$

внутренне устойчивые. Проверим это, например, для  $S_1$ :

$$\Gamma A = \{B, E, F\}, \quad \Gamma D = \{E\}, \quad \Gamma G = \{H\},$$

$$\Gamma S_1 = \Gamma A \cup \Gamma D \cup \Gamma G = \{B, E, F, H\}, \quad (30.3)$$

$$S_1 \cap \Gamma S_1 = \{A, D, G\} \cap \{B, E, F, H\} = \emptyset.$$

**Максимальное внутренне устойчивое подмножество.** Это — внутренне устойчивое подмножество, не являющееся собственным подмножеством никакого другого внутренне устойчивого подмножества.

Например (рис. 121 и 122), подмножества  $\{A, C, D, G\}$  и  $\{C, E, H\}$  максимальные внутренне устойчивые. Очевидно, что

граф может обладать несколькими максимальными внутренне устойчивыми подмножествами.

**Число внутренней устойчивости.** Это число вершин наибольшего из внутренне устойчивых подмножеств. Оно обозначается

$$\alpha(G) = \max_{S_i \in \Sigma} |S_i|, \quad (30.4)$$

где  $\Sigma$  — семейство максимальных внутренне устойчивых подмножеств графа  $G$ . Например, для графа на рис. 120  $\alpha(G) = 4$ .

**Отыскание семейства максимальных внутренне устойчивых подмножеств (метод Magy<sup>1</sup>).** Этот метод использует свойства булевых уравнений<sup>2</sup>.

Будем рассматривать графы без петель, так как вершина, имеющая петлю, не может принадлежать внутренне устойчивому подмножеству.

<sup>1</sup>) Магу (K. M a g h o u t), Applications de l'Algèbre de Boole a la Théorie des Graphes, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, Bruxelles 5, № 1—2 (1963), 21.

<sup>2</sup>) См. Папен, Кофман и Фор (M. D. Papin, A. Kaufmann, R. Faugue), Cours de calcul booléen appliqué, Ed. Albin Michel, Paris, 1963.

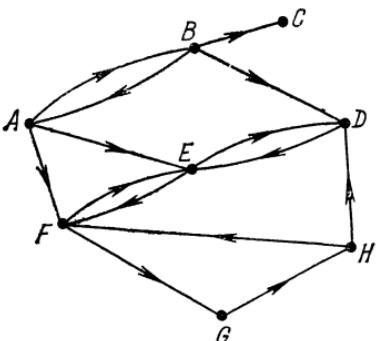


Рис. 120.

Пусть  $S$  — некоторое внутренне устойчивое подмножество. Свяжем с любой вершиной  $X_i$  графа булеву переменную  $x_i$  и положим:

- если  $X_i \notin S$ , то  $\bar{x}_i = 1$  или  $x_i = 0$ ,
  - если  $X_j \in \Gamma X_i$ ,  $j \neq i$ , то  $a_{ij} = 1$ ;
  - если  $X_j \notin \Gamma X_i$ ,  $j \neq i$ , то  $a_{ij} = 0$ .
- (30.5)

Для любой пары вершин  $X_i$  и  $X_j$  (с учетом (30.1)) справедливо утверждение

$$(i \neq j; X_i \in \Gamma X_j \text{ или } *) \quad X_j \in \Gamma X_i \Rightarrow (X_i \notin S \text{ или } X_j \notin S). \quad (30.6)$$

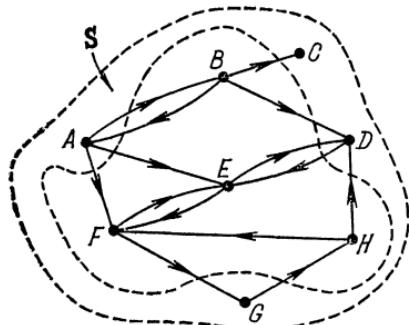


Рис. 121.

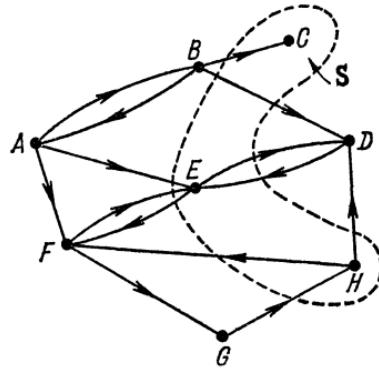


Рис. 122.

Это можно записать так:

$$i \neq j, \quad (\overline{a_{ij}} + a_{ji}) + \bar{x}_i + \bar{x}_j = 1 \quad (30.7)$$

или

$$i \neq j, \quad \bar{a}_{ij} \bar{a}_{ji} + \bar{x}_i + \bar{x}_j = 1. \quad (30.8)$$

Беря произведение по всем вершинам графа, получаем уравнение

$$\Phi_S = \prod_i \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} \bar{a}_{ji} + \bar{x}_i + \bar{x}_j) = 1 **. \quad (30.9)$$

Учитывая, что  $S \cap \Gamma^{-1}S = \emptyset$ , упростим эту формулу:

$$\Phi_S = \prod_i \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_i + \bar{x}_j) = 1 \quad (30.10)$$

или

$$\Phi_S = \prod_i [\bar{x}_i + \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j)] = 1. \quad (30.11)$$

\*) Здесь и далее имеется в виду неисключающее «или». (Прим. ред.)

\*\*)  $\dot{\prod}$  обозначает здесь и далее булево произведение (каждый член учитывается один раз). (Прим. перев.)

В (30.11) раскроем скобки и приведем подобные члены, учитывая, что  $a + ab = a$ . Тогда для каждого члена совокупность всех вершин, соответствующих переменным, отсутствующим в нем, дает максимальное внутренне устойчивое подмножество графа. Действительно, такой член содержит лишь переменные с отрицанием и поэтому к множеству вершин  $X_i$ , соответствующих переменным  $x_i$ , не встречающимся в этом члене, нельзя добавить никакой другой.

Пример. Рассмотрим булеву матрицу (рис. 123) графа на рис. 120. Найдем

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>A</i>	1				1	1		
<i>B</i>	1		1	1				
<i>C</i>								
<i>D</i>					1			
<i>E</i>				1		1		
<i>F</i>					1		1	
<i>G</i>								1
<i>H</i>			1		1			

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{AB} + \bar{a} + \bar{b} &= \bar{a} + \bar{b}, \\
 \bar{a}_{AC} + \bar{a} + \bar{c} &= 1, \\
 \bar{a}_{AD} + \bar{a} + \bar{d} &= 1, \\
 \bar{a}_{AE} + \bar{a} + \bar{e} &= \bar{a} + \bar{e}, \\
 \bar{a}_{AF} + \bar{a} + \bar{f} &= \bar{a} + \bar{f}, \\
 \bar{a}_{AG} + \bar{a} + \bar{g} &= 1, \\
 \bar{a}_{AH} + \bar{a} + \bar{h} &= 1, \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{30.12}$$

Рис. 123.

Подставим в (30.10):

$$\Phi_S = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{e})(\bar{a} + \bar{f})(\bar{b} + \bar{c})(\bar{b} + \bar{d})(\bar{d} + \bar{e}) \times \\
 \times (\bar{e} + \bar{f})(\bar{f} + \bar{g})(\bar{g} + \bar{h})(\bar{h} + \bar{d})(\bar{h} + \bar{f}) = 1. \tag{30.13}$$

Упрощая, получаем

$$\Phi_S = (\bar{a} + \bar{b}\bar{e}\bar{f})(\bar{b} + \bar{c}\bar{d})(\bar{d} + \bar{e})(\bar{e} + \bar{f}) \times \\
 \times (\bar{f} + \bar{g})(\bar{g} + \bar{h})(\bar{h} + \bar{d}\bar{f}) = 1, \tag{30.14}$$

или

$$\Phi_S = \bar{b}\bar{e}\bar{f}\bar{h} + \bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{f}\bar{g} + \bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{f}\bar{h} + \bar{a}\bar{b}\bar{e}\bar{g}\bar{h} + \\
 + \bar{a}\bar{c}\bar{d}\bar{f}\bar{g} + \bar{a}\bar{c}\bar{d}\bar{f}\bar{h} + \bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g} + \bar{a}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{g}\bar{h} = 1. \tag{30.15}$$

Таким образом, граф обладает восемью максимальными внутренне устойчивыми подмножествами:

$$\begin{aligned}
 &\{A, C, D, G\}, \quad \{C, E, H\}, \quad \{C, E, G\}, \quad \{C, D, F\}, \\
 &\{B, E, H\}, \quad \{B, E, G\}, \quad \{A, C, H\}, \quad \{B, F\}.
 \end{aligned} \tag{30.16}$$

**Внешне устойчивое подмножество.** Пусть задан граф  $G = (E, \Gamma)$ . Подмножество  $T \subset E$  называется внешне устойчивым, если

$$(\forall X_i \notin T) T \cap \Gamma X_i \neq \emptyset, \tag{30.17}$$

т. е. любая вершина  $X_i$ , не принадлежащая  $\mathbf{T}$ , связана по крайней мере с одной вершиной из  $\mathbf{T}$  дугой, начало которой лежит в  $\mathbf{E} - \mathbf{T}$ . Можно записать (30.17) также в следующем виде:

$$(\forall X_i \in \mathbf{E})[\{X_i\} \cup \Gamma X_i] \cap \mathbf{T} \neq \emptyset. \quad (30.18)$$

Пример (рис. 124). Подмножество  $\{C, D, E, F, H\}$  внешне устойчивое, что легко проверяется с помощью (30.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \{C, D, E, F, H\}, \quad \Gamma A = \{B, E, F\}, \quad \Gamma B = \{A, C, D\}, \\ \Gamma G &= \{H\}, \quad \mathbf{T} \cap \Gamma A = \{E, F\} \neq \emptyset, \\ T \cap \Gamma B &= \{C, D\} \neq \emptyset, \quad \mathbf{T} \cap \Gamma G = \{H\} \neq \emptyset, \end{aligned} \quad (30.19)$$

или с помощью (30.18):

$$\begin{aligned} (\{A\} \cup \Gamma A) \cap \mathbf{T} &= \{A, B, E, F\} \cap \mathbf{T} = \{E, F\} \neq \emptyset, \\ (\{B\} \cup \Gamma B) \cap \mathbf{T} &= \{A, B, C, D\} \cap \mathbf{T} = \{C, D\} \neq \emptyset, \\ (\{C\} \cup \Gamma C) \cap \mathbf{T} &= \{C\} \cap \mathbf{T} = \{C\} \neq \emptyset, \\ (\{D\} \cup \Gamma D) \cap \mathbf{T} &= \{D, E\} \cap \mathbf{T} = \{D, E\} \neq \emptyset, \\ (\{E\} \cup \Gamma E) \cap \mathbf{T} &= \{D, E, F\} \cap \mathbf{T} = \{D, E, F\} \neq \emptyset, \\ (\{F\} \cup \Gamma F) \cap \mathbf{T} &= \{E, F, G\} \cap \mathbf{T} = \{E, F\} \neq \emptyset, \\ (\{G\} \cup \Gamma G) \cap \mathbf{T} &= \{G, H\} \cap \mathbf{T} = \{H\} \neq \emptyset, \\ (\{H\} \cup \Gamma H) \cap \mathbf{T} &= \{D, F, H\} \cap \mathbf{T} = \{D, F, H\} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (30.20)$$

Очевидно, что если  $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}' \subset \mathbf{E}$ , то  $\mathbf{T}'$  — внешне устойчивое подмножество; и любая висячая<sup>1)</sup> вершина принадлежит каждому внешне устойчивому подмножеству.

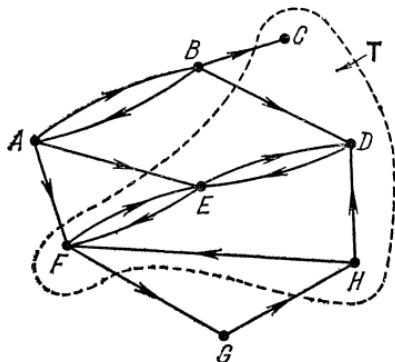


Рис. 124.

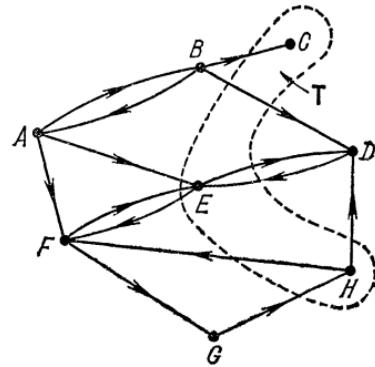


Рис. 125.

**Минимальное внешне устойчивое подмножество.** Это — внешне устойчивое подмножество, не содержащее строго никакого другого внешне устойчивого подмножества.

<sup>1)</sup> Вершина  $X_i$  висячая, если  $\Gamma X_i = \emptyset$ . На рис. 124 таковой является вершина  $C$ .

Например, для графа на рис. 125 подмножество  $\{C, E, H\}$  внешне устойчивое и минимальное. Граф может обладать несколькими минимальными внешне устойчивыми подмножествами.

**Число внешней устойчивости.** Это число вершин наименьшего из внешне устойчивых подмножеств. Оно определяется так:

$$\beta(G) = \min_{T_i \in \Theta} |T_i|, \quad (30.21)$$

где  $\Theta$  — семейство внешне устойчивых подмножеств графа  $G$ .

Например, для графа на рис. 125  $\beta(G) = 3$ .

**Отыскание семейства минимальных внешне устойчивых подмножеств (метод Magy)<sup>1)</sup>.** Из условия (30.18) следует, что такое подмножество  $T$  должно содержать вместе с  $X_i$  по крайней мере одну из вершин  $\Gamma X_i$ . Следовательно, справедливо условие

$$(\forall X_i \in E)(X_i \subseteq T \text{ или } (\exists X_j)(X_j \subseteq T \text{ и } X_j \subseteq \Gamma X_i)). \quad (30.22)$$

Полагая  $x_i = 1$ , если  $X_i \subseteq T$  и  $a_{ii} = 1$  ( $a_{ij}$  определено выше), имеем

$$\prod_i (x_i + \sum_j a_{ij}x_j) = 1. \quad (30.23)$$

Так как

$$(\forall x_i) x_i + \sum_j a_{ij}x_j = \sum_j a_{ij}x_j, \quad (30.24)$$

то

$$\Phi_T = \prod_i \sum_j a_{ij}x_j = 1. \quad (30.25)$$

Учитывая, что  $a + ab = a$ , разложим (30.25). Каждый член этого разложения дает минимальное внешне устойчивое подмножество. Действительно, такой член не содержит переменных с отрицанием, и поэтому из множества вершин  $X_i$ , соответствующим переменным  $x_i$ , встречающихся в этом члене, нельзя удалить ни одну.

Пример (рис. 120 и 123). Так как

$$a_{AA}a + a_{AB}b + a_{AE}e + a_{AF}f = a + b + e + f,$$

$$a_{BA}a + a_{BB}b + a_{BC}c + a_{BD}d = a + b + c + d,$$

$$a_{CC}c = c, \quad a_{DD}d + a_{DE}e = d + e,$$

$$a_{ED}d + a_{EE}e + a_{EF}f = d + e + f, \quad a_{FE}e + a_{FF}f + a_{FG}g = e + f + g, \quad a_{GG}g + a_{GH}h = g + h, \quad a_{HD}d + a_{HF}f + a_{HH}h = d + f + h, \quad (30.26)$$

то в силу (30.25)

$$\begin{aligned} \Phi_T = & (a + b + e + f)(a + b + c + d)c(d + e + f) \times \\ & \times (e + f + g)(g + h)(d + f + h) = 1. \end{aligned} \quad (30.27)$$

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 180,

Упрощая, имеем

$$\Phi_T = (a + b + e + f)c(d + e)(e + f + g)(g + h)(d + f + h) = 1, \quad (30.28)$$

или

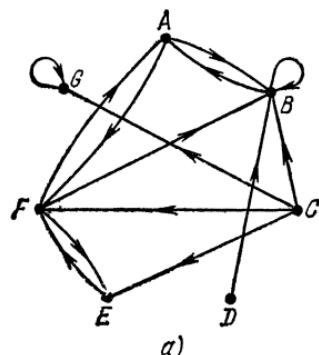
$$\Phi_T = ceh + acdg + cd़eg + cd़fg + cd़fh + cefg + bc़dg = 1. \quad (30.29)$$

Таким образом, граф обладает семью минимальными внешне устойчивыми подмножествами:

$$\begin{aligned} & \{C, E, H\}, \{A, C, D, G\}, \{C, D, E, G\}, \{C, D, F, G\}, \\ & \{C, D, F, H\}, \{C, E, F, G\}, \{B, C, D, G\}. \end{aligned} \quad (30.30)$$

### УПРАЖНЕНИЯ

**30А.** По методу Магу выписать все максимальные внутренне устойчивые подмножества и вычислить  $\alpha(G)$  для графов:



	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2	■			■			■	
3								
4								
5								
6								
7	■			■	■			
8								

b)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2		■						
3			■					
4							■	
5								■
6								
7					■	■		
8								

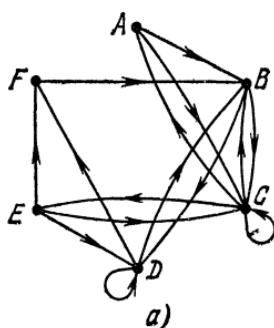
c)

$$\begin{aligned} \Gamma A &= \{B, D, F\}, \\ \Gamma B &= \{C\}, \\ \Gamma C &= \{B, F\}, \\ \Gamma D &= \{E\}, \\ \Gamma E &= \{A, D, F\}, \\ \Gamma F &= \{B\}. \end{aligned}$$

c)

e)

30Б. По методу Магу выписать все минимальные внешне устойчивые подмножества и вычислить  $\beta(G)$  для графов:

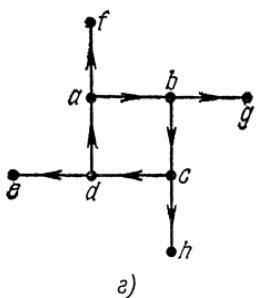


	1	2	3	4	5
1	■				
2		■			■
3			■		
4				■	
5					■
6					

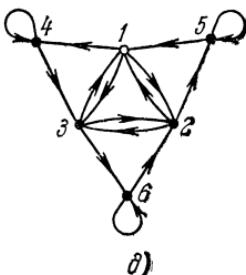
б)

	1	2	3	4	5	6
1	■					
2		■				
3			■			
4				■		
5					■	
6						■

в)



г)



д)

### § 31. Ядра графа

Пусть задан граф  $G = (E, \Gamma)$ . Подмножество  $N \subset E$  называется ядром графа  $G$ , если  $N$  — одновременно внутренне и внешне устойчивое множество, т. е.

$$(\forall X_i \in N) N \cap \Gamma X_i = \emptyset, \quad (31.1)$$

$$(\forall X_i \notin N) N \cap \Gamma X_i \neq \emptyset. \quad (31.2)$$

Отсюда следует, что ядро содержит всякую вершину  $X_i$  с  $\Gamma X_i = \emptyset$  и не содержит вершин с петлями. Очевидно, что  $\emptyset$  не есть ядро графа.

Граф может обладать несколькими ядрами или вообще не иметь ядра.

Например, подмножество  $\{A, C, D, G\}$  — ядро графа на рис. 126, а  $\{C, E, H\}$  — ядро графа на рис. 127.

**Отыскание ядер графа. Метод Магу<sup>1</sup>.** Полагаем  $x_i = 1$ , если  $X_i \in N$ , и рассмотрим уравнения  $\Phi_S = 1$  и  $\Phi_T = 1$  из (30.11) и (30.25) соответственно. Так как эти равенства должны выполняться, то

$$\Phi_N = \Phi_S \Phi_T = 1, \quad (31.3)$$

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 180. Если граф обладает петлями, то можно рассмотреть соответствующий граф без петель.

T. e.

$$\left( \prod_i [\bar{x}_i + \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j)] \right) \left( \prod_i \sum_j a_{ij} x_j \right) = 1 \quad (31.4)$$

или

$$\prod_i \left[ \bar{x}_i \sum_j a_{ij} x_j + x_i \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j) \right] = 1. \quad (31.5)$$

Пример (рис. 120). Для этого графа  $\Phi_s$  и  $\Phi_t$  вычислены ранее (см. (30.15) и (30.29)). Итак, находим

$$\bar{a}(a + b + e + f) + a(\bar{b}\bar{e}\bar{f}) = \bar{a}(b + e + f) + a(\bar{b}\bar{e}\bar{f}),$$

$$\bar{b}(a + b + c + d) + b(\bar{a}\bar{c}\bar{d}) = \bar{b}(a + c + d) + b(\bar{a}\bar{c}\bar{d}), \quad (31.6)$$

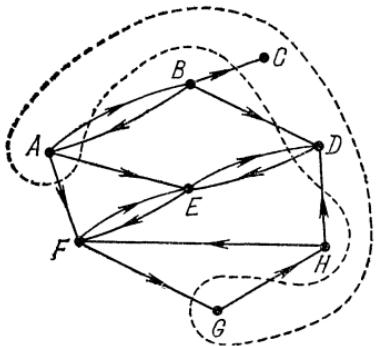


Рис. 126.

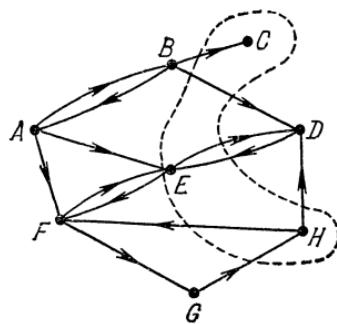


Рис. 127.

(замечая, что  $x_i \bar{x}_i = 0$ );

$$\Phi_S \Phi_T = a\bar{b}c\bar{d}\bar{e}\bar{f}g\bar{h} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}e\bar{f}\bar{g}h = 1. \quad (31.7)$$

Итак, граф обладает двумя ядрами:

$$\mathbf{N}_1 = \{A, C, D, G\} \text{ и } \mathbf{N}_2 = \{C, E, H\}. \quad (31.8)$$

**Свойства ядер графа.** Эти свойства будем рассматривать в виде теорем.

**Теорема I.** Пусть задан граф  $G = (E, \Gamma)$ . Ядро  $N$  графа  $G$  есть максимальное внутренне устойчивое подмножество.

Предположим, что  $N$  — собственное подмножество максимального внутренне устойчивого множества  $A$ . Тогда существует вершина  $X_i \in A$  и  $X_i \notin N$ . Следовательно,  $N \cap \Gamma X_i \neq \emptyset$  и  $A \cap \Gamma X_i \neq \emptyset$ . Отсюда следует, что  $A$  не является внутренне устойчивым подмножеством, вопреки предположению. Итак,  $N$  совпадает с  $A$ .

**Теорема II.** Пусть задан симметрический граф  $G = (E, \Gamma)$  без петель. Тогда любое максимальное внутренне устойчивое подмножество является ядром  $G$ .

Рассмотрим максимальное внутренне устойчивое подмножество  $S_m$ . Требуется показать, что для произвольной вершины

$X_i \notin S_M$  справедливо соотношение  $S_M \cap \Gamma X_i \neq \emptyset$ . Предположим противное. Тогда множество  $A = S_M \cup \{X_i\}$  внутренне устойчивое, так как  $X_i \notin \Gamma X_i$ , что противоречит максимальности  $S_M$ .

Теорема III. Пусть задан граф  $G = (E, \Gamma)$  без петель. Для того чтобы подмножество  $N$  было ядром, необходимо и достаточно, чтобы оно было одновременно максимальным внутренне устойчивым и минимальным внешне устойчивым.

Пусть график имеет ядро. Как мы видели раньше (см. (31.3)), условие

$$\Phi_S \Phi_T = 1 \quad (31.9)$$

необходимо, чтобы график допускал ядро. Первая из этих функций представляет собой сумму одночленов только от переменных с отрицанием, а вторая — только от переменных без отрицания.

Пусть  $\Phi_S^{(u)}$  и  $\Phi_T^{(v)}$  — некоторые одночлены из  $\Phi_S$  и  $\Phi_T$  соответственно. Если выполнено (31.9), то

$$|\Phi_S^{(u)}| + |\Phi_T^{(v)}| = |E|. \quad (31.10)$$

Следовательно, ядро, для которого  $\Phi_S^{(u)} \Phi_T^{(v)} = 1$ , — одновременно максимальное внутренне устойчивое и минимальное внешне устойчивое подмножество.

Обратно, пусть задано подмножество, являющееся одновременно максимальным внутренне устойчивым и минимальным

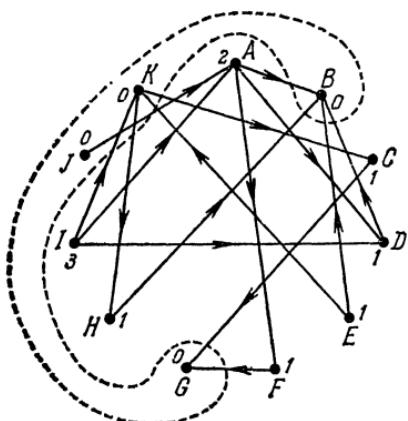


Рис. 128.

внешне устойчивым. Тогда для соответствующих переменных, связанных с его элементами, выполняется соотношение  $\Phi_S^{(u)} \Phi_T^{(v)} = 1$ , т. е. это подмножество — ядро графа.

Теорема IV. Для ядра  $N$  графа  $G = (E, \Gamma)$  выполняется неравенство

$$\beta(G) \leq |N| \leq \alpha(G). \quad (31.11)$$

Это следует из определения ядра.

Теорема V. Если график  $G = (E, \Gamma)$  допускает функцию Гранди  $g(X)$ , то подмножество

$$\{X_i \mid g(X_i) = 0\} \quad (31.12)$$

— ядро графа.

В самом деле, вершины, для которых  $g(X_i) = 0$ , удовлетворяют условиям (30.1) и (30.17).

Например, подмножество  $\{B, G, J, K\}$  — ядро графа на рис. 128 (функция Гранди этого графа построена ранее (см. рис. 115)).

**Теорема VI.** Симметрический граф без петель всегда допускает ядро.

Это — следствие теоремы II.

**Теорема VII.** Рассмотрим булеву функцию на множестве  $\mathbf{A}$ :

$$F(\mathbf{A}, X_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } X_i \notin \mathbf{A}, \\ 1, & \text{если } X_i \in \mathbf{A}. \end{cases} \quad (31.13)$$

*Условие*

$$F(\mathbf{A}, X_i) = 1 - \max_{X_j \in \Gamma X_i} F(\mathbf{A}, X_j) \quad (31.14)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы  $\mathbf{A}$  было ядром графа  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$ ,  $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ .

При этом полагаем

$$F(\mathbf{A}, \emptyset) = 0. \quad (31.15)$$

**Необходимость.** В самом деле, если  $\mathbf{A}$  — ядро, то в силу внутренней устойчивости

$$(F(\mathbf{A}, X_i) = 1) \Rightarrow (X_i \in \mathbf{A}) \Rightarrow (\max_{X_j \in \Gamma X_i} F(\mathbf{A}, X_j) = 0), \quad (31.16)$$

а в силу внешней устойчивости

$$(F(\mathbf{A}, X_i) = 0) \Rightarrow (X_i \notin \mathbf{A}) \Rightarrow (\max_{X_j \in \Gamma X_i} F(\mathbf{A}, X_j) = 1), \quad (31.17)$$

т. е. имеем (31.14).

**Достаточность.** Действительно, из (31.14) для  $\mathbf{A}$  имеем

$$(X_i \in \mathbf{A}) \Rightarrow (F(\mathbf{A}, X_i) = 1) \Rightarrow (\max_{X_j \in \Gamma X_i} F(\mathbf{A}, X_j) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{A} \cap \Gamma X_i = \emptyset, \quad (31.18)$$

$$(X_i \notin \mathbf{A}) \Rightarrow (F(\mathbf{A}, X_i) = 0) \Rightarrow (\max_{X_j \in \Gamma X_i} F(\mathbf{A}, X_j) = 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{A} \cap \Gamma X_i \neq \emptyset, \quad (31.19)$$

т. е.  $\mathbf{A}$  — ядро.

Теорема может быть также доказана с помощью метода Магу для нахождения ядер.

**Теорема VIII.** Граф без контуров всегда обладает ядром.

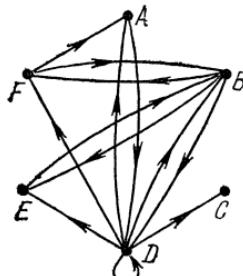
Для такого графа существует порядковая функция, а значит, функция Гранди и, следовательно, ядро (теорема V).

**Теорема IX** (Ричардсон). Граф, не имеющий контуров не четной длины, допускает ядро.

Доказательство приведено в [8], стр. 56.

# УПРАЖНЕНИЯ

**31А.** Методом Магу найти ядра графов:



а)

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

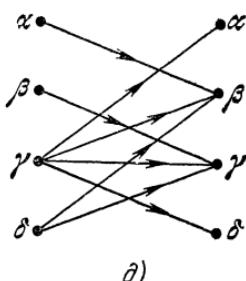
б)

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

в)

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	1	0
6	0	0	0	1	1	0	0
7	0	1	0	0	1	0	0

г)



д)

**31Б.** Пользуясь теоремой I, доказать, что подмножество  $\{A, B, C\}$  — максимальное внутренне устойчивое для графа  $G = (E, \Gamma)$ :

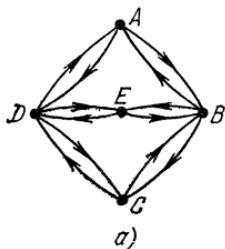
$$\Gamma A = \{D\}, \quad \Gamma B = \emptyset, \quad \Gamma C = \{E\}, \quad \Gamma D = \{A, F\},$$

$$\Gamma E = \{A, C, E, F\}, \quad \Gamma F = \{A, B, D\}.$$

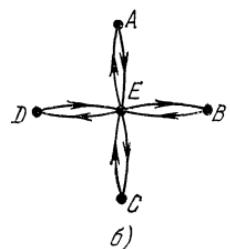
**31В.** Пользуясь теоремой II, показать, что подмножество  $\{A, B, C, E\}$  — ядро графа  $G = (E, \Gamma)$ :  $\Gamma A = \{D\}$ ,  $\Gamma B = \{D\}$ ,  $\Gamma C = \emptyset$ ,  $\Gamma D = \{A, B, E\}$ ,  $\Gamma E = \{D, F\}$ ,  $\Gamma F = \{E\}$ .

**31Г.** Обладают ли графы из упражнения 29В ядрами и если обладают, то единственными ли?

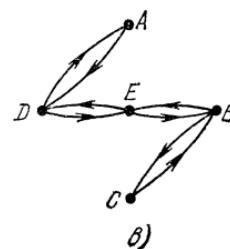
**31Д.** Найти ядра симметрических графов:



а)



б)



в)

**31Е.** Найти ядра графов из упражнения 28А.

## § 32. Основные понятия для неориентированных графов

**Ребро.** Ребром графа  $G = (E, U)$  называется такая пара элементов  $X_i$  и  $X_j$  ( $X_i \neq X_j$ ), что

$$(X_i, X_j) \in U \text{ или } (X_j, X_i) \in U. \quad (32.1)$$

Другими словами, ребро — это пара вершин, которые связаны одной дугой (в том или другом направлении) или двумя дугами (в обоих направлениях).

Ребро обозначается

$$\bar{u} = (\overline{X_i, X_j}) \quad (32.2)$$

или

$$\bar{u} = [X_i, X_j]. \quad (32.3)$$

Множество ребер графа обозначается через  $\bar{U}$ .

Множество вершин  $E$  вместе с множеством ребер  $\bar{U}$  определяют неориентированный граф, который обозначается через

$$\bar{G} = (E, \bar{U}). \quad (32.4)$$

Каждому графу  $G = (E, U)$  можно однозначно сопоставить неориентированный граф  $\bar{G} = (E, \bar{U})$ . Обратное, очевидно, неверно. Неориентированному графу  $\bar{G}$  соответствуют  $3^r 2^s$  различных графов  $G$ , где  $r$  — число ребер,  $s$  — число вершин.

Например, граф на рис. 129 имеет 14 дуг и 8 ребер.

**Цепь.** Цепью называется такая последовательность ребер  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots)$ , что каждое ребро  $\bar{u}_k$  соприкасается одним из концов с ребром  $\bar{u}_{k-1}$  (если оно существует), а другим — с  $\bar{u}_{k+1}$  (если оно существует). Цепь можно обозначить последовательностью вершин, которые она содержит. Можно рассматривать как конечные, так и бесконечные цепи.

Например, для графа на рис. 129

$$\{\overline{A, B, C, D, B}\} \text{ и } \{\overline{E, F, G}\} — \text{ цепи.} \quad (32.5)$$

**Длина цепи.** Длиной цепи называется число ребер, которые она содержит.

**Простая цепь. Элементарная цепь.** Эти понятия определяются точно так же, как соответствующие понятия для путей, только вместо дуг рассматриваются ребра.

**Цикл.** Циклом называется конечная цепь, которая начинается и заканчивается в одной и той же вершине.

Например, для графа на рис. 129 цепи  $(\overline{A, B, D, C, B, D, A})$ ,  $(\overline{B, C, D, B})$  и  $(\overline{E, F, G, E, F, G, E})$  являются циклами.

Понятие цикла графа не следует смешивать с понятием цикла, определенным в § 16 и относящимся к подстановкам.

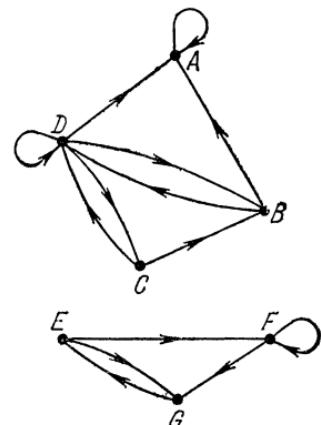


Рис. 129.

Иногда на множестве циклов графа рассматривают отношение эквивалентности, считая эквивалентными циклы, проходящие одни и те же вершины в одинаковом порядке. Например, для графа на рис. 129  $\overline{(B, C, D, B)} \simeq \overline{(C, D, B, C)} \simeq \overline{(D, B, C, D)}$ .

**Простой цикл.** Элементарный цикл. Эти понятия определяются точно так же, как соответствующие понятия для контуров, только вместо дуг рассматриваются ребра.

**Связный граф.** Граф  $G = (E, \Gamma)$  называется *связным*, если для всех  $X_i$  и  $X_j \in E$  ( $X_i \neq X_j$ ) всегда существует цепь из  $X_i$  в  $X_j$ .

Сильно связный граф всегда связан.

Например, граф на рис. 120 связный, не сильно связный, граф на рис. 129 — не связный.

**Компоненты связности графа.** Для вершины  $X_i$  обозначим через  $C_{X_i}$  совокупность вершин графа, которые можно соединить цепью с  $X_i$ . Компонентой связности  $G_{X_i}$  называется подграф графа  $G$ , порожденный  $C_{X_i}$ .

Например, граф  $G = (E, U)$  на рис. 129 имеет две компоненты связности:

$$G_1 = \{A, B, C, D\}, \quad G_2 = \{E, F, G\}. \quad (32.6)$$

Пусть  $G_1, G_2, \dots$  — компоненты связности, порожденные подмножествами вершин  $C_1, C_2, \dots$ . Тогда

$$1. (\forall i \forall j) C_i \neq C_j; \quad (32.7)$$

$$2. (\forall i \forall j) C_i \neq C_j \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset;$$

$$3. \bigcup_i C_i = E,$$

а также

$$\bigcup_{X_i \in E} C_{X_i} = E. \quad (32.8)$$

**Степень вершины.** Степенью вершины  $X_i$  называется число ребер, для которых одним из концов служит  $X_i$  (другой конец отличен от  $X_i$ ); она обозначается через  $d(X_i)$ . Например, для графа на рис. 129

$$d(B) = 3, \quad d(F) = 2, \quad d(E) = 2. \quad (32.9)$$

**Регулярный подграф степени  $d$ .** Подграф называется *регулярным* степени  $d$ , если степень каждой его вершины равна  $d$ .

Например, граф на рис. 130 имеет регулярный подграф  $G_A = (A, \Delta)$  степени 3, где  $A = \{A, B, D, F\}$ .

**Гамильтонова цепь.** Гамильтонов цикл. Эти понятия определяются точно так же, как соответствующие понятия для путей и контуров, только вместо дуг рассматриваются ребра.

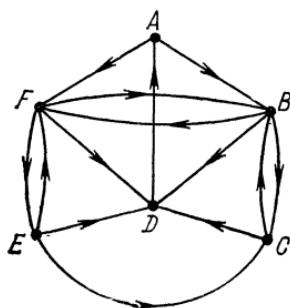


Рис. 130.

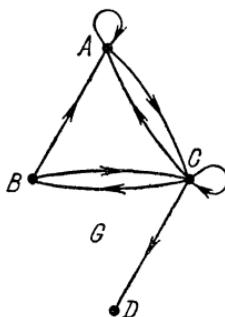


Рис. 131.

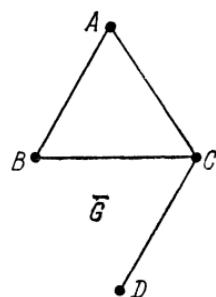


Рис. 132.

**Замечания относительно неориентированных графов.** 1) Как отмечалось, каждому графу  $G = (E, U)$  можно сопоставить неориентированный граф, если дуги заменить ребрами. Например, ориентированному графу на рис. 131, а также графу на рис. 133 сопоставляется один и тот же неориентированный граф на рис. 132. Не следует смешивать обозначения  $G = (E, U)$  и  $\bar{G} = (\bar{E}, \bar{U})$ .

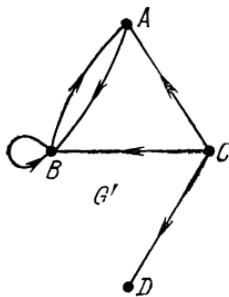


Рис. 133.

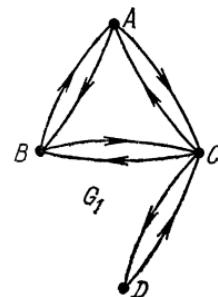


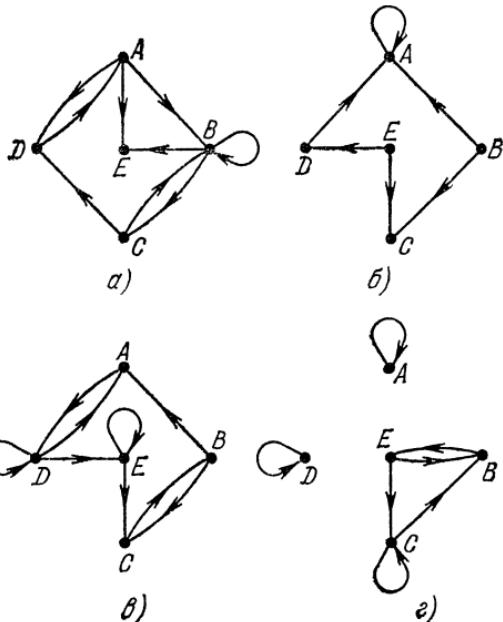
Рис. 134.

2) В некоторых случаях можно неориентированный граф не отличать от симметрического графа без петель, которому он соответствует (например, граф  $G_1$  на рис. 134 и граф  $\bar{G}$  на рис. 132). Но такое отождествление не всегда удобно и не всегда возможно. Понятие неориентированности не обязательно совпадает с понятием двусторонней ориентированности.

Например (как мы увидим в § 60), в транспортной сети симметрия некоторых дуг может сочетаться с несимметрией их пропускных способностей.

## УПРАЖНЕНИЯ

32А. Сопоставить неориентированные графы следующим ориентированным графикам:



32Б. Принимая за начальную вершину  $A$  в графах из упражнения 32А, перечислить и пересчитать цепи каждой из длин 1, 2, 3, 4, 5.

Для каждой цепи указать, является она простой, элементарной или циклом.

32В. Указать число компонент связности графов

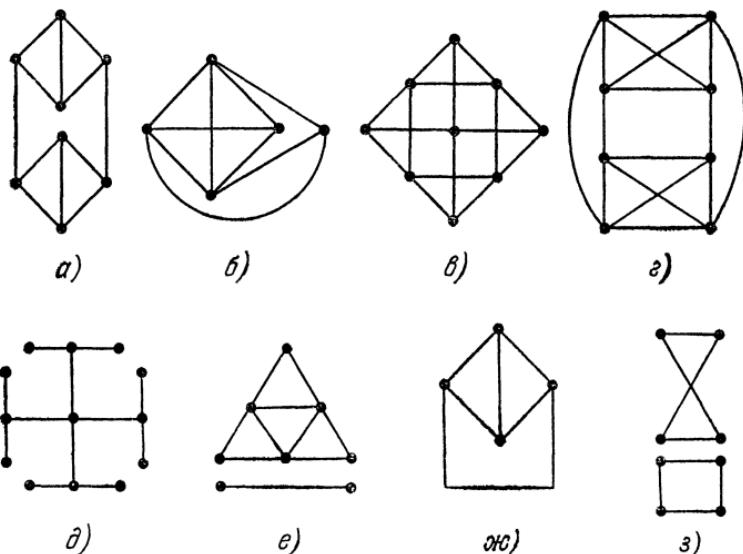
	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$A$						
$B$						
$C$						
$D$						
$E$						
$F$						

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$A$						
$B$						
$C$						
$D$						
$E$						
$F$						

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
$A$	■							
$B$		■						
$C$				■				
$D$								
$E$					■			
$F$						■		
$G$							■	
$H$								■

32Г. Для каждой вершины каждого из графов б) и в) из упражнения 32А, б) и в) из упражнения 32В найти ее полустепени и степень.

32Д. Какие из указанных ниже графов регулярны? Для регулярных графов указать их степени.



### § 33. Хроматическое число. Хроматический класс

**Хроматическое число.** Это понятие относится к неориентированным графикам.

Граф называют *r*-хроматическим, если его вершины можно раскрасить *r* различными цветами так, что никакие две смежные вершины не окрашены одинаково.

Наименьшее число *r*, для которого график является *r*-хроматическим, называется хроматическим числом неориентированного графа и обозначается через  $\gamma(\bar{G})$ .

Например, на карте (рис. 135) изображены 10 департаментов. Ее можно раскрасить четырьмя цветами: голубым *B*, желтым *J*, зеленым *V* и красным *R* так, что никакие два соседних департамента не будут окрашены одинаково. Легко проверить, что с меньшим числом цветов этого сделать невозможно.

Вершины, окрашенные одинаково, образуют внутренне устойчивое множество \*), и хроматическое число можно определить как минимальное число внутренне устойчивых множеств, которые покрывают в совокупности все вершины графа.

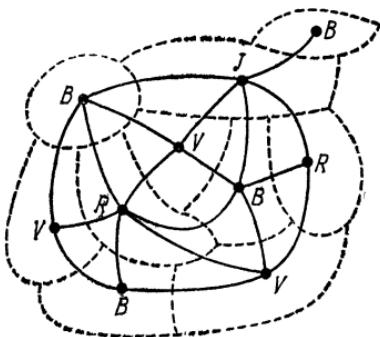


Рис. 135.

\*.) Соответствующего ориентированного графа без петель, см. стр. 180.  
(Прим. перев.)

**Отыскание хроматического числа графа.** Вновь воспользуемся методом Магу<sup>1)</sup>.

Напомним формулу (30.11):

$$\Phi_S = \prod_i \left[ \bar{x}_i + \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j) \right] = 1, \quad (33.1)$$

которая (см. § 30) позволяет получить все внутренне устойчивые подмножества. Принимая во внимание соотношение  $a + ab = a$ , можно записать (33.1) в виде

$$\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_m, \quad (33.2)$$

где  $\Phi_\alpha$  — одночлен от переменных с отрицанием. Возьмем вершину  $X_i$  и член  $\Phi_\alpha$ , не содержащий  $\bar{x}_i$ , т. е. член, определяющий максимальное внутренне устойчивое множество, содержащее  $X_i$ .

Введем булевые переменные  $y_\alpha$ , каждая из которых принимает значение 1 в точности на одном подмножестве (соответствующем некоторому  $\Phi_\alpha$ ) таком, что его вершины предполагается окрасить одинаково, и 0 в остальных случаях. Тогда для окраски  $X_i$  необходимо, чтобы

$$(\forall i) \sum_{\alpha \in A_i} y_\alpha = 1, \quad (33.3)$$

Рис. 136

где  $A_i$  — множество таких индексов  $\alpha$ , что  $\bar{x}_i \notin \Phi_\alpha$ .

Следовательно, для такого способа раскраски графа необходимо и достаточно, чтобы

$$\Psi = \prod_i \sum_{\alpha \in A_i} y_\alpha = 1. \quad (33.4)$$

Обозначим через  $S_i$  максимальное внутренне устойчивое множество, соответствующее  $\Phi_\alpha$ . Тогда одночлен

$$y_{m_1} y_{m_2} \cdots y_{m_p} \quad (33.5)$$

в разложении (33.4) указывает следующий способ окраски графа  $p$  цветами:  $S_{m_1}$  окрашиваем цветом 1,  $S_{m_2} - S_{m_1}$  — цветом 2,  $S_{m_3} - S_{m_2} - S_{m_1}$  — цветом 3, ...

Если представить (33.4) в виде

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_\lambda + \dots, \quad (33.6)$$

то хроматическое число графа равно

$$\chi(\bar{G}) = \min_\lambda |\Psi_\lambda|. \quad (33.7)$$

<sup>1)</sup> См. также Томеску (J. Tomescu), Sur quelques problèmes qui interviennent dans la théorie mathématique de la classification, Studii si Cercetări Matematice, № 9, 1967, Bucureşti.

Пример. Рассмотрим неориентированный граф  $\bar{G}$  (рис. 136), соответствующий графу на рис. 120. В силу (30.15)

$$\Phi_S = \bar{b}\bar{e}\bar{f}\bar{h} + \bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{f}\bar{g} + \bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{f}\bar{h} + \bar{a}\bar{b}\bar{e}\bar{g}\bar{h} + \bar{a}\bar{c}\bar{d}\bar{f}\bar{g} + \dot{\dots} + \bar{a}\bar{c}\bar{d}\bar{f}\bar{h} + \bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g} + \bar{a}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{g}\bar{h} = 1 \quad (33.8)$$

или

$$\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_8. \quad (33.9)$$

Так как  $\bar{a} \notin \Phi_1, \Phi_7; \bar{b} \notin \Phi_5, \Phi_6, \Phi_8; \bar{c} \notin \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_7$ , то имеем

$$\begin{aligned} \sum_{y \in A_1} y_a &= y_1 + y_7, & \sum_{y \in A_2} y_a &= y_5 + y_6 + y_8, \\ \sum_{y \in A_3} y_a &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_7, \dots; \end{aligned} \quad (33.10)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= (y_1 + y_7)(y_5 + y_6 + y_8)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_7)(y_1 + y_4) \times \\ &\times (y_2 + y_3 + y_5 + y_6)(y_4 + y_8)(y_1 + y_3 + y_6)(y_2 + y_5 + y_7) = 1 \end{aligned} \quad (33.11)$$

и

$$\begin{aligned} \Psi &= y_1 y_2 y_8 + y_1 y_4 y_5 + y_1 y_5 y_8 + y_4 y_6 y_7 + y_1 y_2 y_4 y_6 + \\ &+ y_1 y_3 y_7 y_8 + y_1 y_6 y_7 y_8 + y_3 y_4 y_5 y_7 + y_3 y_4 y_7 y_8 = 1. \end{aligned} \quad (33.12)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= y_1 y_2 y_8, & \Psi_2 &= y_1 y_4 y_5, & \Psi_3 &= y_1 y_5 y_8, & \Psi_4 &= y_4 y_6 y_7, \\ \Psi_5 &= y_1 y_2 y_4 y_6, & \Psi_6 &= y_1 y_3 y_7 y_8, & \Psi_7 &= y_1 y_6 y_7 y_8, \\ \Psi_8 &= y_3 y_4 y_5 y_7, & \Psi_9 &= y_3 y_4 y_7 y_8. \end{aligned} \quad (33.13)$$

Тогда

$$\gamma(\bar{G}) = \min_{\lambda} |\Psi_{\lambda}| = 3. \quad (33.14)$$

Таким образом, граф можно раскрасить тремя цветами: красным  $r$ , зеленым  $v$  и желтым  $j$  в соответствии с  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ . Из (33.8) получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= \{A, C, D, G\}, & S_2 &= \{C, E, H\}, & S_3 &= \{C, E, G\}, \\ S_4 &= \{C, D, F\}, & S_5 &= \{B, E, H\}, & S_6 &= \{B, E, G\}, \\ S_7 &= \{A, C, H\}, & S_8 &= \{B, F\}. \end{aligned} \quad (33.15)$$

Исходя из  $\Psi_1 = y_1 y_2 y_8$ ,

$$\begin{aligned} S_1 &= \{A, C, D, G\} && \text{окрашивается в красный } (r), \\ S_2 - S_1 &= \{E, H\} && \text{окрашивается в зеленый } (v), \\ S_8 - S_2 - S_1 &= \{B, F\} && \text{окрашивается в желтый } (j). \end{aligned} \quad (33.16)$$

На рис. 137 изображены все возможные способы раскраски графа тремя цветами.

Приведем теперь несколько теорем о хроматическом числе графа.

**Теорема I (Кёниг).** Граф является 2-хроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

**Достаточность.** Пусть в графе  $\bar{G} = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}})$  нет циклов нечетной длины. Будем считать, что граф связный (в противном случае можно рассмотреть отдельно каждую компоненту связности). Раскрашиваем его следующим образом: 1) произвольную

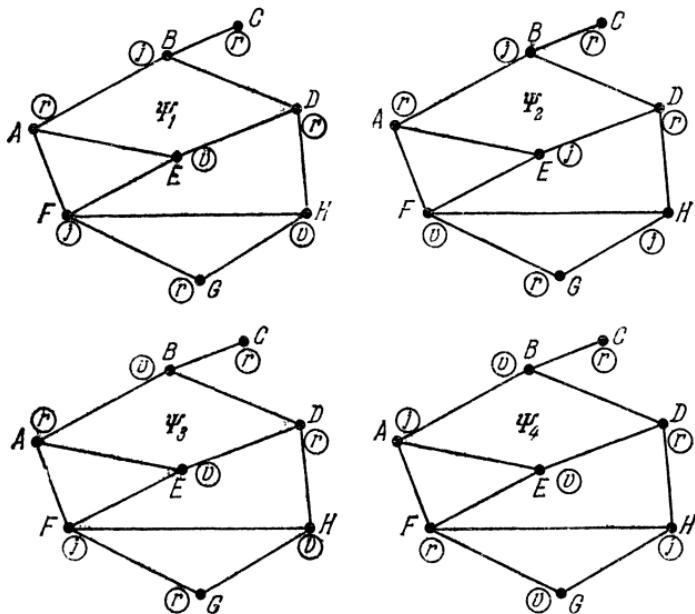


Рис. 137.

вершину  $X_0$  окрасим цветом  $C_1$ ; 2) если вершина  $X_i$  окрашена цветом  $C_1$ , то все смежные с ней вершины окрасим цветом  $C_2$ , а если  $X_j$  окрашена цветом  $C_2$ , то все смежные с ней вершины окрасим цветом  $C_1$ . Так как граф связный, то в конце концов все его вершины будут окрашены, причем никакая вершина не будет окрашена двумя разными цветами, так как в графе нет циклов нечетной длины.

**Необходимость.** Если граф 2-хроматический, то он не содержит циклов нечетной длины, так как иначе вершины такого цикла нельзя раскрасить двумя цветами требуемым образом.

**Теорема II<sup>1)</sup>.** Для того чтобы граф  $\bar{G} = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}})$  был  $p$ -хроматическим, необходимо и достаточно, чтобы существовал соответствующий ему симметрический граф  $G$  без петель, допускающий такую функцию Гранди  $g(X)$ , что

$$\max_{X \in \mathbf{E}} g(X) \leq p - 1. \quad (33.17)$$

<sup>1)</sup> Доказательство заимствовано из [8].

Условие достаточно. Если такая  $g(X)$  существует, то каждому целому числу от 0 до  $p - 1$  сопоставим некоторый цвет и окрасим вершину  $X_i$  в соответствии со значением  $g(X_i)$ .

Условие необходимо. Если граф  $p$ -хроматический, то покажем, что существует функция Гранди, максимальное значение которой не превосходит  $p - 1$ . Пусть  $E_0, E_1, \dots, E_{p-1}$  — такие подмножества, что вершины каждого из них окрашены одинаково. Каждую вершину  $X_i \in E_k$ ,  $k \geq 1$ , не смежную ни с какой вершиной из  $E_0$ , присоединяем к  $E_0$  и получаем  $E'_0 \supset E_0$ . Затем каждую вершину  $X_i \in (E_k - E'_0)$ ,  $k \geq 2$ , не смежную ни с какой вершиной из  $E_1 - E'_0$ , присоединяем к  $E_1 - E'_0$  и получаем  $E'_1$ . Аналогично получаем  $E'_2, E'_3, \dots$ . Тогда функция  $g(X_i)$ , равная  $k$ , если  $X_i \in E'_k$ , — функция Гранди, удовлетворяющая (33.17).

Эта теорема показывает, что отыскание функции Гранди для симметрического графа без петель сводится к задаче о раскраске соответствующего неориентированного графа (любой раскраске отвечает функция Гранди) и, обратно, любой функции Гранди отвечает некоторая раскраска графа.

Например, для симметрического графа без петель на рис. 138, соответствующего неориентированному графу на рис. 136, исходя из раскраски, заданной  $\Psi_1$  на рис. 137, получаем функцию Гранди соответствием:  $r \leftrightarrow 0, j \leftrightarrow 1, v \leftrightarrow 2$ . Можно действовать и в обратном порядке.

**Теорема III.** Пусть  $\gamma(\bar{G})$  — хроматическое число графа  $\bar{G} = (E, \bar{U})$ , соответствующего графу  $G$  без петель. Тогда число<sup>1)</sup> внутренней устойчивости  $\alpha(G)$  удовлетворяет неравенству

$$\alpha(G) \gamma(\bar{G}) \geq |E|. \quad (33.18)$$

В самом деле,  $E$  можно разбить на  $\gamma(\bar{G})$  устойчивых множеств, каждое из которых образовано  $m_i$  вершинами одного цвета,  $i = 1, 2, \dots, \gamma$ . Тогда

$$|E| = m_1 + m_2 + \dots + m_\gamma \leq \underbrace{\alpha(G) + \alpha(G) + \dots + \alpha(G)}_{\gamma \text{ раз}} = \gamma(\bar{G}) \alpha(G). \quad (33.19)$$

**Хроматический класс.** Рассмотрим граф  $\bar{G} = (E, \bar{U})$  и целое число  $q$  такое, что: 1) ребра графа можно окрасить  $q$  цветами

<sup>1)</sup> Так как внутренняя устойчивость не связана с ориентацией дуг, то в  $\alpha(\bar{G})$  можно заменить  $G$  на  $\bar{G}$ .

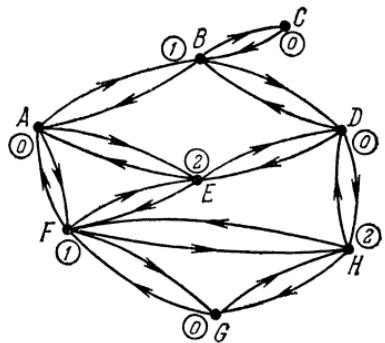


Рис. 138.

так, что смежные ребра не окрашиваются одинаково; 2) это невозможно осуществить  $q - 1$  цветами.

Число  $q$  называют *хроматическим классом* графа  $\bar{G}$ .

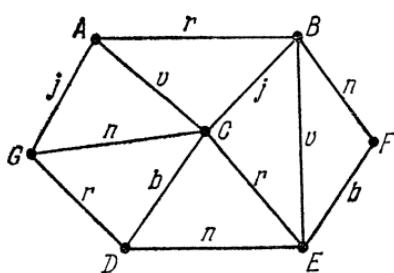


Рис. 139.

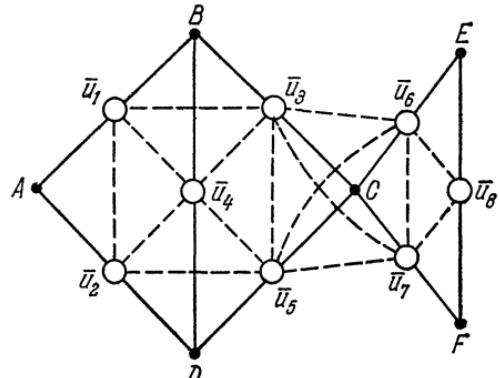


Рис. 140

Например, хроматический класс графа на рис. 139 равен 5: необходимо 5 цветов для требуемой раскраски.

Вычисление хроматического класса графа  $\bar{G}$  сводится к задаче нахождения хроматического числа графа  $\bar{G}^* = (\bar{U}, \bar{V}) =$

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$A$		1		1		
$B$	1		1	1		
$C$		1		1	1	1
$D$	1	1	1			
$E$			1			1
$F$			1		1	

Рис. 141.

	$\bar{U}_1$	$\bar{U}_2$	$\bar{U}_3$	$\bar{U}_4$	$\bar{U}_5$	$\bar{U}_6$	$\bar{U}_7$	$\bar{U}_8$
$(A,B)(A,D)(B,C)(B,D)(C,D)(C,E)(C,F)(E,F)$								
$\bar{U}_1(A,B)$	1	1	1					
$\bar{U}_2(A,D)$	1			1	1			
$\bar{U}_3(B,C)$	1			1	1	1	1	
$\bar{U}_4(B,D)$	1	1	1		1			
$\bar{U}_5(C,D)$		1	1	1		1	1	
$\bar{U}_6(C,E)$			1		1		1	1
$\bar{U}_7(C,F)$				1	1	1		1
$\bar{U}_8(E,F)$						1	1	

Рис. 142.

$= (\bar{U}, \Gamma^*)$ , вершинами которого служат ребра  $\bar{G}$  и  $\bar{u}_j \equiv \Gamma^* \bar{u}_i$ , если  $\bar{u}_i$  и  $\bar{u}_j$  — смежные ребра в  $\bar{G}$ . На рис. 140 показано, как получить  $\bar{G}^*$  (изображенный пунктиром) из  $\bar{G}$  и тем самым раскраску всех ребер  $q$  цветами.

Пусть

$$\bar{G} = (E, \bar{U}), \quad (33.20)$$

где

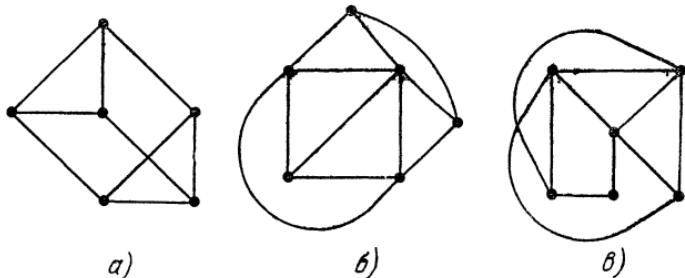
$$\mathbf{E} = \{A, B, C, D, E, F\}, \quad (33.21)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6, \bar{u}_7, \bar{u}_8\}. \quad (33.22)$$

На рис. 141 и 142 изображены булевые матрицы графов  $\bar{G}$  и  $\bar{G}^*$  соответственно.

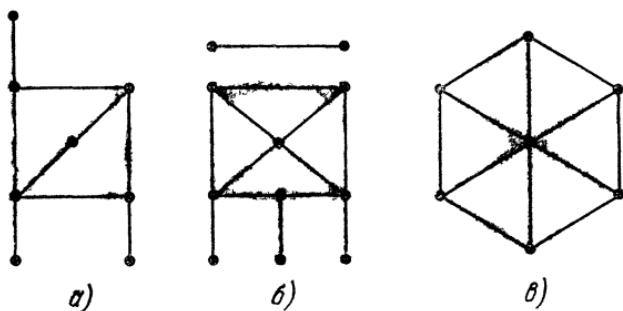
### УПРАЖНЕНИЯ

33А. Найти хроматическое число и раскрасить вершины графов:



33Б. Указать хроматический класс и раскрасить ребра графов из упражнения 33А.

33В. Установить, пользуясь теоремой Кёнига, какие из графов являются 2-хроматическими:



33Г. Каждому из графов из упражнения 33В сопоставить симметрический ориентированный граф без петель и для них найти функции Гранди и соответствующие им раскраски.

33Д. Вычислить  $\alpha(G)$  и  $\gamma(\bar{G})$  графов, полученных в упражнении 33Г.

### § 34. Клика. Максимальная клика

Пусть  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  — симметрический граф без петель и  $\bar{G} = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}})$  — соответствующий ему неориентированный граф. Обозначим через  $G^* = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}}^*)$  граф, дополнительный к  $G$ , и через  $\bar{G}^*$  — неориентированный граф, соответствующий  $G^*$ .

Подмножество  $\mathbf{E}_k \subset \mathbf{E}$  называется *кликой*, если подграф  $G_k = (\mathbf{E}_k, \Gamma)$  полный, т. е.

$$(\forall X_i \subseteq \mathbf{E}_k)(\forall X_j \subseteq \mathbf{E}_k) X_i \subseteq \Gamma X_j. \quad (34.1)$$

Подмножество  $E_{M_k} \subset E$  называется *максимальной кликой*, если соответствующий полный подграф  $G_{M_k}$  не содержится (строго) ни в каком полном подграфе.

Например, на рис. 146 выделен полный подграф графа на рис. 143 с кликой  $E_k = \{A, C, D, G\}$ .

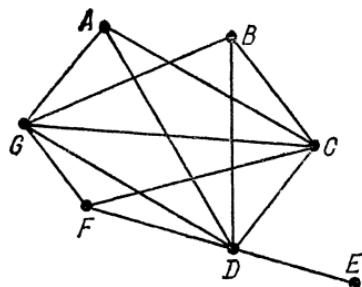


Рис. 143.

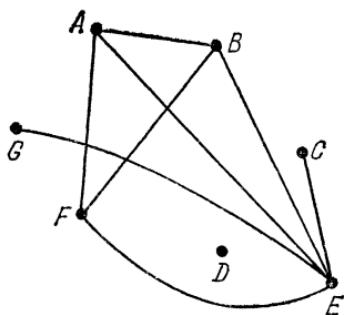


Рис. 144.

Понятие клики, в частности максимальной клики, используется в различных социологических теориях (вопросы, связанные с голосованием, альянсами и т. п.), а также в теории игр.

Нахождение максимальной клики<sup>1)</sup> в графе  $\bar{G}$  сводится к нахождению максимального внутренне устойчивого подмножества

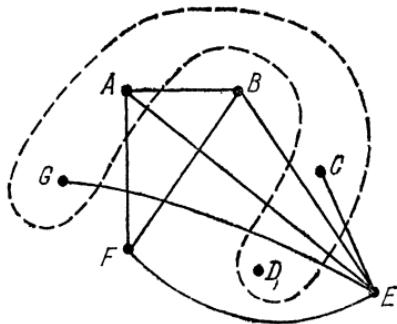


Рис. 145.

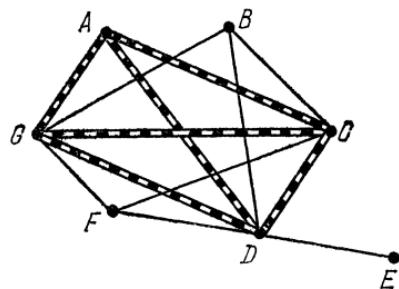


Рис. 146.

в графе  $\bar{G}^*$ , дополнительном к графу  $\bar{G}$ . Действительно, дополнительный граф определяется согласно (25.23):

$$(\forall X_i \in E) \Gamma^* X_i = E - \Gamma X_i. \quad (34.2)$$

Для каждой клики  $E_k$  имеем

$$(\forall X_i \in E_k) (\forall X_j \in E_k) (X_j \in \Gamma X_i) \Leftrightarrow (\{X_j\} \cap \Gamma^* X_i) = \emptyset, \quad (34.3)$$

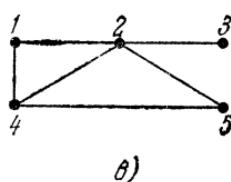
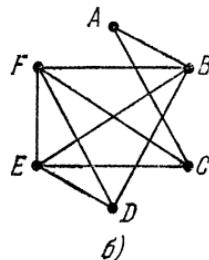
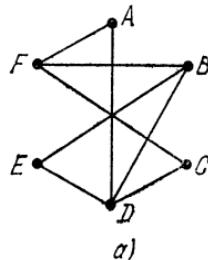
и, таким образом, максимальному внутренне устойчивому подмножеству в  $\bar{G}^*$  соответствует максимальная клика в  $\bar{G}$ .

<sup>1)</sup> См. также Ангер и Поль (S. H. Unger, M. C. Paul), Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sentential Switching Functions, I. R. E. Transactions on Electronic Computers, EC8, 356—367.

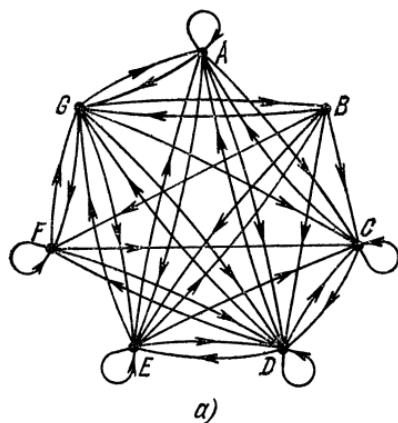
Пример. Пусть граф  $\bar{G}$  изображен на рис. 143, граф  $\bar{G}^*$  изображен на рис. 144. Максимальное внутреннее устойчивое подмножество графа  $\bar{G}^*$  изображено на рис. 145. Это подмножество соответствует клике графа  $G$ , изображенной на рис. 146, его достаточно для образования полного неориентированного графа с вершинами  $\{G, A, C, D\}$ .

### УПРАЖНЕНИЯ

34А. Перечислить максимальные клики графов:



34Б. Построить соответствующие неориентированные графы и перечислить их максимальные клики для следующих графов:



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	■							
2		■						
3			■					
4				■				
5					■			
6						■		
7							■	
8								■

Граф  $G$  (б) имеет 8 вершин:  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Структура связей: вершины  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  связаны между собой; вершина  $8$  соединяется с вершинами  $1, 3, 5, 7$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	■							
2		■						
3			■					
4				■				
5					■			
6						■		
7							■	
8								■

Граф  $G$  (в) имеет 8 вершин:  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Структура связей: вершины  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  связаны между собой; вершина  $8$  соединяется с вершинами  $1, 3, 5, 7$ .

$$\Gamma A = \{A, C, E\}$$

$$\Gamma B = \{A, B, D, E, F\}$$

$$\Gamma C = \{A, C, D, E\}$$

$$\Gamma D = \{A, B, C, D, F\}$$

$$\Gamma E = \{B, C, E\}$$

$$\Gamma F = \{A, C, D, E, F\}$$

в)

**§ 35.  $p$ -цветный граф. Граф с  $p$  отображениями.  
Неориентированный мультиграф, или неориентированный  
 $p$ -граф**

В этом параграфе рассматриваются некоторые обобщения понятия графа, которые называются различными авторами по-разному. Никакое из этих понятий нельзя назвать графом в смысле теории множеств.

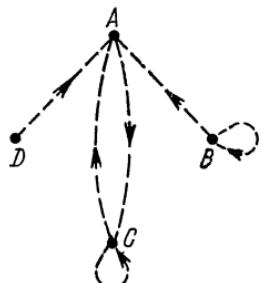


Рис. 147.

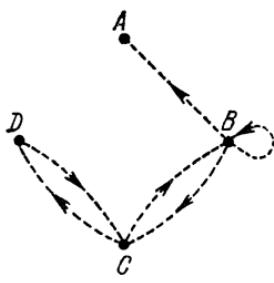


Рис. 148.

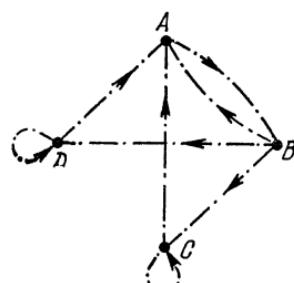


Рис. 149.

**$p$ -цветный граф.** Пусть заданы  $p$  графов  $G_1 = (E, \Gamma_1)$ ,  $G_2 = (E, \Gamma_2)$ , ...,  $G_p = (E, \Gamma_p)$ . Объединим их на одном чертеже

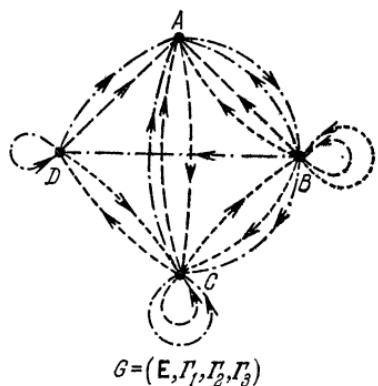


Рис. 150.

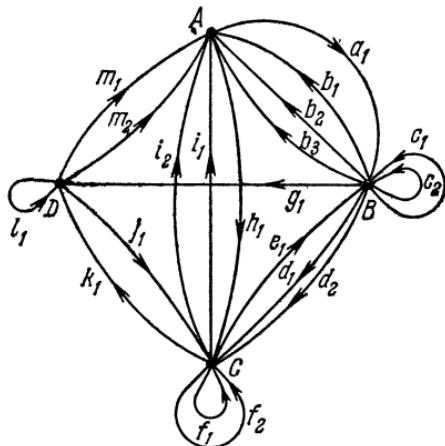


Рис. 151.

и, взяв  $p$  цветов, окрасим дуги каждого из  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , каким-либо одним цветом. То, что получится, называют  $p$ -цветным графом и обозначают через  $G = (E, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p)$ .

Понятие  $p$ -цветного графа встречается, например, в теории стохастических процессов со счетным числом состояний, когда выбор дуги того или другого графа соответствует принятию некоторого решения.

Например, объединяя графы  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  на рис. 147—149 в один, получаем 3-цветный граф, изображенный на рис. 150.

Понятие  $p$ -цветного графа не имеет, конечно, ничего общего с понятием неориентированного  $p$ -хроматического графа.

**Граф с  $p$  отображениями.** Взяв в качестве вершин элементы некоторого конечного множества и предположив, что любые две вершины  $X_i$  и  $X_j$  могут быть соединены несколькими одинаково направленными дугами, получаем граф с  $p$  отображениями, если максимум числа одинаково направленных дуг, идущих от одной вершины к другой, равен  $p$ .

Например, если в 3-цветном графе на рис. 150 не обращать внимания на цвета, то его можно рассматривать как граф с  $p$  отображениями (рис. 151), но легко привести пример  $p$ -цветного графа, который таким же путем приводит к графу с  $q$  отображениями, где  $q < p$ .

Каждому  $q$ -цветному графу можно сопоставить (неоднозначно из-за произвольной нумерации дуг) граф с  $p$  отображениями, где  $q \geqslant p$ , и, обратно, каждому графу с  $p$  отображениями можно сопоставить (неоднозначно из-за произвольного выбора цвета дуг)  $q$ -цветный граф, где  $q \geqslant p$ .

Понятие графа с  $p$  отображениями используется в теории связи, теории автоматов и т. д.

Граф с одним отображением представляет собой граф в смысле теории множеств.

**Мультиграф, или  $p$ -граф.** Другое обобщение касается неориентированных графов. В качестве вершин рассматриваются элементы некоторого конечного множества и предполагается, что различные вершины могут быть соединены несколькими ребрами. Если максимум числа ребер, соединяющих две вершины, равен  $p$ , то говорят о неориентированном *мультиграфе порядка  $p$* , или  *$p$ -графе*. Например, на рис. 152 изображен 4-граф.

Понятие  $p$ -графа имеет много применений (в химии, социологии, теории электрических цепей и т. д.).  $p$ -цветному графу или графу с  $p$  отображениями можно (вообще говоря, неоднозначно) сопоставить некоторый  $p$ -граф. Читателю следует учесть, что определения, приведенные в этом параграфе, разными авторами даются по-разному.

## § 36. Плоские $p$ -графы

Говорят, что  $p$ -граф *плоский*, если его можно представить на плоскости таким образом, что вершины изображаются различными точками, а ребра — простыми кривыми, которые могут

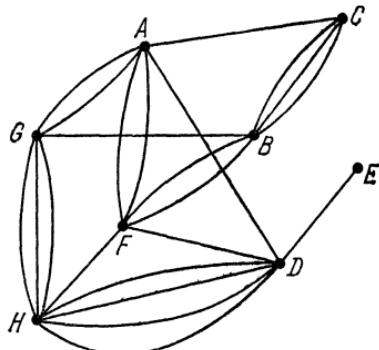


Рис. 152.

пересекаться лишь в вершинах. В этом случае также говорят, что граф «отображается на плоскость». Можно говорить также о возможности отображения графа на другие поверхности (сферу, тор и т. п.), но мы будем рассматривать лишь отображения на плоскость.

Например, граф на рис. 153 плоский, а граф на рис. 154 — нет.

**Границы плоского  $p$ -графа.** Область плоскости, ограниченная ребрами связного плоского  $p$ -графа и не содержащая внутри себя ни ребер, ни вершин, называется его *гранью*. Внешняя неограниченная грань называется *бесконечной гранью*.

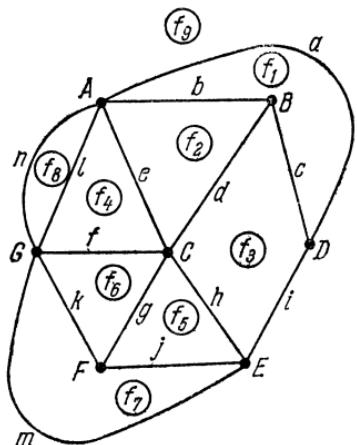


Рис. 153.

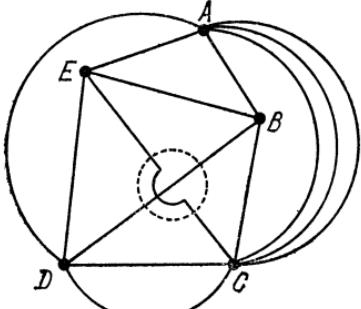


Рис. 154.

Например,  $p$ -граф на рис. 153 обладает девятью гранями:  $f_1, f_2, \dots, f_9$ , где  $f_9$  — бесконечная грань.

**Некоторые важные теоремы о плоских  $p$ -графах.** Приведем несколько простых теорем, доказательства которых читатель найдет в [8].

1) Для плоского  $p$ -графа с  $N$  вершинами,  $M$  ребрами и  $F$  гранями справедливо соотношение

$$N - M + F = 2. \quad (36.1)$$

2) Во всяком плоском 1-графе найдется вершина, степень которой не превосходит 5.

3) Всякий плоский 1-граф является 5-хроматическим.

Возможно, каждый плоский 1-граф является даже 4-хроматическим, но это лишь предположение.

**Двойственный граф плоского связного  $p$ -графа.** Рассмотрим плоский связный  $p$ -граф  $\bar{G}_1$ , в котором нет вершин степени, меньшей 2; поставим ему в соответствие некоторый плоский связный  $q$ -граф  $\bar{G}_2$ , называемый *двойственным* к  $\bar{G}_1$ . Каждой грани  $r$  графа  $\bar{G}_1$  сопоставим вершину  $Y_r$  графа  $\bar{G}_2$ ; каждому ребру  $\bar{u}_k$  в  $\bar{G}_1$  сопоставим ребро  $\bar{v}_m$  в  $\bar{G}_2$ , соединяющее вершины  $Y_r$  и  $Y_s$ , соответствующие граням  $r$  и  $s$ , примыкающим к ребру  $\bar{u}_k$ .

Например (см. рис. 155), граф  $\bar{G}_2$  (пунктирные линии и кружки) двойственен графу  $\bar{G}_1$  (сплошные линии и точки).

Заметим, что  $q$  может как совпадать, так и не совпадать с  $p$ . Например, граф  $\bar{G}_1$  на рис. 155 является 3-графом, а  $\bar{G}_2$  является 2-графом.

Использование слова «двойственный» оправдано тем, что если  $\bar{G}_2$  — двойственный граф к  $\bar{G}_1$ , то  $\bar{G}_1$  — двойственный граф к  $\bar{G}_2$ .

**Алгоритм построения плоского изображения<sup>1)</sup>.** Этот метод позволяет установить, является ли граф плоским. Заметим, что достаточно рассматривать 1-графы, так как любой  $p$ -граф сводится к 1-графу (если слить параллельные ребра в одно).

Пусть задан частичный подграф<sup>2)</sup>  $\bar{G}_1 = (\mathbf{E}_1, \bar{\mathbf{U}}_1)$  графа  $\bar{G} = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}})$ . Будем называть *куском* графа  $\bar{G}$  относительно  $\bar{G}_1$ :

1) компоненту связности  $G'_1 = (\mathbf{E}'_1, \bar{\mathbf{U}}'_1)$  подграфа  $\bar{G}' = (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1, \bar{\mathbf{U}}')$ , порожденного подмножеством вершин  $\mathbf{E} - \mathbf{E}_1$ , дополненную всеми ребрами, инцидентными вершинам из  $\mathbf{E}'_1$ , и всеми вершинами этих ребер, принадлежащими  $\mathbf{E}_1$  (эти последние называются «контактными точками»);

2) а также ребро  $\bar{u} \notin \bar{\mathbf{U}}_1$ , концы которого принадлежат  $\mathbf{E}_1$ , вместе с его концами.

Алгоритм использует последовательный процесс присоединения к некоторому плоскому частичному подграфу  $\bar{G}_i^p$  цепи  $\bar{u}_i$ , оба конца которой (и только они) — вершины  $\bar{G}_i^p$ . Эта цепь разобьет одну из граней  $\bar{G}_i^p$  на две.

В качестве начального плоского графа  $\bar{G}_0^p$  выбирают некоторый цикл графа  $\bar{G}$ . Чтобы перейти от подграфа  $\bar{G}_i^p$  к  $\bar{G}_{i+1}^p$ , предварительно рассматривают все куски  $\bar{P}_j$  графа  $\bar{G}$  относительно  $\bar{G}_i^p$ .

Мы скажем, что грань  $f_k$  графа  $\bar{G}_i^p$  и кусок  $\bar{P}_j$  совместимы, если все его контактные точки принадлежат множеству вершин этой грани. Для каждого куска определяем грани, которые с ним совместимы. Возможны три случая.

<sup>1)</sup> См. Демукрон, Мальгранж и Пертуизе (G. Demoucron, Y. Malgrange, R. Pertuiset), Graphes planaires, Recherche et présentations planaires topologiques, Revue Française de Recherche Opérationnelle, № 30, 1-er trim, 1964, 33—47.

<sup>2)</sup> Для неориентированных графов понятия подграфа и частичного графа определяются так же, как и в § 25.

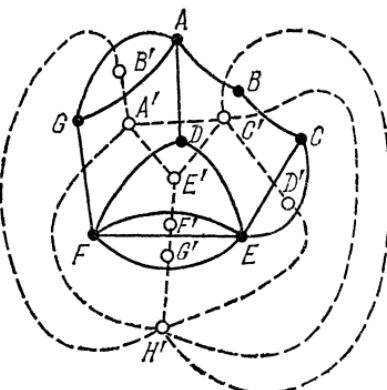


Рис. 155.

1. Некоторый кусок не совместим ни с какой гранью графа  $\bar{G}_i^p$ . Тогда граф не плоский.

2. Какой-либо кусок совместим с единственной гранью  $f_k$  графа  $\bar{G}_i^p$ . Тогда выберем в этом куске цепь  $\bar{m}_i$  такую, что оба ее конца (и только они) принадлежат  $\bar{G}_i^p$ . Дополняя  $\bar{G}_i^p$  ребрами и вершинами этой цепи, получаем  $\bar{G}_{i+1}^p$ , проводя  $\bar{m}_i$  внутри грани  $f_k$ .

3. Если каждый из кусков  $\bar{P}_j$  совместим по крайней мере с двумя гранями графа  $\bar{G}_i^p$ , то нетрудно показать<sup>1)</sup>, что можно выбрать цепь  $\bar{m}_i$  в любом из кусков и действовать как в случае 2.

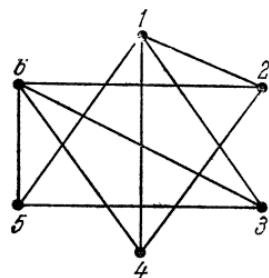


Рис. 156.

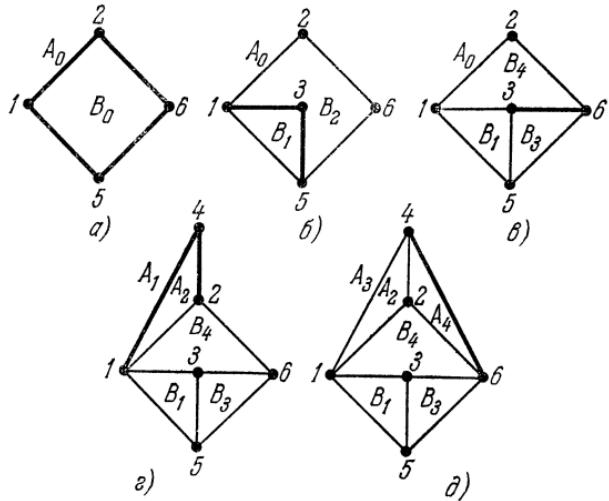


Рис. 157.

Пример. Проиллюстрируем этот алгоритм на примере графа  $\bar{G} = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}})$  на рис. 156.

*Шаг 1.* Берем произвольный цикл, например  $\bar{m}_0 = (1, 2, 6, 5, 1)$ , представляющий плоский граф  $\bar{G}_1^p$  (рис. 157, a). Границы  $\bar{G}_1^p$ :

$A_0$  — внешняя грань  $(\overline{1, 2, 6, 5, 1})$ ,

$B_0$  — внутренняя грань  $(\overline{1, 2, 6, 5, 1})$ .

Куски графа  $\bar{G}$  относительно  $\bar{G}_1^p$ :

Кусок	Вершины куска	Контактные точки	Совместимые грани
$\bar{P}_1$	{1, 3, 5, 6}	{1, 5, 6}	$A_0$ и $B_0$
$\bar{P}_2$	{1, 2, 4, 6}	{1, 2, 6}	$A_0$ и $B_0$

<sup>1)</sup> См. сноску<sup>1)</sup> на стр. 207.

*Шаг 2.* Определяем  $\bar{G}_2^p$ . Все куски совместимы с двумя гранями (случай 3). Выбираем, например, цепь  $(\bar{1}, \bar{3}, \bar{5})$  из куска  $\bar{P}_1$  и проводим ее в грань  $B_0$ . Эта грань в  $\bar{G}_2^p$  заменяется двумя гранями:  $B_1$  — внутренней к  $(\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{1})$  и  $B_2$  — внутренней к  $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{5}, \bar{3}, \bar{1})$  (рис. 157, б).

Куски  $\bar{G}$  относительно  $\bar{G}_2^p$ :

Куски	Вершины кусков	Контактные точки	Совместимые грани
$\bar{P}'_1$	{3, 6}	{3, 6}	$B_2$
$\bar{P}'_2$	{1, 2, 4, 6}	{1, 2, 6}	$A_0$ и $B_2$

*Шаг 3.* Определяем  $\bar{G}_3^p$ . Кусок  $P'_1$  совместим лишь с одной гранью  $B_2$  (случай 2). Цепь {3, 6} должна быть помещена в грань  $B_2$ , которую она разобьет на две грани:  $B_3$  — внутреннюю к  $(\bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{3})$  и  $B_4$  — внутреннюю к  $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{3}, \bar{1})$  (рис. 157, в).

Куски  $\bar{G}$  относительно  $\bar{G}_3^p$ :

Кусок	Вершины куска	Контактные точки	Совместимые грани
$\bar{P}''_1$	{1, 2, 4, 6}	{1, 2, 6}	$A_0$ и $B_4$

*Шаг 4.* Определяем  $\bar{G}_4^p$ . Кусок  $\bar{P}''_1$  совместим с двумя гранями  $A_0$  и  $B_4$  (случай 3). Возьмем, например, цепь  $(\bar{1}, \bar{4}, \bar{2})$  и поместим ее в грань  $A_0$ . Получаем две новые грани:  $A_1$  — внешнюю к  $(\bar{1}, \bar{4}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{5}, \bar{1})$  и  $A_2$  — внутреннюю к  $(\bar{1}, \bar{4}, \bar{2}, \bar{1})$  (рис. 157, г).

Куски  $\bar{G}$  относительно  $\bar{G}_4^p$ :

Кусок	Вершины куска	Контактные точки	Совместимые грани
$\bar{P}'''_1$	{4, 6}	{4, 6}	$A_1$

*Шаг 5.* Определяем  $\bar{G}_5^p$ . Кусок  $\bar{P}'''_1$  совместим лишь с одной гранью  $A_1$  (случай 2). Помещаем единственную цепь  $(\bar{4}, \bar{6})$  в  $A_1$  и получаем новые грани:  $A_3$  — внешнюю к  $(\bar{1}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{5}, \bar{1})$  и  $A_4$  — внутреннюю к  $(\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{2})$ .

Таким образом, получаем плоское изображение графа  $\bar{G}$ .

## § 37. Подмножество сочленения

Пусть задан связный граф  $\bar{G} = (E, \bar{U})$ ; непустое подмножество  $A$  называется *подмножеством сочленения*, если подграф, порожденный множеством  $E - A$ , не связан. В случае, когда подмножество  $A$  сводится к единственной вершине, ее называют *точкой сочленения*.

Например, подмножество  $A = \{A, D, E\}$  является подмножеством сочленения неориентированного графа, порожденного множеством

$$E = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}.$$

**Минимальное подмножество сочленения.** Рассмотрим два подмножества  $E_1$  и  $E_2$  множества  $E$ , порождающего граф

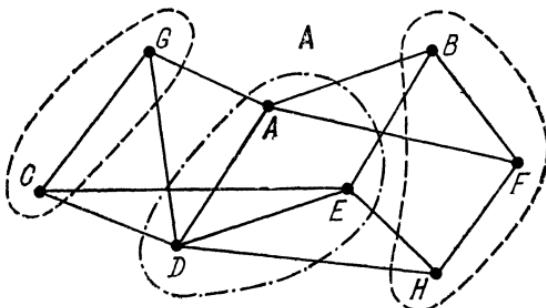


Рис. 158.

$\bar{G} = (E, \bar{U})$ . Предлагается найти наименьшее подмножество сочленения  $A$ , которое разделяет подмножества  $B_1 \supset E_1$  и  $B_2 \supset E_2$  из  $E$ .

Иначе говоря, рассматривая симметрический граф  $G = (E, \Gamma)$  без петель, соответствующий  $\bar{G}$ , отыскивают такое множество  $A$  (если оно существует), что

- а)  $E_1 \subset B_1$ ,  $A \cap B_1 = \emptyset$ ; б)  $E_2 \subset B_2$ ,  $A \cap B_2 = \emptyset$ ;
  - в)  $A \cup B_1 \cup B_2 = E$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ;
  - г)  $\Gamma B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,  $\Gamma B_2 \cap B_1 = \emptyset$ ; д)  $|A|$  минимально.
- (37.1)

Например, если  $E_1 = \{C, G\}$  и  $E_2 = \{B, F, H\}$ , то  $A = \{A, D, E\}$  является минимальным подмножеством сочленения (рис. 158).

Для отыскания минимального подмножества сочленения, соответствующего двум заданным подмножествам, можно использовать метод<sup>1)</sup>, предложенный Мальгранжем и использующий понятия полной подматрицы и основной подматрицы.

**Полная подматрица. Основная подматрица. Покрытие.** Полной подматрицей булевой матрицы называется ее подматрица, все элементы которой равны 1.

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 166.

*Основной* \*) подматрицей называется полная подматрица, не содержащаяся ни в какой другой полной подматрице.

Например, на рис. 159 представлены все основные подматрицы матрицы  $\|M\|$ .

*Покрытием булевой матрицы* называют множество полных подматриц, покрывающее все единичные элементы этой матрицы. Например,  $\{\|M_1\|, \|M_2\|, \|M_4\|, \|M_5\|, \|M_6\|, \|M_7\|, \|M_9\|\}$  — покрытие матрицы  $\|M\|$  (рис. 159).

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>A</i>	0	1	0	1	1	1
<i>B</i>	1	0	1	0	0	0
<i>C</i>	0	1	0	1	1	0
<i>D</i>	0	1	1	0	0	1
	$\ M\ $					
<i>A</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>		
<i>M</i> <sub>1</sub>	1	1	1	1		
<i>A</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>e</i>			
<i>C</i>	1	1	1			
<i>M</i> <sub>5</sub>						
<i>A</i>	<i>b</i>	<i>f</i>				
<i>D</i>	1	1				
<i>M</i> <sub>6</sub>						
<i>B</i>	<i>a</i>	<i>c</i>				
<i>M</i> <sub>2</sub>	1	1				
<i>D</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>f</i>			
<i>M</i> <sub>4</sub>	1	1	1			
<i>A</i>	<i>b</i>					
<i>C</i>	1					
<i>D</i>	1					
<i>M</i> <sub>9</sub>						

Рис. 159.

Предварительно рассмотрим алгоритм для нахождения всех основных подматриц заданной булевой матрицы.

Пусть **I** — множество строк, а **J** — множество столбцов матрицы  $\|M\|$ . Каждая полная подматрица определяется парой  $(I_p, J_q)$  подмножеств, где  $I_p \subset I$ ,  $J_p \subset J$ . Введем две операции. Если полная \*\*) подматрица  $\|M_1\|$  определяется  $(I_1, J_1)$ , а  $\|M_2\|$  определяется  $(I_2, J_2)$ , то

$$\begin{aligned} \|M_1\| \dot{\cup} \|M_2\| &= \|M'\| \text{ определяется парой } (I_1 \cup I_2, J_1 \cap J_2), \\ \|M_1\| \cap \|M_2\| &= \|M''\| \text{ определяется парой } (I_1 \cap I_2, J_1 \cup J_2). \end{aligned} \quad (37.2)$$

Используя указанные ниже правила, можно получить все основные подматрицы.

\*) В оригинале «рgettîège». (Прим. перев.)

\*\*) Вырожденная матрица (см. [36]) считается полной. (Прим. перев.)

*Правило I.* Удаляем любую подматрицу  $\|M_k\|$ , содержащуюся в подматрице  $\|M_l\|$  из покрытия  $C$ .

*Правило II.* Добавляем к  $C$  подматрицы, получаемые применением вышеуказанных операций ко всем парам матриц  $\|M_k\|$  и  $\|M_l\|$ , оставшимся в покрытии (если при этом получается матрица, уже содержащаяся в  $C$ , то она не добавляется).

*Пример* (рис. 159). Найдем основные подматрицы матрицы  $\|M\|$ , выбирая покрытие.

*Шаг 1.*

$$\begin{aligned} \|M_1\| &= A \begin{array}{c|c|c|c} b & d & e & f \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}, & \|M_2\| &= B \begin{array}{c|c} a & c \\ \hline 1 & 1 \end{array}, \\ \|M_3\| &= C \begin{array}{c|c|c} b & d & e \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}, & \|M_4\| &= D \begin{array}{c|c|c} b & c & f \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}. \end{aligned} \quad (37.3)$$

*Шаг 2* (правило II). Найдем объединения и пересечения:

$$\begin{aligned} I_1 \cup I_2 &= \{A, B\}, & J_1 \cap J_2 &= \emptyset, \\ I_1 \cup I_3 &= \{A, C\}, & J_1 \cap J_3 &= \{b, d, e\}, \end{aligned} \quad (37.4)$$

которые дают новую подматрицу

$$\|M_5\| = A \begin{array}{c|c|c} b & d & e \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}.$$

Рассматривая

$$I_1 \cup I_4 = \{A, D\}, \quad J_1 \cap J_4 = \{b, f\}, \quad (37.5)$$

получаем

$$\|M_6\| = \begin{array}{c|c} b & f \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}, \quad (37.6)$$

a

$$\begin{aligned} I_2 \cup I_3 &= \{B, C\}, & J_2 \cap J_3 &= \emptyset, \\ I_2 \cup I_4 &= \{B, D\}, & J_2 \cap J_4 &= \{c\} \end{aligned} \quad (37.7)$$

приводят к

$$\|M_7\| = \begin{array}{c} c \\ \hline 1 \\ \hline 1 \end{array}. \quad (37.8)$$

Наконец,

$$I_3 \cup I_4 = \{C, D\}, \quad J_3 \cap J_4 = \{b\} \quad (37.9)$$

дают

$$\|M_8\| = \frac{C}{D} \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (37.10)$$

Пересечения  $I_i \cap I_j = \emptyset$  для всех  $i$  и  $j$ , и вторую операцию из (37.2) применять излишне.

*Шаг 3* (правило I). Выпишем новое покрытие:

$$\{\|M_1\|, \|M_2\|, \|M_4\|, \|M_5\|, \|M_6\|, \|M_7\|, \|M_8\|\}; \quad (37.11)$$

$\|M_3\|$  удалена, так как содержится в  $\|M_5\|$ .

*Шаг 4* (правило II). Проводим подробно все выкладки:

$$\begin{aligned} I_1 \cup I_5 &= \{A, C\}, & J_1 \cap J_5 &= \{b, d, e\}: \text{дает } \|M_5\|, \\ I_1 \cup I_6 &= \{A, D\}, & J_1 \cap J_6 &= \{b, f\}: \text{дает } \|M_6\|, \\ I_1 \cup I_7 &= \{A, B, D\}, & J_1 \cap J_7 &= \emptyset, \\ I_1 \cup I_8 &= \{A, C, D\}, & J_1 \cap J_8 &= \{b\}. \end{aligned} \quad (37.12)$$

Получаем новую подматрицу

$$\|M_9\| = C \begin{bmatrix} b \\ A & 1 \\ \hline D & 1 \end{bmatrix}. \quad (37.13)$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_2 \cup I_5 &= \{A, B, C\}, & J_2 \cap J_5 &= \emptyset, \\ I_2 \cup I_6 &= \{A, B, D\}, & J_2 \cap J_6 &= \emptyset, \\ I_2 \cup I_7 &= \{B, D\}, & J_2 \cap J_7 &= \{c\}: \text{дает } \|M_7\|, \\ I_2 \cup I_8 &= \{B, C, D\}, & J_2 \cap J_8 &= \emptyset, \\ I_4 \cup I_5 &= \{A, C, D\}, & J_4 \cap J_5 &= \{b\}: \text{дает } \|M_9\|, \\ I_4 \cup I_6 &= \{A, D\}, & J_4 \cap J_6 &= \{b, f\}: \text{дает } \|M_6\|, \\ I_4 \cup I_7 &= \{B, D\}, & J_4 \cap J_7 &= \{c\}: \text{дает } \|M_7\|, \\ I_4 \cup I_8 &= \{C, D\}, & J_4 \cap J_8 &= \{b\}: \text{дает } \|M_8\|, \\ &&&\text{содержащуюся в } \|M_9\|, \\ I_5 \cup I_6 &= \{A, C, D\}, & J_5 \cap J_6 &= \{b\}: \text{дает } \|M_9\|, \\ I_5 \cup I_7 &= \{A, B, C, D\}, & J_5 \cap J_7 &= \emptyset, \\ I_5 \cup I_8 &= \{A, C, D\}, & J_5 \cap J_8 &= \{b\}: \text{дает } \|M_9\|, \\ I_6 \cup I_7 &= \{A, B, D\}, & J_6 \cap J_7 &= \emptyset, \\ I_6 \cup I_8 &= \{A, C, D\}, & J_6 \cap J_8 &= \{b\}: \text{дает } \|M_9\|, \end{aligned}$$

$I_7 \cup I_8 = \{B, C, D\}$ ,	$J_7 \cap J_8 = \emptyset$ ,
$I_1 \cap I_5 = \{A\}$ ,	$J_1 \cup J_5 = \{b, d, e, f\}$ : дает $\ M_1\ $ , (37.14)
$I_1 \cap I_6 = \{A\}$ ,	$J_1 \cup J_6 = \{b, d, e, f\}$ : дает $\ M_1\ $ ,
$I_1 \cap I_7 = \emptyset$ ,	$I_1 \cap I_8 = \emptyset$ , $I_2 \cap I_5 = \emptyset$ , $I_2 \cap I_6 = \emptyset$ ,
$I_2 \cap I_7 = \{B\}$ ,	$J_2 \cup J_7 = \{a, c\}$ : дает $\ M_2\ $ ,
$I_2 \cap I_8 = \emptyset$ ,	$I_4 \cap I_5 = \emptyset$ ,
$I_4 \cap I_6 = \{D\}$ ,	$J_4 \cup J_6 = \{b, c, f\}$ : дает $\ M_4\ $ ,
$I_4 \cap I_7 = \{D\}$ ,	$J_4 \cup J_7 = \{b, c, f\}$ : дает $\ M_4\ $ ,
$I_4 \cap I_8 = \{D\}$ ,	$J_4 \cup J_8 = \{b, c, f\}$ : дает $\ M_4\ $ ,
$I_5 \cap I_6 = \{A\}$ ,	$J_5 \cup J_6 = \{b, d, e, f\}$ : дает $\ M_1\ $ ,
$I_5 \cap I_7 = \emptyset$ ,	
$I_5 \cap I_8 = \{c\}$ ,	$J_5 \cup J_8 = \{b, d, e, f\}$ : дает $\ M_3\ $ , содержащуюся в $\ M_5\ $ ,
$I_6 \cap I_7 = \{D\}$ ,	$J_6 \cup J_7 = \{b, c, f\}$ : дает $\ M_4\ $ ,
$I_6 \cap I_8 = \{D\}$ ,	$J_6 \cup J_8 = \{b, f\}$ : дает $D \begin{array}{ c c } \hline b & f \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ ,
$I_7 \cap I_8 = \{D\}$ ,	содержащуюся в $\ M_4\ $ ,
	$J_7 \cup J_8 = \{b, c\}$ : дает $D \begin{array}{ c c } \hline b & c \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ ,
	содержащуюся в $\ M_4\ $ .

*Шаг 5* (правило I). Выписываем новое покрытие:

$$\{\|M_1\|, \|M_2\|, \|M_4\|, \|M_5\|, \|M_6\|, \|M_7\|, \|M_9\|\}; \quad (37.15)$$

$\|M_8\|$  удалена, так как содержится в  $\|M_9\|$ .

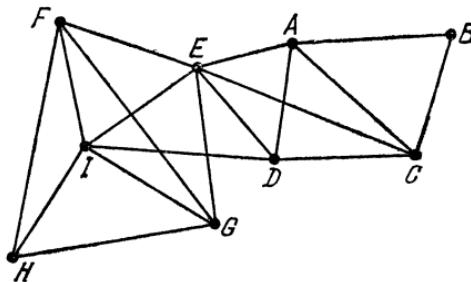


Рис. 160.

*Шаг 6* (правило II). Действуя по правилу II, мы приходим к тому же покрытию. Следовательно, мы нашли все основные матрицы (см. рис. 159).

**Отыскание минимальных подмножеств сочленений.** На примере графа на рис. 160 проиллюстрируем процесс отыскания минимальных подмножеств сочленения. Выписываем булеву матрицу  $\|M\|$  симметрического графа  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  без петель, соответствующего графу на рис. 160, и дополнительную к ней матрицу

$$\|\bar{M}\| = I - \|M\|, \quad (37.16)$$

где  $\|I\|$  — квадратная матрица, все элементы которой единицы:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
<i>A</i>	1	1	1	1					
<i>B</i>	1		1						
<i>C</i>	1	1		1	1				
<i>D</i>	1		1		1				1
$\ M\  = E$	1		1	1		1	1		1
<i>F</i>					1		1	1	1
<i>G</i>					1	1		1	1
<i>H</i>						1	1		1
<i>I</i>				1	1	1	1	1	

(37.17)

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
<i>A</i>	1					1	1	1	1
<i>B</i>		1		1	1	1	1	1	1
<i>C</i>			1			1	1	1	1
<i>D</i>				1		1	1	1	
$\ \bar{M}\  = E$					1				1
<i>F</i>	1	1	1	1		1			
<i>G</i>	1	1	1	1			1		
<i>H</i>	1	1	1	1	1			1	
<i>I</i>	1	1	1						1

(37.18)

Подматрица в  $\|\bar{M}\|$ , определяемая строками, соответствующими  $\mathbf{B}_1$ , и столбцами, соответствующими  $\mathbf{B}_2$  (в обозначениях (37.1)), содержит только единицы (в силу (37.1,  $\varepsilon$ )), следовательно, она полная. Покажем, что она и основная. Действительно, если это не так, то подмножество

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} - (\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2) \quad (37.19)$$

не минимальное (в этом случае к  $\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$  можно присоединить

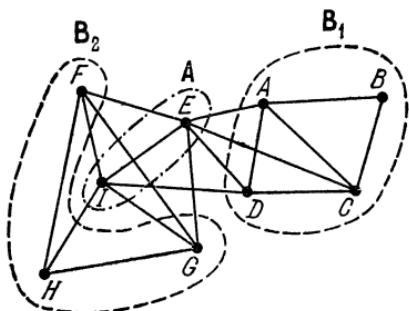


Рис. 161.

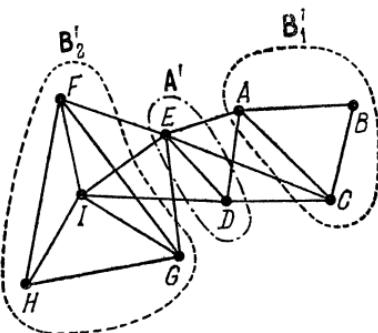


Рис. 162.

по крайней мере одну вершину  $X_i$ , так что (37.1,  $\varepsilon$ ) еще выполняется) и, следовательно,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{E} - (\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2 \cup \{X_i\}) \equiv \mathbf{A}. \quad (37.20)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию основных подматриц в  $\|\bar{M}\|$ , определяемых подмножествами  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  с  $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{B}_2 \supset \mathbf{E}_2$ .

Пример. Если  $\mathbf{E}_1 = \{F\}$ ,  $\mathbf{E}_2 = \{B, C\}$  (рис. 160), то  $\|M_1\|$  определяется с помощью

$$\mathbf{B}_1 = \{A, B, C, D\} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_2 = \{F, G, H\}, \quad (37.21)$$

а  $\|M_2\|$  — с помощью

$$\mathbf{B}'_1 = \{A, B, C\} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}'_2 = \{F, G, H, I\}. \quad (37.22)$$

Отсюда следует, что

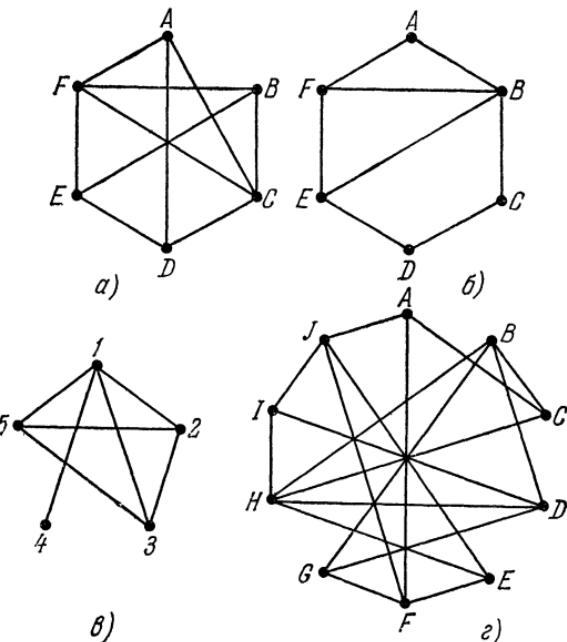
$$\mathbf{A} = \{E, I\}, \quad |\mathbf{A}| = 2, \quad (37.23)$$

$$\mathbf{A}' = \{D, E\}, \quad |\mathbf{A}'| = 2 \quad (37.24)$$

— минимальные подмножества сочленения (см. рис. 161 и 162).

## УПРАЖНЕНИЕ

37А. Перечислить минимальные подмножества сочленения графов:



## § 38. Прадерево. Дерево

**Прадерево.** *Прадеревом* с корнем  $X_0$  называется граф  $G = (E, \Gamma)$ , если:

$$1) \quad (\exists! X_0 \in E) \Gamma^{-1} \{X_0\} = \emptyset; \quad (38.1)$$

$$2) \quad (\forall X_i \in E) |\Gamma^{-1} \{X_i\}| = 1 \quad (X_i \neq X_0); \quad (38.2)$$

3) граф не содержит контуров.

Иначе говоря, существует единственная вершина  $X_0$ , в которую не заходит ни одна дуга; в каждую другую вершину заходит в точности одна дуга; граф не имеет контуров. На рис. 163 представлено прадерево.

Вершина  $X_i$  *висячая*, если  $\Gamma X_i = \emptyset$ . Будучи графом без контуров, прадерево всегда обладает порядковой функцией. На рис. 164 и 165 даны возможные порядковые функции прадерева на рис. 163.

**Бифуркант.** Прадерево называется *бифуркантом*, если

$$(\forall X_i \in E) |\Gamma \{X_i\}| = 0 \text{ или } 2, \quad (38.3)$$

Пример бифурканта приведен на рис. 166.

**Частичное прадерево графа.** Пусть  $G_1 = (E, \Gamma_1)$  — частичный граф без петель графа  $G = (E, \Gamma)$ . Если  $G_1$  — прадерево с

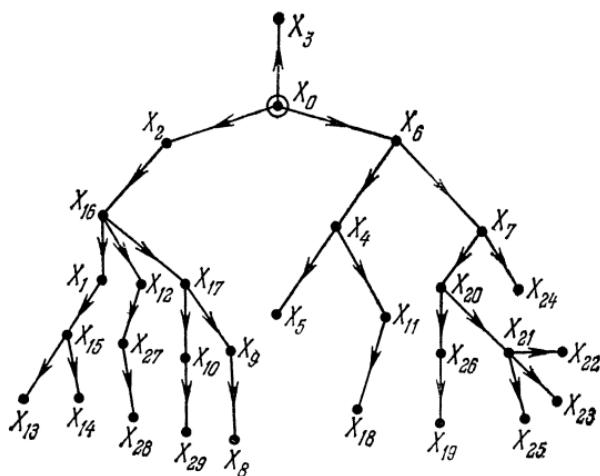


Рис. 163.

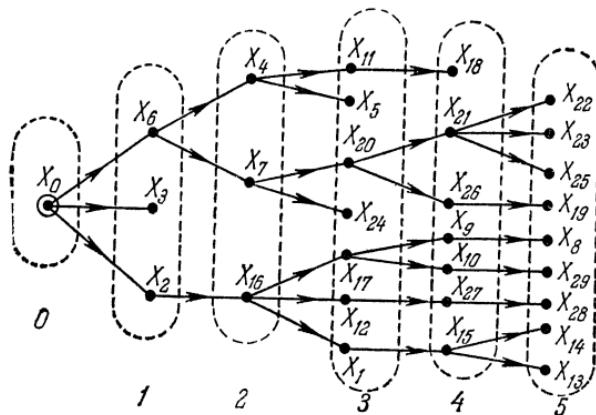


Рис. 164.

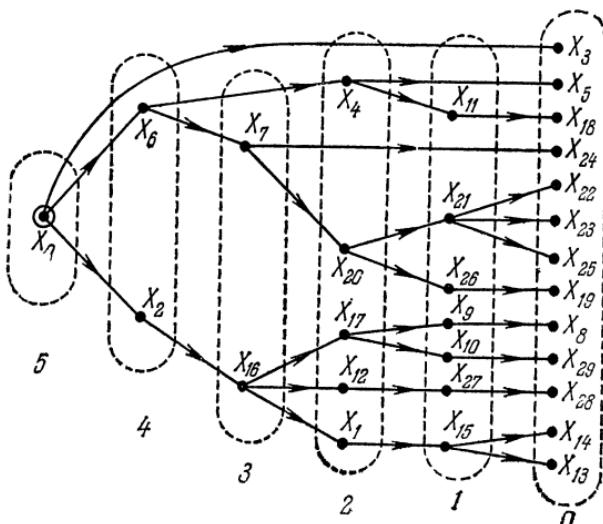


Рис. 165.

корнем  $X_i$ , то этот частичный граф называют частичным падеревом  $G$  с корнем  $X_i$ .

Например, можно показать, что существует шесть частичных падеревьев графа  $G$  на рис. 167 с корнем  $A$ .

Используя результаты из [8], дадим метод пересчета падеревьев.

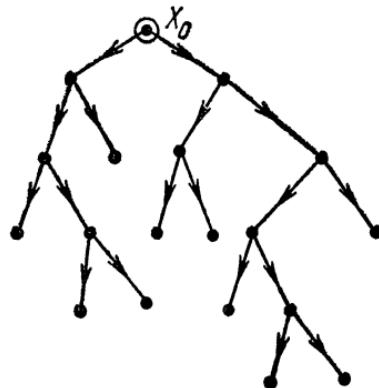


Рис. 166.

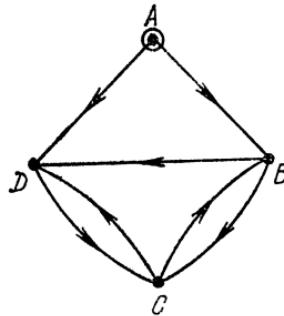


Рис. 167.

Рассмотрим булеву матрицу  $\|a\|$ , соответствующую графу  $G$ , и определим матрицу  $\|d\|$ :

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ |\Gamma^{-1}X_i|, & i = j, \end{cases} \quad (38.4)$$

и матрицу  $\|b\|$ :

$$\|b\| = \|d\| - \|a\|. \quad (38.5)$$

Для каждого  $i$  обозначим через  $\Delta_i$  минор матрицы  $\|b\|$ , получающийся вычеркиванием в ней  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца. Тогда значение минора  $\Delta_i$  дает число падеревьев с корнем  $X_i$ .

Например, для графа на рис. 167 имеем

$$\|a\| = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ D & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad (38.6)$$

$$\|d\| = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 2 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 2 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}, \quad (38.7)$$

$$\|b\| = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & -1 & 0 & -1 \\ B & 0 & 2 & -1 & -1 \\ C & 0 & -1 & 2 & -1 \\ D & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}. \quad (38.8)$$

Число прадеревьев с корнем  $A$  (рис. 168) равно

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6. \quad (38.9)$$

Очевидно, что для этого графа существуют частичные прадеревья только с корнем  $A$ .

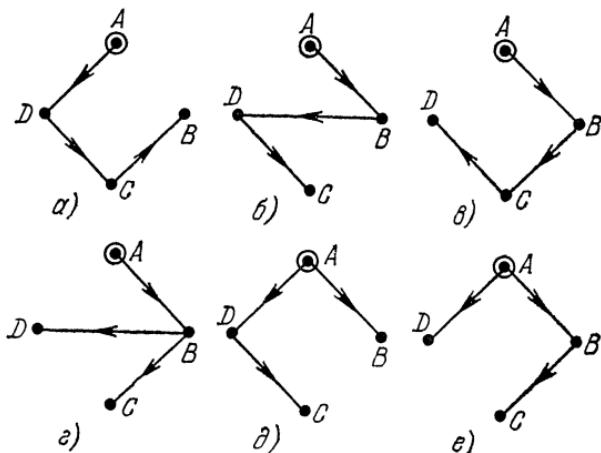


Рис. 168.

**Ветвление.** Граф, все связные компоненты которого — прадеревья, называют *ветвящимся*. Пример такого графа приведен на рис. 169.

**Дерево.** Неориентированный граф  $H = (E, \bar{U})$  называется *деревом*, если для него выполняется одно из условий (эквивалентных между собой):

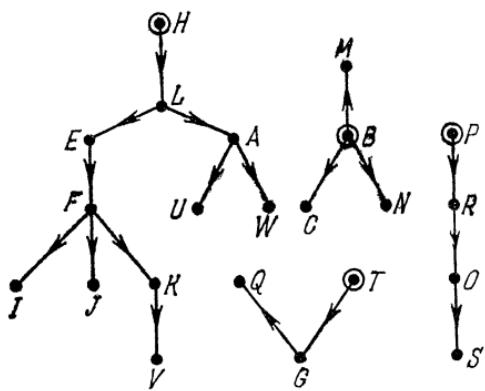


Рис. 169.

- 1)  $H$  связный и не содержит циклов;
- 2)  $H$  содержит  $n - 1$  ребер и не содержит циклов ( $n = |E|$ );
- 3)  $H$  связный и содержит  $n - 1$  ребер;
- 4)  $H$  не содержит циклов, а добавление одного ребра между любыми двумя вершинами приводит к появлению одного и только одного цикла;

- 5)  $H$  связный, а удаление любого ребра делает его несвязным;
- 6) любая пара вершин соединена единственной цепью.

Пример дерева приведен на рис. 170.

**Частичное дерево графа  $\bar{G}$ .** Рассмотрим неориентированный граф  $\bar{G} = (\bar{E}, \bar{U})$ ;  $\bar{G}$  связный тогда и только тогда, когда он допускает частичный граф  $\bar{H} = (\bar{E}, \bar{V})$ , являющийся деревом. Это дерево называют *частичным деревом графа  $\bar{G}$* .

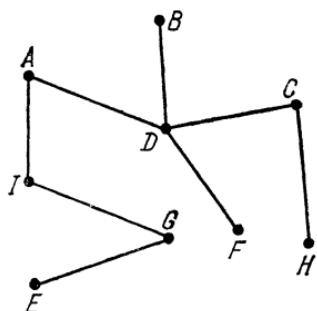


Рис. 170.

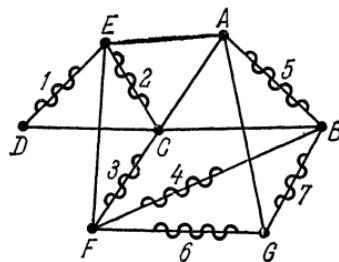


Рис. 171.

Для построения частичного дерева графа достаточно найти ребро, удаление которого не нарушает связности графа; если такого ребра нет, то граф — дерево; если ребро найдется, то удаляем его и процедура повторяется.

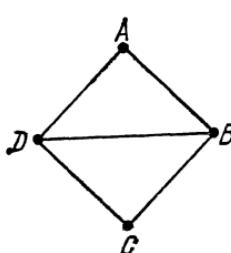


Рис. 172.

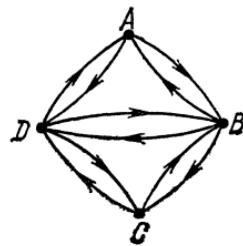


Рис. 173.

Например, на рис. 171 указан порядок удаления ребер, приводящий к дереву.

Подсчет частичных деревьев графа производится аналогично подсчету прадеревьев ориентированного графа. Пусть  $G = (\bar{E}, \Gamma)$  — симметрический граф без петель, соответствующий  $\bar{G}$ . Полагаем

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ |\Gamma^{-1} X_i|, & i = j; \end{cases} \quad (38.10)$$

$$\|b\| = \|d\| - \|a\|, \quad (38.11)$$

где  $\|a\|$  — булева матрица графа  $G$ .

Величина любого минора  $\Delta_i$  (см. стр. 219) дает искомое число (так как граф симметрический).

Пример. На рис. 172 и 173 изображены соответственно  $\bar{G}$  и  $G$ . Имеем

$$\|a\| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ D & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (38.12)$$

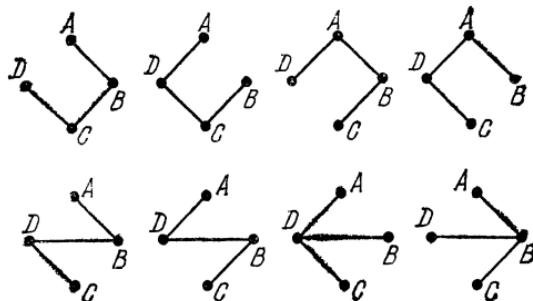


Рис. 174.

$$\|d\| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A & 2 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 3 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 2 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad (38.13)$$

$$\|b\| = \|d\| - \|a\| = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A & 2 & -1 & 0 & -1 \\ B & -1 & 3 & -1 & -1 \\ C & 0 & -1 & 2 & -1 \\ D & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}. \quad (38.14)$$

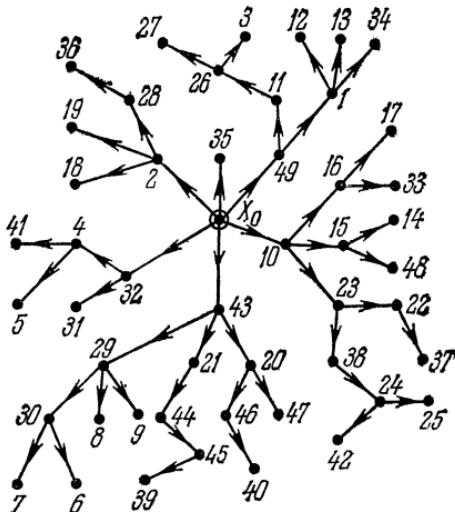
Тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8. \quad (38.15)$$

Эти восемь деревьев представлены на рис. 174.

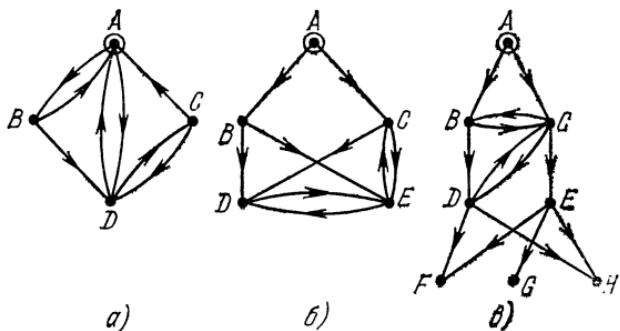
## УПРАЖНЕНИЯ

38А. Указать возможные порядковые функции прадерева.



38Б. Указать функцию Гранди для прадерева из упражнения 38А. Что можно сказать о функции Гранди для паддерева?

38В. Каково число частичных паддеревьев с корнем  $A$  графов:



38Г. Перечислить частичные паддеревья графа а) из упражнения 38В.

38Д. Каково число частичных деревьев неориентированных графов, соответствующих графикам из упражнения 38В.

38Е. Перечислить частичные деревья графа, соответствующего графу б) из упражнения 38В.

## § 39. Конечные структуры

Структуры играют существенную роль при изучении упорядоченных множеств \*). Мы будем рассматривать конечные структуры, которые являются графиками, обладающими некоторыми

\* ) См., например, Л. А. Скорняков, Элементы теории структур, «Наука», 1970. (Прим. перев.)

свойствами. Большинство определений и свойств, рассматриваемых в этом параграфе, остаются справедливыми и для бесконечных структур.

Напомним вкратце некоторые определения.

**Упорядоченное множество.** Упорядоченное множество — это множество  $E$ , на котором определено отношение порядка  $\leqslant$ . Оно обозначается  $(E, \leqslant)$ . Рассматриваемые в этом параграфе отношения порядка (если не уточнено) не строгие.

**Сравнимые элементы.** Два элемента  $a$  и  $b$  упорядоченного множества  $E$  называют сравнимыми, если для них выполняется одно из условий:  $a \leqslant b$  или  $b \leqslant a$ .

Следовательно,  $a$  сравним с самим собой.

**Линейно упорядоченное множество.**

Линейно упорядоченное множество — это упорядоченное множество, любые два элемента которого сравнимы.

**Частично упорядоченное множество.** Частично упорядоченное множество — это упорядоченное множество, не являющееся линейно упорядоченным.

**Цепь<sup>1)</sup>.** Цепь — это линейно упорядоченная часть упорядоченного множества.

Цепь<sup>1)</sup>. Цепь — это линейно упорядоченная часть упорядоченного множества.

Пример (рис. 175). Введем отношение порядка:  $X_i \leqslant X_j$ , если  $X_j \in \Gamma X_i$ . Так как не все элементы сравнимы (например,  $B$  и  $H$ ), то множество вершин частично упорядочено. Подмножества  $\{B, C, D, E, F\}$ ,  $\{H, G, F\}$ ,  $\{H, A\}$  — цепи.

**Минимальный (максимальный) элемент.** Минимальным (максимальным) элементом упорядоченного множества  $E$  называется элемент  $J$ , для которого в  $E$  не существует строго меньшего (строго большего) элемента, т. е. соответственно

$$(\forall X_i \in E) \quad (X_i \leqslant Y) \Rightarrow (X_i = Y), \quad (39.1)$$

$$(\forall X_i \in E) \quad (X_i \geqslant Y) \Rightarrow (X_i = Y). \quad (39.2)$$

Например, на рис. 175 элементы  $B$  и  $H$  минимальные, а  $A$  и  $F$  максимальные.

**Наименьший, или первый (наибольший, или последний), элемент.** Наименьшим (наибольшим) элементом упорядоченного множества  $E$  называется элемент, меньший или равный (больший или равный) любому другому, т. е. соответственно

$$(\forall X_i \in E) \quad (Y \leqslant X_i) \Rightarrow (Y \leqslant X_i), \quad (39.3)$$

$$(\forall X_i \in E) \quad (Y \geqslant X_i) \Rightarrow (Y \geqslant X_i). \quad (39.4)$$

<sup>1)</sup> Не следует смешивать с понятием из § 32.

Например, упорядоченное множество на рис. 175 не обладает ни наименьшим (так как  $B$  и  $H$  несравнимы), ни наибольшим (так как  $F$  и  $A$  несравнимы) элементами. Упорядоченное подмножество  $\{B, C, D, E, F, G, H\}$  обладает наибольшим элементом  $F$ , а наименьшего элемента нет. Множество на рис. 176 обладает как наименьшим элементом  $A$ , так и наибольшим элементом  $B$ .

**Миноранта (мажоранта).** Рассмотрим упорядоченное подмножество  $A$  упорядоченного множества  $E$  с введенным в  $E$  отношением порядка.

**Минорантой (мажорантой)** подмножества  $A$  называется элемент  $Y \in E$ , не больший (не меньший) любого элемента из  $A$ , т. е. соответственно

$$(\forall X_i) \quad (X_i \in A) \Rightarrow (Y \leqslant X_i), \quad (39.5)$$

$$(\forall X_i) \quad (X_i \in A) \Rightarrow (Y \geqslant X_i). \quad (39.6)$$

Говорят, что  $A$  **минорируется (мажорируется)** в  $E$ . Например, на рис. 175  $B$  — миноранта  $\{D, E, F\}$ ,  $E$  — мажоранта  $\{B, C, D\}$ ,  $A$  — мажоранта  $H$ ,  $H$  — миноранта  $\{A, G, F\}$ .

Заметим, что если  $Y$  — миноранта (мажоранта)  $A$  и  $Y \in A$ , то он является наименьшим (наибольшим) элементом  $A$ .

**Нижняя (верхняя) грань.** Обозначим через  $M$  ( $M'$ ) множество минорант (мажорант) подмножества  $A \subset E$ . Если  $M$  ( $M'$ ) допускает наибольший (наименьший) элемент  $Y$ , то  $Y$  называют **нижней (верхней) гранью**  $A$ . В частности, если  $A$  обладает наименьшим (наибольшим) элементом  $Y$ , то он и является нижней (верхней) гранью  $A$ .

Например, на рис. 175  $M = \{B, C, D\}$  — множество минорант для подмножества  $A = \{D, E, F\}$ . Так как  $D$  — наибольший элемент  $M$ , то  $D$  — нижняя грань  $A$ . Аналогично  $D$  — верхняя грань  $B = \{B, C, D\}$ .

**Максимальная цепь.** Цепь  $C$  называется **максимальной**, если она не содержится строго ни в какой другой цепи.

**Пример 1.** Граф на рис. 177 можно рассматривать как множество с отношением порядка:  $X_i \leqslant X_j$ , если  $X_j \in GX_i$ . Цепи  $\{E, B, D, C\}$ ,  $\{F, E, A\}$  максимальные, цепи  $\{B, D, C\}$ ,  $\{E, B, C\}$ ,  $\{E, D, C\}$ ,  $\{E, A\}$  не максимальные.

**Пример 2.** Рассмотрим множество  $E$  делителей числа 36, упорядоченное отношением « $X_i$  делит  $X_j$ » (рис. 178). Цепь  $C = \{1, 3, 9, 18, 36\}$  максимальная, так как для любого элемента из  $E$  —  $C$  можно найти элемент из  $C$ , не сравнимый с ним. Очевидно, что  $\{1, 2, 36\}$  — не максимальная цепь.

**Верхняя полуструктура.** Упорядоченное множество называют **верхней полуструктурой**, если для каждой пары его элементов существует верхняя грань.

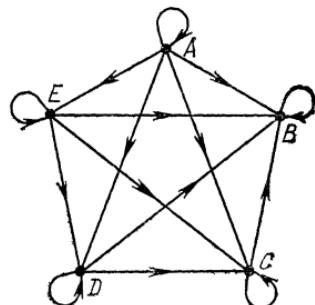


Рис. 176.

**Нижняя полуструктура.** Упорядоченное множество называют *нижней полуструктурой*, если для каждой пары его элементов существует нижняя грань.

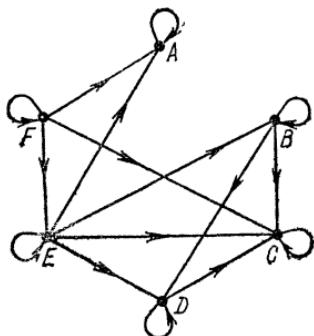


Рис. 177.

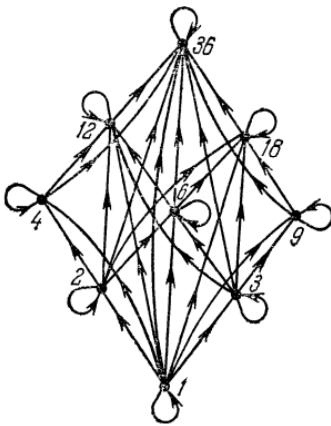


Рис. 178.

Пример 1. Упорядоченное множество на рис. 179 — верхняя полуструктура. Действительно,

$$\begin{aligned} \sup \{A, B\} &= A, \quad \sup \{A, C\} = A, \quad \sup \{A, D\} = A, \quad \sup \{A, E\} = A, \\ \sup \{B, C\} &= B, \quad \sup \{B, D\} = A, \quad \sup \{B, E\} = A, \\ \sup \{C, D\} &= A, \quad \sup \{C, E\} = A, \quad \sup \{D, E\} = A, \end{aligned} \quad (39.7)$$

Это не нижняя полуструктура, так как  $\{D, E\}$  не обладает нижней гранью. Если на рис. 179 изменить направление стрелок на обратное, то для упорядоченного таким образом множества справедливо обратное утверждение.

Пример 2. Любая цепь является одновременно верхней и нижней полуструктурой, как, например, множество  $\{A, B, C\}$  на рис. 179. То же справедливо для множества на рис. 178.

Пример 3. Множество  $\mathcal{P}(E)$  подмножеств из  $E$ , упорядоченное по включению, — одновременно верхняя и нижняя полуструктура. Действительно, если  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , то

$$\sup(A, B) = A \cup B, \quad (39.8)$$

$$\inf(A, B) = A \cap B. \quad (39.9)$$

**Структуры.** Упорядоченное множество, являющееся одновременно верхней и нижней полуструктурой, называют *структурой*, или *решеткой*.

Примеры структур: упорядоченное множество  $\{A, B, C, D, E, F, G\}$  на рис. 180; множество всех подмножеств множества  $E =$

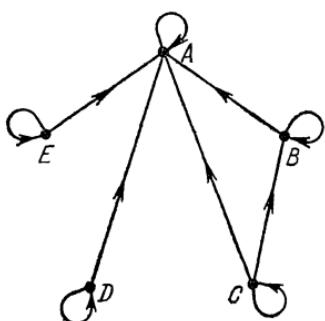


Рис. 179.

$\{A, B, C\}$  (рис. 181); множество делителей числа 36, упорядоченное отношением делимости (рис. 178).

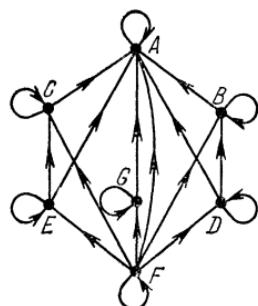


Рис. 180

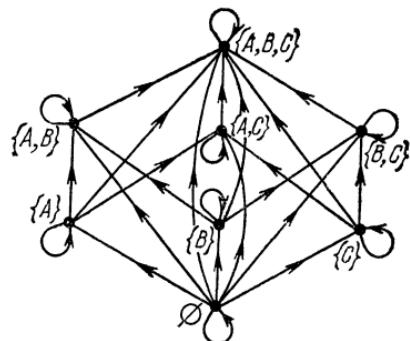


Рис. 181

**Подструктуры.** Пусть  $T$  — структура и подмножество  $A$  упорядочено введенным в  $T$  отношением порядка.

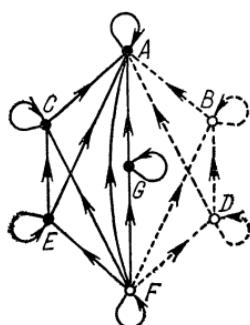


Рис. 182.

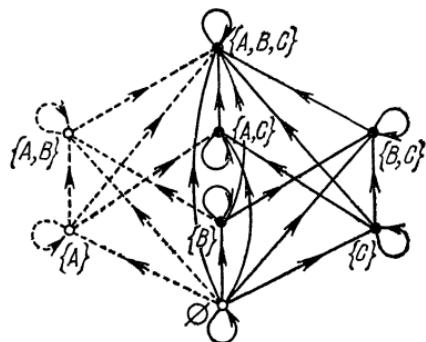


Рис. 183.

Назовем  $A$  *подструктурой* структуры  $T$ , если для любых двух элементов  $X, Y \in A$  верхняя и нижняя грани

$$\sup_T \{X, Y\} \quad \text{и} \quad \inf_T \{X, Y\} \quad (39.10)$$

принадлежат  $A$ , т. е.

$$(\forall X)(\forall Y)(X \in A \text{ и } Y \in A) \Rightarrow (\sup_T \{X, Y\} \in A \text{ и } \inf_T \{X, Y\} \in A) \quad (39.11)$$

или

$$\begin{aligned} \sup_T \{X, Y\} &= \sup_A \{X, Y\} \in A, \\ \inf_T \{X, Y\} &= \inf_A \{X, Y\} \in A. \end{aligned} \quad (39.12)$$

Примеры подструктур:  $\{A, C, E, F, G\}$  — подструктура структуры  $\{A, B, C, D, E, F, G\}$  (рис. 182);  $\{\emptyset, \{B\}, \{C\}, \{A, C\}, \{B, C\}, E\}$  — подструктура структуры  $\mathcal{P}(E)$ , где  $E = \{A, B, C\}$  (рис. 183);

множество

$$\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 6, 12, 18, 36\} \quad (39.13)$$

— подструктура структуры  $\mathbf{T}$  делителей числа 36 (рис. 184), а множество

$$\mathbf{B} = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\} \quad (39.14)$$

— не подструктура этой структуры (рис. 185), так как  $\sup_{\mathbf{T}}\{2, 3\} = 6, 6 \notin \mathbf{B}$  и, более того, в  $\mathbf{B}$  не существует верхней грани для  $\{2, 3\}$  в силу того, что множество  $\mathbf{M} = \{12, 18, 36\}$  его

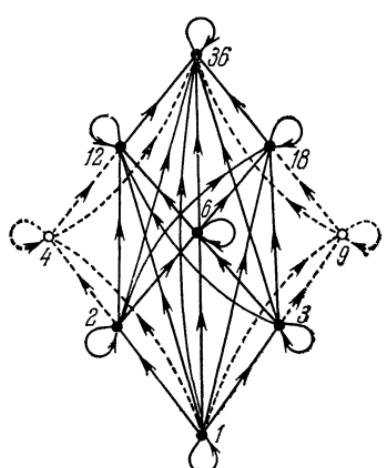


Рис. 184

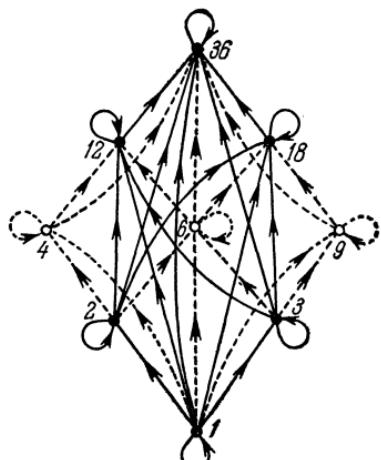


Рис. 185.

мажорант не обладает наименьшим элементом в  $\mathbf{B}$ ; подмножество (рис. 186)

$$\mathbf{C} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 36\} \quad (39.15)$$

— не подструктура структуры  $\mathbf{T}$ , так как  $\sup_{\mathbf{T}}\{4, 6\} = 12$  и  $12 \notin \mathbf{C}$ , однако легко убедиться, что  $\mathbf{C}$  — структура; множество  $\mathcal{P}(\mathbf{E}) — \{\mathbf{E}, \emptyset\}$ , упорядоченное по включению, не является подструктурой структуры  $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ , так как оно вообще не структура (не является ни верхней, ни нижней подструктурой).

Заметим, что для любой пары  $\{X, Y\}$  элементов подмножества  $\mathbf{C} \subset \mathbf{T}$ , упорядоченного введенным в структуре  $\mathbf{T}$  порядком, справедливо

$$\inf_{\mathbf{C}}\{X, Y\} \leqslant \inf_{\mathbf{T}}\{X, Y\} \leqslant \sup_{\mathbf{T}}\{X, Y\} \leqslant \sup_{\mathbf{C}}\{X, Y\}. \quad (39.16)$$

**Аксиоматическое определение структуры.** До сих пор мы определяли структуру как некоторое множество  $\mathbf{T}$ , в котором для каждой пары элементов  $\{X_i, X_j\}$  определены верхняя и нижняя грани. Они обозначались соответственно  $\sup_{\mathbf{T}}\{X_i, X_j\}$  (или  $\sup\{X_i, X_j\}\right)$ ,  $\inf_{\mathbf{T}}\{X_i, X_j\}$  (или  $\inf\{X_i, X_j\}\right)$ .

Будем рассматривать теперь sup и inf как операции на множестве  $\mathbf{T}$ :

$$\sup \{A, B\} = A \triangleright B, \quad (39.17)$$

$$\inf \{A, B\} = A \triangle B. \quad (39.18)$$

Тогда свойство множества  $\mathbf{T}$  быть структурой эквивалентно условию

$$(\forall A)(\forall B)(A \in \mathbf{T} \text{ и } B \in \mathbf{T}) \Rightarrow (A \triangleright B \in \mathbf{T} \text{ и } A \triangle B \in \mathbf{T}), \quad (39.19)$$

Операции  $\Delta$  и  $\nabla$  можно рассматривать как отображения  $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$  в  $\mathbf{T}$ , которые каждой паре  $(A, B)$  из  $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$  сопоставляют

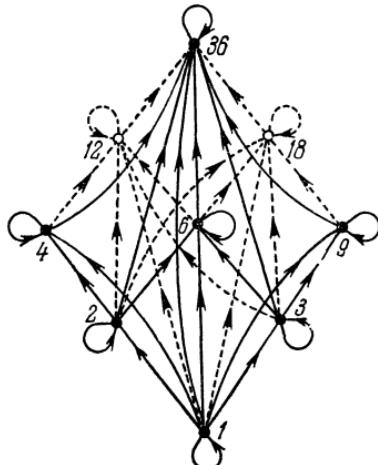


Рис. 186.

соответственно  $A \Delta B$  и  $A \nabla B$  из  $\mathbf{T}$ ; эти операции — внутренние законы композиции.

Для любых элементов  $A, B, C \in \mathbf{T}$  справедливы следующие соотношения:

$$A \nabla B = B \nabla A, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(коммутативность)}, \quad (39.20)$$

$$A \Delta B = B \Delta A \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(ассоциативность)}, \quad (39.21)$$

$$A \nabla (B \nabla C) = (A \nabla B) \nabla C, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(ассоциативность)}, \quad (39.22)$$

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(ассоциативность)}, \quad (39.23)$$

$$A \nabla A = A, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(идемпотентность)}, \quad (39.24)$$

$$A \Delta A = A \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(идемпотентность)}, \quad (39.25)$$

$$A \nabla (A \Delta B) = A, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(поглощение)}, \quad (39.26)$$

$$A \Delta (A \nabla B) = A \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(поглощение)}. \quad (39.27)$$

Об аксиоматической теории структур см. Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952.

**Двойственность.** Из формул (39.20) — (39.27) вытекает, что любая формула, относящаяся к структурам, имеет двойственную, которая получается из нее, если произвести замены:  $\leqslant \leftrightarrow \geqslant$ ,  $\geqslant \leftrightarrow \leqslant$ ,  $\nabla \leftrightarrow \Delta$ ,  $\Delta \leftrightarrow \nabla$ . Например, формула

$$(A \leqslant B) \Rightarrow ((A \Delta X) \leqslant (B \Delta X)) \quad (39.28)$$

двойственна формуле

$$(A \geqslant B) \Rightarrow ((A \nabla X) \geqslant (B \nabla X)). \quad (39.29)$$

**Модулярные структуры.** Для любых элементов  $A$ ,  $B$  и  $C$  структуры  $\mathbf{T}$  справедливо

$$(A \leqslant C) \Rightarrow (A \nabla (B \Delta C)) \leqslant ((A \nabla B) \Delta C). \quad (39.30)$$

Докажем теперь свойство, называемое свойством «слабой дистрибутивности»:

$$\begin{aligned} A \nabla (B \Delta C) &\leqslant (A \nabla B) \Delta (A \nabla C), \\ A \Delta (B \nabla C) &\geqslant (A \Delta B) \nabla (A \Delta C). \end{aligned} \quad (39.31)$$

Предварительно докажем

$$(A \leqslant B) \Rightarrow ((A \Delta X) \leqslant (B \Delta X)), \quad (39.32)$$

где  $X$  — произвольный элемент  $\mathbf{T}$ . По определению нижней грани  $A \Delta X \leqslant X$ ,  $A \Delta X \leqslant A$ , и так как  $A \leqslant B$ , то  $A \Delta X \leqslant B$ ; поэтому  $A \Delta X \leqslant X$ ,  $A \Delta X \leqslant B$  и  $A \Delta X \leqslant X \Delta B$ , так как  $B \Delta X$  — наибольшая из минорант для  $\{B, X\}$ . Аналогично

$$(A \geqslant B) \Rightarrow ((A \nabla X) \geqslant (B \nabla X)). \quad (39.33)$$

В силу определения верхней грани  $B \leqslant (B \nabla C)$ , и из (39.32) имеем

$$(B \leqslant (B \nabla C)) \Rightarrow (B \Delta A) \leqslant ((B \nabla C) \Delta A). \quad (39.34)$$

или

$$(A \Delta B) \leqslant (A \Delta (B \nabla C)). \quad (39.35)$$

Аналогично доказывается

$$(A \Delta C) \leqslant (A \Delta (C \nabla B)) = (A \Delta (B \nabla C)). \quad (39.36)$$

Элемент  $A \Delta (B \nabla C)$  мажорирует элементы  $A \Delta B$  и  $A \Delta C$ , следовательно, и их верхнюю грань:

$$((A \Delta B) \nabla (A \Delta C)) \leqslant (A \Delta (B \nabla C)). \quad (39.37)$$

что и требовалось доказать. В силу двойственности

$$((A \nabla B) \Delta (A \nabla C)) \geqslant (A \nabla (B \Delta C)). \quad (39.38)$$

Если примем  $A \leqslant C$ , то  $C = A \nabla C$  и в силу (39.31)

$$(A \nabla (B \Delta C)) \leqslant ((A \nabla B) \Delta C). \quad (39.39)$$

**Определение.** Говорят, что структура *модулярна*, если для любых ее трех элементов  $A, B, C$  имеем

$$(A \leqslant C) \Rightarrow (A \triangleright (B \Delta C)) = ((A \triangleright B) \Delta C). \quad (39.40)$$

**Замечание.** Если два из элементов  $A, B, C$  равны между собой, то это соотношение выполняется для любой структуры (свойство поглощения).

**Пример:** Рассмотрим структуру на рис. 187 и проверим для нее (39.40). Легко видеть, что  $U$  — верхняя, а  $O$  — нижняя грань для любой пары элементов. Как уже отмечалось, достаточно рассмотреть тройки различных элементов, два из которых сравнимы. В каждой такой тройке присутствует либо  $U$ , либо  $O$ , так как любые два из элементов  $X, Y, Z$  несравнимы.

Для определенности рассмотрим тройки с  $U$  и проверим

$$(A \leqslant U) \Rightarrow (A \triangleright (B \Delta U) = (A \triangleright B) \Delta U). \quad (39.41)$$

Так как для любого  $T$

$$T \Delta U = T, \quad (39.42)$$

то имеем

$$B \Delta U = B, \quad (A \triangleright B) \Delta U = A \triangleright B, \quad (39.43)$$

т. е.

$$A \triangleright B = A \triangleright B, \quad (39.44)$$

и структура модулярная.

**Диаграмма Хассе.** Для более простого изображения конечных структур используют представление ее максимальных цепей с помощью неориентированных графов, называемое *диаграммой Хассе*. В такой диаграмме элементы представляются точками (вершинами), и две сравнимые последовательные вершины  $X$  и  $Y$  (т. е.  $X \leqslant Y$  и не существует  $Z \neq X, Y$  с  $X \leqslant Z \leqslant Y$ ) соединяются негоризонтальным ребром, причем  $X$  располагается ниже  $Y$ . Тем самым каждая максимальная цепь (в смысле структур) на диаграмме Хассе представляется цепью неориентированного графа.

Рассмотрим, например, структуру на рис. 188,  $a$ ).  $\{C, D, E, A\}$  и  $\{C, B, A\}$  — ее максимальные цепи. Изображая их, как на рис. 188,  $b$ ), и стирая стрелки, получаем диаграмму Хассе (рис. 188,  $b$ ). На рис. 189—191 приведены другие примеры диаграмм Хассе.

**Дистрибутивные структуры.** Структура *дистрибутивна*, если выполнено условие

$$A \triangleright (B \Delta C) = (A \triangleright B) \Delta (A \triangleright C) \quad (39.45)$$

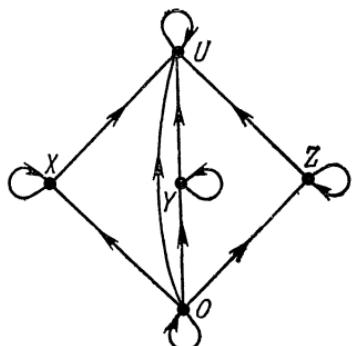


Рис. 187.

или двойственное ему условие

$$A \Delta (B \nabla C) = (A \Delta B) \nabla (A \Delta C). \quad (39.46)$$

Например, структура, представленная диаграммой Хассе на рис. 192, дистрибутивна. Действительно,

$$A_2 \Delta (A_4 \nabla A_5) = (A_2 \Delta A_4) \nabla (A_2 \Delta A_5), \quad (39.47)$$

так как

$$A_2 \Delta (A_4 \nabla A_5) = A_2 \Delta A_6 = A_2, \quad (39.48)$$

$$(A_2 \Delta A_4) \nabla (A_2 \Delta A_5) = A_2 \nabla A_2 = A_2. \quad (39.49)$$

**Теорема.** Всякая дистрибутивная структура модулярна.

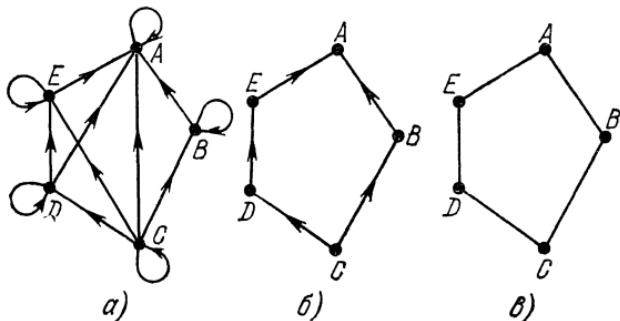


Рис. 188.

В самом деле, для любых элементов  $A, B, C$  дистрибутивной структуры выполняется

$$A \nabla (B \Delta C) = (A \nabla B) \Delta (A \nabla C). \quad (39.50)$$

Если

$$A \leqslant C, \quad (39.51)$$

то

$$A \nabla (B \Delta C) = (A \nabla B) \Delta C, \quad (39.52)$$

так как  $A \nabla C = C$ .

**Теорема.** Всякая подструктура дистрибутивной структуры дистрибутивна.

Пусть  $A, B, C$  — любые элементы подструктуры  $\mathbf{T}'$  структуры  $\mathbf{T}$ . Тогда

$$A \nabla (B \Delta C) = (A \nabla B) \Delta (A \nabla C). \quad (39.53)$$

**Структуры с дополнениями.** *Дополнение.* Рассмотрим структуру  $\mathbf{T}$ , содержащую «нулевой» элемент  $O$ , являющийся нижней гранью  $\mathbf{T}$ , и «универсальный» элемент  $U$ , являющийся верхней гранью  $\mathbf{T}$ . Элемент  $\bar{X} \in \mathbf{T}$  называют *дополнением* элемента  $X$ , если

$$X \Delta \bar{X} = O, \quad (39.54)$$

$$X \nabla \bar{X} = U. \quad (39.55)$$

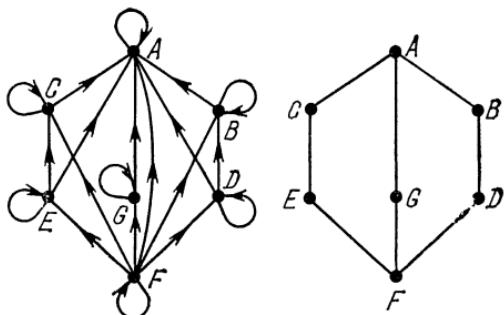


Рис. 189.

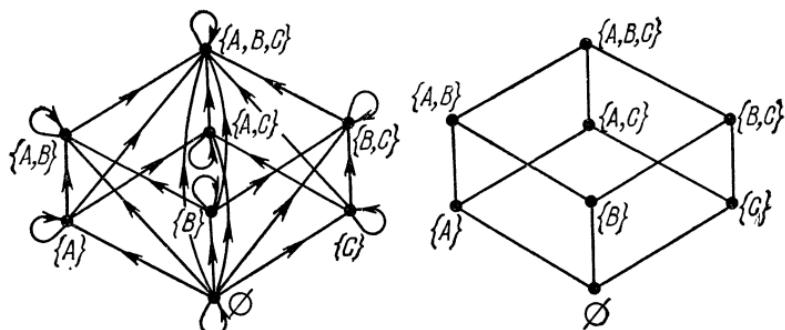


Рис. 190.

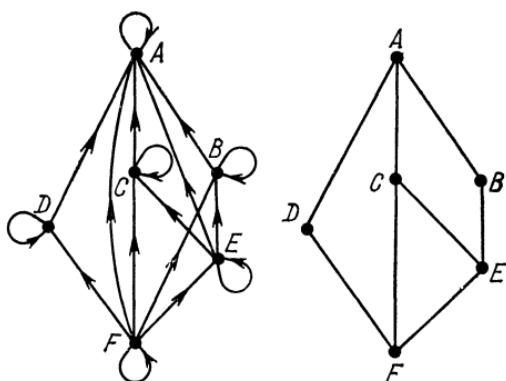


Рис. 191.

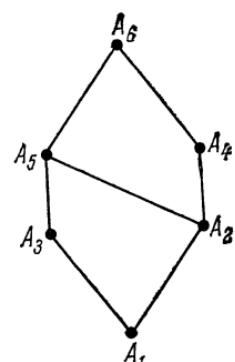


Рис. 192.

Например, для структуры на рис. 193 имеем

$$\bar{O} = U, \quad \bar{A}_2 = A_4, \quad \bar{A}_3 = A_1, \quad \bar{A}_4 = A_2, \quad (39.56)$$

$$\text{либо } A_3, \text{ либо } A_5, \quad \bar{A}_5 = A_4, \quad \bar{U} = O,$$

а элементы  $A_2, A_3, A_4, A_5$  структуры на рис. 194 не обладают дополнениями.

**Теорема.** Если элемент  $A$  дистрибутивной структуры  $\mathbf{T}$  обладает дополнением, то оно единственное.

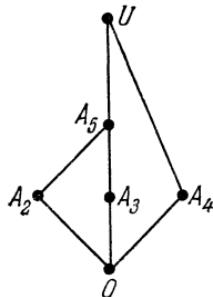


Рис. 193.

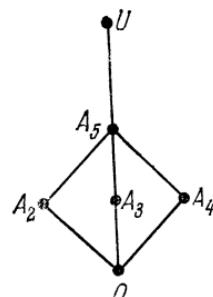


Рис. 194.

Предположим противное, т. е. что  $B$  и  $C$  — два дополнения  $A$ :

$$A \Delta B = O, \quad A \nabla B = U, \quad A \Delta C = O, \quad A \nabla C = U, \quad (39.57)$$

откуда

$$A \Delta B = A \Delta C, \quad A \nabla B = A \nabla C. \quad (39.58)$$

Покажем, что

$$((A \Delta B = A \Delta C) \text{ и } (A \nabla B = A \nabla C)) \Rightarrow (B = C). \quad (39.59)$$

По предположению

$$A \Delta B = A \Delta C \text{ и } A \nabla B = A \nabla C \quad (39.60)$$

и можно записать

$$\begin{aligned} B &= (B \Delta A) \nabla B && \text{(поглощение),} \\ &= (A \Delta B) \nabla B && \text{(коммутативность } \Delta\text{),} \\ &= (A \Delta C) \nabla B && \text{(предположение),} \\ &= (A \nabla B) \Delta (C \nabla B) && \text{(дистрибутивность).} \end{aligned} \quad (39.61)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} C &= (C \Delta A) \nabla C && \text{(поглощение),} \\ &= (A \Delta C) \nabla C && \text{(коммутативность } \Delta\text{),} \\ &= (A \Delta B) \nabla C && \text{(предположение),} \\ &= (A \nabla C) \Delta (B \nabla C) && \text{(дистрибутивность),} \\ &= (A \nabla C) \Delta (C \nabla B) && \text{(коммутативность } \nabla\text{),} \\ &= (A \nabla B) \Delta (C \nabla B) && \text{(предположение).} \end{aligned} \quad (39.62)$$

Итак,  $B = C$ .

**Структура с дополнениями.** Говорят, что  $\mathbf{T}$  — структура с дополнениями, если:

1) она обладает нулевым элементом ( $O = \inf \mathbf{T}$ ) и универсальным элементом ( $U = \sup \mathbf{T}$ ),

2) каждый элемент из  $\mathbf{T}$  обладает по крайней мере одним дополнением.

Например, структура на рис. 195 является структурой с дополнениями:

$$\bar{O} = U, \quad \bar{A} = C, \quad \bar{B} = C, \quad \bar{C} = A \text{ или } B, \quad \bar{U} = O. \quad (39.63)$$

Структура на рис. 190 также является структурой с дополнениями, в то время как структура на рис. 194 не будет таковой.

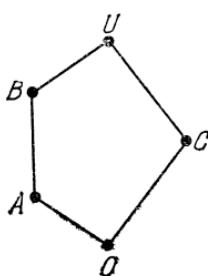


Рис. 195.

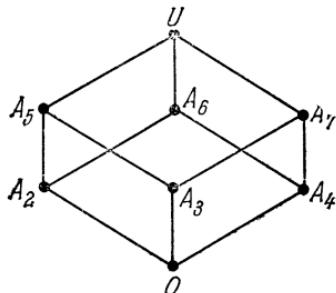


Рис. 196.

**Булевые структуры.** Дистрибутивная структура с дополнениями называется *булевой*.

Например, на рис. 196 диаграммой Хассе представлена такая структура. Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{O} &= U, & \bar{A}_2 &= A_7, & \bar{A}_3 &= A_6, & \bar{A}_4 &= A_5, \\ \bar{A}_5 &= A_4, & \bar{A}_6 &= A_3, & \bar{A}_7 &= A_2, & \bar{U} &= O, \end{aligned} \quad (39.64)$$

и легко проверить, что она дистрибутивна.

**Теорема I.** Каждый элемент булевой структуры обладает одним и только одним дополнением.

Доказательство следует непосредственно из того, что каждый элемент обладает по крайней мере одним дополнением (структурой с дополнениями) и это дополнение единственно в силу дистрибутивности структуры.

**Теорема II.** Для каждого элемента  $X$  булевой структуры справедливо

$$\overline{(\bar{X})} = X. \quad (39.65)$$

Это следствие теоремы I.

**Теорема III.** Для любых двух элементов  $X$  и  $Y$  булевой структуры выполняются соотношения:

$$\bar{X} \triangle \bar{Y} = \bar{X} \nabla \bar{Y}, \quad (39.66)$$

$$\bar{X} \nabla \bar{Y} = \bar{X} \triangle \bar{Y}. \quad (39.67)$$

Так как эти соотношения двойственны, то достаточно проверить одно из них. Для этого достаточно показать, что

$$(X \Delta Y) \Delta (\bar{X} \nabla \bar{Y}) = O, \quad (39.68)$$

$$(X \Delta Y) \nabla (\bar{X} \nabla \bar{Y}) = U. \quad (39.69)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (X \Delta Y) \Delta (\bar{X} \nabla \bar{Y}) &= ((X \Delta Y) \Delta \bar{X}) \nabla ((X \Delta Y) \Delta \bar{Y}) \\ &\doteq (X \Delta (Y \Delta \bar{X})) \nabla (X \Delta (Y \Delta \bar{Y})) \quad (\text{ассоциативность } \Delta), \\ &= (X \Delta (Y \Delta \bar{X})) \nabla (X \Delta O) \quad (\text{так как } Y \Delta \bar{Y} = O), \\ &= (X \Delta (Y \Delta \bar{X})) \nabla O \quad (\text{так как } X \Delta O = O), \\ &= (X \Delta (\bar{X} \Delta Y)) \nabla O \quad (\text{коммутативность } \Delta), \\ &= ((X \Delta \bar{X}) \Delta Y) \nabla O \quad (\text{ассоциативность } \Delta), \\ &= (O \Delta Y) \nabla O \quad (\text{так как } X \Delta \bar{X} = O), \\ &= O \nabla O \quad (\text{так как } O \Delta Y = O), \\ &= O \quad (\text{идемпотентность}). \end{aligned} \quad (39.70)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} (X \Delta Y) \nabla (\bar{X} \nabla \bar{Y}) &= (X \nabla (\bar{X} \nabla \bar{Y})) \nabla (Y \nabla (\bar{X} \nabla \bar{Y})) \\ &\quad (\text{дистрибутивность}), \\ &= ((X \nabla \bar{X}) \nabla \bar{Y}) \Delta (\bar{X} \nabla (Y \nabla \bar{Y})) \quad (\text{ассоциативность и коммутативность } \nabla), \\ &= (U \nabla \bar{Y}) \Delta (\bar{X} \nabla U) \quad (\text{так как } X \nabla \bar{X} = U \text{ и } Y \nabla \bar{Y} = U), \\ &= U \Delta U \quad (\text{по определению } U), \\ &= U \quad (\text{идемпотентность } \Delta). \end{aligned} \quad (39.71)$$

Примеры. Структура на рис. 197 дистрибутивна, но не является структурой с дополнениями, поэтому она не булева.

Структура  $\mathcal{P}(E)$  подмножеств, упорядоченных по включению, булева, если дополнение для  $A \in \mathcal{P}(E)$  определить как

$$\bar{A} = C_E A. \quad (39.72)$$

Формулы (39.66) и (39.67) принимают вид

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B, \quad (39.73)$$

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B \quad (39.74)$$

— известные в теории множеств формулы де Моргана.

На рис. 198—201 приведены  $\mathcal{P}(E)$  с  
 $E = \{A\}$ ,  $E = \{A, B\}$ ,  $E = \{A, B, C\}$ ,  $E = \{A, B, C, D\}$  (39.75)  
соответственно.

**Теорема IV.** Всякая конечная булева структура представляется как структура подмножеств (по включению) некоторого множества и обратно.

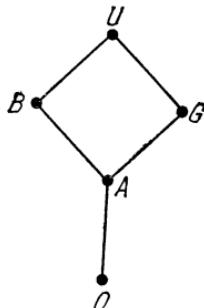


Рис. 197.

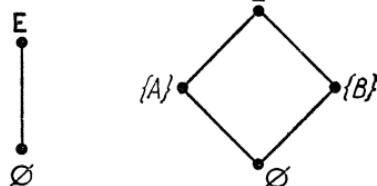


Рис. 198.

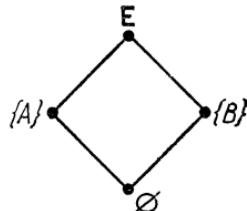


Рис. 199.

Утверждение следует из того, что свойства (39.72)—(39.74) выражают то же самое, что и свойства, с помощью которых оп-

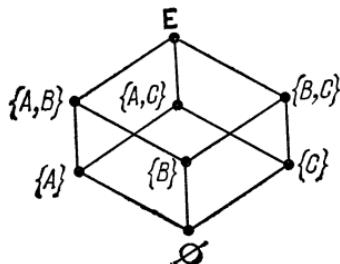


Рис. 200.

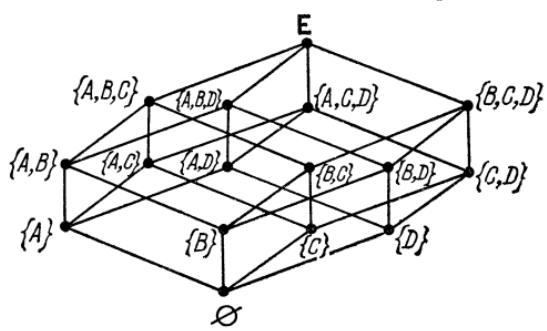


Рис. 201.

ределяется дистрибутивная структура с дополнениями, а именно:

$$1) (\forall X \in E) \exists! \bar{X}, \quad (39.76)$$

$$2) \overline{X \Delta Y} = \bar{X} \nabla \bar{Y}, \quad (39.77)$$

$$\overline{X \nabla Y} = \bar{X} \Delta \bar{Y}. \quad (39.78)$$

Отсюда следует, что алгебра подмножеств множества, называемая булевой алгеброй подмножеств, имеет строение булевой структуры. Это играет важную роль в теории множеств.

**Подструктуры булевой структуры.** Всякая подструктура булевой структуры  $T$  называется булевой подструктурой для  $T$ , если она содержит  $O$  и  $U$  и обладает свойствами булевой структуры.

Например, подмножества (см. рис. 203)

$$\Delta = \{\emptyset, \{B\}, \{C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \mathbf{E}\} \quad (39.79)$$

множества

$$\mathbf{E} = \{A, B, C, D\} \quad (39.80)$$

образуют булеву подструктуру булевой структуры на рис. 202.

**Гиперкуб.** Рассматривая рис. 199 и 200, легко заметить, что это — квадрат и куб (вообще говоря, ромб и параллелепипед). По аналогии принимаем, что на рис. 201 представлен гиперкуб порядка 4, а на рис. 198 — гиперкуб порядка 1. Назовем точку гиперкубом порядка 0, отрезок — гиперкубом порядка 1, квадрат —

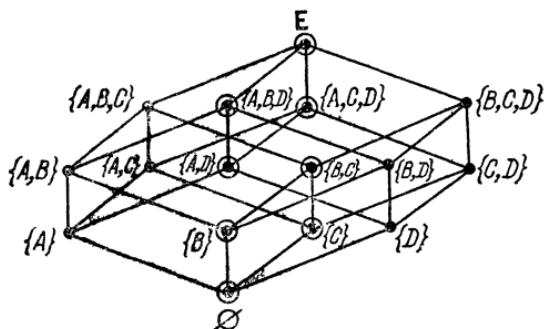


Рис. 202.

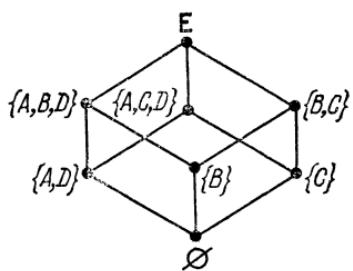


Рис. 203.

гиперкубом порядка 2, куб — гиперкубом порядка 3 и т. д. Вершины гиперкуба можно распределить по уровням (которые аналогичны уровням, рассматривавшимся при определении порядковой функции) и у гиперкуба порядка  $n$  их  $n+1$ . Имеется  $C_n^v$  вершин уровня  $v$ , и общее число вершин равно

$$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n. \quad (39.81)$$

Подсчитаем число ребер диаграммы Хассе для гиперкуба порядка  $n$ . Из каждой вершины исходит  $n$  ребер, поэтому их всего

$$\frac{n}{2} \sum_{i=0}^n C_n^i = \frac{n}{2} \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1} \quad (39.82)$$

(так как каждое ребро учитывалось при подсчете дважды). Очевидно, что число граней (гиперкубов порядка 2) гиперкуба порядка  $n$  подсчитывается аналогично:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \sum_{i=0}^n C_n^i = \frac{n(n-1)}{8} \cdot 2^n = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}. \quad (39.83)$$

Вообще число гиперкубов порядка  $k$  в гиперкубе порядка  $n$  равно

$$C_n^{n-k} \cdot 2^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot 2^{n-k}. \quad (39.84)$$

Таким образом, гиперкуб на рис. 201 содержит 8 кубов, 24 квадрата, 32 отрезка, 16 вершин.

**Векторные структуры.** Пусть заданы  $n$  конечных множеств

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{A_1, A_2, \dots, A_a\}, \\ \mathbf{B} &= \{B_1, B_2, \dots, B_b\}, \dots, \mathbf{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_\lambda\}. \end{aligned} \quad (39.85)$$

Предположим, что они линейно упорядоченные:

$$\begin{aligned} A_1 &> A_2 > \dots > A_a, \\ B_1 &> B_2 > \dots > B_b, \dots, L_1 > L_2 > \dots > L_\lambda. \end{aligned} \quad (39.86)$$

Определим отношение доминирования для элементов

$$(A_i, B_j, \dots, L_l) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \dots \times \mathbf{L}.$$

Полагаем

$$(A_i, B_j, \dots, L_l) > (A_{i'}, B_{j'}, \dots, L_{l'}), \quad (39.87)$$

если все элементы  $n$ -выборки в левой части меньше или равны соответствующим элементам  $n$ -выборки в правой части и по

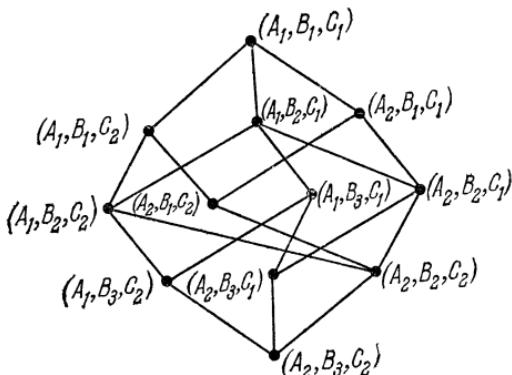


Рис. 204.

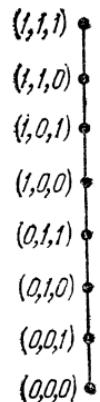


Рис. 205.

крайней мере в одном случае имеет место строгое неравенство. Тогда  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \dots \times \mathbf{L}$  становится структурой относительно введенного отношения и называется *векторной структурой*.

Пример такой структуры приведен на рис. 204:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{A_1, A_2\}, & A_1 &> A_2; \\ \mathbf{B} &= \{B_1, B_2, B_3\}, & B_1 &> B_2 > B_3; \\ \mathbf{C} &= \{C_1, C_2\}, & C_1 &> C_2. \end{aligned} \quad (39.88)$$

Булева структура векторная<sup>1)</sup>, отношение доминирования определяется отношением включения.

**Лексикографические векторные структуры.** Это — векторные структуры с линейным порядком (как слова в словаре). Рассмотрим следующее отношение доминирования. Считаем, что

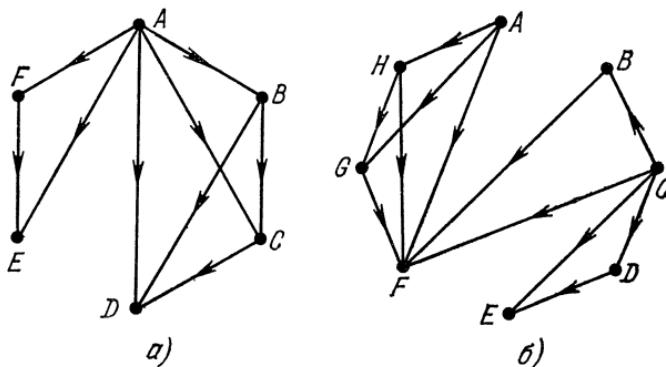
<sup>1)</sup> Не следует смешивать понятие векторной структуры с понятием векторного пространства и модуля.

$n$ -выборка  $(A_i, B_j, \dots, L_l)$  доминирует  $n$ -выборку  $(A_{i'}, B_{j'}, \dots, L_{l'})$ , если первые  $r$  элементов (считая слева) этих выборок совпадают, а  $(r+1)$ -й элемент первой выборки больше (в смысле заданного порядка)  $(r+1)$ -го элемента второй выборки. Например,  $(3, 5, 7, 2, 5)$  доминирует  $(3, 5, 7, 1, 9)$ ,  $(P, M, H)$  доминирует  $(P, E, B)$ , если буквы упорядочены, как в русском алфавите.

Другой пример лексикографической векторной структуры дает система счисления с основанием 10; например, 35 725 больше 35 719. На рис. 205 изображена диаграмма Хассе трехмерной лексикографической векторной структуры, образованной числами 0, 1, 2, ..., 7 в двоичной записи.

### УПРАЖНЕНИЯ

**39А.** Для упорядоченных множеств, представленных на рис. *a), б), в), г)* ниже: 1) перечислить цепи, 2) указать минимальные и максимальные элементы, 3) указать наименьшие и наибольшие элементы, 4) в *б)* указать миноранты  $\{F, G, H\}$  и мажоранты  $\{B, G\}$ , верхнюю и нижнюю грани множеств  $\{F, G, H\}$  и  $\{B, G\}$ , 5) указать максимальные цепи в *а)* и *г)*.



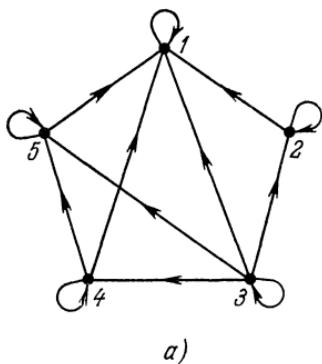
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

*а)*

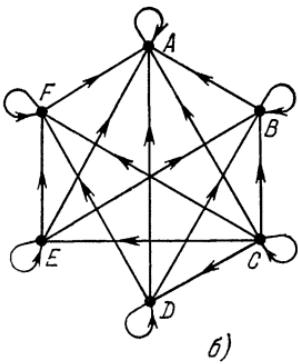
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

*г)*

**39Б.** Для каждой из структур а), б), в), г) ниже построить диаграмму Хассе.



а)



б)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

в)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								

г)

**39В.** Перечислить все подструктуры для структур б) и г) из упражнения 39Б.

**39Г.** Сколько можно построить различных дистрибутивных структур на множестве из пяти элементов.

**39Д.** То же, что и в упражнении 39Г, но на множестве из шести элементов.

**39Е.** Сколько можно построить различных структур с дополнениями на множестве из пяти элементов<sup>1)</sup>.

**39Ж.** То же, что и в упражнении 39Е, но на множестве из шести элементов.

**39З.** Сколько можно построить различных модулярных структур на множестве из шести элементов<sup>1)</sup>?

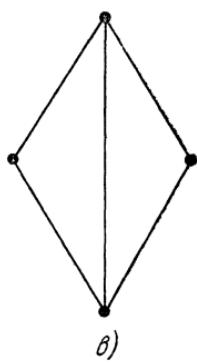
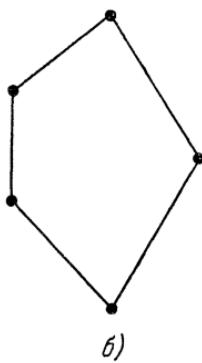
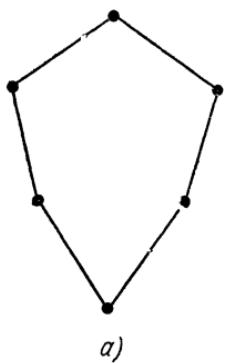
**39И.** То же, что и в упражнении 39З, но на множестве из семи элементов.

**39К.** Построить диаграмму Хассе для булевой структуры подмножеств множества  $E = \{A, B, C, D, E\}$ .

**39Л.** Является ли цепь дистрибутивной структурой?

<sup>1)</sup> С точностью до нумерации элементов.

**39М.** Какие из следующих диаграмм Хассе соответствуют дистрибутивным структурам.



**39Н.** Рассмотрим цепь, образованную  $(n + 1)$  элементами  $X_0, X_1, \dots, X_n$ . При каком  $n$  эта цепь будет еще структурой с дополнениями?



**39О.** Сколько в гиперкубе порядка 6 содержится гиперкубов порядка  $k$ ,  $k < 6$ ?

**39П.** Рассмотрим три линейно упорядоченных множества:

$$A = \{A, B, C\}, \quad A > B > C;$$

$$B = \{a, b\}, \quad a > b;$$

$$C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \quad \alpha > \beta > \gamma > \delta.$$

Построить диаграмму Хассе для векторной структуры, соответствующей  $A \times B \times C$ .

**39Р.** То же, что и в упражнении 39П, но  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ . Является ли полученная векторная структура: а) дистрибутивной, б) структурой с дополнениями, в) модулярной?

**39С.** Построить 4-мерную лексикографическую модулярную структуру, исходя из чисел 0 и 1.

## ГЛАВА IV

### ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ \*)

---

#### § 40. Введение

В начале § 8 мы показали, как понятие производящей функции может быть использовано в задачах о перечислении. Но такой процесс применим только в случае неупорядоченных  $r$ -выборок; в случае же упорядоченных  $r$ -выборок пришлось бы ввести такие производящие функции, которые приводят к некоммутативной алгебре. Хотя это и возможно, но даже прямое перечисление оказывается более эффективным. Эта глава посвящается вопросу о разумных способах перечисления.

Когда количество перечисляемых элементов велико, часто отказываются от составления полного списка и вводят некоторые характеристики, с помощью которых его можно получить. Следует иметь в виду, что процесс перечисления часто связан с пересчетом. Метод «латинской композиции», или «сцепления», который мы приводим здесь, — не единственный метод перечисления; существуют и другие, например перечисление с помощью понятия «груды», как в работе Пэрра [34]. Другой метод предложен Фоулксом (см. [2], стр. 281); в нем используется разложение на максимальные сильно связные подграфы, встречающиеся во многих задачах.

За недостатком места мы лишены возможности изложить все эти методы.

#### § 41. Метод латинской композиции<sup>1)</sup>

Конечная последовательность  $(X_{l_1}, X_{l_2}, \dots, X_{l_n})$  вершин графа  $G = (E, \Gamma)$  называется *латинской последовательностью со свойством  $\mathcal{P}$* , или  $\mathcal{P}$ -латинской последовательностью, если:

- 1) она является путем,
- 2) она обладает свойством  $\mathcal{P}$ ,

---

<sup>\*)</sup> В эту главу нам пришлось внести ряд существенных исправлений.  
(Прим. перев.)

<sup>1)</sup> Метод разработан автором. По вопросам, касающимся гамильтоновых путей и контуров, автор консультировался с Мальгранжем; см. Revue Française de Recherche operationnelle, 1-er trimestre, 1963, № 26.

3) любой ее отрезок длины  $\geq 2$  также обладает этим свойством.

Пусть

$$s_1 = (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}, X_k) \quad \text{и} \quad s_2 = (X_l, X_{l_1}, \dots, X_{l_q}) \quad (41.1)$$

— две  $\mathcal{P}$ -латинские последовательности.

Введем бинарную операцию<sup>1)</sup>

$$s_1 * s_2 =$$

$$= \begin{cases} (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}, X_k, X_{l_1}, X_{l_2}, \dots, X_{l_q}), & \text{если } X_k = X_l \text{ и получающаяся последовательность } \mathcal{P}\text{-латинская;} \\ \emptyset (\text{пустая последовательность}), & \text{если по крайней мере одно из этих условий не выполняется.} \end{cases} \quad (41.2)$$

Если принять, что  $\emptyset$  обладает свойством  $\mathcal{P}$ , то  $\mathcal{P}$ -латинские последовательности графа  $G$  образуют группоид относительно закона композиции  $*$ , для которого

$$s_1 * \emptyset = \emptyset, \quad (41.3)$$

$$\emptyset * s_2 = \emptyset, \quad (41.4)$$

$$\emptyset * \emptyset = \emptyset. \quad (41.5)$$

Основные свойства этого группоида следующие.

1) Этот группоид ассоциативен, т. е. он моноид, или полугруппа; в самом деле, для любых его элементов  $s_1, s_2, s_3$

$$(s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3). \quad (41.6)$$

2) Существуют как правые, так и левые нейтральные элементы, которые не единственны. Имеем

$$s_1 = (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}, X_k), \quad (41.7)$$

$$s_2 = (X_k), \quad (41.8)$$

$$s_1 * s_2 = (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}, X_k) = s_1, \quad (41.9)$$

т. е.  $s_2$  — элемент, нейтральный справа. Аналогично

$$s_1 = (X_l), \quad (41.10)$$

$$s_2 = (X_l, X_{l_1}, X_{l_2}, \dots, X_{l_q}), \quad (41.11)$$

$$s_1 * s_2 = (X_l, X_{l_1}, X_{l_2}, \dots, X_{l_q}), \quad (41.12)$$

т. е.  $s_1$  — элемент, нейтральный слева.

<sup>1)</sup> Мы называем эту операцию латинской композицией, а некоторые авторы — сцеплением (concaténation), как в [34].

3) Этот моноид не обладает нейтральным<sup>1)</sup> элементом, и не существует обратных элементов.

4) Все элементы монида регулярны как слева, так и справа:

$$s_2 = s_3 \Leftrightarrow s_1 * s_2 = s_1 * s_3, \quad (41.13)$$

$$s_2 = s_3 \Leftrightarrow s_2 * s_4 = s_3 * s_4. \quad (41.14)$$

5) Моноид, очевидно, не коммутативен.

Для упрощения введем обозначение:

если  $s_1 * s_2 = \emptyset$ , (41.15)

TO

$$s_1 * s_2 = s_1 \bullet s'_2, \quad (41.16)$$

где  $s'_1$  — последовательность  $s_1$ , без первой вершины.

Обозначим через

$$\mathbf{C}_{X,X_L}^p = \{s_1, s_2, \dots, s_{\mu}, \dots, s_a\} \quad (41.17)$$

подмножество  $\mathcal{P}$ -латинских последовательностей с  $p + 1$  вершинами, начинающихся  $X_i$  и оканчивающихся  $X_k$ . Аналогично

$$\mathbf{C}_{X_h X_i}^q = \{t_1, t_2, \dots, t_v, \dots, t_\beta\}. \quad (41.18)$$

### Определим произведение

$$\mathbf{C}_{X_i X_h}^p * \mathbf{C}_{X_h X_i}^q =$$

$$= \{(s_1 * t_1), (s_1 * t_2), \dots, (s_2 * t_1), \dots, (s_u, t_v), \dots, (s_a, t_\beta)\} \quad (41.19)$$

(одинаковые элементы учитываются по одному разу). Как и в (41.16), можно записать

$$\mathbf{C}_{X_a X_b}^p * \mathbf{C}_{X_b X_i}^q = \mathbf{C}_{X_a X_b}^p \bullet \mathbf{C}_{X_b X_i}^q, \quad (41.20)$$

где

$$\mathbf{C}_{X_b X_i}^{(q)} = \{t'_1, t'_2, \dots, t'_v, \dots, t'_\beta\} \quad (41.21)$$

— подмножество, состоящее из последовательностей  $t_1, t_2, \dots, t_\beta$ , у которых удалены первые вершины.

Выпишем последовательно

$$\mathbf{C}_{X_i X_j}^{(2)} = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(1)} * \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(1)}) = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(1)} \bullet \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(1)}), \quad (41.22)$$

$$\mathbf{C}_{X_i X_j}^{(3)} = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(2)} * \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(1)}) = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(2)} \bullet \mathbf{C}_{X_k X_j}^{'(1)}), \quad (41.23)$$

$$\mathbf{C}_{X_i X_j}^{(4)} = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(3)} * \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(1)}) = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(3)} \bullet \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(1)}), \quad (41.24)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$\mathbf{C}_{X_i X_j}^{(n)} = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(n-1)} * \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(1)}) = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(n-1)} \bullet \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(1)}), \quad (41.25)$$

где  $n = |G|$ .

<sup>1)</sup> Известно, что нейтральный элемент является одновременно нейтральным слева и нейтральным справа; когда он существует, он единственный.

Для любых целых положительных  $r$  и  $s$  имеем

$$\mathbf{C}_{X_i X_j}^{(r+s)} = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(r)} * \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(s)}) = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(r)} * \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(s)}). \quad (41.26)$$

Исходя из (41.22) — (41.25), введем матрицы, которые назовем латинскими:

$$\|M\|^{(r+s)} = \|M\|^{(r)} \bullet \|M'\|^{(s)}, \quad (41.27)$$

где на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $\|M\|^{(r+s)}$  стоит

$$\mathbf{C}_{X_i X_j}^{(r+s)} = \bigcup_{k=1}^n (\mathbf{C}_{X_i X_k}^{(r)} \bullet \mathbf{C}_{X_k X_j}^{(s)}), \quad (41.28)$$

а на пересечении  $k$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $\|M'\|^{(s)}$  стоит  $\mathbf{C}_{X_k X_j}^{(s)}$ .

Таким образом, мы можем описать процесс перечисления всех  $\mathcal{P}$ -латинских последовательностей графа.

## § 42. Перечисление путей

Рассмотрим свойство  $\mathcal{P}$ : «последовательность есть путь». Пусть  $\|M\|^{(1)}$  — латинская матрица для путей длины 1 и  $\|M'\|^{(1)}$  — соответствующая матрица для путей длины 1 с удаленными первыми вершинами. Композиция  $\|M\|^{(1)} \bullet \|M'\|^{(1)}$  дает  $\|M\|^{(2)}$ , т. е. латинскую матрицу для путей длины 2. Последовательно получаем

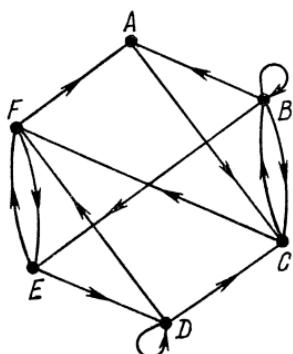


Рис. 206.

$$\begin{aligned} \|M\|^{(2)} \bullet \|M'\|^{(1)} &= \|M\|^{(3)}, \\ \|M\|^{(3)} \bullet \|M'\|^{(1)} &= \|M\|^{(4)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \|M\|^{(r-1)} \bullet \|M'\|^{(1)} &= \|M\|^{(r)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (42.1)$$

т. е. перечисление всех путей длины  $1, 2, \dots, r, \dots$ . Перечисление путей длины 1, 2, 3 для графа на рис. 206 приведено на стр. 247. Если интересоваться путями фиксированной длины  $r$ , то их можно получить композицией.

Например,  $\|M\|^{(4)}$  получается композицией  $\|M\|^{(2)}$  и  $\|M'\|^{(2)}$ ;  $\|M\|^{(5)}$  — из  $\|M\|^{(4)}$  и  $\|M'\|^{(1)}$  или из  $\|M\|^{(3)}$  и  $\|M'\|^{(2)}$  и т. д.

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BB	BC	BE	
C	CB		CF		
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M'\|^{(1)}$

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	A	B	C	E	
C	B		F		
D		C	D	F	
E			D	F	
F	A		E		

$\|M\|^{(2)}$

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	A	B	C	E	
C	B		F		
D		C	D	F	
E			D	F	
F	A		E		

$\|M'\|^{(1)}$

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	A	B	C	E	
C	B		F		
D		C	D	F	
E			D	F	
F	A		E		

$\|M\|^{(2)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(3)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(4)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(5)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(6)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(7)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(8)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(9)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(10)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(11)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(12)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(13)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(14)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(15)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(16)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(17)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(18)}$

A	B	C	D	E	F
A		ACB			
B	BA	BBB	BAC	BED	BBE
C	CB	BCB	BBC	BEF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

$\|M\|^{(19)}$

A	B	C	D	E	F





<tbl\_r cells="6

## § 43. Перечисление элементарных путей

Рассмотрим свойство  $\mathcal{P}$ : «последовательность есть элементарный путь», т. е. последовательность представляет собой размещение без повторения из  $n$  вершин по  $r$  ( $r$ -выборку без повторения).

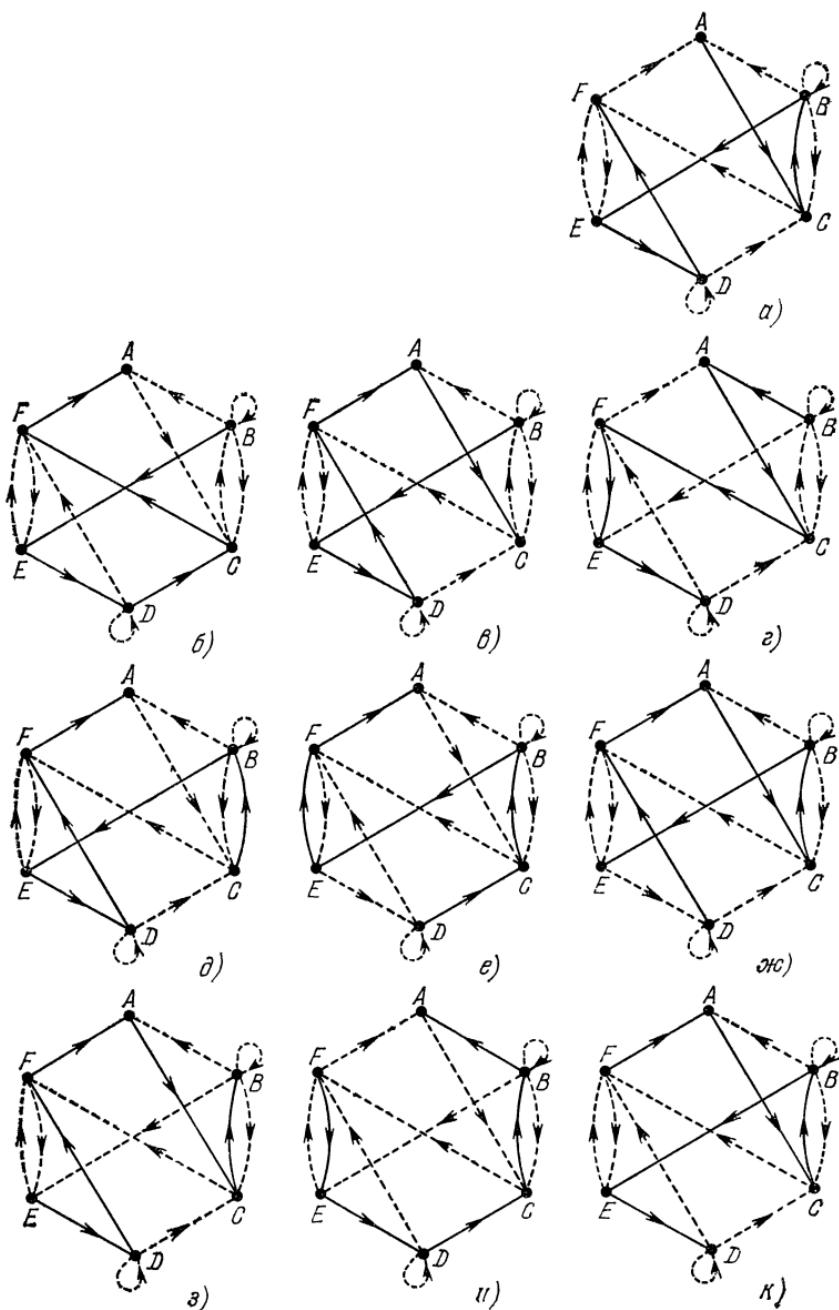


Рис. 207.

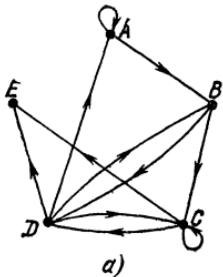
Тогда имеем

$$s_1 * s_2 = \begin{cases} s_1 \bullet s'_2, & \text{если } s_1 \bullet s'_2 \text{ — элементарный путь,} \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (43.1)$$

Все элементарные пути графа на рис. 206 приведены на стр. 250, 251. Так как в графе с шестью вершинами не существует элементарного пути длины больше 5, то матрица  $\|M\|^{(6)}$  пуста. Гамильтоновы пути этого графа (элементарные пути длины 5) представлены на рис. 207.

### УПРАЖНЕНИЯ

**43А.** Перечислить все пути, длины которых не превосходят числа вершин, для следующих графов:



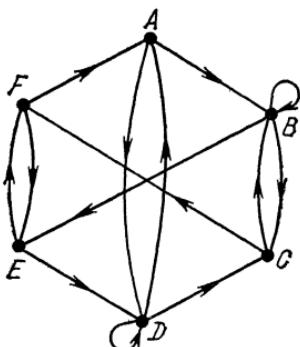
	A	B	C	D	E	F
A	■				■	
B			■			
C				■		
D		■			■	
E				■		
F					■	

	1	2	3	4	5	6	7
1		■		■		■	
2							
3		■				■	
4							
5							
6	■	■	■				
7							

б)

в)

**43Б.** Для указанного графа перечислить пути, удовлетворяющие условиям:



- а) пути длины 4, не содержащие вершины  $B$ ;
- б) пути длины 5, не содержащие дуг  $(B, C)$ ;
- в) пути длины  $l \leqslant 6$ , не содержащие дуг  $(B, C)$  и  $(E, F)$ ;
- г) пути четной длины;
- д) пути, проходящие через  $A$ ;
- е) пути, проходящие через  $(A, D)$ .

**43В.** Перечислить контуры длин, не превосходящих  $l$ , для следующих графов:

а) граф а) из упражнения 43А,  $l = 4$ ; б) граф б) из упражнения 43А,  $l = 3$ ; в) граф б) из упражнения 43А,  $l = 4$ ; г) граф из упражнения 43Б,  $l = 2$ .

**43Г.** Перечислить перестановки пяти букв  $A, B, C, D, E$ , в которых никакие две согласные не стоят рядом.

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

 $\|M\|(1)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

 $\|M\|(2)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

(43.2)

 $\|M'\|(1)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

 $\|M\|(3)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

(43.3)

 $\|M'\|(2)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

(43.4)

 $\|M\|(1)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

(43.5)

 $\|M\|(2)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

(43.6)

 $\|M\|(3)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

(43.7)

 $\|M\|(4)$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BC	BE		
C	CB		CF		
D		DC	DF		
E			ED	EF	
F	FA		FE		

(43.8)

 $\|M\|(5)$

A	B	C	D	E	F
A				ACBE ACFE	
B	BCFA BEFA	BEDC	BCFE BEDF	BACF BEDF	
C			CBED CFED	CBEF	
D	DCBA DCFA	DFAC	DCBE DCFE		
E	EDFA	EDCB	EEFAC	EDCF	
F	FACB	FEDC			

$\|M\|^{(3)}$

$\|M\|^{(4)}$

(43.4)

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	A	C	E		
C	C	B		F	
D	D	C		F	
E	E	D	F		
F	F	A	E		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	A	C	E		
C	C	B		F	
D	D	C		F	
E	E	D	F		
F	F	A	E		

A	B	C	D	E	F
A		ACBED ACFED	ACBEF		
B	BEFA	BEAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	EDFCA			
F	FEDCB		FACEB		

A	B	C	D	E	F
A		C			
B	BEDFA	BEFAC	BCFEDBACFE	BEDCF	
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA	ED			

43Д. Рассмотрим прадерево:

$$\begin{aligned}\Gamma\{A\} &= \{B, C\}, & \Gamma\{B\} &= \{D, E\}, \\ \Gamma\{C\} &= \{F, G\}, & \Gamma\{D\} &= \{H, I, J\}, & \Gamma\{E\} &= \emptyset, & \Gamma\{F\} &= \{K, L\}, \\ \Gamma\{G\} &= \{M, N\}, & \Gamma\{H\} &= \emptyset, & \Gamma\{I\} &= \emptyset, & \Gamma\{J\} &= \emptyset, \\ \Gamma\{K\} &= \emptyset, & \Gamma\{L\} &= \emptyset, & \Gamma\{M\} &= \emptyset, & \Gamma\{N\} &= \emptyset.\end{aligned}$$

Перечислить пути, начинающиеся в корне  $A$  и оканчивающиеся в вершинах без потомков. Упростить метод латинской композиции для таких графов.

43Е. Перечислить пути, длины которых не превосходят 6, соединяющие вершины  $A$  и  $E$  графа а) из упражнения 43А.

43Ж. Перечислить пути, соединяющие вершины  $C$  и  $I$ , для графа без контуров:

$$\begin{aligned}\Gamma A &= \{J, K\}, & \Gamma B &= \{A, G\}, & \Gamma C &= \{B, D, H\}, \\ \Gamma D &= \{E\}, & \Gamma E &= \{F\}, & \Gamma F &= \{I\}, \\ \Gamma G &= \{J\}, & \Gamma H &= \{E, F, G\}, & \Gamma I &= \emptyset, \\ \Gamma J &= \{I\}, & \Gamma K &= \{I\}.\end{aligned}$$

Для сокращения вычислений упростить представление с помощью латинской матрицы.

## § 44. Перечисление элементарных контуров

Заметим, что элементарный контур  $(A, X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{p-1}}, A)$  длины  $p$  становится элементарным путем, если удалить из него первую вершину; за  $\mathcal{P}$  примем свойство: «быть элементарным путем». Латинская матрица  $\|M'\|^{(r)} \bullet \bullet \|M'\|^{(s)}$  отличается от латинской матрицы  $\|M\|^{(r)} \bullet \bullet \|M'\|^{(s)}$  тем, что из путей в клетках матрицы  $\|M\|^{(r)}$  удалены первые вершины. Подмножество

$$C_{ij}^{(r+s)} = \bigcup_k C_{ik}^{(r)} \bullet C_{kj}^{(s)} \quad (44.1)$$

совпадает с подмножеством  $C_{ij}^{(r+s)}$  матрицы  $\|M'\|^{(r+s)}$ , если  $i \neq j$ . Если  $i = j$ , то  $C_{jj}^{(r+s)} = \emptyset$  для любого  $j$ , но  $C_{jj}^{(r+s)}$  может содержать латинскую последовательность. Каждая такая по-

следовательность оканчивается  $X_j$  и представляет собой элементарный путь. Из наших рассмотрений вытекает, что, приписав  $X_j$  к ней слева, получим элементарный контур длины  $r+s$ . Таким образом, для получения элементарных контуров графа длины  $p = r+s$  ( $p \leq n$ ) достаточно найти элементы главной диагонали матрицы

$$\|M''\|^{(r+s)} = \|M'\|^{(r)} \bullet \|M'\|^{(s)}, \quad (44.2)$$

которую, например, можно представить так:

$$\|M''\|^{(p)} = \|M'\|^{(p-1)} \bullet \|M'\|^{(1)}. \quad (44.3)$$

При  $r+s=n$ , где  $n$  — число вершин графа, элементы главной диагонали матрицы  $\|M''\|^{(r+s)}$  представляют собой гамиль-

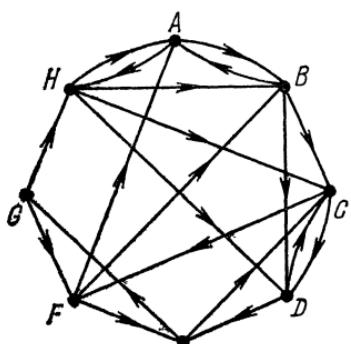


Рис. 208.

тоновы контуры графа, а все  $C_{ij}^{(n)}$ ,  $i \neq j$ , пусты, так как граф не содержит элементарных путей длины  $n$ . Так как через каждую вершину проходит любой гамильтонов контур, то все  $C_{ij}''^{(n)}$  равны между собой, и достаточно найти одно из них.

Пример (рис. 208). Очевидно, что для нахождения гамильтоновых контуров этого графа достаточно выписать элементы одной клетки на главной диагонали матрицы  $\|M''\|^{(8)}$ . Учитывая (44.1) и

$$\|M'\|^{(4)} = \|M\|^{(2)} \bullet \|M'\|^{(2)}, \quad (44.4)$$

$$\|M''\|^8 = \|M'\|^{(4)} \bullet \|M'\|^{(4)}, \quad (44.5)$$

находим  $C_{11}''^{(8)}$ . Имеем

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>A</i>		<i>AB</i>						<i>AH</i>
<i>B</i>	<i>BA</i>		<i>BC</i>	<i>BD</i>				
<i>C</i>				<i>CD</i>		<i>CF</i>		
<i>D</i>			<i>DC</i>		<i>DE</i>			
<i>E</i>			<i>EC</i>				<i>EG</i>	
<i>F</i>	<i>FA</i>	<i>FB</i>			<i>FE</i>			
<i>G</i>						<i>GF</i>		<i>GH</i>
<i>H</i>	<i>HA</i>	<i>HB</i>	<i>HC</i>	<i>HD</i>				

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>A</i>		<i>AHB</i>	<i>ABC</i> <i>AHC</i>	<i>ABD</i> <i>AHD</i>				
<i>B</i>			<i>BDC</i>	<i>BCD</i>	<i>BDE</i>	<i>BCF</i>		<i>BAH</i>
<i>C</i>	<i>CFA</i>	<i>CFB</i>			<i>CDE</i> <i>CFE</i>			
<i>D</i>			<i>DEC</i>			<i>DCF</i>	<i>DEG</i>	
<i>E</i>				<i>ECD</i>		<i>ECF</i> <i>EGF</i>		<i>EGH</i>
<i>F</i>	<i>FBA</i>	<i>FAB</i>	<i>FBC</i> <i>FEC</i>	<i>FBD</i>			<i>FEG</i>	<i>FAH</i>
<i>G</i>	<i>GFA</i> <i>GHA</i>	<i>GFB</i> <i>GHB</i>	<i>GHC</i>	<i>GHD</i>	<i>GFE</i>			
<i>H</i>	<i>HBA</i>	<i>HAB</i>	<i>HBC</i> <i>HDC</i>	<i>HBD</i>	<i>HDE</i>	<i>HCF</i>		

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>A</i>		<i>AHCFB</i> <i>AHBDC</i> <i>AHDEC</i>	<i>ABDEC</i>	<i>AHBCD</i>	<i>ABCDE</i> <i>ABCFE</i> <i>AHDBE</i> <i>AHCDE</i> <i>AHCFE</i>	<i>ABCDF</i> <i>AHBCF</i> <i>AHDCF</i>	<i>ABDEG</i>	

<i>A</i>	
<i>B</i>	<i>BDCFA</i>
<i>C</i>	
<i>D</i>	<i>DCFBA</i> <i>DECFA</i> <i>DEGFA</i> <i>DEGHA</i>
<i>E</i>	<i>ECFBA</i> <i>EGFBA</i> <i>EGRBA</i>
<i>F</i>	<i>FEGHA</i>
<i>G</i>	<i>GHGFA</i>
<i>H</i>	<i>HBCFA</i> <i>HCFBA</i> <i>HDCFA</i>

(44.8)

(44.9)

Из (44.8) и (44.9) получаем первую строку и первый столбец матрицы  $\|M'\|^{(4)}$ . Перемножив их, выписываем все гамильтоновы контуры:

$A$	$AHBCDEGFA$ $AHCDEGFBA$ $ABDCFEGHA$ $ABDEGHCFKA$	(44.10)
$A$		

Эти контуры изображены на рис. 209.

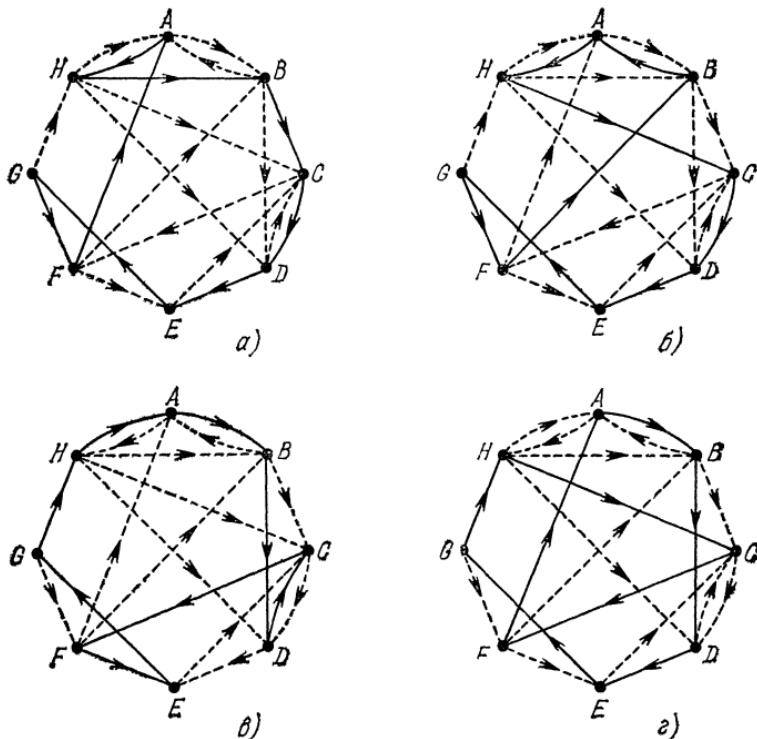
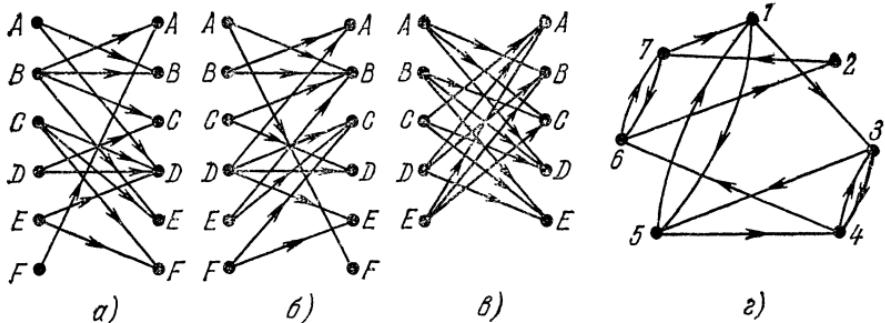


Рис. 209

### УПРАЖНЕНИЯ

**44А.** Найди элементарные контуры графов а) и б) из упражнения 43А и графа из упражнения 43Б.

44Б. Рассмотрим графы:



Перечислить:

- 1) гамильтоновы пути графов a), б), в), г);
- 2) гамильтоновы контуры графов a), б), в), г);
- 3) простые пути графов a) и в);
- 4) пути графа a) длины, меньшей или равной 6;
- 5) контуры графа a) длины, меньшей или равной 6.

44В. Рассмотрим соты из упражнений 21А и 21В. Заштрихованные клетки обозначают запретные ячейки.

- 1) Перечислить различные подстановки для а) из упражнения 21А.
- 2) То же для г) из упражнения 21А
- 3) То же для ж) из упражнения 21А.
- 4) То же для а) из упражнения 21В. Можно ли здесь упростить перечисление? Как?

## § 45. Перечисление последовательностей с повторением

Рассмотрим граф  $G(E, \Gamma)$  на рис. 210. Обозначим через  $\mathcal{P}$  свойство: через вершины  $A, C, D, E$  путь проходит не более одного раза, а через вершины  $B, F$  путь проходит не более двух

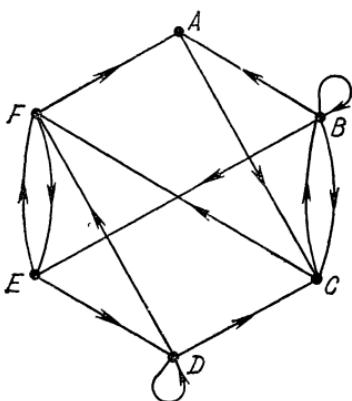


Рис. 210.

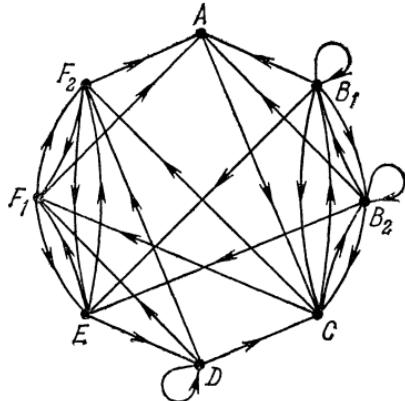


Рис. 211.

раз; через  $\mathcal{P}'$  — свойство: через вершины  $A, C, D, E$  путь проходит в точности один раз, а через вершины  $B, F$  путь проходит в точности два раза.

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BB	BC	BE	
C	CB			CF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

 $\|M\|^{(1)}$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BB	BC	BE	
C	CB			CF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

 $\|M\|^{(1)}$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BB	BC	BE	
C	CB			CF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

 $\|M\|^{(2)}$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BB	BC	BE	
C	CB			CF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

 $\|M\|^{(1)}$ 

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	BB	BC	BE	
C	CB			CF	
D		DC	DD	DF	
E			ED	EF	
F	FA			FE	

 $\|M\|^{(2)}$ 

(45.1)

(45.2)

(45.3)

Так как для пути со свойством  $\mathcal{P}'$  не выполняется условие 3) (см. начало § 41), то он не является  $\mathcal{P}'$ -латинской последовательностью. Легко видеть, что пути со свойством  $\mathcal{P}$  являются  $\mathcal{P}$ -латинскими последовательностями. Перечислив их, мы можем отобрать из них пути со свойством  $\mathcal{P}'$ .

Соответствующие выкладки для отыскания путей со свойством  $\mathcal{P}$  приведены на стр. 256 до  $\|M\|^{(3)}$  включительно. Их следует продолжить до  $\|M\|^{(7)}$ , так как путь со свойством  $\mathcal{P}$  содержит не более восьми вершин. Это показывает, что для нахождения путей с заданным свойством  $\mathcal{Q}'$ , не являющихся  $\mathcal{Q}'$ -латинскими последовательностями, следует подобрать (когда это возможно) свойство  $\mathcal{Q}$  так, чтобы: а) пути со свойством  $\mathcal{Q}$  были  $\mathcal{Q}$ -латинскими последовательностями и б) среди путей со свойством  $\mathcal{Q}$  содержались все пути со свойством  $\mathcal{Q}'$ , а затем перечислить  $\mathcal{Q}$ -латинские последовательности.

Можно поступить и иначе. Возьмем, например, граф  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  с  $\mathbf{E} = \{A, B, C, D, E, F\}$  (см. рис. 210) и заменим его графом  $G' = (\mathbf{E}', \Gamma)$   $\mathbf{E}' = \{A, B_1, B_2, C, D, E, F_1, F_2\}$ , в котором  $B_1$  и  $B_2$  ( $F_1$  и  $F_2$ ) инцидентны тем же вершинам в  $G'$ , что и  $B$  ( $F$ ) в  $G$ . а  $B_1$  и  $B_2$  ( $F_1$  и  $F_2$ ) соединены двумя противоположно ориентированными дугами (рис. 211). Достаточно теперь найти элементарные пути графа  $G'$ , а затем положить  $B_1 = B_2 = B$ ,  $F_1 = F_2 = F$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

**45А.** Перечислить:

а) пути длины 7 графа *a*) из упражнения 44Б, проходящие не более одного раза через  $A, B, C, E, F$  и не более двух раз через  $D$ ;

б) пути минимальной длины графа *а*) из упражнения 44Б, проходящие по одному разу через  $X_1$  и  $X_3$ , по два раза — через  $X_4$  и  $X_6$  и не проходящие через  $X_2$ ;

в) пути, проходящие в точности один раз через  $X_1$  и  $X_3$ , в точности два раза через  $X_4$  и  $X_6$  и не проходящие через  $X_2$ , для графа, дополнительного к графу *а*) из упражнения 44Б.

**45Б.** Перечислить пути длин 1, 2, ..., 10 графа:

$$\Gamma A = \{A, B\}, \quad \Gamma B = \{B, C\}, \quad \Gamma C = \{C, D\}, \quad \Gamma D = \{D\}.$$

Вывести общую формулу для подсчета путей длины  $n$  такого графа

## § 46. Перечисление факторов графа

*Фактором* графа  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  называется частичный граф  $(\mathbf{E}, \Delta)$  такой, что полустепени исхода и захода каждой его вершины равны 1. Таким образом, фактор графа составляется из непересекающихся контуров таких, что в совокупности они содержат все вершины графа и каждая встречается один раз. Например, на рис. 213 и 214 изображены факторы графа на рис. 212. Гамильтонов контур представляет собой фактор.

Фактор является элементом класса эквивалентности, определенного в § 16. В том же параграфе мы указали, как пересчитать эти классы. Здесь же мы займемся перечислением их элементов, сопоставляя перестановкам возможные факторы заданного графа.

Метод латинской композиции позволяет перечислить факторы графа, отыскивая элементарные контуры.

Рассмотрим свойство  $\mathcal{P}$ : последовательность является либо элементарным путем, либо элементарным контуром.

В обозначениях, введенных ранее,

$$\|M\|^{(2)} = \|M\|^{(1)} \bullet \|M'\|^{(1)}. \quad (46.1)$$

Для единообразия будущих обозначений положим  $\|M\|^{(2)} = \|M\|_1^{(2)}$ .

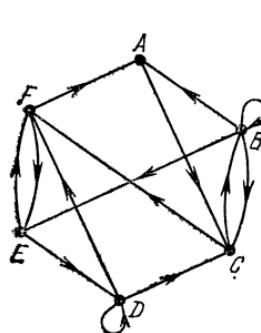


Рис. 212.

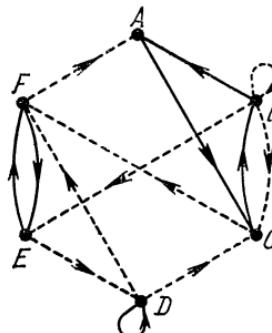


Рис. 213.

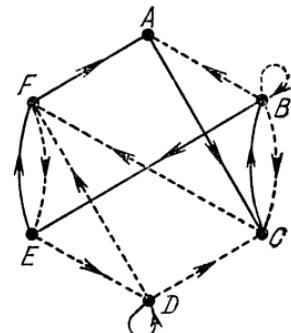


Рис. 214.

На главной диагонали матрицы  $\|M\|_1^{(2)}$  представлены все элементарные контуры длины 2;  $\|\tilde{M}\|^{(2)}$  обозначает  $\|M\|_1^{(2)}$  без главной диагонали.

Составим матрицу

$$\|M\|_1^{(3)} = \|\tilde{M}\|^{(2)} \bullet \|M'\|^{(1)}, \quad (46.2)$$

на главной диагонали которой будут представлены элементарные контуры длины 3. Аналогично из  $\|M\|_1^{(3)}$  получаем  $\|\tilde{M}\|^{(3)}$  и составляем

$$\|M\|_1^{(4)} = \|\tilde{M}\|^{(3)} \bullet \|M'\|^{(1)} \quad (46.3)$$

и т. д. Таким образом, исключаемые главные диагонали дадут нам все элементарные контуры.

Найдем таким способом факторы графа на рис. 212 (см. стр. 259—261).

A	B	C	D	E	F
A		AC			
B	BA	<b>BB</b>	BC	BE	
C	CB			<b>CF</b>	
D	DC	<b>DD</b>	DF		
E			ED	<b>EF</b>	
F	FA		<b>FE</b>		

$\|M\|^{(1)}$

$\|M'\|^{(1)}$

A					
B	BA	<b>BB</b>	BC	BE	
C	CB			<b>CF</b>	
D	DC	<b>DD</b>	DF		
E			ED	<b>EF</b>	
F	FA		<b>FE</b>		

$\bullet$

(4.4)

$\|M\|^{(2)}$

$\|M'\|^{(2)}$

A					
B		BAC	BED	<b>BCF</b>	<b>BEF</b>
C		<b>CAE</b>	<b>CFE</b>		
D	<b>DBA</b>	<b>DCB</b>	<b>DFE</b>	<b>DCF</b>	
E		<b>EDC</b>	<b>EDF</b>		<b>EDF</b>
F		<b>FAE</b>	<b>FED</b>		<b>FEF</b>

A					
B		A	B	C	E
C			B		F
D			C	D	F
E				D	F
F					<b>E</b>

$\|M\|^{(1)}$

$\|M'\|^{(1)}$

A					
B		<b>BAC</b>	<b>BAB</b>	<b>BED</b>	<b>BCF</b>
C		<b>CAE</b>	<b>CAF</b>	<b>CFE</b>	<b>CFAC</b>
D	<b>DBA</b>	<b>DCB</b>	<b>DFE</b>	<b>DCF</b>	<b>DCFA</b>
E		<b>EDC</b>	<b>EDB</b>	<b>EDF</b>	<b>EDF</b>
F		<b>FAE</b>	<b>FED</b>	<b>FED</b>	<b>FEF</b>

$\|M\|^{(2)}$

$\|M'\|^{(2)}$

$\|M\|^{(3)}$

$\|M'\|^{(3)}$

A	B	C	D	E	F
A				ACBE ACFFE	
B	BCFA BEFA	BEDC	BCFE BACF BEDF		
C		CBED CFED	CBEF		
D	DCBA DCFA	DFAC	DCBE DCTE		
E	EDFA EDCB	EFAC	EDCF		
F	FACB FEDC				

 $\|\tilde{M}\|^{(3)}$ 
 $\|\mathcal{M}'\|^{(1)}$ 

A	B	C	D	E	F
A			ACBED ACFED	ACBEF	
B	BEFA	BCFED	BACFE BEDCF		
C			CBEDF		
D	DFACB		DCBEF		
E	EDCBA EDCEA	EFACB EDEAC			
F	FEDCB	FACBE			

 $\|\mathcal{M}\|^{(4)}$ 

A			ACBED ACFED	ACBEF	
B	BEFA	BEDCB	BEFAC BCFED	BACFE BEDCF	
C		CBEDF	CFEDC		
D			DCBED DCTED		
E	EDCBA EDCEA	EFACB EDEAC			
F	FEDCB	FACBE FEDCF			

 $(46.6)$ 
 $\|\mathcal{M}\|^{(5)}$ 
 $\|\mathcal{M}'\|^{(1)}$ 
 $\|\tilde{M}\|^{(4)}$

(46.8)

$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$BEDCA$						$ACBEDF$					
$BEDFA$						$BEDFACBACFED$					
$CBEDFA$						$CBEDFAC$					
$DCBEFA$						$DFACBE$					
$DCBEDA$						$DFACBED$					
$EDFACB$						$EDFACB$					
$FEDCBA$						$FACBED$					
$FEDCBA$						$M'$ (1)					
						$\tilde{M}$ (5)					
						$\ M\ _1^{(6)}$					

Приходим к следующим элементарным контурам:

- $$\begin{aligned} \text{в} \parallel M \parallel_1^{(1)}: & (B, B), (D, D), \\ \text{в} \parallel M \parallel_1^{(2)}: & (B, C, B), (E, F, E), \\ \text{в} \parallel M \parallel_1^{(3)}: & (A, C, B, A), (A, C, F, A), (D, F, E, D), \\ \text{в} \parallel M \parallel_1^{(4)}: & (B, E, D, C, B), (C, F, E, D, C), \\ \text{в} \parallel M \parallel_1^{(5)}: & (A, C, B, E, F, A), \\ \text{в} \parallel M \parallel_1^{(6)}: & (A, C, B, E, D, F, A). \end{aligned} \quad (46.9)$$

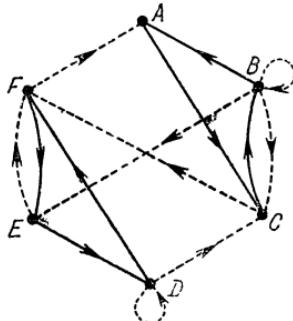


Рис. 215

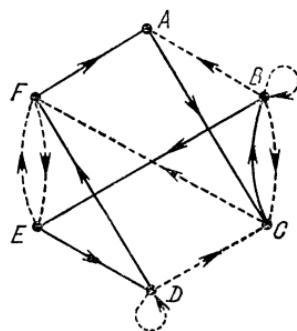


Рис. 216.

Классы подстановок на множестве 6 элементов:

- $$\begin{aligned} (6, 0, 0, 0, 0, 0), \quad (4, 1, 0, 0, 0, 0), \quad (3, 0, 1, 0, 0, 0), \quad (2, 0, 0, 1, 0, 0), \\ (2, 2, 0, 0, 0, 0), \quad (1, 1, 1, 0, 0, 0), \quad (1, 0, 0, 0, 1, 0), \quad (0, 3, 0, 0, 0, 0), \\ (0, 1, 0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 2, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (46.10)$$

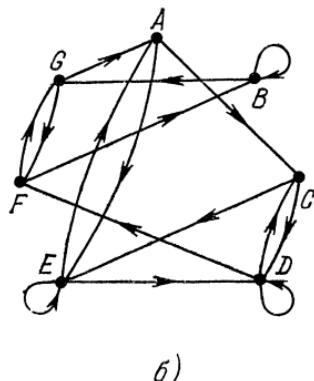
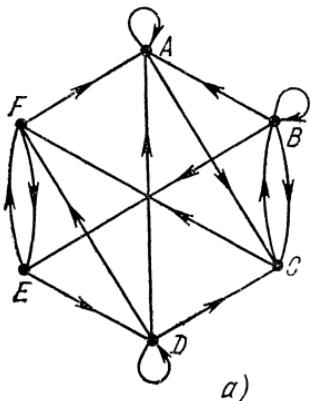
Учитывая (46.9), получаем

- $$\begin{aligned} \text{для класса } (1, 1, 1, 0, 0, 0): & 1 \text{ фактор } [(D, D), (E, F, E), (A, C, B, A)], \\ \text{для класса } (1, 0, 0, 0, 1, 0): & 1 \text{ фактор } [(D, D), (A, C, B, E, F, A)], \\ \text{для класса } (0, 0, 2, 0, 0, 0): & 1 \text{ фактор } [(A, C, B, A)(D, F, E, D)], \\ \text{для класса } (0, 0, 0, 0, 0, 1): & 1 \text{ фактор } [(A, C, B, E, D, F, A)]. \end{aligned} \quad (46.11)$$

Два первых фактора представлены на рис. 213 и 214, а два последних на рис. 215 и 216,

## УПРАЖНЕНИЯ

46А. Перечислить факторы графов:



46Б. Пересчитать и перечислить перестановки, запретные положения элементов которых указаны сотами:

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

а)

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

б)

### § 47. Перечисление рассечений

Рассечением графа  $G = (E, \Gamma)$  называют такую совокупность элементарных путей или элементарных контуров, что:

- 1) два пути рассечения не имеют общих вершин;
- 2) каждая вершина графа принадлежит одному из путей рассечения.

Например, на рис. 218 и 219 представлены рассечения графа на рис. 217.

Среди различных путей рассечения графа будем различать: элементарные контуры — их обозначаем символом  $\alpha_i$ ; элементарные пути ненулевой длины — их обозначаем символом  $\beta_j$ ; пути нулевой длины — их обозначаем символом  $\gamma_k$ .

Для получения рассечений графа достаточно составить матрицы  $\|M\|^{(r)}$ , дающие элементарные пути, и матрицы  $\|M\|^{(s)}$ , дающие элементарные контуры.

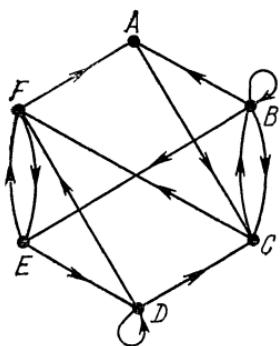


Рис. 217.

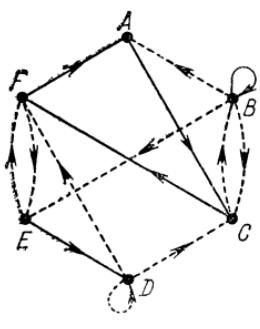


Рис. 218

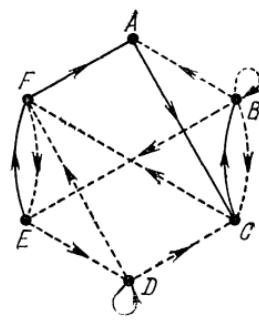
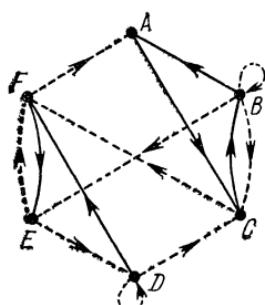
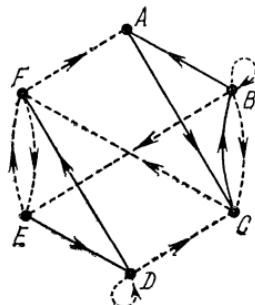


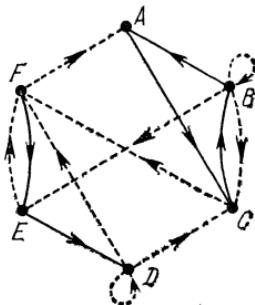
Рис. 219



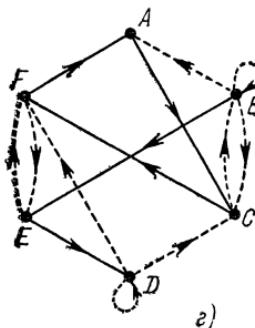
*a)*



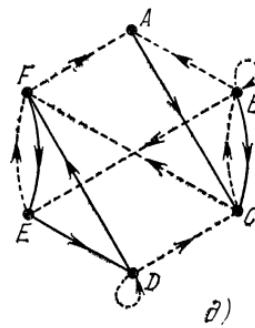
*b)*



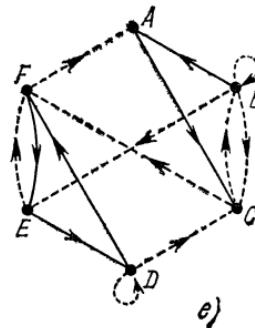
*c)*



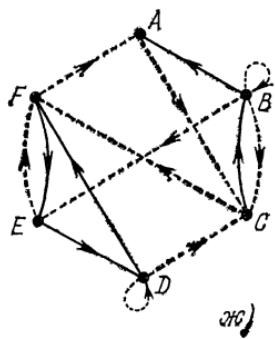
*d)*



*e)*



*f)*



*g)*

Рис. 220.

Пример. Перечислим рассечения графа на рис. 217 (если они существуют), состоящие из элементарного контура длины 3 и элементарного пути длины 2. Нам, следовательно, нужно рассмотреть матрицы  $\|M\|_1^{(3)}$  (см. (46.5)) и  $\|M\|_1^{(2)}$  (см. (43.2)). Контуры  $\alpha_i$  длины 3:

$$(A, C, B, A), \quad (A, C, F, A), \quad (D, F, E, D).$$

Возьмем, например,  $(A, C, B, A)$  и, исключая строки и столбцы  $A, B, C$  в  $\|M\|_1^{(2)}$ , получаем пути длины 2:  $(D, F, E)$ ,  $(D, C, F)$ ,  $(E, D, F)$  и  $(F, E, D)$ . Но  $(D, C, F)$  нам нужно выбросить, так как он содержит  $C$ . Итак, получаем рассечения:

$$[(A, C, B, A), (D, F, E)], \quad [(A, C, B, A), (E, D, F)], \\ [(A, C, B, A), (F, E, D)].$$

Поступая аналогично с  $(A, C, F, A)$ , а затем с  $(D, F, E, D)$ , получаем рассечения:  $[(A, C, F, A), (B, E, D)]$ ,  $[(D, F, E, D), (A, C, B)]$ ,  $[(D, F, E, D), (B, A, C)]$ ,  $[(D, F, E, D), (C, B, A)]$ . Таким образом, получили семь рассечений, которые представлены на рис. 220.

## УПРАЖНЕНИЯ

**47А.** Перечислить рассечения графов из упражнения 46А.

**47Б.** Перечислить рассечения графов из упражнения 46А, не являющиеся факторами.

**47В.** Перечислить рассечения графа  $g$  из упражнения 44Б.

**47Г.** Дать способ пересчета рассечений графа, используя способ пересчета перестановок в цикловой записи.

## § 48. Другие методы и задачи перечисления

**Понятие груды<sup>1)</sup>.** Понятие латинской композиции можно видоизменить, что приводит к понятию, полезному при рассмотрении ряда комбинаторных задач.

Пусть  $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  — последовательность элементов множества  $E$ . Такую последовательность будем называть *словом на  $E$* , а число ее членов  $\lambda(\alpha) = n + 1$  — его длиной.

Если  $b \in E$  и  $a_i = b$ , то говорят, что  $i$  — «место появления  $b$  в  $\alpha$ », а также, что « $b$  появляется в  $\alpha$ ».

На множестве слов  $M$  введем внутренний закон композиции, называемый *цеплением*:

$$\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n), \tag{48.1}$$

$$\beta = (b_0, b_1, \dots, b_n), \tag{48.2}$$

$$\alpha * \beta = (a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n). \tag{48.3}$$

<sup>1)</sup> Это понятие введено в работе Женюи (F. Genyus), Commentaires sur le langage Algol, Revue Chiffres, № 5, 1962, 29—53. При изложении мы следуем в основном Дерниamu [17].

Структура  $(M, *)$  — моноид, если закон  $*$  всюду определен и ассоциативен. Пустую последовательность  $\Lambda$  будем считать принадлежащей  $M$  и называть «пустым словом». Она является нейтральным элементом в  $(M, *)$ , в противоположность латинскому закону композиции, определенному в § 41.

Пусть  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — такие слова, что

$$\alpha = \beta * \delta * \gamma; \quad (48.4)$$

тогда  $\beta$  называют «левым сомножителем  $\alpha$ », а  $\gamma$  — «правым сомножителем  $\alpha$ ». Например, пусть  $\alpha = (b, a, c, c, d, b, a)$  — слово на  $E = \{a, b, c, d\}$ . Слова  $(b, a, c)$ ,  $(b, a)$ ,  $(b)$  — правые сомножители, а  $(b, a)$ ,  $(a)$  — левые сомножители  $\alpha$ .

Рассмотрим граф на рис. 221. За слова примем последовательности его дуг, являющиеся путями. Пустое слово  $\Lambda$  — путь из 0 дуг. Если для путей  $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  и  $\beta = (b_0, b_1, \dots, b_m)$  ввести сцепление:

$$\alpha * \beta = (a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m), \quad (48.5)$$

$$\alpha * \beta = \Lambda, \text{ если правая часть в (48.5) — не путь,} \quad (48.6)$$

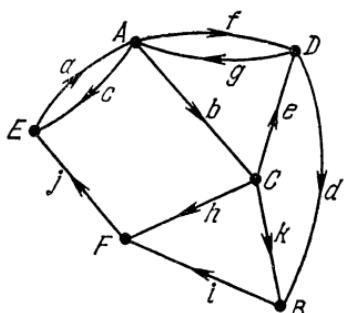


Рис. 221.

то этот закон будет определен всюду и мы приходим к латинской композиции.

Определим теперь понятие груды.

*Грудой* на множестве  $E$  называют такую конечную последовательность  $A = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)$ ,  $\alpha_i \in (M, *)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, q$ , что:

$$1) \alpha_0 = \alpha_q = \Lambda,$$

2) для  $i = 1, 2, \dots, q$  выполняется одно из условий:  $\alpha_{i-1}$  — левый сомножитель  $\alpha_i$  с  $\lambda(\alpha_i) = \lambda(\alpha_{i-1}) + 1$ ,  $\alpha_i$  — левый сомножитель  $\alpha_{i-1}$  с  $\lambda(\alpha_{i-1}) = \lambda(\alpha_i) + 1$ . Элементы груды называются ее состояниями, а последний элемент слова  $\alpha_i$  — пиком<sup>1</sup>) состояния  $\alpha_i$ .

Пример. Пусть

$$E = \{a, b, c, d\}, \quad (48.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \Lambda, & \alpha_1 &= a, & \alpha_2 &= a * b, & \alpha_3 &= a * b * c, & \alpha_4 &= a * b, \\ \alpha_5 &= a, & \alpha_6 &= a * c, & \alpha_7 &= a, & \alpha_8 &= \Lambda, \end{aligned} \quad (48.8)$$

или

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \Lambda, & \alpha_1 &= a, & \alpha_2 &= a * b, & \alpha_3 &= a * b * c, & \alpha_4 &= a * b * c * d, \\ \alpha_5 &= a * b * c, & \alpha_6 &= a * b, & \alpha_7 &= a, & \alpha_8 &= \Lambda. \end{aligned} \quad (48.9)$$

<sup>1)</sup> В работах [33] и [17] вместо «пика» используется слово «вершина» (sommet).

## Последовательности

$$A_1 = (\Lambda, a, a * b, a * b * c, a * b, a, a * c, a, \Lambda), \quad (48.10)$$

$$A_2 = (\Lambda, a, a * b, a * b * c, a * b * c * d, a * b * c, a * b, a, \Lambda) \quad (48.11)$$

— груды. Элементы  $c$  и  $a$  — пики соответственно состояний  $a * b * c$  и  $a \cdot \Lambda$  не обладает пиком.

Для каждого элемента  $x \in E$ , появляющегося в слове груды, определим его вход и его выход.

а) Предположим, что  $\alpha_{i-1}$  — левый сомножитель  $\alpha_i$  и  $\lambda(\alpha_i) = \lambda(\alpha_{i-1}) + 1$ ; тогда существует такой  $x \in E$ , что  $\alpha_i = \alpha_{i-1} * x$ . Этот индекс  $i$  называют входом  $x$ .

б) Предположим, что  $\alpha_i$  — левый сомножитель  $\alpha_{i-1}$  и  $\lambda(\alpha_{i-1}) = \lambda(\alpha_i) + 1$ ; тогда существует такой  $x \in E$ , что  $\alpha_{i-1} = \alpha_i * x$ . Этот индекс  $i$  называют выходом  $x$ . Элемент  $x$  может обладать несколькими входами и выходами. Например, в (48.8): 1 — вход  $a$ , 2 — вход  $b$ , 3 — вход  $c$ , 4 — выход  $c$ , 5 — выход  $b$ , 6 — вход  $c$ , 7 — выход  $c$ , 8 — выход  $a$  ( $a$  и  $b$  обладают каждый одним входом и одним выходом,  $c$  обладает двумя входами и выходами). В (48.9): 1 — вход  $a$ , 3 — вход  $c$ , 5 — выход  $d$ ; каждый из элементов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  обладает одним входом и выходом.

Если каждый элемент  $x \in E$ , появляющийся в слове груды, обладает одним и только одним входом (следовательно, одним и только одним выходом), то груду называют *простой*.

Слово груды, имеющее наибольшую длину, называют ее *высотой*.

**Груда, построенная на дугах графа.** Пусть  $G = (E, \Gamma) = (E, U)$  — граф. Построим граф

$$G' = (E \cup \{R\}, \Gamma') = (E \cup \{R\}, U'),$$

где  $R$  — новая вершина,  $\Gamma' R = E$ ,  $\Gamma' X_i = \Gamma X_i$ ,  $X_i \in E$ .

Будем последовательно строить простую груду, элементами состояний которой являются дуги графа  $G'$ . Возможны следующие случаи.

а)  $\alpha_{i-1} = \Lambda$ . Тогда либо  $\alpha_{i-1}$  — последнее состояние груды, либо существует такая вершина  $X \in E$ , что никакая дуга с концом  $X$  не обладает входом, меньшим  $c$ , и мы можем образовать состояние  $\alpha_i$ , используя дугу от  $R$  к  $X$  ( $i$  будет ее входом).

б)  $(i-1)$  — вход  $u$ . Тогда, если существует дуга со входом, не меньшим  $i$ , начало которой совпадает с концом  $u$ , то мы можем образовать состояние  $\alpha_i$ , либо используя эту дугу ( $i$  будет ее входом), либо выбрасывая  $u$  ( $i$  будет выходом  $u$ ); если такой дуги не существует, то у нас остается лишь последняя возможность.

в)  $(i-1)$  — выход дуги  $u$  и  $\alpha_{i-1} \neq \Lambda$ . Тогда, если существует дуга со входом, не меньшим  $i$ , начало которой совпадает с началом  $u$ , то мы можем образовать состояние  $\alpha_i$ , либо используя

этую дугу ( $i$  будет ее входом), либо выбрасывая пик состояния  $\alpha_{i-1}$  ( $i$  — выход пика); если такой дуги нельзя найти, то у нас остается последняя возможность.

Таким образом, мы приедем к простой груде, состояния которой — пути в  $G'$  с началом в  $R$ .

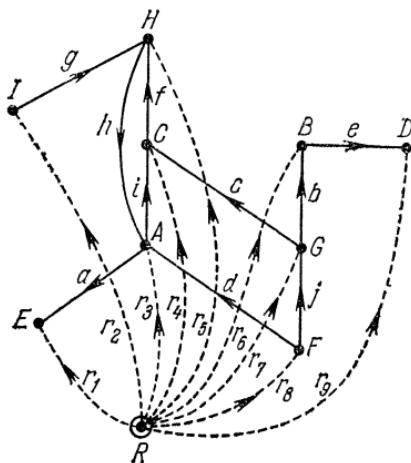


Рис. 222.

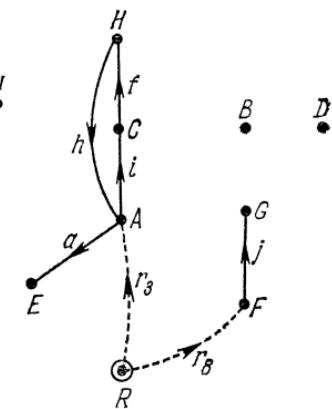


Рис. 223.

Например, с графом на рис. 222 можно связать груды  
 $(\Lambda, r_3, r_3i, r_3if, r_3ifh, r_3if, r_3i, r_3, r_3a, r_3, \Lambda, r_8, r_8j, r_8, \Lambda)$   
(48.12)

(на рис. 223 изображены ее состояния),

$$(\Lambda, r_8, r_8d, r_8, r_8j, r_8jc, r_8j, r_8jb, r_8jbe, r_8jb, r_8j, r_8; \Lambda), \quad (48.13)$$

$$(\Lambda, r_5, r_5h, r_5hi, r_5hif, r_5hi, r_5h, r_5, \Lambda), \quad (48.14)$$

$$(\Lambda, r_7, r_7c, r_7, r_7b, r_7, \Lambda, r_2, r_2g, r_2, \Lambda, r_8, r_8j, r_8, \Lambda). \quad (48.15)$$

Запись (48.12) с помощью вершин такова:

$$(\Lambda, RA, RA \cdot AC, RA \cdot AC \cdot CH, RA \cdot AC \cdot CH \cdot HA, RA \cdot AC \cdot CH, RA \cdot AC, RA, RA \cdot AE, RA, \Lambda, RF, RF \cdot FG, RF, \Lambda). \quad (48.16)$$

**Груда, построенная на вершинах графа.** Такую груду  $A = (y_0, y_1, \dots, y_q)$  на множестве вершин  $E$  графа  $G = (E, \Gamma)$  можно построить последовательно.

а) Пусть  $y_{i-1} = \Lambda$ . Тогда либо  $y_{i-1}$  — последнее состояние груды, либо можно образовать состояние  $y_i$ , используя некоторую вершину  $Z$  со входом, не меньшим  $i$  ( $i$  будет ее входом).

б) Пусть  $y_{i-1} \neq \Lambda$  и  $X$  — его пик. Тогда имеем три возможности:

1)  $(i-1)$  — выход  $Y \in E$ . Если в  $GX$  наряду с  $Y$  есть элемент  $Z$ , не использовавшийся до этого момента при образовании нового состояния из состояния с пиком  $X$ , то образуем со-

стояние  $y_i$ , либо используя  $Z$  ( $i$  будет его входом), либо выбрасывая  $X$  ( $i$  будет выходом  $X$ ); если такой вершины  $Z$  не существует, то остается последняя возможность.

2) ( $i - 1$ ) — первый вход  $X$ . Если  $\Gamma X = \emptyset$ , то образуем  $y_i$ , выбрасывая  $X$  ( $i$  будет выходом  $X$ ). Если  $\Gamma X \neq \emptyset$ , то образуем  $y_i$ , беря некоторый элемент из  $\Gamma X$  ( $i$  будет входом этого элемента).

3) ( $i - 1$ ) — другой вход  $X$ . В этом случае образуем  $y_i$ , выбрасывая  $X$  ( $i$  будет выходом  $X$ ).

Такую груду можно получить непосредственно из груды, построенной на дугах графа, если из ее состояний (записанных с помощью вершин) выбросить  $R$ . Возможен и обратный переход, если подходящим образом ввести  $R$  в состояния груды, построенной на вершинах.

Например (см. рис. 222—224), грудам (48.12)—(48.15) отвечают соответственно

( $\Lambda, A, AC, ACH, ACHA, ACH, AC, A, AE, A, \Lambda, F, FG, F, \Lambda$ ), (48.17)

( $\Lambda, F, FA, F, FG, FGC, FG, FGB, FGBD, FGB, FG, F, \Lambda$ ), (48.18)

( $\Lambda, H, HA, HAC, HACH, HAC, HA, H, \Lambda$ ), (48.19)

( $\Lambda, G, GC, G, GB, G, \Lambda, I, IH, I, \Lambda, F, FG, F, \Lambda$ ). (48.20)

**Приложение понятия груды к изучению прадеревьев.** Ветвящаяся структура часто встречается в кодировании, задачах выбора, при анализе, хранении и поиске информации.

Семейством ветвящегося графа  $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$  назовем множество его корней или непустое множество  $\Gamma X$ . Упорядочим ветвящийся граф, вводя отношение порядка на  $\mathbf{E}$  так, чтобы каждое семейство было цепью (в смысле теории структур), а никакие два элемента различных семейств не были сравнимы.

Любому ветвящемуся графу можно сопоставить простые груды. Если фиксировать введенный ранее порядок, то такое сопоставление однозначно. Метод построения груды, указанный выше, в случае прадеревьев упрощается, так как пустыми ее состояниями могут быть только первое и последнее. Легко получить из ветвящегося графа прадерево, вводя корень  $R$  и связывая его с корнями этого графа. Рассмотрим дополненный

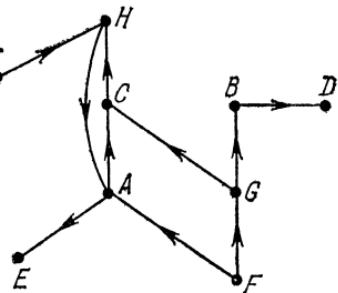


Рис. 224.

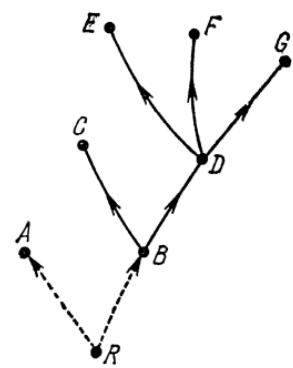


Рис. 225.

ветвящийся граф на рис. 225. Упорядочим его следующим образом:

$$\begin{aligned}\gamma\{R\} &= \{A, B\}, \quad \gamma\{A\} = \emptyset, \quad \gamma\{B\} = \{C, D\}, \quad \gamma\{C\} = \emptyset, \\ \gamma\{D\} &= \{E, F, G\}, \quad \gamma\{E\} = \emptyset, \quad \gamma\{F\} = \emptyset, \quad \gamma\{G\} = \emptyset.\end{aligned}\quad (48.21)$$

Такому порядку отвечает груды

$$\begin{aligned}(\Lambda, R, RA, R, RB, RBC, RB, RBD, RBDE, RBD, RBDF, \\ RBD, RBDG, RBD, RB, R, \Lambda).\end{aligned}$$

Любой элемент из  $E$  обладает одним и только одним входом; порядок появления элементов в груде называют порядком входа в груду. Аналогично определяется порядок выхода из груды.

Для графа на рис. 225 имеем

порядок входа:  $A, B, C, D, E, F, G$ ;

порядок выхода:  $A, C, E, F, G, D, B$ .

С помощью так введенной груды легко решить следующие задачи.

- 1) Отыскать точки, предшествующие заданной.
- 2) Определить семейства ветвящегося графа.
- 3) Построить таблицу расположения вершин ветвящегося графа. Такая таблица состоит из трех столбцов. В первый помещаются вершины в порядке их входа в груду; во второй — первый элемент  $X'$  из  $\gamma\{X\}$ , если  $\gamma\{X\} \neq \emptyset$ ; в третий — элемент  $X''$ , следующий за  $X$  в его семействе. Приведем такую таблицу для графа на рис. 225:

$X$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$
$X'$	—	$C$	—	$E$	—	—	—
$X''$	$B$	—	$D$	—	$F$	$G$	—

- 4) Отыскать миноранты заданного элемента: любое состояние  $\alpha_i$  груды — путь графа, начинающийся в корне и оканчивающийся в пике  $\alpha_i$ .

Понятие груды можно использовать также в некоторых случаях для получения транзитивного замыкания и элементарных путей графа.

# ГЛАВА V

## ОПТИМИЗАЦИЯ

---

### § 49. Введение

Комбинаторные задачи, встречающиеся в различных областях знания, часто приводят к проблеме оптимизации. Пусть дан критерий, позволяющий выделить решения с некоторыми заданными свойствами. Требуется найти множество таких решений, называемых «оптимальными». В большинстве задач этот критерий имеет числовую природу, а множество всех решений разбивается на вполне упорядоченные классы. Мы будем в основном рассматривать задачи на максимум и минимум.

В основе почти всех комбинаторных методов оптимизации лежит следующий принцип. Множество всех решений разбивается некоторым образом на два подмножества: подмножество, содержащее все оптимальные решения, и подмножество, не содержащее их. Если первое из подмножеств не есть оптимальное, то стремятся получать подобные разбиения, в которых подмножества, содержащие все оптимальные решения, имеют все меньшую мощность. Действуют так до тех пор, пока не приходят к оптимальному подмножеству. На этом же принципе основаны также некоторые способы, позволяющие получить по крайней мере одно оптимальное решение.

Вопросами оптимизации стали интенсивно заниматься лишь в последнее время.

В педагогических целях мы получаем алгоритмы, позволяющие действовать вручную; некоторые из них непосредственно, а другие — после соответствующей модификации могут быть использованы при вычислениях на ЭВМ. Чтобы решать задачи с большим объемом вычислений в приемлемое время, многие алгоритмы требуют дальнейшего усовершенствования.

### § 50. Числовая функция на графе

**Числовая функция на вершинах графа.** Пусть задан граф  $G = (E, \Gamma)$ . Говорят, что на вершинах графа реализуется числовая функция, если каждой вершине  $X_i \in E$  ставится в соответствие число  $\lambda_i = \varphi(X_i)$  из некоторого множества  $L$ .

Например, для графа на рис. 226 имеем

$$\varphi(A) = a, \quad \varphi(B) = b, \quad \varphi(C) = c, \quad \varphi(D) = d, \quad \varphi(E) = e, \quad \varphi(F) = f. \quad (50.1)$$

**Значение пути через вершины.** Пусть на  $\mathbf{L}$  задан внутренний бинарный ассоциативный закон  $*$ .

Значением пути  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  через вершины называют число  $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ , где  $x_i = \varphi(X_i)$ , и записывают

$$\lambda(X_1, X_2, \dots, X_n) = x_1 * x_2 * \dots * x_n. \quad (50.2)$$

Например, для графа на рис. 226 и множества  $\mathbf{L} = \mathbf{R}^+$ ,

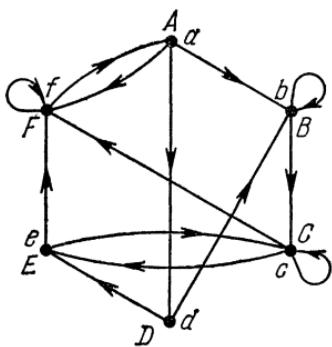


Рис. 226.

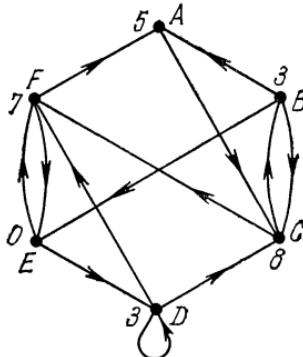


Рис. 227.

если принять за закон композиции сложение, имеем

$$\lambda(D, E, F, A) = d + e + f + a. \quad (50.3)$$

При рассмотрении значения контура всегда фиксируется начало (во избежание многозначности).

**Максимальный (минимальный) путь через вершины.** Обозначим через  $\mathbf{P}$  подмножество путей графа  $G = (E, \Gamma)$  с некоторым свойством  $\mathcal{P}$ . Максимальным (минимальным) путем через вершины, принадлежащим  $\mathbf{P}$ , назовем путь с максимальным (минимальным) значением  $\lambda$ . Очевидно, что таких путей может быть несколько.

Например, пусть для графа на рис. 227 функция  $\varphi$  такова:  $\varphi(A) = 5$ ,  $\varphi(B) = 3$ ,  $\varphi(C) = 8$ ,  $\varphi(D) = 3$ ,  $\varphi(E) = 0$ ,  $\varphi(F) = 7$ ;

$$(50.4)$$

закон композиции — сложение, а свойство  $\mathcal{P}$  — «быть элементарным путем длины 3 с началом в  $B$ ». В силу (43.3)

$$\begin{aligned} \lambda(B, C, F, A) &= 3 + 8 + 7 + 5 = 23, \quad \lambda(B, E, F, A) = 3 + 0 + 7 + 5 = 15, \\ \lambda(B, E, D, C) &= 3 + 0 + 3 + 8 = 14, \quad \lambda(B, C, F, E) = 3 + 8 + 7 + 0 = 18, \\ \lambda(B, A, C, F) &= 3 + 5 + 8 + 7 = 23, \quad \lambda(B, E, D, F) = 3 + 0 + 3 + 7 = 13. \end{aligned} \quad (50.5)$$

Пути  $(B, C, F, A)$  и  $(B, A, C, F)$  максимальные, а путь  $(B, E, D, F)$  минимальный.

**Числовая функция на дугах графа.** Пусть задан график  $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$ . Говорят, что на дугах графа реализуется числовая функция, если каждой дуге  $(X_i, X_j) \in \mathbf{U}$  ставится в соответствие число  $\mu_{ij} = f(X_i, X_j)$  из некоторого множества  $\mathbf{M}$ .

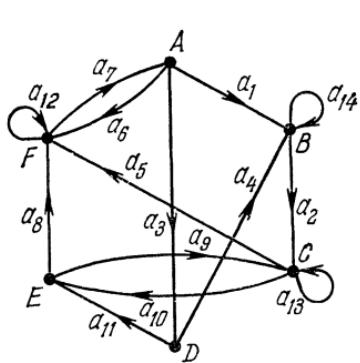


Рис. 228.

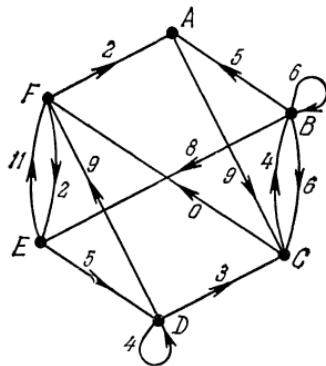


Рис. 229.

Например, для графа на рис. 228 имеем

$$\begin{aligned} f(A, B) &= a_1, & f(B, B) &= a_{14}, & f(C, E) &= a_{10}, & f(D, E) &= a_{11}, \\ f(F, A) &= a_7, & f(A, D) &= a_3, & f(B, C) &= a_2, & f(C, F) &= a_5, \\ f(E, C) &= a_9, & f(F, F) &= a_{12}, & f(A, F) &= a_6, & f(C, C) &= a_{13}, \\ f(D, B) &= a_4, & f(E, F) &= a_8. \end{aligned} \quad (50.6)$$

**Значение пути через дуги.** Пусть на  $\mathbf{M}$  задан внутренний бинарный ассоциативный закон  $*$ . Значением пути  $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_r})$  через дуги называют число  $v_{i_1 i_2} * v_{i_2 i_3} * \dots * v_{i_{r-1} i_r}$ ,

где  $v_{ij} = f(X_i, X_j)$ , и записывают

$$\mu(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_r}) = v_{i_1 i_2} * v_{i_2 i_3} * \dots * v_{i_{r-1} i_r}. \quad (50.7)$$

Например, для графа на рис. 228 и множества  $\mathbf{M} = \mathbf{R}$ , если принять за закон композиции умножение, имеем

$$\mu(A, B, C, E) = a_1 a_2 a_{10}. \quad (50.8)$$

**Максимальный (минимальный) путь через дуги.** Обозначим через  $\mathbf{P}$  множество путей графа  $G = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$  с некоторым свойством  $\mathcal{P}$ . Максимальным (минимальным) путем через дуги, принадлежащим  $\mathbf{P}$ , назовем путь с максимальным (минимальным) значением  $\mu$ .

Например, пусть для графа на рис. 229 (функция  $f$  указана там же) свойство  $\mathcal{P}$  — «быть гамильтоновым путем», а закон композиции — сложение.

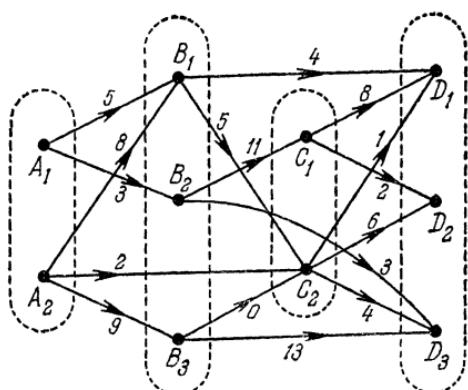


Рис. 230.

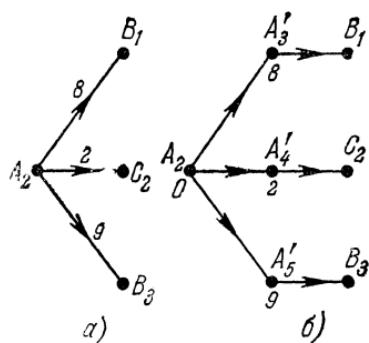


Рис. 231.

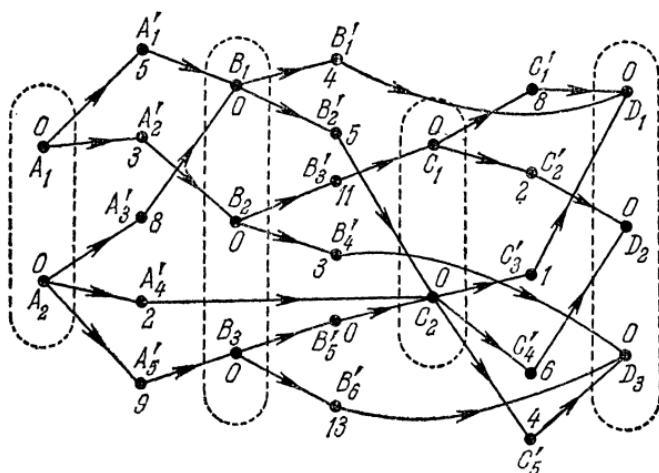


Рис. 232

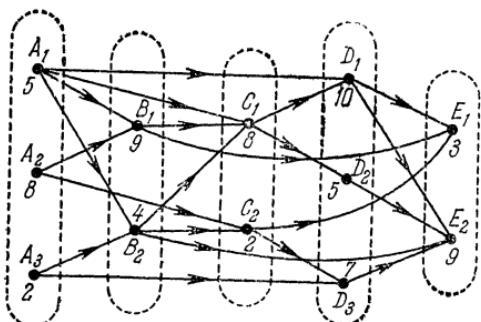


Рис. 233.

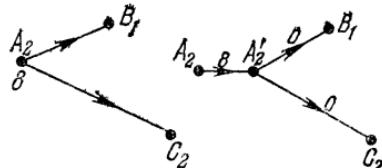


Рис. 234.

Из рис. 207 имеем

$$\begin{aligned}
 \mu(A, C, B, E, D, F) &= 9 + 4 + 8 + 5 + 9 = 35, \\
 \mu(B, E, D, C, F, A) &= 8 + 5 + 3 + 0 + 2 = 18, \\
 \mu(B, E, D, F, A, C) &= 8 + 5 + 9 + 2 + 9 = 33, \\
 \mu(B, A, C, F, E, D) &= 5 + 9 + 0 + 2 + 5 = 21, \\
 \mu(C, B, E, D, F, A) &= 4 + 8 + 5 + 9 + 2 = 28, \\
 \mu(D, C, B, E, F, A) &= 3 + 4 + 8 + 11 + 2 = 28, \\
 \mu(D, F, A, C, B, E) &= 9 + 2 + 9 + 4 + 8 = 32, \\
 \mu(E, D, F, A, C, B) &= 5 + 9 + 2 + 9 + 4 = 29, \\
 \mu(F, E, D, C, B, A) &= 2 + 5 + 3 + 4 + 5 = 19, \\
 \mu(F, A, C, B, E, D) &= 2 + 9 + 4 + 8 + 5 = 28.
 \end{aligned} \tag{50.9}$$

Гамильтонов путь  $(A, C, B, E, D, F)$  максимальный, а путь  $(B, E, D, C, F, A)$  минимальный.

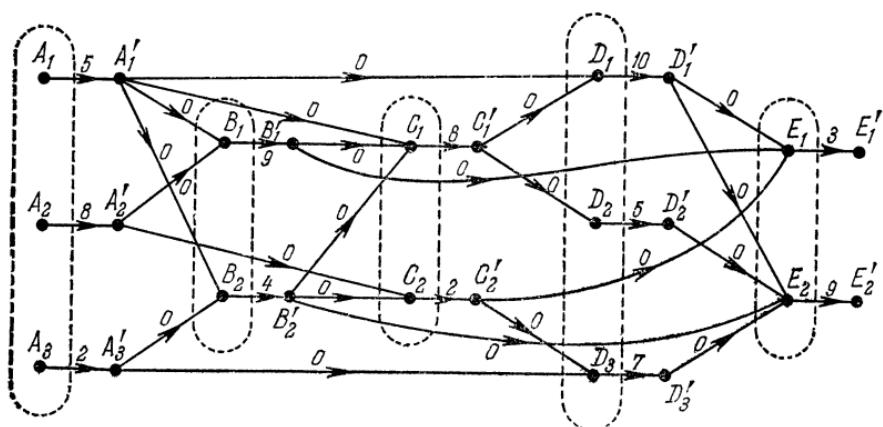


Рис. 235.

**Замечания.** 1) В задачах оптимизации рассматриваются также числовые функции, определенные на других упорядоченных множествах.

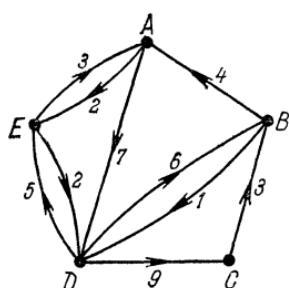
2) В графе без контуров от значений на дугах можно перейти к значениям на вершинах и обратно. Например, на рис. 231 показано, как от графа на рис. 230 со значениями, приписанными ребрам, перейти к графу на рис. 232 со значениями, приписанными вершинам, а на рис. 234 показано, как от графа на рис. 233 со значениями, приписанными вершинам, перейти к графу на рис. 235 со значениями, приписанными дугам.

Итак, от графа без контуров со значениями, приписанными как дугам, так и вершинам, можно перейти к графу со значениями, приписанными только вершинам (только дугам).

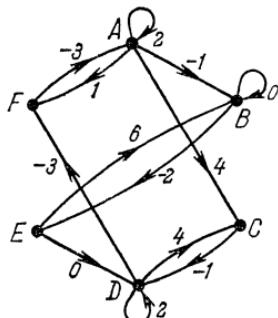
**Подпуть.** Подпуть называют отрезок данного пути. Например, для графа на рис. 229  $(B, C, F, E)$  — подпуть пути  $(B, C, F, E, D, C)$ ,  $(D, C)$  — подпуть пути  $(E, F, D, C)$ , а  $(E, D, C)$  — подпуть пути  $(F, E, D, C, B)$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

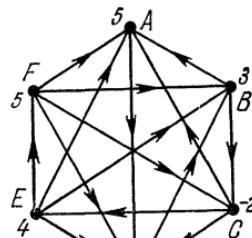
50А. Для графов *a*), *б*), *в*), приведенных ниже:



a)



6)



8)

- 1) указать пути, начинающиеся в  $A$  и имеющие максимальные значения, считая законом композиции сложение;
  - 2) то же для путей с минимальным значением;
  - 3) то же, что и в 1), но закон композиции — умножение.

**50Б.** Для графов *a*, *б*, *в*) из упражнения 50А указать максимальный гамильтонов путь, если:

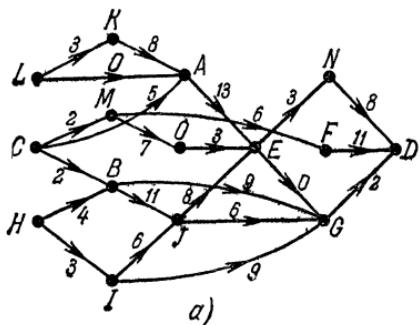
- 1) закон композиции — сложение,  
2) закон композиции — умножение.

**50B.** Для графа *a*) из упражнения 50A указать пути длины 3:

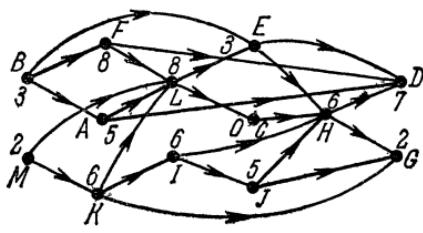
- 1) с минимальным значением, закон композиции — сложение по модулю 4;
  - 2) с максимальным значением, закон композиции — сложение по модулю 5.

50Г. 1) Перейти от графа *a*) к графу со значениями, приписанными вершинам.

- 2) Перейти от графа б) к графу со значениями, приписанными дугам.



a)



6)

50Д. 1) Перейти от графа *a*) к графу со значениями, приписанными только дугам.

2) Перейти от графа б) к графу со значениями, приписанными только вершинам.

	3	5	0	0	2	6	1
A		B	C	D	E	F	G
3 A		5				2	
5 B						4	
0 C	2	0					7
0 D		5					2
2 E	8	6		3		3	
6 F							
1 G							

a)

	0	3	5	8	2	0	6	11
A					4		1	
0 A						4		1
3 B	10		1	5			10	
5 C				4			3	2
8 D								
2 E				8			7	
0 F			4		2			
6 G								
11 H				1			6	

b)

## § 51. Оптимизация пути в графе без контуров. Теоремы оптимальности

Рассмотрим граф  $G = (E, \Gamma) = (E, U)$  без контуров и его порядковую функцию  $k = O(X_i)$ ,  $X_i \in E$ , принимая за начальный уровень подмножество таких вершин  $X_i$ , что  $\Gamma^{-1}X_i = \emptyset$ . Зададимся также функцией  $\lambda_i = \varphi(X_i)$ .

Теорема оптимальности I. Пусть задан максимальный (минимальный) путь через вершины между вершинами  $X_{m_t}$  и  $X_{s_l}$ , принадлежащими соответственно уровням  $t$  и  $s$ . Тогда его подпуть между вершинами  $X_{v_j}$  и  $X_{\rho_k}$ , принадлежащими соответственно уровням  $v$  и  $\rho$ ,  $t \leq v < \rho \leq s$ , также максимальен (минимален).

Доказательство. Пусть  $(X_{m_t}, \dots, X_{v_j}, \dots, X, \dots, X_{\rho_k}, \dots, X_{s_l})$  — путь с максимальным значением  $(x_{m_t} * \dots * x_{v_j} * \dots * x * \dots * x_{\rho_k} * \dots * x_{s_l})$  ( $X$  отсутствует, если  $(X_{v_j}, X_{\rho_k})$  — дуга). Предположим, что значение  $x_{v_j} * \dots * x * \dots * x_{\rho_k}$  подпути  $(X_{v_j}, \dots, X, \dots, X_{\rho_k})$  не максимально. Тогда существует подпуть  $(X_{v_j}, \dots, X', \dots, X_{\rho_k})$  со значением, большим указанного. Но это противоречит максимальности заданного пути между  $X_{m_t}$  и  $X_{s_l}$ . Для путей с минимальным значением доказательство проводится таким же образом.

Пример (см. рис. 236, закон композиции — сложение). Легко убедиться, что путь  $(B_2, C_2, D_2, E_3, F_1)$  между вершинами  $B_2$  и  $F_1$  максимальный (со значением 44) и что его подпуть  $(C_2, D_2, E_3)$  (со значением 31) между вершинами  $C_2$  и  $E_3$  также максимальный.

Теорема оптимальности II. Пусть задан максимальный (минимальный) путь через дуги между вершинами  $X_{m_i}$  и  $X_{s_i}$ , принадлежащими соответственно уровням  $t$  и  $s$ . Тогда его

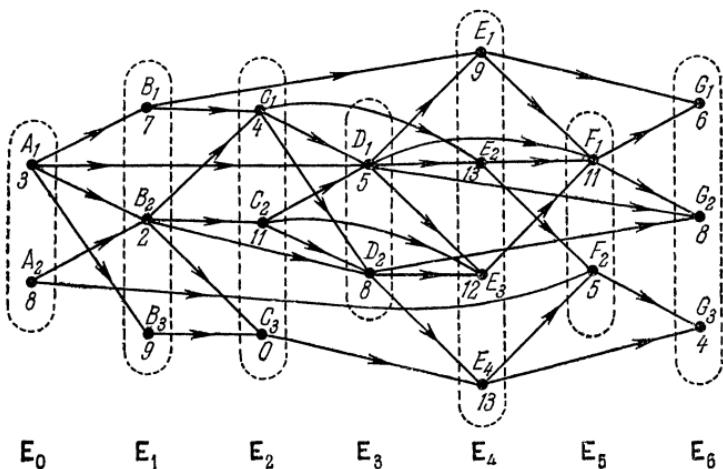


Рис. 236.

подпуть между вершинами  $X_{v_j}$  и  $X_{\rho_k}$ , принадлежащими соответственно уровням  $v$  и  $\rho$ ,  $m \leq v < \rho \leq s$ , также максимальен (минимальен).

Доказательство аналогично доказательству теоремы I.

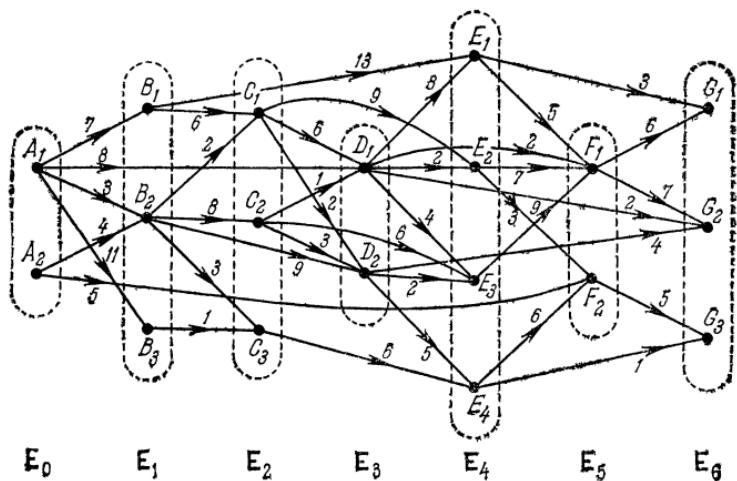


Рис. 237.

Пример (см. рис. 237, закон композиции — сложение). Легко убедиться, что путь  $(B_2, C_2, E_3, F_1)$  между вершинами  $B_2$  и  $F_1$  максимальный (со значением 23) и что его подпуть  $(C_2, E_3, F_1)$  (со значением 15) также максимальен,

## § 52. Метод динамического программирования

**Графы без контуров.** Рассмотрим граф  $G = (E, \Gamma)$  без контуров и его порядковую функцию  $O(X_i)$ ,  $X_i \in E$ .

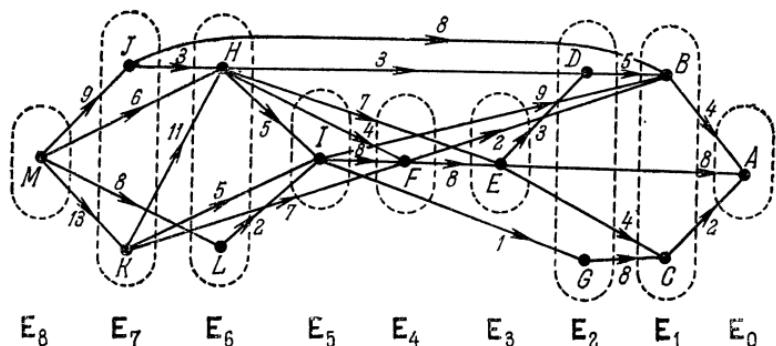


Рис. 238.

Пусть, например,  $G$ -граф на рис. 238, а

$$O(A) = 0, O(B) = O(C) = 1, O(D) = O(G) = 2, O(E) = 3, O(F) = 4, O(I) = 5, O(H) = O(L) = 6, O(J) = O(K) = 7, O(M) = 8 \quad (52.1)$$

$$O(I) = 5, O(H) = O(L) = 6, O(J) = O(K) = 7, O(M) = 8$$

— его порядковая функция.

Ищем путь из  $M$  в  $A$  с минимальным значением (закон композиции — сложение). Начиная с  $A$ , рассматриваем последовательно все вершины графа в порядке возрастания его

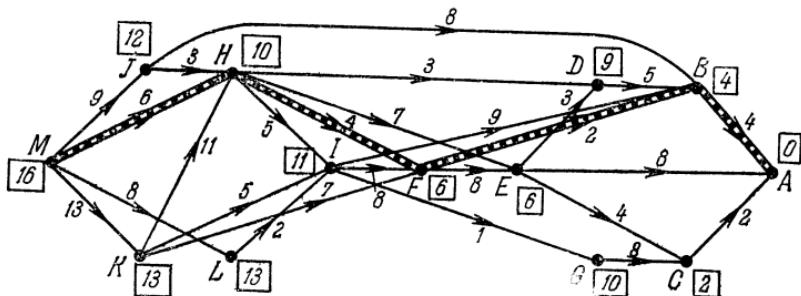


Рис. 239.

порядковой функции (вершины одного и того же уровня рассматриваются в произвольном порядке) и приписываем каждой вершине  $X_i$  «потенциал», равный минимальному значению пути из  $X_i$  в  $A$ . Этот процесс иллюстрирует рис. 239, на котором минимальный путь (он единственный) выделен. Для графа на

рис. 238 с порядковой функцией

$$O'(A) = 8, \quad O'(B) = 7, \quad O'(C) = O'(D) = 6, \quad O'(E) = 5,$$

$$O'(F) = O'(G) = 4, \quad (52.2)$$

$$O'(I) = 3, \quad O'(H) = 2, \quad O'(J) = O'(K) = O'(L) = 1, \quad O'(M) = 0$$

(см. рис. 240) получаем тот же результат (см. рис. 241).

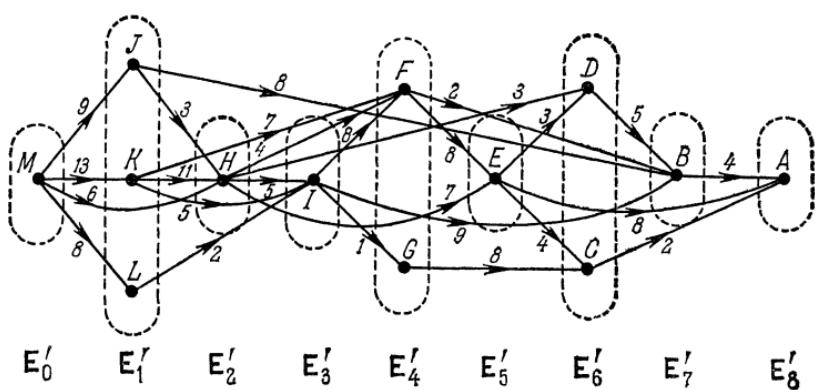


Рис. 240.

Теоремы оптимальности (§ 51) дают обоснование изложенного способа, называемого методом динамического программирования. Он предложен Беллманом и развит им для последовательных графов (см. § 53). Автор и Крюон перенесли его на случай графов без контуров. Условия его применимости:

- 1) граф должен обладать порядковой функцией;
- 2) закон композиции ассоциативен, т. е. структура системы значений должна быть моноидом, или полугруппой.

**Случай, когда начальный и (или) конечный уровень содержат более одной вершины.** Пусть заданы граф без контуров  $G = (E, U)$  со значениями, приписанными дугам, и его порядковая функция. Оптимальный путь между его уровнями  $E_\mu$  и  $E_\nu$ ,  $\mu < \nu$ , можно найти изложенным выше способом. Для этого достаточно дополнительно ввести две вершины: вход  $E$  и выход  $S$ . Вход  $E$  соединим дугами, приписывая каждой из них значение 0, со всеми вершинами  $E_\mu$ , а все вершины  $E_\nu$  соединим дугами с  $S$ , приписывая им также значение 0 (предполагается, что закон композиции — сложение; в случае умножения приписываем этим дугам значение 1). Тогда длина искомого оптимального (т. е. максимального или минимального) пути

$$L_{\text{opt}}(E_\mu, E_\nu) = L_{\text{opt}}(E, S). \quad (52.3)$$

**Графы с контурами.** Для таких графов мы не будем заниматься задачей на максимум, так как он может не существовать

вать, а также будем предполагать в дальнейшем, что значения приписываются его дугам.

Для отыскания минимальных путей графа существуют различные методы.

**Алгоритм Форда [23].** Будем предполагать, что всем дугам  $(X_i, X_j)$  рассматриваемого графа приписаны положительные значения  $l(X_i, X_j)$  (в противном случае мы могли бы, например, добиться этого, прибавляя к каждому значению абсолютную величину наименьшего из них, увеличенную на 1, и будем

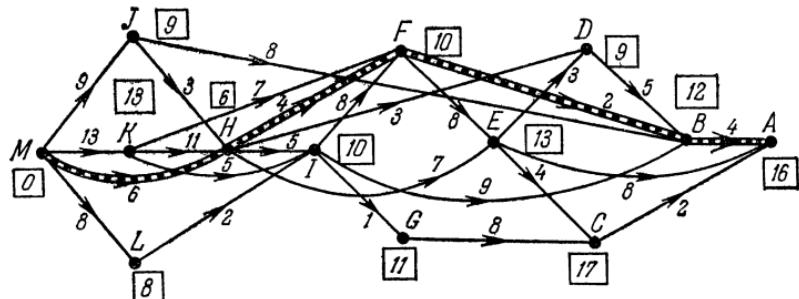


Рис. 241.

искать минимальный путь из  $X_0$  в  $X_n$  следующим способом. Каждой вершине  $X_i$  будем приписывать символы по следующему правилу:

- 1) положим  $\lambda_0 = 0$  и  $\lambda_i = \infty^*$ ) при  $i \neq 0$ ;
- 2) далее каждый раз ищем дугу  $(X_i, X_j)$  с условием  $\lambda_j - \lambda_i > l(X_i, X_j)$  и заменяем  $\lambda_j$  на  $\lambda'_j = \lambda_i + l(X_i, X_j) < \lambda_j$ ; действуем так до тех пор, пока возможно найти дугу, позволяющую уменьшить  $\lambda_i$ .

Покажем, что по указанным правилам мы можем найти минимальные пути. Действительно, так как при этом  $\lambda_n$  монотонно уменьшается, то мы придем к такой вершине  $X_{p_1}$  (прилежащей дуге, с помощью которой в последний раз уменьшилось  $\lambda_n$ ), что  $\lambda_n - \lambda_{p_1} = l(X_{p_1}, X_n)$ . По этой же причине найдется  $X_{p_2}$

$$\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} = l(X_{p_2}, X_{p_1}) \quad (52.4)$$

и т. д. Так как последовательность  $\lambda_n, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots$  строго убывающая, то при некотором  $k$  получим  $X_{p_{k+1}} = X_0$ . Покажем, что  $(X_0, X_{p_k}, \dots, X_n)$  — минимальный путь со значением  $\lambda_n$ , т. е.

\*.) Под символом  $\infty$  здесь следует понимать достаточно большое положительное число. (Прим. перев.)

что значение  $l(X_0, X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_s+1} = X_n)$  любого другого пути  $(X_0, X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_n)$  между  $X_0$  и  $X_n$  не меньше  $\lambda_n$ . Имеем

$$\begin{aligned}\lambda_{k_1} - 0 &\leq l(X_0, X_{k_1}), \\ \lambda_{k_2} - \lambda_{k_1} &\leq l(X_{k_1}, X_{k_2}), \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ \lambda_n - \lambda_{k_s} &\leq l(X_{k_s}, X_n).\end{aligned}\tag{52.5}$$

Отсюда

$$\lambda_n - 0 \leq l(X_0, X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_s+1}).\tag{52.6}$$

Точно так же можно получить

$$\lambda_n = l(X_0, X_{p_k}, X_{p_{k-1}}, \dots, X_{p_1}, X_n),\tag{52.7}$$

т. е.  $(X_0, X_{p_k}, \dots, X_n)$  — минимальный путь.

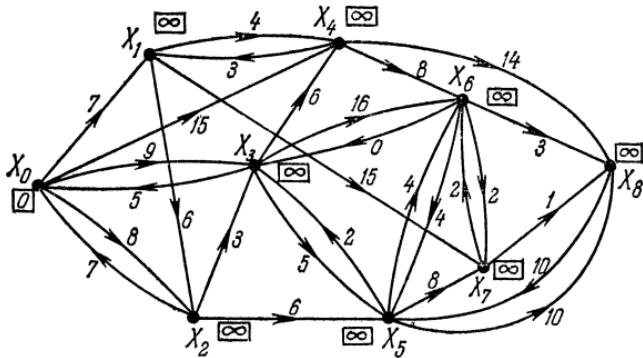


Рис. 242.

**Пример. Шаг 1.** Приписываем вершине  $X_0$  значение 0, а остальным вершинам — значение  $\infty$  (рис. 242). Имеем

$$\begin{aligned}l(X_0, X_1) &= 7, \quad \lambda_1 = \infty, \quad \lambda'_1 = 0 + 7 = 7 < \infty, \\ l(X_0, X_2) &= 8, \quad \lambda_2 = \infty, \quad \lambda'_2 = 0 + 8 = 8 < \infty, \\ l(X_0, X_3) &= 5, \quad \lambda_3 = \infty, \quad \lambda'_3 = 8 + 3 = 11 < \infty, \\ l(X_0, X_4) &= 6, \quad \lambda_4 = \infty, \quad \lambda'_4 = 11 + 4 = 15 < \infty, \\ l(X_0, X_5) &= 6, \quad \lambda_5 = \infty, \quad \lambda'_5 = 15 + 6 = 21 < \infty, \\ l(X_0, X_6) &= 15, \quad \lambda_6 = \infty, \quad \lambda'_6 = 21 + 8 = 29 < \infty, \\ l(X_0, X_7) &= 8, \quad \lambda_7 = \infty, \quad \lambda'_7 = 29 + 8 = 37 < \infty, \\ l(X_0, X_8) &= 3, \quad \lambda_8 = \infty, \quad \lambda'_8 = 37 + 3 = 40 < \infty.\end{aligned}\tag{52.8}$$

Затем приписываем  $X_i$  значения  $\lambda'_i$ , что иллюстрирует рис. 243.

**Шаг 2.** Теперь  $l(X_0, X_1) = 7$ ,  $\lambda_1 = 7$ ,  $\lambda'_1 = 0 + 7 = 7$ , и рассматривая другие вершины  $X_i \in \Gamma^{-1}X_1$ , видим, что  $\lambda_1$  нельзя уменьшить;

$l(X_0, X_2) = 8$ ,  $\lambda_2 = 8$ ,  $\lambda'_2 = 0 + 8 = 8$ , и, рассматривая другие вершины  $X_i \in \Gamma^{-1}X_2$ , видим, что  $\lambda_2$  нельзя уменьшить;  $l(X_2, X_3) = 3$ ,  $\lambda_3 = 11$ ,  $\lambda'_3 = 8 + 3 = 11$ , и так как  $l(X_0, X_3) = 9$ ,  $\lambda_3 = 11$ ,  $\lambda'_3 = 0 + 9 = 9 < 11$ , то  $\lambda_3$  можно уменьшить до 9 (вершины  $X_5$  и  $X_6$  дают большее значение).

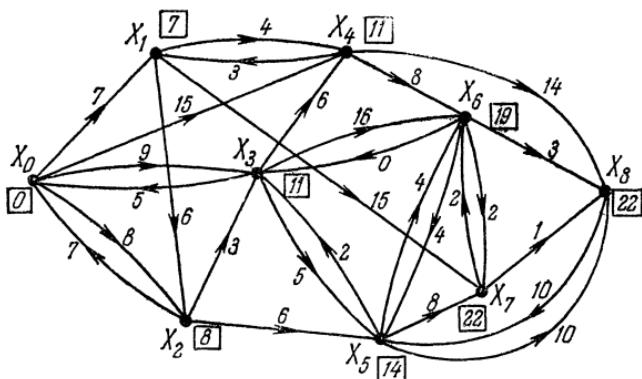


Рис. 243.

Так как

$$l(X_0, X_4) = 15, \quad \lambda_4 = 11, \quad \lambda'_4 = 0 + 15 = 15 > 11;$$

$$l(X_1, X_4) = 4, \quad \lambda_4 = 11, \quad \lambda'_4 = 7 + 4 = 11;$$

$$l(X_3, X_4) = 6, \quad \lambda_4 = 11, \quad \lambda'_4 = 9 + 6 = 15 > 11,$$

то полагаем  $\lambda_4 = 11$ .

Так как

$$l(X_2, X_5) = 6, \quad \lambda_5 = 14, \quad \lambda'_5 = 8 + 6 = 14;$$

$$l(X_3, X_5) = 5, \quad \lambda_5 = 14, \quad \lambda'_5 = 9 + 5 = 14; \quad (52.9)$$

$$l(X_6, X_5) = 4, \quad \lambda_5 = 14, \quad \lambda'_5 = 19 + 4 = 23,$$

то полагаем  $\lambda_5 = 14$ .

Так как

$$l(X_3, X_6) = 16, \quad \lambda_6 = 19, \quad \lambda'_6 = 9 + 16 = 25 > 19;$$

$$l(X_4, X_6) = 8, \quad \lambda_6 = 19, \quad \lambda'_6 = 11 + 8 = 19;$$

$$l(X_5, X_6) = 4, \quad \lambda_6 = 19, \quad \lambda'_6 = 14 + 4 = 18 < 19;$$

$$l(X_7, X_6) = 2, \quad \lambda_6 = 19, \quad \lambda'_6 = 22 + 2 = 24 > 19,$$

то полагаем  $\lambda_6 = 18$ .

Так как

$$l(X_1, X_7) = 15, \quad \lambda_7 = 22, \quad \lambda'_7 = 7 + 15 = 22;$$

$$l(X_5, X_7) = 8, \quad \lambda_7 = 22, \quad \lambda'_7 = 14 + 8 = 22;$$

$$l(X_6, X_7) = 2, \quad \lambda_7 = 22, \quad \lambda'_7 = 18 + 2 = 20 < 22,$$

то полагаем  $\lambda_7 = 20$ .

Так как

$$l(X_4, X_8) = 14, \quad \lambda_8 = 22, \quad \lambda'_8 = 11 + 14 = 25 > 22;$$

$$l(X_5, X_8) = 10, \quad \lambda_8 = 22, \quad \lambda'_8 = 14 + 10 = 24 > 22;$$

$$l(X_6, X_8) = 3, \quad \lambda_8 = 22, \quad \lambda'_8 = 18 + 3 = 21 < 22;$$

$$l(X_7, X_8) = 1, \quad \lambda_8 = 22, \quad \lambda'_8 = 20 + 1 = 21 < 22,$$

то полагаем  $\lambda_8 = 21$ .

Результаты представлены на рис. 244.

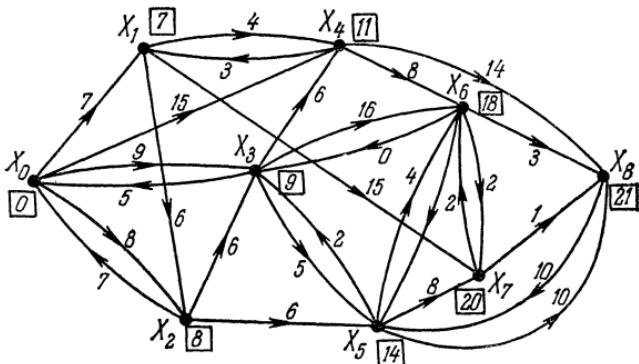


Рис. 244.

*Шаг 3.* Действуя аналогично, видим, что

$$\forall X_j (\lambda'_j = \lambda_j + l(X_i, X_j) \geq \lambda_j), \quad (52.10)$$

т. е. значения путей уменьшить больше нельзя. Таким образом, приходим к минимальным путям от  $X_0$  до  $X_8$ :

$$(X_0, X_2, X_5, X_6, X_8), \quad (X_0, X_2, X_5, X_6, X_7, X_8), \quad (52.11)$$

$$(X_0, X_3, X_5, X_6, X_8), \quad (X_0, X_3, X_5, X_6, X_7, X_8)$$

со значением 21. На рис. 244 представлены также значения минимальных пугей от  $X_0$  до любой другой вершины.

**Отыскание максимального пути графа без контуров.** Алгоритм Форда может быть использован для отыскания максимального пути таких графов. Достаточно положить  $\lambda_i = 0$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , а затем заменять  $\lambda_j$  на  $\lambda'_j = \lambda_j + l(X_i, X_j)$ , если  $\lambda'_j > \lambda_j$ , до тех пор, пока возможно увеличивать  $\lambda_j$ .

**Алгоритм Беллмана — Калаба [2].** Этот алгоритм использует принцип оптимальности: «любой подпуть минимального пути

является минимальным путем между соответствующими вершинами». Рассмотрим граф  $G = [\mathbf{E}, \mathbf{U}]$  с  $|\mathbf{E}| = n + 1$  и пронумеруем вершины от 0 до  $n$ .

Пусть  $c_{ij} \geq 0$  — значение, приписанное дуге  $(X_i, X_j)$ . Положим  $c_{ij} = \infty$ , если  $(X_i, X_j) \notin \mathbf{U}$ , и  $c_{ij} = 0$ , если  $i = j$ .

Найдем такой путь

$$(X_0, X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}, X_n), \quad (52.12)$$

что

$$c_{0i_1} + c_{i_1 i_2} + \dots + c_{i_k n} \quad (52.13)$$

минимально. Задача сводится к решению системы

$$v_i = \min_{j \neq i} (v_j + c_{ij}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad (52.14)$$

$$v_n = 0, \quad (52.15)$$

где через  $v_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , обозначены значения оптимальных путей от  $X_i$  до  $X_n$ .

Положим

$$v_i^{(0)} = c_{in}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad (52.16)$$

$$v_n^{(0)} = 0. \quad (52.17)$$

Вычисляем последовательно

$$v_i^{(1)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(0)} + c_{ij}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n; \quad (52.18)$$

$$v_i^{(k)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(k-1)} + c_{ij}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n; \quad (52.19)$$

$$v_n^{(k)} = 0 \quad (52.20)$$

до тех пор, пока не будет выполнено равенство

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (52.21)$$

и тогда  $v_0^{(k)}$  будет минимальным значением оптимального пути от  $X_0$  до  $X_n$ . Легко показать, что для его нахождения достаточно  $n - 1$  итераций.

Пример (см. рис. 242). Матрица  $\|c\|$  (стоимостей) выписана ниже (рис. 245).

Имеем

$$\begin{aligned} v_0^{(0)} &= c_{08} = \infty, & v_1^{(0)} &= c_{18} = \infty, & v_2^{(0)} &= c_{28} = \infty, \\ v_3^{(0)} &= c_{38} = \infty, & v_4^{(0)} &= c_{48} = 14, & v_5^{(0)} &= c_{58} = 10, \\ v_6^{(0)} &= c_{68} = 3, & v_7^{(0)} &= c_{78} = 1, & v_8^{(0)} &= c_{88} = 0. \end{aligned} \quad (52.22)$$

Вычисляем последовательно

$$\begin{aligned}
 v_0^{(1)} &= \min_{j \neq 0} (v_j^{(0)} + c_{0j}) = \\
 &= \min [v_1^{(0)} + c_{01}, v_2^{(0)} + c_{02}, \dots, v_8^{(0)} + c_{08}] = 29, \\
 v_1^{(1)} &= \min_{j \neq 1} (v_j^{(0)} + c_{1j}) = \\
 &= \min [v_0^{(0)} + c_{10}, v_2^{(0)} + c_{12}, \dots, v_8^{(0)} + c_{18}] = 16, \\
 v_2^{(1)} &= \min_{j \neq 2} (v_j^{(0)} + c_{2j}) = \\
 &= \min [v_0^{(0)} + c_{20}, v_1^{(0)} + c_{21}, \dots, v_8^{(0)} + c_{28}] = 16, \\
 v_3^{(1)} &= \min_{j \neq 3} (v_j^{(0)} + c_{3j}) = \\
 &= \min [v_0^{(0)} + c_{30}, v_1^{(0)} + c_{31}, \dots, v_8^{(0)} + c_{38}] = 15, \dots
 \end{aligned} \tag{52.23}$$

	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_0$	0	7	8	9	15	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$X_1$	$\infty$	0	6	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$	15	$\infty$
$X_2$	7	$\infty$	0	3	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$X_3$	5	$\infty$	$\infty$	0	6	5	16	$\infty$	$\infty$
$X_4$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	8	$\infty$	14
$X_5$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	0	4	8	10
$X_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	4	0	2	3
$X_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	0	1
$X_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	$\infty$	$\infty$	0

Рис. 245.

Результаты сведены в нижеследующую таблицу:

Значение оптимального пути от $X_i$ до $X_j$ длины, не превосходящей $k$	$v_0^{(k)}$	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	
$k = 0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	14	10	3	1	0
$k = 1$	29	16	16	15	11	7	3	1	0	
$k = 2$	23	15	13	12	11	7	3	1	0	
$k = 3$	21	15	13	12	11	7	3	1	0	
$k = 4$	21	15	13	12	11	7	3	1	0	

Так как  $v_i^{(4)} = v_i^{(3)}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 8$ , то  $k = 4$  и  $v_0^{(4)} = 21$  — минимальное значение. По  $v_i^{(k-1)}, v_i^{(k-2)}, \dots, v_i^{(0)}$  легко выписать оптимальные пути (они даны в (52.11)).

**Замечание.** Объем вычислений можно сократить, действуя следующим образом.

а) Если  $v_i^{(0)}$  — наименьший элемент вектора  $v^{(0)}$  (без учета  $v_n^{(0)}$ ) и  $i \neq 0$ , то фиксируем  $X_i$  и строим вектор  $v^{(1)}$ .

б) Вектор  $v^{(k)}$ ,  $k > 0$ , определяем, исходя из  $X_i$  и соотношения

$$v_j^{(k)} = \min \{v_j^{(k-1)}, c_{ji} + v_i^{(k-1)}\}.$$

в) В векторе  $v^{(k)}$  выбираем наименьшее значение  $v_i^{(k)}$ , причем индекс  $i$  принадлежит вершинам множества  $E^{(k-1)} - \{X_i^{(k-1)}\}$ ,

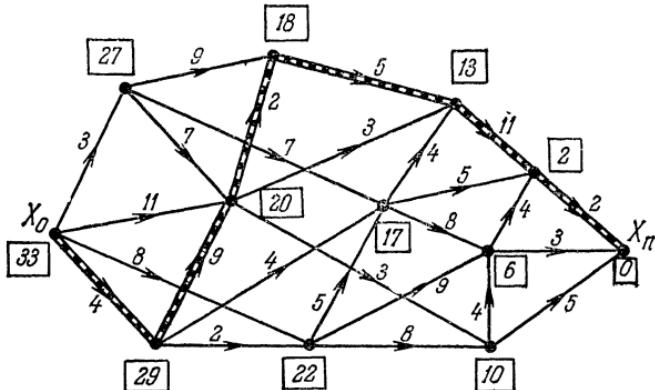


Рис. 246.

где  $X_i^{(k-1)}$  — элемент с наименьшим значением при  $(k-1)$ -й итерации ( $E^1 = E - \{X_n\}$ ). Если  $i = 0$ , то  $(X_0, \dots, X_n)$  — минимальный путь. В противном случае обращаемся к б).

Этим способом нельзя найти максимальный путь.

**Отыскание максимального пути в графе без контуров.** С помощью метода Беллмана — Калаба можно указанным выше способом находить максимальные пути в графе без контуров. Для этого достаточно в уравнениях (52.16) — (52.21) заменить  $\min$  на  $\max$  и  $c_{ij}$  положить равным  $-\infty$ , если  $(X_i, X_j) \notin U$ .

Например, на рис. 246 числа в квадратиках обозначают значения максимальных путей от  $X_i$  к  $X_n$ .

**Путь с минимальным произведением.** Рассмотрим задачу об определении пути, для которого произведение значений, приписанных его дугам, минимально.

Пусть  $c_{ij} \geq 1$  — значение дуги  $(X_i, X_j)$ ;  $c_{ij} = \infty$ , если  $(X_i, X_j) \notin U$ ,  $c_{ii} = 1$ , если  $i = j$ . Найдем такой путь

$$(X_0, X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}, X_n), \quad (52.24)$$

что

$$c_{0t_1}c_{t_1t_2}c_{t_2t_3}\dots c_{t_kn} \quad (52.25)$$

минимально.

В этом случае задача решается с помощью видоизмененного алгоритма Беллмана — Калаба путем рассмотрения системы

$$v_i = \min [v_j c_{ij}], \quad (52.26)$$

$$v_n = 1, \quad (52.27)$$

где через  $v_i$  обозначено значение оптимального пути от  $X_i$  до  $X_n$ . Аналогично (52.16) — (52.21) полагаем

$$v_i^{(0)} = c_{in}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (52.28)$$

$$v_n^{(0)} = 1. \quad (52.29)$$

Вычисляем последовательно

$$v_i^{(1)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(0)} c_{ij}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (52.30)$$

$$v_n^{(1)} = 1, \quad (52.31)$$

$$v_i^{(k)} = \min (v_j^{(k-1)} c_{ij}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (52.32)$$

$$v_n^{(k)} = 1, \dots \quad (52.33)$$

до тех пор, пока не получаем

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (52.34)$$

Например, для графа на рис. 242 путь

$$(X_0, X_1, X_7, X_8) \quad (52.35)$$

со значением

$$c_{01}c_{17}c_{78} = 105 \quad (52.36)$$

минимален.

С очевидными изменениями изложенный метод годится для отыскания путей с максимальным значением (52.25).

В качестве чисел  $c_{ij}$  часто рассматриваются вероятности  $p_{ij}$  попадания из вершины  $X_i$  в  $X_j$ . В этом случае для всех  $X_i, X_j$  имеем  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ ,  $\sum_i p_{ij} = 1$ . Или, например, в случае, если  $p_{ij}$  — надежность элемента линии связи, ставится задача о нахождении канала, по которому сообщение может быть получено с наибольшей вероятностью.

**Расстояние между двумя вершинами. Путь минимальной длины.** Рассмотрим граф  $G = (E, \Gamma)$ . Число  $d(X_i, X_j)$  дуг в пути минимальной длины от вершины  $X_i$  до  $X_j$  называют *расстоянием* от  $X_i$  до  $X_j$ . Например, для графа на рис. 247  $d(A, B) = 4$ ,  $d(B, A) = 7$ . Нахождение расстояния — частный случай задачи оптимизации суммы значений дуг при  $c_{ij} = 1$ , если

$(X_i, X_j) \in \mathbf{U}$ . Можно использовать алгоритм как Форда, так и Беллмана — Калаба, но мы поступим иначе. Пусть нужно найти расстояние от  $X_0$  до  $X_n$ . Полагаем  $d(X_i, X_j) = \infty$ , если не существует пути от  $X_i$  до  $X_j$ . Действуем по следующим правилам:

- 1) помечаем вершину  $X_0$  индексом 0;

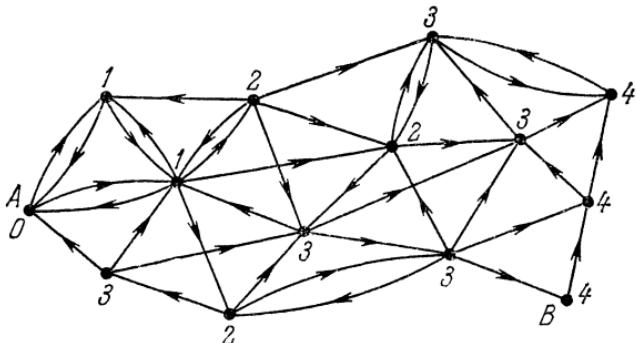


Рис. 247

- 2) помечаем индексом 1 все вершины  $X_i$ , для которых

$$X_i \neq X_0, \quad X_i \in \Gamma X_0; \quad (52.37)$$

- 3) если через  $\mathbf{C}_m$  обозначено множество вершин, помеченных индексом  $m$ , то образуем множество

$$\mathbf{C}_{m+1} = \{X_i \mid X_i \in \Gamma \mathbf{C}_m, (\forall k \leq m) X_i \notin \mathbf{C}_k\}; \quad (52.38)$$

- 4) если  $X_n$  принадлежит некоторому  $\mathbf{C}_m$ , то последовательность вершин таких, что

$$\begin{aligned} X_{t_1} &\in \mathbf{C}_{m-1}, & X_{t_1} &\in \Gamma^{-1} X_n, \\ X_{t_2} &\in \mathbf{C}_{m-2}, & X_{t_2} &\in \Gamma^{-1} X_{t_1}, \\ &\dots &&\dots \\ X_{t_m} &\in \mathbf{C}_0, & X_{t_m} &\in \Gamma^{-1} X_{t_{m-1}}, \end{aligned} \quad (52.39)$$

дает искомый путь.

Задача нахождения максимального пути с  $c_{ij} = 1$ , если  $(X_i, X_j) \in \mathbf{U}$ , ставится лишь для графов без контуров, так как в противном случае она не имеет смысла.

## УПРАЖНЕНИЯ

**52А.** Для графа *a*) из упражнения 50Г найти:

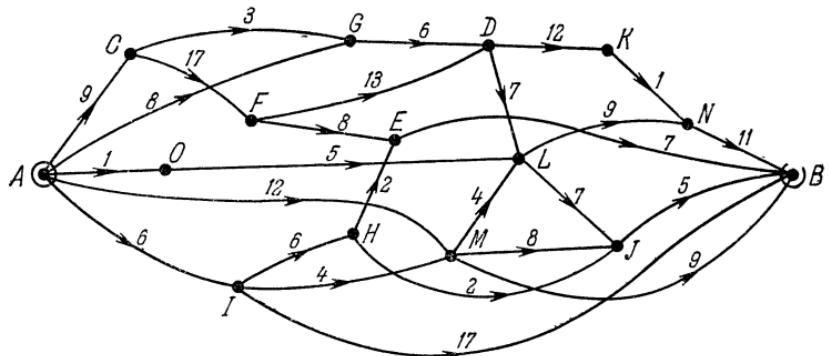
1) пути с минимальным значением от  $L$  до  $D$ , от  $C$  до  $D$ , от  $H$  до  $D$ ;

2) пути с максимальным значением от  $L$  до  $D$ , от  $C$  до  $D$ , от  $H$  до  $D$ .

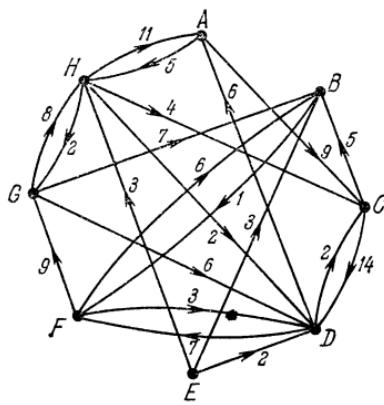
Закон композиции — сложение.

**52Б.** Для графа *б*) из упражнения 50Г найти пути с минимальным и максимальным значениями от  $B$  до  $D$ , от  $B$  до  $G$ , от  $M$  до  $D$  и от  $M$  до  $G$ . Закон композиции — сложение.

**52В.** Указать максимальные и минимальные пути между  $A$  и  $B$  для следующего графа (закон композиции — сложение):



**52Г.** Методом Форда найти минимальные пути от  $A$  до каждой из остальных вершин графов а) и б) (закон композиции — сложение):



а)

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$	$I$	$J$
$A$	$\infty$	4	11	6	7	$\infty$	9	3	6	17
$B$	11	$\infty$	2	3	1	6	2	4	$\infty$	3
$C$	$\infty$	3	$\infty$	6	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	9	2
$D$	2	$\infty$	5	$\infty$	3	6	16	2	7	14
$E$	6	$\infty$	3	1	$\infty$	6	5	$\infty$	9	$\infty$
$F$	$\infty$	6	2	$\infty$	11	$\infty$	8	9	$\infty$	$\infty$
$G$	$\infty$	4	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	9	16
$H$	1	16	$\infty$	4	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	3	2
$I$	9	3	4	$\infty$	1	6	2	5	$\infty$	3
$J$	3	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	13	11	$\infty$

б)

**52Д.** То же методом Беллмана — Калаба.

**52Е.** Методом Форда найти минимальный и максимальный пути графа из упражнения 52В (закон композиции — сложение).

**52Ж.** То же методом Беллмана — Калаба.

**52З.** Для графов упражнения 52Г найти методом Беллмана — Калаба минимальный путь (закон композиции — умножение).

**52И.** Определить расстояние от вершины  $A$  до каждой из остальных вершин следующих графов (предполагая, что в пустых клетках стоят нули):

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>A</i>		1		1	1		
<i>B</i>			1		1		1
<i>C</i>	1	1			1		1
<i>D</i>				1		1	
<i>E</i>	1		1	1		1	
<i>F</i>		1		1			1
<i>G</i>	1		1		1	1	

*a)*

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
<i>A</i>			1		1	1			
<i>B</i>	1					1		1	1
<i>C</i>									
<i>D</i>				1		1	1	1	
<i>E</i>	1			1					1
<i>F</i>		1			1				1
<i>G</i>						1	1		
<i>H</i>	1	1				1		1	
<i>I</i>					1	1	1		

*b)*

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>
<i>A</i>			1			1	1		1		1
<i>B</i>		1		1	1		1	1			1
<i>C</i>				1		1	1				1
<i>D</i>					1	1	1		1	1	
<i>E</i>							1		1		
<i>F</i>								1	1		
<i>G</i>							1		1	1	
<i>H</i>									1	1	
<i>I</i>										1	
<i>J</i>											1
<i>K</i>											

*в)*

### § 53. Последовательные графы

Граф  $G = (E, \Gamma)$  называют *последовательным*, если для него выполняются следующие условия:

1)  $G$  обладает порядковой функцией  $O(X)$  со значениями  $0, 1, \dots, n$ ;

$$2) \quad \Gamma E_k \subset E_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (53.1)$$

где

$$E_k = \{X \mid O(X) = k\}. \quad (53.2)$$

Следовательно, последовательный граф — это такой граф без контуров, в котором множество дуг, исходящих из вершин уровня  $E_k$ , совпадает со множеством дуг, входящих в вершины уровня  $E_{k+1}$ , если нулевой уровень определяется условием  $\Gamma^{-1}E_0 = \emptyset$ . Пример такого графа приведен на рис. 248.

Очевидно, что к последовательным графам применимы способы отыскания оптимальных путей, изложенные выше, как, например, для графа на рис. 249, где максимальный путь выделен (на рис. 250, та же задача решена для того же графа, но с другой порядковой функцией).

Для последовательного графа процесс оптимизации упрощается.

Пусть

$v_1(x_0, x_1)$  — значение дуги, соединяющей уровень  $E_0$  с уровнем  $E_1$ ,

$v_2(x_1, x_2)$  — значение дуги, соединяющей уровень  $E_1$  с уровнем  $E_2$ ,

$\dots$   
 $v_n(x_{n-1}, x_n)$  — значение дуги, соединяющей уровень  $E_{n-1}$  с уровнем  $E_n$ ,

где  $x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ , — переменная, определенная на вершинах уровня  $E_i$ .

Тогда задача сводится к оптимизации функции

$$F(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = v_1(x_0, x_1) + v_2(x_1, x_2) + \\ + v_3(x_2, x_3) + \dots + v_{n-1}(x_{n-2}, x_{n-1}) + v_n(x_{n-1}, x_n). \quad (53.3)$$

Под сложением здесь можно понимать произвольную бинарную ассоциативную операцию  $*$ .

Метод динамического программирования, основанный на принципе оптимальности, позволяет записать

$$\begin{aligned} f_{0,1}(x_0, x_1) &= v_1(x_0, x_1), \\ f_{0,2}(x_0, x_2) &= \underset{x_1 \in E_1}{\text{opt}} [f_{0,1}(x_0, x_1) * v_2(x_1, x_2)], \\ f_{0,3}(x_0, x_3) &= \underset{x_2 \in E_2}{\text{opt}} [f_{0,2}(x_0, x_2) * v_3(x_2, x_3)], \\ \dots &\dots \\ f_{0,n-1}(x_0, x_{n-1}) &= \\ &= \underset{x_{n-2} \in E_{n-2}}{\text{opt}} [f_{0,n-2}(x_0, x_{n-2}) * v_{n-1}(x_{n-2}, x_{n-1})], \\ f_{0,n}(x_0, x_n) &= \underset{x_{n-1} \in E_{n-1}}{\text{opt}} [f_{0,n-1}(x_0, x_{n-1}) * v_n(x_{n-1}, x_n)]. \end{aligned} \quad (53.4)$$

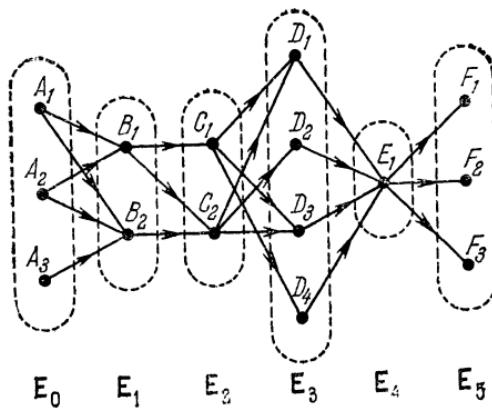


Рис. 248.

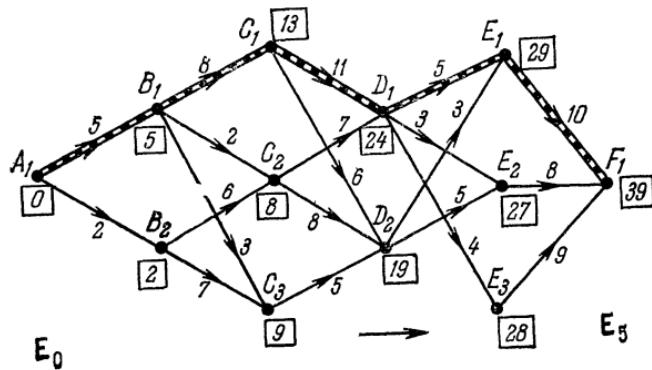


Рис. 249.

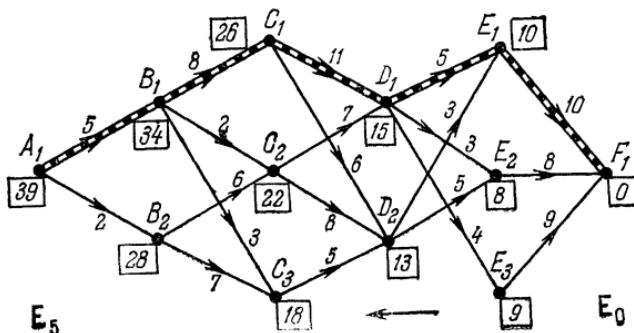


Рис. 250

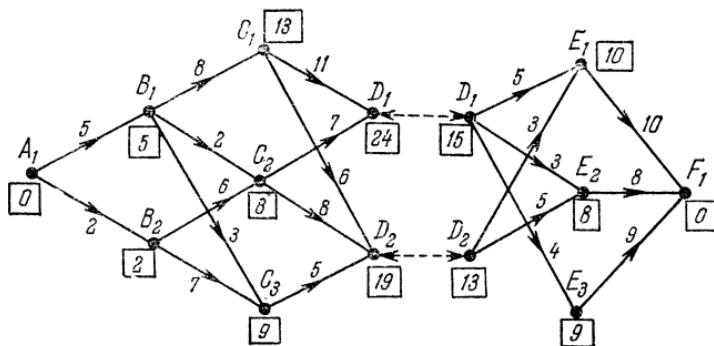
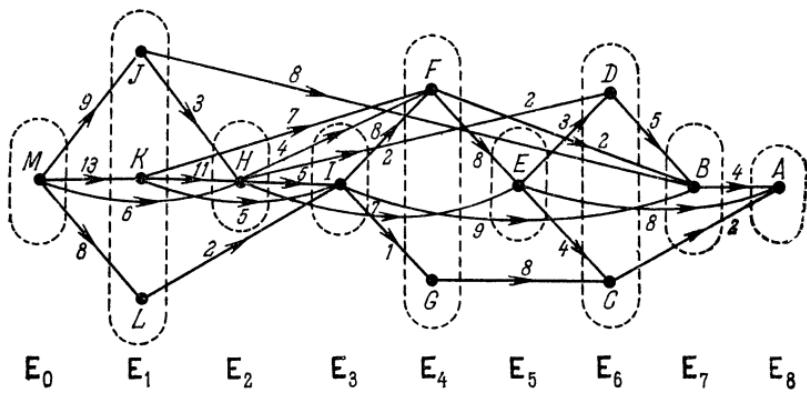


Рис. 251.



$E_0$        $E_1$        $E_2$        $E_3$        $E_4$        $E_5$        $E_6$        $E_7$        $E_8$

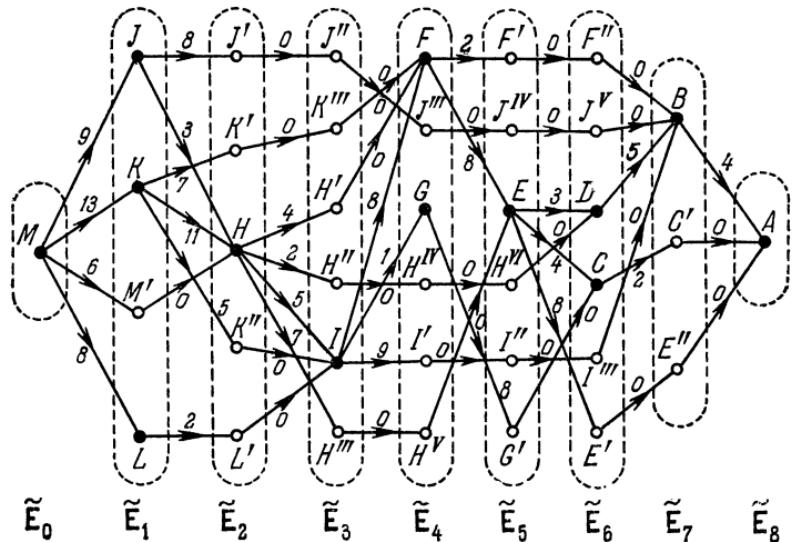


Рис. 252.

В случае, когда  $E_0$  или  $E_n$  содержат более одной вершины,

$$f_{\text{opt}} = \underset{\substack{x_0 \in E_0 \\ x_n \in E_n}}{\text{opt}} f_{0, n}(x_0, x_n). \quad (53.5)$$

Последовательный граф можно разложить на последовательные подграфы, как показано на рис. 251, и производить оптимизацию по частям.

С другой стороны, вводя новые вершины, любой граф без контуров можно дополнить до последовательного. На рис. 252 показано, как это осуществляется; при этом новым дугам приписывается значение 0 (или нейтральный элемент относительно закона \*).

**Задачи, приводящие к оптимизации на последовательных графах.** Некоторые комбинаторные задачи можно свести к задаче оптимизации на последовательном графе.

Пусть  $f_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , заданы таблицей

$x_i$	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$	$f_4(x_4)$
0	2	7	5	13
1	4	8	2	2
2	5	3	11	8
3	9	17	3	8
4	6	0	5	13
5	9	4	6	7

(53.6)

Требуется определить минимум

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \quad (53.7)$$

при условии

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \quad (53.8)$$

Строится граф, дугам которого приписываются возможные значения функций из таблицы (53.6), как показано на рис. 253 (вершины расположены в том же порядке, что и числа в (53.6)). Порядок, в котором рассматриваются переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , произволен, т. е. существуют  $4! = 24$  таких последовательных графов.

Полагая

$$x_1 + x_2 = u_1, \quad u_1 + x_3 = u_2, \quad u_2 + x_4 = 5, \quad (53.9)$$

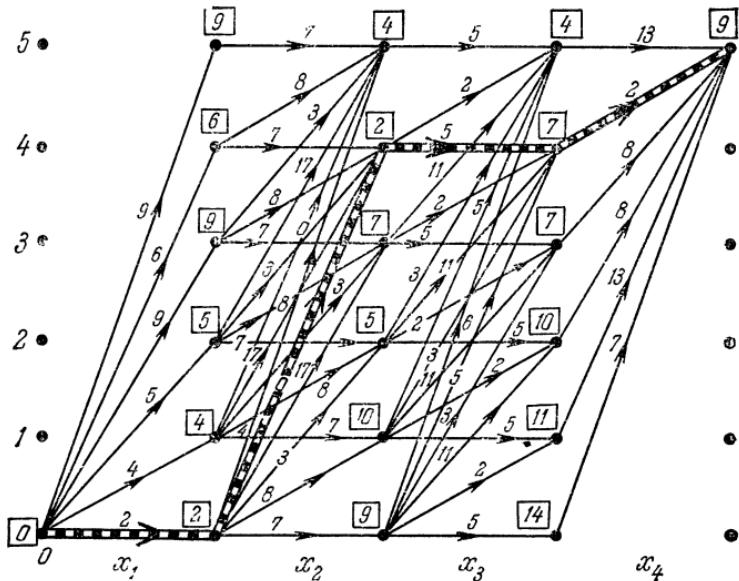
где

$$u_1 \leqslant 5, \quad u_2 \leqslant 5, \quad (53.10)$$

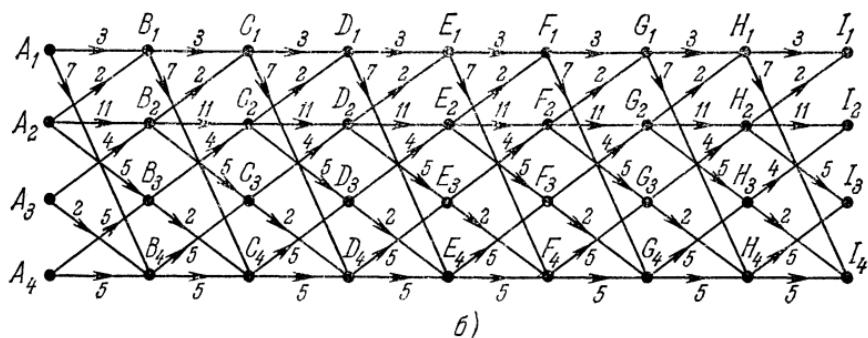
функцию (53.7) можно записать так:

$$F(x_1, u_1, u_2) = f_1(x_1) + f_2(u_1 - x_1) + f_3(u_2 - u_1) + f_4(5 - u_2), \quad (53.11)$$

т. е. в форме (53.3).

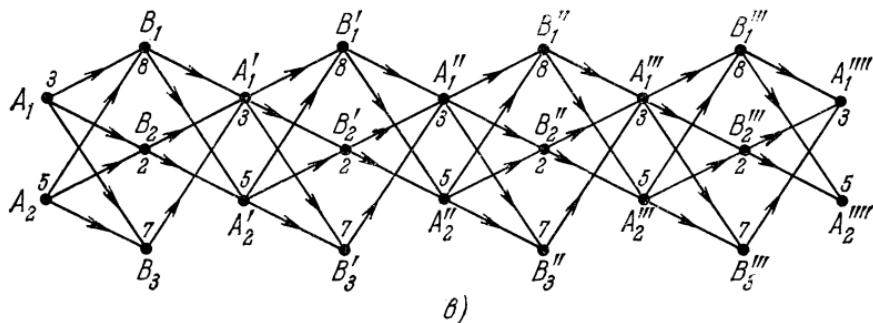


**53Б.** Определить путь с минимальным значением от первого до последнего уровня для следующего графа (закон композиции — сложение):



б)

**53В.** То же для графа



б)

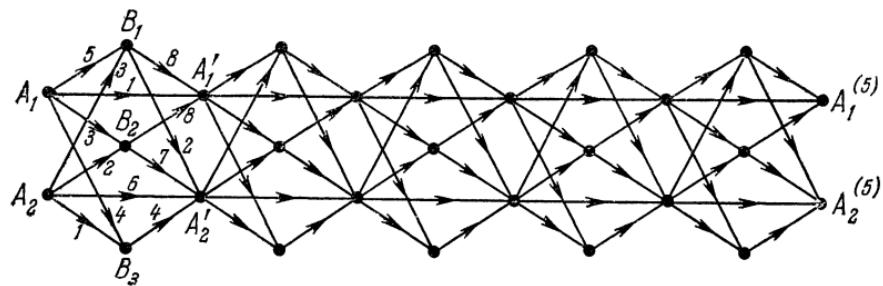
**53Г.** То же, что и в упражнениях 53А — 53В, но для максимальных путей.

**53Д.** Решить задачу, аналогичную рассмотренной в последнем пункте этого параграфа, для функций, заданных таблицей

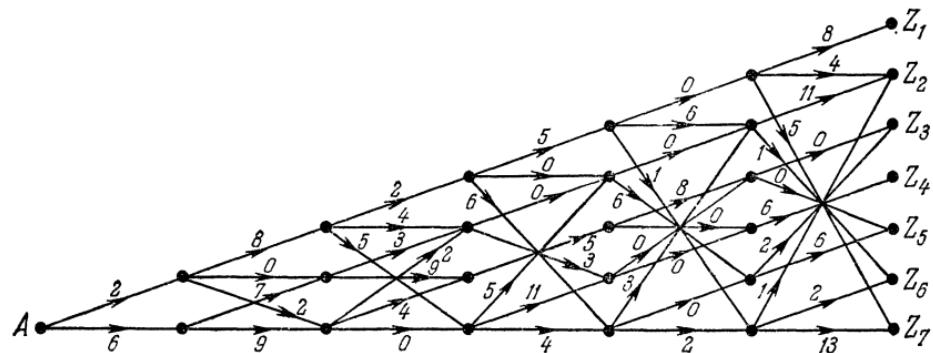
$x_i$	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$	$f_4(x_4)$	$f_5(x_5)$
0	2	5	3	9	3
1	2	8	2	6	5
2	8	4	2	5	8
3	13	6	8	5	0
4	11	7	0	6	0
5	6	13	9	7	4
6	2	3	12	6	9
7	3	4	0	4	8

**53Е.** То же, что и в упражнении 53Д, но для максимального пути

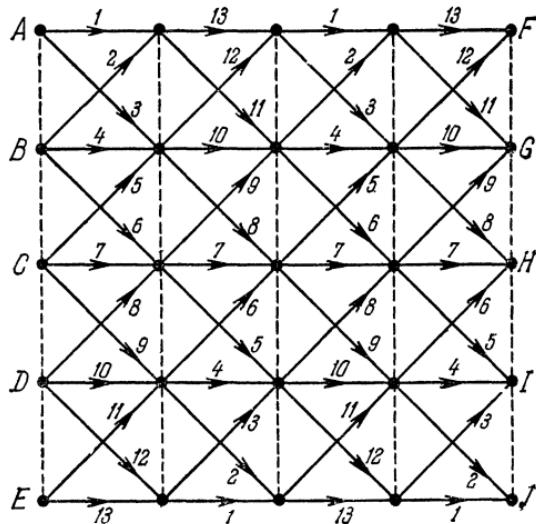
**53Ж.** Найти минимальное значение пути от первого до последнего уровня для следующего графа (закон композиции — сложение; неуказанные значения справа от  $A'_1$ ,  $A'_2$  периодически повторяют указанные):



533. Найти минимальный и максимальный пути от  $A$  до  $Z$  для последовательного графа (закон композиции — сложение):



**53И.** Найти максимальный и минимальный пути от крайнего левого до крайнего правого уровня для следующего графа:



- 1) закон композиции — сложение
  - 2) закон композиции — умножение.

## § 54. Метод прогрессивных разделений и оценок (метод ветвления и ограничения)<sup>1)</sup>

Пусть  $E = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  — множество решений некоторой задачи, а  $f$  — функция на нем. Требуется найти подмножество  $E_m$ , на котором  $f$  достигает минимума (если он существует). Предлагаемый метод можно использовать и для подмножества  $E_m$  максимальных решений.

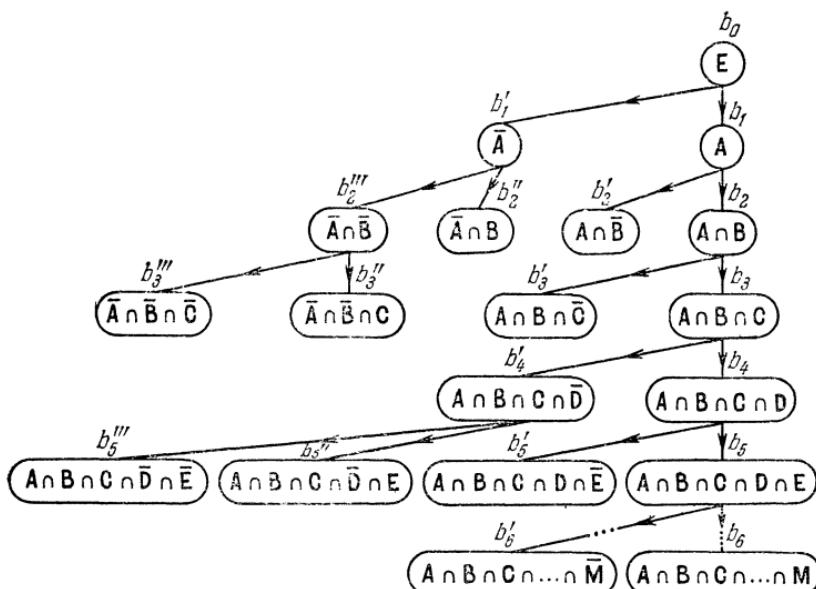


Рис. 254.

Пусть с помощью свойства  $\mathcal{P}_A$  множество  $E$  можно разбить на подмножество  $A$  и его дополнение  $\bar{A}$ . Предположим, что мы умеем найти нижнюю границу  $b_0$  значений  $f$  на  $E$ , а также нижние границы  $b_1 \geq b_0$ ,  $b'_1 \geq b_0$  значений  $f$  на  $A$ ,  $\bar{A}$  соответственно. Рассмотрим свойства  $\mathcal{P}_B$ ,  $\mathcal{P}_C$ , ..., также позволяющие разбить  $E$  на две части. Тогда свойствам  $\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B$ ,  $\mathcal{P}_A \wedge \bar{\mathcal{P}}_B$ ,  $\bar{\mathcal{P}}_A \wedge \mathcal{P}_B$ ,  $\bar{\mathcal{P}}_A \wedge \bar{\mathcal{P}}_B$  соответствуют подмножества  $A \cap B$ ,  $A \cap \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap B$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$  соответственно. Таким образом, можно образовать прадерево (рис. 254), которое, вообще говоря, нам не нужно строить полностью. Действуем следующим образом. Допустим, что мы уже построили часть прадерева, использовав  $k$  свойств  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ , и нашли нижние границы для вершин этой части. Берем тогда одну из висячих вершин с наименьшей границей и с помощью этих  $k$  свойств и, быть может, нового  $\mathcal{P}_{k+1}$  получаем новые две

<sup>1)</sup> См. Бертъе и Рой [12], Литтл (J. D. C. Little) и др., An Algorithm for the Travelling Salesman Problem, J. O. R. S. A. 11 (1963), 972—989. Отметим, что основы этого метода даны в 1961 г. Мальгранжем и Фором.

вершины, для которых стараемся уточнить нижние границы, и т. д. Заметим, что объединение висячих вершин, получающихся на каждом этапе, дает  $E$ . Например, для прадерева на рис. 255 имеем

$$\bar{A} \cup (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) = E.$$

В силу этого замечания, если в результате данного процесса мы приходим к висячей вершине, являющейся одноэлементным множеством, то  $f$  принимает на нем минимальное значение.

Очевидно, что аналогичные рассуждения можно использовать для получения максимального решения (если оно существует), рассматривая соответствующие верхние границы и стараясь их уменьшить на каждом шаге.

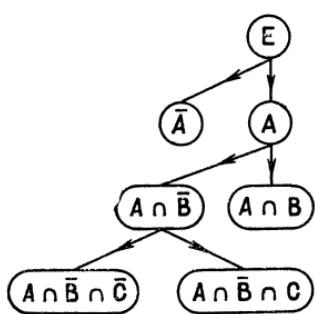


Рис. 255.

Этот метод можно назвать «методом оптимизации с помощью решета». Рассматриваются его различные модификации (например, метод динамического программирования). При реализации этого метода существуют выбор свойств и уточнение оценок на каждом этапе. Заметим также, что вместо разбиений на две части можно рассматривать разбиения на  $n$  частей. Об этом, в частности, см. работу Лоуэра и Вуда<sup>1)</sup>.

**Отыскание оптимальных гамильтоновых контуров графа. Алгоритм Литтла<sup>2)</sup>.** Эта задача, известная под названием «задача о коммивояжере», долгое время оставалась нерешенной. В 1963 г. Литтл (вместе с другими авторами) дал для этой задачи строгий метод оптимизации; мы рассмотрим его на примере. Название этой задачи происходит из того, что гамильтонов контур можно рассматривать как путь коммивояжера, желающего посетить все города в точности по одному разу и возвратиться обратно.

Опишем алгоритм Литтла для нахождения минимального гамильтонова контура для графа с  $n$  вершинами. Для иллюстрации рассуждений будем пользоваться полным симметрическим графом на рис. 256, каждой дуге  $(X_i, X_j)$  которого приписано значение  $v_{ij} = v(X_i, X_j) \geq 0$ . Эти значения представлены в виде матрицы стоимостей  $\|v_{ij}\|$  (рис. 257). Символ  $\infty$  означает, что между  $X_i$  и  $X_j$  нет дуги. Этот алгоритм сводится к следующим правилам.

А) Находим в каждой строке матрицы  $\|v_{ij}\|$  минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов этой строки. Если в получающейся матрице окажутся столбцы, не содержащие

<sup>1)</sup> Lawler E. L. and Wood D. E., Branch-and-bound Methods: A Survey, Journal of the O. R. Society of America **14**, № 4, July — August, 1966, 699—719.

<sup>2)</sup> См. сноску на стр. 299.

нуля, то в каждом из них находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов этого столбца. Таким образом, мы приходим к матрице  $\|v'_{ij}\|$ , каждая строка и каждый столбец которой содержат по меньшей мере один нуль.

Б) Суммируем все элементы, которые мы вычитали в А). Очевидно, что эта сумма является нижней границей множества

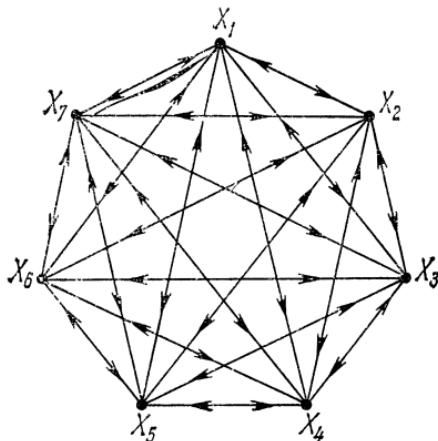


Рис. 256. Здесь пара дуг заменена двойной стрелкой.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	5	9	6	3	5	9
$X_2$	8	$\infty$	8	8	5	9	2
$X_3$	6	9	$\infty$	1	6	7	3
$X_4$	7	11	4	$\infty$	4	2	9
$X_5$	4	6	3	2	$\infty$	2	8
$X_6$	5	2	2	8	4	$\infty$	3
$X_7$	8	1	3	16	5	3	$\infty$

Рис. 257.

Е решений, которое берется в качестве корня прадерева (см. стр. 299).

В) Выбираем дугу  $(X_k, X_l)$ , для которой

$$\theta(X_k, X_l) = \max_{i, j} \gamma(X_i, X_j), \quad (54.1)$$

где  $\gamma(X_i, X_j)$  — сумма наименьшего элемента  $i$ -й строки (исключая  $v'(X_i, X_j)$ ) и наименьшего элемента  $j$ -го столбца (исключая  $v'(X_i, X_j)$ ), которая вычисляется для  $i$  и  $j$  с  $v'(X_i, X_j) = 0$ .

Рассмотрим свойство  $\bar{\mathcal{P}}_{ij}$ : «контуры не используют дуги  $(X_i, X_j)$ », которое будет применяться к дугам с  $v'(X_i, X_j) = 0$ ; оно позволяет осуществить нужные нам разбиения (см. стр. 299).

Если гамильтонов контур не использует такой дуги  $(X_i, X_j)$ , то он должен использовать некоторые две дуги  $(X_i, X_s)$ ,  $s \neq j$ , и  $(X_r, X_j)$ ,  $r \neq i$  (иначе он не проходил бы по крайней мере через одну из вершин  $X_i, X_j$ ; см. рис. 258).

Г) Вычисляем  $\theta(X_k, X_l)$  по формуле (54.1) и прибавляем его к границе, соответствующей вершине прадерева, исходя из которой производится разбиение. Эта сумма будет границей для новой вершины, определяемой свойством  $\bar{\mathcal{P}}_{kl}$ , которую соединяем дугой, идущей в нее из указанной выше вершины.

Д) Аналогично Г) присоединяем к прадереву вершину, определяемую свойством  $\bar{\mathcal{P}}_{kl}$ : «контуры используют дугу  $(X_k, X_l)$ ». Удалим из матрицы  $k$ -ю строку и  $l$ -й столбец и заменим на  $\infty$ .

значения тех дуг, используя которые, получают контуры длины, меньшей  $n$ .

Е) Действуем, как в А), с матрицей, получающейся в результате Д).

Ж) Действуем, как в Б), с матрицей, получающейся в результате Е). Прибавляя полученную сумму к границе для предыдущей вершины, получаем границу для вершины из Д).

З) Если в результате Д) получают матрицу порядка 1, то процесс заканчивается. В противном случае переходим к И).

И). Среди висячих вершин уже построенного прадерева выбираем вершину с наименьшей границей (если таковых несколько, выбираем произвольно).

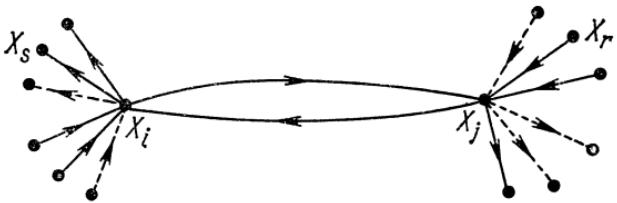


Рис. 258.

К) Если выбранная по И) вершина соответствует свойству  $\mathcal{P}_{ij}$ , то переходим к В). В противном случае переходим к Л).

Л) Значение в клетке  $(i, j)$  матрицы, соответствующей висячей вершине, выбранной в К), заменяем на  $\infty$ . В  $i$ -й строке, а также в  $j$ -м столбце находим наименьший элемент и вычитаем его из всех элементов этой строки (столбца). Затем переходим к В).

Пример. Опишем построение прадерева на рис. 259, дающего минимальный гамильтонов контур графа на рис. 256, согласно алгоритму, изложенному выше.

А) Из элементов строк  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$  матрицы на рис. 257 вычитаем соответственно их наименьшие элементы: 3, 2, 1, 2, 2, 1, а также вычитаем 2 из всех элементов столбца  $X_1$ . Получаем на рис. 260 матрицу.

Б) Вычисляем сумму:  $3 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 = 15$ . Получаем для Е на рис. 259 границу, равную 15.

В) Рассмотрим все нулевые элементы матрицы на рис. 260 (воспроизведенной также на рис. 261 — выкладки для вершины 2 прадерева).

Возьмем 0 в клетке  $(1, 5)$ . Если исключить его, то 2 — наименьший элемент строки  $X_1$ , а также столбца  $X_5$ . Имеем  $\gamma(X_1, X_5) = 2 + 2 = 4$ . Это значение записываем в клетке  $(1, 5)$  курсивом, чтобы отличить от  $v_{15}$ . Берем затем 0 в клетке  $(X_2, X_7)$ . Если исключить элемент в этой клетке, то 3 — наименьший элемент в строке  $X_2$ , а 1 — в столбце  $X_7$ . Имеем  $\gamma(X_2, X_7) = 3 + 1 = 4$ .

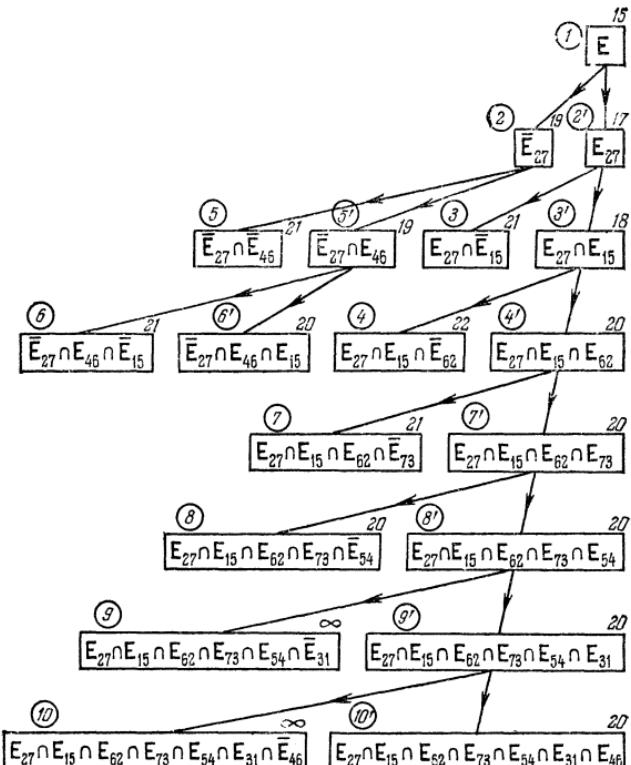


Рис. 259 Порядок, в котором строились вершины, указывают цифры в кружках: 1, 2, 2', 3, 3', ..., 10, 10'.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	2	6	3	0	2	6
$X_2$	4	$\infty$	6	6	3	7	0
$X_3$	3	8	$\infty$	0	5	6	2
$X_4$	3	9	2	$\infty$	2	0	7
$X_5$	0	4	1	0	$\infty$	0	6
$X_6$	1	0	0	6	2	$\infty$	1
$X_7$	5	0	2	15	4	2	$\infty$

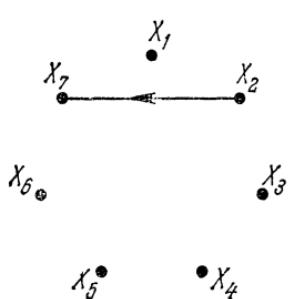
Рис. 260.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
3	$X_1$	$\infty$	2	6	3	0	2
2	$X_2$	4	$\infty$	6	6	3	7
1	$X_3$	3	8	$\infty$	0	5	6
2	$X_4$	3	9	2	$\infty$	2	0
2	$X_5$	0	4	1	0	$\infty$	0
2	$X_6$	1	0	0	6	2	$\infty$
1	$X_7$	5	0	2	15	4	2

Рис. 261.

Аналогично  $\gamma(X_5, X_4) = 0 + 0 = 0$ ,  $\gamma(X_7, X_2) = 2 + 0 = 2$ . Выбираем дугу  $(X_2, X_7)$ , так как  $\gamma(X_2, X_7)$  максимально. Это значение  $\gamma(X_2, X_7)$  записываем полужирным шрифтом в соответствующей клетке.

Г) Изображаем вершину  $\bar{E}_{27}$  прадерева (рис. 259) и приписываем ей значение  $15 + 4 = 19$ .



	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$	$\infty$	2	6	3	0	2
$X_3$	3	8	$\infty$	0	5	6
$X_4$	3	9	2	$\infty$	2	0
$X_5$	0	4	1	0	$\infty$	0
$X_6$	1	0	0	6	2	$\infty$
$X_7$	5	$\infty$	2	15	4	2

Рис. 262.

Д) Изображаем вершину  $E_{27}$ . Исключая строку  $X_2$  и столбец  $X_7$  в матрице на рис. 261, получаем матрицу на рис. 262. Рассматривая уже выбранные дуги (в нашем случае дугу  $(X_2, X_7)$ ), видим, что  $v'_{72}$  надо заменить на  $\infty$ , так как иначе получился бы контур  $(X_2, X_7, X_2)$ .

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
$X_1$	$\infty$	2	6	3	0	2	
$X_3$	3	8	$\infty$	0	5	6	
$X_4$	3	9	2	$\infty$	2	0	
$X_5$	1	4	1	0	$\infty$	0	
$X_6$	1	0	0	6	2	$\infty$	
$X_7$	3	$\infty$	0	13	2	0	2

Сумма 2

Рис. 263.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
$X_1$	$\infty$	2	6	3	4	0	2
$X_3$	3	8	$\infty$	0	5	6	
$X_4$	3	9	2	$\infty$	2	$\infty$	0
$X_5$	1	4	1	0	$\infty$	0	0
$X_6$	1	2	0	6	2	$\infty$	
$X_7$	3	$\infty$	0	13	2	0	0

Рис. 264.

Е) Рассматривая матрицу на рис. 262, видим, что нужно только вычесть 2 из строки  $X_7$ , что приводит к матрице на рис. 263 (выкладки для вершины  $2'$  прадерева).

Ж) Сумма элементов, вычтенных из строк и столбцов по Е), здесь равна 2. Следовательно, для вершины  $E_{27}$  имеем границу:  $15 + 2 = 17$ .

З) Имеем матрицу порядка 6, поэтому переходим к И).

И) Висячая вершина с наименьшим значением, равным 17, есть  $E_{27}$ .

К)  $E_{27}$  получалась с помощью  $\mathcal{P}_{27}$ . Переходим к В).

В) Рассматривая матрицу на рис. 264 и вычисляя  $\gamma(X_i, X_j)$  для нулевых элементов этой матрицы, получаем, что  $\theta(X_1, X_5) = 4$  (на рисунке выкладки для вершины 3 прадерева).

Г) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15}$ , которой отвечает граница  $17 + 4 = 21$ .

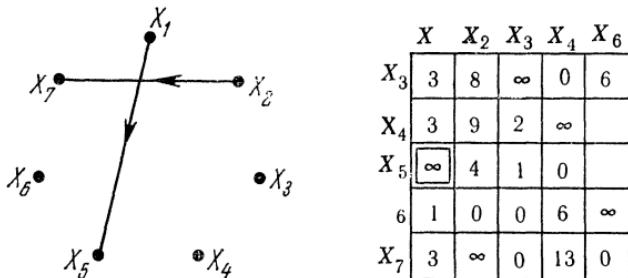


Рис. 265.

Д) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15}$ . Вычеркивая строку  $X_1$  и столбец  $X_5$  матрицы на рис. 264, приходим к матрице на рис. 265, в клетку  $(X_5, X_1)$  которой ставим  $\infty$ , чтобы не получить контура  $(X_1, X_5, X_1)$ .

Е) Рассматривая матрицу на рис. 265, видим, что из всех элементов столбца  $X_1$  нужно только вычесть 1, что приводит к матрице на рис. 266 (выкладки для вершины 3' прадерева).

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_6$
$X_3$	2	8	$\infty$	0	6
$X_4$	2	9	2	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	4	1	0	0
$X_6$	0	0	0	6	$\infty$
$X_7$	2	$\infty$	0	13	0

1

Рис. 266.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_6$
$X_3$	2	8	$\infty$	<sup>2</sup> 0	6
$X_4$	2	9	2	<sup>2</sup> 0	0
$X_5$	$\infty$	4	1	<sup>0</sup> 0	0
$X_6$	<sup>2</sup> 0	<sup>4</sup> 0	<sup>0</sup> 0	6	$\infty$
$X_7$	2	$\infty$	<sup>0</sup> 0	13	<sup>0</sup> 0

Рис. 267.

Ж) Сумма элементов, вычтенных из строк и столбцов по Е), здесь равна 1. Следовательно, для вершины  $E_{27} \cap E_{15}$  имеем границу  $17 + 1 = 18$ .

З) Имеем матрицу порядка 5, поэтому переходим к И).

И) Висячая вершина с наименьшим значением, равным 18, есть  $E_{27} \cap E_{15}$ .

К)  $E_{27} \cap E_{15}$  получалась с помощью  $\mathcal{P}_{15}$ . Переходим к В).

В) Рассматривая матрицу на рис. 267 и вычисляя  $\gamma(X_i, X_j)$  для нулевых элементов этой матрицы, получаем, что  $\theta(X_6, X_2) = 4$ .

Г) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap \bar{E}_{62}$ , которой отвечает граница  $18 + 4 = 22$ .

Д) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62}$ . Вычеркивая строку  $X_6$  и столбец  $X_2$  матрицы на рис. 267 (выкладки для вершины 4 пра-дерева), приходим к матрице на рис. 268, в клетку  $(X_7, X_6)$  которой ставим  $\infty$ , чтобы не получить контура  $(X_6, X_2, X_7, X_6)$ .

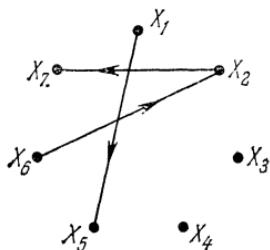


Рис. 268

	$X_1$	$X_3$	$X_4$	$X_6$
$X_3$	2	$\infty$	0	6
$X_4$	2	2	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	1	0	0
$X_7$	2	0	13	$\infty$

	$X_1$	$X_3$	$X_4$	$X_6$
$X_3$	0	$\infty$	0	6
$X_4$	0	2	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	1	0	0
$X_7$	0	0	13	$\infty$

Рис. 269.

Е) Рассматривая матрицу на рис. 268, видим, что нужно только вычесть 2 из всех элементов столбца  $X_1$ , что приводит к следующей матрице на рис. 269 (выкладки для вершины 4 пра-дерева).

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	2	6	3	0	2	6
$X_2$	4	$\infty$	6	6	3	7	$\boxed{\infty}$
$X_3$	3	8	$\infty$	0	5	6	2
$X_4$	3	9	2	$\infty$	2	0	7
$X_5$	0	4	1	0	$\infty$	0	6
$X_6$	1	0	0	6	2	$\infty$	1
$X_7$	5	0	2	15	4	2	$\infty$

Рис. 270.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	2	6	3	<sup>2</sup> 0	2	5
$X_2$	1	$\infty$	3	3	<sup>1</sup> 0	4	$\infty$
$X_3$	3	8	$\infty$	<sup>1</sup> 0	5	6	1
$X_4$	3	9	2	$\infty$	<sup>2</sup> 0	6	
$X_5$	<sup>1</sup> 0	4	1	<sup>0</sup> 0	$\infty$	<sup>0</sup> 0	5
$X_6$	1	<sup>0</sup> 0	<sup>1</sup> 0	6	2	$\infty$	<sup>1</sup> 0
$X_7$	<sup>2</sup> 0	2	15	4	2	$\infty$	

Рис. 271.

Ж) Сумма элементов, вычтенных из строк и столбцов по Е), здесь равна 2. Следовательно, для вершины  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62}$  имеем границу  $18 + 2 = 20$ .

З) Имеем матрицу порядка 4, поэтому переходим к И).

И) Висячая вершина с наименьшим значением, равным 19, есть  $\bar{E}_{27}$ .

К)  $\bar{E}_{27}$  получалась с помощью  $\bar{P}_{27}$ . Переходим к Л).

Л) В клетку  $(X_2, X_7)$  матрицы на рис. 261 ставим  $\infty$ , что приводит к матрице на рис. 270. Затем вычитаем 3 из всех элемен-

тоги строки  $X_2$  и 1 из всех элементов столбца  $X_7$ , что приводит к матрице на рис. 271.

Б) Рассматривая матрицу на рис. 271 и вычисляя  $\gamma(X_i, X_j)$  для нулевых элементов этой матрицы, получаем, что  $\theta(X_4, X_6) = 2$  (клетки  $(X_1, X_5)$  и  $(X_7, X_2)$  также дают это значение).

Г) Строим вершину  $\bar{E}_{27} \cap \bar{E}_{46}$ , которой отвечает граница  $19 + 2 = 21$ .

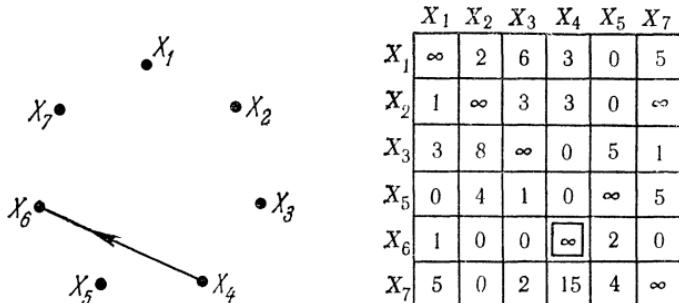


Рис. 272.

Д) Строим вершину  $\bar{E}_{27} \cap E_{46}$ . Вычеркивая строку  $X_4$  и столбец  $X_6$  матрицы на рис. 271, приходим к матрице на рис. 272, в клетку  $(X_6, X_4)$  которой ставим  $\infty$ .

Е) Рассматривая матрицу на рис. 272, видим, что в каждой ее строке и каждом столбце есть по крайней мере один нулевой элемент.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	2	6	3	<sup>2</sup> 0	5
$X_2$	1	$\infty$	3	3	<sup>1</sup> 0	$\infty$
$X_3$	3	8	$\infty$	0	5	1
$X_5$	<sup>1</sup> 0	4	1	<sup>0</sup> 0	$\infty$	5
$X_6$	1	<sup>0</sup> 0	<sup>1</sup> 0	$\infty$	2	<sup>1</sup> 0
$X_7$	5	<sup>2</sup> 0	2	15	4	$\infty$

Рис. 273.

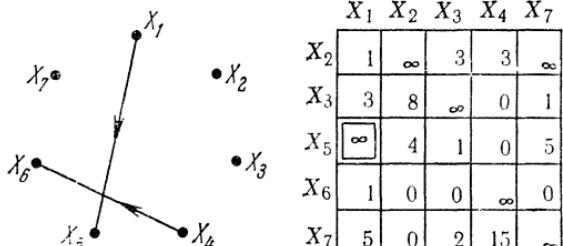


Рис. 274.

Ж) Сумма элементов, вычтенных из строк и столбцов по Е), здесь равна 0. Следовательно, для вершины  $\bar{E}_{27} \cap E_{46}$  имеем границу  $19 + 0 = 19$ .

З) Имеем матрицу порядка 6, поэтому переходим к И).

И) Висячая вершина с наименьшим значением, равным 19, есть  $\bar{E}_{27} \cap E_{46}$ .

К)  $\bar{E}_{27} \cap E_{46}$  получалась с помощью  $\mathcal{P}_{46}$ . Переходим к В).

В) Рассматривая матрицу на рис. 273 и вычисляя  $\gamma(X_i, X_j)$  для нулевых элементов этой матрицы, получаем, что  $\theta(X_1, X_5) = 2$  (клетка  $(X_7, X_2)$  дает то же значение).

Г) Строим вершину  $\bar{E}_{27} \cap E_{46} \cap \bar{E}_{15}$ , которой отвечает граница  $19 + 2 = 21$ .

Д) Строим вершину  $\bar{E}_{27} \cap E_{46} \cap E_{15}$ . Вычеркивая строку  $X_1$  и столбец  $X_5$  в матрице на рис. 273, приходим к матрице на рис. 274, в клетку  $(X_5, X_1)$  которой ставим  $\infty$ .

Е) Рассматривая матрицу на рис. 274, видим, что нужно только вычесть 1 из строки  $X_2$ , что приводит к матрице на рис. 275.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_7$	1
$X_2$	0	$\infty$	2	2	$\infty$	
$X_3$	3	8	$\infty$	0	1	
$X_5$	$\infty$	4	1	0	5	
$X_6$	1	0	0	$\infty$	0	
$X_7$	5	0	2	15	$\infty$	

Рис. 275.

	$X_1$	$X_3$	$X_4$	$X_6$
$X_3$	0	$\infty$	0	6
$X_4$	0	2	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	1	0	0
$X_7$	0	1	0	$\infty$

Рис. 276.

Ж) Сумма элементов, вычтенных из строк и столбцов по Е), здесь равна 1. Следовательно, для вершины  $\bar{E}_{27} \cap E_{46} \cap E_{15}$  имеем границу  $19 + 1 = 20$ .

З) Имеем матрицу порядка 5, поэтому переходим к И).

И) Висячие вершины с наименьшим значением, равным 20, — это  $\bar{E}_{27} \cap E_{46} \cap E_{15}$  и  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62}$ . Произвольно выбираем последнюю<sup>1)</sup>.

К)  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_6$ , получилась с помощью  $\mathcal{P}_{62}$ . Переходим к В).

Б) Рассматривая матрицу на рис. 269 (воспроизведенную на рис. 276 — выкладки для вершины 7 прадерева) и вычисляя  $\gamma(X_i, X_j)$  для нулевых элементов этой матрицы, получаем, что  $\theta(X_7, X_3) = 1$ .

Г) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap \bar{E}_{73}$ , которой отвечает граница  $20 + 1 = 21$ .

Д) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap E_{73}$ . Вычеркивая строку  $X_7$  и столбец  $X_3$  матрицы на рис. 276, приходим к матрице на рис. 277, в клетку  $(X_3, X_6)$  которой ставим  $\infty$ , чтобы не получить контура  $(X_3, X_6, X_2, X_7, X_3)$ .

Е) Рассматривая матрицу на рис. 278, видим, что ее элементы либо 0, либо  $\infty$ .

<sup>1)</sup> По понятной причине предпочтительнее использовать свойство  $\mathcal{P}_{ij}$ , а не  $\mathcal{P}_{ji}$ .

Ж) Сумма элементов, вычтенных из строк и столбцов по Е), здесь равна 0. Следовательно, для вершины  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap E_{73}$  имеем границу  $20 + 0 = 20$ .

З) Имеем матрицу порядка 3, поэтому переходим к И).

И) Висячие вершины с наименьшим значением, равным 20, — это  $\bar{E}_{27} \cap E_{46} \cap E_{21}$  и  $E_{27} \cap E_{46} \cap E_{62} \cap E_{73}$ . Выбираем последнюю.

К)  $E_{27} \cap E_{46} \cap E_{62} \cap E_{73}$  получалась с помощью  $P_{73}$ . Переходим к В).

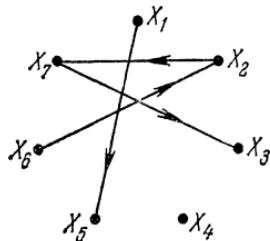


Рис. 277.

	$X_1$	$X_4$	$X_6$
$X_3$	0	0	$\infty$
$X_4$	0	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	0	0

	$X_1$	$X_4$	$X_6$
$X_3$	0	0	0
$X_4$	0	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	0	0

Сумма 0

Рис. 278.

В) Очевидно, что для матрицы на рис. 278 все  $\gamma(X_i, X_j)$  равны 0. Произвольно выбираем клетку  $(X_5, X_4)$ .

Г) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap E_{73} \cap \bar{E}_{54}$ , которой отвечает граница  $20 + 0 = 20$ .

Д) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap E_{73} \cap E_{54}$ . Вычеркивая строку  $X_5$  и столбец  $X_4$  в матрице на рис. 278, приходим к матрице на рис. 279, в клетку  $(X_4, X_1)$  которой ставим  $\infty$ .

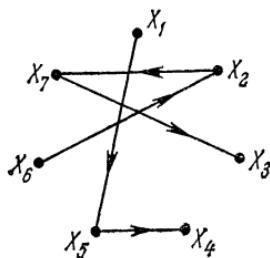


Рис. 279.

	$X_1$	$X_6$
$X_3$	0	$\infty$
$X_4$	$\infty$	0

	$X_1$	$X_6$
$X_3$	$\infty$	$\infty$
$X_4$	$\infty$	0

Рис. 280.

Е) Рассматривая матрицу на рис. 279, видим, что ее элементы либо 0, либо  $\infty$ .

Ж) Сумма элементов, вычтенных из строк и столбцов по Е), здесь равна 0. Следовательно, для вершины  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap E_{73} \cap E_{54}$  имеем границу  $20 + 0 = 20$ .

З) Имеем матрицу порядка 2, поэтому переходим к И).

И) Выбираем вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap E_{73} \cap E_{54}$  с наименьшим значением, равным 20.

К) Вершина, выбранная в И), строилась с помощью  $\mathcal{P}_{54}$ . Переходим к В).

В) Очевидно, что для матрицы на рис. 280 все значения  $\gamma(X_i, X_j)$  равны  $\infty$  (что означает, что мы больше не можем ис-

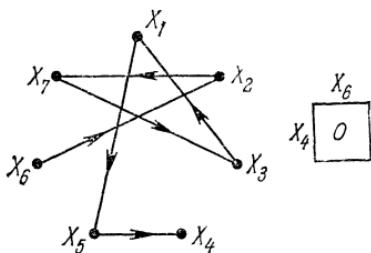


Рис. 281.

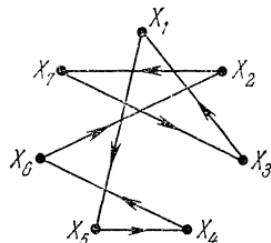


Рис. 282

пользовать свойства  $\mathcal{P}_{ij}$ , исходя из рассматриваемой вершины). Выбираем клетку  $(X_3, X_1)$ .

Г) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap E_{54} \cap \bar{E}_{31}$ , которой отвечает граница  $20 + \infty = \infty$ .

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$				×			
$X_2$							×
$X_3$	×						
$X_4$					×		
$X_5$			×				
$X_6$	×						
$X_7$			×				

Рис. 283.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	5	9	6	3	5	9
$X_2$	8	$\infty$	8	8	5	9	2
$X_3$	6	9	$\infty$	1	6	7	3
$X_4$	7	11	4	$\infty$	4	2	9
$X_5$	4	6	3	2	$\infty$	2	8
$X_6$	5	2	2	8	4	$\infty$	3
$X_7$	8	1	3	16	5	3	$\infty$

$$3 + 2 + 6 + 2 + 2 + 2 + 3 = 20$$

Рис. 284.

Д) Строим вершину  $E_{27} \cap E_{15} \cap E_{62} \cap E_{54} \cap E_{31}$ . Вычеркивая строку  $X_3$  и столбец  $X_1$ , переходим к матрице на рис. 281. Очевидно, что символ  $\infty$  ставить не нужно.

Е) Очевидно, что в матрице на рис. 281 ничего вычитать не требуется.

Ж) Очевидно, что для вершины в Д) нижняя граница  $20 + 0 = 20$ .

З) Имеем матрицу порядка 1. Процесс закончен. Для последних двух вершин прадерева имеем нижние границы соответственно  $\infty$  и 20.

Добавляя дугу  $(X_4, X_6)$ , получаем искомый гамильтонов контур со значением 20, так как объединение висячих вершин построенного прадерева дает Е.

Найденное решение представлено на рис. 282—284. Это решение не единственно, что получается из-за того, что при построении прадерева выбор вершин в некоторых случаях не однозначен.

Одно из других решений представлено на рис. 285—287.

**Замечания.** При применении алгоритма Литтла в случае произвольного графа следует приписать символ  $\infty$  всем парам вершин  $X_i, X_j$ , для которых в графе нет дуги  $(X_i, X_j)$ . Если задача не имеет решения, то мы более или менее быстро придем к прадереву, все висячие вершины которого имеют нижнюю границу  $\infty$ . Поэтому предпочтительнее узнать заранее, существует ли решение (об этом см. стр. 335 и §§ 61, 62).

Изложенный алгоритм позволяет находить некоторые другие решения, например почти оптимальные, т. е. решения, значения которых отличаются от оптимального на величину, не большую некоторого  $\alpha$ .

**Нахождение гамильтонова контура с максимальным значением.** Можно видоизменить для этого алгоритм Литтла, но предпочтительнее свести задачу к предыдущей. Припишем символ

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$				×			
$X_2$							×
$X_3$			×				
$X_4$	×						
$X_5$					×		
$X_6$		×					
$X_7$			×				

Рис. 286

$\infty$	5	9	6	3	5	9
8	$\infty$	8	8	5	9	2
6	9	$\infty$	1	6	7	3
7	11	4	$\infty$	4	2	9
4	6	3	2	$\infty$	2	8
5	2	2	8	4	$\infty$	3
8	1	3	16	5	3	$\infty$

$$3 + 2 + 1 + 7 + 2 + 2 + 3 = 20$$

Рис. 287.

$(-\infty)$  всем парам вершин  $X_i, X_j$ , для которых в графе нет дуги  $(X_i, X_j)$ . Пусть

$$v_M = \max_{i, j} v_{ij},$$

где  $\|v_{ij}\|$  — матрица стоимостей графа с  $n$  вершинами.

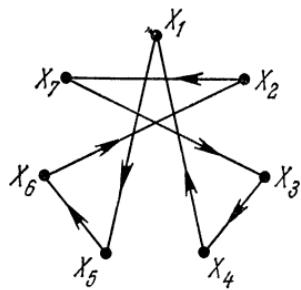


Рис. 285.

Тогда построим матрицу, элементы которой определяются так:

$$v'_{ij} = v_M - v_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (54.2)$$

и применим к ней алгоритм Литтла. Полученное минимальное решение дает нам максимальное для матрицы  $\|v'_{ij}\|$ . Заметим, что минимальное значение с  $\|v'_{ij}\|$  и максимальное с  $\|v_{ij}\|$  в сумме дают  $n v_M$ .

Пример. Найдем гамильтонов контур с максимальным значением графа с матрицей стоимостей на рис. 288.

Имеем

$$v_M = 13. \quad (54.3)$$

Матрица с элементами

$$v'_{ij} = v_M - v_{ij} \quad (54.4)$$

изображена на рис. 289.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	$-\infty$	7	3	13	4
$X_2$	2	$-\infty$	8	9	6
$X_3$	3	11	$-\infty$	2	$-\infty$
$X_4$	4	5	6	$-\infty$	13
$X_5$	$-\infty$	9	2	7	$-\infty$
	$v_{ij}$				

Рис. 288

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	$\infty$	6	10	0	9
$X_2$	11	$\infty$	5	4	7
$X_3$	10	2	$\infty$	11	$\infty$
$X_4$	9	8	7	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	4	11	6	$\infty$
	$v'_{ij}$				

Рис. 289.

Читателю предоставляется возможность провести выкладки, приводящие к построению прадерева на рис. 290 (см. рис. 291—300). В результате получаем гамильтонов контур ( $X_1, X_4, X_5, X_2, X_3, X_1$ ) с минимальным значением 19 для матрицы на рис. 289. Он является гамильтоновым контуром с максимальным значением  $5 \times 13 - 19 = 46$  для матрицы на рис. 288 и представлен на рис. 301—303.

**Задача о назначениях.** Пусть имеется  $p$  работников  $X_1, X_2, \dots, X_p$  и  $p$  должностей  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ . Каждому назначению  $(X_i, Y_j)$  сопоставим число

$$v_{ij} = v(X_i, Y_j) \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p.$$

Если назначение  $(X_i, Y_j)$  невозможно, то  $v_{ij} = \infty$ . Требуется назначить  $p$  работников на  $p$  должностей так, чтобы сумма соответствующих значений  $v_{ij}$  была минимальной ( $v_{ij}$  могут означать время, стоимость и т. п.). Эта задача равносильна отысканию подстановки с минимальным значением (см. § 16).

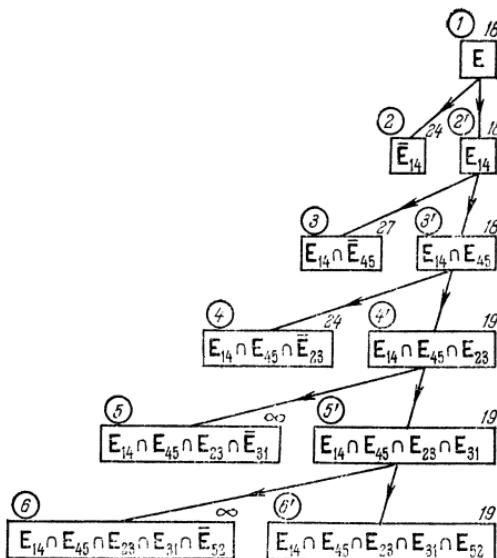


Рис. 290.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
$X_1$	$\infty$	6	9	0	9	
$X_2$	0	$\infty$	0	0	3	4
$X_3$	1	0	$\infty$	9	$\infty$	2
$X_4$	2	2	6	$\infty$	0	
$X_5$	$\infty$	0	6	2	$\infty$	4
	7	1	Сумма 18			

Рис. 291.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
$X_1$	$\infty$	6	9	<sup>6</sup> 0	9	
$X_2$	<sup>1</sup> 0	$\infty$	<sup>6</sup> 0	0	3	
$X_3$	1	<sup>1</sup> 0	$\infty$	9	$\infty$	
$X_4$	2	8	6	$\infty$	<sup>5</sup> 0	
$X_5$	$\infty$	<sup>2</sup> 0	6	2	$\infty$	

Рис. 292.

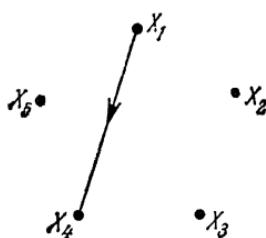


Рис. 293.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$
$X_2$	0	$\infty$	0	3
$X_3$	1	0	$\infty$	$\infty$
$X_4$	$\infty$	8	6	0
$X_5$	$\infty$	0	6	$\infty$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$
$X_2$	1	0	$\infty$	6
$X_3$	1	1	0	$\infty$
$X_4$	$\infty$	8	6	9
$X_5$	$\infty$	6	0	$\infty$
Сумма 0				

Рис. 294.

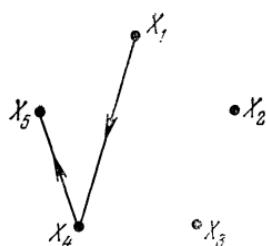
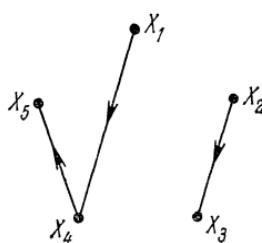


Рис. 295.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$X_2$	0	$\infty$	0
$X_3$	1	0	$\infty$
$X_5$	$\infty$	0	6

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$X_2$	1	0	$\infty$
$X_3$	1	1	0
$X_5$	$\infty$	0	6
Сумма 0			

Рис. 296



	$X_1$	$X_2$
$X_3$	1	$\infty$
$X_5$	$\infty$	0

Рис. 297

	$X_1$	$X_2$
$X_3$	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	0
Сумма 1		

Рис. 298

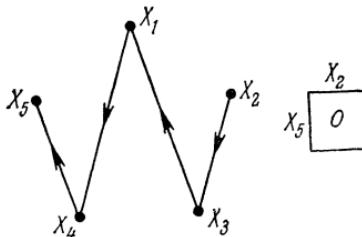


Рис. 299.

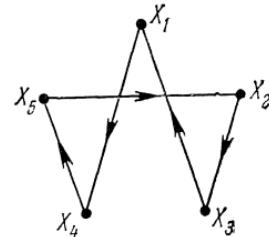


Рис. 300.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$				$\times$	
$X_2$			$\times$		
$X_3$	$\times$				
$X_4$					$\times$
$X_5$		$\times$			

Рис. 301.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	$\infty$	6	10	0	9
$X_2$	11	$\infty$	5	4	7
$X_3$	10	2	$\infty$	11	$\infty$
$X_4$	9	8	7	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	4	11	6	$\infty$

$$0+5+10+0+4=19$$

Рис. 302. Матрица  
 $\|v'_{ij}\|$ .

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	$-\infty$	7	3	13	4
$X_2$	2	$-\infty$	8	9	6
$X_3$	3	11	$-\infty$	2	$-\infty$
$X_4$	4	5	6	$-\infty$	13
$X_5$	$-\infty$	9	2	7	$-\infty$

$$13+8+3+13+9=46$$

Рис. 303. Матрица  
 $\|v_{ij}\|$ .

Для решения этой задачи можно применить алгоритм Литтла, не используя в пункте Д) символа  $\infty$ , который не позволял получать контуры длины меньшей  $n$ , и отождествляя  $X_i$  и  $Y_i$ .

Для графа с матрицей стоимостей на рис. 304 процесс вычислений по этому алгоритму иллюстрируют рис. 305—330. На рис. 331 приведено другое решение.

**Нахождение минимального гамильтонова пути.** Для нахождения минимального гамильтонова пути с фиксированным началом  $X_a$  следует видоизменить матрицу  $\|v_{ij}\|$ :

- 1) поставить символ  $\infty$  на главную диагональ;
- 2) в столбце  $X_a$  все элементы, кроме  $v_{aa}$ , заменить нулями и действовать по алгоритму Литтла.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	9	3	7	8	9	6	4
$X_2$	6	8	1	8	7	4	3
$X_3$	11	2	2	9	5	6	4
$X_4$	3	7	2	4	3	6	1
$X_5$	2	9	11	12	5	2	3
$X_6$	3	10	6	7	2	6	8
$X_7$	4	6	3	2	6	7	11

Рис. 304.

Для нахождения минимального гамильтонова пути с нефиксированным началом следует ввести новую вершину  $S$ , соединяя ее с каждой вершиной  $X_i$  дугами  $(S, X_i)$  и  $(X_i, S)$  с нулевыми значениями, и найти минимальный гамильтонов контур нового графа. Исключая затем из него  $S$ , получают искомый путь.

Заметим, что если не существует гамильтонова пути, исходящего из заданной вершины, то об этом нас предупредит  $\infty$ , появившаяся в качестве нижней границы.

Пример. Вновь рассмотрим матрицу на рис. 257 и найдем минимальный гамильтонов путь с началом в  $X_2$ . Процесс вычислений иллюстрируют рис. 332—350. (Рис. 333 получается из матрицы на рис. 332, если положить  $v_{i2} = 0$  ( $i \neq 2$ )).

Этим путем будет  $(X_2, X_7, X_3, X_4, X_6, X_1, X_5)$ .

**Нахождение максимального гамильтонова пути.** Оно сводится к задаче отыскания максимального гамильтонова контура.

Если начало пути не фиксируется, то достаточно ввести новую вершину  $S$  и соединить ее с вершинами  $X_i$ , которые могут быть взяты в качестве начала, дугой  $(S, X_i)$  со значением 0 и с вершинами  $X_j$ , которые могут быть взяты в качестве конца, дугой  $(X_i, S)$  со значением 0, а с остальными вершинами — дугами  $(S, X_k)$  и  $(X_l, S)$  со значением  $-\infty$ .

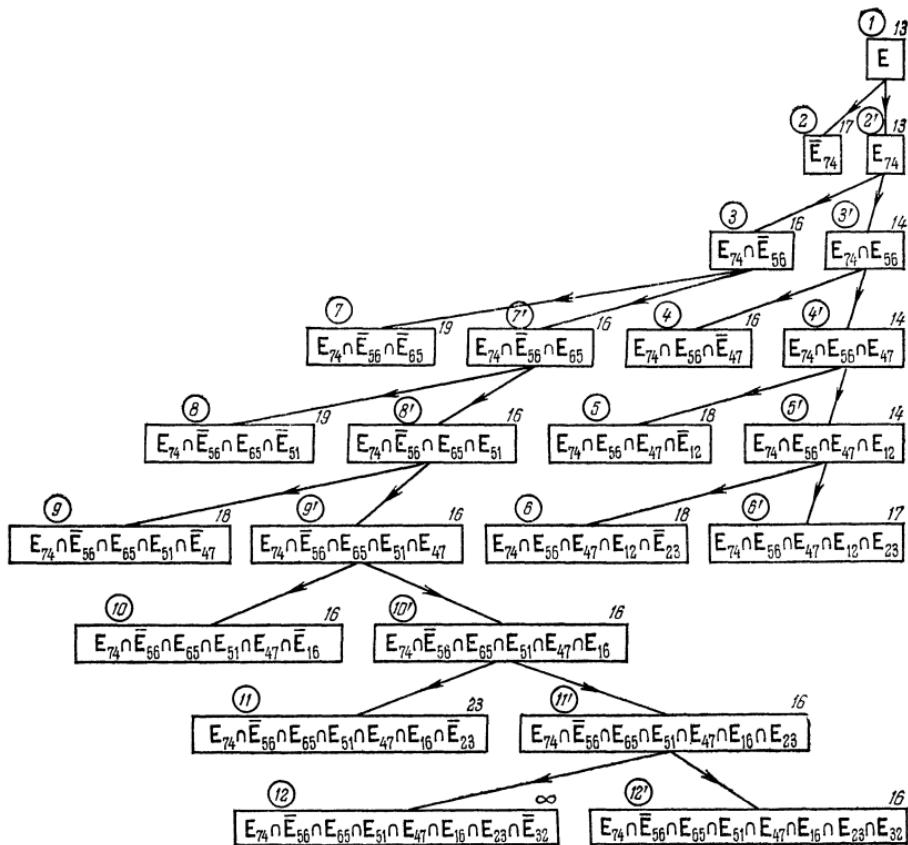


Рис. 305.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	
$X_1$	6	0	4	5	6	3	1	3
$X_2$	5	7	0	7	6	3	2	1
$X_3$	9	0	0	7	3	4	2	2
$X_4$	2	6	1	3	2	5	0	1
$X_5$	0	7	9	10	3	0	1	2
$X_6$	1	8	4	5	0	4	6	2
$X_7$	2	4	1	0	4	5	9	2
<b>Сумма</b>								13

Рис. 306.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	
$X_1$	6	<sup>1</sup> 0	4	5	6	3	1	
$X_2$	5	7	<sup>2</sup> 0	7	6	3	2	
$X_3$	9	<sup>0</sup> 0	<sup>0</sup> 0	7	3	4	2	
$X_4$	2	6	1	3	2	5	<sup>2</sup> 0	
$X_5$	<sup>1</sup> 0	7	9	10	3	<sup>3</sup> 0	1	
$X_6$	1	8	4	5	<sup>3</sup> 0	4	6	
$X_7$	2	4	1	<sup>4</sup> 0	4	5	9	

Рис. 307.

Рис. 308

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	6	<sup>1</sup> 0	4	6	3	1
$X_2$	5	7 <sup>2</sup>	0	6	3	2
$X_3$	9 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	0	3	4	2
$X_4$	2	6	1	2	5	<sup>2</sup> 0
$X_5$	<sup>1</sup> 0	7	9	3	<sup>3</sup> 0	1
$X_6$	1	8	4 <sup>3</sup>	0	4	6

Рис 309.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$	$X_7$
$X_1$	5	0	4	6	1
$X_2$	4	7	0	6	2
$X_3$	8	0	0	3	2
$X_4$	1	6	1	2	0
$X_6$	0	8	4	0	6
	1				Сумма 1

Рис. 310.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$	$X_7$
$X_1$	5	<sup>1</sup> 0	4	6	1
$X_2$	4	7	<sup>2</sup> 0	6	2
$X_3$	8	<sup>0</sup> 0	<sup>0</sup> 0	3	2
$X_4$	1	6	1	<sup>2</sup> 0	0
$X_6$	<sup>1</sup> 0	8	4	<sup>2</sup> 0	6

Рис. 311.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$
$X_1$	5	0	4	6
$X_2$	4	7	0	6
$X_3$	8	0	0	3
$X_6$	0	8	4	0
Сумма 0				

Рис 312.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$
$X_1$	5	4	0	4
$X_2$	4	7	4	0
$X_3$	8	0	0	3
$X_6$	4	0	8	4

Рис. 313.

	$X_1$	$X_3$	$X_5$
$X_2$	4	0	6
$X_3$	8	0	3
$X_6$	0	4	0
<b>Сумма 0</b>			

Рис. 314

	$X_1$	$X_3$	$X_5$
$X_2$	4	0	6
$X_3$	8	3	3
$X_6$	4	0	3

Рис. 315

	$X_1$	$X_5$
$X_3$	5	0
$X_6$	0	0
<b>Сумма 3</b>		

Рис. 316.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	6	0	4	6	0	1
$X_2$	5	7	0	6	0	2
$X_3$	9	0	0	3	1	2
$X_4$	2	6	1	2	2	0
$X_5$	0	7	9	3	$\infty$	1
$X_6$	1	8	4	0	1	6
<b>3</b>			<b>Сумма 3</b>			

Рис. 317.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	6	0	4	6	0	1
$X_2$	5	7	0	6	0	2
$X_3$	9	0	0	3	1	2
$X_4$	2	6	1	2	2	0
$X_5$	2	0	7	9	3	$\infty$
$X_6$	1	8	4	0	1	6

Рис. 318.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	6	0	4	0	1
$X_2$	5	7	0	0	2
$X_3$	9	0	0	1	2
$X_4$	2	6	1	2	0
$X_5$	0	7	9	$\infty$	1
<b>Сумма 0</b>					

Рис. 319

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	6	0	4	0	1
$X_2$	5	7	0	0	2
$X_3$	9	0	0	1	2
$X_4$	2	6	1	2	0
$X_5$	3	0	7	9	$\infty$

Рис. 320.

	$X_2$	$X_3$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	0	4	0	1
$X_2$	7	0	0	2
$X_3$	0	0	1	2
$X_4$	6	1	2	0
<b>Сумма 0</b>				

Рис. 321.

	$X_2$	$X_3$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	0	4	0	1
$X_2$	7	0	0	2
$X_3$	0	0	1	2
$X_4$	6	1	2	0

Рис. 322.

	$X_2$	$X_3$	$X_6$
$X_1$	0	4	0
$X_2$	7	0	0
$X_3$	0	0	1

**Сумма 0**

Рис. 323.

	$X_2$	$X_3$	$X_6$
$X_1$	$\theta$	0	$\theta$
$X_2$	7	$\theta$	0
$X_3$	$\theta$	0	1

Рис. 324.

	$X_2$	$X_3$
$X_2$	7	0
$X_3$	0	0

**Сумма 0**

Рис. 325.

	$X_2$	$X_3$
$X_2$	7	7
$X_3$	7	0

Рис. 326.

	$X_2$
$X_3$	0

Рис. 327

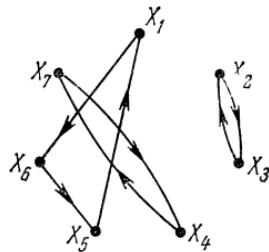


Рис. 328.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$						X	
$X_2$			X				
$X_3$	X						
$X_4$						X	
$X_5$	X						
$X_6$				X			
$X_7$			X				

Рис. 329.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	9	3	7	8	9	<b>6</b>	4
$X_2$	6	8	<b>1</b>	8	7	4	3
$X_3$	11	<b>2</b>	2	9	5	6	4
$X_4$	3	7	2	4	3	6	<b>1</b>
$X_5$	<b>2</b>	9	11	12	5	2	3
$X_6$	3	10	6	7	<b>2</b>	6	8
$X_7$	4	6	3	<b>2</b>	6	7	11

$6 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 = 16$

Рис. 330.

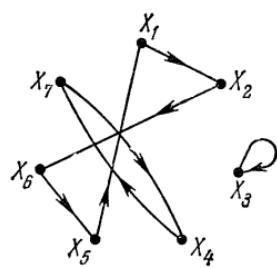


Рис. 331.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	5	9	6	3	5	9
$X_2$	8	$\infty$	8	8	5	9	2
$X_3$	6	9	$\infty$	1	6	7	3
$X_4$	7	11	4	$\infty$	4	2	9
$X_5$	4	9	3	2	$\infty$	2	8
$X_6$	5	2	2	8	4	$\infty$	3
$X_7$	8	1	3	16	5	3	$\infty$

Рис. 332.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	0	9	6	3	5	9
$X_2$	8	$\infty$	8	8	5	9	2
$X_3$	6	0	$\infty$	1	6	7	3
$X_4$	7	0	4	$\infty$	4	2	9
$X_5$	4	0	3	2	$\infty$	2	8
$X_6$	5	0	2	8	4	$\infty$	3
$X_7$	8	0	3	16	5	3	$\infty$

Рис. 333

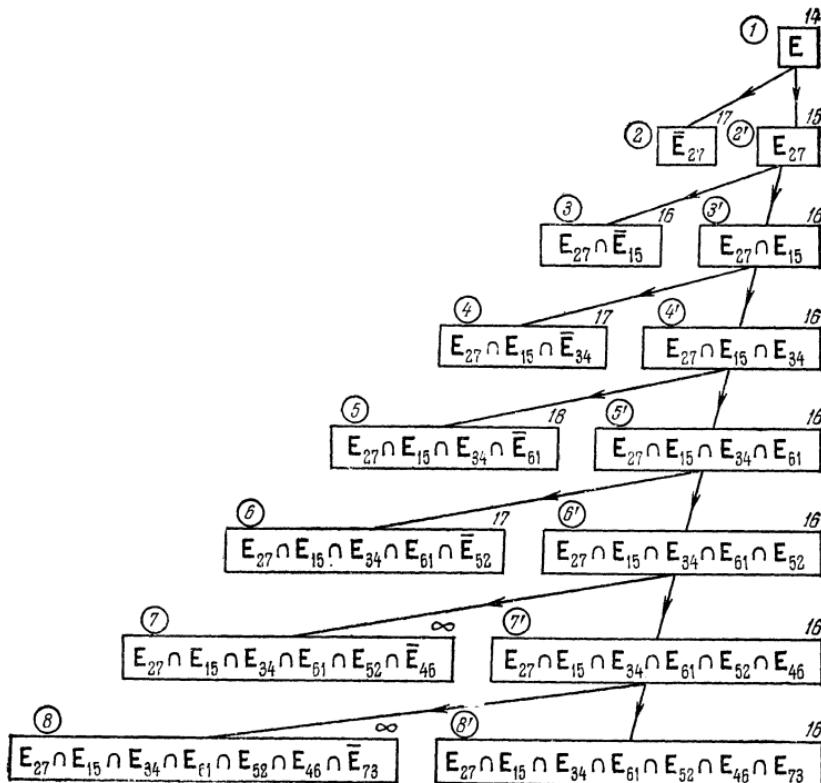


Рис. 334.

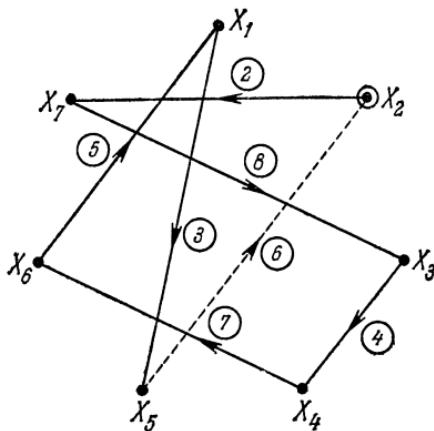


Рис. 335. Последовательность построения гамильтонова пути.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	0	7	5	0	3	7
$X_2$	4	$\infty$	6	7	2	7	0
$X_3$	2	0	$\infty$	0	3	5	1
$X_4$	3	0	2	$\infty$	1	0	7
$X_5$	0	0	1	1	$\infty$	0	6
$X_6$	1	0	0	7	1	$\infty$	1
$X_7$	4	0	1	15	2	1	$\infty$
Сумма 14							

Рис. 336.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	0	7	5	1	0	3
$X_2$	4	$\infty$	6	7	2	7	0
$X_3$	2	0	$\infty$	0	3	5	1
$X_4$	3	0	2	$\infty$	1	0	7
$X_5$	0	0	1	1	$\infty$	0	6
$X_6$	1	0	0	7	1	$\infty$	1
$X_7$	4	0	1	15	2	1	$\infty$
Сумма 14							

Рис. 337.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$	$\infty$	0	7	5	0	3
$X_3$	2	0	$\infty$	0	3	5
$X_4$	3	0	2	$\infty$	1	0
$X_5$	0	0	1	1	$\infty$	0
$X_6$	1	0	0	7	1	$\infty$
$X_7$	3	$\infty$	0	14	1	0
Сумма 1						

Рис. 338.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$	$\infty$	0	7	5	1	0
$X_3$	2	0	$\infty$	0	3	5
$X_4$	3	0	2	$\infty$	1	0
$X_5$	1	0	0	1	1	$\infty$
$X_6$	1	0	0	7	1	$\infty$
$X_7$	3	$\infty$	0	14	1	0

Рис. 339.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_6$
$X_3$	1	0	$\infty$	0	5
$X_4$	2	0	2	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	0	1	1	0
$X_6$	0	0	0	7	$\infty$
$X_7$	2	$\infty$	0	14	0
1					Сумма 1

Рис. 340

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_3$	1	0	$\infty$	0	5
$X_4$	2	0	2	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	0	1	1	0
$X_6$	1	0	0	0	7
$X_7$	2	$\infty$	0	14	0

Рис. 341.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_6$
$X_4$	2	0	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	0	1	0
$X_6$	0	0	0	$\infty$
$X_7$	2	$\infty$	0	0
Сумма 0				

Рис. 342.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_6$
$X_4$	2	0	$\infty$	0
$X_5$	$\infty$	0	1	0
$X_6$	2	0	0	$\infty$
$X_7$	2	$\infty$	0	0

Рис. 343.

	$X_2$	$X_3$	$X_6$
$X_4$	0	$\infty$	0
$X_5$	0	1	$\infty$
$X_7$	$\infty$	0	0
Сумма 0			

Рис. 344.

	$X_2$	$X_3$	$X_6$
$X_4$	0 0	$\infty$	0 0
$X_5$	1 0	1	$\infty$
$X_7$	$\infty$	0 0	0 0

Рис. 345

	$X_3$	$X_6$
$X_4$	$\infty$	0
$X_7$	0	$\infty$

Сумма 0

Рис. 346

	$X_3$	$X_6$
$X_4$	$\infty$	0
	$\infty$	
$X_5$	0	$\infty$

Рис. 347

$$X_7 \begin{array}{|c|} \hline X_3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 348

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$					×		
$X_2$							×
$X_3$				×			
$X_4$							×
$X_5$							
$X_6$	×						
$X_7$			×				

Рис. 349

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$		9	6	3	5	9
$X_2$	8		8	8	5	9	2
$X_3$	6		$\infty$	1	6	7	3
$X_4$	7		4	$\infty$	4	2	9
$X_5$	4		3	2	$\infty$	2	8
$X_6$	5		2	8	4	$\infty$	3
$X_7$	8		3	16	5	3	$\infty$

Рис. 350

# УПРАЖНЕНИЯ

**54А.** Найти минимальные гамильтоновы контуры графов с матрицами:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	$\infty$	3	14	1	0
$X_2$	21	$\infty$	0	0	0
$X_3$	7	0	$\infty$	20	2
$X_4$	0	2	3	$\infty$	23
$X_5$	2	5	16	0	$\infty$

а)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	$\infty$	5	2	7	9
$X_2$	3	$\infty$	8	6	2
$X_3$	7	3	$\infty$	9	9
$X_4$	8	8	11	$\infty$	5
$X_5$	3	6	4	6	$\infty$

б)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$	$\infty$	0	5	4	0	6
$X_2$	5	$\infty$	3	0	1	6
$X_3$	3	2	$\infty$	0	3	2
$X_4$	2	5	0	$\infty$	6	0
$X_5$	0	4	2	0	$\infty$	2
$X_6$	0	1	6	4	6	$\infty$

в)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$X_1$	$\infty$	5	7	9	0	2	3
$X_2$	0	$\infty$	4	3	2	5	0
$X_3$	6	0	$\infty$	7	1	3	8
$X_4$	9	0	4	$\infty$	5	0	2
$X_5$	3	5	0	2	$\infty$	1	7
$X_6$	2	6	3	4	9	$\infty$	0
$X_7$	5	2	9	0	4	3	$\infty$

г)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_1$	3	0	7	4	0	11	9	2
$X_2$	0	8	5	6	0	7	0	3
$X_3$	4	5	0	3	6	9	0	4
$X_4$	0	3	6	8	5	0	3	0
$X_5$	7	0	11	0	7	4	0	5
$X_6$	9	2	0	9	6	0	3	0
$X_7$	2	0	2	7	0	8	5	6
$X_8$	1	7	3	0	4	9	0	2

д)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$	$\infty$	3	7	2	$\infty$	11
$X_2$	8	$\infty$	0	$\infty$	4	3
$X_3$	6	0	$\infty$	7	$\infty$	2
$X_4$	6	$\infty$	13	$\infty$	5	$\infty$
$X_5$	3	3	3	4	$\infty$	5
$X_6$	8	6	$\infty$	2	2	$\infty$

е)

**54Б.** Найти минимальные гамильтоновы контуры для графов из упражнения 54А.

**54В.** Найти все минимальные гамильтоновы контуры для каждого из графов из упражнения 54А.

**54Г.** Для каждого из графов в упражнении 54А найти минимальный гамильтонов путь.

**54Д.** Для каждого из графов в упражнении 54А найти назначение с минимальным значением.

**54Е.** Указать все назначения с минимальным значением для графов с матрицами:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	4	9	18	6	5
$X_2$	23	6	2	3	3
$X_3$	7	2	0	21	3
$X_4$	4	8	7	6	28
$X_5$	4	9	18	3	2

a)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$	3	6	10	4	7	11
$X_2$	4	2	3	1	7	9
$X_3$	3	2	6	3	4	10
$X_4$	8	7	10	9	6	7
$X_5$	9	8	9	5	6	5
$X_6$	2	8	7	5	3	8

b)

**54Ж.** Для матриц а) и б) из упражнения 54Е определить назначения с максимальным значением.

**543.** Указать минимальный гамильтонов контур графа с матрицей:

$\infty$	24	18	22	31	19	33	25	30	26
15	$\infty$	19	27	26	32	25	31	28	18
22	23	$\infty$	23	16	29	27	18	16	27
24	31	18	$\infty$	19	13	28	9	19	27
23	18	34	20	$\infty$	31	24	15	25	8
24	12	17	15	10	$\infty$	11	16	21	31
28	15	27	35	19	18	$\infty$	21	21	19
13	24	18	13	13	22	25	$\infty$	29	24
17	21	18	24	27	24	34	31	$\infty$	18
18	19	29	16	23	17	18	31	23	$\infty$

## § 55. Нахождение хорошего решения эвристическим методом

На практике часто требуется найти оптимальное решение некоторой задачи, для которой не имеют алгоритма оптимизации. В этом случае используют эвристический метод, позволяющий улучшить исходное решение без уверенности в том, что получат оптимальное решение.

В качестве примера мы рассмотрим эвристический метод для задачи о перевозках, предложенный Флетчером и Кларком (Fletcher, Clarke), Management and Mathematics. Business, Publ. London, 1964.

Пусть предприятие  $P_0$  снабжает  $n$  складов  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , используя неограниченный парк машин, каждая из которых грузоподъемности  $C$ . Известна стоимость  $d_{ij}$  перевозки из  $P_i$  в  $P_j$  ( $d_{ij}$  может не быть равной  $d_{ji}$ ). Каждая отправляющаяся с предприятия машина должна вернуться обратно. Вместимость склада  $P_i$  равна  $C_i$ . При какой минимальной общей стоимости перевозок можно заполнить все склады при условии, что маршруты перевозок представляют собой контуры, попарно пересекающиеся лишь в  $P_0$ ?

Можно рассматривать также различные обобщения этой задачи, вводя, например, условия на грузоподъемность машин, проходимость дорог, количество заездов на склад и т. п.

Пусть задача о перевозках задана таблицей

$C_i$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$P_0$	0	33	60	34	50	52	24	33	33	46	62	63
$P_1$	33	0	38	35	34	76	58	83	60	59	57	75
$P_2$	60	38	0	15	70	94	72	94	70	48	36	53
$P_3$	34	35	15	0	48	73	44	61	39	21	33	36
$P_4$	50	34	70	48	0	28	26	43	57	62	80	81
$P_5$	52	76	94	73	28	0	30	30	55	79	105	96
$P_6$	24	58	72	44	26	30	0	23	26	47	70	65
$P_7$	33	83	94	61	43	30	23	0	30	62	86	80
$P_8$	33	60	70	39	57	55	26	30	0	31	58	50
$P_9$	46	59	48	21	62	79	47	62	31	0	26	31
$P_{10}$	62	57	36	33	80	105	70	86	58	26	0	46
$P_{11}$	63	75	53	36	81	96	65	80	50	31	46	0

(55.1)

$$C = 15$$

Граф на рис. 351 представляет одно из возможных решений (направления всех стрелок можно изменить на обратные).

Значения для составляющих его контуров:

- ( $P_0, P_2, P_{11}, P_3, P_0$ ):  $60 + 53 + 36 + 34 = 183$ ;
- ( $P_0, P_4, P_1, P_0$ ):  $50 + 34 + 33 = 117$ ;
- ( $P_0, P_5, P_6, P_7, P_8, P_0$ ):  $52 + 30 + 23 + 30 + 33 = 168$ ; (55.2)
- ( $P_0, P_{10}, P_0$ ):  $62 + 62 = 124$ ;
- ( $P_0, P_0, P_0$ ):  $46 + 46 = 92$

(такие перевозки возможны, так как вместимость складов на контурах не превосходит  $C$ ). Общая стоимость  $183 + 117 + 168 + 124 + 92 = 684$ .

Изложим теперь метод Флетчера и Кларка.

А) Для каждой пары вершин  $P_i$  и  $P_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) вычислим величины

$$\lambda_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}, \quad (55.3)$$

записывая их в таблицу.

Б) Для решения  $S$  вычисляем  $\gamma_i$ :

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \text{если ребро } (\overline{P_i, P_0}) \text{ не входит в } S, \\ 1, & \text{если ребро } (\overline{P_i, P_0}) \text{ входит в } S. \end{cases} \quad (55.4)$$

Все вершины  $P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_r}$  (исключая  $P_0$ ) контура, входящего в  $S$ , объединим в класс  $\{P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_r}\}$  и через  $Q\{P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_r}\}$  обозначим стоимость перевозки по этому маршруту.

Если вершины  $P_i$  и  $P_j$  принадлежат различным классам  $\{P_i, P_{k_2}, \dots, P_{k_r}\}$  и  $\{P_j, P_{l_2}, \dots, P_{l_s}\}$ , то можем объединить их в класс  $\{P_i, P_j, P_{k_2}, \dots, P_{k_r}, P_{l_2}, \dots, P_{l_s}\}$  при условии, что

$$a) \quad \gamma_i = 1 \quad \text{и} \quad \gamma_j = 1; \quad (55.5)$$

$$b) \quad Q\{P_i, P_{k_2}, \dots, P_{k_r}\} + Q\{P_j, P_{l_2}, \dots, P_{l_s}\} \leq C. \quad (55.6)$$

В) Начинаем с тривиального решения  $\{P_0, P_1, P_0\}, \{P_0, P_2, P_0\}, \dots, \{P_0, P_n, P_0\}$ .

Г) Среди  $\lambda_{ij} > 0$  выбираем наибольшее, не выбиравшееся ранее (если такиховых несколько, то берем любое из них). Если

условия (55.5) и (55.6) выполняются, то объединяем классы, содержащие  $P_i$  и  $P_j$  в один и отмечаем полу-жирным шрифтом выбранное  $\lambda_{ij}$ . Если же одно из этих условий не выполняется, то в клетку с этим  $\lambda_{ij}$  ставим крестик и ищем новое  $\lambda_{ij}$ , как указано в начале этого пункта.

Д) Выписываем соответствующие  $\gamma_i$ .

Е) Возвращаемся к Г).

Поиск решения продолжаем до тех пор, пока имеем возможность выбрать  $\lambda_{ij} > 0$ . Таким образом, мы придем к наилучшему решению (относительно данного метода).

Пример 1. По формуле (55.3), исходя из таблицы (55.1), вычисляем  $\lambda_{ij}$  и составляем матрицу на рис. 352. Начинаем с

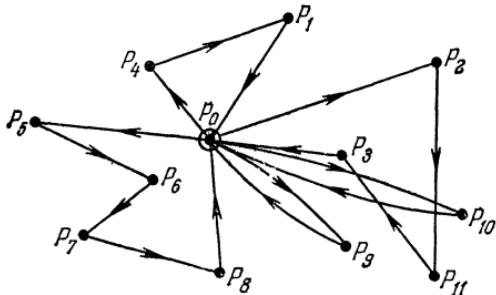


Рис. 351.

тривиального решения, представленного на рис. 353. В матрице  $\|\lambda_{ij}\|$  находим

$$\max_{i,j} \lambda_{ij} = \lambda_{10,2} = 86. \quad (55.7)$$

## Имеем

$$Q\{P_{10}\} + Q\{P_2\} = C_{10} + C_2 = 10 + 3 = 13 < 15. \quad (55.8)$$

Объединяем классы  $\{P_{10}\}$  и  $\{P_2\}$  в  $\{P_{10}, P_2\}$  и выделяем  $\lambda_{10,2}$  на

Рис. 352. Матрица  $\lambda_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$ .

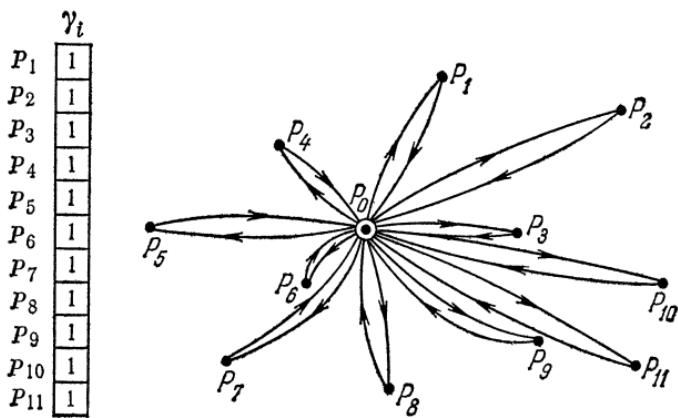


Рис. 353.

рис. 352 полужирным шрифтом. Таблица для  $\gamma_i$  не меняется. Новое решение дает рис. 354. Затем находим

$$\lambda_{10,9} = 82, \quad \gamma_{10} = \gamma_9 = 1, \quad (55.9)$$

$$Q\{P_{10}, P_2\} + Q\{P_9\} = 13 + 8 = 21 > 15. \quad (55.10)$$

Клетку (10, 9) помечаем крестиком. Далее

$$\lambda_{3,2} = 79 \quad \text{и} \quad \lambda_{11,10} = 79. \quad (55.11)$$

Берем  $\lambda_{3,2} = 79$ . Имеем  $\gamma_3 = \gamma_2 = 1$  и

$$Q\{P_3\} + Q\{P_2, P_{10}\} = 8 + 13 = 21 > 15. \quad (55.12)$$

Клетку  $\lambda_{3,2}$  помечаем крестиком. Затем берем

$$\lambda_{11,10} = 79. \quad (55.13)$$

Имеем

$$\gamma_{11} = \gamma_{10} = 1, \quad (55.14)$$

$$Q\{P_{11}\} + Q\{P_2, P_{10}\} = 3 + 13 = 16 > 15.$$

$P_i$	$\gamma_i$
$P_1$	1
$P_2$	1
$P_3$	1
$P_4$	1
$P_5$	1
$P_6$	1
$P_7$	1
$P_8$	1
$P_9$	1
$P_{10}$	1
$P_{11}$	1

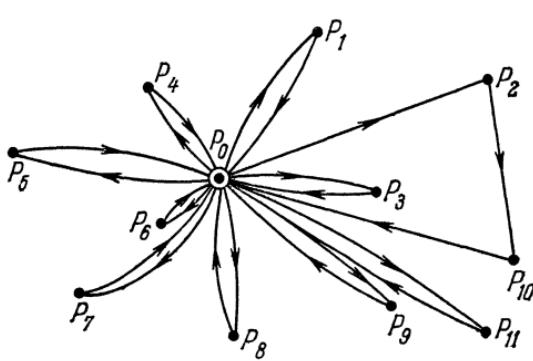


Рис. 354.

Клетку  $\lambda_{11,10}$  помечаем крестиком. Далее

$$\lambda_{11,9} = 78 \quad (55.15)$$

и

$$Q\{P_{11}\} + Q\{P_9\} = 3 + 8 = 11 < 15. \quad (55.16)$$

Классы  $\{P_{11}\}$  и  $\{P_9\}$  объединяем в  $\{P_{11}, P_9\}$  (рис. 355). Берем

$$\lambda_{5,1} = 74. \quad (55.17)$$

Имеем

$$\gamma_5 = \gamma_4 = 1, \quad Q\{P_5\} + Q\{P_4\} = 4 + 5 = 9 < 15. \quad (55.18)$$

Классы  $\{P_5\}$  и  $\{P_4\}$  объединяем в  $\{P_5, P_4\}$ . Новое решение представлено на рис. 356. Затем берем

$$\lambda_{11,2} = 70. \quad (55.19)$$

Тогда

$$\gamma_{11} = \gamma_2 = 1, \quad Q\{P_{11}, P_9\} + Q\{P_2, P_{10}\} = 11 + 13 = 24 > 15. \quad (55.20)$$

Клетку  $\lambda_{11,2}$  помечаем крестиком. Далее

$$\lambda_{10,3} = 63 \quad (55.21)$$

и

$$Q\{P_{10}, P_2\} + Q\{P_3\} = 13 + 8 = 21 > 15. \quad (55.22)$$

Помечаем крестиком клетку  $\lambda_{10,3}$ . Аналогично поступаем дальше:

$$\lambda_{11,3} = 61; \quad (55.23)$$

$$\gamma_{11} = \gamma_3 = 1, \quad Q\{P_{11}, P_9\} + Q\{P_3\} = 11 + 8 = 19 > 15; \quad (55.24)$$

	$\gamma_i$
$P_1$	1
$P_2$	1
$P_3$	1
$P_4$	1
$P_5$	1
$P_6$	1
$P_7$	1
$P_8$	1
$P_9$	1
$P_{10}$	1
$P_{11}$	1

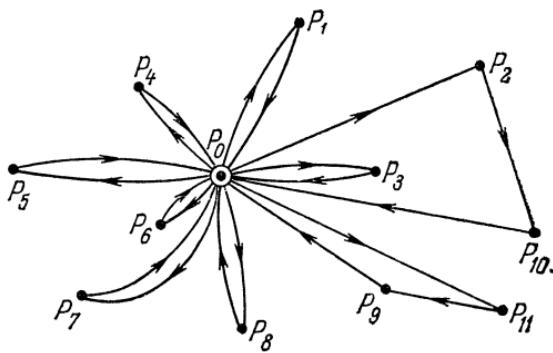


Рис. 355.

	$\gamma_i$
$P_1$	1
$P_2$	1
$P_3$	1
$P_4$	1
$P_5$	1
$P_6$	1
$P_7$	1
$P_8$	1
$P_9$	1
$P_{10}$	1
$P_{11}$	1

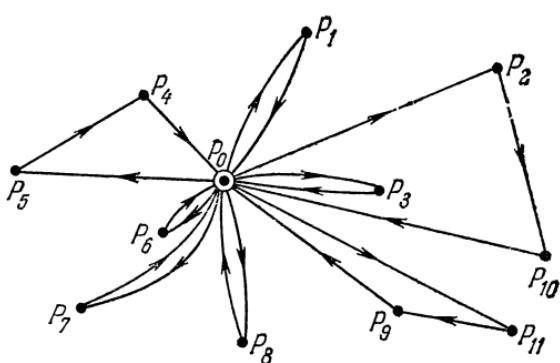


Рис. 356.

$$\lambda_{9,3} = 59; \quad (55.25)$$

$$\gamma_9 = \gamma_3 = 1, \quad Q\{P_9, P_{11}\} + Q\{P_3\} = 11 + 8 = 19 > 15; \quad (55.26)$$

$$\lambda_{9,2} = 58; \quad (55.27)$$

$$\gamma_9 = \gamma_2 = 1, \quad Q\{P_9, P_{11}\} + Q\{P_2, P_{10}\} = 11 + 13 = 24 > 15; \quad (55.28)$$

$$\lambda_{7,5} = 55; \quad (55.29)$$

$$\gamma_7 = \gamma_5 = 1, \quad Q\{P_7\} + Q\{P_5, P_4\} = 4 + 9 = 13 < 15. \quad (55.30)$$

Классы  $\{P_7\}$  и  $\{P_5, P_4\}$  объединяются в  $\{P_7, P_5, P_4\}$ ; таблица для  $\gamma_i$  меняется:  $\gamma_5 = 0$ ; получаем новое решение, представленное на рис. 357.

Далее

$$\lambda_{2,1} = 55; \quad (55.31)$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 = 1, \quad Q\{P_2, P_{10}\} + Q\{P_1\} = 13 + 8 = 21 > 15. \quad (55.32)$$

Помечаем крестиком клетку  $\lambda_{2,1}$ .

	$\gamma_i$
$P_1$	1
$P_2$	1
$P_3$	1
$P_4$	1
$P_5$	0
$P_6$	1
$P_7$	1
$P_8$	1
$P_9$	1
$P_{10}$	1
$P_{11}$	1

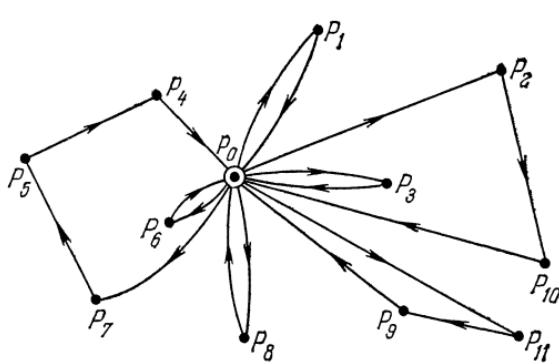


Рис. 357.

Выбрав  $\lambda_{4,1} = 49$  и пометив крестиком соответствующую клетку, переходим к

$$\lambda_{6,4} = 48; \quad (55.33)$$

$$\gamma_6 = \gamma_4 = 1, \quad Q\{P_1\} + Q\{P_4, P_5, P_7\} = 2 + 13 = 15. \quad (55.34)$$

Классы  $\{P_6\}$  и  $\{P_4, P_5, P_7\}$  объединяем в  $\{P_6, P_4, P_5, P_7\}$ ; таблица для  $\gamma_i$  меняется:  $\gamma_4 = 0$ ; получаем новое решение, представленное на рис. 358.

Имеем

$$\lambda_{9,8} = 48; \quad (55.35)$$

$$\gamma_9 = \gamma_8 = 1, \quad Q\{P_9, P_{11}\} + Q\{P_8\} = 11 + 3 = 14 < 15. \quad (55.36)$$

Классы  $\{P_9, P_{11}\}$  и  $\{P_8\}$  объединяем в  $\{P_9, P_{11}, P_8\}$ ; таблица для  $\gamma_i$  меняется:  $\gamma_9 = 0$ ; получаем новое решение, изображенное на рис. 359.

Имеем

$$\lambda_{11,8} = 46; \quad (55.37)$$

$$\gamma_{11} = \gamma_8 = 1, \quad Q\{P_{11}, P_9\} + Q\{P_8\} = 11 + 3 = 14 < 15. \quad (55.38)$$

Приходим к уже встретившемуся классу  $\{P_{11}, P_9, P_8\}$

$$\lambda_{6,5} = 46. \quad (55.39)$$

Имеем  $\gamma_6 = 1$ ,  $\gamma_5 = 0$ , поэтому помечаем крестиком клетку  $\lambda_{6,5}$   
 $\lambda_{7,4} = 40$ . (55.40)

Имеем  $\gamma_7 = 1$ ,  $\gamma_4 = 0$ , поэтому помечаем крестиком клетку  $\lambda_{7,4}$ .

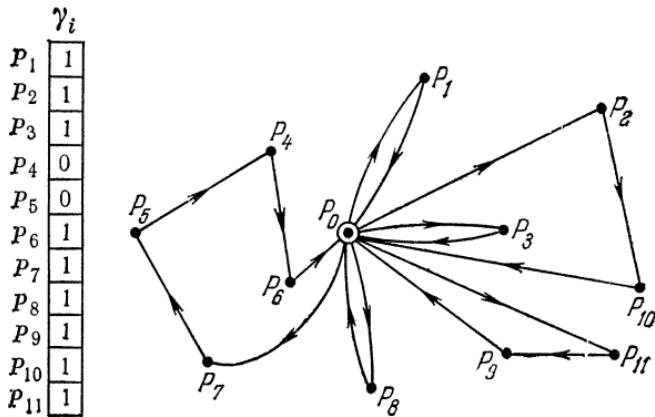


Рис. 358.

Продолжая далее, мы не получим новых классов (см. рис. 352, столбцы Q). Таким образом, приходим к решению (рис. 359), не улучшаемому с помощью такого способа:

$$\begin{aligned}
 (P_0, P_1, P_0) &: 33 + 33 = 66, \\
 (P_0, P_2, P_{10}, P_0) &: 60 + 36 + 62 = 158, \\
 (P_0, P_3, P_0) &: 34 + 34 = 68, \\
 (P_0, P_{11}, P_9, P_8, P_0) &: 63 + 31 + 31 + 33 = 158, \\
 (P_0, P_7, P_5, P_4, P_6, P_0) &: 33 + 30 + 28 + 26 + 24 = 141.
 \end{aligned} \tag{55.41}$$

Общая стоимость  $66 + 158 + 68 + 158 + 141 = 591$ .

Пример 2. Так как  $C_D = 14$  больше  $C = 10$ , то в D требуется специальная поездка. Результаты вычислений приведены на рис. 360 и 361, а решение — на рис. 362.

$$\begin{aligned}
 (O, A, B, O) &: 3 + 3 + 5 = 11, \text{ 2 единицы в } A, \text{ 3 единицы в } B; \\
 (O, D, C, E, O) &: 7 + 2 + 4 + 3 = 16, \text{ 4 единицы в } D, \\
 &\quad 4 \text{ единицы в } C, 1 \text{ единица в } E; \\
 (O, F, O) &: 5 + 5 = 10, \text{ 8 единиц в } F; \\
 (O, D, O) &: 7 + 7 = 14, \text{ 10 единиц в } D.
 \end{aligned} \tag{55.42}$$

Общая стоимость

$$11 + 16 + 10 + 14 = 51. \tag{55.43}$$

Пример 3. Этот пример показывает, что указанным способом не всегда можно получить оптимальное решение.

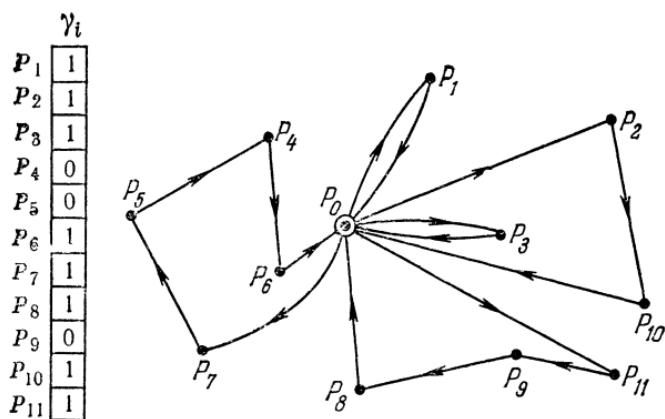


Рис. 359.

$C'_i$	$O$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$O$							
2 $A$	3						
3 $B$	5	3					
4 $C$	8	5	3				
14 $D$	7	6	5	2			
1 $E$	3	2	4	4	3		
8 $F$	5	6	7	7	3	4	

$C=10$

Рис. 360.

$Q$	$0$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
0							
5 $\not A$							
5 $\not B$	5						
9 $\not C$	8	10					
9 $\not D$	4	13					
9 $\not E$	4	4	7				
8 $F$	2	3	8	4			

Рис. 361.

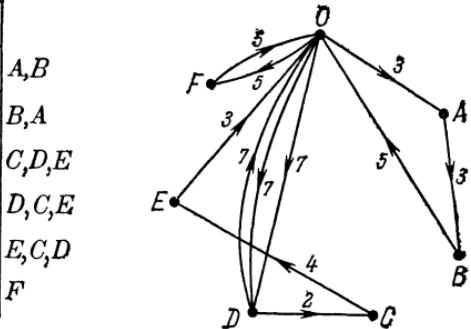


Рис. 362.

Согласно изложенному методу имеем (рис. 363—366)

$$\begin{aligned} (O, A, O) &: 4 + 4 = 8, \\ (O, B, C, O) &: 6 + 3 + 6 = 15, \\ (O, D, O) &: 4 + 4 = 8. \end{aligned} \quad (55.44)$$

Общая стоимость

$$8 + 15 + 8 = 31. \quad (55.45)$$

	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>O</i>					
<i>A</i>	4				
<i>B</i>	6	3			
<i>C</i>	6	5	3		
<i>D</i>	4	6	5	3	
<i>C</i> =10					

Рис. 363.

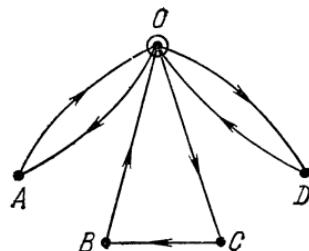


Рис. 364.

Решение на рис. 366 дает

$$\begin{aligned} (O, A, B, O) &: 4 + 3 + 6 = 13, \\ (O, C, D, O) &: 6 + 3 + 4 = 13 \end{aligned} \quad (55.46)$$

Общая стоимость

$$13 + 13 = 26. \quad (55.47)$$

	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>O</i>					
<i>9A</i>					
<i>3B</i>		7			
<i>3C</i>		5	9		
<i>8D</i>		2	5	7	
<i>C</i> =10					

Рис. 365.

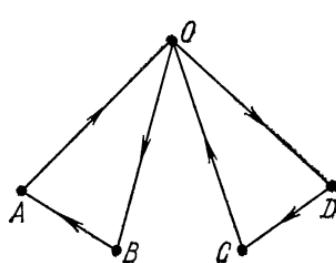


Рис. 366

**Оптимизация с помощью перечисления.** Для небольших комбинаторных задач их оптимальное решение можно найти перечислением.

Рассмотрим «задачу о музыкантах».

Пусть репертуар оркестра состоит из  $m$  произведений. Каждое произведение требует различного состава исполнителей, каждый из которых известен. Этот состав можно представить в виде  $n$ -выборки

$$V_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}), \quad (55.48)$$

где  $x_{ij}$  обозначает число инструментов класса  $j$ , требующихся для исполнения произведения  $i$ . Предполагается, что оркестр должен дать концерт из  $k$  ( $k \leq m$ ) произведений. Требуется выбрать  $k$  произведений с наименьшим общим количеством исполнителей, т. е. найти

$$V_M = \min_{I_k \subseteq I} \sum_{j=1}^n \max_{i \in I_k} x_{ij}, \quad (55.49)$$

где  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ .

При простом переборе нужно вычислить  $C_m^k$  значений  $\sum_{j=1}^n \max_{i \in I_k} x_{ij}$ . Это, очевидно, возможно сделать при не слишком большом  $C_m^k$ .

Пример. Рассмотрим матрицу  $\|x_{ij}\|$  с  $m = 5, n = 8$ :

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	Сумма
3	2	5	0	8	1	6	4	29
2	3	1	0	2	6	0	3	17
1	1	3	6	2	0	4	2	19
2	1	3	6	9	2	5	7	35
3	8	9	4	0	2	3	5	34

(55.50)

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	Сумма макси- мумов	Сумма (если каждый музыкант играет только одно произведение)
$ABC$	3	3	5	6	8	6	6	4	41	65
$ABD$	3	3	5	6	9	6	6	7	45	81
$ABE$	3	8	9	4	8	6	6	5	49	80
$ACD$	3	2	5	6	9	2	6	7	40	83
$ACE$	3	8	9	6	8	2	6	5	47	82
$ADE$	3	8	9	6	9	2	6	7	50	98
$BCD$	2	3	3	6	9	6	5	7	41	71
$BCE$	3	8	9	6	2	6	4	5	43	70
$BDE$	3	8	9	6	9	6	5	7	53	86
$CDE$	3	8	9	6	9	2	5	7	49	88

(55.51)

Требуется выбрать  $k = 3$  произведения с наименьшим числом исполнителей. Это достигается, как видно из таблицы (55.51), выбором произведений  $A, C, D$ .

**Решение задачи о музыкантах<sup>1)</sup> методом ветвления и ограничения.** Мы рассмотрим тот же пример, хотя обычно метод ветвления и ограничения применяют тогда, когда простой перебор невозможен.

Воспроизведем на рис. 367 таблицу (55.50), добавив к ней снизу строку, а справа столбец. Элемент этой строки равен  $k$ -му

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	Суммы
<b>Вычисление нижней границы для <math>E</math></b>	<i>A</i>	3	2	5	0	8	1	6	4 <i>II</i> 29
	<i>B</i>	2	3	1	0	2	6	0	3 <i>5</i> 17
	<i>C</i>	1	1	3	6	2	0	4	2 <i>19</i>
	<i>D</i>	2	1	3	2	7	9	2	1 <i>5</i> 3 <i>7</i> 35
<b>Минимальное значение</b>	<i>E</i>	3	6	8	9	4	0	2	3 <i>1</i> 5 <i>14</i> 34
		2	2	3	4	2	2	4	4 <i>23</i>

Рис. 367.

(третьему) элементу соответствующего столбца в порядке возрастания, а элемент столбца — общее число исполнителей для каждого из произведений. Курсивными цифрами отмечены положительные разности между элементами соответствующего

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	Суммы
<b>Вычисление нижней границы для <math>\bar{E}_C</math></b>	<i>A</i>	3	2	5	0	8	1	6	4 <i>I</i> 29
	<i>B</i>	2	3	1	0	2	6	0	3 <i>4</i> 17
	<i>D</i>	2	1	3	2	1	9	2	5 <i>2</i> 7 <i>5</i> 35
<b>Минимальные значения</b>	<i>E</i>	3	5	8	9	4	0	2	3 <i>5</i> 5 <i>9</i> 34
		3	3	5	4	8	2	5	5 <i>5</i> 35

Рис. 368.

столбца (исключая последний) и элементом нижней строки (в последнем столбце — сумма чисел, набранных курсивом).

Пусть  $E$  — множество решений. Рассмотрим свойство  $\mathcal{P}_i$ : подмножество  $E_i$  содержит произведение  $i$ . Найдем границу снизу для  $E$ .

Располагая числа, набранные курсивом в последнем столбце, в порядке возрастания: 2, 5, 11, 13, 14, заключаем, что граница для  $E$  есть  $23 + 11 = 34$  (см. рис. 373). Выбираем свойство  $\mathcal{P}_C$ , соответствующее минимальному из чисел, набранных курсивом

<sup>1)</sup> На эту задачу обратил мое внимание Барбо (P. Barbaud), а решил ее этим методом Талансé (M. de Talancé) — инженер-математик компании Bell & General Электрик.

в последнем столбце. Найдем нижнюю границу для  $\bar{E}_C = E - E_C$ . Выбрасывая строку  $C$  из матрицы на рис. 367 и действуя, как раньше, получаем (рис. 368).

Располагая числа, набранные курсивом в последнем столбце, в порядке 1, 4, 5, 9, заключаем, что граница для  $\bar{E}_C$  есть  $35 + 5 = 40$  (см. рис. 373). Найдем границу для  $E_C$ . Вычитая

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	Суммы
<i>A</i>	<sup>1</sup> 2	1	<sup>2</sup> 2	0	<sup>6</sup> 6	1	<sup>2</sup> 2	2	<sup>11</sup> 16
<i>B</i>	1	<sup>1</sup> 2	0	0	0	<sup>4</sup> 6	0	1	<sup>5</sup> 10
<i>D</i>	1	0	0	0	<sup>7</sup> 7	2	<sup>1</sup> 1	<sup>3</sup> 5	<sup>11</sup> 16
<i>E</i>	<sup>1</sup> 2	<sup>6</sup> 7	<sup>6</sup> 6	0	0	2	0	<sup>1</sup> <sup>14</sup> 3	<sup>20</sup> 20
Минимальные значения	1	1	0	0	0	2	0	2	6

Рис. 369.

строку  $C$  из всех строк (последний столбец матрицы на рис. 367 не учитывается) и полагая

$$x'_{ij} = \max(0, x_{ij} - x_{C, j}), \quad i = A, B, D, E; \quad j = a, b, \dots, h,$$

получаем (рис. 369). (Числа последнего столбца — суммы соответствующих элементов строки.) Так как должны быть исполнены  $C$  и еще два произведения, то нужно прибавить к 19,

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	Сумма
<i>A</i>	2	1	2	0	6	1	<sup>1</sup> 2	2	<sup>11</sup> 16
<i>D</i>	1	0	0	0	<sup>1</sup> 7	2	<sup>2</sup> 1	<sup>3</sup> 5	<sup>16</sup> 16
<i>E</i>	<sup>6</sup> 2	<sup>7</sup> 7	<sup>6</sup> 6	0	0	2	0	<sup>3</sup> 3	<sup>10</sup> 20
Минимальное значение	2	1	2	0	6	2	1	3	17

Рис. 370.

во-первых, 6, а во-вторых, 11 (так как курсивные числа в последнем столбце — это 11, 5, 11, 14). Итак, нижняя граница для  $E_C$  есть  $19 + 6 + 11 = 36$ . Теперь нам следует применить свойство  $\mathcal{P}_B$  к  $E_C$ . Используя  $\mathcal{P}_C \wedge \mathcal{P}_B$ , строим  $E_C \cap \bar{E}_B$ . Для этого вычеркиваем строку  $B$  в матрице на рис. 369 и, действуя, как раньше, получаем (рис. 370).

Так как должны быть исполнены  $C$  и еще два произведения, то нужно прибавить к 19, во-первых, 17, а во-вторых, 3 (так как курсивные числа в последнем столбце — это 1, 3, 10). Итак, нижняя граница для  $E_C \cap \bar{E}_B$  есть  $19 + 17 + 3 = 39$ . Используя  $\mathcal{P}_C \wedge \mathcal{P}_B$ , строим  $E_C \cap E_B$ . Вычитая строку  $B$  из всех

строк (последний столбец не учитывается) матрицы на рис. 369 и полагая

$$x''_{ij} = \max(0, x'_{ij} - x_{B,j}), \quad i = A, D, E; \quad j = a, b, \dots, h,$$

получаем (рис. 371). (Числа последнего столбца — суммы соответствующих элементов строки.) Так как  $B$  и  $C$  должны быть

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	Сумма
<i>A</i>	1	0	2	0	6	6	0	2	11
<i>D</i>	0	0	0	0	7	7	0	1	11
<i>E</i>	1	5	6	0	0	0	0	1	13
	0	0	0	0	0	0	0	1	14
Вычисление нижней границы для $\mathbf{E}_C \cap \mathbf{E}_B$									
Минимальное значение									

Рис. 371.

исполнены, то к  $\sum_j \max(x_{C,j}, x_{B,j}) = 2 + 3 + 3 + 6 + 2 + 6 + 4 + 3 = 29$  нужно прибавить, во-первых, 1, а во-вторых, 11 (так как курсивные числа в последнем столбце — это 11, 11, 13). Итак, нижняя граница для  $\mathbf{E}_C \cap \mathbf{E}_B$  есть  $29 + 1 + 11 = 41$ .

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	Суммы
<i>D</i>	0	0	0	0	1	1	0	2	3
<i>E</i>	0	6	4	0	0	1	0	1	10
	0	0	0	0	0	1	0	1	2
Вычисление нижней границы для $\mathbf{E}_D \cap \mathbf{E}_E$									
Минимальное значение									

Рис. 372.

Теперь нам следует применить свойство  $\mathcal{P}_A$  и, исходя из  $\mathbf{E}_C \cap \bar{\mathbf{E}}_B$ , построить  $\mathbf{E}_C \cap \bar{\mathbf{E}}_B \cap \bar{\mathbf{E}}_A$  и  $\mathbf{E}_C \cap \bar{\mathbf{E}}_B \cap \mathbf{E}_A$ . Граница для  $\mathbf{E}_C \cap \bar{\mathbf{E}}_B \cap \bar{\mathbf{E}}_A$ :

$$\sum_j \max(x_{C,j}, x_{D,j}, x_{E,j}) = 3 + 8 + 9 + 6 + 9 + 2 + 5 + 7 = 49.$$

Вычитая строку  $A$  из всех строк матрицы на рис. 370 (последний столбец не учитывается) и полагая  $x'''_{ij} = \max(0, x'_{ij} - x_{A,j})$ ,  $i = D, E$ ;  $j = a, b, \dots, h$ , получаем (рис. 372). (Числа последнего столбца — суммы соответствующих элементов строки.) Так как должны быть исполнены  $C, A$  и еще одно произведение, то к  $\sum_j \max(x_{C,j}, x_{A,j}) = 3 + 2 + 5 + 6 + 8 + 1 + 6 + 4 = 35$  нужно прибавить, во-первых, 2, а во-вторых, 3, т. е.  $35 + 2 + 3 = 40$  есть нижняя граница  $\mathbf{E}_C \cap \bar{\mathbf{E}}_B \cap \mathbf{E}_A$ . Далее, применяя  $\mathcal{P}_D$ , строим

$$\mathbf{E}_C \cap \bar{\mathbf{E}}_B \cap \mathbf{E}_A \cap \bar{\mathbf{E}}_D \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_C \cap \bar{\mathbf{E}}_B \cap \mathbf{E}_A \cap \mathbf{E}_D.$$

Граница для первого

$$\sum_j \max(x_{C,j}, x_{A,j}, x_{E,j}) = 3 + 8 + 9 + 6 + 8 + 2 + 6 + 5 = 47,$$

а для второго

$$\sum_j \max(x_{C,j}, x_{A,j}, x_{D,j}) = 3 + 2 + 5 + 6 + 9 + 2 + 6 + 7 = 40.$$

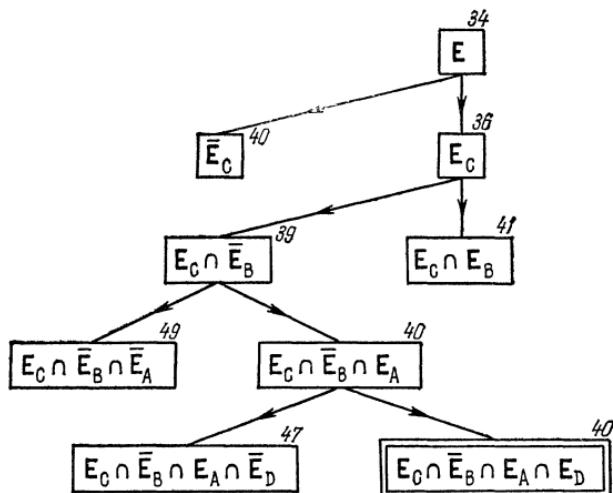


Рис. 373.

Следовательно, искомое оптимальное решение есть  $(A, C, D)$  со значением 40 (рис. 373).

### § 56. Применение методов Монте-Карло

Если не знают ни алгоритма оптимизации, ни приемлемого эвристического метода улучшения решения, то применяют метод Монте-Карло, выбирая решения в соответствии с некоторыми вероятностными законами

(число решений должно быть достаточно большим). Закон частот полученных значений выводится статистически.

Решения с наименьшим (соответственно наибольшим) значением в той или иной мере характеризуют минимум (максимум). Часто используют индекс дисперсии

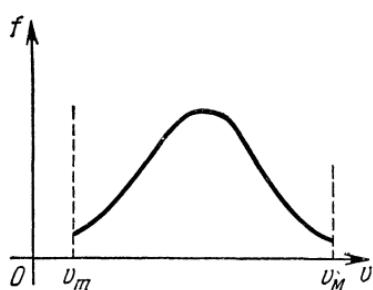


Рис. 374.

$$\rho = \frac{v_M - v_m}{v_M + v_m}, \quad (56.1)$$

где  $v_M$  — наибольшее,  $v_m$  — наименьшее значение (рис. 374).

Даже в том случае, когда число выбранных решений велико, методом Монте-Карло следует пользоваться с осторожностью;

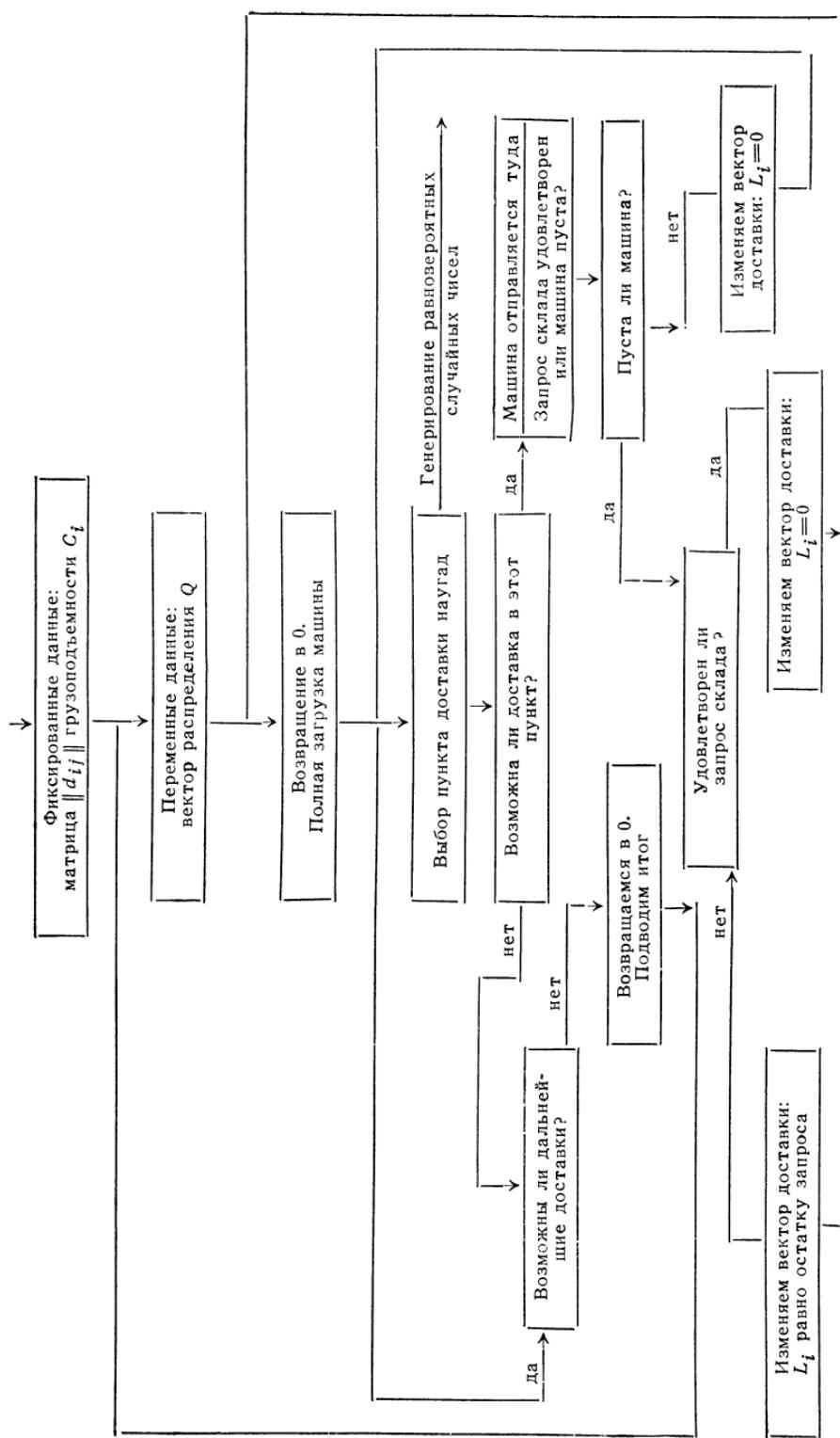


Рис. 375.

однако для решения некоторых задач неизвестны другие методы и, как говорится, на безрыбье и рак рыба!

На примере из § 55 (см. рис. 360) посмотрим, как можно воспользоваться указанным методом. Программа вычислений изображена на рис. 375.

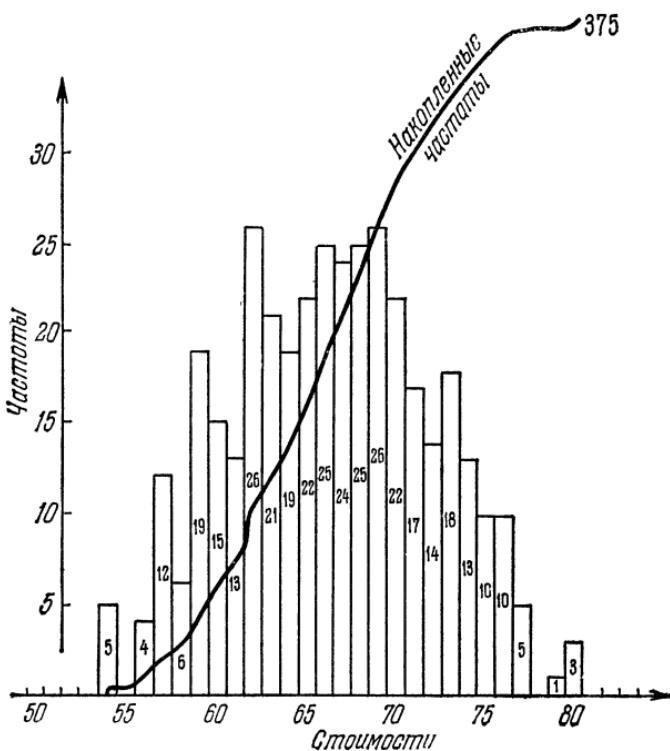


Рис. 376.

На рис. 376 представлено распределение частот значений выбранных 375 решений (некоторые из них указаны ниже).

*Стоимость доставки = 54:*

(O E B C D O), (O D O), (O F D O), (O A O):  $19 + 14 + 15 + 6 = 54$ ;  
 (O D O), (O B C D O), (O D F E O), (O A O):  $14 + 17 + 17 + 6 = 54$ ;  
 (O B F O), (O F D O), (O C D E O), (O A O):  $17 + 15 + 16 + 6 = 54$ ;  
 (O E D O), (O A F O), (O D C B O), (O B O):  $13 + 14 + 17 + 10 = 54$ ;  
 (O B D O), (O F D O), (O D C E O), (O A O):  $17 + 15 + 16 + 6 = 54$ .

*Стоимость доставки = 56:*

(O F B O), (O C D O), (O E D B O), (O A O):  $17 + 17 + 16 + 6 = 56$ ;  
 (O F B O), (O D O), (O D C B E O), (O A O):  $17 + 14 + 19 + 6 = 56$ ;

$(O C D O), (O B E F O), (O D F O), (O A O): 17 + 18 + 15 + 6 = 56;$   
 $(O E D O), (O F B O), (O B D C O), (O A O): 13 + 17 + 20 + 6 = 56.$

Стоимость доставки = 57:

$(O E B C A O), (O D O), (O D F O), (O F O): 18 + 14 + 15 + 10 = 57;$   
 $(O E D O), (O A F O), (O C D B O), (O B O): 13 + 14 + 20 + 10 = 57;$   
 $(O C F O), (O F D O), (O E D B O), (O A O): 20 + 15 + 16 + 6 = 57;$   
 $(O C D O), (O B D O), (O E F D O), (O A O): 17 + 17 + 17 + 6 = 57;$   
 $(O B E C D O), (O D O), (O F D O), (O A O): 22 + 14 + 15 + 6 = 57;$   
 $(O E D O), (O B D F O), (O F C O), (O A O): 13 + 18 + 20 + 6 = 57;$   
 $(O D O), (O B F O), (O C D F E O), (O A O): 14 + 17 + 20 + 6 = 57;$   
 $(O C B F O), (O F D O), (O E D O), (O A O): 23 + 15 + 13 + 6 = 57;$   
 $(O A C B E O), (O D O), (O D F O), (O F O): 18 + 14 + 15 + 10 = 57;$   
 $(O E C D O), (O A F O), (O D B O), (O B O): 16 + 14 + 17 + 10 = 57.$

Стоимость доставки = 58:

$(O F E B O), (O B D O), (O C D O), (O A O): 18 + 17 + 17 + 6 = 58;$   
 $(O B C D O), (O A F O), (O D O), (O E D O): 17 + 14 + 14 + 13 = 58;$   
 $(O C B A E O), (O D O), (O D F O), (O F O): 19 + 14 + 15 + 10 = 58.$

## § 57. Понятие $k$ -оптимальности

Пусть  $\mathbf{S}$  — конечное множество решений комбинаторной задачи. Связывая с каждым решением  $S \in \mathbf{S}$  число  $v(S)$ , приходим к разбиению  $\mathbf{S}$  на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из решений с одним и тем же  $v(S)$ . Эти классы можно упорядочить, и мы изложим алгоритм<sup>1)</sup> получения первых  $k$  классов для последовательного графа (§ 53) со значением на дугах.

Предварительно введем определения.

Пусть

$$\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots, E_N\} \quad (57.1)$$

— конечное множество, упорядоченное числовой функцией

$$v_i = F(E_i). \quad (57.2)$$

Назовем подмножество  $\mathbf{E}^{(1)}$  1-максимальным подмножеством, или 1-максимальным классом, если \*)

$$E_i \in \mathbf{E}, \quad E_j \in \mathbf{E}^{(1)} \Rightarrow v_j \geq v_i; \quad (57.3)$$

<sup>1)</sup> Этот параграф воспроизводит частично статью автора и Крюона (R. Сгион), Revue Française de R. O. 8, 3 trimestre 1964, № 32, 293—302.

\*) Заметим, что  $\mathbf{E}^{(1)}$  состоит из всех элементов с одним и тем же  $v_j$ . Это же относится и к  $\mathbf{E}^{(k)}$ . (Прим. перев.)

подмножество  $\mathbf{E}^{(2)}$  назовем *2-максимальным*, или *2-максимальным классом*, если

$$E_i \in \mathbf{E} - \mathbf{E}^{(1)}, \quad E_j \in \mathbf{E}^{(2)} \Rightarrow v_j \geq v_i; \dots; \quad (57.4)$$

подмножество  $\mathbf{E}^{(k)}$  назовем *k-максимальным*, или *k-максимальным классом*, если

$$E_i \in \mathbf{E} - \bigcup_{a < k} \mathbf{E}^{(a)}, \quad E_j \in \mathbf{E}^{(k)} \Rightarrow v_j \geq v_i. \quad (57.5)$$

Элемент  $E_i \in \mathbf{E}^{(k)}$  называют *k-максимальным*.

Очевидно, что при некотором  $m$  подмножества  $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{E}^{(2)}, \dots, \mathbf{E}^{(m)}$  дают разбиение  $\mathbf{E}$ .

Аналогично можно определить *k-минимальные* подмножества.

Называют *k-оптимумом* (*k-максимумом* или *k-минимумом*) множества действительных чисел  $\{v_i\}$  такое число  $v^{(k)}$ , что

$$E_i \in \mathbf{E}^{(k)} \Rightarrow v_i = v^{(k)} \quad (57.6)$$

(число  $v^{(k)}$  является  $k$ -м по величине среди всех  $v_i$ ), и записывают

$$\underset{i=1, 2, \dots, N}{\text{opt}} v_i = v^{(k)}. \quad (57.7)$$

Полагают

$$\underset{i=1, 2, \dots, N}{\text{opt}} v_i = \pm \infty, \quad (57.8)$$

если  $\mathbf{E}^{(k)} = \emptyset$  (знак «плюс» относится к  $\text{opt} = \min$ , знак «минус» — к  $\text{opt} = \max$ ).

Рассмотрим числовую функцию от  $N$  действительных переменных и параметра  $x_0$

$$v_{0, N}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N) = v_1(x_0, x_1) + v_2(x_1, x_2) + \dots + v_n(x_{n-1}, x_n) + \dots + v_N(x_{N-1}, x_N), \quad (57.9)$$

где  $x_0 \in \mathbf{E}_0$  и

$$x_n \in \Gamma_n \{x_{n-1}\}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (57.10)$$

а  $\Gamma_n$  — многозначные отображения и  $\Gamma_n \{x_{n-1}\}$  — конечные множества. Тем самым приходим к последовательному графу.

Для каждого  $x_0$  зададимся областью  $\mathbf{D}(x_0)$ . Для получения *k*-оптимального подмножества в  $\mathbf{D}(x_0)$  нужно вычислить *k*-оптимум функции (57.9):

$$f_{0, N}^{(k)}(x_0) = \underset{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{D}(x_0)}{\text{opt}} v_{0, N}(x_0, x_1, \dots, x_N), \quad (57.11)$$

и найти  $(N+1)$ -выборки  $\tilde{\omega}(x_0) = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ , для которых  $v_{0, N}$  совпадает с (57.11).

$(N+1)$ -выборка  $\tilde{\omega}_{0,N}$ , совместимая с (57.10), представляет путь в последовательном графе<sup>1)</sup>, а  $(h+1)$ -выборка  $\tilde{\omega}_{n, n+h} = (x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+h})$ , совместимая с (57.10), представляет подпуть в последовательном графе.

Подпуть  $\tilde{\omega}_{n, N} = (x_n, x_{n+1}, \dots, x_N)$  называют  $k$ -оптимальным путем из  $x_n$  до вершин  $N$ -го уровня, если он принадлежит  $k$ -оптимальному подмножеству множества путей, выходящих из  $x_n$ .

Беллман и Калаба<sup>2)</sup> дали метод, состоящий в последовательном вычислении

$$f_{N-1, N}^{(i)}(x_{N-1}) = \underset{x_N \in \Gamma_N \setminus \{x_{N-1}\}}{\text{opt}} v_N(x_{N-1}, x_N), \quad (57.12)$$

$$f_{n, N}^{(i)} = \underset{\substack{x_{n+1} \in \Gamma_{n+1} \\ j=1, 2, \dots, i}}{\text{opt}} [v_{n+1}(x_n, x_{n+1}) + f_{n+1, N}^{(j)}(x_{n+1})], \quad (57.13)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad n = N-2, N-3, \dots, 0.$$

Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема о  $k$ -оптимальности. Подпуть  $\tilde{\omega}_{n, N} = (\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \dots, \tilde{x}_N)$ , образованный последними  $N-n+1$  компонентами  $k$ -оптимального пути  $\tilde{\omega}_{0, N} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ , является  $i$ -оптимальным путем из  $\tilde{x}_n$  до вершин  $N$ -го уровня для некоторого  $i \leq k$ .

Доказательство проведем от противного. Пусть  $\tilde{\omega}_{n, N}$  —  $i$ -оптимальный путь с  $i > k$ . Тогда найдутся  $k$  подпутей из  $\tilde{x}_n$  до вершин  $N$ -го уровня, все значения которых различны и «лучше», чем у  $\tilde{\omega}_{n, N}$ . Добавляя каждый из этих подпутей к первым  $n$  компонентам пути  $\tilde{\omega}_{0, N}$  (что можно сделать, так как граф последовательный), получаем  $k$  путей, все значения которых различны и «лучше», чем у  $\tilde{\omega}_{0, N}$ . Это противоречит  $k$ -оптимальности  $\tilde{\omega}_{0, N}$ .

Чтобы получить  $k$ -оптимальные пути от  $x_n$  до вершин  $N$ -го уровня, по доказанной теореме достаточно рассмотреть  $i$ -оптимальные подпути ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) из  $x_{n+1}$  до вершин  $N$ -го уровня. Если при некотором  $i$  множество  $i$ -оптимальных подпутей пусто, то формулы (57.12) и (57.13) остаются справедливыми в силу (57.8).

Из рассмотрения формулы (57.13) следует, что для отыскания  $i$ -оптимума достаточно рассмотреть множество  $\mathbf{A}$  мощности  $i \cdot |\Gamma x_n|$ , где  $|\Gamma x_n|$  — мощность  $\Gamma x_n$ . Однако заметим, что  $i$  элементов из  $\mathbf{A}$ , отвечающих заданному  $x_{n+1}$  (полагая последовательно  $j = 1, 2, \dots, i$  в (57.13)), можно упорядочить. В силу этого достаточно разыскивать 1-оптимум в некотором множестве мощности  $|\Gamma x_n|$ .

<sup>1)</sup> Этот путь называют также траекторией или стратегией.

<sup>2)</sup> R. Bellman, R. Kalaba, On  $k$ -th best policies, J. Soc. Industr. Appl. Math. 8, № 4 (1960), 582—588.

Положим<sup>1)</sup>

$$\forall x_N \{f_{N, N}^{(l)}(x_N) = 0\}, \quad (57.14)$$

$$\forall x_N \{f_{N, N}^{(i)}(x_N) = \pm \infty, i = 2, 3, \dots, k\}, \quad (57.15)$$

$$\forall x_n \forall x_{n+1} \{j_n^{(l)}(x_n, x_{n+1}) = 1, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}. \quad (57.16)$$

Последовательно вычисляем при  $n = (N - 1), (N - 2), \dots, 2, 1, 0$ , при всех  $x_n$  и при<sup>2)</sup>  $i = 1, 2, \dots, k$

$$x_{n+1} \in \Gamma_{x_n}: f_{n, N}^{(i)}(x_n) = \underset{x_{n+1} \in \Gamma_{x_n}}{\text{opt}} [v_{n+1}(x_n, x_{n+1}) + f_{n+1, N}^{(a)}(x_{n+1})], \quad (57.17)$$

где

$$a = j_n^{(i)}(x_n, x_{n+1}) \quad (57.18)$$

и

$$\begin{aligned} & j_n^{(i+1)}(x_n, x_{n+1}) = \\ & = \begin{cases} j_n^{(i)}(x_n, x_{n+1}), & \text{если } v_{n+1}(x_n, x_{n+1}) + f_{n+1, N}^{(a)}(x_{n+1}) \leq f_{n, N}^{(i)}(x_n), \\ j_n^{(i)} + 1 & \text{в противном случае;} \end{cases} \end{aligned} \quad (57.19)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1}^{(i)}(x_n) = & \{x_{n+1}, j_n^{(i)}(x_n, x_{n+1}) \mid v_{n+1}(x_n, x_{n+1}) + f_{n+1, N}^{(a)}(x_{n+1}) = \\ & = f_{n, N}^{(i)}(x_n)\}. \end{aligned} \quad (57.20)$$

Итак, для каждого  $\tilde{x}_0 \in E_0$  и для  $i = 1, 2, \dots, k$  получаем: значение  $i$ -оптимального пути от  $\tilde{x}_0$  до вершин  $N$ -го уровня, равное  $f_{0, N}^{(i)}(\tilde{x}_0)$ ;

множество  $i$ -оптимальных путей от  $\tilde{x}_0$  до вершин  $N$ -го уровня (с помощью (57.20)).

Справедливость формул (57.17) — (57.20) следует из сравнения с (57.12) и (57.13); отличие следующее:

а) вместо  $i$ -оптимума ищем 1-оптимум, предварительно исключая  $j$ -оптимумы ( $j < i$ );

б) для отыскания 1-оптимума можно использовать лишь один элемент  $A$  для каждого  $x_{n+1}$  (выбрасывая заведомо неоптимальные).

Этот алгоритм легко запрограммировать для ЭВМ. Полезно отметить, что:

а) для более простого описания графа иногда бывает удобно добавить фиктивные вершины и приписать всем дугам, не фигурирующим в первоначальном графе, значение  $\pm \infty$ ;

<sup>1)</sup> Символы  $\pm$  и  $\geqslant$  означают либо  $+$  и  $>$ , либо  $-$  и  $<$  в зависимости от  $\text{opt} = \min$  или  $\text{opt} = \max$ .

<sup>2)</sup> Если  $f_{N, N}^{(i)} = \pm \infty$  для некоторого  $i$ , то  $f_{N, N}^{(l)} = \pm \infty$ ,  $\Pi_{n+1}^{(l)}(x_n) = \emptyset$ ,  $l = i, \dots, k$ .

б) изложенный алгоритм практически столь же эффективен, что и алгоритм Беллмана (см. (53.4)) для отыскания 1-оптимальных путей, так как требует для отыскания  $i$ -оптимальных путей ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) времени примерно в  $k$  раз больше (по формулам же (57.12) и (57.13) примерно в  $k^2$  раз).

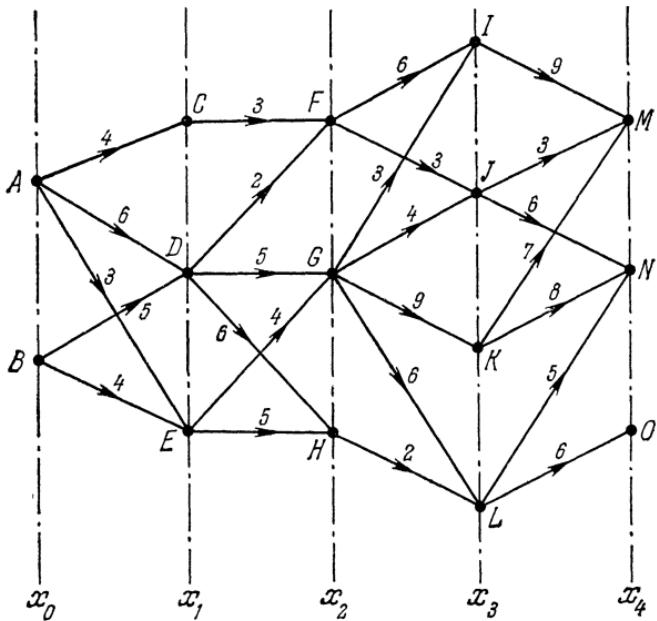


Рис. 377.

Пример. Рассмотрим последовательный граф на рис. 377 (из  $A$  исходит 24 пути, а из  $B$  — 21 путь). Найдем  $i$ -минимальные пути с  $i = 1, 2, 3, 4$ . Имеем

$$\text{opt} = \min, \quad k = 4, \quad N = 4. \quad (57.21)$$

Удобно составить матрицу значений подпутей из  $x_n$  до вершин  $N$ -го уровня (см. столбец (6) в таблице (57.22)). В столбцах (3) и (5) приведены соответственно окончательные и промежуточные результаты вычислений по данному методу. При вычислениях вручную к индикатору  $j_n^{(i)}$  можно не обращаться.

На рис. 378 представлены  $i$ -минимальные пути ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Для большей наглядности некоторые вершины  $x_n$  заменены вершинами  $(x_n, 1), (x_n, 2), \dots, (x_n, k)$ . Множество  $\Pi_n^{(i)}(x_n)$  определяет тогда дуги  $i$ -минимального пути из  $(x_n, i)$ . На рис. 379 некоторые  $i$ -минимальные пути выделены.

Заметим также, что:

1) если ищут  $k$ -оптимальные пути из  $x_0$  в фиксированную вершину  $x_N^*$   $N$ -го уровня, то при использовании изложенного метода не учитывают дуги  $(x_{N-1}, x_N)$  с  $x_N \neq x_N^*$ ;

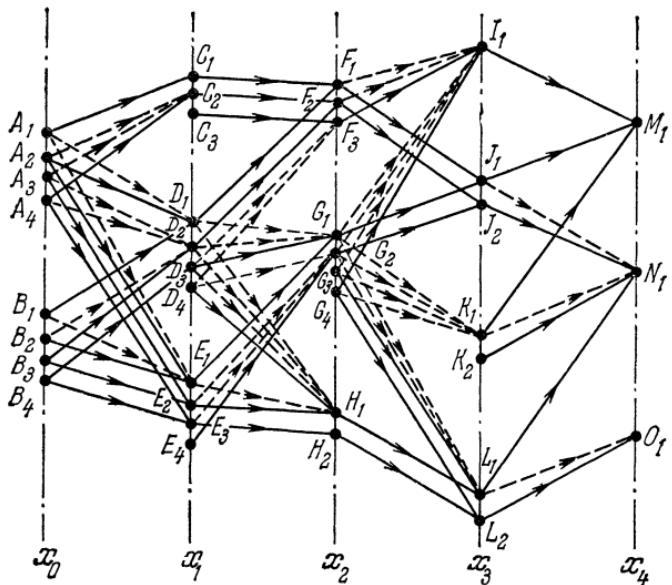


Рис. 378.

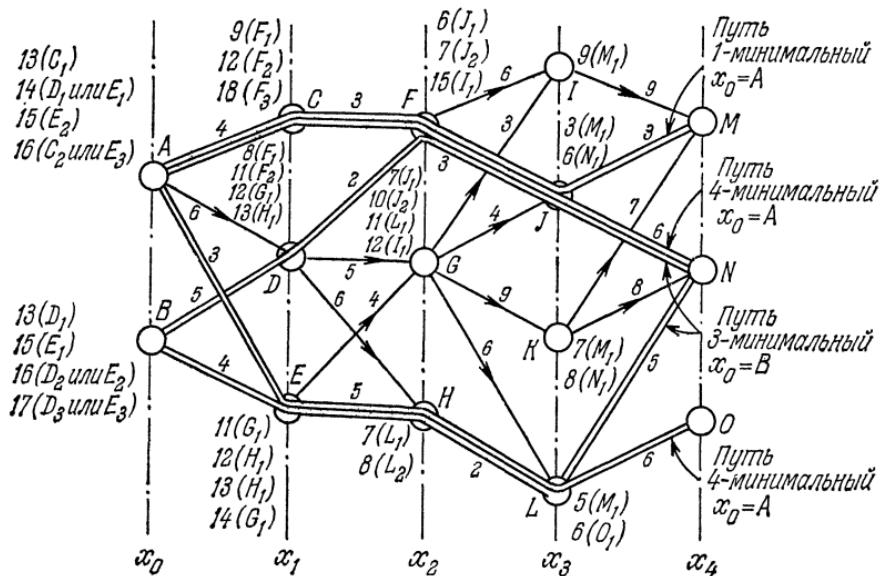


Рис. 379.

(1)	(2)	(3)				(4)	$f_n^{(i)}(x_n, x_{n+1})$	$v_{n+1}^{(6)}(x_n, x_{n+1}) + f_{n+1}^{(i)}(x_{n+1}, N)$							
$n \downarrow$	$x_n \downarrow$	$\xrightarrow{i}$	1	2	3	4	$x_{n+1} \downarrow$	1	2	3	4	1	2	3	4
I	$f_{3, 4}^{(i)}(I)$	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$		$M$	1	2			9	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$\Pi_4^{(i)}(I)$	$(M, 1)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$										
J	$f_{3, 4}^{(i)}(J)$	3	6	$\infty$	$\infty$		$M$	1	2	2		3	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$\Pi_4^{(i)}(J)$	$(M, 1)$	$(N, 1)$	$\emptyset$	$\emptyset$			1	1	2		6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
K	$f_{3, 4}^{(i)}(K)$	7	8	$\infty$	$\infty$		$M$	1	2	2		7	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$\Pi_4^{(i)}(K)$	$(M, 1)$	$(N, 1)$	$\emptyset$	$\emptyset$			1	1	2		8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
L	$f_{3, 4}^{(i)}(L)$	5	6	$\infty$	$\infty$		$N$	1	2	2		5	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$\Pi_4^{(i)}(L)$	$(N, 1)$	$(O, 1)$	$\emptyset$	$\emptyset$			1	1	2		6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
F	$f_{2, 4}^{(i)}(F)$	6	9	15	$\infty$		$I$	1	1	1	2	15	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$\Pi_3^{(i)}(F)$	$(J, 1)$	$(J, 2)$	$(I, 1)$	$\emptyset$			1	2	3	3	6	9	$\infty$	$\infty$
G	$f_{2, 4}^{(i)}(G)$	7	10	11	12		$J$	1	1	1	1	12	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$\Pi_3^{(i)}(G)$	$(J, 1)$	$(J, 2)$	$(L, 1)$	$\{(I, 1) / (L, 2)\}$			1	2	3	3	7	10	$\infty$	$\infty$
H	$f_{2, 4}^{(i)}(H)$	7	8	$\infty$	$\infty$		$K$	1	1	1	1	16	17	$\infty$	$\infty$
	$\Pi_3^{(i)}(H)$	$(L, 1)$	$(L, 2)$	$\emptyset$	$\emptyset$			1	1	1	2	11	12	$\infty$	$\infty$
							$L$	1	2	3		7	8	$\infty$	$\infty$

(57.22)

(1)	(2)	(3)				(4)	$j_n^{(i)}(x_n, x_{n+1})$	$\overset{(5)}{x_{n+1}}$	$\overset{(6)}{v_{n+1}(x_n, x_{n+1}) + f_{n+1, N}^{(i)}}$						
$n \downarrow$	$x_n$	$\rightarrow$	1	2	3	4	$\tau_{n+1} \downarrow$	1	2	3	4	1	2	3	4
$C$	$f_{1, 4}^{(i)}(C)$	9	12	18	$\infty$										
	$\Pi_2^{(i)}(C)$	$(F, 1)$	$(F, 2)$	$(F, 3)$	$\emptyset$		$F$	1	2	3	4	9	12	18	$\infty$
1	$D$	$f_{1, 4}^{(i)}(D)$	8	11	12	13	$F$	1	2	3	3	8	11	17	$\infty$
		$\Pi_2^{(i)}(D)$	$(F, 1)$	$(F, 2)$	$(G, 1)$	$(H, 1)$	$G$	1	1	1	2	12	15	16	17
	$E$	$f_{1, 4}^{(i)}(E)$	11	12	13	14	$H$	1	1	1	1	13	14	$\infty$	$\infty$
		$\Pi_2^{(i)}(E)$	$(G, 1)$	$(H, 1)$	$(H, 2)$	$(G, 2)$	$G$	1	2	2	2	11	14	15	16
0	$A$	$f_{0, 4}^{(i)}(A)$	13	14	15	16	$H$	1	1	2	3	12	13	$\infty$	$\infty$
		$\Pi_1^{(i)}(A)$	$(C, 1)$	$\{(D, 1)\}$	$(E, 2)$	$\{(C, 2)\}$	$C$	1	2	2	2	13	16	22	$\infty$
	$B$	$f_{0, 4}^{(i)}(B)$	13	15	16	17	$D$	1	1	2	2	14	17	18	19
		$\Pi_1^{(i)}(B)$	$(D, 1)$	$(E, 1)$	$\{(D, 2)\}$	$\{(D, 3)\}$	$E$	1	1	2	3	14	15	16	17

(57.22)

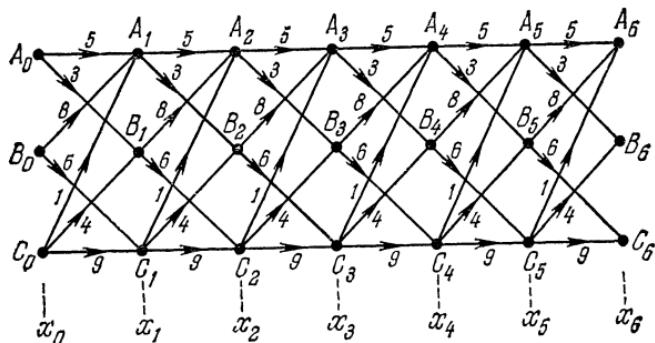
2) если  $N$ -й уровень содержит единственную вершину, то переходят к графу, получающемуся из исходного изменением направления всех дуг;

3) при отыскании  $k$ -оптимальных путей из вершин нулевого до вершин  $N$ -го уровня можно к исходному графу добавить вершину  $x_{-1}$ , соединить ее со всеми вершинами нулевого уровня дугами со значением 0 и найти  $k$ -оптимальные пути от  $x_{-1}$  до вершин  $N$ -го уровня.

Задачу об отыскании  $k$ -оптимальных путей в произвольном графе во многих случаях можно свести к аналогичной задаче для последовательного графа, хотя это сведение не всегда легко осуществить.

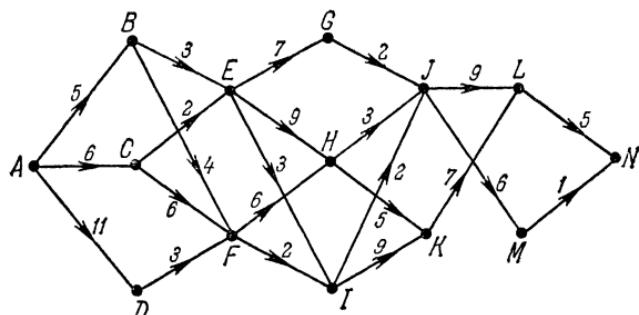
## УПРАЖНЕНИЯ

57А. Указать  $i$ -минимальные пути ( $i = 1, 2, 3$ ) между  $x_0$  и  $x_6$  в графе



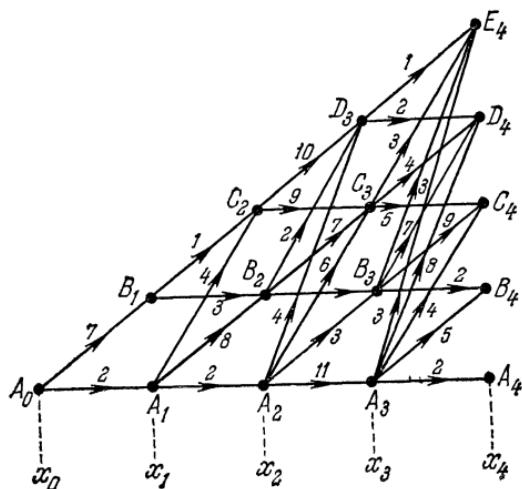
57Б. Тот же вопрос для  $i$ -максимальных ( $i = 1, 2, 3$ ) путей.

57В. Найти 1-минимальные и 2-минимальные пути между  $A$  и  $N$  в графе



57Г. Тот же вопрос для 1-максимальных и 2-максимальных путей.

57Д. Указать  $i$ -минимальные пути ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) в графе



## § 58. Оптимизация на прадереве. Отыскание оптимального дерева, являющегося частичным графом

Это два разных вопроса. Но мы рассматриваем их в одном параграфе ввиду родства понятий дерева и прадерева.

**Оптимизация на прадереве.** Как мы видели в § 38, прадерево обладает порядковой функцией.

Пусть его дугам (или вершинам) приписаны числовые значения. Задача состоит в отыскании оптимального пути между

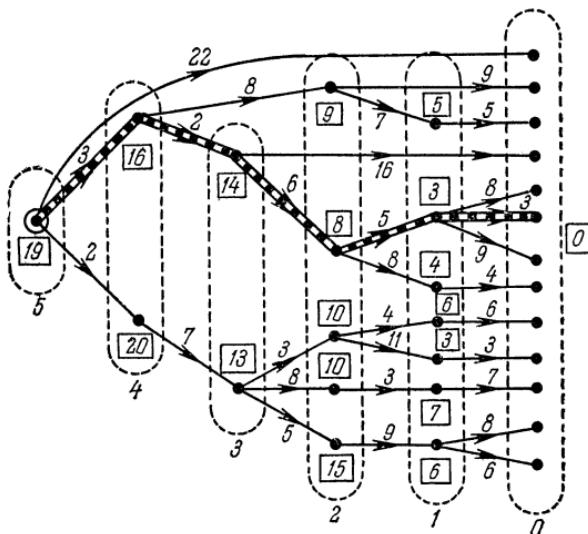


Рис. 380.

корнем и висячими вершинами, образующими нулевой уровень. Общий метод оптимизации изложен в § 51. Здесь мы рассмотрим лишь пример.

Пример. Минимальный путь для прадерева на рис. 380 выделен.

**Отыскание оптимального дерева, являющегося частичным графом.** Рассмотрим неориентированный связный граф  $\bar{G} = (\bar{E}, \bar{V})$ , ребрам которого приписаны некоторые числа. Пусть  $\bar{H}$  — множество частичных графов  $\bar{H}_k = (\bar{E}, \bar{V}_k)$  графа  $\bar{G}$ , являющихся деревьями. Требуется найти дерево с минимальным значением

$$\bar{H}_m = \min_{\bar{H}_k \in \bar{H}} \sum_{\bar{u} \in \bar{V}_k} v(\bar{u}). \quad (58.1)$$

Для этой задачи можно использовать различные алгоритмы. Мы опишем здесь наиболее простой алгоритм Краскала, который мало эффективен для графов с большим числом вершин. Для таких графов предпочтительнее пользоваться алгоритмом Солена ([22]), который приспособлен для ЭВМ.

**Алгоритм Краскала<sup>1)</sup>.** Принцип и формулировка этого алгоритма предельно просты.

Действуют поэтапно, выбирая каждый раз ребро с возможно меньшим значением, добавление которого к уже выбранным ребрам не приводит к циклу. Обоснуем этот алгоритм.

Пусть  $\bar{G} = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}})$  с  $|\mathbf{E}| = n$  — связный неориентированный граф, каждому ребру  $\bar{u}_i \in \bar{\mathbf{U}}$  которого приписано значение  $v(\bar{u}_i)$ . Найдем минимальное дерево.

Заменим значения ребер  $v(\bar{u}_i)$  на  $v'(\bar{u}_i)$  так, чтобы множество всех значений было строго упорядочено. Если  $k$  ребрам приписано одно и то же значение, т. е.  $v(\bar{u}_{i1}) = v(\bar{u}_{i2}) = \dots = v(\bar{u}_{ik})$ , то положим

$$\begin{aligned} v'(\bar{u}_{i1}) &= v(\bar{u}_{i1}), \\ v'(\bar{u}_{i2}) &= v(\bar{u}_{i1}) + \varepsilon, \\ v'(\bar{u}_{i3}) &= v(\bar{u}_{i1}) + 2\varepsilon, \\ &\dots \\ v'(\bar{u}_{ik}) &= v(\bar{u}_{i1}) + (k-1)\varepsilon, \end{aligned} \tag{58.2}$$

где  $\varepsilon$  определяется из условия

$$v(\bar{u}_{i1}) + (k-1)\varepsilon < v(\bar{u}_s)$$

при  $v(\bar{u}_r) < v(\bar{u}_{i1}) = v(\bar{u}_{i2}) = \dots = v(\bar{u}_{ik}) < v(\bar{u}_s)$ .

Образуем полный неориентированный граф  $\bar{G}_c = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}}_c)$ , соответствующий графу  $\bar{G} = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}})$ , и припишем ребрам  $\bar{w}_j$  из  $\bar{\mathbf{U}}_c - \bar{\mathbf{U}}$  такие значения  $v'(\bar{w}_j)$ , что:

$$1) \quad (\forall \bar{w}_j \in (\bar{\mathbf{U}}_c - \bar{\mathbf{U}})) v'(\bar{w}_j) > \sum_{\bar{u}_i \in \bar{\mathbf{U}}} v'(\bar{u}_i), \tag{58.3}$$

2) множество всех значений  $v'(\bar{w}_j)$  строго упорядочено. (58.4)

Построим дерево  $(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{W}})$  в  $\bar{G}_c$ , где

$$\bar{\mathbf{W}} = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{n-1}\}, \tag{58.5}$$

действуя следующим образом. В качестве  $\bar{w}_1$  берем ребро из  $\bar{\mathbf{U}}_c$  с наименьшим значением, за  $\bar{w}_2$  — ребро с наименьшим значением среди таких  $\bar{w}$ , что  $(\bar{w}_1, \bar{w})$  не составляют цикла; поступаем аналогично до тех пор, пока не придем к такому графу  $(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{W}}_k)$ , что добавление ребра между любыми двумя вершинами приводит к циклу. В силу свойств 4) и 2) определения дерева (§ 38)  $(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{W}}_k)$  — дерево с  $k = n - 1$  ребрами.

Покажем, что дерево  $(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{W}})$  минимальное. Предположим, что значение некоторого дерева  $(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{W}}')$  меньше, чем значение  $(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{W}})$ . Пусть  $\bar{w}_r$  — первое ребро, не входящее в  $\bar{\mathbf{W}}'$ . В силу

<sup>1)</sup> J. B. Kruskal, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 48.

свойства 4) § 38 в  $(E, \bar{W}' \cup \{\bar{w}_r\})$  существует единственный цикл, а на нем ребро  $\bar{u}_0 \notin \bar{W}$ . Положим  $\bar{Y} = (\bar{W}' \cup \{\bar{w}_r\}) - \{\bar{u}_0\}$ . Граф  $(E, \bar{Y})$  — дерево в силу свойства 2) § 38, так как не обладает циклами и содержит  $n - 1$  ребер.

С другой стороны, с помощью  $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{r-1}\} \cup \{\bar{u}_0\}$  нельзя получить цикла, так как это множество содержитя в  $\bar{W}'$  и

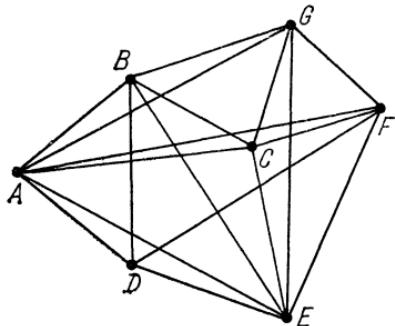


Рис. 381.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>A</i>	0	8	8	3		10	9
<i>B</i>	8	0	4	7	12	$\infty$	4
<i>C</i>	8	4	0	$\infty$	9	7	6
<i>D</i>	3	7	$\infty$	0	13	9	$\infty$
<i>E</i>	11	12	9	13	0	9	8
<i>F</i>	10	$\infty$	7	9	9	0	5
<i>G</i>	9	4	6	$\infty$	8	5	0

Рис. 382.

вследствие выбора  $\bar{w}_r$  имеем  $v(\bar{u}_0) > v(\bar{w}_r)$ . Таким образом, дерево  $(E, \bar{Y})$  имеет значение меньшее, чем дерево  $(E, \bar{W}')$ . Пришли к противоречию.

Если граф  $\bar{G}$  полный, то все доказано. Пусть он не является полным. Покажем, что построенное выше дерево минимально

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>A</i>		8	8	3	11	10	9
<i>B</i>			4	7	12	$\infty$	4
<i>C</i>				$\infty$	9	7	6
<i>D</i>					13	9	$\infty$
<i>E</i>						9	8
<i>F</i>							5
<i>G</i>							

Рис. 383.

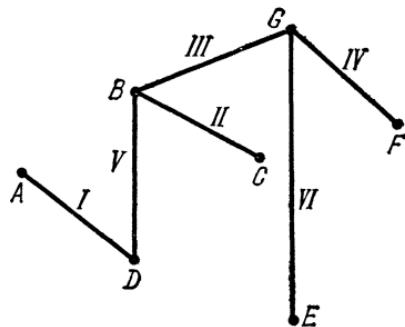


Рис. 384.

и для такого  $\bar{G}$ . Действительно, в силу (58.3) ни для какого  $j$  невозможно, чтобы  $\bar{w}_j \notin \bar{U}$ .

Отсюда следует также, что если все значения ребер  $\bar{u}_i$  различны, то минимальное дерево единственно.

Заметим, что в силу двойственности мы можем прийти к минимальному дереву, выбрасывая ребра с наибольшими значениями так, чтобы не нарушилась связность графа.

Очевидно, что по алгоритму Краскала можно найти и максимальное дерево. Обоснование в этом случае проводится аналогично, если присвоить значение 0 ребрам  $\bar{w} \notin \bar{U}$ .

Пример. Рассмотрим неориентированный граф на рис. 381, ребрам которого приписаны значения так, как показано на рис. 382.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>A</i>	—	8 9	8 10	3	11 3	10 4	9 5
<i>B</i>		—	4 7	12 2	∞	—	4
<i>C</i>			—	9 6	7 11	—	6 12
<i>D</i>				—	13 1	9 7	∞
<i>E</i>					9 8	—	—
<i>F</i>						—	5
<i>G</i>							—

Рис. 385.

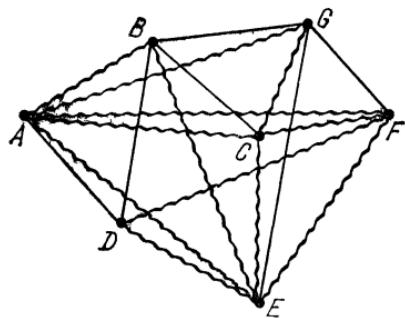


Рис. 386.

По алгоритму Краскала найдем минимальное дерево для указанного графа. Очевидно, что за  $\bar{w}_1$  нужно взять  $(\overline{A, D})$  с  $v_{AD} = 1$  (на рис. 384 оно отмечено I). Далее берем  $(\overline{B, C})$  и  $(\overline{B, G})$ , для которых  $v_{BC} = v_{BG} = 4$  (на рис. 384 они отмечены

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>A</i>	—	8 8	3	11 III	10 IV	9 V	—
<i>B</i>		—	4 7	12 II	0	—	4
<i>C</i>			—	9 VI	7 I	—	6
<i>D</i>				13 I	9 0	—	—
<i>E</i>					9 8	—	—
<i>F</i>						—	5
<i>G</i>							—

Рис. 387.

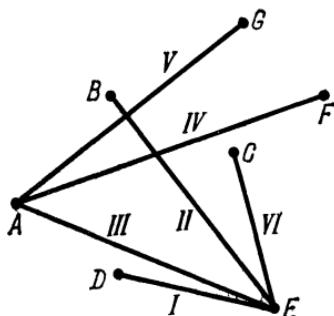


Рис. 388.

II и III). Затем берем  $(\overline{F, G})$ . Следующим мы должны были бы выбрать  $(\overline{C, G})$ , но его добавление приводит к циклу. Поэтому переходим к  $(\overline{B, D})$  и т. д. Результат приведен на рис. 383. Значение минимального дерева:

$$3 + 4 + 4 + 5 + 7 + 8 = 31. \quad (58.6)$$

Действуя по двойственному методу, мы должны исключать ребра в следующем порядке:  $(\overline{D, E})$ ,  $(\overline{B, E})$ ,  $(\overline{A, E})$ ,  $(\overline{A, F})$ ,

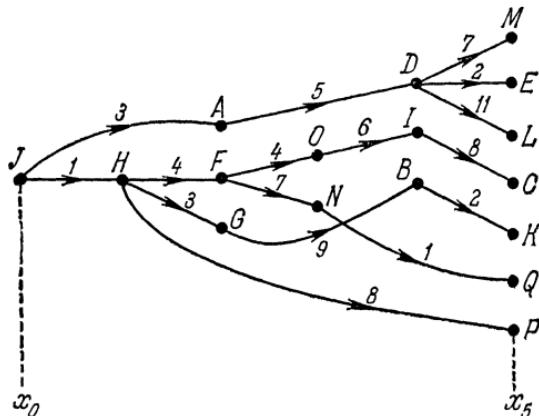
$(\overrightarrow{A, G}), (\overrightarrow{C, E}), (\overrightarrow{D, F}), (\overrightarrow{E, F}), (\overrightarrow{A, B}), (\overrightarrow{A, C}), (\overrightarrow{C, F}), (\overrightarrow{C, G})$ , как показано на рис. 385 и 386.

На рис. 387 и 388 представлено максимальное дерево того же графа. Его значение

$$13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 9 = 64. \quad (58.7)$$

### УПРАЖНЕНИЯ

58А. Указать пути с максимальным значением из корня  $J$  до висячих вершин прадерева (закон композиции — сложение).



58Б. То же, что и в упражнении 58А, но закон композиции — умножение.

58В. Для прадерева в упражнении 58А найти 2-максимальные пути от корня до висячих вершин.

58Г. Простым перечислением найти все классы  $k$ -оптимальных путей для прадерева из упражнения 58А.

58Д. Найти минимальные деревья, являющиеся частичными графами для следующих графов:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		3	8	13	2	5	9	4
B				1	12	8	11	13
C					4	6	3	14
D						2	6	7
E							12	4
F								0
G								8
H								

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		3	17	5	9	0	2	6	11	21
2			3	17	3	4	8	2	6	13
3				3	7	9	4	2	12	6
4					4	9	3	3	20	17
5						2	2	13	4	6
6							3	10	8	1
7								2	9	3
8									1	0
9										10
10										

58Е. Найти максимальные деревья для графов из упражнения 58Д.

## § 59. Задачи о временном упорядочении

Для некоторых задач оптимизации, имеющих комбинаторный характер, подход с помощью теории графов не представляется наиболее естественным. Таковы часто встречающиеся задачи о временном упорядочении<sup>1)</sup>.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть  $n$  изделий  $P_1, P_2, \dots, P_n$  должны последовательно проходить обработку на станках  $M_1$  и  $M_2$ , причем станок в каждый момент времени может обрабатывать одно изделие. Продолжительность обработки изделия  $P_j$  станком  $M_i$  пусть задается матрицей  $\|\tau_{ij}\|$ ,  $i = 1, 2; j =$

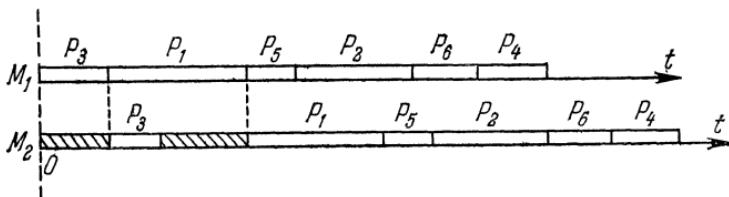


Рис. 389.

$= 1, 2, \dots, n$ . Требуется минимизировать время, в течение которого станок остается незанятым; задача иногда формулируется как требование минимизировать общее время обработки изделий, включающее время работы и время простоя станка  $M_2$ .

На рис. 389 схематически показан случай обработки шести изделий двумя станками. Время обработки каждого из изделий дается белым прямоугольником, время простоя — заштрихованными прямыми.

Можно обобщить задачу на случай  $n$  изделий и  $m$  станков. При  $m > 2$  минимизирование общего времени обработки и минимизирование времени простоя станков — задачи, вообще говоря, различные.

Известен алгоритм для случая  $m = 2$  и, с одним ограничением, для  $m = 3$ . Это — алгоритм Джонсона; можно также использовать метод ветвления и ограничения<sup>2)</sup>. В общем случае можно применять эвристические методы<sup>3)</sup>.

**Алгоритм Джонсона. Случай двух станков.** Сначала сформулируем алгоритм и дадим пример его использования, а затем уже приведем обоснование алгоритма.

- 1) Выберем в матрице  $\|\tau_{ij}\|$  наименьший элемент  $\tau_{ij}$ .
- 2) Если этот элемент находится в первой строке, то начинаем с изделия  $P_j$ , если во второй, то заканчиваем изделием  $P_j$ .

<sup>1)</sup> В литературе на английском языке употребляется термин «задачи о составлении расписания» («Scheduling problems»).

<sup>2)</sup> См. Игнел и Скрайдж (C. Ignall, L. Schrage), Application of the Branch and Bound Method to some Flow-shop scheduling problems, J. O. R. S. A. 13, № 3 (1965), 400—412.

<sup>3)</sup> Джир (W. S. Gehr), Heuristics in Job-shop scheduling, Manag. Science 13, № 3 (1966), 167—190.

3) Рассматриваем все изделия, исключая  $P_j$ , и действуем, как указано в 1) и 2). Поступаем так, пока не исчерпаем все  $P_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Пример. Рассмотрим следующую матрицу  $\|\tau_{ij}\|$ :

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
$M_1$	20	10	14	12	12	18	25	15
$M_2$	25	8	11	10	15	12	20	20
	3	8	6	7	1	5	4	2

(59.1)

Наименьший элемент матрицы (59.1) есть  $\tau_{22} = 8$ . Он находится во второй строке, поэтому процесс надо заканчивать обработкой изделия  $P_2$ . Затем идет элемент  $\tau_{24} = 10$ , следовательно,

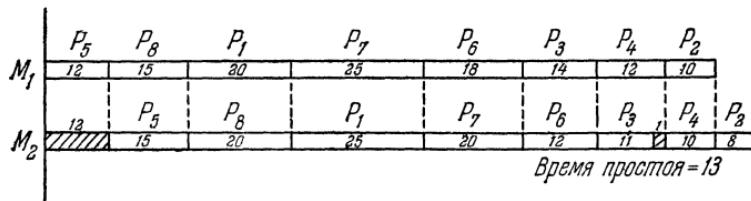


Рис. 390.

предпоследним нужно обрабатывать изделие  $P_4$ . Далее,  $\tau_{23} = 11$ , поэтому перед  $P_4$  должно проходить обработка изделие  $P_3$ . Так

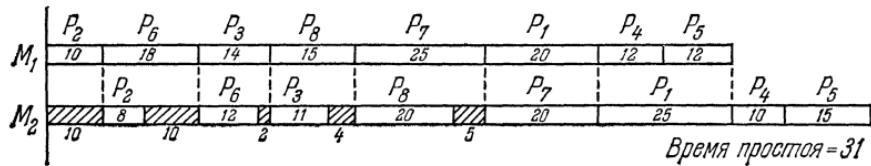


Рис. 391.

как затем  $\tau_{15} = \tau_{26} = 12$ , то начинать нужно с  $P_1$ , а  $P_6$  обрабатывать перед  $P_3$ . Точно так же определяется порядок прохождения остальных изделий.

Результат представлен на рис. 390.

На рис. 391 представлен результат другого упорядочения (всего их  $8! = 40320$ ):

Обоснование алгоритма. Пусть  $T$  — общее время, которое проходит с начала обработки первого изделия на станке  $M_1$  и до конца обработки последнего изделия на станке  $M_2$ . Фиксируем некоторый порядок прохождения изделий ( $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_p}, \dots, P_{i_n}$ ). Пусть  $X_{j_p}$  — время простоя второго станка  $M_2$

после окончания обработки  $P_{j_{p-1}}$  и до начала работы с изделием  $P_{j_p}$ . Тогда

$$T = \sum_{r=1}^n B_{I_r} + \sum_{r=1}^n X_{I_r}, \quad (59.2)$$

где

$$B_{I_r} = \tau_{2I_r}. \quad (59.3)$$

Так как  $B_{I_r}$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , известны, то для минимизации  $T$

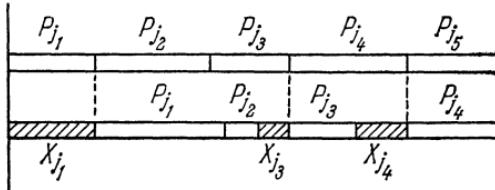


Рис. 392.

достаточно найти минимум  $\sum_{r=1}^n X_{I_r}$ . Обозначим также

$$A_{I_r} = \tau_{1I_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (59.4)$$

Очевидно, что (рис. 392)

$$X_{I_1} = A_{I_1}, \quad (59.5)$$

$$X_{I_2} = \begin{cases} A_{I_1} + A_{I_2} - B_{I_1} - X_{I_1}, & \text{если } A_{I_1} + A_{I_2} \geq B_{I_1} + X_{I_1}, \\ 0, & \text{если } A_{I_1} + A_{I_2} < B_{I_1} + X_{I_1}. \end{cases} \quad (59.6)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} X_{I_2} &= \max(A_{I_1} + A_{I_2} - B_{I_1} - X_{I_1}, 0) = \\ &= \max\left(\sum_{r=1}^2 A_{I_r} - \sum_{r=1}^1 B_{I_r} - \sum_{r=1}^1 X_{I_r}, 0\right). \end{aligned} \quad (59.7)$$

Для суммы  $X_{I_1} + X_{I_2}$  получаем

$$\begin{aligned} X_{I_1} + X_{I_2} &= X_{I_1} + \max(A_{I_1} + A_{I_2} - B_{I_1} - X_{I_1}, 0) = \\ &= \max(A_{I_1} + A_{I_2} - B_{I_1}, X_{I_1}) = \max(A_{I_1} + A_{I_2} - B_{I_1}, A_{I_1}) = \\ &= \max\left(\sum_{r=1}^2 A_{I_r} - \sum_{r=1}^1 B_{I_r}, A_{I_1}\right). \end{aligned} \quad (59.8)$$

Аналогично

$$X_{I_3} = \max\left(\sum_{r=1}^3 A_{I_r} - \sum_{r=1}^2 B_{I_r} - \sum_{r=1}^2 X_{I_r}, 0\right) \quad (59.9)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^3 X_{I_r} &= \max\left(\sum_{r=1}^3 A_{I_r} - \sum_{r=1}^2 B_{I_r}, \sum_{r=1}^2 X_{I_r}\right) = \\ &= \max\left(\sum_{r=1}^3 A_{I_r} - \sum_{r=1}^2 B_{I_r}, \sum_{r=1}^2 A_{I_r} - B_{I_1}, A_{I_1}\right). \end{aligned} \quad (59.10)$$

Эта формула легко переносится на  $n$  слагаемых:

$$D_n(S) = \sum_{r=1}^n X_{I_r} = \\ = \max \left( \sum_{r=1}^n A_{I_r} - \sum_{r=1}^{n-1} B_{I_r}, \sum_{r=1}^{n-1} A_{I_r} - \sum_{r=1}^{n-2} B_{I_r}, \dots, A_{I_1} \right), \quad (59.11)$$

или

$$D_n(S) = \max_{1 \leq a \leq n} \left( \sum_{r=1}^a A_{I_r} - \sum_{r=1}^{a-1} B_{I_r} \right). \quad (59.12)$$

Полагая

$$L_a = \sum_{r=1}^a A_{I_r} - \sum_{r=1}^{a-1} B_{I_r}, \quad (59.13)$$

имеем

$$D_n(S) = \max_{1 \leq a \leq n} L_a. \quad (59.14)$$

Обозначим теперь первоначальный порядок обработки изделий через  $S_1$ :

$$S_1 = (P_{I_1}, P_{I_2}, P_{I_3}, \dots, P_{I_{k-1}}, P_{I_k}, P_{I_{k+1}}, P_{I_{k+2}}, \dots, P_{I_n}), \quad (59.15)$$

а через  $S_2$  — порядок, в котором переставлены местами  $P_{I_k}$  и  $P_{I_{k+1}}$

$$S_2 = (P_{I_1}, P_{I_2}, P_{I_3}, \dots, P_{I_{k-1}}, P_{I_{k+1}}, P_{I_k}, P_{I_{k+2}}, \dots, P_{I_n}). \quad (59.16)$$

Значения  $L_a^{(1)}$  и  $L_a^{(2)}$ , полученные, исходя из порядков  $S_1$  и  $S_2$ , совпадают для всех  $a$ , кроме, быть может,  $a=k$  и  $a=k+1$ .

1) Имеем

$$D_n(S_1) = D_n(S_2), \quad (59.17)$$

если

$$\max(L_k^{(1)}, L_{k+1}^{(1)}) = \max(L_k^{(2)}, L_{k+1}^{(2)}). \quad (59.18)$$

2) Если

$$\max(L_k^{(1)}, L_{k+1}^{(1)}) \neq \max(L_k^{(2)}, L_{k+1}^{(2)}), \quad (59.19)$$

то один из двух порядков  $S_1$ ,  $S_2$  предпочтительнее. Порядок  $S_1$ , в котором  $P_{I_{k+1}}$  следует за  $P_{I_k}$ , предпочтительнее  $S_2$ , в котором  $P_{I_{k+1}}$  предшествует  $P_{I_k}$ , если

$$\max(L_k^{(1)}, L_{k+1}^{(1)}) < \max(L_k^{(2)}, L_{k+1}^{(2)}). \quad (59.20)$$

Так как

$$\max(L_k^{(1)}, L_{k+1}^{(1)}) = \max \left( \sum_{r=1}^k A_{I_r} - \sum_{r=1}^{k-1} B_{I_r}, \sum_{r=1}^{k+1} A_{I_r} - \sum_{r=1}^k B_{I_r} \right) \quad (59.21)$$

и

$$\begin{aligned} \max(L_k^{(2)}, L_{k+1}^{(2)}) &= \\ &= \max \left( \sum_{r=1}^{k-1} A_{I_r} + A_{I_{k+1}} - \sum_{r=1}^{k-1} B_{I_r}, \sum_{r=1}^{k+1} A_{I_r} - \sum_{r=1}^{k-1} B_{I_r} - B_{I_{k+1}} \right), \end{aligned} \quad (59.22)$$

то мы можем записать

$$\sum_{r=1}^{k-1} B_{I_r} - \sum_{r=1}^{k+1} A_{I_r} + \max(L_k^{(1)}, L_{k+1}^{(1)}) = \max(-A_{I_{k+1}}, -B_{I_k}) = -\min(A_{I_{k+1}}, B_{I_k}) \quad (59.23)$$

и

$$\sum_{r=1}^{k-1} B_{I_r} - \sum_{r=1}^{k+1} A_{I_r} + \max(L_k^{(2)}, L_{k+1}^{(2)}) = \max(-A_{I_k}, -B_{I_{k+1}}) = -\min(A_{I_k}, B_{I_{k+1}}). \quad (59.24)$$

Соотношение (59.20) перепишется тогда так:

$$-\min(A_{I_{k+1}}, B_{I_k}) < -\min(A_{I_k}, B_{I_{k+1}}) \quad (59.25)$$

или

$$\min(A_{I_k}, B_{I_{k+1}}) < \min(A_{I_{k+1}}, B_{I_k}). \quad (59.26)$$

Таким образом, порядок  $S_1$  предпочтительнее  $S_2$ , если

$$\min(A_{I_k}, B_{I_{k+1}}) < \min(A_{I_{k+1}}, B_{I_k}). \quad (59.27)$$

Рассмотрим теперь порядок

$$S' = (P_{I_1}, P_{I_2}, P_{I_3}, \dots, P_{I_k}, P_{I_l}, \dots, P_{I_n}). \quad (59.28)$$

Не следует изменять порядок  $S'$ , если для любой пары соседних индексов имеем

$$\min(A_{I_k}, B_{I_l}) \leq \min(A_{I_l}, B_{I_k}). \quad (59.29)$$

Это выполняется, если  $A_{I_k}$  меньше или равно  $B_{I_l}$ ,  $A_{I_l}$ ,  $B_{I_k}$ . В этом случае (59.29) равносильно

$$\min(A_{I_k}, B_{I_k}) \leq \min(A_{I_l}, B_{I_l}). \quad (59.30)$$

Отсюда следует, что если в матрице  $\|\tau_{ij}\|$  есть  $A_{I_k}$ , не превосходящее всех других  $A_{I_l}$  и  $B_{I_l}$ , то порядок обработки должен начинаться  $P_{I_k}$ ; такое  $A_{I_k}$  может равняться нескольким другим  $A_{I_l}$  или  $B_{I_l}$ , но (по (59.30)) это не препятствует выбору  $A_{I_k}$  в качестве начального элемента.

Соотношение (59.29) выполняется также, если  $B_{I_l}$  меньше или равно  $A_{I_k}$ ,  $B_{I_k}$ ,  $A_{I_l}$ . В этом случае оно равносильно

$$\min(A_{I_l}, B_{I_l}) \leq \min(A_{I_k}, B_{I_k}). \quad (59.31)$$

Следовательно, если в матрице  $\|\tau_{ij}\|$  есть  $B_{I_l}$ , не превосходящее всех других  $A_{I_k}$  и  $B_{I_k}$ , то порядок обработки должен заканчиваться  $P_{I_l}$ ; такое  $B_{I_l}$  может равняться нескольким другим  $A_{I_k}$  или  $B_{I_k}$ , но (по (59.31)) это не препятствует выбору  $B_{I_l}$  в качестве конечного элемента.

Тем самым мы показали, что, устанавливая по алгоритму Джонсона порядок прохождения изделий, мы действительно минимизируем время простоя станка  $M_2$ .

**Случай трех станков.** Алгоритм Джонсона применим и в этом случае, если

$$\min A_j \geq \max B_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (59.32)$$

или

$$\min C_j \geq \max B_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (59.33)$$

где  $C_j = \tau_{3j}$ .

Нахождение оптимального порядка производится с помощью сумм  $A_j + B_j$  и  $B_j + C_j$ .

Пример. Пусть в матрице (59.34) даны числа  $\tau_{1j}$ ,  $\tau_{2j}$ ,  $\tau_{3j}$ ,  $\tau_{1j} + \tau_{2j}$ ,  $\tau_{2j} + \tau_{3j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ :

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$\tau_{1j}$	7	11	8	7	6
$\tau_{2j}$	6	5	3	5	3
$\tau_{3j}$	4	12	7	8	3
$\tau_{1j} + \tau_{2j}$	13	16	11	12	9
$\tau_{2j} + \tau_{3j}$	10	17	10	13	6

(59.34)

Выполнено условие

$$\min_j (A_j) \geq \max_i (B_i), \quad (59.35)$$

так как  $\min A_j = 6$  и  $\max B_j = 6$ . Следовательно, можно

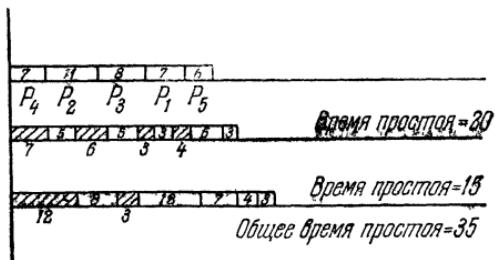


Рис. 393.

использовать алгоритм Джонсона. В качестве оптимального порядка получают одну из двух последовательностей

$$(P_4, P_2, P_3, P_1, P_5) \text{ или } (P_4, P_2, P_1, P_3, P_5), \quad (59.36)$$

для каждой из которых время простоя равно 35. Рис. 393 иллюстрирует полученный результат.

# УПРАЖНЕНИЯ

**59А.** Указать оптимальный порядок обработки изделий, используя алгоритм Джонсона, для следующих матриц  $\|\tau_{ij}\|$ :

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$M_1$	8	11	9	3	22	4
$M_2$	17	4	21	18	7	13

a)

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
$M_1$	13	2	14	7	4	9	8	21
$M_2$	20	3	4	12	10	2	17	3

b)

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$
$M_1$	3	9	11	4	10	3	3	11	9
$M_2$	11	17	9	3	8	5	17	3	3

c)

**59Б.** То же для следующих матриц (c) и (d), применяя алгоритм Джонсона, приспособленный к случаю трех станков.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$M_1$	9	11	7	8	14
$M_2$	5	3	2	6	6
$M_3$	7	17	3	1	18

c)

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$
$M_1$	12	11	6	4	7	21	3
$M_2$	7	4	8	2	3	8	9
$M_3$	11	10	10	9	17	21	13

d)

## § 60. Оптимизация потока в сети

**Транспортная сеть.** Пусть  $G = (\mathbf{E}, \Gamma) = (\mathbf{E}, \mathbf{U})$  — конечный граф без петель, для которого выполняются условия:

$$1) \quad (\exists ! X_0 \in \mathbf{E}) \Gamma^{-1} X_0 = \emptyset, \quad (60.1)$$

$$2) \quad (\exists ! X_N \in \mathbf{E}) \Gamma X_N = \emptyset, \quad (60.2)$$

3) каждой его дуге приписано значение

$$c(u) \geq 0, \quad u \in \mathbf{U}. \quad (60.3)$$

Такой граф называют *транспортной сетью*.  $X_0$  называют *входом* сети,  $X_N$  — *выходом*, а  $c(u)$  — *пропускной способностью* дуги  $u$ . На рис. 394 изображен график, являющийся транспортной сетью.

**Поток в транспортной сети.** Функцию  $\varphi(u)$ , определенную на множестве  $\mathbf{U}$ , называют *потоком* в транспортной сети, если:

$$1) \quad (\forall u \in \mathbf{U}) \varphi(u) \geq 0, \quad (60.4)$$

$$2) \quad (\forall X_t \neq X_0 \text{ и } \neq X_N) \sum_{u \in \mathbf{U}_{X_t}^-} \varphi(u) = \sum_{u \in \mathbf{U}_{X_t}^+} \varphi(u), \quad (60.5)$$

где  $\mathbf{U}_{X_i}^-$  — множество дуг, заходящих в  $X_i$ ,  $\mathbf{U}_{X_i}^+$  — множество дуг, исходящих из  $X_i$ ,

$$3) \quad (\forall u \in U) \varphi(u) \leq c(u). \quad (60.6)$$

Поток уподобляется количеству вещества, протекающему по дуге.

В силу (60.5) имеем

$$\left( \varphi_{X_0} = \sum_{u \in \mathbf{U}_{X_0}^+} \varphi(u) \text{ и } \varphi_{X_N} = \sum_{u \in \mathbf{U}_{X_N}^-} \varphi(u) \right) \Rightarrow (\varphi_{X_0} = \varphi_{X_N}). \quad (60.7)$$

**Разрез.** Для подмножества  $A \subset E$  такого, что  $x_0 \notin A$ , а  $x_N \in A$ , разрезом сети  $G = (E, U)$  называют множество  $\mathbf{U}_A^-$

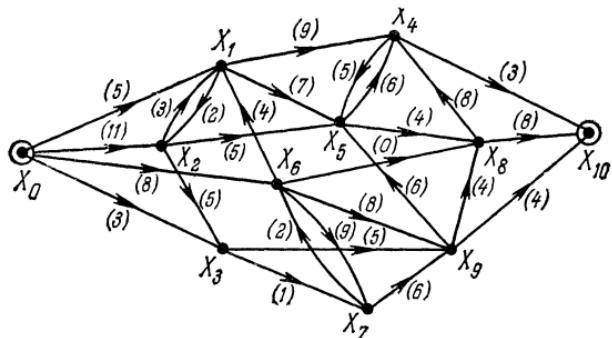


Рис. 394.

дуг, заходящих в  $A$ . Например, для сети на рис. 395, если взять

$$A = \{X_4, X_6, X_9, X_{10}\}, \quad (60.8)$$

то

$$\mathbf{U}_A^- = \{(X_0, X_6), (X_7, X_6), (X_3, X_9), (X_7, X_9), (X_1, X_4), (X_5, X_4), (X_8, X_4), (X_8, X_{10})\} \quad (60.9)$$

— разрез.

**Пропускная способность разреза.** Число

$$c(\mathbf{U}_A^-) = \sum_{u \in \mathbf{U}_A^-} c(u) \quad (60.10)$$

называют пропускной способностью разреза  $\mathbf{U}_A^-$ .

Например, для сети на рис. 395

$$c(\mathbf{U}_A^-) = 8 + 2 + 5 + 6 + 9 + 5 + 8 + 8 = 51. \quad (60.11)$$

Так как каждая частица вещества, движущаяся по сети от  $X_0$  к  $X_N$ , пройдет по крайней мере однажды по какой-нибудь дуге из  $\mathbf{U}_A^-$ , то, каковы бы ни были поток  $\varphi_{X_N}$  и разрез  $\mathbf{U}_A^-$ , всегда

$$\varphi_{X_N} \leq c(\mathbf{U}_A^-). \quad (60.12)$$

**Насыщенные дуги.** Дугу  $u \in U$  называют *насыщенной*, если

$$\varphi(u) = c(u). \quad (60.13)$$

**Задача о максимальном потоке.** Требуется определить такую функцию  $\varphi(u)$ ,  $u \in U$ , что  $\varphi_{X_N}$  принимает максимальное значение.

Для решения этой задачи нам понадобятся три теоремы. Для простоты записи положим

$$\varphi = \varphi_{X_N}. \quad (60.14)$$

**Теорема I.** Пусть  $\mu = (X_0, X_{i_1}, \dots, X_{i_n}, X_N)$  — путь, соединяющий вход  $X_0$  с выходом  $X_N$ . Если все дуги этого пути

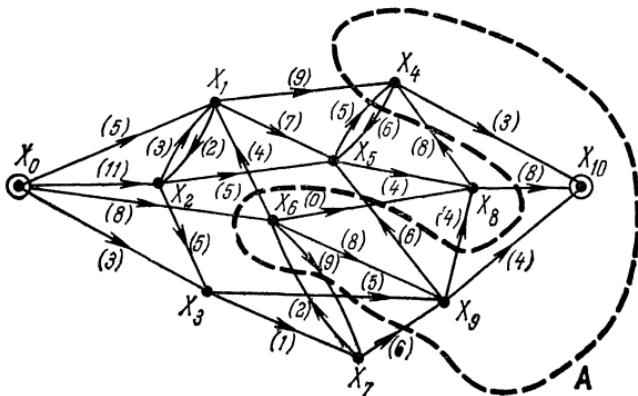


Рис. 395.

ненасыщенные, то можно увеличить  $\varphi$ , не нарушая соотношения (60.5).

Действительно, рассмотрим разности

$$\delta(u) = c(u) - \varphi(u) > 0 \quad (60.15)$$

и выберем среди них наименьшую  $\delta^*$ . Увеличивая на  $\delta^*$  поток в каждой дуге (что не нарушает соотношений (60.4) — (60.6)), приходим к потоку  $\varphi + \delta^*$ .

Пример (рис. 396 и 397). Рассмотрим путь  $\mu = (X_0, A, B, C, D, X_N)$  в транспортной сети на рис. 395. Пропускные способности дуг обозначены цифрами в скобках, а пропускные способности потока — цифрами вне скобок. Очевидно, что этот путь не содержит насыщенной дуги. Имеем

$$\delta(X_0, A) = 5 - 3 = 2, \quad \delta(A, B) = 8 - 5 = 3, \quad \delta(B, D) = 7 - 6 = 1,$$

$$\delta(D, C) = 9 - 2 = 7, \quad \delta(C, X_N) = 6 - 3 = 3, \quad \text{т. е. } \delta^* = \delta(B, D) = 1. \quad (60.16)$$

Итак, поток на каждой дуге этого пути и, следовательно, поток  $\varphi$  можно увеличить на единицу.

Пусть  $\bar{v} = \overline{(X_0, X_{j_1}, Y_{j_2}, \dots, X_{j_n}, X_n)}$  — цепь, соединяющая вход  $X_0$  с выходом  $X_N$ . Предположим, что она не является путем. Если ориентация дуги и совпадает с направлением прохождения цепи, то будем обозначать ее через  $\vec{u}$ , в противном случае — через  $\overset{\leftarrow}{u}$ .

Положим

$$\delta(\vec{u}) = c(\vec{u}) - \varphi(\vec{u}), \quad (60.17)$$

$$\varphi^* = \min_{\overset{\leftarrow}{u}} \varphi(\overset{\leftarrow}{u}), \quad (60.18)$$

$$\delta^* = \min_{\vec{u}} \delta(\vec{u}), \quad (60.19)$$

$$\varepsilon^* = \min[\varphi^*, \delta^*]. \quad (60.20)$$

**Теорема II.** Если  $\varepsilon^* > 0$ , то, увеличивая на  $\varepsilon^*$  поток на каждой дуге  $\vec{u}$  и уменьшая на  $\varepsilon^*$  поток на каждой дуге  $\overset{\leftarrow}{u}$  цепи  $\bar{v}$ , мы увеличим поток  $\varphi$  также на  $\varepsilon^*$ .

Цепь, для которой  $\varepsilon^* = 0$ , называют *насыщенной*.

**Пример** (рис. 398 и 399). Рассмотрим цепь  $\bar{v} = (X_0, H, A, J, K, L, D, R, X_N)$  транспортной сети на рис. 398. Имеем

$$\begin{aligned} \delta(X_0, \overset{\rightarrow}{H}) &= 4 - 2 = 2, & \varphi(\overset{\leftarrow}{A}, \overset{\rightarrow}{H}) &= 1, & \delta(\overset{\rightarrow}{A}, \overset{\rightarrow}{J}) &= 11 - 3 = 8, \\ \delta(\overset{\rightarrow}{J}, \overset{\rightarrow}{K}) &= 8 - 4 = 4, & \varphi(\overset{\leftarrow}{L}, \overset{\rightarrow}{K}) &= 9, & \varphi(\overset{\leftarrow}{D}, \overset{\rightarrow}{L}) &= 3, \\ \delta(\overset{\rightarrow}{D}, \overset{\rightarrow}{R}) &= 7 - 5 = 2, & \delta(\overset{\rightarrow}{R}, X_N) &= 6 - 4 = 2, \\ \varphi^* &= \min_{\overset{\leftarrow}{u}} \varphi(\overset{\leftarrow}{u}) = 1, & \delta^* &= \min_{\vec{u}} \delta(\vec{u}) = 2, & \min[\varphi^*, \delta^*] &= 1. \end{aligned} \quad (60.21)$$

Следовательно, поток  $\varphi$  можно увеличить на 1. Потоки на дугах  $\bar{v}$  таковы:

$$\begin{aligned} \varphi'(X_0, \overset{\rightarrow}{H}) &= 2 + 1 = 3, & \varphi'(\overset{\leftarrow}{A}, \overset{\rightarrow}{H}) &= 1 - 1 = 0, \\ \varphi'(\overset{\rightarrow}{A}, \overset{\rightarrow}{J}) &= 3 + 1 = 4, & \varphi'(\overset{\rightarrow}{J}, \overset{\rightarrow}{K}) &= 4 + 1 = 5, \\ \varphi'(\overset{\leftarrow}{L}, \overset{\rightarrow}{K}) &= 9 - 1 = 8, & \varphi'(\overset{\leftarrow}{D}, \overset{\rightarrow}{L}) &= 3 - 1 = 2, \\ \varphi'(\overset{\rightarrow}{D}, \overset{\rightarrow}{R}) &= 5 + 1 = 6, & \varphi'(\overset{\rightarrow}{R}, X_N) &= 4 + 1 = 5. \end{aligned} \quad (60.22)$$

Поток  $\varphi'$  увеличить нельзя, так как  $\varepsilon^* = 0$ .

**Полный поток.** Поток  $\varphi$  транспортной сети назовем *полным*, если любой путь, соединяющий  $X_0$  с  $X_N$ , содержит по крайней мере одну насыщенную дугу.

Иначе говоря, нельзя увеличить  $\varphi$ , рассматривая только пути; хотя это иногда можно сделать, рассматривая цепи, соединяющие  $X_0$  с  $X_N$ .

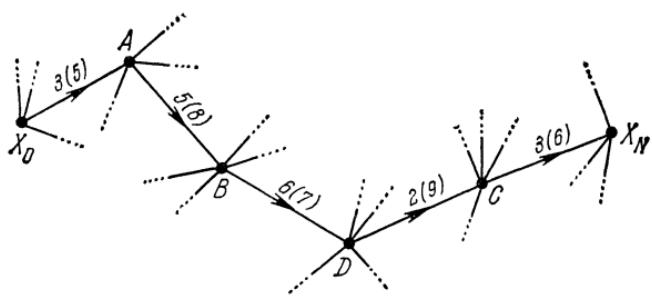


Рис. 396.

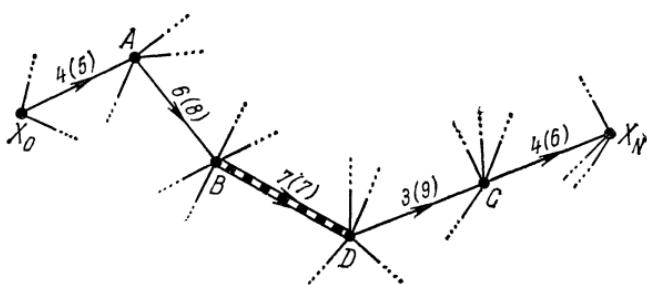


Рис. 397.

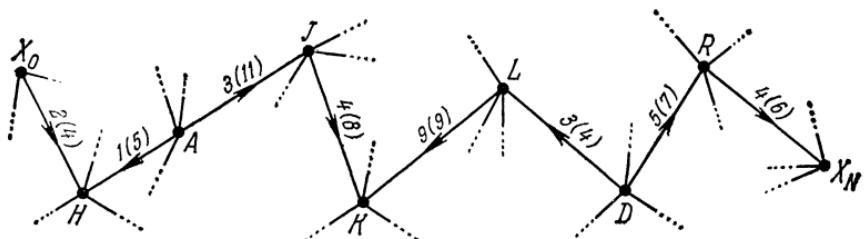


Рис. 398.

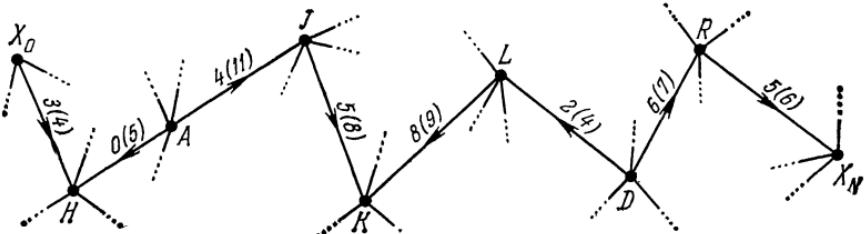


Рис. 399.

**Теорема III.** Если не существует цепи  $\hat{v}$  от  $X_0$  до  $X_N$  с  $\varepsilon^* > 0$ , то поток  $\varphi$  нельзя больше увеличить, т. е. он максимальный.

Действительно, исключая из транспортной сети все дуги, для которых  $\delta(u) = 0$  или  $\varphi(u) = 0$ , получаем по крайней мере два несвязных подграфа (в противном случае существовала бы ненасыщенная цепь, соединяющая  $X_0$  с  $X_N$ ). Множество вершин того из них, среди вершин которого содержится  $X_N$ , обозначим через  $A$ .

Очевидно, что  $A$  определяет разрез  $U_A^-$  и

$$\Phi_{X_N}^0 = \sum_{u \in U_A^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_A^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_A^-} c(u) + 0 = c(U_A^-). \quad (60.23)$$

Отсюда и из того, что общее количество вещества, входящего в  $A$ , не превосходит  $c(U_A^-)$ , заключаем, что все дуги  $u \in U_A^-$  насыщенные, т. е.  $\Phi_{X_N}^0$  — максимальный поток.

Из теорем I, II и III вытекает следующая основная теорема.

**Теорема IV** (теорема Форда — Фалкерсона). Для заданной транспортной сети максимальное значение потока равно минимальной пропускной способности разреза, т. е.

$$\max \Phi_{X_N} = \min_{A \mid X_0 \notin A, X_N \in A} c(U_A^-). \quad (60.24)$$

**Алгоритм Форда — Фалкерсона [43].** На этих теоремах основан следующий алгоритм для отыскания максимального потока в заданной транспортной сети. Этот алгоритм применим к любой транспортной сети. Для иллюстрации же наших рассуждений, мы ограничимся случаем антисимметрического графа на рис. 400.

1) *Отыскание какого-нибудь потока.* Строим некоторый поток  $\varphi$ , удовлетворяющий (60.4) — (60.6) (за  $\varphi$  можно принять и нулевой). На рис. 401 изображен поток  $\varphi$  для сети на рис. 400.

2) *Отыскание полного потока.* Если поток  $\varphi$  не полный, то в сети существует путь от  $X_0$  к  $X_N$ , все дуги которого не насыщены. Отыскиваем такой путь (в частичном графе, образованном ненасыщенными дугами). Увеличивая поток через дуги этого пути до насыщения по крайней мере одной из них, получаем новый поток  $\varphi'$ . Если  $\varphi'$  — не полный поток, то операция повторяется.

Таким образом, поток  $\varphi$ , не являющийся полным, всегда может быть увеличен до полного.

Например, пусть  $(X_0, X_2, X_6, X_1, X_4, X_8, X_{11})$  не содержит насыщенных дуг (на рис. 402 они выделены). Увеличение потока, проходящего через этот путь, на 1 приводит к насыщению дуг  $(X_2, X_6)$  и  $(X_4, X_8)$ . Получаем рис. 403. Находим другой путь  $(X_0, X_3, X_6, X_1, X_5, X_8, X_{11})$ , все дуги которого не насыщены.

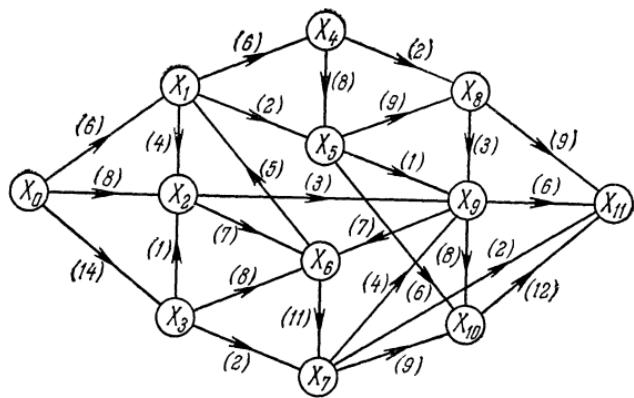


Рис. 400.

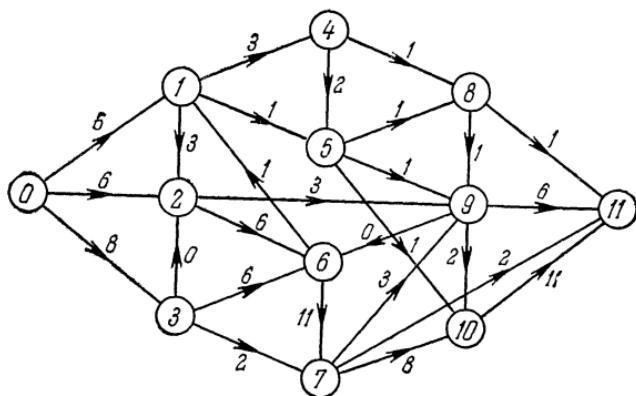


Рис. 401.

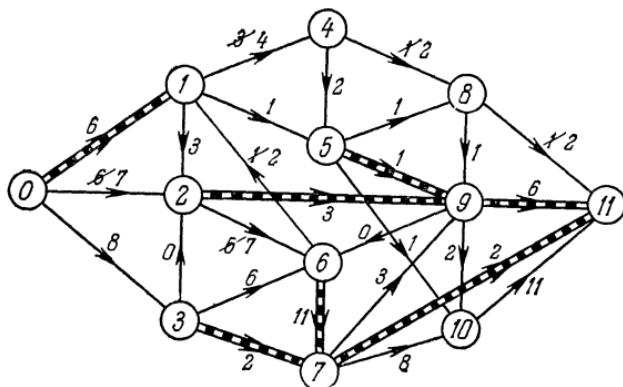


Рис. 402.

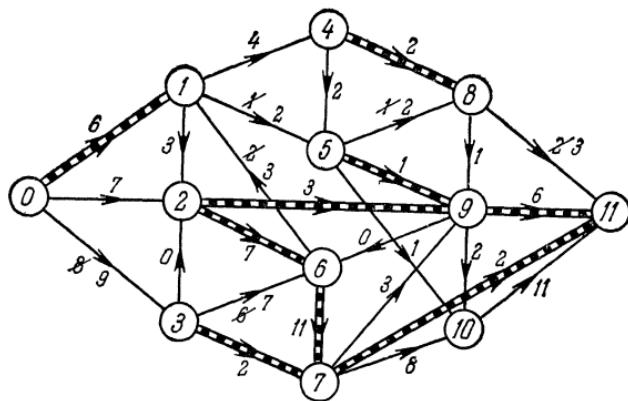


Рис. 403

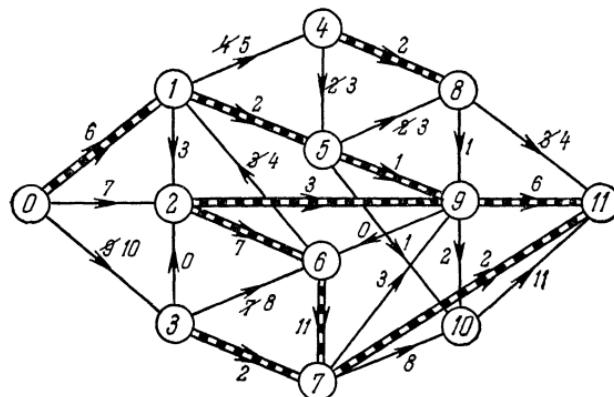


Рис. 404

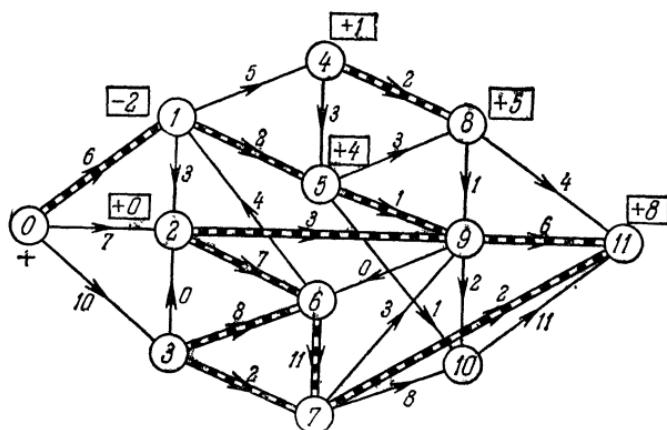


Рис. 405.

Увеличение на 1 потока, проходящего по этому пути, приводит к насыщению  $(X_1, X_5)$  (рис. 404). Наконец, находим путь  $(X_0, X_3, X_6, X_1, X_4, X_5, X_8, X_{11})$ , все дуги которого также не насыщены. Увеличение потока, проходящего по этому пути, приводит к насыщению  $(X_3, X_6)$ . Получаем рис. 405. Легко видеть, что поток на рис. 405 полный.

3) Отыскание максимального потока  $\varphi$ . Следующий прием, основанный на теореме II, позволяет увеличить полный поток  $\varphi$  до максимального (если это возможно).

а) Помечаем  $X_0$  символом «+».

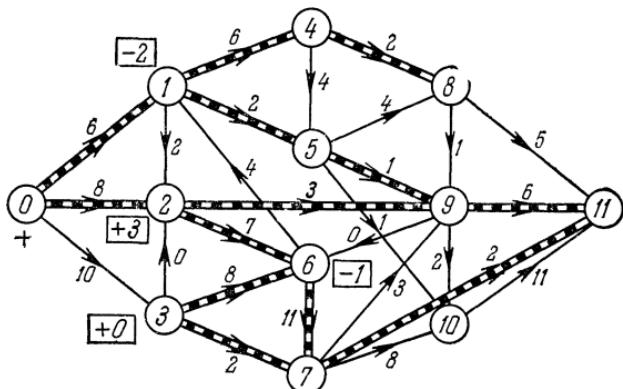


Рис. 406.

б) Если  $X_i$  — помеченная вершина, то помечаем символом  $[+X_i]$  все непомеченные вершины  $X$ , для которых дуги  $(X_i, X)$  ненасыщенные; помечаем символом  $[-X_i]$  все непомеченные вершины  $X$ , для которых  $\varphi(X, X_i) > 0$ .

в) Если таким способом нам удается пометить выход  $X_N$ , то это означает, что существует цепь, идущая от  $X_0$  к  $X_N$ , все вершины которой помечены. Вычисляя  $\varepsilon^*$  по формулам (60.17) — (60.20) и полагая (для дуг этой цепи).

$$\varphi'(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \varphi'(\overleftarrow{u}) = \varphi(\overleftarrow{u}) - \varepsilon^*,$$

мы увеличиваем полный поток  $\varphi$  на  $\varepsilon^*$ .

Процедура повторяется до тех пор, пока удается пометить выход  $X_N$ . Когда этого сделать уже нельзя, по теореме III поток в транспортной сети будет максимальным.

Возвращаясь к примеру (см. рис. 405),  $X_0$  помечаем символом «+»,  $X_2$  — символом  $[+X_0]$  (для простоты записи — символом  $[+0]$ ),  $X_1$  — символом  $[-2]$ ,  $X_4$  — символом  $[+1]$ ,  $X_5$  — символом  $[+4]$ ,  $X_8$  — символом  $[+5]$ ,  $X_{11}$  — символом  $[+8]$ . Выписываем цепь  $(X_0, X_2, X_1, X_4, X_5, X_8, X_{11})$ . Имеем

$$\delta(X_0, \vec{X}_2) = 1, \quad \varphi(\vec{X}_1, X_2) = 3, \quad \delta(\vec{X}_1, X_4) = 1,$$

$$\delta(\vec{X}_4, X_5) = 5, \quad \delta(\vec{X}_5, \vec{X}_8) = 6, \quad \delta(\vec{X}_8, \vec{X}_{11}) = 5,$$

т. е.  $\varphi^* = 3$ ,  $\delta^* = 1$  и  $\varepsilon^* = 1$ . Уменьшаем на 1 поток через  $(X_1, X_2)$  и увеличиваем на 1 потоки через остальные дуги этой цепи (рис. 406). Повторяем процедуру.  $X_0$  помечаем символом «+»,  $X_3$  — символом  $[+0]$ ,  $X_2$  — символом  $[+3]$ ,  $X_1$  — символом  $[-2]$ ,  $X_6$  — символом  $[-1]$ . Так как ни одну из оставшихся вершин нельзя пометить, то поток максимален (рис. 406). Подмножеству непомеченных вершин

$$A = \{X_4, X_5, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}\}$$

(рис. 407) отвечает разрез

$$\{(X_1, X_4), (X_1, X_5), (X_2, X_9), (X_6, X_7), (X_3, X_7)\}$$

с пропускной способностью  $6 + 2 + 3 + 11 + 2 = 24$ .

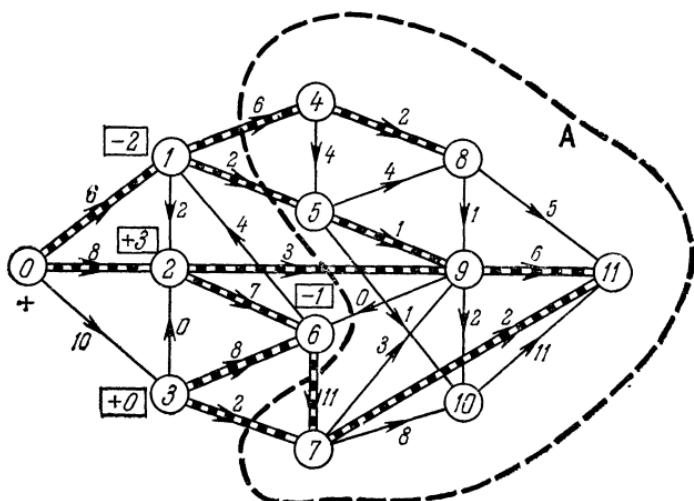


Рис. 407.

**З а м е ч а н и е.** Так как транспортная сеть не является симметрическим графом, то не следует пытаться заменить пару дуг  $(A, B)$  и  $(B, A)$  одной дугой с пропускной способностью, равной разности пропускных способностей этих дуг и имеющей направление, совпадающее с направлением дуги с большей пропускной способностью.

Например, нельзя делать так, как это показано на рис. 408; если граф на рис. 408, *a* свести к графу на рис. 408, *в*, то допустимый для графа на рис. 408, *а* поток, представленный на рис. 408, *б*, нельзя получить, исходя из графа на рис. 408, *в*.

**Отыскание минимального потока.** Требуется найти в транспортной сети «поток» наименьшей величины, удовлетворяющий (наряду с (60.5)) условию

$$(\forall u \in U) \varphi(u) \geq c(u). \quad (60.25)$$

Можно использовать алгоритм Форда — Фалкерсона, видоизменив его соответствующим образом. Говорят, что поток полный, если любой путь, идущий от  $X_0$  к  $X_N$ , содержит по крайней мере одну дугу  $u$ , для которой  $\varphi(u) = c(u)$ .

Опишем алгоритм.

1) Определяем некоторый поток с тем условием, что  $(\forall u \in U) \varphi(u) \geq c(u)$ .

2) Уменьшая значения потоков через дуги путей, идущих от  $X_0$  к  $X_N$ , отыскиваем полный поток.

3) Отыскиваем минимальный поток  $\varphi$  по следующим правилам.

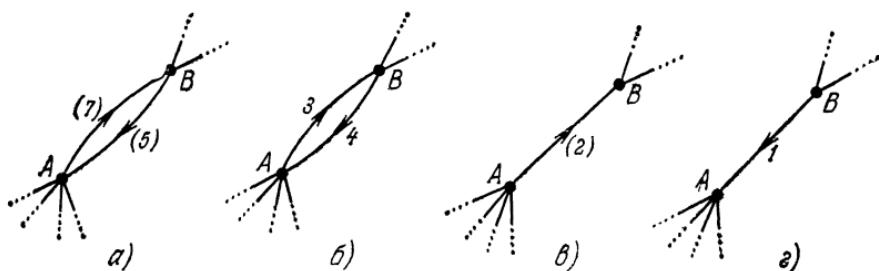


Рис. 408.

а) Помечаем  $X_0$  символом «+».

б) Пусть вершина  $X_i$  помечена. Помечаем символом  $[+X_i]$  любую непомеченную вершину  $X_j$ , если существует дуга  $(X_i, X_j)$  и  $\varphi(X_i, X_j) > c(X_i, X_j)$ . Помечаем символом  $[-X_i]$  любую непомеченную еще вершину  $X_j$ , если существует дуга  $(X_j, X_i)$ .

в) Если таким способом удается пометить  $X_N$ , то можно уменьшить поток через цепь, идущую от  $X_0$  до  $X_N$ .

Повторяют 3) до тех пор, пока возможно пометить  $X_N$ . Полученный поток будет минимальным (в чем легко убедиться, отыскивая разрез множества непомеченных вершин, исключая  $X_0$ ).

Пример (рис. 409). В качестве исходного выберем поток со значением 74 (рис. 410). Действуя по правилу 2), приходим к полному потоку со значением 39, который изображен на рис. 411. Действуя по 3), замечаем, что поток вдоль цепи  $(X_0, X_2, X_1, X_4, X_6, X_3, X_7, X_8)$  можно уменьшить на 2. Увеличивая на 2 поток через дугу  $(X_2, X_1)$  и уменьшая на 2 потоки через остальные дуги этой цепи, приходим к рис. 412. Легко проверить, что теперь уже невозможно пометить  $X_N$ . Получаем минимальный поток со значением 37. Разрез для множества

$$A = \{X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$$

подтверждает это.

**Другой метод для отыскания минимального потока.** Можно действовать также следующим образом.

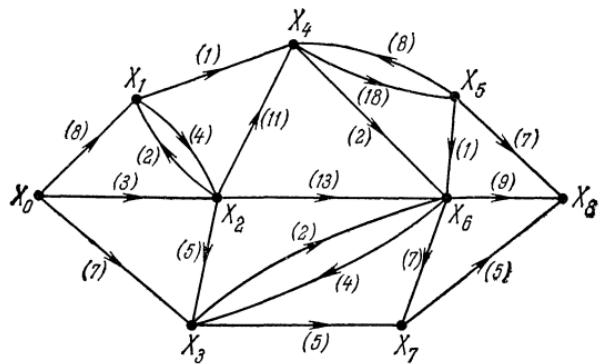


Рис. 409.

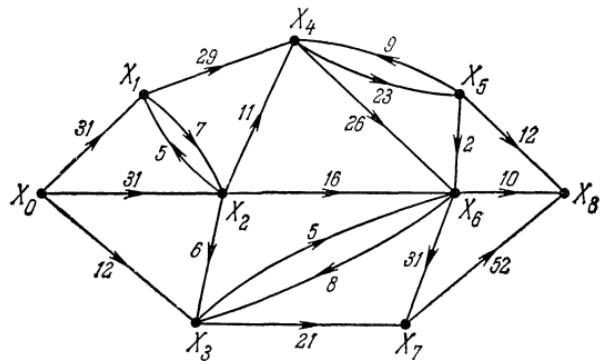


Рис. 410

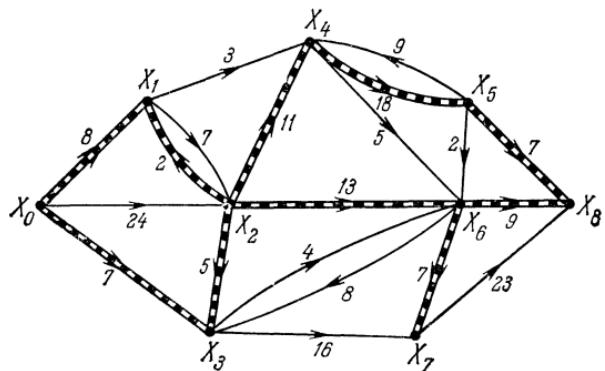


Рис. 411.

1) Отыскивают такой поток  $\varphi^{(1)}$ , что

$$(\forall u \in U) \varphi^{(1)}(u) \geq c(u). \quad (60.26)$$

2) Полагают

$$c'(u) = \varphi^{(1)}(u) - c(u) \quad (60.27)$$

и находят по слегка видоизмененному алгоритму Форда — Фалкерсона такой поток  $\varphi^{(2)}$ , что

$$(\forall u \in U) \varphi^{(2)}(u) \leq c'(u). \quad (60.28)$$

Изменение следующее: если  $X_i$  — помеченная вершина, то помечают символом  $[-X_i]$  любую непомеченную вершину  $X_j$ , если существует дуга  $(X_j, X_i)$ . Уменьшают поток через дугу

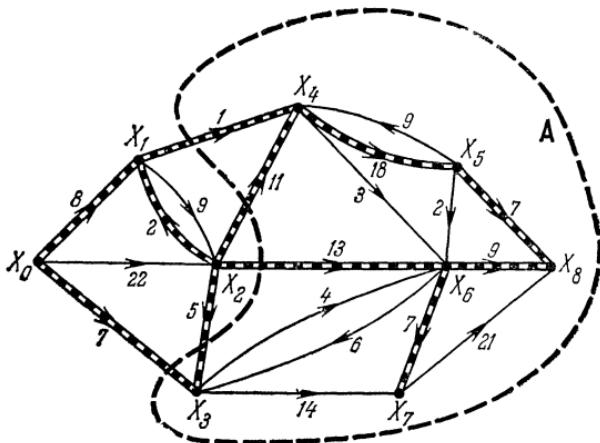


Рис. 412.

$(X_j, X_i)$  даже в том случае, если этот поток нулевой. Допускают также отрицательные потоки, что нарушает условие неотрицательности (60.4). Поток

$$\varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \quad (60.29)$$

— искомый минимальный поток.

Пример. Требуется найти такой поток  $\varphi_{X_6}$  в транспортной сети на рис. 413, что  $\varphi(u) \geq c(u)$  и  $\varphi_{X_6}$  принимает минимальное значение. На рис. 414 определен такой поток  $\varphi_{X_6}^{(1)}$ , что  $\varphi^{(1)}(u) \geq c(u)$ , а на рис. 415 указаны пропускные способности  $c'(u) = \varphi^{(1)}(u) - c(u)$ . Ищем в этой новой транспортной сети некоторый поток  $\varphi'_{X_6}$  такой, что  $\varphi'(u) \leq c'(u)$  (рис. 416). Затем находим такой максимальный поток  $\varphi_{X_6}^{(2)}$ , что  $\varphi^{(2)}(u) \leq c'(u)$  (рис. 417). На рис. 418 изображен минимальный поток в сети на рис. 413 со значением 29. Мы не вводили отрицательных потоков. Дадим другой пример, иллюстрирующий необходимость введенной выше модификации.

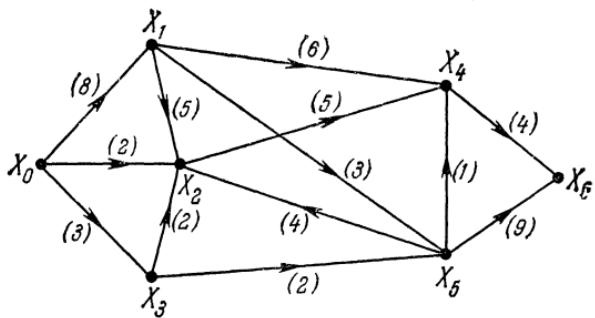


Рис. 413.

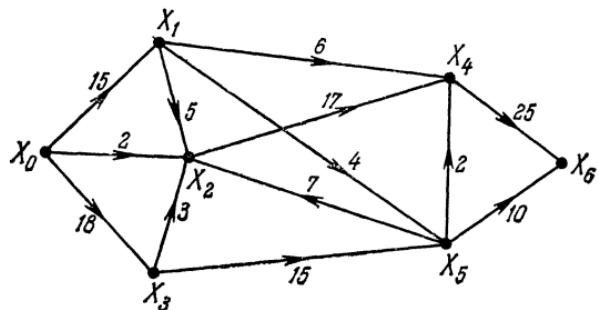


Рис. 414. Поток  $\varphi_{X_6}^{(1)}$  такой, что  $\varphi^{(1)}(u) \geq c(u)$ .

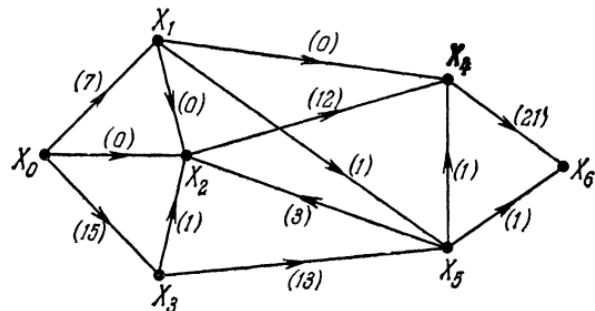


Рис. 415. Пропускные способности  $c'(u) = \varphi^{(1)}(u) - c(u)$ .

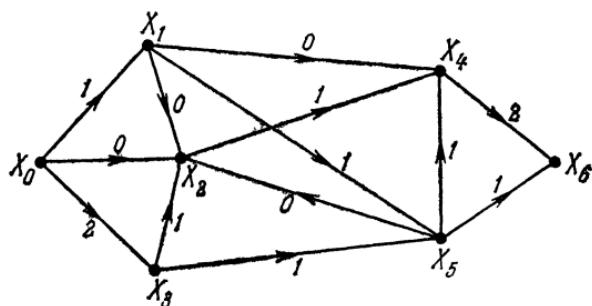


Рис. 416. Потоки  $\varphi'(u) \leq c'(u)$ .

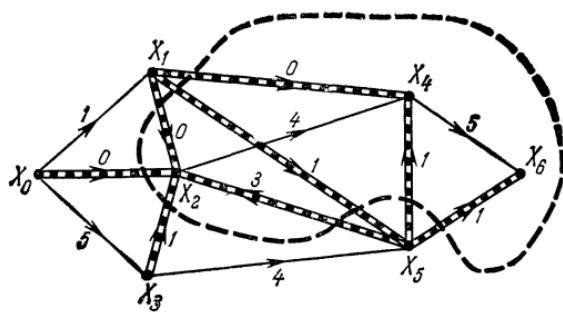


Рис. 417. Максимальный поток  $\Phi_{X_6}^{(2)}$  такой, что  $\Phi^{(2)}(u) \leq c'(u)$ .

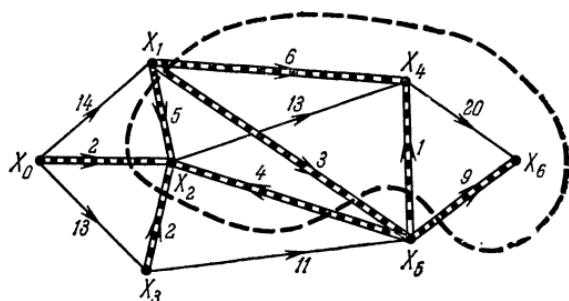


Рис. 418. Минимальный поток  $\Phi_X = \Phi_{X_5}^{(1)} - \Phi_{X_6}^{(2)}$ .

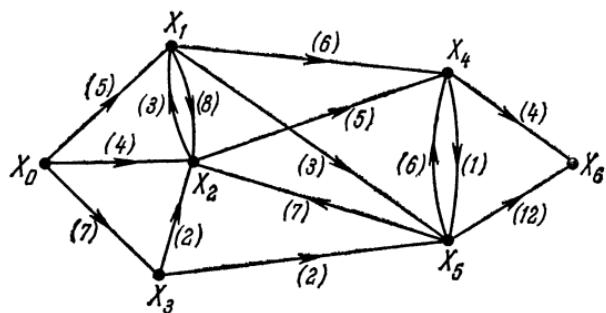


Рис. 419. Пропускные способности  $c(u)$ .

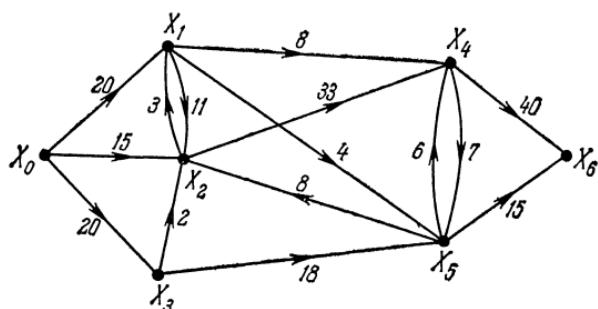


Рис. 420. Поток  $\Phi^{(1)}$  такой, что  $\Phi^{(1)}(u) \geq c(u)$ .

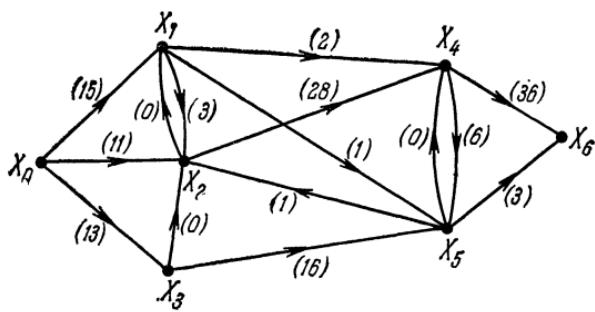


Рис. 421. Пропускная способность  $c'(u) = \varphi^{(1)}(u) - c(u)$ .

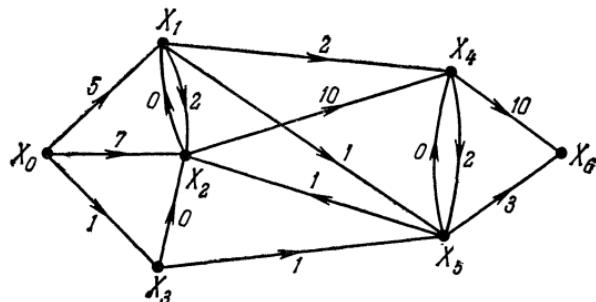


Рис. 422. Потоки  $\varphi'(u) \leq c'(u)$ .

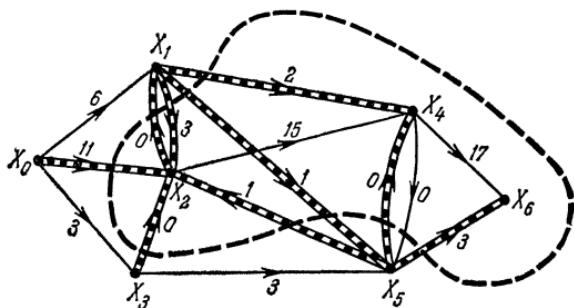


Рис. 423. Максимальный поток  $\varphi^{(2)}$  такой, что  $\varphi^{(2)}(u) \leq c'(u)$ .

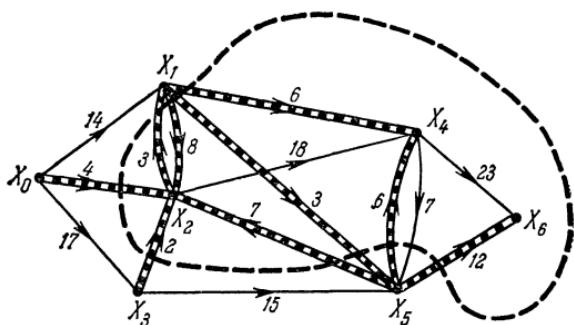


Рис. 424. Поток  $\varphi_{X_6} = \varphi_{X_6}^{(1)} - \varphi_{X_6}^{(2)} = 35$ .

Рассмотрим на этот раз транспортную сеть на рис. 419. Приводя вычисления, которым отвечают рис. 420—424 (не вводя отрицательных потоков), получаем минимальный поток со значением 35.

Введем теперь отрицательные потоки на сети, изображенной на рис. 419.

Рассматривая цепь  $(X_0, X_1, X_2, X_4, X_6)$ , изменим потоки  $\varphi(X_0, X_1)$  с 6 до 15,  $\varphi(X_1, X_2)$  с 0 до 9,  $\varphi(X_2, X_4)$  с 15 до 24,  $\varphi(X_4, X_6)$  с 17 до 26. Рассмотрим теперь цепь  $(X_0, X_3, X_5, X_4, X_6)$ ; можно увеличить поток на 10, допуская отрицательный поток со значением — 10 через дугу  $(X_4, X_5)$ . Окончательно приходим к минимальному потоку со значением 16 (рис. 425).

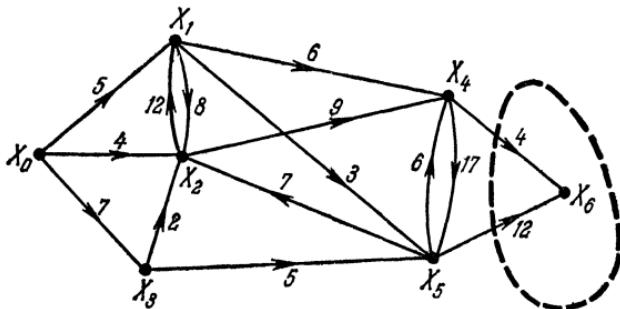


Рис. 425. Минимальный поток: 16.

**Условия существования потока, насыщающего дуги, инцидентные выходу сети.** Пусть  $X_0$  и  $X_N$  — соответственно вход и выход транспортной сети, пропускные способности дуг которой строго больше нуля, т. е.  $(\forall u \in U) c(u) > 0$ . Существует ли такой поток  $\varphi_{X_N}^0$ , что

$$(\forall X_i \neq X_N, \forall X_j \neq X_N \text{ и } (X_i, X_j) \in U) \quad \varphi^0(X_i, X_j) \leq c(X_i, X_j) \quad (60.30)$$

$$\text{и } (\forall X_i \neq X_N \text{ и } (X_i, X_N) \in U) \quad \varphi^0(X_i, X_N) = c(X_i, X_N) \quad (60.31)$$

Другими словами, существует ли поток, насыщающий дуги  $(X_i, X_N)$ ? К этому приводят многие комбинаторные задачи (о паросочетании, назначении и т. д.). В частности, интересно получить условия существования потока, насыщающего дуги, инцидентные выходу. Рассмотрим некоторые из них.

Называют *потребностью подмножества  $A \subset E$*  или *пропускной способностью выхода транспортной сети* число

$$d(A) = \sum_{X_i \in A} d(X_i), \quad (60.32)$$

где

$$d(X_i) = \begin{cases} c(X_i, X_N), & \text{если } X_i \in \Gamma^{-1}\{X_N\}, \\ 0, & \text{если } X_i \notin \Gamma^{-1}\{X_N\}. \end{cases} \quad (60.33)$$

Число  $d(X_i)$  называют *потребностью вершины*  $X_i$ . Это число можно рассматривать также как верхнюю границу потока через дугу  $(X_i, X_N)$ , если он существует (в противном случае эта граница равна нулю), а  $d(\mathbf{A})$  — как верхнюю границу потоков через дуги  $(X_i, X_N)$ ,  $X_i \in \mathbf{A}$ .

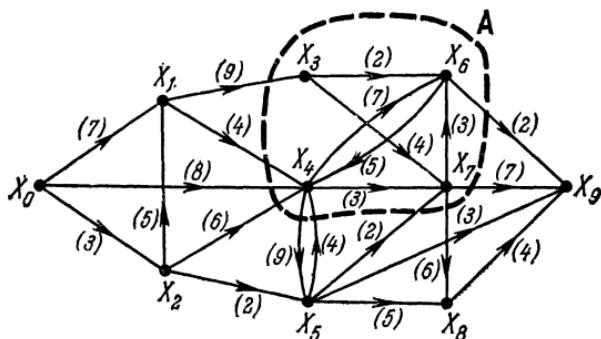


Рис. 426. Все пропускные способности дуг равны 1.

Например (рис. 426), потребность множества  $\mathbf{A} = \{X_3, X_4, X_6, X_7\}$  равна

$$d(\mathbf{A}) = d(X_3) + d(X_4) + d(X_6) + d(X_7) = 0 + 0 + 2 + 7 = 9. \quad (60.34)$$

Обозначим через  $F(\mathbf{A})$  весь поток, который может войти в  $\mathbf{A}$  (после удаления дуг множества  $\mathbf{U}_\mathbf{A}^+$ ).

Теорема V. Обозначим  $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \{X_0, X_N\}$  и рассмотрим подмножество  $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ . Тогда

$$c(\mathbf{U}_\mathbf{A}^-) \geq d(\mathbf{A}) \Rightarrow F(\mathbf{A}_0) \geq d(\mathbf{A}_0). \quad (60.35)$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ . Стягивая подграф, порожденный  $\mathbf{A}_0$ , в одну вершину  $Z$  и удаляя затем дуги множества  $\mathbf{U}_Z^+$ , мы получим новую сеть с выходом  $Z$ . По теореме Форда — Фалкерсона (см. (60.24)) для этой сети имеем

$$\min_{\mathbf{W}} c(\mathbf{W}) = \max_{\mathbf{W}} \varphi_Z = F(\mathbf{A}_0). \quad (60.36)$$

Пусть  $\mathbf{W}_0$  — минимальный разрез; он определяется некоторым множеством  $\mathbf{A}$  исходной сети (для которого  $X_0 \notin \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \supset \mathbf{A}_0$ ,  $X_N \notin \mathbf{A}$ ). Согласно (60.36)

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{U}_\mathbf{A}^-, \quad (60.37)$$

откуда

$$F(\mathbf{A}_0) = c(\mathbf{W}_0) = c(\mathbf{U}_\mathbf{A}^-) \geq d(\mathbf{A}) \geq d(\mathbf{A}_0). \quad (60.38)$$

**Теорема VI. Условие**

$$(\forall \mathbf{A} \subset \tilde{\mathbf{E}}) c(\mathbf{U}_{\mathbf{A}}^-) \geq d(\mathbf{A}) \quad (60.39)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы в заданной транспортной сети существовал поток  $\Phi_{X_N}^0$ , удовлетворяющий условию  $\Phi^0(u) \leq c(u)$  и насыщающий дуги, идущие в  $X_N$ .

Доказательство. Условие необходимо. Предположим, что существует поток, насыщающий дуги, ведущие в  $X_N$ . Тогда

$$(\forall \mathbf{A} \subset \tilde{\mathbf{E}}) c(\mathbf{U}_{\mathbf{A}}^-) \geq F(\mathbf{A}) \geq d(\mathbf{A}). \quad (60.40)$$

Условие достаточно. Действительно, пусть неравенства (60.39) выполняются. Рассмотрим произвольный разрез  $\mathbf{W}$ , определяемый множеством  $\mathbf{S}$  ( $X_0 \notin \mathbf{S}$ ,  $X_N \in \mathbf{S}$ ). Полагая  $\mathbf{A} = \mathbf{S} - \{X_N\}$ , по теореме V имеем

$$\begin{aligned} d(\mathbf{A}) &\leq F(\mathbf{A}) \leq c(\mathbf{U}_{\mathbf{A}}^-) = c(\mathbf{U}_{\mathbf{S}}^-) - \sum_{X_i \notin \mathbf{A}} c(X_i, X_N) = \\ &= c(\mathbf{W}) - d(\mathbf{E} - \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (60.41)$$

Отсюда

$$c(\mathbf{W}) \geq d(\mathbf{A}) + d(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = d(\mathbf{E}). \quad (60.42)$$

Следовательно, максимальный поток  $\Phi_{X_N}^0$  удовлетворяет условию

$$\Phi_{X_N}^0 = \min_{\mathbf{W}} c(\mathbf{W}) \geq d(\mathbf{E}), \quad (60.43)$$

т. е. насыщает все дуги, инцидентные  $X_N$ .

**Теорема VII (теорема о насыщении). Условие**

$$(\forall \mathbf{E}_i \subset \Gamma^{-1}\{X_N\}) F(\mathbf{E}_i) \geq d(\mathbf{E}_i) \quad (60.44)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы в заданной транспортной сети существовал поток  $\Phi_{X_N}^0$ , удовлетворяющий условию  $\Phi^{(0)}(u) \leq c(u)$  и насыщающий дуги, идущие в  $X_N$ .

Доказательство. Это — следствие теоремы VI.

Покажем, что условия (60.39) и (60.44) эквивалентны.

1)  $(60.39) \Rightarrow (60.44)$ , так как в силу теоремы V

$$(\forall \mathbf{A} \subset \tilde{\mathbf{E}}) F(\mathbf{A}) \geq d(\mathbf{A}), \quad (60.45)$$

откуда, в частности,

$$(\forall \mathbf{E}_i \subset \Gamma^{-1}\{X_N\} \subset \tilde{\mathbf{E}}) F(\mathbf{E}_i) \geq d(\mathbf{E}_i). \quad (60.46)$$

2)  $(60.44) \Rightarrow (60.39)$ , так как, рассматривая множество  $\mathbf{A} \subset \tilde{\mathbf{E}}$  и полагая  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{A} \cap \Gamma^{-1}\{X_N\}$ , имеем

$$d(\mathbf{A}) = d(\tilde{\mathbf{E}}) \leq F(\tilde{\mathbf{E}}) \leq F(\mathbf{A}). \quad (60.47)$$

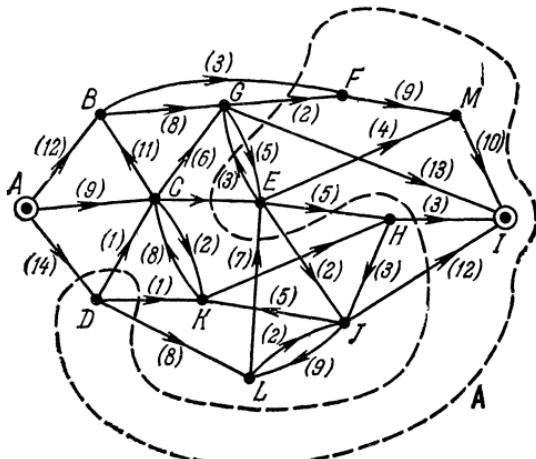
Эта теорема была доказана Гейлом ([8]) (см. также [9]). В следующем параграфе она будет использоваться при изучении свойств паросочетаний простого графа.

**Другие задачи о потоке.** В некоторых задачах о потоке требуется найти максимальный (или минимальный) поток, удовлетворяющий условию  $\phi(u) \in \mathbf{C}(u)$ .  $\mathbf{C}(u)$  может быть или множеством значений, приписанных дугам, или множеством целых положительных чисел, или множеством интервалов  $[c(u_1), c(u_2)]$ . Такого рода задачи можно найти в [8], [9], [43].

### УПРАЖНЕНИЯ

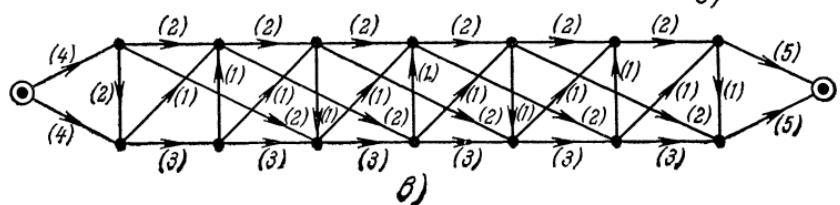
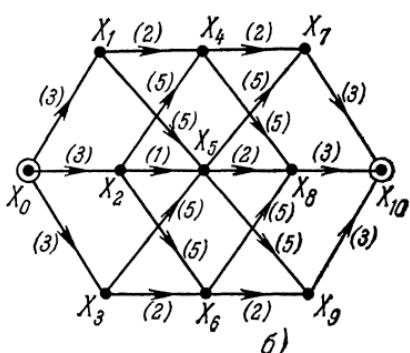
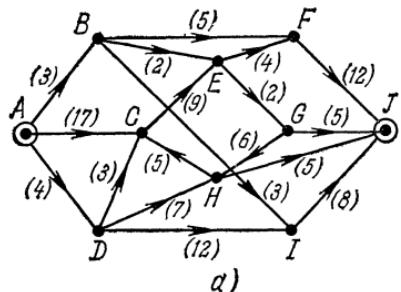
**60А.** Найти пропускные способности разрезов, определяемых множествами  $\{D, E, F, M, I\}$ ,  $\{B, G, E, I, J\}$ ,  $\{C, E, H, I\}$

для транспортной сети, приведенной ниже.



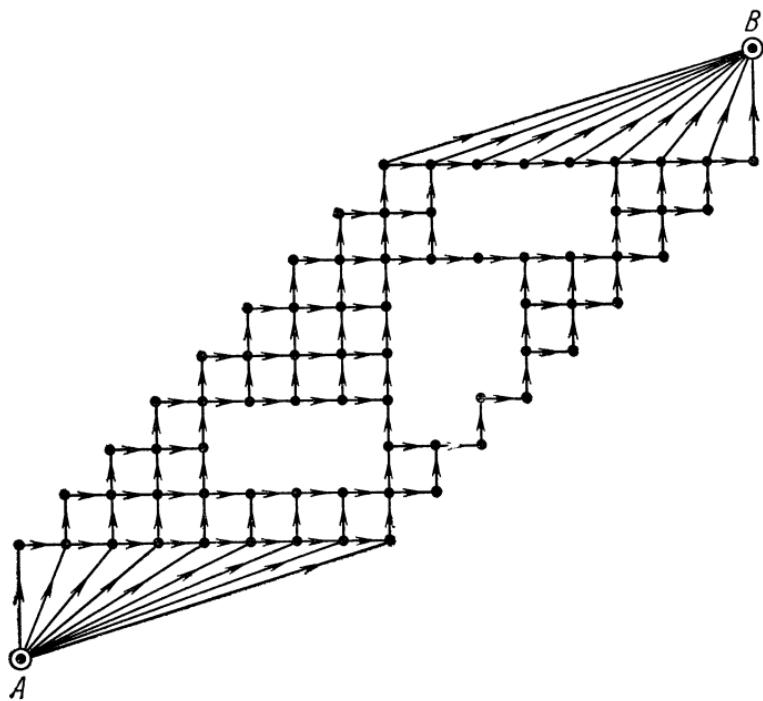
**60Б.** Отыскать максимальный поток в транспортной сети из упражнения 60А.

**60В.** Определить максимальные потоки в транспортных сетях а), б) и в):



**60Г.** Определить минимальные потоки в транспортных сетях б) и в) из упражнения 60В

**60Д.** Определить максимальный поток в следующем графе, все пропускные способности дуг которого равны 1.



## § 61. Простой граф. Покрытие. Паросочетание

**Простой граф.** Простым графом называют такой граф  $G = (X \cup Y, \Gamma)$ , что

$$1) \quad X \cap Y = \emptyset, \quad (61.1)$$

$$2) \quad (\forall X_i \in X) \Gamma X_i \subset Y \quad \text{или} \quad \Gamma X_i = \emptyset, \quad (61.2)$$

$$3) \quad (\forall Y_j \in Y) \Gamma Y_j = \emptyset. \quad (61.3)$$

Например, на рис. 427 изображен такой граф (на рис. 428 дано его представление с помощью булевой матрицы).

Простой граф можно определить также как многозначное отображение  $\Gamma$  конечного множества  $X$  в конечное множество  $Y$  (возможно  $X = Y$ ).

Простой граф будем обозначать  $G = (X, Y, \Gamma)$ .

**Покрытие простого графа.** Покрытием простого графа  $G = (X, Y, \Gamma) = (X, Y, U)$  называют такое подмножество дуг  $W \subset U$ , что любая вершина графа инцидентна по крайней мере одной дуге из  $W$ ,

Для того чтобы простой граф обладал покрытием, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$(\forall X_i \in \mathbf{X}) \Gamma X_i \neq \emptyset, \quad (61.4)$$

$$(\forall Y_j \in \mathbf{Y}) \Gamma^{-1} Y_j \neq \emptyset. \quad (61.5)$$

Например, множество

$$\mathbf{W} = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_4), (X_3, Y_2), (X_4, Y_3), (X_5, Y_4), (X_5, Y_5), (X_6, Y_3)\} \quad (61.6)$$

— покрытие простого графа на рис. 429 (на рис. 430 и 431 оно выделено).

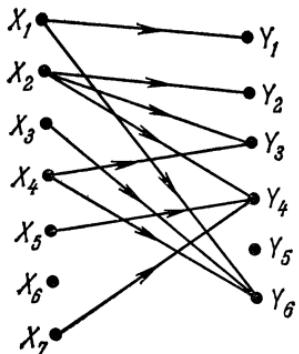


Рис. 427.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	1	0	0	0	0	1
$X_2$	0	1	1	1	0	0
$X_3$	0	0	0	0	0	1
$X_4$	0	0	1	0	0	1
$X_5$	0	0	0	1	0	0
$X_6$	0	0	0	0	0	0
$X_7$	0	0	0	1	0	0

Рис. 428.

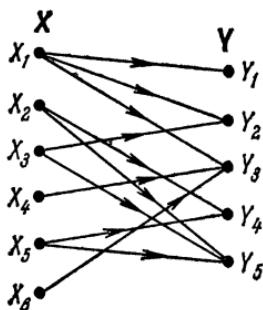


Рис. 429.

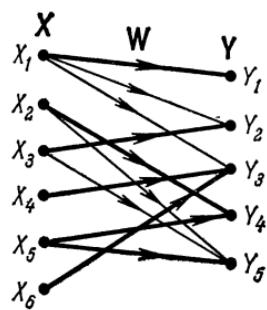


Рис. 430.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$
$X_1$	1	1	1	0	0
$X_2$	0	0	0	1	1
$X_3$	0	1	0	0	1
$X_4$	0	0	1	0	0
$X_5$	0	0	0	1	1
$X_6$	0	0	1	0	0

Рис. 431.

Исходя из булева матричного представления простого графа, можно определить покрытие как такой набор единиц, что каждая строка и каждый столбец матрицы содержат по крайней мере по одному элементу из этого набора.

**Минимальное покрытие простого графа.** Требуется найти покрытие  $\mathbf{W}_0$  с минимальным  $|\mathbf{W}_0|$ , т. е. с наименьшим числом дуг. Отыскание минимального (или минимальных) покрытия (покрытий) простого графа сводится к нахождению минимального

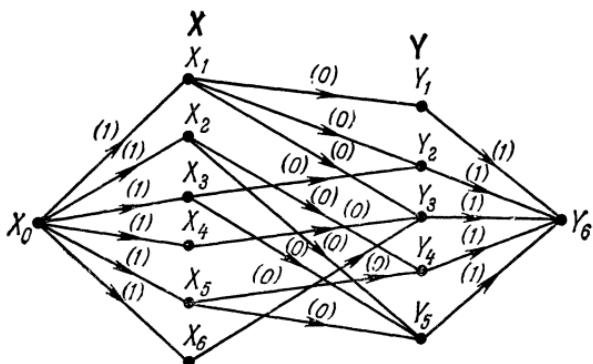


Рис. 432.

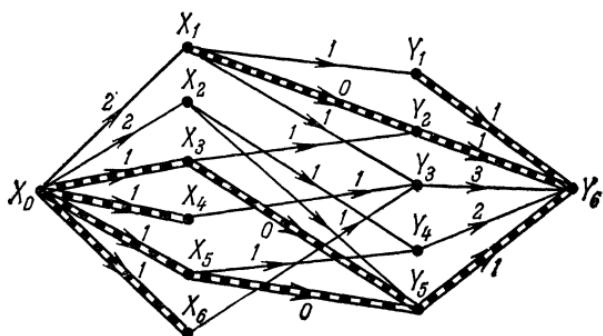


Рис. 433. Нужно построить поток, который дает покрытие.

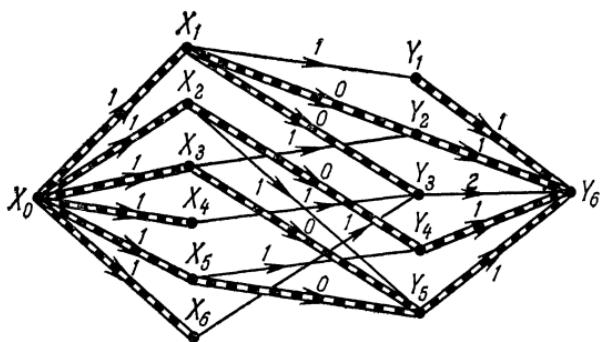


Рис. 434. Минимальный поток  $\varphi$ , дающий минимальное покрытие  $W_0$ .

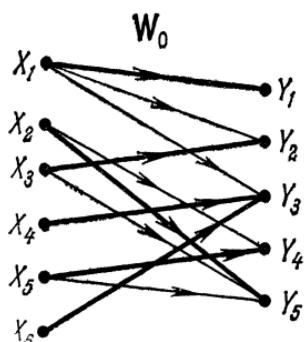


Рис. 435. Покрытие  $W_0$  минимальное.

потока в некоторой транспортной сети. Найдем минимальное покрытие  $\mathbf{W}_0$  простого графа  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$ , где

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}, \quad \mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}.$$

Соединим вход  $X_0$  с каждой вершиной  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , дугой с пропускной способностью, равной 1, а каждую вершину  $Y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , с выходом  $Y_{n+1}$  дугой с пропускной способностью, также равной 1. Дугам  $(X_i, Y_j) \in \mathbf{U}$  припишем нулевую пропускную способность.

По методу Форда — Фалкерсона ищем минимальный поток  $\varphi$  от  $X_0$  к  $Y_{n+1}$ . Решение может быть не единственным. Проиллюстрируем сказанное на примере (рис. 432—435). Предварительно строим некоторый поток, для которого  $\varphi(u) \geq c(u)$  (см.

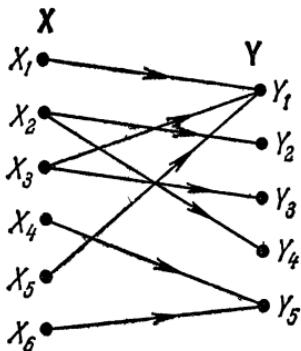


Рис. 436. Другой пример.

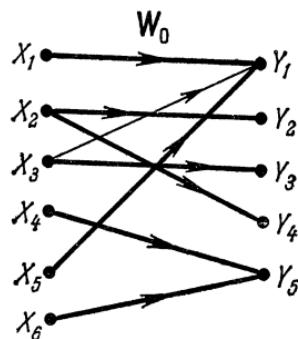


Рис. 437. Минимальное покрытие.

рис. 432). Затем, рассматривая пути, идущие от  $X_0$  к  $Y_{n+1}$ , уменьшаем поток до тех пор, пока это возможно. Приходим к минимальному потоку на рис. 434. Дуги с ненулевым потоком дают минимальное покрытие  $\mathbf{W}_0$  (рис. 435).

В нашем случае  $|\mathbf{W}_0| = |\mathbf{X}|$ ; в общем же случае

$$|\mathbf{W}_0| \geq |\mathbf{X}|, \quad (61.7)$$

$$|\mathbf{W}_0| \geq |\mathbf{Y}|. \quad (61.8)$$

Например, для графа на рис. 436, минимальное покрытие которого изображено на рис. 437, имеем

$$|\mathbf{X}| = 6, \quad |\mathbf{Y}| = 5, \quad |\mathbf{W}_0| = 7. \quad (61.9)$$

**Описание алгоритма, использующего булево матричное представление.** Опишем алгоритм (рассматривая одновременно пример) позволяющий получить минимальное покрытие простого графа  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$ , представленного в виде булевой матрицы  $\|M\|$  размера  $m \times n$  (в нашем примере в качестве  $\|M\|$  берется матрица на рис. 438).

1) Сопоставим каждой строке  $X_i$  матрицы  $\|M\|$  число  $F_i$ , равное сумме ее элементов, и каждому столбцу  $Y_j$  — число  $G_j$ , равное сумме его элементов (на рис. 438  $F_i$  указаны справа, а

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$F_i$
$X_1$	1	1	0	0	0	2
$X_2$	0	1	1	0	0	2
$X_3$	0	0	1	1	1	3
$X_4$	1	0	0	0	0	1
$X_5$	1	0	0	1	0	2
$X_6$	1	0	0	0	0	1
$G_j$	4	2	2	2	1	$T=11$

Рис. 438.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	
$X_1$	1	1	0	0	0	1
$X_2$	0	1	1	0	0	1
$X_3$	0	0	1	1	1	3
$X_4$	1	0	0	0	0	1
$X_5$	1	0	0	1	0	1
$X_6$	1	0	0	0	0	1
	3	2	1	1	1	$T=8$

Рис. 439.

$G_j$  внизу). Очевидно, что

$$\sum_i F_i = \sum_j G_j. \quad (61.10)$$

2) Если

$$\sum_i F_i = \sum_j G_j = \max(m, n), \quad (61.11)$$

то множество дуг, соответствующих единицам, дает минимальное покрытие. Если

$$\sum_i F_i = \sum_j G_j > \max(m, n), \quad (61.12)$$

то заменяем последовательно в произвольном порядке нулем

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	
$X_1$	1	1	0	0	0	1
$X_2$	0	1	1	0	0	1
$X_3$	0	0	1	1	1	2
$X_4$	1	0	0	0	0	1
$X_5$	1	0	0	1	0	1
$X_6$	1	0	0	0	0	1
	3	1	1	1	1	

Рис. 440

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	
$X_1$	1	1	0	0	0	1
$X_2$	0	1	1	0	0	1
$X_3$	0	0	1	1	1	1
$X_4$	1	0	0	0	0	1
$X_5$	1	0	0	1	0	1
$X_6$	1	0	0	0	0	1
	2	1	1	1	1	

Рис. 441.

каждую из единиц (условливаясь при этом писать  $\boxed{1}$  вместо 0), для которой  $F_i - 1 > 0$  и  $G_j - 1 > 0$ .

Например, заключая в квадратик 1 на местах  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_3)$ ,  $(X_5, Y_4)$  в матрице на рис. 438, приходим к матрице на

рис. 439. Легко видеть, что эту операцию дальше продолжить нельзя.

3) В каждой строке с  $F_i > 1$  ищем такую неотмеченную 1, что в содержащем ее столбце найдется такая отмеченная 1, что в строке, содержащей эту 1, есть либо неотмеченная 1 с  $G_j > 1$ , либо отмеченная 1. Если  $G_j > 1$ , то появляется возможность

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	
$X_1$	1	1	0	0	0	2
$X_2$	0	1	1	0	0	2
$X_3$	0	0	0	1	1	2

$$T = 6$$

Рис. 442.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	
$X_1$	1	1	0	0	0	2
$X_2$	0	1	1	0	0	1
$X_3$	0	0	0	1	1	2

$$T = 5$$

Рис. 443.

увеличить число отмеченных единиц. Если  $G_j = 1$  и  $j$ -й столбец содержит отмеченную 1, то в ее строке ищем неотмеченную 1, в столбце которой есть отмеченная 1, и т. д.

Если, действуя по этому алгоритму, мы уже не можем больше увеличить число отмеченных единиц, то необведенные единицы дают минимальное покрытие.

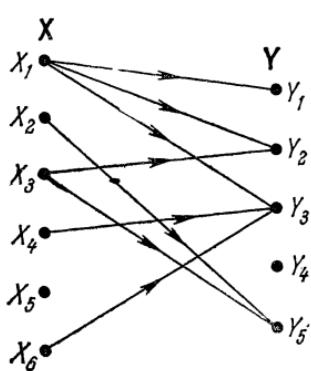


Рис. 444

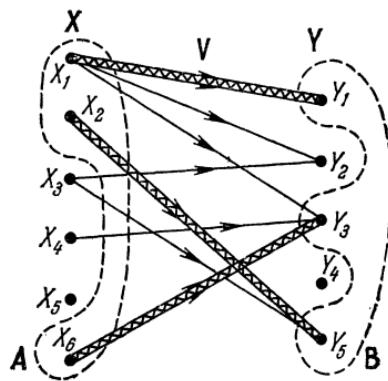


Рис. 445.

В нашем примере мы переходим от рис. 439 к рис. 440, а от него к рис. 441 (пунктир показывает порядок действия по 3)). На рис. 442 и 443 представлен другой пример с  $m < n$ . В этих примерах  $|W_0| = \max(m, n)$  для минимального покрытия  $|W_0|$ . Легко видеть, что для графа на рис. 436 это неверно.

**Паросочетание простого графа.** Рассмотрим простой график  $G = (X, Y, \Gamma) = (X, Y, U)$  и два таких подмножества  $A \subset X$  и  $B \subset Y$ , что  $|A| = |B|$ . Взаимно однозначное отображение  $\Delta$  подмножества  $A$  на  $B$  такое, что

$$(\forall X_i \in A) \Delta \{X_i\} \subset \Gamma X_i, \quad (61.13)$$

называется *паросочетанием, отображающим*  $\mathbf{A}$  в  $\mathbf{Y}$ , или *паросочетанием, отображающим*  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$ <sup>1)</sup>.

Например, на рис. 445 (рис. 447) изображено паросочетание простого графа на рис. 444 (рис. 446)

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$
$X_1$	1	1	1	0	0
$X_2$	0	0	0	0	1
$X_3$	0	1	0	0	1
$X_4$	0	0	1	0	0
$X_5$	0	0	0	0	0
$X_6$	0	0	1	0	0

Рис. 446.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$
$X_1$	1	1	1	0	0
$X_2$	0	0	0	0	1
$X_3$	0	1	0	0	1
$X_4$	0	0	1	0	0
$X_5$	0	0	0	0	0
$X_6$	0	0	1	0	0

Рис. 447.

**Условие существования паросочетания.** Теорема Кёнига — Холла. Пусть  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$ , где  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  и  $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ , — простой граф и  $\mathbf{A} = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots$

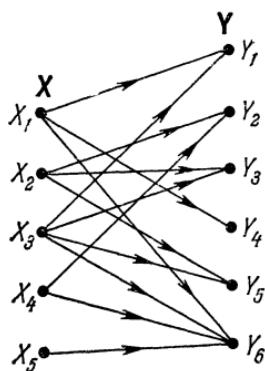


Рис. 448.

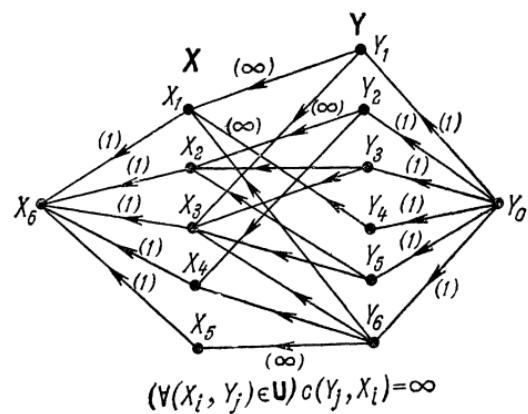


Рис. 449.

$\dots, X_{i_k}\} \subset \mathbf{X}$ . Паросочетание, отображающее  $\mathbf{X}$  в  $\mathbf{Y}$ , существует тогда и только тогда, когда

$$(\forall \mathbf{A} \subset \mathbf{X}) |\Gamma \mathbf{A}| \geq |\mathbf{A}|. \quad (61.14)$$

**Доказательство.** Построим транспортную сеть, в качестве вершин которой возьмем элементы множеств  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , добавив к ним вход  $Y_0$  и выход  $X_{m+1}$ . Соединим  $Y_0$  с каждой вершиной  $Y_j \in \mathbf{Y}$  дугой  $(Y_0, Y_j)$  с пропускной способностью, равной 1, каждую вершину  $X_i \in \mathbf{X}$  с  $X_{m+1}$  дугой  $(X_i, X_{m+1})$  с пропускной

<sup>1)</sup> Предполагается, что  $\emptyset$  есть подмножество  $\mathbf{X}$ . Это нам понадобится для дальнейшего.

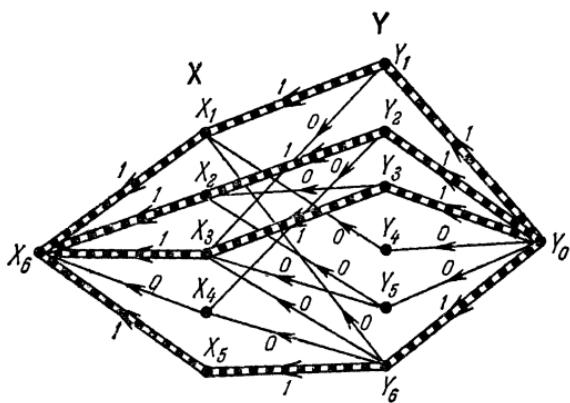


Рис. 450.

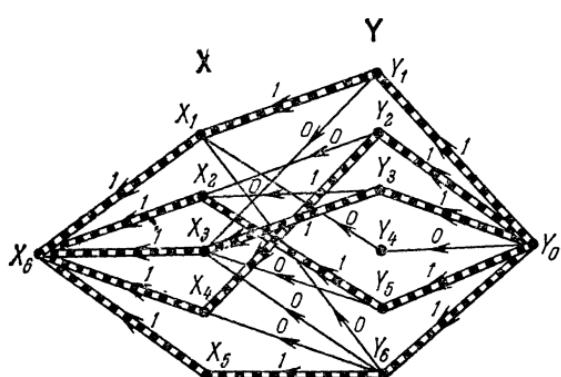


Рис. 451.

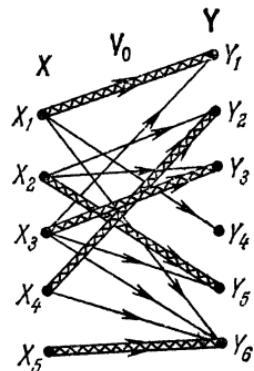


Рис. 452.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	1	0	0	1	0	1
$X_2$	0	1	1	0	1	0
$X_3$	1	0	1	0	1	1
$X_4$	0	1	0	0	0	1
$X_5$	0	0	0	0	0	1

Рис. 453.

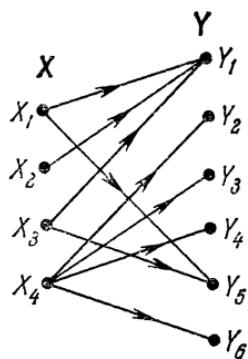


Рис. 454.

способностью, также равной 1, а каждую вершину  $Y_j$  с  $X_i$  дугой  $(Y_j, X_i)$ , если  $Y_j \in \Gamma X_i$ , с пропускной способностью, равной  $\infty$ . (На рис. 449 изображена транспортная сеть, соответствующая графу на рис. 448.)

Если  $A \subset X$ , то полная потребность множества  $A$  равна  $|A|$ ; наибольшее количество потока, которое может поступить в  $A$ , равно  $|\Gamma A|$ . Любой поток по сети определяет некоторое паросочетание простого графа  $G$ , причем  $X_i$  отображается в  $Y_j$ , когда по дуге  $(Y_j, X_i)$  проходит единица потока; наоборот, любое паросочетание определяет некоторый поток. Следовательно,

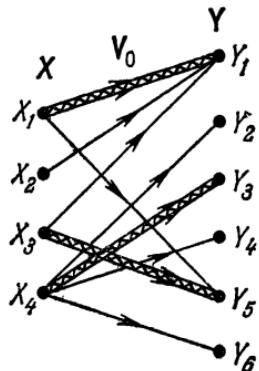


Рис. 455.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	1	0	0	0	1	0
$X_2$	1	0	0	0	0	0
$X_3$	1	0	0	0	1	0
$X_4$	0	1	1	1	0	1

Рис. 456.

отобразить  $X$  в  $Y$  возможно тогда и только тогда, когда (согласно (60.44))

$$(\forall A \subset X) F(A) \geq d(A) \quad (61.15)$$

или, иначе,

$$(\forall A \subset X) |\Gamma A| \geq |A|. \quad (61.16)$$

**Максимальное паросочетание.** Максимальное паросочетание— это паросочетание  $V_0$  с максимально допустимым числом дуг. Это число обозначают через  $Q(G) = |V_0|$ .

**Отыскание максимального паросочетания.** Для отыскания максимального паросочетания достаточно построить, как это мы сделали при доказательстве теоремы Кёнига — Холла, транспортную сеть с входом  $Y_0$  и выходом  $X_{m+1}$  и найти максимальный поток по этой сети.

Пример (рис. 448). Ищем сначала все пути от  $Y_0$  к  $X_6$  (рис. 449, 450), каждый из которых содержит только ненасыщенные дуги (рис. 450). Затем ищем цепи, идущие от  $Y_0$  к  $X_6$ , которые позволяют увеличить общий поток; для этого помечаем вершины, начиная с  $Y_0$ , как это делали в § 60. Рассматривая цепь  $(Y_0, Y_5, X_2, Y_2, X_4, X_6)$ , видим, что поток можно увеличить. Окончательно получаем поток, равный 5, представленный на рис. 451. Дуги  $(Y_j, X_i)$ , через которые проходят потоки, каждый равный 1, дают искомое максимальное паросочетание (рис. 452, 453).

В этом случае наибольшее подмножество множества  $X$ , которое отображается в  $Y$ , совпадает с  $X$ , а для графа на рис. 454 оно имеет мощность  $|X - 1|$  (рис. 455, 456). С другой стороны, граф может обладать несколькими паросочетаниями, как, например, граф на рис. 454.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	1	1	0	0	1	0	0
$X_2$	1	1	0	1	0	1	0
$X_3$	0	0	1	0	0	1	1
$X_4$	0	0	1	0	0	1	0
$X_5$	0	0	0	0	0	1	0
$X_6$	0	0	1	0	0	0	1

Рис. 457.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	1	1			1		
$X_2$	1	1		1		1	
$X_3$			1				1
$X_4$			1				1
$X_5$						1	
$X_6$			1				1

Рис. 458.

**Отыскание максимального паросочетания простого графа, заданного в виде булевой матрицы.** 1) Реализуем некоторое паросочетание, выделяя полужирным шрифтом одну и только

одну 1 в строке и столбце (на нашем примере — паросочетание на рис. 457).

2) Помечаем косым крестиком любую строку и любой столбец, которые содержат 1, выделенную полужирным шрифтом (рис. 458).

3) Рассмотрим непомеченные столбцы. В непомеченном столбце выбираем 1, которая одновременно принадлежала бы помеченной строке. Находим в этой строке 1, выделенную полужирным шрифтом, и в соответствующем ей столбце

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	1	1			1		
$X_2$	1	1		1		1	
$X_3$			1			1	1
$X_4$			1			1	
$X_5$					1		
$X_6$			1				1

Рис. 459.

ищем 1, которая принадлежала бы непомеченной строке. Очевидно, что если мы находим такую единицу, то число выделенных полужирным шрифтом единиц можно увеличить. В противном случае ищем 1 в помеченной строке; по 1, выделенной полужирным шрифтом, в этой строке ищем... Если мы не можем больше найти столбца, исходя из которого, можно увеличить существующее число единиц, выделенных полужирным шрифтом, то приходим к максимальному паросочетанию.

В нашем примере столбец  $Y_7$  не помечен; он содержит 1 в клетке  $(X_3, Y_7)$ . В строке  $X_3$  1, выделенная полужирным шрифтом, стоит в клетке  $(X_3, Y_6)$ . В столбце  $Y_6$  в клетке  $(X_5, Y_6)$  стоит 1 и соответствующая ей строка  $X_5$  не помечена. Следова-

тельно, возможно увеличить число единиц, выделенных полуожирным шрифтом. Выделяем полуожирным шрифтом рис. 459 1 в клетке  $(X_3, Y_7)$ , а перед этим запишем светлым шрифтом 1 в клетке  $(X_3, Y_6)$  и выделяем полуожирным шрифтом 1 в клетке  $(X_5, Y_6)$  (рис. 459). Нетрудно проверить, что процедура не может быть повторена. Единицы, выделенные полуожирным шрифтом, дают максимальное паросочетание. Легко заметить, рассматривая рис. 458, что существует несколько возможных решений.

**Дефицит простого графа.** Дефицитом простого графа  $G = (X, Y, \Gamma)$  называют число

$$\delta_0 = \max_{A \subset X} (|A| - |\Gamma A|) \quad (61.17)$$

( $A = \emptyset$  не исключается).

В качестве примера вычислим дефицит графа на рис. 447. Имеем

$$\begin{aligned} |\{X_1\}| - |\Gamma\{X_1\}| &= 1 - 3 = -2, |\{X_2\}| - |\Gamma\{X_2\}| = \\ &= 1 - 3 = -2, \dots, |\{X_1, X_2\}| - |\Gamma\{X_1, X_2\}| = \\ &= 2 - 6 = -4, \dots, |\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}| - \\ &\quad - |\Gamma\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}| = 5 - 6 = -1. \end{aligned} \quad (61.18)$$

Легко проверить, что все разности в (61.18) либо отрицательны, либо нули. Следовательно,  $|\emptyset| - |\Gamma\emptyset| = 0 - 0 = 0$  является максимумом и  $\delta_0 = 0$ . Нетрудно проверить, что дефицит простого графа на рис. 454 равен 1, так как существует единственная положительная разность:  $|\{X_1, X_2, X_3\}| - |\Gamma\{X_1, X_2, X_3\}| = 3 - 2 = 1$ .

**Другая формулировка теоремы Кёнига — Холла.** Необходимое и достаточное условие

$$(\forall A \subset X) |\Gamma A| \geq |A| \quad (61.19)$$

можно записать в виде

$$(\forall A \subset X) |A| - |\Gamma A| \leq 0 \quad (61.20)$$

или, учитывая, что  $|\emptyset| - |\Gamma\emptyset| = 0 - 0 = 0$ ,

$$\max_{A \subset X} (|A| - |\Gamma A|) = 0, \quad (61.21)$$

т. е.

$$\delta_0 = 0. \quad (61.22)$$

Таким образом, паросочетание, отображающее  $X$  в  $Y$ , существует тогда и только тогда, когда дефицит простого графа  $G = (X, Y, \Gamma)$  равен нулю.

**Опора простого графа.** Опорой простого графа  $G = (X, Y, \Gamma)$  называют любое такое множество  $S \subset X \cup Y$ , что каждая дуга  $(X_i, Y_j)$  имеет по крайней мере одну из своих граничных вершин в  $S$ .

Например, множество  $S = \{X_1, X_3, X_4, Y_1, Y_2\}$  — опора графа на рис. 460.

**Минимальная опора. Индекс разбрасывания. Минимальная опора** простого графа  $G = \langle X, Y, \Gamma \rangle$  — это такая опора  $S_0$ , для

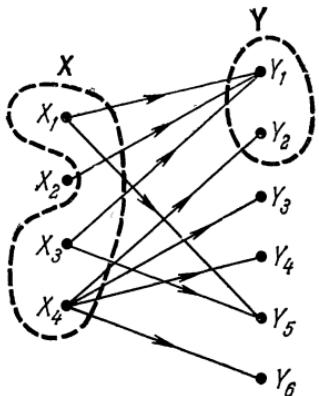


Рис. 460.

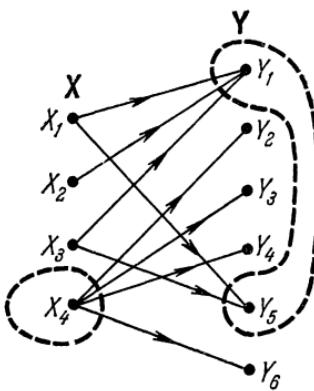


Рис. 461.

которой  $|S_0|$  минимально. Граф может обладать несколькими минимальными опорами.

Число  $D(G) = |S_0|$  называют *индексом разбрасывания* простого графа  $G$ .

Очевидно, что

$$D(G) \leq \min(|X|, |Y|). \quad (61.23)$$

Например, множество  $S_0 = \{X_4, Y_1, Y_5\}$  — минимальная опора графа на рис. 461.

Прежде чем изложить алгоритм определения минимальной опоры простого графа, рассмотрим несколько теорем.

**Теорема I.** *Подграф  $G = (\hat{S}, U)$ , где*

$$\hat{S} = (X \cup Y) - S, \quad (61.24)$$

*a*  $S$  — опора, не содержит дуг, т. е.  $U = \emptyset$ .

Это следует из определения опоры.

**Теорема II.** *Пусть  $A \subset X$ . Любое подмножество*

$$A \cup \Gamma(X - A) \quad (61.25)$$

— опора простого графа  $G = (X, Y, \Gamma)$ .

Действительно, так как конец любой дуги лежит в  $A$  или в  $X - A$ , то конец этой дуги лежит также в  $A$  или в  $\Gamma(X - A)$ .

**Теорема III.** *Для любой минимальной опоры  $S_0$  выполняется равенство*

$$|S_0| = \min_{A \subset X} [|A| + |\Gamma(X - A)|]. \quad (61.26)$$

В самом деле, по теореме II  $A \cup \Gamma(X - A)$  — опора. Так как  $A \cap \Gamma(X - A) = \emptyset$ , то

$$|A \cup \Gamma(X - A)| = |A| + |\Gamma(X - A)|. \quad (61.27)$$

Следовательно,

$$|S_0| = \min_{A \subset X} [|A| + |\Gamma(X - A)|]. \quad (61.28)$$

**Теорема IV.** В простом графе  $G = (X, Y, \Gamma)$  наименьшее количество элементов опоры равно

$$D(G) = |X| - \delta_0. \quad (61.29)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |X| - \delta_0 &= |X| - \max_{A \subset X} [|A| - |\Gamma A|] = \\ &= \min_{A \subset X} [|X| - |A| + |\Gamma A|] = \min_{A \subset X} [|X - A| + |\Gamma A|]. \end{aligned} \quad (61.30)$$

Полагая

$$B = X - A, \quad (61.31)$$

имеем

$$|X| - \delta_0 = \min_{B \subset X} [|B| + |\Gamma(X - B)|]. \quad (61.32)$$

Например, для графа на рис. 460 имеем  $|X| = 4$ ,  $\delta_0 = 1$ , т. е.  $D(G) = 3$ .

**Теорема V.** Дефицит  $\delta_0$  и число внутренней устойчивости  $\alpha(G)$  простого графа  $G = (X, Y, \Gamma)$  связаны соотношением

$$\delta_0 = \alpha(G) - |Y|. \quad (61.33)$$

**Доказательство.** Пусть  $S$  — опора и  $\bar{S} = (X \cup Y) - S$  — ее дополнение. По теореме I  $\bar{S}$  внутренне устойчиво. Обратно, если  $C \subset X \cup Y$  — внутренне устойчивое множество, то  $\bar{C}$  — опора. Следовательно,

$$\alpha(G) = \max_{\bar{C}} |\bar{C}| = \max_{\bar{C}} (|\bar{X}| + |\bar{Y}| - |\bar{C}|) = |X| + |Y| - \min_{\bar{C}} |\bar{C}|. \quad (61.34)$$

По определению  $\bar{C}$  имеем

$$\min_{\bar{C}} |\bar{C}| = |S_0|.$$

Учитывая (61.30), получаем

$$\alpha(G) = |X| + |Y| - |S_0| = |Y| + (|X| - |S_0|) = |Y| + \delta_0, \quad (61.35)$$

$$\delta_0 = \alpha(G) - |Y|. \quad (61.36)$$

Например, для графа  $G$  на рис. 460  $\alpha(G) = 7$ , так как  $|Y| = 6$ , а  $\delta_0 = 1$  (мы вычислили его раньше).

**Теорема VI** (теорема Кёнига<sup>1</sup>). Пусть  $G = (X, Y, \Gamma)$  и  $|X| \leq |Y|$ . Тогда минимальное число вершин в опоре графа  $G$

<sup>1)</sup> Эта теорема является основной в теории простых графов.

равно максимально возможному числу дуг в паросочетании, отображающем  $\mathbf{X}$  в  $\mathbf{Y}$ , т. е.

$$D(G) = Q(G). \quad (61.37)$$

Доказательство теоремы будет все время иллюстрироваться примером (рис. 462 и 463).

Доказательство<sup>1)</sup>. Исходя из заданного простого графа  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$ , где  $|\mathbf{X}| \leq |\mathbf{Y}|$ , будем строить транспортную сеть, как мы уже делали при доказательстве существования паросочетания (теорема Кёнига — Холла).

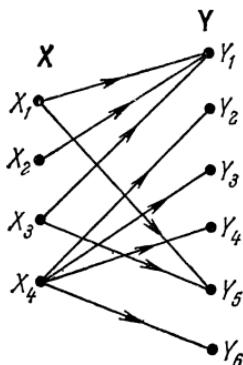


Рис. 462.

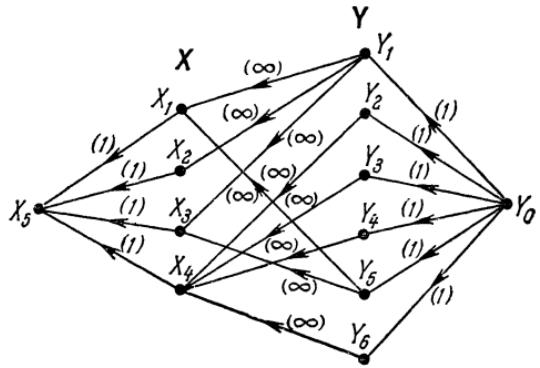


Рис. 463.

Присоединим к  $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  вершину  $Y_0$  и свяжем ее с каждой из вершин  $Y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , дугой  $(Y_0, Y_j)$  с пропускной способностью 1. Затем во всех случаях, когда  $Y_j \in \Gamma X_i$ , соединим вершину  $Y_j$  с вершиной  $X_i$  дугой  $(Y_j, X_i)$  с пропускной способностью  $\infty$ ; наконец, присоединим к  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  вершину  $X_{m+1}$  и свяжем каждую из  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , с  $X_{m+1}$  дугой  $(X_i, X_{m+1})$  с пропускной способностью 1. Таким образом, мы получили транспортную сеть (см. рис. 462, 463).

Если значение потока на дуге  $(Y_j, X_i)$  равно 1, то его значения на  $(Y_0, Y_j)$  и  $(X_i, X_{m+1})$  также равны 1 (т. е. обе эти дуги насыщены). Иначе говоря, в каждую вершину из  $\mathbf{X}$  может входить (а также из каждой вершины  $\mathbf{Y}$  может исходить) лишь одна дуга, на которой данный поток имеет значение 1. Как мы заметили ранее, значение максимального потока в построенной сети равно максимально возможному числу  $Q(G)$  дуг в паросочетании, отображающем  $\mathbf{X}$  в  $\mathbf{Y}$ .

Мы покажем, что каждой опоре можно сопоставить разрез, пропускная способность которого равна числу вершин опоры, и, обратно, каждому разрезу с конечной пропускной способностью можно сопоставить опору, число вершин которой равно пропускной способности разреза.

<sup>1)</sup> Настоящее доказательство принадлежит Мальгранжу (Y. Malgrange).

Тогда

$D(G)$  равно минимальной пропускной способности разреза (61.38)

Но по теореме Форда — Фалкерсона (60.24)

минимальный разрез равен максимальному потоку. (61.39)

Отсюда получается, что

$$D(G) = Q(G). \quad (61.40)$$

1) Покажем сначала, что каждой опоре можно сопоставить разрез с пропускной способностью, равной числу вершин опоры.

Пусть опора образована множествами

$$\mathbf{X}_\alpha = \{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_p}\} \quad (61.41)$$

и

$$\mathbf{Y}_\beta = \{Y_{\beta_1}, Y_{\beta_2}, \dots, Y_{\beta_q}\}. \quad (61.42)$$

В нашем примере пусть это будут, например,  $\mathbf{X}_\alpha = \{X_1, X_4\}$  и  $\mathbf{Y}_\beta = \{Y_1, Y_2, Y_4, Y_5\}$  (рис. 464).

Обозначим

$$\bar{\mathbf{X}}_\alpha = \mathbf{X} - \mathbf{X}_\alpha \quad (61.43)$$

и

$$\bar{\mathbf{Y}}_\beta = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\beta. \quad (61.44)$$

Если из  $G$  удалить все вершины  $\mathbf{X}_\alpha$  и  $\mathbf{Y}_\beta$ , то никакие две вершины оставшегося множества не будут связаны дугой (см. в нашем примере  $\bar{\mathbf{Y}}_\beta = \{Y_3, Y_6\}$  и

$$\bar{\mathbf{X}}_\alpha = \{X_2, X_3\}.$$

Пусть  $E$  — подмножество вершин сети:

$$E = \{X_{m+1}\} \cup \bar{\mathbf{X}}_\alpha \cup \mathbf{Y}_\beta \quad (61.45)$$

(в нашем примере  $E = \{X_5, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_4, Y_5\}$ , см. рис. 464).

Рассмотрим разрез, определенный множеством  $E$ , т. е. множество дуг, исходящих из вершин, не принадлежащих  $E$ , и заходящих в вершины из  $E$ .

а) Единственными дугами, исходящими из вершин, не принадлежащих  $E$ , и оканчивающимися в  $X_{m+1}$ , являются дуги с началами в вершинах из  $\mathbf{X}_\alpha$ . Пропускная способность каждой такой дуги равна 1 и их общая пропускная способность равна  $|\mathbf{X}_\alpha|$  (рис. 465).

б) Вершины из  $\bar{\mathbf{X}}_\alpha$ , как уже было отмечено, не связаны дугами ни с какой из вершин в  $\bar{\mathbf{Y}}_\beta$  (см. рис. 464).

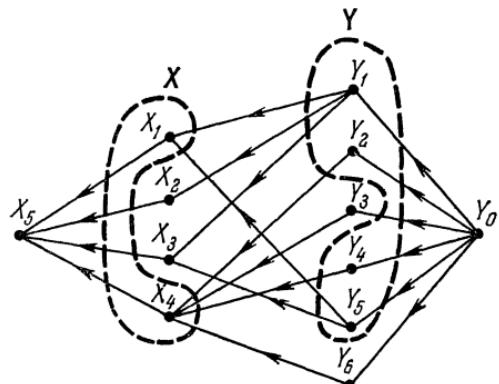


Рис. 464.

в)  $Y_0$  связана с каждой вершиной из  $\mathbf{Y}_\beta$  дугой с пропускной способностью 1. Общая пропускная способность дуг, исходящих из  $Y_0$  и оканчивающихся в вершинах из  $\mathbf{E}$ , поэтому равна  $|\mathbf{Y}_\beta|$ .

Таким образом, пропускная способность разреза равна  $|\mathbf{X}_\alpha| + |\mathbf{Y}_\beta|$ . В нашем примере  $|\mathbf{X}_\alpha| = 2$ ,  $|\mathbf{Y}_\beta| = 4$ ,  $|\mathbf{X}_\alpha| + |\mathbf{Y}_\beta| = 6$ .

2) Покажем теперь, что всякому разрезу с конечной пропускной способностью можно сопоставить некоторую опору. Пусть разрез определяется множеством вершин  $\mathbf{E}'$  (которое содержит  $X_{m+1}$  и не содержит  $Y_0$ ). Множество вершин из  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ , принадлежащих  $\mathbf{E}'$ , обозначим соответственно через  $\mathbf{X}_\lambda, \mathbf{Y}_\mu$ , а их дополнения — через

$$\bar{\mathbf{X}}_\lambda = \mathbf{X} - \mathbf{X}_\lambda, \quad (61.46)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_\mu = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\mu. \quad (61.47)$$

Рис. 465.

Пусть пропускная способность этого разреза конечна (как, например, для разреза, указанного на рис. 466); это означает, что он не содержит никакой дуги, соединяющей вершину из  $\bar{\mathbf{Y}}_\mu$  с вершиной из  $\mathbf{X}_\lambda$  (в противном случае разрез содержал бы дугу с пропускной способностью  $\infty$ ).

Тогда никакие две вершины из подмножества  $\mathbf{X}_\lambda \cup \bar{\mathbf{Y}}_\mu$  не соединены дугой и, следовательно, по крайней мере один конец каждой дуги  $G$  принадлежит  $\bar{\mathbf{X}}_\lambda \cup \mathbf{Y}_\mu$ , т. е. это множество — опора. Далее, как было показано выше, число вершин этой опоры равно пропускной способности разреза.

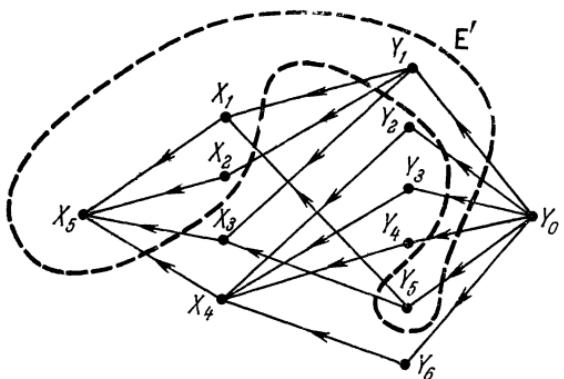


Рис. 466.

Пусть теперь  $\mathbf{E}^*$  — разрез с минимальной пропускной способностью. Ему соответствует минимальная опора с числом вершин  $D(G)$ , равным  $c(\mathbf{U}_{\mathbf{E}^*})$ . По теореме Форда — Фалкерсона последнее число совпадает с максимальным потоком в сети, а он, как было сказано, равен числу дуг в максимальном паросочетании, т. е. окончательно

$$D(G) = Q(G), \quad (61.48)$$

что и требовалось доказать.

Справедлива и обратная теорема:

Пусть  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$  и  $|\mathbf{X}| \leq |\mathbf{Y}|$ . Предположим далее, что  $\mathbf{S}$  — опора  $G$  и  $\mathbf{V}$  — множество дуг паросочетания. Тогда  $|\mathbf{S}| = |\mathbf{V}| \Rightarrow \mathbf{S}$  минимальна, а  $\mathbf{V}$  — множество дуг максимального паросочетания. (61.49)

Пусть условия теоремы выполняются. Для минимальной опоры  $\mathbf{S}_0$  имеем  $|\mathbf{S}_0| \leq |\mathbf{S}|$ , а для множества  $\mathbf{V}_0$  дуг максимального паросочетания имеем  $|\mathbf{V}| \leq |\mathbf{V}_0|$ . Тогда  $|\mathbf{S}_0| = |\mathbf{V}_0|$  по теореме Кёнига и  $|\mathbf{S}_0| \leq |\mathbf{S}| \leq |\mathbf{V}| \leq |\mathbf{V}_0|$ , откуда  $|\mathbf{S}| = |\mathbf{S}_0|$  и  $|\mathbf{V}| = |\mathbf{V}_0|$ , что и требовалось доказать.

Теорема VII (теорема Кёнига — Оре). В простом графе  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$  с  $|\mathbf{X}| \leq |\mathbf{Y}|$  имеем

$$Q(G) = |\mathbf{X}| - \delta_0. \quad (61.50)$$

Доказательство<sup>1)</sup>. По теореме IV

$$D(G) = |\mathbf{X}| - \delta_0 \quad (\text{см. (61.29)}), \quad (61.51)$$

а по теореме VI

$$D(G) = Q(G) \quad (\text{см. (61.37)}), \quad (61.52)$$

т. е. имеем (61.50).

Мы дадим в дальнейшем алгоритм нахождения минимальной опоры. Для этого нам нужны еще некоторые определения.

**Полное паросочетание.** Пусть  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{U})$  — простой граф и  $\mathbf{V}$  — дуги паросочетания  $G$ . Если каждая дуга из  $\mathbf{U} — \mathbf{V}$  является смежной для некоторой дуги из  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  — полное паросочетание. Например, паросочетание, указанное на рис. 467, полное.

В изложенном выше методе нахождения максимального паросочетания с помощью транспортной сети, построенной для простого графа, получают «полный поток», когда больше нельзя найти такого пути из  $Y_0$  в  $X_{m+1}$ , который увеличил бы поток.

Принимая во внимание, что в некоторых случаях все-таки можно увеличить поток, рассматривая цепи между  $Y_0$  и  $X_{m+1}$ , видим, что полный поток не обязательно максимальен и полное паросочетание не обязательно максимальное (см., например, рис. 450 и 451). Напротив, максимальное паросочетание является полным.

**Сильная дуга. Слабая дуга.** Пусть  $\mathbf{V}$  — множество дуг паросочетания простого графа  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{U})$ . Назовем *сильной* всякую дугу, принадлежащую  $\mathbf{V}$ , и *слабой* всякую дугу, принадлежащую  $\mathbf{U} — \mathbf{V}$ .

<sup>1)</sup> В книге Бержа [8] доказана сначала теорема VII, а в качестве ее следствия — теорема VI; при этом использованы некоторые более сложные понятия.

**Ненасыщенная вершина.** Вершина  $z \in X \cup Y$  простого графа  $G = (X, Y, \Gamma)$  называется *ненасыщенной*, если она не инцидентна какой-либо сильной дуге (на рис. 467 вершины  $X_4, Y_4, Y_5$  ненасыщенные). Все остальные вершины называются *насыщенными*.

Пусть  $v \in V$ . Обозначим через  $\Delta\{v\}$  множество сильных дуг, концы которых являются также концами дуг, исходящих из начала  $v$ . Например, на рис. 467 для дуги  $(X_3, Y_3) = v$  множество  $\Delta\{v\}$  состоит из дуг  $(X_1, Y_1), (X_3, Y_3)$  и  $(X_5, Y_6)$ .

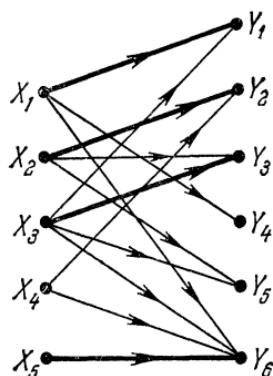


Рис. 467.

Обозначим через  $V^+$  множество сильных дуг, концы которых являются также концами дуг, исходящих из ненасыщенной вершины. Например, на рис. 467

$$V^+ = \{(X_2, Y_2), (X_5, Y_6)\},$$

так как множество ненасыщенных вершин в  $X$  есть  $\{X_4\}$ .

Обозначим через  $V^-$  множество сильных дуг, начала которых являются также началами дуг, заходящих в ненасыщенные вершины.

Будем называть *графом дуг паросочетания* граф  $(V, \Delta)$ , вершины которого — дуги  $V$ , а многозначное отображение задается  $\Delta$ . Дадим несколько примеров таких графов.

На рис. 468 представлено полное, но не максимальное паросочетание; напротив, на рис. 469 и 470 паросочетания максимальны. Покажем, как был построен график дуг паросочетания для графа на рис. 468.

$$V = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_5, Y_6)\}, \quad (61.53)$$

$$\Delta\{(X_1, Y_1)\} = \{(X_1, Y_1), (X_5, Y_6)\}, \quad (61.54)$$

$$\Delta^*\{(X_2, Y_2)\} = \{(X_2, Y_2), (X_3, Y_3)\}, \quad (61.55)$$

$$\Delta\{(X_3, Y_3)\} = \{(X_1, Y_1), (X_3, Y_3), (X_5, Y_6)\}, \quad (61.56)$$

$$\Delta\{(X_5, Y_6)\} = \{(X_5, Y_6)\}. \quad (61.57)$$

Имеем также

$$V^+ = \{(X_2, Y_2), (X_5, Y_6)\}, \quad (61.58)$$

$$V^- = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)\}. \quad (61.59)$$

Провести аналогичные построения для графов на рис. 469 и 470 предоставляет читателю в виде упражнения.

**Теорема VIII.** *Следующие условия эквивалентны:*

1)  $V$  является максимальным паросочетанием в простом графе  $G = (X, Y, \Gamma)$ .

2) В простом графе  $G = (X, Y, \Gamma)$  нельзя найти цепи, состоящей поочередно из слабых и сильных ребер и связывающей две различные ненасыщенные точки (члендующейся цепи).

3) В графе  $(V, \Delta)$  нельзя найти пути из вершины, принадлежащей  $V^+$ , в вершину, принадлежащую  $V^-$ .

4) В графе<sup>1)</sup>  $(V, \hat{\Delta})$  можно пометить каждую вершину знаком «+» или знаком «—» так, что каждая вершина  $V^+$  будет помечена знаком «+», каждая вершина  $V^-$  знаком «—» и при

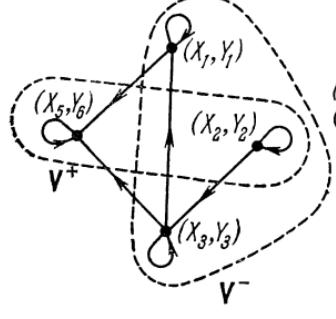
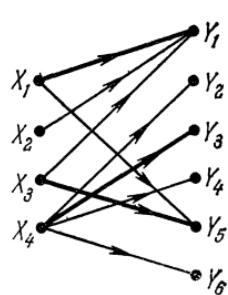
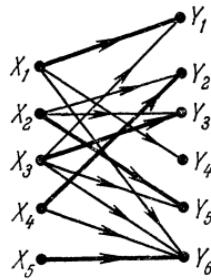
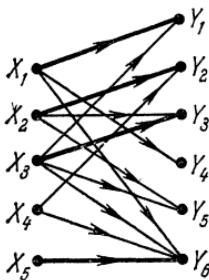


Рис. 468.

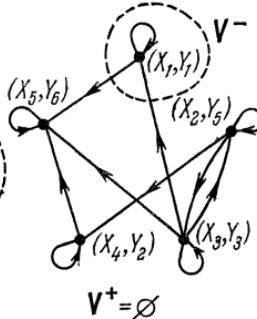


Рис. 469.

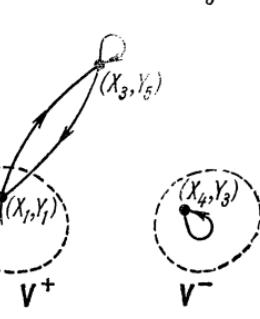


Рис. 470.

этом никакая вершина, помеченная знаком «+», не будет соединена дугой с вершиной, помеченной знаком «—».

Будем доказывать теорему по схеме

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1). \quad (61.60)$$

1)  $\Rightarrow$  2). Действительно, предположим, что цепь, о которой говорится в условии 2), существует. Обозначим ее ребра через  $U_0$ . Тогда паросочетание

$$V' = (V \cap \bar{U}_0) \cup (\bar{V} \cap U_0) \quad (61.61)$$

содержит на одну дугу больше, чем  $V$ , что противоречит максимальности последнего.

2)  $\Rightarrow$  3). Действительно, каждой цепи в графе дуг паросочетания, идущей от вершины из  $V^+$  до вершины из  $V^-$ ,

<sup>1)</sup>  $\hat{\Delta}\{V_i\}$  — транзитивное замыкание множества  $\{V_i\}$  (см. § 27).

соответствует чередующаяся цепь, связывающая ненасыщенные вершины  $X_r \in \mathbf{X}$  и  $Y_s \in \mathbf{Y}$  в графе  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$ .

3)  $\Rightarrow$  4). Отметим знаком «+» все вершины в  $\hat{\Delta}V^+$ , а знаком «—» все вершины в  $V - \hat{\Delta}V^+$ . Имеем  $V^+ \subset \hat{\Delta}V^+$  и, так как ввиду 3) не существует пути из  $V^+$  в  $V^-$ , то  $V^- \subset V - \hat{\Delta}V^+$ , т. е. из 3) следует 4).

4)  $\Rightarrow$  1). В графе  $G = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Gamma)$  пометим сильные дуги знаками «+» и «—» в соответствии с 4). Обозначим через  $\mathbf{X}^-$  множество начальных вершин сильных дуг, помеченных знаком «—», и через  $\mathbf{Y}^+$  множество конечных вершин сильных дуг, помеченных знаком «+». Пусть имеем дугу  $(X_r, Y_s)$  с  $X_r \notin \mathbf{X}^-$  и  $Y_s \notin \mathbf{Y}^+$  и рассмотрим четыре случая, показанных на рис. 471.

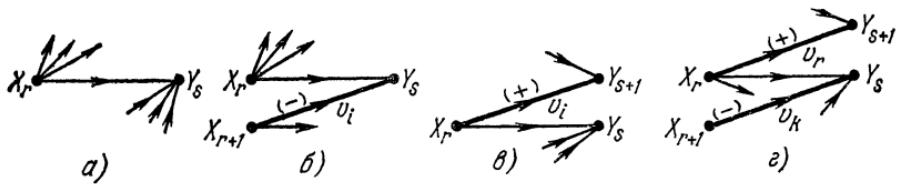


Рис. 471.

а)  $X_r$  и  $Y_s$  не могут быть обе ненасыщенными, так как по предположению  $V$  — полное паросочетание.

б)  $X_r$  не может быть ненасыщенной вершиной, так как тогда  $v_i$  должна была бы (по определению  $V^+$ ) быть помеченной знаком «+».

в)  $Y_s$  не может быть ненасыщенной вершиной, так как тогда  $v_i$  должна была бы (по определению  $V^-$ ) быть помеченной знаком «—».

г)  $X_r$  и  $Y_s$  не могут обе быть насыщенными, так как тогда, вопреки 4), в графе  $(V, \hat{\Delta})$  существовала бы дуга от  $v_r \in V^+$  до  $v_k \in V^-$ .

Таким образом, дуги  $(X_r, Y_s)$  с  $X_r \notin \mathbf{X}^-$  и  $Y_s \notin \mathbf{Y}^+$  не существует, и множество  $\mathbf{X}^- \cup \mathbf{Y}^+$  — опора.

Имеем, кроме того,

$$|V| = |\mathbf{X}^- \cup \mathbf{Y}^+|. \quad (61.62)$$

По теореме, обратной теореме Кёнига, получаем, что  $V$  — максимальное паросочетание.

**Нахождение минимальной опоры. Венгерский алгоритм.** Этот процесс распадается на две части.

1) Нахождение максимального паросочетания. Для этого подходит метод, описанный ранее, но мы дадим другой способ.

2) Нахождение минимальной опоры.

*Первая часть: нахождение максимального паросочетания.* Для получения максимального паросочетания берут какое-нибудь паросочетание, образуют граф дуг паросочетания  $(V, \Delta)$  и определяют подмножества  $V^+$  и  $V^-$ . Если существует путь от  $V^+$  до  $V^-$ , то взятое паросочетание не является максимальным. В этом случае можно найти цепь, состоящую поочередно из слабых и сильных ребер, и с ее помощью увеличить число сильных дуг. Так продолжают до тех пор, пока не приходят к графу  $(V, \Delta)$ , в котором нет путей от  $V^+$  к  $V^-$ .

*Вторая часть: нахождение минимальной опоры.* Чтобы, исходя из максимального паросочетания  $V$ , построить минимальную опору, находят подмножества  $\hat{\Delta}V^+$  и  $V - \hat{\Delta}V^+$ . Конечные вершины дуг, принадлежащих  $\hat{\Delta}V^+$ , обозначаются через  $Y^+$ , а начальные вершины дуг, принадлежащих  $V - \hat{\Delta}V^+$ , — через  $X^-$ . Множество

$$S_0 = X^- \cup Y^+ \quad (61.63)$$

будет тогда минимальной опорой.

Пример 1 (рис. 472). Возьмем сначала паросочетание  $V$ , показанное на рис. 473. Найдем для него граф дуг паросочетания и множества  $V^+$  и  $V^-$  (рис. 474). Видим, что существуют пути из  $V^+$  до  $V^-$ , а именно — петли в вершинах  $(X_6, Y_3)$  и  $(X_3, Y_6)$ . Цепь  $(Y_7, X_3, Y_6, X_5)$  позволяет найти паросочетание с большим числом дуг (рис. 475). Для него вновь строим граф  $(V, \Delta)$  и находим  $V^+$  и  $V^-$  (рис. 476). Здесь пути из  $V^+$  в  $V^-$  не существует, т. е. паросочетание на рис. 475 максимальное. Для определения минимальной опоры находим  $\hat{\Delta}V^+$  (подмножество, образованное элементами транзитивных замыканий элементов  $V^+$ ). Имеем

$$\hat{\Delta}V^+ = \{(X_3, Y_7), (X_5, Y_6), (X_6, Y_3)\} \quad (61.64)$$

и

$$V - \hat{\Delta}V^+ = \{(X_1, Y_2), (X_2, Y_1)\}. \quad (61.65)$$

Концы дуг множества  $\hat{\Delta}V^+$  дают  $Y^+$ :

$$Y^+ = \{Y_3, Y_6, Y_7\}, \quad (61.66)$$

а начала дуг  $V - \hat{\Delta}V^+$  дают  $X^-$ :

$$X^- = \{X_1, X_2\} \quad (61.67)$$

(рис. 477 и 478).

Пример 2 (рис. 479). На рис. 480 показано некоторое паросочетание. Оно не максимальное, что показывает график на рис. 481. Увеличиваем на 1 число дуг в паросочетании, используя цепь

$$(Y_2, X_1, Y_1, X_2, Y_5, X_5)$$

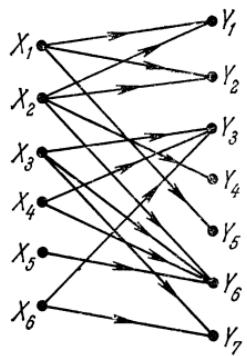


Рис. 472.

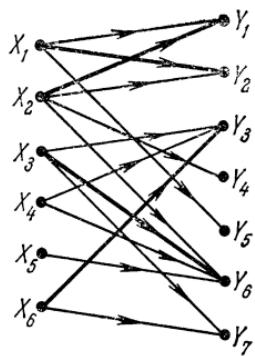


Рис. 473.

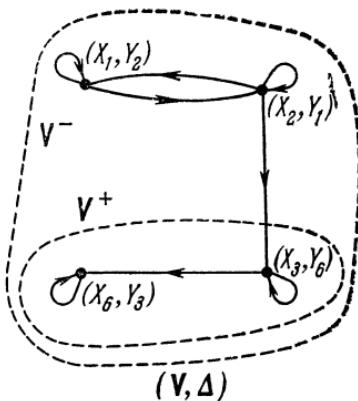


Рис. 474.

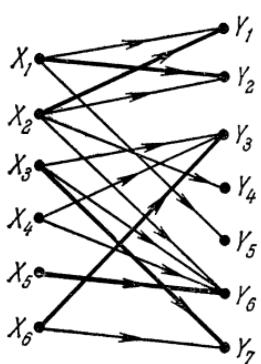


Рис. 475.

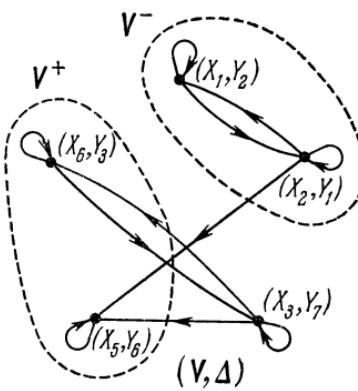


Рис. 476.

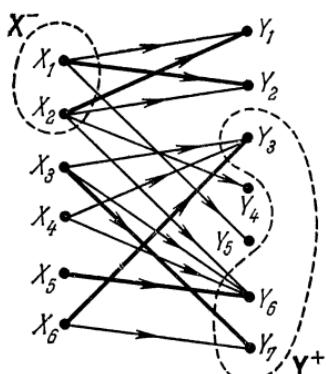


Рис. 477.

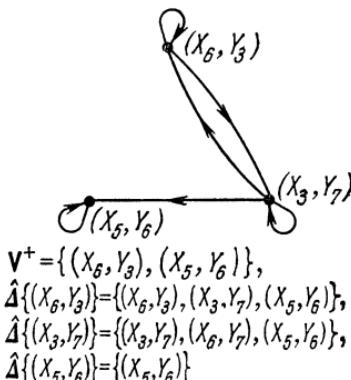


Рис. 478.

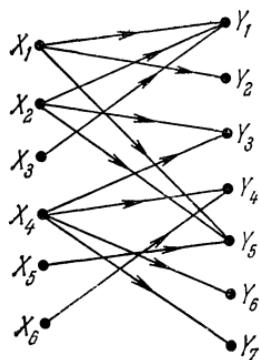


Рис. 479.

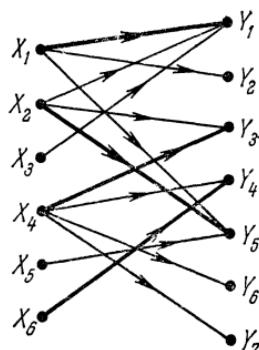


Рис. 480.

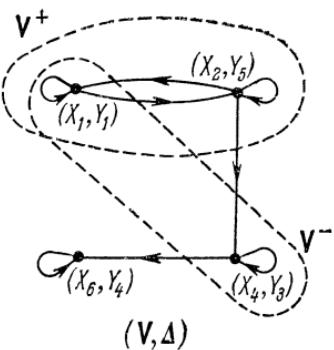


Рис. 481.

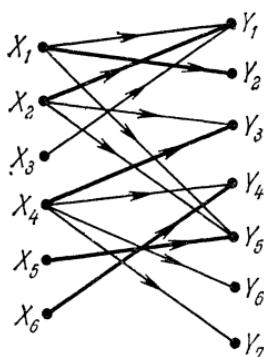


Рис. 482.

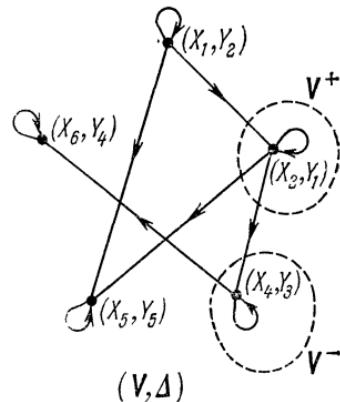


Рис. 483

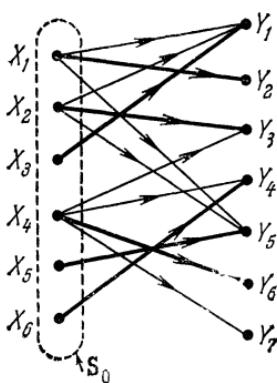


Рис. 484.

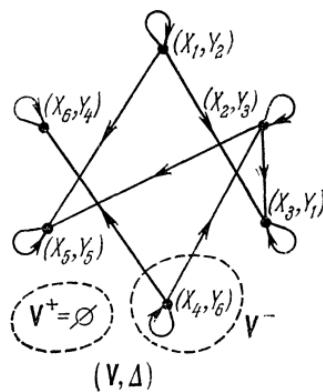


Рис. 485.

(рис. 482). Как показывает граф дуг паросочетания на рис. 483, можно увеличить число дуг в паросочетании еще на 1, если использовать цепь

$$(Y_6, X_4, Y_3, X_2, Y_1, X_3).$$

Приходим к паросочетанию на рис. 484. Это паросочетание максимально, так как  $V^+ = \emptyset$  (рис. 485). Далее  $\Delta V^+ = \emptyset$ , поэтому  $Y^+ = \emptyset$  и минимальная опора есть  $S_0 = X$ .

**Нахождение минимальной опоры с помощью булевой матрицы.** Если максимальное паросочетание уже получено, то действуем следующим образом:

а) помечаем знаком  $\odot$  все строки, в которых нет 1, выделенной полужирным шрифтом;

б) помечаем знаком  $\odot$  все столбцы, содержащие 1, не выделенные полужирным шрифтом в помеченных строках;

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	1	1			1		
$X_2$	1	1		1		1	
$X_3$			1			1	1
$X_4$			1			1	
$X_5$					1		
$X_6$			1				1

$\odot$        $\odot$        $\odot$

Рис. 486.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	-1	-1	-	-	-1	-	-
$X_2$	1	-1	-	-1	-	1	-
$X_3$			1			1	1
$X_4$				1		1	
$X_5$					1		
$X_6$			1				1

Рис. 487.

в) помечаем все строки, содержащие 1, выделенные полужирным шрифтом в помеченных столбцах;

г) повторяем б) и в) до тех пор, пока удается помечать новые столбцы или строки;

д) помеченные столбцы и непомеченные строки дают минимальную опору.

Пример (рис. 486, где воспроизведен результат, полученный на рис. 459). Согласно описанной процедуре помечаем по порядку строку  $X_4$ , затем столбцы  $Y_3$  и  $Y_6$ , затем строки  $X_5$  и  $X_6$ , затем  $Y_7$  и, наконец,  $X_3$ . Помеченные столбцы  $Y_3$ ,  $Y_6$ ,  $Y_7$  и непомеченные строки  $X_1$ ,  $X_2$  дают минимальную опору  $\{X_1, X_2, Y_3, Y_6, Y_7\}$  (рис. 487). Имеются и другие решения, так как максимальное паросочетание не единственно.

Рис. 487 иллюстрирует общий факт: *минимальная опора есть минимальное множество линий, содержащих все 1*. Под линией понимаем здесь столбец или строку.

## УПРАЖНЕНИЯ

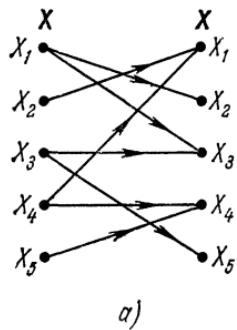
**61А.** Указать минимальное покрытие для простых графов *a)* и *б)* из упражнения 61Е.

**61Б.** Найти максимальное паросочетание для простых графов *a), б), в)* из упражнения 61Е.

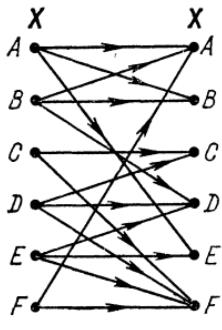
**61В.** Найти число дуг максимального паросочетания для простых графов *a), б), в)* и *г)* из упражнения 61Е.

**61Г.** Вычислить дефицит каждого из простых графов *г), д)* и *е)* из упражнения 61Е.

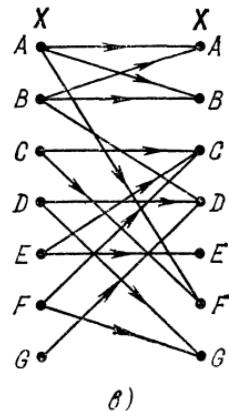
**61Д.** Найти минимальную опору и указать число ее вершин в каждом из простых графов *а), б), в), г), д), е)* из упражнения 61Е.



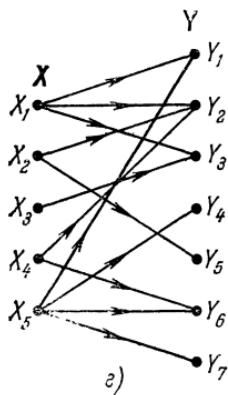
*а)*



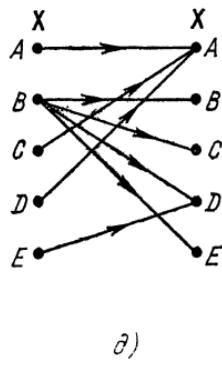
*б)*



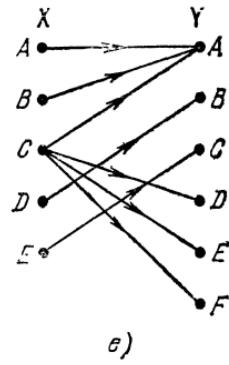
*г)*



*в)*



*д)*



*е)*

**61Е.** Найти множество всех минимальных опор для каждого из графов *а) — е).*

### § 62. Задача о назначении

Эта задача уже была сформулирована в § 54. Здесь мы продолжим ее изучение и покажем ее связь с результатами предыдущего параграфа.

Пусть имеются  $m$  работников,  $n$  должностей и мера ценности (стоимость) работника  $X_i$  на должности  $Y_j$  равна

$v_{ij} = v(X_i, Y_j) \geq 0$ . Рассмотрим булеву матрицу  $\|x_{ij}\|$  размера  $m \times n$  такую, что

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (62.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (62.2)$$

Матрица  $\|x_{ij}\|$  называется *матрицей назначения*.

Имеем

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \min(m, n), \quad (62.3)$$

и если

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \min(m, n), \quad (62.4)$$

то матрица назначения называется *насыщенной*. В этих терминах задача о назначении формулируется следующим образом:

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	2	3	1	$\infty$	7	10	5
$X_2$	7	$\infty$	6	8	5	5	7
$X_3$	5	6	9	7	$\infty$	3	4
$X_4$	9	5	10	2	10	$\infty$	$\infty$
$X_5$	8	5	$\infty$	1	10	10	10

Рис. 488

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$		1					
$X_2$	1						
$X_3$				1			
$X_4$					1		
$X_5$							1

(нули не обозначены)

Рис. 489.

найти насыщенную матрицу назначения, для которой

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij} \text{ минимальна.} \quad (62.5)$$

На рис. 488 приведен пример матрицы  $\|v_{ij}\|$ , а на рис. 489 — насыщенная матрица назначения с общей стоимостью

$$v_{12} + v_{21} + v_{34} + v_{45} + v_{57} = 3 + 7 + 7 + 10 + 10 = 37.$$

**Алгоритм решения задачи о назначении.** Опишем этот алгоритм для  $m = n$ ; позднее мы покажем, как общий случай ( $m \neq n$ ) можно свести к рассматриваемому. В его основе — венгерский алгоритм<sup>1)</sup>, позволяющий найти минимальную опо-

<sup>1)</sup> Венгерский алгоритм был найден около тридцати лет назад. В настоящее время предпочитают пользоваться методом последовательного ветвления и ограничения, который быстрее и проще приводит к цели в задачах с небольшими размерами матриц. Но при решении задач с большими размерами матриц преимущество на стороне венгерского алгоритма.

ру простого графа. Для иллюстрации приведем пример матрицы  $\|v_{ij}\|$  на рис. 490.

Предварительно сформулируем одну несложную лемму.

**Л е м м а .** *Множество решений задачи о назначении не изменяется, если все элементы какой-нибудь строки или какого-нибудь столбца уменьшить или увеличить на одно и то же число  $\lambda$ .*

**Доказательство.** Действительно, каждое решение задачи о назначении использует одно и только одно число  $v_{ij}$  в каждой строке и каждом столбце. Поэтому единственным следствием уменьшения или увеличения элементов какой-нибудь строки (или столбца) на величину  $\lambda$  будет уменьшение или увеличение на  $\lambda$  значения каждого решения.

**Описание алгоритма.** Он распадается на семь этапов.

А) *Получение нулей.* Из каждого элемента столбца  $Y_j$  вычитаем наименьший элемент этого столбца и образуем матрицу с элементами  $v_{ij}^{(1)} = v_{ij} - \min_i v_{ij}$ .

Далее, из каждого элемента строки  $X_i$  полученной матрицы вычитаем ее наименьший элемент и образуем матрицу с элементами

$$v_{ij}^{(2)} = v_{ij}^{(1)} - \min_j v_{ij}^{(1)}.$$

Матрица  $\|v_{ij}^{(2)}\|$  имеет нуль в каждой строке и каждом столбце. Для матрицы  $\|v_{ij}\|$  на рис. 490 матрица  $\|v_{ij}^{(1)}\|$  показана на рис. 491, а матрица  $\|v_{ij}^{(2)}\|$  — на рис. 492.

Б) *Нахождение полного паросочетания.* Ищем решение с нулевым значением для матрицы  $\|v_{ij}^{(2)}\|$ . Если такое решение удается найти, то оно будет оптимальным. В противном случае переходим к В). Для нахождения решения с нулевым значением рассматриваем сначала первую строку матрицы и отмечаем один из ее нулей, а остальные нули, а также другие нули того столбца, где отмечен нуль, зачеркиваем. Затем переходим ко второй строке: если она содержит незачеркнутый нуль, то отмечаем его и вычеркиваем остальные нули этой строки и все другие нули столбца, в котором находится отмеченный нуль. Поступаем аналогично с остальными строками.

В нашем примере (рис. 493) сначала отметили  $v_{12}^{(2)}$  и зачеркнули  $v_{15}^{(2)}$  и  $v_{42}^{(2)}$ . Затем отметили  $v_{24}^{(2)}$ ,  $v_{33}^{(2)}$ , зачеркнули  $v_{53}^{(2)}$  и т. д. Насыщенное назначение получить не удалось (строка  $X_4$  не содержит отмеченных нулей). Переходим к В).

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	8	5	$\infty$	7	6	9
$X_2$	6	3	9	1	$\infty$	7
$X_3$	5	$\infty$	3	6	8	8
$X_4$	9	1	8	$\infty$	5	4
$X_5$	1	2	1	$\infty$	2	3
$X_6$	$\infty$	$\infty$	3	5	3	10

Рис. 490.

В) *Нахождение максимального паросочетания*. Используем алгоритм, изложенный на стр. 390—391, но здесь вместо единиц будем обращать внимание на нули.

Помечаем косым крестиком каждую строку и каждый столбец, содержащие отмеченный нуль. В каждом из непомеченных столбцов найдем неотмеченный путь в какой-либо помеченной

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	7	4	$\infty$	6	4	6
$X_2$	5	2	8	0	$\infty$	4
$X_3$	4	$\infty$	2	5	6	5
$X_4$	8	0	7	$\infty$	3	1
$X_5$	0	1	0	$\infty$	0	0
$X_6$	$\infty$	$\infty$	2	4	1	7

Рис. 491.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	3	0	$\infty$	2	0	2
$X_2$	5	2	8	0	$\infty$	4
$X_3$	2	$\infty$	0	3	4	3
$X_4$	8	0	7	$\infty$	3	1
$X_5$	0	1	0	$\infty$	0	0
$X_6$	$\infty$	$\infty$	1	3	0	6

Рис. 492.

строке. Исходя из отмеченного нуля в этой строке, находим неотмеченный нуль в том же столбце и непомеченной строке. Если это удается сделать, то мы имеем возможность увеличить число отмеченных нулей. В противном случае ищем неотмеченный нуль в том же столбце и помеченной строке и, исходя из отмеченного

нуля в этой новой строке, ищем нуль в том же столбце и какой-либо непомеченной строке и т. д. Эту процедуру проводим для каждого непомеченного столбца. Если таким путем не удается увеличить число отмеченных нулей, то это означает, что найденное нами паросочетание максимальное.

В нашем примере не помечается лишь столбец  $Y_6$ . В этом столбце имеется неотмеченный нуль на месте  $(X_5, Y_6)$  в помеченной строке  $X_5$ . Отмеченный нуль в этой строке находится

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	3	0	$\infty$	2	0	2
$X_2$	5	2	8	0	$\infty$	4
$X_3$	2	$\infty$	0	3	4	3
$X_4$	8	0	7	$\infty$	3	1
$X_5$	0	1	0	$\infty$	0	0
$X_6$	$\infty$	$\infty$	1	3	0	6

Рис. 493.

на месте  $(X_5, Y_1)$ . Но в столбце  $Y_1$  он вообще единственный. Поэтому дальше действовать нельзя, и полученное паросочетание максимальное.

Если максимальное паросочетание дает насыщенное назначение, то оптимальное решение получено и процесс останавливается. В противном случае переходим к Г).

Г) *Нахождение минимальной опоры* (минимального множества линий, содержащего все нули). Действуем последовательно:

а) помечаем кружком каждую строку, не содержащую отмеченных нулей;

б) помечаем кружком каждый столбец, содержащий зачеркнутые нули какой-либо из помеченных кружком строк;

в) помечаем кружком каждую строку, содержащую отмеченный нуль в каком-нибудь столбце, помеченном кружком;

г) повторяем б) и в) до тех пор, пока оказывается возможным получать новые строки или столбцы, помечаемые кружком.

Можно нумеровать помечаемые строки и столбцы по мере их получения (как это сделано для нашего примера на рис. 494, 495), но необходимости в этом нет.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$		0			0	
$X_2$				0		
$X_3$			0			
$X_4$	0					
$X_5$	0	0	0	0	0	
$X_6$				0		

× × × × × ↑

Рис. 494.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	3	0	$\infty$	2	0	2
$X_2$	-5	-2	$\infty$	0	$\infty$	-4
$X_3$	-2	$\infty$	0	3	-4	-3
$X_4$	8	0	7	$\infty$	3	1
$X_5$	0	1	0	$\infty$	0	0
$X_6$	$\infty$	$\infty$	1	3	0	6

(3) (1) (5)  
2 4

Рис. 495.

Таким образом, приходим к минимальному множеству линий (т. е. строк или столбцов), содержащих все нули матрицы  $\|v_{ij}^{(2)}\|$ .

Д) *Выделение минимальной опоры.* Проведем пунктирные линии через все не помеченные кружком строки (в нашем примере  $X_2, X_3, X_5$ ) и все помеченные кружком столбцы (в нашем примере  $Y_2, Y_5$ ). Эти пунктиры обозначают минимальную опору.

Е) *Возможная перестановка некоторых нулей.* Рассмотрим подматрицу, образованную элементами, через которые не проходят пунктирные линии, и возьмем наименьший элемент этой подматрицы. Вычтем это число из элементов всех тех столбцов, через которые не проходят пунктирные линии, и затем прибавим его к элементам всех тех строк, через которые пунктирные линии проходят<sup>1)</sup>). Заметим, что, действуя таким образом, мы изменяем не множество решений, а только общее значение решений.

В нашем примере единица вычитается из элементов столбцов  $Y_1, Y_3, Y_4, Y_6$  и прибавляется затем к элементам строк  $X_2, X_3, X_5$ . Получаем матрицу на рис. 496.

Ж) *Переход к В).* Продолжаем так до тех пор, пока не получим решения с нулевым значением. Пусть  $v_{ij}^{(3)}$  — элементы полученной матрицы; оптимальное решение дается тогда такими ее нулевыми элементами  $v_{ij}^{(3)} = 0$ , что никакие два из них

<sup>1)</sup> При этом все элементы подматрицы уменьшаются на это число, элементы на пересечении пунктиров увеличиваются на это число, а остальные элементы матрицы остаются без изменения.

не расположены в одной строке или одном столбце (это решение может не быть единственным). Значение этого решения определяется через числа  $v_{ij}$ , стоящие на тех же местах в матрице  $\|v_{ij}\|$ .

В нашем примере оптимальное решение получено уже на рис. 495 (легко показать, что оно единственno). На рис. 497

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	2	0	$\infty$	1	0	1
$X_2$	5	3	8	0	$\infty$	4
$X_3$	2	$\infty$	0	3	5	3
$X_4$	7	0	6	$\infty$	3	0
$X_5$	0	2	0	$\infty$	1	0
$X_6$	$\infty$	$\infty$	0	2	0	5

$$\|v_{ij}^{(3)}\| =$$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	8	5	$\infty$	7	6	9
$X_2$	6	3	9	1	$\infty$	7
$X_3$	5	$\infty$	3	6	8	8
$X_4$	9	1	8	$\infty$	5	4
$X_5$	1	2	1	$\infty$	2	3
$X_6$	$\infty$	$\infty$	3	5	3	10

Рис. 496.

Рис. 497.

приведены значения  $v_{ij}$  и видно, что значение оптимального решения равно

$$v_{12} + v_{24} + v_{33} + v_{46} + v_{51} + v_{65} = 5 + 1 + 3 + 4 + 1 + 3 = 17. \quad (62.6)$$

**Случай  $m \neq n$ .** 1) Если  $m < n$ , то присоединим к матрице размера  $m \times n$   $m - n$  строк, состоящих из нулей, и с полученной матрицей поступаем так, как было описано.

Пример дается матрицей на рис. 498; процесс вычислений показан на рис. 499—502.

2) Если  $m > n$ , то присоединяем к матрице размера  $m \times n$   $m - n$  столбцов, состоящих из нулей, и с полученной матрицей поступаем так, как было описано.

Пример этого дается матрицей на рис. 503; процесс вычислений показан на рис. 504—507.

**Нахождение максимального решения.** В некоторых задачах требуется найти насыщенное назначение, которое бы осуществляло максимум  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij}$ . В этих случаях поступают так.

1) Находят число

$$v_0 = \max_{\substack{i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n}} v_{ij}$$

(очевидно, что матрица не должна содержать символа  $\infty$ ).

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	2	3	1	$\infty$	7	10	5
$X_2$	7	$\infty$	6	8	5	5	7
$X_3$	5	6	9	7	$\infty$	3	4
$X_4$	9	5	10	2	10	$\infty$	$\infty$
$X_5$	8	5	8	1	10	10	10
$X_6$	0	0	0	0	0	0	0
$X_7$	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 499.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	1	2	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	$\infty$	6	9	4
$X_2$	2	$\infty$	1	3	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	0	2
$X_3$	2	3	6	4	$\infty$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	1
$X_4$	7	3	8	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	8	$\infty$	$\infty$
$X_5$	7	4	7	0	9	9	9
$X_6$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	0	0	0	0	0	0
$X_7$	0	0	0	0	0	0	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>

$\times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times$   
*Максимальное паросочетание,  
полученное непосредственно*

Рис. 500.

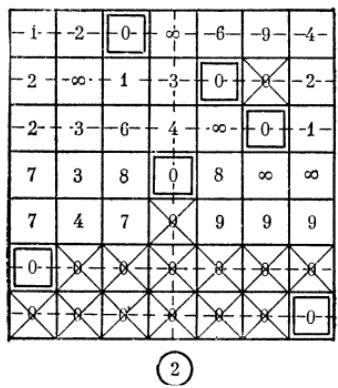


Рис. 501.

	1	2	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	$\infty$	6	9	4
2	$\infty$		1	6	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	2
2	3	6		7	$\infty$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	1
4	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	5	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	5	$\infty$	$\infty$
4	1	4	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	6	6	6
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>							
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>							

Рис. 502.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$
$X_1$	3	3	2	0	8
$X_2$	10	1	8	9	1
$X_3$	10	3	6	8	4
$X_4$	7	8	4	6	9
$X_5$	1	9	4	3	8
$X_6$	9	2	3	6	1

Рис. 503.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	3	3	2	0	8	0
$X_2$	10	1	8	9	1	0
$X_3$	10	3	6	8	4	0
$X_4$	7	8	4	6	9	0
$X_5$	1	9	4	3	8	0
$X_6$	9	2	3	6	1	0

Рис. 504.

2	2	0	0	7	0	$\times$
9	0	6	9	0	0	$\times$
9	2	4	8	3	0	$\times$
6	7	2	6	8	0	$\times$
0	8	2	3	7	0	$\times$
8	1	1	6	0	0	$\times$

Максимальное паросочетание, полученное непосредственно

Рис. 505.

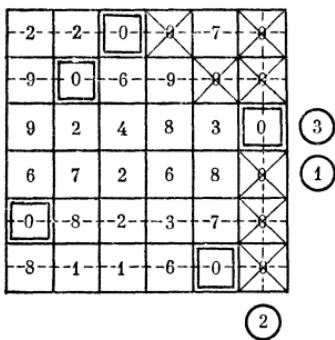


Рис. 506.

2	2	0	7	2
9	0	6	9	2
7	8	2	6	1
4	5	0	4	6
0	8	2	3	7
8	1	1	6	0

Рис. 507.

6	2	2	8	8	9
4	1	9	3	5	1
6	0	5	9	0	6
3	3	8	9	11	4
7	4	0	2	2	1
8	3	8	2	9	6

$$v_0 = 11$$

Рис. 508.

5	9	9	3	3	2
7	10	2	8	6	10
5	11	6	2	11	5
8	8	3	2	0	7
4	7	11	9	9	10
3	8	3	9	2	5

Рис. 509.

2) Находят далее минимальное решение задачи о назначении для матрицы  $\|v'_{ij}\|$  с

$$v'_{ij} = v_0 - v_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (62.7)$$

тогда

$$v_{ij} = v_0 - v'_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (62.8)$$

Если  $\mathbf{A}$  — множество насыщенных назначений и  $\delta \in \mathbf{A}$ , то

$$\max_{\delta \in \mathbf{A}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij} = \min(m, n) \cdot v_0 - \min_{\delta \in \mathbf{A}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} v'_{ij}. \quad (62.9)$$

2	2	7	1	3	0
4	3	0	6	6	8
2	4	4	0	11	3
5	1	1	0	0	5
1	0	9	7	9	8
0	1	1	7	2	3

Рис. 510.

2	2	7	1	3	0
4	3	0	6	6	8
2	4	4	0	11	3
5	1	1	0	0	5
1	0	9	7	9	8
0	1	1	7	2	3

Рис. 511. Насыщенное назначение.

5	9	9	3	3	2
7	10	2	8	6	10
5	11	6	2	11	5
8	8	3	2	0	7
4	7	11	9	9	10
3	8	3	9	2	5

$$2 + 2 + 2 + 0 + 7 + 3 = 16$$

Рис. 512.

6	2	2	8	8	9
1	4	9	3	5	1
6	0	5	9	0	6
3	3	8	9	11	4
7	4	0	2	2	1
8	3	8	2	9	6

$$9 + 9 + 9 + 11 + 4 + 8 = 50$$

Рис. 513.

Пример. Минимальное назначение для матрицы  $\|v'_{ij}\|$  имеет значение 16. Отсюда значение максимального назначения есть  $6 \times 11 - 16 = 50$ . Процесс вычислений представлен на рис. 508—513.

### УПРАЖНЕНИЯ

62А. Используя венгерский алгоритм, найти назначение с минимальным значением для графов а), б), в), г), д) из упражнения 54А.

62Б. То же, что в упражнении 62А, но для назначения с максимальным значением ( $\infty$  везде заменить на  $-\infty$ ).

62В. То же, что в упражнении 62А для графов *a*), *b*), *v*) из упражнения 54Е.

62Г. Для каждой из следующих матриц указать назначение с минимальным значением:

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	2	1	3	6	9	8
$X_2$	3	4	2	8	0	0
$X_3$	5	2	11	6	4	9
$X_4$	5	3	0	0	3	14

*a)*

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	4	28	16	6	0	0
$X_2$	3	2	5	7	0	3
$X_3$	4	13	4	0	18	9
$X_4$	28	0	$\infty$	6	3	9
$X_5$	0	5	2	6	$\infty$	17
$X_6$	19	4	$\infty$	5	33	$\infty$
$X_7$	0	0	2	8	7	0
$X_8$	13	31	$\infty$	0	3	4

*b)*

62Д. Метод Истмена<sup>1)</sup>.

Метод Истмена заключается в отыскании гамильтонова контура с минимальным значением, исходя из решений задачи о назначении с минимальным значением.

Предположим, что минимальное решение задачи о назначении содержит негамильтонов контур. Из этого контура следует вычеркнуть по крайней мере одну дугу. Пусть, например, в оптимальном решении задачи о назначении содержится контур  $(X_1, X_3, X_5, X_1)$ ; тогда проводят процесс ветвления и ограничения, используя следующие свойства:

$\bar{\mathcal{P}}_{13}$ : гамильтонов контур не проходит через  $(X_1, X_3)$ ,

$\bar{\mathcal{P}}_{35}$ : гамильтонов контур не проходит через  $(X_3, X_5)$ ,

$\bar{\mathcal{P}}_{51}$ : гамильтонов контур не проходит через  $(X_5, X_1)$ .

Таким образом, исходя из оптимального решения задачи о назначении, можно получить оптимальное решение задачи об оптимальном гамильтоновом контуре. Заметим, что прадерево, получающееся в ходе решения, строят, используя каждый раз разбиение не на две части, а на  $k$  частей, где  $k$  меняется в ходе процесса ( $k \geq 2$ ).

Рассмотреть упражнение 54З и получить его решение с помощью венгерского алгоритма для задачи о назначении, а затем перейти к задаче о гамильтоновом контуре, решая ее методом последовательного ветвления и ограничения.

---

<sup>1)</sup> См. Истмен (Eastman W. L.), A solution to the Traveling Salesman Problem, American Summer Meeting of the Econometric Society, Cambridge, Mass., Aug. 1958.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## БИНАРНАЯ БУЛЕВА АЛГЕБРА. КОЛЬЦО КЛАССОВ ВЫЧЕТОВ ПО МОДУЛЮ $n$ . ПОЛЯ ГАЛУА ХАРАКТЕРИСТИКИ $p$

---

### A1. Введение

В этом приложении мы достаточно подробно рассмотрим некоторые понятия и структуры, которые играют важную роль в комбинаторике; возможно, они известны читателю в той или иной мере.

Бинарная булева алгебра есть не что иное, как представление булевой алгебры на подмножествах некоторого множества с помощью переменных функций, принимающих только значения 0 и 1.

Кольца классов вычетов по модулю  $n$  рассматриваются главным образом для того, чтобы ввести поля Галуа. Предполагается, что читатель имеет представление о группах конечного порядка.

### A2. Булева алгебра

Рассмотрим следующий простой пример булевой структуры, построенной на множестве  $\{0, 1\}$ , на котором заданы операции  $\nabla$  и  $\Delta$ :

$$0 \nabla 0 = 0, \quad 0 \nabla 1 = 1, \quad 1 \nabla 0 = 1, \quad 1 \nabla 1 = 1, \quad (\text{A2.1})$$

$$0 \Delta 0 = 0, \quad 0 \Delta 1 = 0, \quad 1 \Delta 0 = 0, \quad 1 \Delta 1 = 1, \quad (\text{A2.2})$$

и операция дополнения:

$$\bar{0} = 1 \quad \text{и} \quad \bar{1} = 0. \quad (\text{A2.3})$$

В этом частном случае операцию  $\Delta$  можно рассматривать как обычное умножение:

$$0 \times 0 = 0, \quad 0 \times 1 = 0, \quad 1 \times 0 = 0, \quad 1 \times 1 = 1. \quad (\text{A2.4})$$

Ввиду того, что операция  $\nabla$  очень близка к сложению, используют вместо  $\nabla$  символ  $+$  и говорят, что имеют дело со следующей булевой операцией:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 1. \quad (\text{A2.5})$$

Мы рассмотрели в § 39 (пример 3) булеву структуру  $\mathcal{P}(E)$  для множества  $E$ . Кажется естественным исследовать вопрос о том, существует ли гомоморфизм<sup>1)</sup>  $\mathcal{P}(E)$  в крайне простую структуру  $\{0, 1\}$ ; в такой постановке гомоморфизм не представляет интереса, так как при этом невозможно различать подмножества с несколькими элементами.

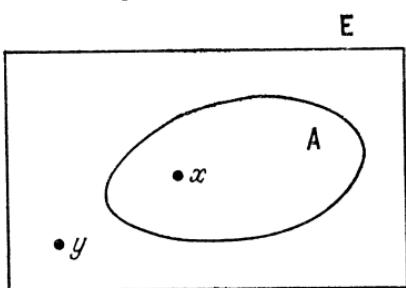


Рис. 514.

Тем не менее, желая сохранить простоту булевой записи, определяют гомоморфизм  $\mathcal{P}(E)$  в множество функций (называемых характеристическими), принимающих только два значения: 0 или 1.

**Характеристическая функция подмножества.** Рассмотрим подмножество  $A$  множества  $E$  (рис. 514).

Соотнесем подмножеству  $A$  характеристическую функцию

$$f_a(x) = F(A; x) \quad (\text{A2.6})$$

такую, что

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A, \text{ т. е. } x \in \bar{A} = C_E A. \end{cases} \quad (\text{A2.7})$$

Например, на рис. 514

$$x \in A: f_a(x) = 1, \quad (\text{A2.8})$$

$$y \in \bar{A}: f_a(y) = 0. \quad (\text{A2.9})$$

Чтобы показать, что таким путем реализуется гомоморфизм, нужно доказать, что для каждой операции, определенной на  $\mathcal{P}(E)$  (т. е. для дополнения, пересечения и объединения), существует соответствующая операция на множестве характеристических функций.

**Характеристическая функция отрицания.** Достаточно обратиться к определению характеристической функции, чтобы найти связь между  $F(\bar{A}; x)$  и  $F(A; x)$ .

Если положим

$$F(A; x) = f_a(x), \quad (\text{A2.10})$$

то либо  $f_a(x) = 1$  и  $x$  не принадлежит дополнению (отрицанию)  $A$ , следовательно,

$$F(\bar{A}; x) = 0, \quad (\text{A2.11})$$

либо  $f_a(x) = 0$  и  $x \in \bar{A}$ , следовательно,

$$F(\bar{A}; x) = 1. \quad (\text{A2.12})$$

<sup>1)</sup> Рассмотрим группоиды  $(E, \top)$ ,  $(F, \perp)$  и отображение  $h$  множества  $E$  в  $F$ . Говорят, что  $h$  — гомоморфизм  $E$  в  $F$ , если  $(\forall x \in E)(\forall y \in E) h(x \top y) = h(x) \perp h(y)$ .

Из диаграмм на рис. 515 видно, что

$$\bar{F}(\mathbf{A}; x) = 1 - F(\mathbf{A}; x), \quad (\text{A2.13})$$

или

$$f_{\bar{a}}(x) = 1 - f_a(x). \quad (\text{A2.14})$$

Пишут также  $\bar{f}_a(x)$  вместо  $f_{\bar{a}}(x)$ .

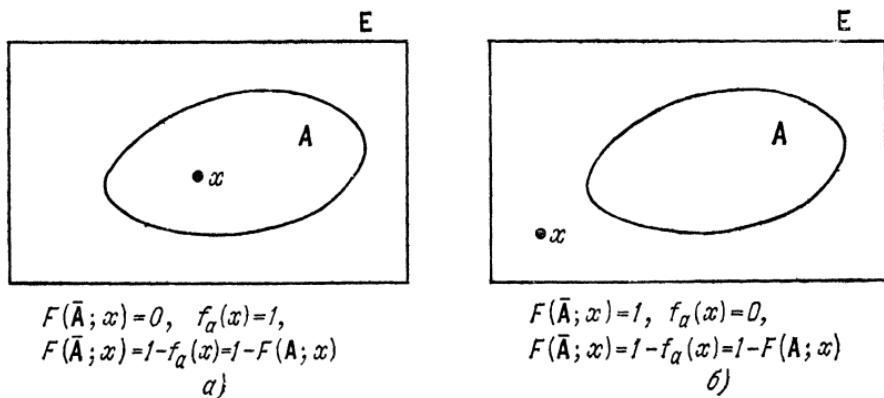


Рис. 515.

**Характеристическая функция пересечения.** Рассмотрим подмножества  $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} \subset \mathbf{E}$  и их характеристические функции

$$f_a(x) = F(\mathbf{A}; x), \quad f_b(x) = F(\mathbf{B}; x). \quad (\text{A2.15})$$

Если  $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ , то можно записать

$$F(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}; x) = 1. \quad (\text{A2.16})$$

Если  $x \notin \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ , то

$$F(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}; x) = 0. \quad (\text{A2.17})$$

Легко видеть (рис. 516), что если известны значения  $f_a(x)$  и  $f_b(x)$ , то значение  $F(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}; x)$  равно их произведению. Таким образом,

$$F(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}; x) = F(\mathbf{A}; x) F(\mathbf{B}; x) \quad (\text{A2.18})$$

или

$$f_{ab}(x) = f_a(x) f_b(x). \quad (\text{A2.19})$$

**Характеристическая функция объединения.** Как и раньше, положим

$$f_a(x) = F(\mathbf{A}; x), \quad f_b(x) = F(\mathbf{B}; x). \quad (\text{A2.20})$$

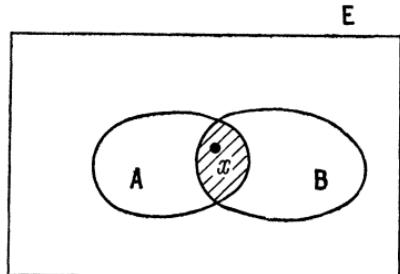
Легко видеть (рис. 517), что

$$F(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}; x) = f_a(x) + f_b(x) \quad (\text{A2.21})$$

при условии, что

$$1 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 0 + 1 = 1, \quad 0 + 0 = 0. \quad (\text{A2.22})$$

Можно ли представить  $F(A \cup B; x)$  с помощью соотношения из обычной алгебры? Получим это соотношение, используя найденные ранее результаты.

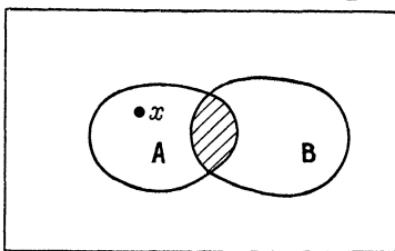


$$F(A \cap B; x) = 1,$$

$$f_a(x) = 1, f_b(x) = 1,$$

$$f_a(x) \cdot f_b(x) = 1$$

a)

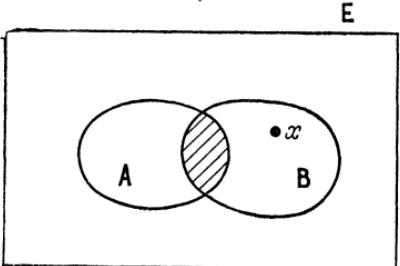


$$F(A \cap B; x) = 0,$$

$$f_a(x) = 1, f_b(x) = 0,$$

$$f_a(x) \cdot f_b(x) = 0$$

b)

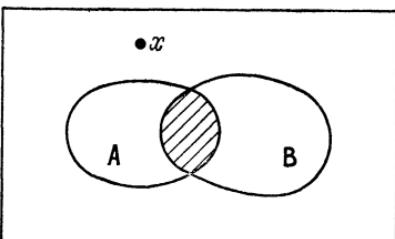


$$F(A \cap B; x) = 0,$$

$$f_a(x) = 0, f_b(x) = 1,$$

$$f_a(x) \cdot f_b(x) = 0$$

c)



$$F(A \cap B; x) = 0,$$

$$f_a(x) = 0, f_b(x) = 0,$$

$$f_a(x) \cdot f_b(x) = 0$$

d)

Рис. 516.

Напомним теорему де Моргана<sup>1)</sup>:

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}. \quad (A2.23)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F(A \cup B; x) &= F(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}; x) \\ &= 1 - F(\overline{A} \cap \overline{B}; x) \quad (\text{дополнение}), \\ &= 1 - [F(\overline{A}; x) F(\overline{B}; x)] \quad (\text{пересечение}), \\ &= 1 - [1 - F(A; x)][1 - F(B; x)] \quad (\text{дополнение}), \\ &= 1 - [1 - f_a(x)][1 - f_b(x)] \quad (\text{булево обозначение}), \\ &= f_a(x) + f_b(x) - f_a(x) f_b(x) \quad (\text{после упрощения}). \end{aligned} \quad (A2.24)$$

<sup>1)</sup> Теорема де Моргана утверждает, что

$$(A \subset E, B \subset E) \Rightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad (A \subset E, B \subset E) \Rightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Следовательно,

$$F(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}; x) = f_a(x) + f_b(x) = f_a(x) + f_b(x) - f_a(x)f_b(x), \quad (\text{A2.25})$$

$$f_{a+b}(x) = f_a(x) + f_b(x) - f_a(x)f_b(x). \quad (\text{A2.26})$$

Приходят к таблице сложения:

$$1 + 1 = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1,$$

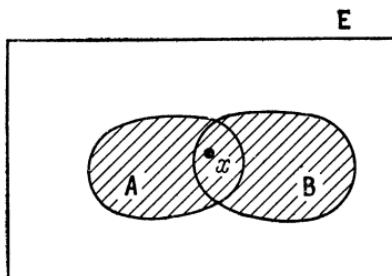
$$1 + 0 = 1 + 0 - 1 \cdot 0 = 1,$$

$$0 + 1 = 0 + 1 - 0 \cdot 1 = 1,$$

$$0 + 0 = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

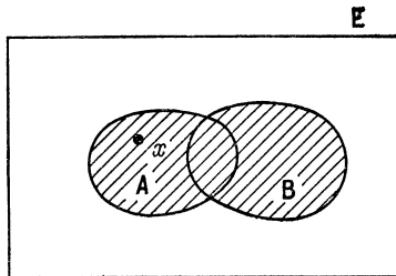
(A2.27)

Когда множества не пересекаются, и только в этом случае, можно не различать  $+$  и  $+$ .



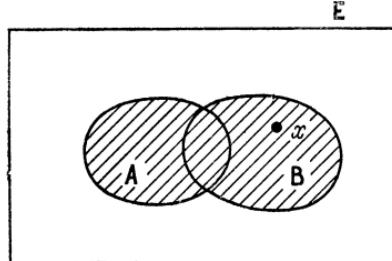
$$\begin{aligned} F(A \cup B; x) &= 1, \\ f_a(x) &= 1, f_b(x) = 1, \\ f_a(x) + f_b(x) &= 1 \end{aligned}$$

a)



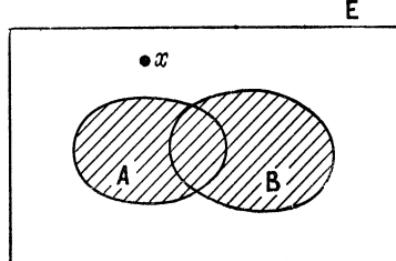
$$\begin{aligned} F(A \cup B; x) &= 1, \\ f_a(x) &= 1, f_b(x) = 0, \\ f_a(x) + f_b(x) &= 1 \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} F(A \cup B; x) &= 1, \\ f_a(x) &= 0, f_b(x) = 1, \\ f_a(x) + f_b(x) &= 1 \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} F(A \cup B; x) &= 0, \\ f_a(x) &= 0, f_b(x) = 0, \\ f_a(x) + f_b(x) &= 0 \end{aligned}$$

b)

Рис. 517.

**Алгебра характеристических функций.** Характеристические функции могут принимать только два значения: 0 или 1; все числовые значения, получающиеся при операциях  $\cdot$ ,  $+$  и  $-$ , также равны 0 или 1. Это говорит о том, что булева алгебра,

оперирующая с характеристическими функциями, есть двузначная алгебра<sup>1)</sup>.

Таким образом, если  $\alpha$  и  $\beta$  — значения двух характеристических функций, то

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta - \alpha\beta, \quad (\text{A2.28})$$

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad (\text{A2.29})$$

$$\bar{\alpha} = 1 - \alpha. \quad (\text{A2.30})$$

Характеристическое свойство чисел 0 и 1 — быть равным своему квадрату:

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1. \quad (\text{A2.31})$$

Отсюда

$$\alpha^2 = \alpha, \quad \beta^2 = \beta; \quad (\text{A2.32})$$

далее

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= (\alpha + \beta - \alpha\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta = \\ &= \alpha + \beta + \alpha\beta - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta + 2\alpha\beta = \alpha + \beta - \alpha\beta = \alpha + \beta, \end{aligned} \quad (\text{A2.33})$$

а также

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^2 &= \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta, \\ (\bar{\alpha})^2 &= (1 - \alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 1 - 2\alpha + \alpha = \bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A2.34})$$

Итак, булева алгебра описывается таблицами:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\alpha$	$\bar{\alpha}$
0	1
1	0

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Известно, что булева структура  $\mathcal{P}(E)$  (с операциями  $\cap$ ,  $\cup$  и  $\neg$ ) изоморфна алгебре логики (с операциями  $\wedge$ ,  $\vee$  и «не»).

Алгебра логики  
(двузначная логика)

Булева алгебра, или  
алгебра подмножеств  
некоторого множества

Алгебра характеристи-  
ческих функций подмно-  
жеств некоторого мно-  
жества

$\wedge$  (и)  
 $\vee$  (или \*)  
«не»

$\cap$  (пересечение)  
 $\cup$  (объединение)  
 $\neg$  (дополнение)

$\cdot$  (булево произведение)  
 $+$  (булева сумма)  
 $-$  (отрицание)

Чтобы проверить, тождественны ли две характеристические функции, можно воспользоваться либо таблицей истинности, ли-

<sup>1)</sup> Не следует смешивать ее с двоичной системой счисления.

<sup>2)</sup> Слово «или» понимается здесь в неисключающем смысле, т. е. высказывание « $A$  или  $B$ » истинно и тогда, когда истинны  $A$  и  $B$  вместе. (Прим. ред.)

бо представить каждую из них в одной из двух канонических форм, которые будут даны позднее.

**Таблица истинности.** Эта таблица составляется для всех значений каждой из функций при всех возможных значениях двоичных переменных, входящих в нее. Следующий пример иллюстрирует использование такой таблицы.

Пример.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha + \beta$	$(\alpha + \beta)\gamma$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	1	0	1	1
4	1	0	0	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1

Из этой таблицы видно, что функции

$$(\alpha + \beta)\gamma \text{ и } \alpha\gamma + \beta\gamma \quad (\text{A2.35})$$

тождественны, т. е. булева алгебра дистрибутивна. Числа 0, 1, ..., 7, стоящие слева, взяты для облегчения перечисления двоичных переменных. Так, числу 6 соответствует число 110 в двоичной системе, откуда  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ .

**Канонические формы.** Рассмотрим подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  множества  $E$  и соответствующие им характеристические функции  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые будут называться также булевыми переменными. Имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= f_{a_1}(x) = F(A_1; x), \\ x_2 &= f_{a_2}(x) = F(A_2; x), \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n &= f_{a_n}(x) = F(A_n; x). \end{aligned} \quad (\text{A2.36})$$

Итак,

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A_i, \\ 0, & \text{если } x \notin A_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{A2.37})$$

Пусть

$$\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (\text{A2.38})$$

— булева функция от  $n$  подмножеств и

$$f_\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Phi(A_1, A_2, \dots, A_n), \\ 0, & \text{если } x \notin \Phi(A_1, A_2, \dots, A_n), \end{cases} \quad (\text{A2.39})$$

ее характеристическая функция. Сопоставим  $\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n)$

функцию  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заменяя в выражении для  $\Phi$  подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  соответственно переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а операции  $\cup, \cap, -$  — соответственно на  $+$ ,  $\cdot$ ,  $-$ .  
Например,

$$\Phi(A_1, A_2, A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup \bar{A}_3 \quad (\text{A2.40})$$

сопоставляется  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \bar{x}_3$ . Очевидно, что

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n)}(x), \quad (\text{A2.41})$$

так как по построению

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Phi(A_1, A_2, \dots, A_n), \\ 0, & \text{если } x \notin \Phi(A_1, A_2, \dots, A_n). \end{cases} \quad (\text{A2.42})$$

Рассмотрим функцию

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{A2.43})$$

и положим

$$y = x_1r + \bar{x}_1s, \quad (\text{A2.44})$$

где  $r$  и  $s$  — некоторые бинарные функции. Если

$$x_1 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \text{то} \quad y = \varphi(1, x_2, \dots, x_n) = r, \quad (\text{A2.45})$$

и если

$$x_1 = 0, \quad \bar{x}_1 = 1, \quad \text{то} \quad y = \varphi(0, x_2, \dots, x_n) = s. \quad (\text{A2.46})$$

Итак,

$$y = x_1\varphi(1, x_2, \dots, x_n) + \bar{x}_1\varphi(0, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{A2.47})$$

Поступая аналогично с  $x_2$ , имеем

$$\varphi(1, x_2, \dots, x_n) = x_2\varphi(1, 1, x_3, \dots, x_n) + \bar{x}_2\varphi(1, 0, x_3, \dots, x_n), \quad (\text{A2.48})$$

$$\varphi(0, x_2, \dots, x_n) = x_2\varphi(0, 1, x_3, \dots, x_n) + \bar{x}_2\varphi(0, 0, x_3, \dots, x_n). \quad (\text{A2.49})$$

Отсюда

$$y = x_1x_2\varphi(1, 1, x_3, \dots, x_n) + x_1\bar{x}_2\varphi(1, 0, x_3, \dots, x_n) + \\ + \bar{x}_1x_2\varphi(0, 1, x_3, \dots, x_n) + \bar{x}_1\bar{x}_2\varphi(0, 0, x_3, \dots, x_n). \quad (\text{A2.50})$$

Действуя так же с  $x_3, \dots, x_n$ , получим

$$y = x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n \varphi(1, 1, 1, \dots, 1, 1) + \\ + x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}\bar{x}_n \varphi(1, 1, 1, \dots, 1, 0) + \\ + x_1x_2x_3 \dots \bar{x}_{n-1}\bar{x}_n \varphi(1, 1, 1, \dots, 0, 0) + \dots \\ \dots + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \dots x_{n-1}x_n \varphi(0, 0, 0, \dots, 1, 1) + \\ + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \dots x_{n-1}\bar{x}_n \varphi(0, 0, 0, \dots, 1, 0) + \\ + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_{n-1}x_n \varphi(0, 0, 0, \dots, 0, 1) + \\ + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_{n-1}\bar{x}_n \varphi(0, 0, 0, \dots, 0, 0). \quad (\text{A2.51})$$

Положим <sup>1)</sup>

$$\varphi_0 = \varphi(0, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \varphi_1 = \varphi(0, 0, 0, \dots, 0, 1), \dots, \\ \varphi_{2^n-2} = \varphi(1, 1, 1, \dots, 1, 0), \quad \varphi_{2^n-1} = \varphi(1, 1, 1, \dots, 1, 1), \quad (\text{A2.52})$$

$$m_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_{n-1} \bar{x}_n, \quad m_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_{n-1} x_n,$$

$$m_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots x_{n-1} \bar{x}_n, \dots, m_{2^n-1} = x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n. \quad (\text{A2.53})$$

Тогда

$$y_m = m_0 \varphi_0 + m_1 \varphi_1 + \dots + m_{2^n-1} \varphi_{2^n-1}. \quad (\text{A2.54})$$

Форма (A2.54) называется дизъюнктивной канонической формой, или первой канонической формой.

Положим теперь

$$y = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + r')(\bar{x}_1 + s'), \quad (\text{A2.55})$$

где  $r'$  и  $s'$  — некоторые бинарные функции. Действуя, как и раньше, полагая сначала  $x_1 = 1$  и  $x_1 = 0$ , затем  $x_2 = 1$  и  $x_2 = 0$  и т. д., получаем

$$y = [x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n + \mu(0, 0, \dots, 0, 0)] \cdot \\ \cdot [x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \bar{x}_n + \mu(0, 0, \dots, 0, 1)] \cdot \dots \\ \dots \cdot [\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{n-1} + x_n + \mu(1, 1, \dots, 1, 0)] \cdot \\ \cdot [\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{n-1} + \bar{x}_n + \mu(1, 1, \dots, 1, 1)]. \quad (\text{A2.56})$$

Обозначим

$$M_0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{n-1} + \bar{x}_n, \\ M_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{n-1} + x_n, \dots, \\ M_{2^n-2} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \bar{x}_n, \\ M_{2^n-1} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n. \quad (\text{A2.57})$$

Тогда

$$y_M = (M_{2^n-1} + \mu_0)(M_{2^n-2} + \mu_1) \dots (M_1 + \mu_{2^n-2})(M_0 + \mu_{2^n-1}). \quad (\text{A2.58})$$

Форма (A2.58) называется конъюнктивной канонической формой, или второй канонической формой.

Можно доказать, что разложения (A2.54) и (A2.58) единственны.

Пример. Детали вычислений мы оставляем читателю. Пусть

$$y = a \overline{(\bar{b}\bar{d} + bc)} + \bar{a}\bar{b}(c + d).$$

<sup>1)</sup> За индекс  $i$  у  $\varphi_i$  берется число, соответствующее двоичное разложение которого указано в скобках.

Находим последовательно

$$\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1, \varphi_3 = 1, \varphi_4 = 0, \varphi_5 = 0, \varphi_6 = 0, \varphi_7 = 0, \quad (\text{A2.59})$$

$$\varphi_8 = 0, \varphi_9 = 1, \varphi_{10} = 0, \varphi_{11} = 1, \varphi_{12} = 1, \varphi_{13} = 1, \varphi_{14} = 0, \varphi_{15} = 0.$$

Для простоты выписываем члены  $m_i$  с ненулевыми коэффициентами:

$$m_1 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}, \quad m_2 = \bar{a}\bar{b}cd, \quad m_3 = \bar{a}\bar{b}cd, \quad m_9 = a\bar{b}\bar{c}\bar{d}, \quad (\text{A2.60})$$

$$m_{11} = ab\bar{c}d, \quad m_{12} = ab\bar{c}\bar{d}, \quad m_{13} = ab\bar{c}d.$$

Тогда

$$y_m = m_1 + m_2 + m_3 + m_9 + m_{11} + m_{12} + m_{13}.$$

Выписываем

$$M_0 = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}, \quad M_1 = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d, \quad M_5 = \bar{a} + b + \bar{c} + d$$

$$M_7 = \bar{a} + b + c + d, \quad M_8 = a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}, \quad M_9 = a + \bar{b} + \bar{c} + d,$$

$$M_{10} = a + \bar{b} + c + \bar{d}, \quad M_{11} = a + \bar{b} + c + d, \quad M_{15} = a + b + c + d. \quad (\text{A2.61})$$

Тогда

$$y_M = M_0 M_1 M_5 M_7 M_8 M_9 M_{10} M_{11} M_{15}. \quad (\text{A2.62})$$

Легко перейти от одной формы к другой, учитывая, что  $\mu_i = \varphi_i$ :

$$\varphi_i = \mu_i = 0 \Rightarrow M_{2^n-i-1}, \quad (\text{A2.63})$$

$$\mu_i = \varphi_i = 1 \Rightarrow m_i. \quad (\text{A2.64})$$

**Булевые уравнения.** Мы ограничимся здесь простейшими уравнениями. Рассмотрим уравнение

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1. \quad (\text{A2.65})$$

Говорят, что это уравнение решено, если оно представлено в виде

$$\varphi_0 m_0 + \varphi_1 m_1 + \dots + \varphi_{2^n-1} m_{2^n-1} = 1, \quad (\text{A2.66})$$

так как достаточно затем определить  $n$ -выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , для которых  $F = 1$ . Уравнение

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (\text{A2.67})$$

сводится к

$$\bar{F} = 1. \quad (\text{A2.68})$$

Пример. Пусть

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3 + x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 = 1. \quad (\text{A2.69})$$

Имеем последовательно

$$\begin{aligned} F(0, 0, 0, 0) &= 1, \quad F(0, 0, 0, 1) = 1, \quad F(0, 0, 1, 0) = 0, \quad F(0, 0, 1, 1) = 1, \\ F(0, 1, 0, 0) &= 1, \quad F(0, 1, 0, 1) = 1, \quad F(0, 1, 1, 0) = 0, \quad F(0, 1, 1, 1) = 0, \\ F(1, 0, 0, 0) &= 1, \quad F(1, 0, 0, 1) = 0, \quad F(1, 0, 1, 0) = 1, \\ F(1, 0, 1, 1) &= 1, \quad F(1, 1, 0, 0) = 1, \quad F(1, 1, 0, 1) = 1, \quad F(1, 1, 1, 0) = 1, \\ F(1, 1, 1, 1) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A2.70})$$

Таким образом, решения уравнения (A2.69) таковы:

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 1), \quad (0, 0, 1, 1), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 1), \quad (1, 0, 0, 0), \\ (1, 0, 1, 0), \quad (1, 0, 1, 1), \quad (1, 1, 0, 0), \quad (1, 1, 0, 1), \quad (1, 1, 1, 0), \quad (1, 1, 1, 1). \end{aligned} \quad (\text{A2.71})$$

Разложение (A2.69) запишется в виде

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \\ &+ \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \\ &+ x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4. \end{aligned} \quad (\text{A2.72})$$

Булевы уравнения вида  $F = 1$  или  $F = 0$  встречаются во многих задачах. Например, рассмотрим конечное множество  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Тот факт, что  $A \subset E$ , описывается уравнением

$$F_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1, \quad (\text{A2.73})$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — булевые переменные, соотнесенные элементам  $E$ .

Пример. Пусть  $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ . Определим подмножества  $A \subset E$  условием

$$(a_1 \in A \text{ и } a_3 \in A) \text{ или } (a_2 \in A \text{ и } a_3 \notin A)$$

$$\text{или } (a_1 \notin A \text{ и } a_2 \notin A \text{ и } a_4 \in A) \text{ или } (a_3 \notin A \text{ и } a_4 \notin A). \quad (\text{A2.74})$$

Это условие сводится к уравнению (A2.69), решения которого уже найдены. Выпишем подмножества  $A$ :

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0) &- \emptyset, \quad (0, 0, 0, 1) - \{a_4\}, \quad (0, 0, 1, 1) - \{a_3, a_4\}, \\ (0, 1, 0, 0) &- \{a_2\}, \quad (0, 1, 0, 1) - \{a_2, a_4\}, \quad (1, 0, 0, 0) - \{a_1\}, \\ (1, 0, 1, 0) &- \{a_1, a_3\}, \quad (1, 0, 1, 1) - \{a_1, a_3, a_4\}, \\ (1, 1, 0, 0) &- \{a_1, a_2\}, \end{aligned} \quad (\text{A2.75})$$

$$(1, 1, 0, 1) - \{a_1, a_2, a_4\}, \quad (1, 1, 1, 0) - \{a_1, a_2, a_3\},$$

$$(1, 1, 1, 1) - \{a_1, a_2, a_3, a_4\}.$$

Это все подмножества, удовлетворяющие условию (A2.74).

Булевы уравнения можно использовать при доказательствах. Действительно, сказать, что условие  $\mathcal{C} = 1$  дает результат

$\mathcal{R} = 1$  ( $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{R}$  — булевы функции), равносильно доказательству того, что

$$\mathcal{C} + \mathcal{R} = 1 \text{ тождественно.} \quad (\text{A2.76})$$

Утверждение:  $\mathcal{C} = 1$  — необходимое и достаточное условие того, что  $\mathcal{R} = 1$ , — равносильно тому, что

$$(\bar{\mathcal{C}} + \mathcal{R})(\mathcal{C} + \bar{\mathcal{R}}) = \bar{\mathcal{C}}\mathcal{R} + \mathcal{C}\bar{\mathcal{R}} = 1 \text{ тождественно.} \quad (\text{A2.77})$$

**Основные формулы двухэлементной булевой алгебры.** Дадим здесь сводку основных формул для булевых характеристических функций  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$ab = ba, \quad \left. \begin{array}{l} ab = ba, \\ a + b = b + a \end{array} \right\} \text{коммутативность;} \quad (\text{A2.78})$$

$$a + b = b + a \quad (\text{A2.79})$$

$$(ab)c = a(bc), \quad \left. \begin{array}{l} (ab)c = a(bc), \\ (a + b) + c = a + (b + c) \end{array} \right\} \text{ассоциативность;} \quad (\text{A2.80})$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{A2.81})$$

$$aa = a, \quad \left. \begin{array}{l} aa = a, \\ a + a = a \end{array} \right\} \text{идемпотентность;} \quad (\text{A2.82})$$

$$a + a = a \quad (\text{A2.83})$$

$$a(b + c) = ab + ac, \quad \left. \begin{array}{l} a(b + c) = ab + ac, \\ a + (bc) = (a + b)(a + c) \end{array} \right\} \text{дистрибутивность;} \quad (\text{A2.84})$$

$$a + (bc) = (a + b)(a + c) \quad (\text{A2.85})$$

$$a\bar{a} = 0, \quad (\text{A2.86})$$

$$a + \bar{a} = 1, \quad (\text{A2.87})$$

$$a0 = 0, \quad (\text{A2.88})$$

$$a + 0 = a; \quad (\text{A2.89})$$

$$a1 = a, \quad (\text{A2.90})$$

$$a + 1 = 1; \quad (\text{A2.91})$$

$$\bar{(\bar{a})} = a; \quad (\text{A2.92})$$

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \left. \begin{array}{l} \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}, \\ \overline{a + b} = \bar{a}\bar{b} \end{array} \right\} \text{теорема де Моргана;} \quad (\text{A2.93})$$

$$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b} \quad (\text{A2.94})$$

$$\bar{a} + ab = \bar{a} + b, \quad (\text{A2.95})$$

$$\bar{a}(a + b) = \bar{a}b. \quad (\text{A2.96})$$

## УПРАЖНЕНИЯ

**A2.А.** Дать первую и вторую канонические формы функций:

$$\text{а)} y = x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2(x_1 + \bar{x}_3), \quad \text{б)} y = x_1 + x_2 + \bar{x}_2x_3, \quad \text{в)} y = x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_4.$$

**A2.Б.** Доказать тождества:

$$\text{а)} (ab\bar{c} + b\bar{c})\overline{\bar{a}b\bar{c}} = a\bar{c},$$

$$\text{б)} \bar{a}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}b + a\bar{b}c + a\bar{c}b = \bar{a}(b + c) + b\bar{c} + \bar{b}c,$$

$$\text{в)} \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} = \bar{a}b + \bar{c}$$

**A2.В.** Решить уравнения:

а)  $x_1x_2\bar{x}_3 = 1$ , б)  $x_1x_2 + x_3 + \bar{x}_4 = 0$ , в)  $x_1\bar{x}_2 + x_1(x_3 + \bar{x}_4) = 1$ .

**A2.Г.** Решить системы уравнений:

а)  $x_1x_2 + \bar{x}_3 = 1$ ,  $x_1\bar{x}_2x_3 = 0$ ;

б)  $x_1\bar{x}_2 = 1$ ,  $x_2\bar{x}_3 = 1$ ,  $x_3\bar{x}_1 = 1$ .

**A2.Д.** В обычной алгебре из  $xyz = 0$  вытекает, что по крайней мере один сомножитель равен нулю. Показать, что в двухэлементной булевой алгебре из  $xyz = 1$  следует, что каждый из сомножителей равен 1.

### А3. Кольцо классов вычетов по модулю $n$

Рассмотрим множество  $\mathbf{E}$ , на котором заданы два закона композиции  $*$  и  $\circ$ , удовлетворяющих следующим свойствам.

1) Для всех  $x, y, z \in \mathbf{E}$

$$(x * y) * z = x * (y * z) \text{ (ассоциативность),} \quad (\text{A3.1})$$

$$x * e = e * x = x \text{ (существование нейтрального элемента),} \quad (\text{A3.2})$$

$$x * \bar{x} = \bar{x} * x = e \text{ (для любого элемента существует обратный),} \quad (\text{A3.3})$$

$$x * y = y * x \quad (\text{коммутативность}). \quad (\text{A3.4})$$

Итак, множество  $\mathbf{E}$  относительно закона композиции  $*$  образует коммутативную группу.

2) Для всех  $x, y, z \in \mathbf{E}$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \quad (\text{A3.5})$$

закон композиции  $\circ$  ассоциативен.

3) Для всех  $x, y, z$  из  $\mathbf{E}$

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z) \text{ (дистрибутивность слева),} \quad (\text{A3.6})$$

$$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y) \text{ (дистрибутивность справа).} \quad (\text{A3.7})$$

Множество  $\mathbf{E}$  с законами композиции  $*$  и  $\circ$ , для которых выполняются вышеуказанные условия, называется *кольцом*.

Законы композиции  $*$  и  $\circ$  обозначают также через  $+$  и  $\cdot$ , первый называют законом сложения, а второй — законом умножения. Кольцо часто обозначают через  $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ .

Пример кольца приведен на рис. 518.

Для кольца выполняются следующие свойства.

1) Можно определить вычитание как закон композиции, обратный сложению  $*$ ; но относительно вычитания кольцо не является группой. Имеем также  $(\forall x \neq 0)x - 0 \neq 0 - x$ .

Разность обозначается

$$x - y = x + (-y). \quad (\text{A3.8})$$

2) Умножение дистрибутивно относительно вычитания:

$$x \circ (y - z) = x \circ y - x \circ z, \quad (\text{A3.9})$$

$$(x - y) z = xz - yz. \quad (\text{A3.10})$$

3) Имеем

$$(-x)(-y) = xy, \quad (\text{A3.11})$$

$$(-x)y = -(xy), \quad (\text{A3.12})$$

$$x(-y) = -(xy). \quad (\text{A3.13})$$

c	c	e	a	b
b	b	c	e	a
a	a	b	c	e
e	e	a	b	c
E	e	a	b	c

Закон композиции \*

c	e	c	b	a
b	e	b	e	b
a	e	a	b	c
e	e	e	e	e
E	e	a	b	c

Закон композиции o

Рис. 518.

4) Можно использовать запись:

$$x^n = xx \dots x \text{ (n раз)}, \quad (\text{A3.14})$$

$$(\overline{x^n}) = x^{-n}, \quad (\text{A3.15})$$

$$x^p x^q = x^q x^p = x^{p+q}. \quad (\text{A3.16})$$

5) Кольцо называют коммутативным, если

$$x \circ y = y \circ x. \quad (\text{A3.17})$$

**Характеристика кольца.** Обозначим через

$$nx, \text{ где } n \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} \text{ и } x \in E, \quad (\text{A3.18})$$

сумму  $n$  элементов кольца, каждый из которых равен  $x$ :

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ раз}} & \text{при } n > 0, \\ 0 & \text{при } n = 0, \\ \underbrace{(-x) + (-x) + \dots + (-x)}_{n \text{ раз}} & \text{при } n < 0. \end{cases} \quad (\text{A3.19})$$

Пусть  $e$  — нейтральный элемент относительно закона  $\circ$ . Наименьшее целое положительное  $n$ , для которого

$$ne = 0, \quad (\text{A3.20})$$

называется *характеристикой кольца*. Если такого  $n$  не существует, то говорят, что кольцо имеет характеристику нуль.

Для коммутативных колец характеристики  $n > 0$  ( $n$  простое) имеем

$$C_n^p = nq \quad (q \in \mathbf{N}, p \neq 0, p \neq n), \quad (\text{A3.21})$$

$$C_n^n = C_n^0 = 1 \quad (\text{A3.22})$$

и, если существует единица  $e$ ,

$$C_n^p = n(qe) = 0. \quad (\text{A3.23})$$

Отсюда получаем

$$(a + b)^n = a^n + b^n, \quad (\text{A3.24})$$

$$(a - b)^n = a^n - b^n. \quad (\text{A3.25})$$

**Кольцо классов вычетов по модулю  $n$ .** Рассмотрим отношение эквивалентности, или сравнимости, на множестве  $\mathbf{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ , определяемое следующим образом.

Пусть  $n \in \mathbf{N}_0$ ;  $r \in \mathbf{N}$ ;  $a, b, q, q' \in \mathbf{Z}$ . Два числа  $a$  и  $b$  называют *сравнимыми по модулю  $n$* , если их разность делится на  $n$ , т. е. они дают один и тот же остаток при делении на  $n$ :

$$a = nq + r, \quad (\text{A3.26})$$

$$b = nq' + r. \quad (\text{A3.27})$$

Отсюда

$$a - b = n(q - q'). \quad (\text{A3.28})$$

Записывают

$$a \equiv b \pmod{n}. \quad (\text{A3.29})$$

Например,

$$-17 \equiv 31 \pmod{3}, \quad (\text{A3.30})$$

$$163 \equiv 79 \pmod{14}. \quad (\text{A3.31})$$

Все числа вида  $a + kn$ , где  $a, k \in \mathbf{Z}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , образуют класс, называемый *классом вычетов*.

Следовательно, имеем  $n$  классов вычетов. Фактор-множество  $\mathbf{Z}/G$ , где  $G$  — рассматриваемое отношение эквивалентности по модулю  $n$ , обозначается через  $\mathbf{Z}/n$ . Его элементы:

$$\text{класс } 0: \quad a_0 \equiv 0 \pmod{n},$$

$$\text{класс } 1: \quad a_1 \equiv 1 \pmod{n},$$

.....

$$\text{класс } n-1: \quad a_{n-1} \equiv n-1 \pmod{n}.$$

Например, при  $n = 7$  имеем

Класс	0	1	2	3	4	5	6
$k = -2$	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8
$k = -1$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$k = 0$	0	1	2	3	4	5	6
$k = 1$	7	8	9	10	11	12	13
$k = 2$	14	15	16	17	18	19	20
...	...	...	...	...	...	...	...

(A3.33)

Классы можно обозначать произвольно. Например,

$$\begin{aligned}
 \text{класс } (-2): & a_{-2} \equiv -2 \pmod{7}, \\
 \text{класс } (-1): & a_{-1} \equiv -1 \pmod{7}, \\
 \text{класс } (0): & a_0 \equiv 0 \pmod{7}, \\
 \text{класс } (1): & a_1 \equiv 1 \pmod{7}, \\
 \text{класс } (2): & a_2 \equiv 2 \pmod{7}, \\
 \text{класс } (3): & a_3 \equiv 3 \pmod{7}, \\
 \text{класс } (4): & a_4 \equiv 4 \pmod{7}.
 \end{aligned} \tag{A3.34}$$

Обычно их обозначают по наименьшему положительному их представителю:  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ , ...,  $\{n-1\}$ . Вводя сложение и умножение по модулю  $n$ , можно проверить, что для любого  $n \in \mathbb{N}_0$  множество классов вычетов по модулю  $n$  образует коммутативное кольцо.

При м е р ы. Рассмотрим множество классов вычетов по модулю 5; имеем

$$\{2\} + \{4\} = \{1\}, \tag{A3.35}$$

$$\{3\} + \{2\} = \{0\}, \tag{A3.36}$$

$$\{3\} + \{1\} = \{4\}, \tag{A3.37}$$

$$\{2\} \cdot \{3\} = \{1\}, \tag{A3.38}$$

$$\{3\} \cdot \{4\} = \{2\}. \tag{A3.39}$$

Приведем кольца  $\mathbb{Z}/2$ ,  $\mathbb{Z}/3$ ,  $\mathbb{Z}/4$ ,  $\mathbb{Z}/5$ ,  $\mathbb{Z}/6$  (рис. 519—523).

Основные свойства кольца  $\mathbb{Z}/n$ . 1) Характеристика кольца  $\mathbb{Z}/n$  равна  $n$ . Например, для  $\mathbb{Z}/4$  имеем (см. рис. 521)

$$\begin{aligned}
 4 \{3\} &= \underbrace{\{3\}}_{\{2\}} + \underbrace{\{3\}}_{\{1\}} + \underbrace{\{3\}}_{\{0\}} + \underbrace{\{3\}}_{\{1\}} \\
 &= \underbrace{\{2\}}_{\{1\}} + \underbrace{\{3\}}_{\{0\}} + \{3\} \\
 &= \underbrace{\{1\}}_{\{0\}} + \underbrace{\{3\}}_{\{1\}} \\
 &= \{0\}
 \end{aligned} \tag{A3.40}$$

(mod 2)

{1}	{1}	{0}
{0}	{0}	{1}
+	{0}	{1}

{1}	{0}	{1}
{0}	{0}	{0}
+	{0}	{1}

{2}	{2}	{0}	{1}
{1}	{1}	{2}	{0}
{0}	{0}	{1}	{2}
+	{0}	{1}	{2}

(mod 3)

{2}	{0}	{2}	{1}
{1}	{0}	{1}	{2}
{0}	{0}	{0}	{0}
+	{0}	{1}	{2}

Рис. 519.

Рис. 520.

(mod 4)

{3}	{3}	{0}	{1}	{2}
{2}	{2}	{3}	{0}	{1}
{1}	{1}	{2}	{3}	{0}
{0}	{0}	{1}	{2}	{3}
+	{0}	{1}	{2}	{3}

{3}	{0}	{3}	{2}	{1}
{2}	{0}	{2}	{0}	{2}
{1}	{0}	{1}	{2}	{3}
{0}	{0}	{0}	{0}	{0}
+	{0}	{1}	{2}	{3}

Рис. 521.

(mod 5)

{4}	{4}	{0}	{1}	{2}	{3}
{3}	{3}	{4}	{0}	{1}	{2}
{2}	{2}	{3}	{4}	{0}	{1}
{1}	{1}	{2}	{3}	{4}	{0}
{0}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
+	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}

{4}	{0}	{4}	{3}	{2}	{1}
{3}	{0}	{3}	{1}	{4}	{2}
{2}	{0}	{2}	{4}	{1}	{3}
{1}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
{0}	{0}	{0}	{0}	{0}	{0}
+	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}

Рис. 522.

(mod 6)

{5}	{5}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
{4}	{4}	{5}	{0}	{1}	{2}	{3}
{3}	{3}	{4}	{5}	{0}	{1}	{2}
{2}	{2}	{3}	{4}	{5}	{0}	{1}
{1}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{0}
{0}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
+	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}

{5}	{0}	{5}	{4}	{3}	{2}	{1}
{4}	{0}	{4}	{2}	{0}	{4}	{2}
{3}	{0}	{3}	{0}	{3}	{0}	{3}
{2}	{0}	{2}	{4}	{0}	{2}	{4}
{1}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
{0}	{0}	{0}	{0}	{0}	{0}	{0}
+	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}

Рис. 523.

а

$$5 \{3\} = \{3\} + \{3\} + \{3\} + \{3\} + \{3\} = \{3\}. \quad (\text{A3.41})$$

2) Нейтральный элемент относительно умножения для кольца  $\mathbf{Z}/n$ , где  $n$  простое, равен  $\{1\}$ . Это следует из теоремы Ферма: для всех  $k \in \mathbf{N}$ ,  $n \in \mathbf{N}_0$ ,  $n$  — простое число, имеем

$$k^n \equiv k \pmod{n}. \quad (\text{A3.42})$$

3) Обратимым элементом кольца  $\mathbf{Z}/n$  называют элемент  $a$ , для которого

$$aa^{-1} = a^{-1}a = \{1\}. \quad (\text{A3.43})$$

Например (см. рис. 518—522),

$\{1\}$  — обратимый элемент кольца  $\mathbf{Z}/2$ ,

$\{1\}$  и  $\{2\}$  — обратимые элементы кольца  $\mathbf{Z}/3$ ,

$\{1\}$  и  $\{3\}$  — обратимые элементы кольца  $\mathbf{Z}/4$ ,

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$  — обратимые элементы кольца  $\mathbf{Z}/5$ ,

$\{1\}$  и  $\{5\}$  — обратимые элементы кольца  $\mathbf{Z}/6$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

**A3.А.** Показать, что на  $\mathbf{Z}$  существует единственная операция:

1) дистрибутивная относительно сложения,

2) сводящаяся к умножению на  $\mathbf{N}$ .

**A3.Б.** Рассмотрим пары  $(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ . Введем на множестве  $E$  этих пар следующие законы композиции: для всех  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$  имеем

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Показать, что получаем кольцо.

**A3.В.** Описать кольца  $\mathbf{Z}/7$ ,  $\mathbf{Z}/8$ .

**A3.Г.** Показать, пользуясь (A3.42), что нейтральный элемент относительно умножения в кольце  $\mathbf{Z}/n$  есть  $\{1\}$ .

**A3.Д.** Указать обратимые элементы в кольцах  $\mathbf{Z}/7$  и  $\mathbf{Z}/8$ .

## А4. Поля Галуа

Прежде чем перейти к свойствам полей Галуа, напомним понятие поля.

Полем ( $E, *, \circ$ ) называется кольцо, которое обладает нейтральным элементом относительно умножения и для любого не равного нулю элемента которого существует обратный элемент относительно умножения. Другое определение: кольцо есть поле, если все его элементы, отличные от нуля, образуют мультипликативную группу. Исходя из одного из этих определений, можно определить поле непосредственно. Элементы поля ( $E, *, \circ$ ) удовлетворяют следующим аксиомам.

$\alpha)$  Существует аддитивная коммутативная группа  $(E, *)$ , а именно: для всех  $x, y, z \in E$

$$(\exists 0 \in E) x * 0 = 0 * x = x, \quad (\text{A4.1})$$

$$(\exists \bar{x} \in E) \bar{x} * x = x * \bar{x} = 0, \quad (\text{A4.2})$$

$$(x * y) * z = x * (y * z), \quad (\text{A4.3})$$

$$x * y = y * x. \quad (\text{A4.4})$$

$\beta)$  Существует мультипликативная группа  $(E_0, \circ)$ , где  $E_0 = E - \{0\}$ , такая, что для всех  $x, y, z \in E_0$

$$(\exists 1 \in E_0) x \circ 1 = 1 \circ x = x, \quad (\text{A4.5})$$

$$(\exists x^{-1} \in E_0) x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = 1, \quad (\text{A4.6})$$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z). \quad (\text{A4.7})$$

$\gamma)$  Умножение дистрибутивно слева и справа по отношению к сложению:

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z), \quad (\text{A4.8})$$

$$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y). \quad (\text{A4.9})$$

Если мультипликативная группа коммутативна, т. е.

$$x \circ y = y \circ x, \quad (\text{A4.10})$$

то поле называется *коммутативным* \*) и обозначается  $(E, +, \circ)$ . Например, множество  $E = \{0, 1, a, b, c\}$  с законами композиции «+» и «·», как на рис. 524, образует поле.

<i>c</i>	<i>c</i>	0	1	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	0	1	<i>a</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	0	1
1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	0
0	0	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>

<i>c</i>	0	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	1
<i>b</i>	0	<i>b</i>	1	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>a</i>	0	<i>a</i>	<i>c</i>	1	<i>b</i>
1	0	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
0	0	0	0	0	0

Рис. 524.

Множества **Q** (рациональных чисел), **R** (действительных чисел), **C** (комплексных чисел) образуют (коммутативные) поля относительно обычного сложения и умножения.

**Характеристика поля.** Характеристика поля  $(E, *, \circ)$  — это характеристика соответствующего ему кольца. Характеристика поля может быть как нулевой (как в случае **Q**, **R** и **C**), так и

\*) В математической литературе в Советском Союзе часто называют полем только коммутативное поле, некоммутативные же поля называют *телами*. (Прим. ред.)

положительной, в последнем случае она необходимо будет простым числом. Действительно, если

$$n = pq, \quad \text{где } n, p, q \in \mathbb{N}, \quad (\text{A4.11})$$

то

$$n \circ e = (pq) \circ e = (pe) \circ (qe), \quad (\text{A4.12})$$

т. е.

$$(pe) \circ (qe) = 0, \quad (\text{A4.13})$$

что невозможно, так как поле не имеет собственных делителей нуля<sup>1</sup>). Очевидно, что кольцо  $\mathbb{Z}/n$  ( $n$  простое) есть коммутативное поле характеристики  $n$ .

1	1	0
0	0	1
0	1	1

1	0	1
0	0	0
0	1	1

Рис. 525.

a	a	0	1
1	1	a	0
0	0	1	a

a	0	a	1
1	0	1	a
0	0	0	0

Рис. 526.

**Поля Галуа характеристики  $p$ .** Коммутативное поле  $\mathbb{Z}/p$  ( $p$  простое) является полем Галуа характеристики  $p$ , т. е. оно является кольцом классов вычетов по простому модулю. На

c	c	0	1	a	b
b	b	c	0	1	a
a	a	b	c	0	1
1	1	a	b	c	0
0	0	1	a	b	c

c	0	c	b	a	1
b	0	b	1	c	a
a	0	a	c	1	b
1	0	1	a	b	c
0	0	0	0	0	0

Рис. 527.

рис. 525—527 представлены поля Галуа характеристик 2, 3, 5 соответственно.

В дальнейшем мы будем интересоваться исключительно полем Галуа с характеристикой 2, которое называют часто «алгеброй по модулю 2».

<sup>1</sup>) Это означает, что для всех  $x, y \in E$  если  $x \circ y = 0$ , то  $(x \neq 0 \Rightarrow y = 0)$ . или  $(y \neq 0 \Rightarrow x = 0)$ .

# УПРАЖНЕНИЯ

**A4.А.** Пусть  $E$  — множество пар  $(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{Q}$  (множество рациональных чисел) со следующими законами композиции: для всех  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

где «+» и «·» — соответственно обычное сложение и умножение. Показать, что  $(E, *, \circ)$  — поле.

**A4.Б.** Составить таблицы сложения и умножения элементов поля Галуа характеристики 7.

**A4.В.** Показать, что операции в  $\mathbf{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ , определяемые свойствами «четный» или «нечетный» соответственно, образуют поле Галуа с характеристикой 2.

## A5. Алгебра по модулю 2

Не следует смешивать алгебру по модулю 2 с двухэлементной булевой алгеброй, хотя обе они связаны с множеством  $\{0, 1\}$ .

$\dot{+}$	0	1
0	0	1
1	1	1

Булева алгебра

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\hat{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

Алгебра по модулю 2

Отличие их состоит в том, что

$$1 \dot{+} 1 = 1 \text{ (булева алгебра)}, \quad (\text{A5.1})$$

$$1 \hat{+} 1 = 0 \text{ (алгебра по модулю 2)}. \quad (\text{A5.2})$$

Сравним эти алгебры. В двухэлементной булевой алгебре если  $a = 1$ , то  $\bar{a} = 0$ , и если  $a = 0$ , то  $\bar{a} = 1$ ; в алгебре по модулю 2 если  $a = 1$ , то  $\bar{a} = 0$ , если  $a = 0$ , то  $\bar{a} = 1$ . Имеем

$$a \dot{+} \bar{a} = 1 \quad \text{и} \quad a\bar{a} = 0, \quad (\text{A5.3})$$

$$a \hat{+} \bar{a} = 1 \quad \text{и} \quad a\bar{a} = 0. \quad (\text{A5.4})$$

Далее,

$$\bar{a} = 1 \dot{+} a, \quad (\text{A5.5})$$

$$a \dot{+} b = a \dot{+} b \dot{+} ab, \quad (\text{A5.6})$$

$$\bar{a}\bar{b} = 1 \dot{+} a \dot{+} b \dot{+} ab, \quad (\text{A5.7})$$

$$\bar{a} \dot{+} \bar{b} = 1 \dot{+} ab, \quad (\text{A5.8})$$

$$ab \dot{+} \bar{a}\bar{b} = 1 \dot{+} a \dot{+} b, \quad (\text{A5.9})$$

$$\bar{a} \dot{+} b = 1 \dot{+} a \dot{+} ab. \quad (\text{A5.10})$$

Следовательно, чтобы перейти от формулы в двухэлементной булевой алгебре к формуле в алгебре по модулю 2 и обратно,

достаточно выразить операции  $\dot{+}$  и  $\hat{+}$  друг через друга, используя формулы

$$a \dot{+} b = a \hat{+} b \hat{+} ab, \quad (\text{A5.11})$$

$$a \hat{+} b = a \bar{b} \dot{+} \bar{a}b. \quad (\text{A5.12})$$

Заметим, что операция  $\hat{+}$  есть не что иное, как операция  $\oplus$  (дизъюнктивная сумма), хорошо известная в булевой алгебре:

$$a \oplus b = a \bar{b} \dot{+} \bar{a}b^1). \quad (\text{A5.13})$$

Следовательно, можно не различать символы  $\oplus$  и  $\hat{+}$ .

Переход от булевых формул к формулам по модулю 2 не всегда прост:

$$\begin{aligned} a \dot{+} b \dot{+} c &= (a \dot{+} b) \dot{+} c = (a \hat{+} b \hat{+} ab) \hat{+} c \hat{+} (a \hat{+} b \hat{+} ab) c = \\ &= a \hat{+} b \hat{+} c \hat{+} ab \hat{+} bc \hat{+} ca \hat{+} abc, \end{aligned} \quad (\text{A5.14})$$

$$\begin{aligned} a \hat{+} b \hat{+} c &= (a \hat{+} b) \hat{+} c = (a \bar{b} \dot{+} \bar{a}b) \bar{c} \dot{+} (ab \dot{+} \bar{a}\bar{b}) c = \\ &= abc \dot{+} a\bar{b}\bar{c} \dot{+} \bar{a}bc \dot{+} \bar{a}\bar{b}c. \end{aligned} \quad (\text{A5.15})$$

Нельзя составить таблицу истинности для функции, определяемой в алгебре по модулю 2; эта таблица имеет смысл только в двухэлементной булевой алгебре.

**Алгебра полиномов в  $\mathbb{Z}/2$ . Лемма. Пусть**

$$f^*(z) = a_0 \hat{+} a_1 z \hat{+} \dots \hat{+} a_n z^n \quad (\text{A5.16})$$

— полином степени  $n$ , где  $z \in \{0, 1\}$ , с коэффициентами из  $\mathbb{Z}/2$ . Существует такое поле  $\mathbf{K}$ , содержащее  $\mathbb{Z}/2$ , что все корни  $f^*(z)$  принадлежат  $\mathbf{K}$ .

Если  $a$  — корень полинома

$$f^*(z) = a_0 \hat{+} a_1 z \hat{+} \dots \hat{+} a_n z^n, \quad (\text{A5.17})$$

то

$$f^*(a) = a_0 \hat{+} a_1 a \hat{+} \dots \hat{+} a_n a^n = 0 \quad (a_n = 1). \quad (\text{A5.18})$$

Выразим  $a^n$  и  $a^{n+1}$  через  $a, a^2, \dots, a^{n-1}$ :

$$a^n = a_0 \hat{+} a_1 a \hat{+} \dots \hat{+} a_{n-1} a^{n-1}, \quad (\text{A5.19})$$

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a_0 a \hat{+} a_1 a^2 \hat{+} \dots \hat{+} a_{n-2} a^{n-1} \hat{+} a_{n-1} a^n = \\ &= a_0 a \hat{+} a_1 a^2 \hat{+} \dots \hat{+} a_{n-2} a^{n-1} \hat{+} a_{n-1} [a_0 \hat{+} a_1 a \hat{+} \dots \hat{+} a_{n-1} a^{n-1}]. \end{aligned} \quad (\text{A5.20})$$

<sup>1)</sup> Напомним, что операциям  $U$  и  $+$  в двухзначной логике соответствует неисключающее «или», в то время как операциям  $\oplus$  или  $\hat{+}$  соответствует исключающее «или» (либо один, либо другой, но не оба вместе).

Следовательно, все степени  $a$  линейно выражаются через первые  $n$  степеней  $a^0, a^1, \dots, a^{n-1}$ :

$$a^i = \varphi_i(a^0, a^1, \dots, a^{n-1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A5.21})$$

Так как таких функций самое большее  $2^n - 1$ , то и число различных степеней  $a$  не превосходит  $2^n - 1$ . Последовательность этих степеней периодическая с периодом

$$q \leq 2^n - 1, \quad (\text{A5.22})$$

т. е.

$$a^0, a^1, a^2, \dots, a^{q-1}, \quad a^q = a^0, a^1, a^2, \dots \quad (\text{A5.23})$$

Действительно, так как среди  $2^n$  первых степеней по крайней мере две совпадают, то существуют такие  $r$  и  $r'$ , что  $a^r = a^{r'}$ , т. е.

$$a^{r-r'} = 1. \quad (\text{A5.24})$$

Пусть  $q$  — наименьшее число, для которого  $a^q = 1$ . Тогда  $a^s = a^{s'}$ , где  $s'$  — остаток от деления  $s$  на  $q$ :

$$s = kq + s', \quad (\text{A5.25})$$

$$a^s = a^{kq}a^{s'} = a^{s'}. \quad (\text{A5.26})$$

Корни  $a^s$  и  $a^{s'}$  периодически повторяются (с периодом  $q$ ):

$$s + 1 = kq + s' + 1, \quad (\text{A5.27})$$

$$s + q = k'q + s'. \quad (\text{A5.28})$$

Обозначим через  $a_i$  корни  $f^*(z)$ . Так как они содержатся среди  $q$  различных степеней  $a$ , то

$$f^*(z) = (z \hat{+} a_0)(z \hat{+} a_1) \dots (z \hat{+} a_{n-1}). \quad (\text{A5.29})$$

Рассмотрим полином

$$H(z) = z^q \hat{+} 1. \quad (\text{A5.30})$$

Его можно представить в виде

$$\begin{aligned} H(z) &= (z \hat{+} 1)(z \hat{+} a)(z \hat{+} a^2) \dots (z \hat{+} a^{q-1}) = \\ &= (z \hat{+} a_0)(z \hat{+} a_1) \dots (z \hat{+} a_{n-1})(z \hat{+} a_n) \dots (z \hat{+} a_{q-1}) \end{aligned} \quad (\text{A5.31})$$

или

$$H(z) = f^*(z) \mathcal{C}(z), \quad (\text{A5.32})$$

где  $\mathcal{C}(z)$  — полином с коэффициентами из  $\mathbb{K}$ .

Более того, из (A5.32) следует, что коэффициенты  $\mathcal{C}(z)$  принадлежат  $\mathbb{Z}/2$ . Теперь мы в состоянии сформулировать основную теорему Галуа.

Теорема Галуа. Для любого полинома  $f^*(z)$  степени  $n$  найдутся такой полином  $\mathcal{C}(z)$  и число  $q$ , что

$$f^*(z) \mathcal{C}(z) = 1 \hat{+} z^q, \quad q \leq 2^n - 1 \quad (\text{A5.33})$$

Рассмотрим несколько свойств.

- 1) Если  $f^*(z)$  таков, что  $q = 2^n - 1$ , то говорят, что  $f^*(z)$  — *примитивный полином*, а  $\mathcal{C}(z)$  дополнительный к  $f^*(z)$ .
- 2) Примитивный полином  $f^*(z)$  неприводим.
- 3) Корень  $b$  примитивного полинома  $f^*(z)$  степени  $n$  называют *примитивным элементом*; остальными корнями  $f^*(z)$  будут  $b^2, b^4, \dots, b^{2^{n-1}}$ .
- 4) Все корни примитивного полинома  $f^*(z)$  различны.

Пример. Пусть

$$f^*(z) = z^3 + z + 1 \quad (\text{A5.34})$$

и  $a$  — его корень. Все различные степени  $a$ :

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \quad a^1, \quad a^2, \quad a^3 = a + 1, \quad a^4 = a^2 + a, \quad a^5 = a^3 + a^2 = \\ &= 1 + a + a^2, \quad a^6 = a + a^2 + a^3 = 1 + a^2, \quad a^7 = a + a^3 = 1. \end{aligned} \quad (\text{A5.35})$$

Имеем

$$(z^3 + z + 1)(z^4 + z^2 + z + 1) = z^7 + 1, \quad (\text{A5.36})$$

$$f^*(z) = z^3 + z + 1 = (z + a)(z + a^2)(z + a^4), \quad (\text{A5.37})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(z) &= z^4 + z^2 + z + 1 = (z + a^3)(z + a^5)(z + a^6)(z + a^7) = \\ &= (z + 1)(z^3 + z^2 + 1). \end{aligned} \quad (\text{A5.38})$$

Полином  $z^3 + z + 1$  также примитивный, так как

$$b^3 = b^2 + 1, \quad b^4 = b^2 + b + 1, \quad b^5 = b + 1, \quad b^6 = b^2 + b, \quad b^7 = 1. \quad (\text{A5.39})$$

# ПРИЛОЖЕНИЕ Б

## КОДИРОВАНИЕ. КОДЫ, ОБНАРУЖИВАЮЩИЕ ОШИБКИ

### Б1. Введение

Ввиду большого значения теории кодирования для многих комбинаторных задач автору показалось целесообразным включить в настоящую книгу приложение, посвященное этой теории. В этом автору содействовал Ж. Кульман, и настоящее приложение может рассматриваться как краткое резюме его книги «Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки» (G. Cullmann, Codes detecteurs et corrigeurs d'erreurs, Dunod, 1967).

В основном тексте книги мы намеренно не касались теоретико-вероятностных приложений комбинаторики, так как они широко освещаются в сочинениях по теории вероятностей. Здесь мы отступим от этого правила.

### Б2. Передача $r$ -выборки

Передача информации по линии связи осуществляется, как показано на схеме рис. 528. Источник информации уподобляется случайной величине  $S$ , принимающей значения  $s_1, s_2, \dots, s_r$ , составляющие «алфавит», с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_r, p_1+p_2+\dots+p_r = 1$ . Сообщение — это последовательность символов

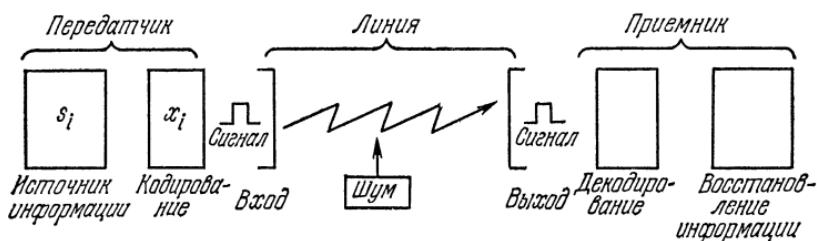


Рис. 528.

$(s_1, s_2, \dots, s_r)$ . При кодировании каждый символ источника заменяется последовательностью букв некоторого другого алфавита  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ , каждая из которых определяет значение некоторого физического феномена, предназначенного для непосредственной передачи информации по линии связи.

Очевидно, что каждой  $x_i$  можно в свою очередь приписать некоторую вероятность  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Последовательность букв, соответствующая некоторому символу источника, называется *кодовым словом*. При декодировании осуществляется обратная операция с целью восстановления информации. Для правильной передачи информации необходимо, чтобы значения физического явления, соответствующие буквам алфавита, различались достаточно хорошо одно от другого. При несоблюдении этого условия увеличивается риск получить искаженное сообщение (это иллюстрируется на рис. 529). На рис. 529  $e$  — возможный скачок значения  $x_3$ . Такой скачок приводит к смешению сигналов, соответствующих буквам  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ .

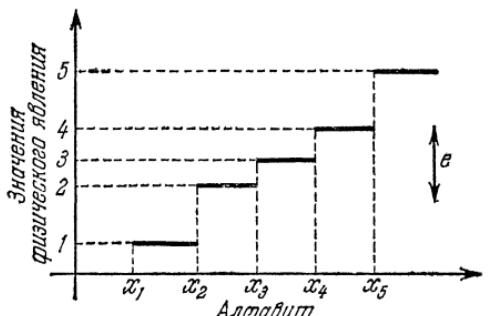


Рис. 529.

Колебание сигнала вокруг его среднего значения вызывается «шумом», который можно характеризовать вероятностью смешения двух разных букв алфавита.

**Определение линии передачи.** Пусть на вход линии подается  $r$ -выборка

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n), \quad (\text{Б2.1})$$

а на выходе принимается  $r$ -выборка элементов «выходного» алфавита

$$B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots, \beta_r). \quad (\text{Б2.2})$$

Линия характеризуется множеством вероятностей перехода, т. е. вероятностей того, что поданная на вход  $r$ -выборка  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})$  принимается на выходе как  $r$ -выборка  $(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r})$ :

$$\text{pr}(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r} | a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}). \quad (\text{Б2.3})$$

Эти вероятности могут зависеть от состояния  $s$ , в котором находится вход в момент «испускания» выборки, т. е. имеют вид

$$\text{pr}(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r} | a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}; s). \quad (\text{Б2.4})$$

В этом случае говорят о «линии с памятью». В противном случае говорят о «линии без памяти» и тогда

$$\text{pr}(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r} | a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}) = \text{pr}(\beta_{i_1} | a_{i_1}) \dots \text{pr}(\beta_{i_r} | a_{i_r}). \quad (\text{Б2.5})$$

В общем случае линия характеризуется случайной величиной  $X$  на входе, принимающей значения  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , с ве-

роятностями  $p_i$ , случайной величиной  $Y$  на выходе, принимающей значения  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , с вероятностями  $\pi_j$ , и матрицей перехода, составленной из элементов

$$p_{ij}^t = \text{pr}(Y = y_j | X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (\text{Б2.6})$$

Имеем

$$\left\| \begin{matrix} \pi_j \\ \vdots \\ 1 \times m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} p_i \\ \vdots \\ 1 \times n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} p_j^t \\ \vdots \\ n \times m \end{matrix} \right\|. \quad (\text{Б2.7})$$

Распределение  $Y$  целиком определяется распределением  $X$  и матрицей перехода. Для данной линии распределение вероятностей на входе однозначно приводит к некоторому распределению вероятностей на выходе, но обратное утверждение неверно.

Вероятности  $\pi_i^t$ , определяемые формулой

$$\pi_i^t = \text{pr}(X = x_i | Y = y_j), \quad (\text{Б2.8})$$

можно получить из  $p_i$  и  $p_j^t$  по формулам Байеса. Действительно, полагая

$$p_{ij} = \text{pr}(X = x_i \text{ и } Y = y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{Б2.9})$$

имеем

$$\pi_i^t = \frac{p_{ij}}{\pi_j} = \frac{p_i p_j^t}{\pi_j} = \frac{p_i p_j^t}{\sum_{i=1}^n p_i p_j^t}. \quad (\text{Б2.10})$$

Важный частный случай представляет собой двоичная симметрическая линия, которая описывается так:

$$X \in \{x_1 = 0, x_2 = 1\}, \quad (\text{Б2.11})$$

$$Y \in \{y_1 = 0, y_2 = 1\}, \quad (\text{Б2.12})$$

$$p_0^1 = \text{pr}(Y = 0 | X = 1) = p_1^0 = \text{pr}(Y = 1 | X = 0) = p, \quad (\text{Б2.13})$$

$$p_0^0 = \text{pr}(Y = 0 | X = 0) = p_1^1 = \text{pr}(Y = 1 | X = 1) = 1 - p = q. \quad (\text{Б2.14})$$

Матрица перехода

$$\left\| \begin{matrix} p_{ij}^t \\ \vdots \\ p \quad q \end{matrix} \right\|. \quad (\text{Б2.15})$$

Граф перехода можно изобразить на рис. 530, а саму линию представить на рис. 531.

Характеризующая шум на линии вероятность  $p$  называется «вероятностью ошибки» и обозначается через  $p(e)$  (см. [26]).

Основной проблемой при передаче информации является ограничение действия шума на линии. Очевидно, что влияние шума тем меньше, чем больше вероятности  $\pi_i^t$  (которые вычисляются по формуле (Б2.10)). Практически задача сводится к

тому, чтобы определить правило принятия решения, по которому, наблюдая  $r$ -выборку на выходе, можно было бы принять ее или отвергнуть в зависимости от того, подверглось ли сообщение изменению в ходе передачи. Другими словами, надо

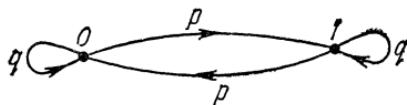


Рис. 530.

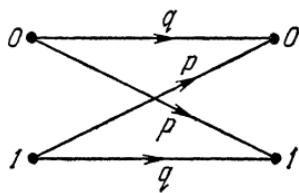


Рис. 531.

найти правило, которое позволило бы обнаруживать ошибки: более того, могло бы указать наиболее вероятную  $r$ -выборку на входе и тем самым дало бы возможность эти ошибки исправлять.

**Мера информации и энтропия.** Информацию мы будем рассматривать как некоторую физическую реальность, которую можем попытаться измерить. Величиной информации, полученной при наблюдении события  $E_i$ , происходящего с вероятностью  $p_i$ , будем считать

$$I(E_i) = \log_b \frac{1}{p_i}. \quad (\text{Б2.16})$$

Единица измерения информации, конечно, зависит от основания логарифма.

Средняя величина информации для полной системы  $X$  попарно взаимноисключающих событий называется **энтропией** системы и выражается формулой

$$\begin{aligned} H(X) &= p_1 \log_b \frac{1}{p_1} + p_2 \log_b \frac{1}{p_2} + \dots + p_n \log_b \frac{1}{p_n} = \\ &= - \sum_{i=1}^n p_i \log_b p_i. \quad (\text{Б2.17}) \end{aligned}$$

Таким образом, энтропия определяется как математическое ожидание случайной величины  $X$ , принимающей значения

$$\log_b \frac{1}{p_i} \text{ с вероятностями } p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Можно определить некоторые энтропии для линии связи:

$H(X)$  — средняя величина информации, характеризующая вход, она указывает на качество передатчика;

$H(Y)$  — средняя величина информации, характеризующая выход, она указывает на качество приемника;

$H(XY)$  — характеризует линию в целом;

$H(X|Y)$  — дает оценку возможности восстановления переданного символа по полученному символу;  
 $H(Y|X)$  — дает представление о шуме на линии.

**Взаимная информация и пропускная способность линии.**

Выражение

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (B2.18)$$

определяет «взаимную информацию» (information mutuelle). Оно имеет большое значение, так как позволяет измерить «прирост» информации при наблюдении выхода линии, и с его помощью определяется весьма существенная характеристика линии, называемая пропускной способностью. Под этим понимается максимальное значение взаимной информации, где максимум берется по всевозможным распределениям на входе:

$$C = \max_{p(x)} I(X|Y). \quad (B2.19)$$

Исходя из этих определений, Шенон показал, что если взять закон распределения, дающий максимум, то это приведет к устранению влияния шума на линии. Чем ближе подходит к этому пределу, тем незначительнее действие шума и тем меньше вероятность ошибки  $p(e)$ . Если энтропия  $H(S)$  источника информации не превосходит пропускной способности линии  $C$ , то появляется возможность кодировать информацию источника с помощью входного алфавита. При этом, учитывая закон распределения источника, кодовые слова следует составить так, чтобы закон распределения на входе был по возможности близок к закону, дающему максимум взаимной информации. Множество кодовых слов называется *кодом*.

Пример 1. Рассмотрим код Фано для двоичной симметрической линии. Для такой линии вероятностным законом, приводящим к максимальному значению  $I(X|Y)$  будет  $p=q=\frac{1}{2}$ ; в этом случае передача каждого двоичного знака несет в среднем одну единицу информации (при логарифмах по основанию 2). Фано предложил следующий метод кодирования информации:

- а) расположить сообщения в порядке возрастания их вероятности;
  - б) разбить сообщения на два подмножества так, чтобы вероятности сообщений внутри каждого из подмножеств были возможно более близки друг к другу;
  - в) присвоить каждому из подмножеств двоичный знак, например, первому — нуль, а второму — единицу;
  - г) произвести операции б) и в) с каждым из подмножеств.
- Продолжают так до тех пор, пока все сообщения не окажутся закодированными.

Предположим, например, что из источника  $S$  передаются сообщения  $A, B, C, D, E, F$  с вероятностями

$$p(A) = 0,5, \quad p(B) = 0,25, \quad p(C) = 0,1, \quad p(D) = 0,08, \\ p(E) = 0,05, \quad p(F) = 0,02. \quad (\text{Б2.20})$$

Закодируем эти сообщения, как показано в таблице:

Сообщение источника	Вероятности $p_i$	Вероятности последовательных подмножеств			Кодовые слова длины $n_i$	$n_i \times p_i$
$A$	0,50	0,50			0	$1 \times 0,50 = 0,50$
$B$	0,25	0,50	0,25		10	$2 \times 0,25 = 0,50$
$C$	0,10		0,25	0,10	110	$3 \times 0,10 = 0,30$
$D$	0,08			0,15	1110	$4 \times 0,08 = 0,32$
$E$	0,05				11110	$5 \times 0,05 = 0,25$
$F$	0,02				11111	$5 \times 0,02 = 0,10$

Среднее число двоичных знаков кодированного сообщения

$$\bar{n} = \sum n_i p_i = 1,97.$$

В идеальном случае среднее число двоичных знаков в сообщении равно

$$H = - \sum_{i=A}^F p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = 1,952 \quad (\text{Б2.21})$$

единиц информации на сообщение. Эффективность кодирования можно измерять отношением

$$\frac{H}{\bar{n}} = \frac{1,952}{1,97} = 0,98. \quad (\text{Б2.22})$$

Чем это отношение ближе к единице, тем кодирование лучше.

Пример 2. Пусть линия передачи определяется случайной величиной  $X$  на входе, принимающей значение  $x_1, x_2, x_3, x_4$  с вероятностями  $p(x_1) = 0,1, p(x_2) = 0,2, p(x_3) = 0,3, p(x_4) = 0,4$ . Пусть число значений случайной величины на выходе  $Y$  равно 3, и матрица перехода задается следующим образом:

$$\|M\| = \|p_j^i\| = \begin{vmatrix} 0,50 & 0 & 0,50 \\ 0,20 & 0,40 & 0,40 \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0,50 & 0,50 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б2.23})$$

Вычислим вероятности

$$\pi_j = \text{pr}(Y = y_j), \quad j = 1, 2, 3; \quad (\text{Б2.24})$$

$$\pi_i^j = \text{pr}(X = x_i | Y = y_j), \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3; \quad (\text{Б2.25})$$

$$p_{ij} = \text{pr}(X = x_i, Y = y_j), \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{Б2.26})$$

Для этого используем (Б2.7), т. е.

$$\|\pi_j\| = \|p_i\| \cdot \|p_j^t\|, \quad (\text{Б2.27})$$

откуда имеем

$$\left\| \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} \right\| \cdot \begin{vmatrix} 5/10 & 0 & 5/10 \\ 2/10 & 4/10 & 4/10 \\ 5/10 & 2,5/10 & 2,5/10 \\ 0 & 5/10 & 5/10 \end{vmatrix} = \left\| \frac{24}{100}, \frac{35,5}{100}, \frac{40,5}{100} \right\|, \quad (\text{Б2.28})$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \text{pr}(Y = y_1) = 0,24, & \pi_2 &= \text{pr}(Y = y_2) = 0,355, \\ \pi_3 &= \text{pr}(Y = y_3) = 0,405. \end{aligned} \quad (\text{Б2.29})$$

Вероятности  $\pi_i^t$  и  $p_{ij}$  вычисляем по формуле (Б2.10), т. е.

$$\pi_i^t = \frac{p_i p_j^t}{\sum_{i=1}^4 p_i p_j^t} = \frac{p_{ij}}{\pi_j}. \quad (\text{Б2.30})$$

Имеем

$$\|\pi_i^t\| = \begin{vmatrix} 5/24 & 4/24 & 15/24 & 0 \\ 0 & 8/35,5 & 7,5/35,5 & 20/35,5 \\ 5/40,5 & 8/40,5 & 7,5/40,5 & 20/40,5 \end{vmatrix}, \quad (\text{Б2.31})$$

откуда

$$\begin{aligned} \|p_{ij}\| &= \begin{vmatrix} 0,05 & 0 & 0,05 \\ 0,04 & 0,08 & 0,08 \\ 0,15 & 0,075 & 0,075 \end{vmatrix} \begin{matrix} p_i \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{matrix} \\ \pi_j: & 0,24 \ 0,355 \ 0,405. \end{aligned} \quad (\text{Б2.32})$$

Причесания. 1) Из элементов матрицы  $\|p_{ij}\|$  получают  $p_i$ , суммируя элементы в каждой из строк, и  $\pi_j$ , суммируя элементы в каждом из столбцов.

2) Если задана матрица  $\|p_{ij}\|$ , то по ней можно найти  $\pi_i^t$  и  $p_j^t$ :

$$\pi_i^t = \frac{p_{ij}}{\pi_j}, \quad (\text{Б2.33})$$

$$p_j^t = \frac{p_{ij}}{p_i}. \quad (\text{Б2.34})$$

### Б3. Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки

**Расстояние Хэмминга.** Пусть мы получили код, в котором каждая  $r$ -выборка закодирована словом, состоящим из  $n$  символов (рис. 532). Будем предполагать, что символы взяты из конечного множества, обладающего структурой поля (тогда эти

символы можно складывать и перемножать). Особенно удобно пользоваться конечными полями характеристики 2, что мы и будем делать.

Хэмминг определил расстояние между двумя кодовыми словами как число мест, в которых символы этих слов не совпадают. Если, например,

$$\begin{aligned} C_i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ C_f &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{Б3.1})$$

TO

$$d(C_i, C_j) = 4. \quad (\text{B3.2})$$

Расстояние Хэмминга тесно связано с вероятностью ошибки при передаче сообщения. Действительно, пусть передано слово  $x$ ,

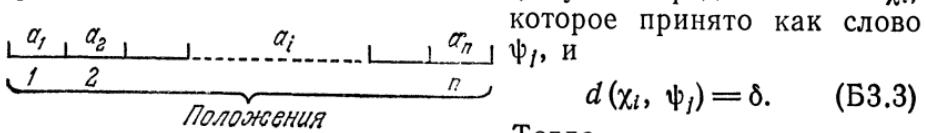


Рис. 532.

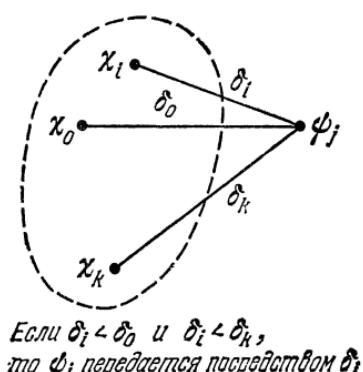
$$p(\chi_i | \psi_i) = p^\delta \cdot q^{n-\delta}; \quad (\text{B3.4})$$

в самом деле, при передаче символа по двоичной симметрической линии вероятность ошибки равна  $p$ , а у нас  $n - \delta$  символов переданы правильно, а  $\delta$  символов — неверно.

Так как  $p$  всегда меньше 0,5, то  $p(x_i|\psi_j)$  увеличивается, когда  $\delta$  уменьшается; отсюда получаем правило: при получении

на выходе кодового слова  $\psi_j$  следует в качестве кодового слова на входе брать слово с наименьшим расстоянием от  $\psi_j$  (рис. 533).

Можно проверить, что расстояние Хэмминга удовлетворяет всем обычным аксиомам расстояния:



Если  $\delta_i < \delta_0$  и  $\delta_i < \delta_k$ ,  
то  $\phi_i$  передается наследством  $\delta_i$

Рис. 533.

$$d(C_i, C_j) \geq 0, \quad (\text{B3.5})$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $i = j$ ,

$$d(C_i, C_j) = d(C_i, C_\ell), \quad (\text{B3.6})$$

$$d(C_i, C_j) + d(C_j, C_k) \geq d(C_i, C_k). \quad (\text{E3.7})$$

Для расстояния Хэмминга справедливо соотношение

$$\forall i \forall j (d(C_i, C_j) \geq 2e + 1). \quad (\text{B3.8})$$

Это означает, что при кодировании словами, расположенными одно от другого на расстоянии не меньше  $2e + 1$ , получаем возможность исправить все простые ошибки (на одном месте), все двойные ошибки (на двух местах), ..., все ошибки на  $e$  местах.

Если

$$\forall i \forall j (d(C_i, C_j) \geq 2e), \quad (\text{Б3.9})$$

то имеется возможность исправить все простые ошибки, двойные ошибки, ..., ошибки на  $e - 1$  местах. Ошибки на  $e$  местах можно обнаружить, но исправить, вообще говоря, нельзя.

Действительно, если расстояние между кодовыми словами не меньше  $2e + 1$ , то при получении слова  $C'_i$  его следует интерпретировать по установленному выше правилу как слово  $C_i$  (рис. 534), так как от любого другого слова  $C_j$  оно находится на расстоянии, не меньшем  $e + 1$ . Заметим, что исправить можно самое большое  $e$  ошибок. Если минимальное расстояние

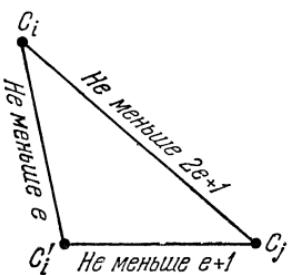


Рис. 534.

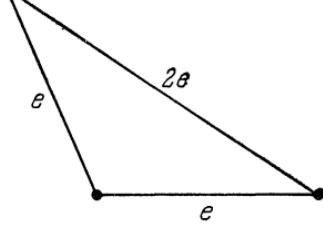


Рис. 535.

между двумя словами в коде равно  $2e$ , то можно найти два слова с расстоянием  $e$  от полученного слова  $C'_i$ ; следовательно, обнаруженную ошибку исправить нельзя (рис. 535).

Точно так же можно было бы показать, что для исправления  $e$  ошибок и обнаружения  $t$  ошибок при  $t \geq e$  необходимо, чтобы

$$d(C_i, C_j) \geq e + t + 1. \quad (\text{Б3.10})$$

Верно также и обратное утверждение.

Из сказанного выше очевидна необходимость кодирования. Выяснены также условия, которым оно должно удовлетворять. Остается лишь показать, каким способом кодирование можно осуществить. Известные способы кодирования, дающие возможность обнаружения и исправления ошибок<sup>1)</sup>, используют:

1) подпространства векторного пространства размерности  $n$ , при этом слова имеют длину  $n$ ; это — *линейные коды*;

2) отношение делимости многочленов; это — *циклические коды*.

Предшественником последних является код Бодо. Циклические коды, будучи менее доступными для теоретической трактовки, чем линейные, практически реализуются значительно легче.

<sup>1)</sup> Исправление ошибок, по определению, — частный случай обнаружения

**Двоичные линейные коды.** Пусть

$$\|e_i\| = \|00 \dots 1 \dots 00\| \quad (\text{Б3.11})$$

— вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме  $i$ -й, равной 1. Эти векторы в совокупности линейно независимы и образуют базис линейного пространства  $\mathcal{E}_n$  над полем (1 можно считать единицей поля). Их можно записать как строки матрицы порядка  $n$ :

$$\|1\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б3.12})$$

Пусть вектор

$$\|a_i\| = \|a_1 a_2 \dots a_n\|, \quad (\text{Б3.13})$$

где  $a_i$  — элементы поля, преобразуется матрицей  $\|1\|$  в вектор

$$\|v_i\| \in \mathcal{E}_n, \quad (\text{Б3.14})$$

т. е.

$$\|a_i\|_{1 \times n} \|1\|_{n \times n} = \|v_i\|_{1 \times n}; \quad (\text{Б3.15})$$

тогда

$$\|a_i\|_{1 \times n} = \|v_i\|_{1 \times n}. \quad (\text{Б3.16})$$

Если взять другие  $n$  линейно независимых векторов и записать их как строки матрицы  $\|\mathcal{M}\|$ , то при

$$\|a_i\|_{1 \times n} \cdot \|\mathcal{M}\|_{n \times n} = \|v_i\|_{1 \times n} \quad (\text{Б3.17})$$

имеем, вообще говоря,

$$\|a_i\|_{1 \times n} \neq \|v_i\|_{1 \times n}, \quad (\text{Б3.18})$$

но, как и в предыдущем случае, умножением на матрицу  $\|\mathcal{M}\|$  получаются все векторы из  $\mathcal{E}_n$ .

Точно так же можно определить матрицу  $\|\mathcal{M}\|$ , строки которой представляют собой  $m$  линейно независимых векторов (ранга  $m$ ); с помощью этой матрицы можно получить все векторы из подпространства  $\mathcal{E}_m$  размерности  $m$  пространства  $\mathcal{E}_n$ :

$$\| \text{все } m\text{-выборки элементов поля} \|_{1 \times m} \cdot \|\mathcal{M}\|_{m \times n} = \| \text{векторы } \mathcal{E}_m \|^{1 \times m}. \quad (\text{Б3.19})$$

**Приведение матриц к каноническому виду.** Рассмотрим следующие действия с матрицами:

- 1) перестановка строк;
- 2) умножение строки на произвольный ненулевой элемент поля;
- 3) прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на элемент поля.

С помощью этих действий всегда можно привести матрицу  $\|\mathcal{G}\|$  ранга  $m$  к следующему каноническому виду:

$$\|\mathcal{G}\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\|_{m \times n} \xrightarrow{n=m=k} \left\| \begin{array}{c} \uparrow \\ a_{ij} \\ \downarrow \end{array} \right\|_m \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (\text{Б3.20})$$

При этом строки матрицы  $\|\mathcal{G}\|$  (как векторы) определяют то же линейное подпространство  $\mathcal{E}_m$ , что и строки матрицы  $\|\mathcal{M}\|$ , т. е.

$$\|\text{все } m\text{-выборки из элементов поля } \cdot\|_{m \times n}^{\|\mathcal{G}\|} = \|\text{векторы из } \mathcal{E}_m\|_{1 \times n} \quad (\text{Б3.21})$$

Заметим, что матрица  $\|\mathcal{G}\|$  преобразует  $m$ -выборку в  $n$ -мерный вектор таким образом, что первые  $m$  координат вектора совпадают с соответствующими компонентами выборки, а последние  $k$  являются их линейными комбинациями:

$$\|\dots m\text{-выборка} \dots | \dots k\text{-выборка}\|. \quad (\text{Б3.22})$$

Приходим к кодам, которые называют *систематическими*; при передаче кодового слова первые  $m$  мест называют *информационными*, а последние  $k$  — *проверочными*, так как эти линейные комбинации позволяют обнаружить или даже исправить ошибки при передаче информационных символов. Такой код обозначается через  $(n, m)$ . Если использовать линейные пространства над полем из двух элементов, то с его помощью можно передать  $2^m$  сообщений.

Линейный код общего вида состоит из всех векторов некоторого подпространства линейного  $n$ -мерного пространства.

**Двойственный код.** Исходя из кода  $(n, m)$ , можно непосредственно образовать двойственный код  $(n, n - m) = (n, k)$ . Действительно, если  $\mathcal{E}_m$  — подпространство, порожденное матрицей

$\|\mathcal{G}\|$ , то его базис можно следующим образом дополнить до базиса всего пространства:

$$\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccccc} m & & & k & & \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & a_{ij} & \left\| \begin{array}{c} m \\ i=1, 2, \dots, m, \\ j=1, 2, \dots, k. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \left. \left\| \mathcal{H} \right\| \rightarrow \begin{array}{c} b_{ji} = -a_{ij} \\ \left\| \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ & 0 & 1 & \dots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline \end{array} \right\|_k \end{array} \right) \end{array} \quad (B3.23)$$

$k$  последних векторов образуют базис подпространства  $\mathcal{E}_k$  пространства  $\mathcal{E}_n$ .

Для матрицы  $\|\mathcal{G}\|$  (образованной первыми  $m$  строками матрицы (B3.23)) имеем тогда

$$\|\mathcal{G}\| = \left\| \left\| \begin{array}{c} 1_m \\ m \times n \end{array} \right\| \right\| A \left\| \right\|; \quad (B3.24)$$

для матрицы  $\|\mathcal{H}\|$  (образованной последними  $k$  строками матрицы (B3.23)) имеем

$$\|\mathcal{H}\| = \left\| -A \left\| \begin{array}{c} r \\ k \times n \end{array} \right\| \right\| 1_k \left\| \right\|, \quad (B3.25)$$

где  $\|A'\|$  — матрица, транспонированная к матрице  $\|A\|$ , а  $\|1_r\|$  — единичная матрица порядка  $r$ . Выполняется следующее матричное соотношение:

$$\left\| \begin{array}{c} \mathcal{G} \\ m \times n \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \mathcal{H} \\ n \times k \end{array} \right\|' = \left( \left\| \begin{array}{c} \mathcal{H} \\ k \times n \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \mathcal{G} \\ n \times m \end{array} \right\|' \right)' = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ m \times k \end{array} \right\|. \quad (B3.26)$$

Действительно, записывая сомножители с помощью блоков подходящих размеров (т. е. таких, что число строк блока-множимого равно числу столбцов блока-множителя), получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{c} 1_m \\ m \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} A \\ k \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} -A \\ k \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} 1_k \\ k \end{array} \right\| = \\ & = \left\| 1_m \right\| \cdot \left\| -A \right\| + \left\| A \right\| \cdot \left\| 1_k \right\| = \left\| -A \right\| + \left\| A \right\| = \left\| 0 \right\|. \quad (B3.27) \end{aligned}$$

Пространство, порожденное векторами матрицы  $\|\mathcal{G}\|$ , называют нулевым пространством для матрицы  $\|\mathcal{H}\|$  и наоборот. Если  $\|v\|$  —  $n$ -мерный вектор, полученный из  $m$ -выборки  $\|a\|$  с помощью матрицы  $\|\mathcal{G}\|$ , т. е.

$$\left\| \begin{array}{c} v \\ 1 \times n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} a \\ 1 \times m \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \mathcal{G} \\ m \times n \end{array} \right\|, \quad (B3.28)$$

то

$$\left\| \begin{matrix} v \\ 1 \times n \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathcal{H} \\ n \times k \end{matrix} \right\|' = \left\| \begin{matrix} a \\ 1 \times m \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathcal{G} \\ m \times n \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathcal{H} \\ n \times k \end{matrix} \right\|' = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \times k \end{matrix} \right\|. \quad (\text{Б3.29})$$

Мы видим, что  $\|\mathcal{H}\|'$  переводит в нулевой вектор любой вектор  $\|v\|$  из  $\mathcal{E}_m$ .

**Проверочная матрица.** Матричное соотношение

$$\left\| \begin{matrix} v \\ 1 \times n \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathcal{H} \\ n \times k \end{matrix} \right\|' = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \times k \end{matrix} \right\| \quad (\text{Б3.30})$$

можно переписать в виде

$$\left\| \begin{matrix} \mathcal{H} \\ k \times n \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} v \\ n \times 1 \end{matrix} \right\|' = \left\| \begin{matrix} 0 \\ k \times 1 \end{matrix} \right\|. \quad (\text{Б3.31})$$

Это — система  $k$  линейных однородных уравнений с  $k$  неизвестными, и  $k$ -мерные векторы, компоненты которых — символы кодовых слов на контрольных местах, будут ее решениями. Ввиду этого  $\|\mathcal{H}\|$  называют *проверочной матрицей*.

**Обнаружение ошибок.** Для вектора  $\left\| \begin{matrix} v \\ 1 \times n \end{matrix} \right\|$  из подпространства  $\mathcal{E}_m$ , порожденного строками матрицы  $\|\mathcal{G}\|$ , имеем

$$\left\| \begin{matrix} \mathcal{H} \\ k \times n \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} v \\ n \times 1 \end{matrix} \right\|' = \left\| \begin{matrix} 0 \\ k \times 1 \end{matrix} \right\|. \quad (\text{Б3.32})$$

Если теперь на выходе получаем некоторый вектор  $\left\| \begin{matrix} w \\ 1 \times n \end{matrix} \right\|$  с

$$\left\| \begin{matrix} \mathcal{H} \\ k \times n \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} w \\ n \times 1 \end{matrix} \right\|' = \left\| \begin{matrix} z \\ k \times 1 \end{matrix} \right\| \neq \left\| \begin{matrix} 0 \\ k \times 1 \end{matrix} \right\|, \quad (\text{Б3.33})$$

то  $\|w\|$  не принадлежит  $\mathcal{E}_m$  и мы обнаружили ошибку.

**Замечание.** Очевидно, что при  $\|\mathcal{H}\| \cdot \|w\|' = \|0\|$  можно лишь утверждать, что при передаче по линии не произошло ошибки какого-то определенного типа, но нет гарантии, что отсутствуют ошибки других типов. Действительно, вектор  $\|z\|$  имеет  $k$  компонент и поэтому не дает возможности выявить больше чем  $p^k - 1$  типов ошибок ( $p$  — число элементов поля). Поэтому необходимо с самого начала установить, какие ошибки мы хотим обнаруживать.

Запишем матрицу  $\|\mathcal{H}\|$  в виде последовательности ее столбцов:

$$\left\| \begin{matrix} \mathcal{H} \\ k \times n \end{matrix} \right\| = \left\| \left\| \begin{matrix} C_1 \\ k \times 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} C_2 \\ k \times 1 \end{matrix} \right\| \dots \left\| \begin{matrix} C_j \\ k \times 1 \end{matrix} \right\| \dots \left\| \begin{matrix} C_n \\ k \times 1 \end{matrix} \right\| \right\|, \quad (\text{Б3.34})$$

$$\left\| \begin{matrix} C_j \\ k \times 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{c} h_{1j} \\ h_{2j} \\ \vdots \\ h_{ij} \\ \vdots \\ h_{kj} \end{array} \right\|. \quad (\text{Б3.35})$$

Для вектора

$$\|v\| = \|a_1 a_2 \dots a_j \dots a_n\|, \quad a_i \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{Б3.36})$$

в пространстве над полем из двух элементов имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}\| \cdot \|v\| &= a_1 \|C_1\| \hat{+} a_2 \|C_2\| \hat{+} \dots \\ &\dots \hat{+} a_j \|C_j\| \hat{+} \dots \hat{+} a_n \|C_n\| = \|0\|. \end{aligned} \quad (\text{Б3.37})$$

Если при передаче  $\|v\|$  принимается как  $\|w\|$  с ошибками на местах  $r, s$  и  $t$ , то пусть

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}\| \cdot \|w\|' &= a_1 \|C_1\| \hat{+} a_2 \|C_2\| \hat{+} \dots \\ &\dots \hat{+} b_r \|C_r\| \hat{+} b_s \|C_s\| \hat{+} b_t \|C_t\| \hat{+} \dots \hat{+} a_n \|C_n\| \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{Б3.38})$$

Складывая (Б3.37) и (Б3.38) по модулю 2, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}\| \cdot \|w\|' &= (a_1 \hat{+} a_1) \|C_1\| \hat{+} (a_2 \hat{+} a_2) \|C_2\| \hat{+} \dots \\ &\dots \hat{+} (a_r \hat{+} b_r) \|C_r\| \hat{+} (a_s \hat{+} b_s) \|C_s\| \hat{+} (a_t \hat{+} b_t) \|C_t\| \hat{+} \dots \\ &\dots \hat{+} (a_n \hat{+} a_n) \|C_n\| \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{Б3.39})$$

Так как

$$a_a \hat{+} a_a = 0, \quad (\text{Б3.40})$$

$$b_\beta \hat{+} a_\beta = 1, \quad (\text{Б3.41})$$

то

$$\|\mathcal{H}\| \cdot \|w\|' = \|C_r\| \hat{+} \|C_s\| \hat{+} \|C_t\| = \|z\| \neq \|0\|. \quad (\text{Б3.42})$$

Всегда возможно указать сочетания столбцов матрицы  $\|\mathcal{H}\|$ , соответствующие наиболее вероятным ошибкам, исходя из  $2^k - 1$  значений ненулевого вектора  $\|z\|$ .

Остается теперь установить связь между проверочной матрицей  $\|\mathcal{H}\|$  и минимальным расстоянием  $d \geq 2e + 1$ , или  $d \geq 2e$ , или даже  $d \geq e + t + 1$ , если устанавливать различные границы возможностей для обнаружения и для исправления ошибок.

Хэмминг доказал, что минимальное расстояние равно  $d$ , если любые  $d - 1$  столбцов матрицы линейно независимы.

С другой стороны, Мак-Класси доказал методами линейного программирования, что  $\|\mathcal{H}\|$  дает код с минимальным расстоянием  $d$  тогда и только тогда, когда подматрица  $\|A\|'$  этой матрицы обладает тем свойством, что каждый ее столбец содержит не меньше  $d - 1$  ненулевых элементов, а любые  $j$  столбцов — не меньше  $d - j$  ненулевых произведений элементов по строке.

**Примеры линейных двоичных кодов.** 1) Код Хэмминга для исправления простой ошибки. Если длина кодового слова равна  $n$ , то необходимо, чтобы

$$n \leq 2^k - 1. \quad (\text{Б3.43})$$

При  $n = 7$  имеем  $2^3 - 1 = 7$  и  $k = 3$ ,  $m = 4$ . По МакКласки каждый столбец матрицы  $\|A\|'$  должен иметь не меньше  $d - 1 = 2e = 2$  единиц, каждая пара столбцов — не меньше  $d - 2 = 1$  ненулевых произведений элементов по строке и каждая триада — не меньше  $d - 3 = 0$  таких произведений. Матрица

$$\|A\|' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Б3.44})$$

удовлетворяет этим условиям. Дополняя ее единичной матрицей порядка 3, получаем проверочную матрицу

$$\|\mathcal{H}\| = \| -\|A\|' \| \| 1 \| \| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б3.45})$$

Заметим, что каждый столбец матрицы  $\|\mathcal{H}\|$  совпадает с вектором  $\|z\|_{3 \times 1}$ , когда ошибка произошла на соответствующем месте кодового слова:

$$\| \mathcal{H} \| \cdot \| v \|' = \| C_i \| = \| z \|_{3 \times 1}. \quad (\text{Б3.46})$$

Если переставить столбцы в матрице  $\|\mathcal{H}\|$  так, чтобы  $i$ -й столбец представлял собой двоичную запись числа  $i$ :

$$\| \mathcal{H} \| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (\text{Б3.47})$$

то при умножении  $\|\mathcal{H}\|$  на  $\|v\|'$  получающийся вектор  $\|z\|$  представляет собой двоичную запись номера места, где произошла ошибка (или нулевой вектор).

Пусть кодовое слово обозначается

$$\| v \| = \| a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 \| . \quad (\text{Б3.48})$$

Из  $\|\mathcal{H}\|$  в форме (Б3.45) получаем матрицу  $\|\mathcal{G}\|$ , порождающую код:

$$\| \mathcal{G} \| = \| \| 1 \| \| \| A \| \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б3.49})$$

места кодового слова 3 5 6 7 4 2 1,

Выпишем полностью линейный код, получающийся с помощью  $\| \mathcal{G} \|$ , для всех возможных двоичных слов длины 4:

## Сообщения

## Кодированные сообщения

$$\left( \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) . \quad (\text{Б3.50})$$

Три контрольных соотношения для кодовых слов:

$$\|\mathcal{H}\| \cdot \|v\|' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{vmatrix}, \quad (\text{B3.51})$$

или

$$\begin{aligned} a_4 \hat{+} a_5 \hat{+} a_6 \hat{+} a_7 &= 0, \\ a_2 \hat{+} a_3 \hat{+} a_6 \hat{+} a_7 &= 0, \\ a_1 \hat{+} a_3 \hat{+} a_5 \hat{+} a_7 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B3.52})$$

Пусть, например, передается сообщение

$$\|a\| = \|1 \ 0 \ 1 \ 1\|, \quad (B3.53)$$

закодированное

$$\|0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\|, \quad (\text{B3.54})$$

и на третьем месте принимается ошибочный символ, т. е. при приеме получается

$$\|0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\|, \quad (B3.55)$$

который не принадлежит  $\mathcal{E}_4$ , т. е. не является кодовым словом; тогда

$$\|\mathcal{H}\| \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (\text{Б3.56})$$

что как раз и означает, что ошибка была допущена на третьем месте и там нужно 0 исправить на 1.

2) *Код Хэмминга, исправляющий простую ошибку и обнаруживающий двойную.* Из кода  $(n, m)$  можно получить код  $(n + 1, m)$  со словами длины  $n + 1$ , имеющий  $m$  информационных символов, если присоединить 1 на  $(n + 1)$ -м месте каждого слова кода  $(n, m)$  и ввести еще одно проверочное соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0^1). \quad (\text{Б3.57})$$

Тогда:

если  $k + 1$  проверочных соотношений выполняются, то не произошло простой ошибки;

если последнее соотношение не выполняется, то произошла простая ошибка, которую можно исправить с помощью первых  $k$  соотношений;

если последнее соотношение выполняется, но не выполняется по крайней мере одно из первых  $k$  соотношений, то обнаружена двойная ошибка; исправить ее нельзя.

Вернемся к предыдущему примеру. Действуя, как описано, получаем код  $(8,4)$  с проверочной матрицей

$$\|\mathcal{H}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Б3.58})$$

и соотношениями

$$\begin{aligned} a_4 \hat{+} a_5 \hat{+} a_6 \hat{+} a_7 &= 0, \\ a_2 \hat{+} a_3 \hat{+} a_6 \hat{+} a_7 &= 0, \\ a_1 \hat{+} a_3 \hat{+} a_5 \hat{+} a_7 &= 0, \\ a_1 \hat{+} a_2 \hat{+} a_3 \hat{+} a_4 \hat{+} a_5 \hat{+} a_6 \hat{+} a_7 \hat{+} a_8 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б3.59})$$

**Циклические коды.** Чтобы изучать эти коды, нам потребуются некоторые сведения из современной алгебры, которые мы кратко изложим.

<sup>1)</sup>  $\hat{+}$  означает сложение по модулю 2.

**Теория присоединения.** Многочлен  $x^2 + 1$  не имеет корней над полем действительных чисел  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ . Он неприводим над этим полем, т. е. не разлагается в произведение многочленов меньшей степени с действительными коэффициентами. Присоединим теперь к элементам поля  $\mathbf{R}$  символ  $j$ , для которого предполагаем выполненным соотношение  $j^2 = -1$ , и на этом расширенном множестве элементов рассмотрим операции  $+$  и  $\cdot$ , считая для них справедливыми все аксиомы операций поля. Получаем тогда новое поле  $(\mathbf{R}(j), +, \cdot)$ , в котором многочлен  $p(x) = x^2 + 1$  уже разлагается на множители:

$$p(x) = x^2 + 1 = (x + j)(x - j). \quad (\text{Б3.60})$$

Таким образом, мы приходим к полю комплексных чисел  $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ , в котором операции  $+$  и  $\cdot$  задаются соотношениями

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d), \quad (\text{Б3.61})$$

$$(a + jb) \cdot (c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad). \quad (\text{Б3.62})$$

В общем случае, если задан неприводимый над полем  $\mathbf{K}$  (основным полем) многочлен степени  $k \neq 0$ :

$$p(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_i x^i + \dots + a_k x^k, \quad (\text{Б3.63})$$

где  $a_i \in \mathbf{K}$  и  $a_k \neq 0$ , то всегда можно присоединить к  $\mathbf{K}$  последовательно символы  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  так, чтобы  $p(x)$  полностью разлагался на множители в новом поле  $(\mathbf{K}(\alpha, \beta, \gamma, \dots), +, \cdot)$ , называемом полем разложения многочлена  $p(x)$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь конечные поля  $\text{CG}(p)$ , где  $p$  — число элементов поля, и, как правило, ограничиваться случаем  $p = 2$ .

Над полем  $\text{CG}(2)$  любой многочлен можно представить в виде

$$p(z) = a_0 z^0 \hat{+} a_1 z^1 \hat{+} \dots \hat{+} a_i z^i \hat{+} \dots \hat{+} a_k z^k, \quad (\text{Б3.64})$$

где  $a_i \in \{0, 1\}$  и  $a_k \neq 0$ , если степень многочлена равна  $k$ .

Если  $p(z)$  неприводим над  $\text{CG}(2)$ , то можно добиться его разложения на неприводимые сомножители, присоединяя к  $\text{CG}(2)$  лишь один элемент  $a$ . Можно показать (см. § А5), что  $k$  корней этого многочлена — степени элемента  $a$ :

$$p(z) = (z \hat{+} a^{2^0})(z \hat{+} a^{2^1}) \dots (z \hat{+} a^{2^i}) \dots (z \hat{+} a^{2^{k-1}}). \quad (\text{Б3.65})$$

Так как  $a$  — корень  $p(z)$ , то в поле  $\text{CG}(2)(a)$  выполняется

$$a_0 a^0 \hat{+} a_1 a^1 \hat{+} \dots \hat{+} a_i a^i \hat{+} \dots \hat{+} a_k a^k = 0, \quad (\text{Б3.66})$$

или

$$a_k a^k = a_0 a^0 \hat{+} a_1 a^1 \hat{+} \dots \hat{+} a_i a^i \hat{+} \dots \hat{+} a_{k-1} a^{k-1}, \quad (\text{Б3.67})$$

что можно также записать как

$$a^k = a'_0 a^0 \hat{+} a'_1 a^1 \hat{+} \dots \hat{+} a'_i a^i \hat{+} \dots \hat{+} a'_{k-1} a^{k-1}, \quad (\text{Б3.68})$$

если

$$a_i = a'_i a_k. \quad (\text{Б3.69})$$

Соотношение (Б3.68) показывает, что все степени  $a$  можно выразить как линейные комбинации первых  $k - 1$  степеней с коэффициентами из  $\text{CG}(2)$ . Действительно,

$$a^{k+1} = a'_0 a^1 + a'_1 a^2 + \dots + a'_i a^{i+1} + \dots + a'_{k-1} a^k \quad (\text{Б3.70})$$

и, если  $a^k$  заменить по формуле (Б3.68), то получаем

$$a^{k+1} = a''_0 a^0 + a''_1 a^1 + \dots + a''_i a^i + \dots + a''_{k-1} a^{k-1}. \quad (\text{Б3.71})$$

Вообще в поле  $\text{CG}(p)$ ,  $p = q^h$ , где  $q$  — характеристика поля, всегда существует элемент  $a$ , для которого  $q^h - 1$  является периодом (минимальным показателем  $e$  с  $a^e = 1$ ). Все элементы поля  $\text{CG}(p)$  тогда представляются как линейные комбинации

$$a^i = \varphi_i(a^0, a^1, \dots, a^{h-1}), \quad i = 1, 2, \dots, q^h - 1. \quad (\text{Б3.72})$$

Элемент  $a$  называется элементом *порядка*  $q^h - 1$ , а неприводимый многочлен  $p(z)$  такой, что  $p(a) = 0$ , — *примитивным многочленом*. Каждой степени  $a^i = \varphi_i(a^0, a^1, \dots, a^{h-1})$  соответствует  $k$ -выборка элементов поля  $\text{CG}(q)$  (всего таких  $k$ -выборок будет  $q^h$ ). Поле  $\text{CG}(p)$  называется расширением поля  $\text{CG}(q)$ . Многочлен  $p(z)$  имеет в  $\text{CG}(p)$   $k$  корней  $a^{q^0}, a^{q^1}, \dots, a^{q^{k-1}}$ .

Если рассмотреть кольцо  $\mathbf{A}(z)$  многочленов над  $\text{CG}(q)$ , то каждый элемент фактор-множества

$$r_i(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \dots + a_{k-1} z^{k-1} \quad (\text{Б3.73})$$

соответствует линейной комбинации  $a^i = \varphi_i(a^0, a^1, \dots, a^{h-1})$  и обратно. Элементы  $r_i(z)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q^h - 1$ , вместе с  $r_0(z) = 1$  образуют множество со структурой поля ( $p(z)$  — неприводимый многочлен). Элементы  $r_i(z)$  называют *вычетами по модулю*  $p(z)$  многочленов  $\varphi(z) \in \mathbf{A}(z)$ :

$$\varphi(z) \equiv r_i(z) \pmod{p(z)}, \quad (\text{Б3.74})$$

где

$$\varphi(z) = q(z)p(z) + r(z) \quad (\text{Б3.75})$$

и

$$\deg r_i(z) < \deg p(z). \quad (\text{Б3.76})$$

Для любых  $i, j$  между 1 и  $q^h - 1$  найдутся такие  $h$  и  $u$  в этих же пределах, что

$$r_i(z) + r_j(z) \equiv r_h(z) \pmod{p(z)} \quad (\text{Б3.77})$$

и

$$r_i(z)r_j(z) \equiv r_u(z). \quad (\text{Б3.78})$$

П р и м е р. Пусть

$$p(z) = 1 + z^2 + z^3. \quad (\text{Б3.79})$$

Это — примитивный многочлен над  $\text{CG}(2)$ . Действительно, он, во-первых, неприводим над  $\text{CG}(2)$ , так как

$$p(0) = 1 \hat{+} 0 \hat{+} 0 = 1 \neq 0 \quad (\text{Б3.80})$$

и

$$p(1) = 1 \hat{+} 1 \hat{+} 1 = 1 \neq 0; \quad (\text{Б3.81})$$

во-вторых, присоединяя к  $\text{CG}(2)$  элемент  $a$ , для которого

$$p(a) = 1 \hat{+} a^2 \hat{+} a^3 = 0, \quad (\text{Б3.82})$$

видим, что  $a$  имеет порядок  $2^3 - 1 = 7$ . Покажем теперь непосредственно, что

$$p(z) = (z - a)(z - a^2)(z - a^4). \quad (\text{Б3.83})$$

Действительно,

$$p(a^2) = 1 \hat{+} a^4 \hat{+} a^6 = 1 \hat{+} 1 \hat{+} a \hat{+} a^2 \hat{+} a \hat{+} a^2 = 0 \quad (\text{Б3.84})$$

и аналогично

$$p(a^4) = 0. \quad (\text{Б3.85})$$

Если период  $e$  элемента  $b$  меньше  $q^k - 1$ , то этот элемент порождает циклическую группу порядка  $e$ :

$$b^1, b^2, \dots, b^t, \dots, b^e = b^0 = 1. \quad (\text{Б3.86})$$

Неприводимый многочлен  $p(z)$ , для которого  $b$  является корнем, не будет примитивным. Период любого элемента конечного поля с  $p = q^k$  элементами — делитель  $q^k - 1$ .

Пример. Многочлен

$$p(z) = 1 \hat{+} z \hat{+} z^2 \hat{+} z^3 \hat{+} z^4 \quad (\text{Б3.87})$$

неприводим над  $\text{CG}(2)$ . Если присоединить к  $\text{CG}(2)$  элемент  $b$  такой, что

$$p(b) = 1 \hat{+} b \hat{+} b^2 \hat{+} b^3 \hat{+} b^4 = 0, \quad (\text{Б3.88})$$

то имеем

$b^i$	$\varphi_i(b^0 \ b^1, \ b^2, \ b^3)$	$b^1 \ b^2 \ b^3 \ b^4$
0	0	0 0 0 0
$b^0$	1	1 0 0 0
$b^1$	$b^1$	0 1 0 0
$b^2$	$b^2$	0 0 1 0
$b^3$	$b^3$	0 0 0 1
$b^4$	$1 \hat{+} b^1 \hat{+} b^2 \hat{+} b^3$	1 1 1 1
$b^5$	1	

(Б3.89)

Период  $b$  равен 5, делителю  $2^4 - 1 = 15$ . Корнями  $p(z)$  будут  $b^1, b^2, b^4, b^8 = b^3$ , и мы имеем

$$p(z) = (z - b)(z - b^2)(z - b^3)(z - b^4). \quad (\text{Б3.90})$$

С помощью степеней элемента  $b$  мы не можем получить все классы вычетов по модулю  $p(z)$ .

**Принцип обнаружения и исправления ошибок.** Пусть  $p(z)$  — неприводимый над  $\text{CG}(2)$  многочлен степени  $k$ . Построим с его помощью код со словами длины  $n > k$ . Для этого рассмотрим все возможные кратные многочлена  $p(z)$  степени не выше  $n$ :

$$C(z) = a_0 z^0 \hat{+} a_1 z^1 \hat{+} \dots \hat{+} a_{n-1} z^{n-1} = p(z) q(z); \quad (\text{Б3.91})$$

кодовое слово

$$C = \|a_0 a_1 \dots a_i \dots a_{n-1}\|, \quad a_i \in \text{CG}(2). \quad (\text{Б3.92})$$

Сообщение будем записывать с помощью многочлена  $M(z)$  степени не выше  $m = n - k$ . Если умножить  $M(z)$  на  $z^k$ , то символы, составляющие сообщение, будут коэффициентами при более высоких степенях, как показано на таблице:

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$\dots$	$z^k$	$z^{k+1}$	$z^{k+2}$	$\dots$	$z^{n-1}$
$M(z)$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{m-1}$
$z^k M(z)$					$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{m-1}$

(Б3.93)

Разделим, далее,  $z^k M(z)$  на  $p(z)$ :

$$z^k M(z) = p(z) \cdot q(z) \hat{+} r(z), \quad (\text{Б3.94})$$

откуда

$$z^k M(z) \hat{+} r(z) = p(z) \cdot q(z) = C(z). \quad (\text{Б3.95})$$

Коэффициенты многочлена  $C(z)$  дают кодовое слово длины  $n$  для исходного сообщения. При этом коэффициенты  $r(z)$  располагаются на  $k$  последних местах кодового слова, так как степень  $r(z)$  не выше  $k$  — степени  $p(z)$ . Как показано выше, с помощью многочлена  $p(z)$  можно получить  $e$   $k$ -выборок, соответствующих  $r(z)$ , где  $e \leqslant 2^k - 1$  и  $e$  делит  $2^k - 1$ ; эти  $k$ -выборки будут служить для выявления и исправления ошибок.

**Кодирование.** Пусть имеем сообщение

$$M = \|a_0 a_1 \dots a_i \dots a_{m-1}\|. \quad (\text{Б3.96})$$

Представим его с помощью многочлена

$$M(z) = a_0 z^0 \hat{+} a_1 z^1 \hat{+} \dots \hat{+} a_i z^i \hat{+} \dots \hat{+} a_{m-1} z^{m-1}. \quad (\text{Б3.97})$$

Затем умножим  $M(z)$  на  $z^k$  (см. (Б3.93)), разделим произведение на  $p(z)$  и получающийся остаток  $r(z)$  вычтем из  $z^k M(z)$ :

$$C(z) = z^k M(z) - r(z). \quad (\text{Б3.98})$$

Получаем кодовое слово

$$C = \| \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \dots \alpha_{n-1} \| . \quad (\text{Б3.99})$$

**Декодирование.** В случае, когда полученное слово  $C'$  совпадает с переданным словом  $C$ , при делении  $C'(z)$  на  $p(z)$  не может получиться ненулевого остатка; поэтому если

$$C'(z) = p(z) q(z) + r(z) \quad (\text{Б3.100})$$

и  $r(z) \neq 0$ , то при передаче была допущена ошибка.

**Замечание.** При  $r(z) = 0$  можно сделать вывод лишь об отсутствии ошибок определенного типа, но не об отсутствии ошибок вообще.

**Пример.** Предположим, что требуется передать сообщение  $\|1\ 0\ 0\ 1\|$  с помощью кода с длиной слова 7, позволяющего исправить простую ошибку.

Имеем  $m = 4$ ,  $k = n - m = 3$ ; многочлен  $p(z) = 1 + z + z^3$  — примитивный многочлен. Действуем по правилам, изложенным выше:

$$\begin{aligned} M(z) &= 1 + z^3, \quad z^3 M(z) = z^3 + z^6 = (1 + z + z^3)(z + z^3) + (z + z^2), \\ C(z) &= z + z^2 + z^3 + z^6 \quad \text{и} \quad C = \underbrace{\|0\ 1\ 1}_{\text{проверка}} \underbrace{\|1\ 0\ 0\ 1\|}_{\text{информация}}. \end{aligned}$$

Пусть при передаче  $C$  мы получили  $C' = \|0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\|$ . При делении  $C'(z) = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^6$  на  $p(z) = 1 + z + z^3$  получаем остаток  $z + z^2$ , который указывает на наличие простой ошибки.

#### Б4. Аналогия между циклическими и линейными кодами

Как мы показали, многочлен  $p(z)$  степени  $k$  над  $\text{CG}(q)$ , который мы будем предполагать примитивным<sup>1)</sup>, разлагается на неприводимые множители над некоторым расширением  $\text{CG}(q)$  ( $a = \text{CG}(p)$  поля  $\text{CG}(q)$ ,  $p = q^k$ ):

$$p(z) = (z - a)(z - a^q) \dots (z - a^{q^{k-1}}). \quad (\text{Б4.1})$$

Порядок  $a$  равен  $n = q^k - 1$ .

Возьмем  $n - k$  элементов мультиликативной группы поля:

$$a^{r_i} = a^{q^i} \quad \text{для } i = 0, 1, \dots, k-1; \quad j = 1, 2, \dots, n-k, \quad (\text{Б4.2})$$

и образуем многочлен  $h(z)$ :

$$h(z) = (z - a^{r_1})(z - a^{r_2}) \dots (z - a^{r_j}) \dots \quad (\text{Б4.3})$$

<sup>1)</sup> Если  $p(z)$  не предполагать примитивным, то можно легко установить существование такого многочлена  $h(z)$ , что  $p(z)h(z) = z^d - 1$  и  $d$  делит  $q^k - 1$ .

Тогда

$$(z^n - 1) = p(z) h(z). \quad (\text{B4.4})$$

Действительно, все  $a^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q^k - 1$ , различны и являются корнями  $z^n - 1$  в силу

$$(a^i)^n = (a^n)^i = 1. \quad (\text{B4.5})$$

Так как  $z^n - 1$  не может иметь более  $n$  корней, то все его корни

$$a^1, a^2, \dots, a^t, \dots, a^{n-1}, a^n = a^0 = 1. \quad (\text{B4.6})$$

Многочлен  $h(z)$  называется дополнительным для  $p(z)$ .

Для кольца  $\mathbf{A}(z)$  многочленов  $\phi(z)$  над  $\text{CG}(q)$  можно рассмотреть фактор-множество  $\mathbf{A}(z)/(z^n - 1)$ ,  $n = q^k - 1$ . Это множество имеет структуру кольца, но не будет полем, так как многочлен  $z^n - 1 = p(z)h(z)$  не является неприводимым.

Каждый элемент фактор-кольца  $A(z)/(z^n - 1)$  представляет-  
ся многочленом  $\varphi(z)$  степени не больше  $n - 1$ :

$$\varphi(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \dots + a_i z^i + \dots + a_{n-1} z^{n-1}, \quad a_i \in \mathbb{C}G(q), \quad (\text{Б4.7})$$

или  $n$ -выборкой  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  из элементов  $\text{CG}(q)$ .

Заметим, что

$$z\varphi(z) = a_0 z^1 + a_1 z^2 + \dots + a_i z^{i+1} + \dots + a_{n-1} z^n \pmod{z^n - 1}, \quad (\text{Б4.8})$$

или

$$z\varphi(z) = a_{n-1}z^0 + a_0z^1 + \dots + a_i z^{i+1} + \dots + a_{n-2}z^{n-1} \pmod{(z^n - 1)}. \quad (\text{Б4.9})$$

Поэтому, если  $\varphi(z)$  соответствует  $n$ -выборка  $[a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{n-1}]$ , то  $z\varphi(z)$  соответствует выборка  $[a_{n-1}, a_0, \dots, a_{i-1}, \dots, a_{n-2}]$ ,  $z^2\varphi(z)$ —выборка  $[a_{n-2}, a_{n-1}, \dots, a_{i-2}, \dots, a_{n-3}]$  и т. д.

В частности, если

$$p(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \dots + a_i z^i + \dots + a_k z^k \quad (\text{B4.10})$$

— примитивный многочлен степени  $k$ , то имеем (по модулю  $z^n - 1$ )

$$p(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \dots + a_i z^i + \dots + a_k z^k,$$

$$zp(z) = a_0 z^1 + \dots + a_i z^{i+1} + \dots + a_k z^{k+1},$$

$$z^{n-k-1} p(z) = \dots + a_0 z^{n-k-1} + \dots + a_k z^{n-1}. \quad (\text{Б4.11})$$

Векторы, компоненты которых совпадают с коэффициентами многочленов из (Б4.11), определяют  $(n - k)$ -мерное подпространство пространства  $\mathbf{A}(z)/(z^n - 1)$ .

Заменим последовательность многочленов (Б4.11) матрицей  $\| \mathcal{G}' \|_{m \times n}$ :

$$\left\| \begin{smallmatrix} \mathcal{G}' \\ m \times n \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_t & & \dots & a_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & & a_t & \dots & & a_k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 & & \dots & a_k \end{array} \right\|. \quad (\text{Б4.12})$$

Ее ранг равен  $m = n - k$ . Подпространство, порожденное векторами-строками  $\|\mathcal{G}'\|$ , циклическое в том смысле, что если оно содержит вектор  $\|\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\|$ , то оно содержит также  $\|\alpha_{n-1}\alpha_0 \dots \alpha_{n-2}\|$  и т. д.

Пусть  $h(z) = \delta_0 z^0 + \delta_1 z^1 + \dots + \delta_m z^m$  — дополнительный многочлен для  $p(z)$ :

$$z^n - 1 = p(z) h(z). \quad (\text{B4.13})$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} h(z) &= \delta_0 z^0 + \hat{\delta}_1 z^1 + \dots + \hat{\delta}_m z^m, \\ zh(z) &= \delta_0 z^1 + \hat{\delta}_1 z^2 + \dots + \hat{\delta}_m z^{m+1}, \quad (\text{Б4.14}) \\ \vdots &\quad \vdots \\ z^{k-1}h(z) &= \delta_0 z^{k-1} + \hat{\delta}_1 z^k + \dots + \hat{\delta}_m z^{m+k-1}, \end{aligned}$$

и матрица

$$\| \mathcal{H}'' \| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \delta_0 & \delta_1 & \dots & \delta_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_0 & \dots & & \delta_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_0 & \delta_1 & \dots & \delta_m \end{array} \right\| \quad (\text{Б4.15})$$

аналогично определяет  $k$ -мерное подпространство пространства  $\mathbf{A}(z)/(z^n - 1)$ . Если изменить порядок столбцов в матрице  $\mathcal{H}$ :

$$\left\| \mathcal{H}' \right\|_{k \times n} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_m & \dots & \delta_1 & \delta_0 \\ 0 & \dots & 0 & \delta_m & & \dots & \delta_0 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ \delta_m & \dots & \delta_1 & \delta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (\text{B4.16})$$

то, как легко проверить, получаем соотношение

$$\| \mathcal{G}' \|_{m \times n} \cdot \| \mathcal{H}' \|_{n \times k} = \| 0 \|_{m \times k} \quad (\text{Б4.17})$$

— хорошо известное основное соотношение для линейных кодов, показывающее, что пространство, порожденное матрицей  $\|\mathcal{G}'\|$  — нулевое пространство для пространства, порожденного  $\|\mathcal{H}'\|$ , и наоборот.

**Примеры.** 1) Покажем, что циклический код, построенный с помощью многочлена

$$p(z) = 1 + z + z^3 \quad (\text{B4.18})$$

над  $\text{CG}(2)$ , фактически совпадает с кодом Хэмминга (3, 4). Имеем

$$z^7 \hat{+} 1 = (1 \hat{+} z^2 \hat{+} z^3)(1 \hat{+} z^2 \hat{+} z^3 \hat{+} z^4). \quad (\text{Б4.19})$$

Построим матрицу для  $p(z)$ :

$$\|G'\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б4.20})$$

Она приводится к канонической форме, если к первой строке прибавить третью, затем к новой первой строке прибавить четвертую, а затем ко второй прибавить четвертую:

$$\|G\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б4.21})$$

Аналогично для  $h(z) = 1 \hat{+} z^2 \hat{+} z^3 \hat{+} z^4$  имеем

$$\|H'\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б4.22})$$

или

$$\|H\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б4.23})$$

$\|H\|$  получается из  $\|H'\|$ , если поменять местами первую и третью строки и затем прибавить к третьей строке первую.

Очевидно, что  $\|G\|$  и  $\|H\|$  представляют собой матрицы линейного кода Хэмминга:

$$\|G\| = \| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \| \cdot \| A \| \quad (\text{Б4.24})$$

и

$$\|H\| = - \| A' \| \cdot \| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \| \quad (\text{Б4.25})$$

2) Мы попытаемся определить вид многочленов, которые при построении по ним линейного кода позволяют обнаружить:

- а) простую ошибку,
- б) нечетное число ошибок,
- в) две ошибки,
- г) три ошибки.

Заметим, что если передаваемое слово определяется многочленом  $C(z)$ , а принимаемое — многочленом  $C'(z)$ , то

$$C'(z) = C(z) \hat{+} E(z), \quad (\text{Б4.26})$$

где  $E(z)$  — «полином ошибок», обладающий ненулевым коэффициентом для каждой из степеней  $z$ , у которой коэффициент был передан неправильно. Например, если многочлен

$$C(z) = 1 + z^2 + z^3 + z^7 \quad (\text{Б4.27})$$

определяется двоичной последовательностью

$$1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1. \quad (\text{Б4.28})$$

при передаче которой 2-й, 4-й и 6-й символы изменяются:

$$1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1, \quad (\text{Б4.29})$$

то многочлен

$$C'(z) = 1 + z + z^2 + z^5 + z^7 \quad (\text{Б4.30})$$

представляется в виде

$$C'(z) = (1 + z^2 + z^3 + z^7) + (z + z^3 + z^5) \quad (\text{Б4.31})$$

и полином ошибок равен

$$E(z) = z + z^3 + z^5. \quad (\text{Б4.32})$$

Поэтому для выявления ошибки данного типа необходимо, чтобы  $E(z)$  не делился на  $p(z)$ , так как, по определению, многочлены, соответствующие кодовым словам, делятся на  $p(z)$ .

а) Если ошибка простая, то  $E(z)$  имеет вид

$$E(z) = z^i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (\text{Б4.33})$$

В качестве  $p(z)$  достаточно взять полином, не делящий никакой одночлен  $z^i$ , например

$$p(z) = 1 + z. \quad (\text{Б4.34})$$

б) Многочлен вида  $1 + z^k$  можно записать в виде

$$\varphi(z) = 1 + z^k = (1 + z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1}). \quad (\text{Б4.35})$$

Очевидно, что

$$\varphi(1) = (1 + 1)(1 + 1 + 1 + \dots + 1) = 0. \quad (\text{Б4.36})$$

Следовательно, если многочлен  $C(z)$ , соответствующий кодовому слову, делится на  $\varphi(z)$ :

$$C(z) = \varphi(z)s(z), \quad (\text{Б4.37})$$

то

$$C(1) = \varphi(1)s(1) = 0 \cdot s(1) = 0. \quad (\text{Б4.38})$$

Каждый такой  $C(z)$  обладает четным числом ненулевых коэффициентов, и любое нечетное число ошибок можно обнаружить.

в) В случае двух ошибок полином ошибок можно записать в виде

$$E(z) = z^i + z^j, \quad i < j < n - 1 \quad (\text{Б4.39})$$

или

$$E(z) = z^l (1 + z^{l-t}). \quad (\text{Б4.40})$$

Тогда достаточно в качестве  $p(z)$  взять примитивный многочлен степени  $k$ . Действительно, этот многочлен

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k, \quad (\text{Б4.41})$$

будучи примитивным, не может делить многочлен  $z^e - 1$  при  $e < 2^k - 1 = n$ .

г) Наконец, для обнаружения трех ошибок нужно взять многочлен вида

$$g(z) = (1 + z) p(z), \quad (\text{Б4.42})$$

где  $p(z)$  примитивен. Действительно,  $1 + z$  позволяет обнаружить простые ошибки, а  $p(z)$  — двойные ошибки.

## Б5. Коды сцепления

Назовем регистром сдвига систему, позволяющую осуществлять последовательное изменение мест  $r$ -выборки. Например, если в момент времени  $t_0$  имеем выборку  $[a_0 a_1 \dots a_k]$ , в которой места элементов можно характеризовать полиномом  $\varphi_0(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \dots + a_k z^k$ , то в момент  $t_0 + 1$  имеем выборку  $[0 a_0 a_1 \dots a_k]$ , характеризуемую полиномом  $\varphi_1(z) = 0z^0 + a_0 z^1 + \dots + a_k z^{k+1}$ , в момент  $t_0 + i$  выборку  $[0 0 \dots 0 \underbrace{a_0 a_1 \dots a_k}_i]$  и полином  $\varphi_i(z) = 0z^0 + 0z^1 + \dots + 0z^{i-1} + a_0 z^i + \dots + a_k z^{k+i}$ . Можно также усложнить систему, накладывая различные соотношения на компоненты выборки в разные моменты времени, например,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^{(t_0+1)} = a_0^{(t_0)} + a_2^{(t_0)}, \\ a_1^{(t_0+1)} = a_0^{(t_0)}, \\ a_2^{(t_0+1)} = a_1^{(t_0)}, \\ \dots \end{array} \right. \quad a_i \in \text{CG}(2).$$

Пусть в момент времени  $t_0$  регистр находится в состоянии  $a_0 a_1 a_2$ ,  $a_i \in \text{CG}(2)$ . Для обозначения последующих состояний будем использовать верхние индексы. Так, в момент времени  $t_0 + 1$  новое состояние регистра выражается через предыдущее состояние с помощью системы соотношений:

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= a_0^{(0)} + a_2^{(0)}, \\ a_1^{(1)} &= a_0^{(0)}, \\ a_2^{(1)} &= a_1^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{Б5.1})$$

Это можно записать в матричной форме:

$$\left\| \begin{array}{c} v^{(1)} \\ \hline 3 \times 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} v^{(0)} \\ \hline 3 \times 1 \end{array} \right\| = \left\| \mathcal{M} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} v^{(0)} \\ \hline 3 \times 1 \end{array} \right\|, \quad (\text{Б5.2})$$

где  $\left\| \begin{array}{c} v^{(t)} \\ \hline 3 \times 1 \end{array} \right\|$  — вектор-столбец с компонентами  $a_0^{(t)}, a_1^{(t)}, a_2^{(t)}$ .

В моменты времени  $t_0 + 2, t_0 + 3, \dots, t_0 + i, \dots$  получаем последовательно

$$\begin{aligned} \left\| v^{(2)} \right\| &= \left\| \mathcal{M} \right\| \cdot \left\| v^{(1)} \right\| = \left\| \mathcal{M} \right\|^2 \cdot \left\| v^{(0)} \right\|, \\ \left\| v^{(3)} \right\| &= \left\| \mathcal{M} \right\| \cdot \left\| v^{(2)} \right\| = \left\| \mathcal{M} \right\|^3 \cdot \left\| v^{(0)} \right\|, \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ \left\| v^{(t)} \right\| &= \left\| \mathcal{M} \right\| \cdot \left\| v^{(t-1)} \right\| = \left\| \mathcal{M} \right\|^t \cdot \left\| v^{(0)} \right\|. \end{aligned} \quad (\text{Б5.3})$$

Мы попытаемся определить такую матрицу  $\left\| \mathcal{M} \right\|$ , чтобы для нее существовало целое число  $n$  со свойством

$$\left\| v^{(n)} \right\| = \left\| \mathcal{M} \right\|^n \cdot \left\| v^{(0)} \right\| = \left\| v^{(0)} \right\| \quad (\text{Б5.4})$$

и чтобы наименьшее из таких чисел  $n$  было равно  $2^k - 1$ .

Необходимое и достаточное условие для этого дает теорема Гамильтона — Кэли<sup>1)</sup>, которая утверждает, что каждая матрица  $\left\| D \right\|$  является корнем своего характеристического уравнения:

$$\left\| D \right\| - z \cdot 1 \left\| \right\| = 0. \quad (\text{Б5.5})$$

Пусть  $f(z) = \left\| \left\| \mathcal{M} \right\| - z \cdot 1 \right\| \right\|$ . Если можно найти такое  $n$ , что  $f(z)$  делит  $z^n - 1$ , т. е.  $z^n - 1 = f(z)q(z)$ , то по теореме Гамильтона — Кэли имеем (так как  $f(\mathcal{M}) = 0$ )

$$\left\| \mathcal{M} \right\|^n - \left\| 1 \right\| = f(\mathcal{M})q(\mathcal{M}) = 0, \quad (\text{Б5.6})$$

т. е.

$$\left\| \mathcal{M} \right\|^n = \left\| 1 \right\|, \quad (\text{Б5.7})$$

или

$$\left\| \mathcal{M} \right\|^n \left\| v^0 \right\| = \left\| v^0 \right\|, \quad (\text{Б5.8})$$

что реализует первое из условий. Заметим, что для реализации второго условия достаточно, чтобы  $f(z)$  был примитивен.

Эти два условия будут, следовательно, удовлетворены, если выбрать регистр сдвига с  $k$  позициями и — в качестве соотношения между различными позициями — условие, которому должен удовлетворять корень  $\alpha$  примитивного полинома степени  $k$ , т. е.

$$p(\alpha) = 0. \quad (\text{Б5.9})$$

Пример. Пусть  $k = 3$ . Попытаемся получить двоичную цепь длины 7. Пусть  $p(z) = 1 + z^2 + z^3$ . Это — примитивный

<sup>1)</sup> Ф. Р. Гантмажер, Теория матриц, изд. 3-е, «Наука», 1967.

многочлен. На позиции в регистре налагаем условия

$$\begin{cases} a_0^{(i)} = a_0^{(i-1)} + a_2^{(i-1)}, \\ a_1^{(i)} = a_0^{(i-1)}, \\ a_2^{(i)} = a_1^{(i-1)}. \end{cases} \quad (\text{Б5.10})$$

Каждое состояние регистра можно получить тогда из предыдущего с помощью матрицы (см. Б5.2))

$$\|v^{(i)}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \|v^{(i-1)}\| = \|\mathcal{M}\| \cdot \|v^{(i-1)}\|, \quad (\text{Б5.11})$$

например,

$$\|v^{(1)}\| = \|\mathcal{M}\| \cdot \|v^{(0)}\|, \quad (\text{Б5.12})$$

$$\|v^{(2)}\| = \|\mathcal{M}\| \cdot \|v^{(1)}\| \quad \text{и т. д.} \quad (\text{Б5.13})$$

Напишем характеристическое уравнение матрицы  $\|\mathcal{M}\|$ :

$$\begin{aligned} f(z) = \|\|\mathcal{M}\| - z\|1\|\| &= \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \hat{+} \left\| \begin{array}{ccc} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} (1+z) & 0 & 1 \\ 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & z \end{array} \right\| = (1+z) \cdot z \cdot z \hat{+} 1 = z^3 \hat{+} z^2 \hat{+} 1 = p(z). \end{aligned} \quad (\text{Б5.14})$$

Можно проверить непосредственно, что матрица  $\|\mathcal{M}\|$ , удовлетворяет уравнению

$$f(\mathcal{M}) = \|\mathcal{M}\|^3 \hat{+} \|\mathcal{M}\|^2 \hat{+} 1 = 0. \quad (\text{Б5.15})$$

Придадим компонентам вектора начального состояния  $\|v^0\|$  произвольные значения, не все равные нулю, например,

$$\|v^0\| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б5.16})$$

Имеем

$$\|v^1\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (\text{Б5.17})$$

$$\|v^2\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б5.18})$$

Вместо того чтобы продолжать дальше, заметим, что при применении матрицы  $\|\mathcal{M}\|$  к вектору состояния  $\|v^{(i-1)}\|$  компоненты  $a_0^{(i-1)}$  и  $a_1^{(i-1)}$  сдвигаются в положения соответственно  $a_1^{(i)}$

и  $\alpha_2^{(i)}$ , а  $\alpha_0^{(i)}$  представляется как сумма  $\alpha_0^{(i-1)}$  и  $\alpha_2^{(i-1)}$  по модулю 2. Образование цепи теперь видно непосредственно:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha_2^{(0)} & \alpha_1^{(0)} & \alpha_0^{(0)} & & & & \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \alpha_0^{(1)} & = & \alpha_0^{(0)} & + & \alpha_2^{(0)} \\ \alpha_2^{(2)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_0^{(2)} & = & \alpha_0^{(1)} & + & \alpha_2^{(1)} \text{ и т. д.} \end{array} \quad (\text{Б5.19})$$

Заметим, что если в этой последовательности брать три идущих один за другим двоичных знака (в циклическом порядке), то получим все числа от 1 до 7 в двоичной записи

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 \ldots & |1|0|0| & & & & & & & & \\ 4 \ldots & & |0|0|1| & & & & & & & \\ 6 \ldots & & & |0|1|1| & & & & & & \\ 7 \ldots & & & & |1|1|1| & & & & & \\ 3 \ldots & & & & & |1|1|0| & & & & \\ 5 \ldots & & & & & & |1|0|1| & & & \\ 2 \ldots & & & & & & & |0|1|0| & & \end{array}$$

Вообще  $n$  двоичных знаков в цепи максимальной длины  $n = 2^k - 1$  достаточно, чтобы осуществить пересчет, требующий  $(2^k - 1)k$  двоичных знаков. Это — принцип кода Бодо.

## Б6. Декодирование перестановками

Пусть  $\mathbf{C}$  — множество  $m$ -выборок из поля  $\text{CG}(2)$ , образующих код:

$$\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_{2^m}\}. \quad (\text{Б6.1})$$

Мы рассмотрели получение кодов с минимальным расстоянием  $d = 2e + 1$ , удовлетворяющих некоторым линейным соотношениям:

$$\left\| \mathcal{H}_{k \times r} \right\| \cdot \left\| C_t \right\| = \left\| 0 \right\| \text{ для линейных кодов} \quad (\text{Б6.2})$$

и

$$z^k M(z) \hat{+} r(z) = p(z) q(z) \text{ для циклических кодов.} \quad (\text{Б6.3})$$

В общем случае мы можем предположить, что код получается с помощью некоторого преобразования  $F(m)$ , дающего кодовые слова длины  $m + k$ . Через  $m_x$  обозначим значение

(в десятичной системе) последовательности двоичных знаков, расположенной в  $m$  информационных местах кодового слова  $C_x$ .

Тогда можно записать

$$F(m_x) = C_x \in \mathbf{C}. \quad (\text{Б6.4})$$

Напомним, что для линейного кода, например, кодовые слова заполняют подпространство  $n$ -мерного линейного пространства. Предположим, что нам удалось найти перестановку  $s$ , «сохраняющую закон образования кода  $F(m_x)$ », т. е. при  $C_x \in \mathbf{C}$  имеем

$$s(C_x) = C_y \in \mathbf{C}, \quad (\text{Б6.5})$$

и, следовательно,

$$C_y = F(m_y). \quad (\text{Б6.6})$$

Фиксируя некоторую перестановку, дающую порядок компонент векторов пространства  $\mathcal{E}_n$ , будем рассматривать перестановки  $\pi$  (см. § 16)

$$\pi(C_x) = C'_x \in \mathbf{C} \quad (\text{Б6.7})$$

с

$$\pi(C_x) = F(m_y). \quad (\text{Б6.8})$$

Если теперь получено слово  $C'_x$  с не более чем  $e$  ошибками, то могут представиться два случая:

1) в  $m$  информационных местах не содержится ошибок и информация  $m_x$  полностью восстанавливается, т. е. можно точно найти кодовое слово:

$$F(m_x) = C_x, \quad (\text{Б6.9})$$

так как  $C_x$  — единственное кодовое слово, находящееся на расстоянии  $D \leq e$  от полученного слова  $C'_x$ ;

2) в  $m$  информационных местах имеются ошибки, полученная  $m$ -выборка  $m_y$  не совпадает с переданной  $m_x$ , тогда

$$F(m_y) = C_y \neq C_x, \quad (\text{Б6.10})$$

слова  $C_y$  и  $C_x$  находятся на расстоянии  $D > e$ . Заметим, что перестановка  $\pi$  не изменяет расстояния между  $C_x$  и  $C'_x$ :

$$D(C_x, C'_x) = D[\pi(C_x), \pi(C'_x)]. \quad (\text{Б6.11})$$

На этом замечании основан способ декодирования, позволяющий в некоторых случаях найти переданное кодовое слово, если в полученном слове имеется не более  $e$  ошибок. Для этого рассматривается последовательность перестановок, сохраняющих закон образования кода:

$$I, \pi^1, \pi^2, \dots, \pi^l, \dots \quad (\text{Б6.12})$$

Действуя, как указано в таблице (см. ниже), получаем

$$C_x = \pi^{-j}(C^j) \quad (\text{Б6.13})$$

— искомое слово.

К сожалению, нахождение последовательности  $I$ ,  $\pi^1$ ,  $\pi^2$ , ...,  $\pi^i$ , ...,  $\pi^j$  — трудная задача. Отметим, что рассмотрение степеней циклического сдвига компонент не всегда приводит к цели и часто оказывается необходимым рассматривать другие типы перестановок (см. [25]).

Последовательность перестановок $\pi^i$	Значения $m'_x$	$F \left[ \pi^i \left( m'_x \right) \right] =$ $= C^i$	Расстояние между $C^i$ и $\pi^i(C'_x)$ : $D[C^i, \pi^i(C'_x)]$
$I(C'_x)$	$I(m'_x)$	$C^0$	если $D[C^0, I(C'_x)] > e$ , то продолжаем
$\pi^1(C'_x)$	$\pi^1(m'_x)$	$C^1$	если $D[C^1, I(C'_x)] > e$ ,
...	...	...	то продолжаем
$\pi^i(C'_x)$	$\pi^i(m'_x)$	$C^i$	до тех пор, пока
...	...	...	не получим
$\pi^j(C'_x)$	$\pi^j(m'_x)$	$C^j$	$D[C^j, \pi^j(C'_x)] \leq e$

Пример. Применим изложенный метод к коду Хэмминга из § Б3, исправляющему простую ошибку. Выпишем кодовые слова в следующем порядке:

$$F(m) = \begin{cases} \begin{array}{ccccccc} a_5 & a_7 & a_3 & a_6 & a_4 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 : C_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \end{cases} \quad (\text{Б6.14})$$

Легко проверить, что циклический сдвиг сохраняет закон образо-

вания кода. Если при передаче кодового слова  $C_5$  была допущена одна ошибка, а именно, было получено слово  $C'_5 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ , то, применяя метод настоящего параграфа, получаем

$\pi^i(c'_x)$	$\pi^i(m'_x)$	$F[\pi^i(m'_x)] = c^i$	$D[c^i, \pi^i(c'_x)]$
$I(C'_5) = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$	[1 110]	[1 110 100] = $C^0$	$D[C^0, I(C'_5)] = 2 > e$
$\pi(C'_5) = [1 \ 100 \ 101]$	[1 100]	[1 100 010] = $C^1$	$D[C^1, \pi(C'_5)] = 3$
$\pi^2(C'_5) = [1 \ 001 \ 011]$	[1 001]	[1 001 110] = $C^2$	$D[C^2, \pi^2(C'_5)] = 2$
$\pi^3(C'_5) = [0 \ 010 \ 111]$	[0 010]	[0 010 110] = $C^3$	$D[C^3, \pi^3(C'_5)] = 1 = e$

следовательно,

$$C_5 = \pi^{-3}(C^3) = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0].$$

## ЛИТЕРАТУРА

---

- [1] Авундо-Бодино (Avundo-Bodino G), Economic Applications of the Theory of Graphs, Gordon and Breach, N. Y., 1962.
- [2] Американское математическое общество (American Mathematical Society), Proceedings of the Tenth Symposium in Applied Mathematics, 1958.
- [3] Американское математическое общество (American Mathematical Society), Combinatorial Analysis, Proceed. Symp. in Applied Math., 1960.
- [4] Балаш (Balas E.), Discrete Programming by the Filter Method with extension to Mixed-integer programming and applications to Machine, Sequencing. International Comput. Center, Rome, 1966.
- [5] Басекер (Busacker R. G.) и Саати (Saaty T. L.), Finite Graphs and Networks, An Introduction with Applications, Ed. McGraw Hill, N. Y., 1965.
- [6] Беккенбах (Beckenbach E. F., ed.), Applied Combinatorial Mathematics, Ed. Wiley, 1964.
- [7] Бенеуэн (Benayoun R.), Нгиэм (Nghiem P. T.) и Рой (Roy B.), Un modèle d'implantation et d'acheminement, Document S. E. M. A., 1966.
- [8] Берж (Berge C.), La théorie des graphes et ses applications, Ed. Dunod, Paris, 1958; 2-е изд., 1965. [Русский перевод: К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, 1962.]
- [9] Берж (Berge C.) и Гуила-Хури (Ghouila-Houri A.), Programmes, jeux et réseaux de transport, Ed. Dunod, 1962.
- [10] Бернсайд (Burnside W.), Theory of Groups of Finite Order, 2-е изд., Cambridge Univ. Press, 1911; Dover Publ., 1955.
- [11] Бертье (Bertier P.), Procédures pour élaborer des tournées de distribution, Publication S. E. M. A., séries spéciale, № 8, 1966.
- [12] Бертье (Bertier P.) и Рой (Roy B.), Une procédure de résolution pour une classe de problèmes pouvant avoir un caractère combinatoire, Document S. E. M. A., 1964.
- [13] Беттерси (Battersby A.), Network Analysis for Planning and Scheduling, Ed. Mc Millan, 1964.
- [14] Биркгоф (Birkhoff G.), Lattice Theory, Amer. Math. Soc., N. Y., 1948. [Русский перевод: Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952.]
- [15] Гуте (Goutat), Système de gestion d'un parc d'engins moteurs, Méthodes d'affectation, Document S. A. C. S., 1966.

- [16] Девид (David F. N.) и Бартон (Barton D. E.), Combinatorial Chance, Ed. Griffin, London, 1962.
- [17] Дерниам (Derriame J. C.), Etude d'algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis, Thèse, Fac. Sciences Nancy, 1966.
- [18] Диксон (Dickson L. E.), History of the Theory of Numbers, Ed. Chelsea, N. Y., 1952.
- [19] Дюбрей-Жакотен (Dubreil-Jacotin M. L.), Лезье (Lesieur R.) и Круазо (Cruyot R.), Leçons sur la théorie des treillis, des structures ordonnées et les treillis géométriques, Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [20] И. Ф. О. Р. С. (I. F. O. R. S.), Session Theory of Graphs, Fourth International Conference, Boston, 1966.
- [21] Кёниг (König D.), Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen, Leipzig, 1936, New York, 1950.
- [22] Кофман (Kaufmann A.), Méthodes et modèles de la Recherche opérationnelle, m. 2, Ed. Dunod, Paris, 1964.
- [23] Кофман (Kaufmann A.) и Дебазеиль (Desbazeille G.), La Méthode du chemin critique, Ed. Dunod, Paris, 1966.
- [24] Кофман (Kaufmann A.) и Пресигут (Précigout M.), Cours de Mathématiques nouvelles pour le recyclage des ingénieurs, Ed. Dunod, Paris, 1966.
- [25] Кульманн (Cullmann G.), Codes détecteurs et correcteurs d'erreurs, Ed. Dunod, Paris, 1967.
- [26] Кульманн (Cullmann G.), Codage et transmission de l'information, Ed. Eyrolles, 1968.
- [27] Лаплас (Laplace P. S.), Théorie analytique des probabilités, Ed. Mme Vve Courcier, Paris, 1812.
- [28] Локкер (Lockyer K. G.), An Introduction to Critical Path Analysis, Ed. Pittman, London, 1964.
- [29] Люка (Lucas E.), Théorie des nombres, Paris, 1891.
- [30] Макмагон (MacMahon P. A.), Combinatorial Analysis, London, 1915—1916.
- [31] Нагель (Nagell T.), Introduction to Number Theory, Ed. Wiley, N. Y., 1951.
- [32] Нетто (Netto E.), Lehrbuch der Kombinatorik, Ed. Teubner, Leipzig, 1901; 2-е изд. 1927.
- [33] Пэр (Pair C.), Sur les algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis, Inst. Calcul Autom. Univ. de Nancy, 1965.
- [34] Пэр (Pair C.), Etude de la notion de pile. Application à l'analyse syntaxique, Thèse publiée par la Fac. Sciences Nancy, 1966.
- [35] Райзер (Ryser H. J.), Combinatorial Mathematics, Ed. Wiley, N. Y., 1963. [Русский перевод: Г. Дж. Райзер, Комбинаторная математика, «Мир», 1966.]
- [36] Риордан (Riordan J.), An Introduction to Combinatorial Analysis, Ed. Wiley, N. Y., 1958. [Русский перевод: Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, 1963.]

- [37] Рой (Roy B.), Cheminement et connexité dans les graphes, Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1962.
- [38] Рой (Roy B.) и Сьюсман (Sussmann B.), Les problèmes d'ordonnancement avec contraintes disjonctives, Document S. E. M. A., 1964.
- [39] Уитворт (Whitworth W. A.), Choice and Chance, London, 1901.
- [40] Феллер (Feller W.), Probability Theory and its Applications, t. 1, Ed. Wiley, N. Y., 1950. [Русский перевод: В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее применения, ИЛ, 1951.]
- [41] Фидлер (Fiedler M., ed.), Theory of Graphs and its Applications, Proc. Symposium Smolenice 1963; Ed. Czechoslovak Acad. of Sciences, Prague, 1964.
- [42] Фламан (Flament C.), Réseaux de communication et structures de groupe, Ed. Dunod, Paris, 1965.
- [43] Форд (Ford L. R., Jr.) и Фалкерсон (Fulkerson D. R.), Flows in Networks, Ed. Princeton Univ. Press, 1962. [Русский перевод: Л. Форд, Д. Фалкерсон, Потоки в сетях, «Мир», 1966.]
- [44] Харари (Nagary F.), Норман (Norman R. Z.) и Картрайт (Cartwright D.), Structural Models. An Introduction to the Theory of Directed Graphs, Ed. Wiley, N. Y., 1965.
- [45] Харди (Hardy G. H.) и Райт (Wright E. M.), An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford Univ. Press, 1964.

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Айткен (Aitken A. C.) 112  
Ангер (Unger S. H.) 202

Барбо (Barbaud P.) 335  
Белл (Bell E. T.) 9, 51, 54  
Беллман (Bellman R.) 60, 280, 284,  
287, 343  
Берж (Berge C.) 154, 156  
Бертье (Bertier P.) 299

Вуд (Wood D. E.) 300

Галуа (Galois E.) 437

Демукрон (Demoucron M.) 176, 207  
Дерниам (Derniame J. C.) 265  
Джир (Gere W. S.) 355  
Джонсон (Johnson S.) 355

Женюи (Genuys F.) 265

Игнел (Ignall C.) 355  
Истмен (Eastman W. L.) 414

Калаба (Kalaba R.) 284, 287, 343  
Капланский (Kaplansky I.) 130, 148

Кёниг (König D.) 154, 156, 198, 387,  
391, 393, 397  
Кларк (Clarke) 324  
Коффман (Kaufmann A.) 180, 350  
Коши (Cauchy A. L.) 99  
Краскал (Kruskal J. B.) 351  
Кульман (Cullmann G.) 439, 470  
Кэли (Cayley A.) 96

Лаплас (Laplace P. S.) 9, 30  
Лейбниц (Leibnitz G. W.) 22, 53  
Литтл (Little J. D. C.) 299, 300, 315  
Лоулер (Lawler E. L.) 300  
Люка (Lucas E.) 127

Магхут (Maghout K.) 180, 184, 186,  
196  
Мальгранж (Malgrange Y.) 166, 207,  
299, 394

Оре (Ore O.) 397

Папен (Papin M. D.) 180  
Паскаль (Pascal B.) 13  
Пертизи (Pertuiset R.) 207  
Поль (Pauli M. C.) 202  
Понtryгин Й. С. 60  
Пэр (Pair C.) 243

Райзер (Ryser H. J.) 64  
Риордан (Riordan J.) 52, 67, 149,  
152  
Рой (Roy B.) 299

Сильва (Silva D.) 60, 62  
Сильвестр (Silverster) 62  
Скорняков Л. А. 223  
Скрайдж (Sckrage L.) 355

де Талансе (de Talancé M.) 335  
Томеску (Tomescu T.) 166, 196  
Тушар (Touchard T.) 130, 149

Фалкерсон (Fulkerson D. R.) 366,  
378, 395  
Фано (Fano R. M.) 443  
Флетчер (Fletcher) 324

Фор (Faure R.) 180, 299  
Форд (Ford Z. R. Ir.) 281, 366, 378,  
395

Холл (Hall M.) 387, 391  
Хэмминг (Hamming R. W.) 445, 446,  
452, 453, 455, 463, 470

Шеннон (Shannon C. E.) 443  
Эйлер (Euler L.) 30, 71

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра характеристических функций 420

Алгоритм Беллмана — Калаба 284

— венгерский 400, 406

— Джонсона 355

— Краскала 350

— Литтла 300

— Форда 281

— Форда — Фалкерсона 366

Беспорядок 74

Бифуркант 217

Булева алгебра 415

— матрица 82, 210, 211

Величина информации 442

Вершина графа 157

— — висячая 217

— — насыщенная 398

— — ненасыщенная 398

Взаимная информация 443

Вход сети 361

r-выборка 9

— неупорядоченная 11

— упорядоченная 10

Выход сети 361

Граф 155

— антисимметрический 159

— Бержа 156

— ветвящийся 220

— дополнительный 160

— дуг паросочетания 398

— неориентированный 191

— полный 159, 160

— последовательный 291

— простой 381

— связный 192

— сильно связный 165

Граф симметрический 159, 187

— с  $\rho$  отображениями 205

—  $\rho$ -цветный 204

— частичный 159

Груда 266

Декодирование 450

Денумератор 38, 43, 44

— цикловых классов 97

Дерево 220

— частичное 221

Дефицит простого графа 391, 393

Диаграмма Хассе 231

Длина пути 162

— цепи 191

Дуга 157

— насыщенная 363

— ненасыщенная 363

— сильная 397

— слабая 397

Задача Люка 127

— о временном упорядочении (о со-  
ставлении расписания) 355

— о встречах 73, 146

— о коммивояжере 300

— о ладьях 134

— о максимальном потоке 363

— о музыкантах 333, 335

— о назначениях 134, 312, 405

— о супружеских парах 127, 147, 149

Значение пути через вершины 272

— — — дуги 273

Индекс разбрасывания простого гра-  
фа 392

Класс подстановок 89

Клика 201

— максимальная 202

- Код** 443  
 — двойственный 449  
 — линейный 447  
 — сцепления 465  
 — Фано 443  
 — циклический 447  
**Кодирование** 459  
**Кольцо классов вычетов** 427  
**Компонента связности** 192  
**Контур** 162  
 — гамильтонов 163, 300  
 — простой 162  
 — элементарный 162  
**Концевые точки** 158
- Ладейные многочлены** 135  
**Латинская последовательность** 243  
**Латинский квадрат** 152  
 — прямоугольник 151  
 — — нормализованный 151
- Матрица назначений** 406  
**Метод латинской композиции** 243  
 — Магу 180, 184, 186, 196  
 — прогрессивных разделений и оценок (ветвления и ограничения) 299, 335  
 — Флетчера — Кларка 324  
**Многочлены попаданий** 135  
**Мультиграф** 205  
 — плоский 205
- Опора** простого графа 391  
 — — — минимальная 392  
 $k$ -оптимальность 341  
 $k$ -оптимум 342
- Паросочетание** простого графа 386  
 — — — максимальное 389  
 — — — полное 397  
**Перестановка** 12, 87  
 — противоречивая 145  
 — с запретными положениями 133  
 — с совпадениями 74, 76  
**Перманент** матрицы 78, 85  
**Петля** 158  
**Подграф** 159  
 — регулярный 192  
**Подмножество** внешне устойчивое 182  
 — внутренне устойчивое 180  
 — сцепления 210  
**Подпуть** 275
- Подстановка** 87  
**Покрытие** простого графа 381  
 — — — минимальное 382  
**Поле Галуа** 432  
**Полиномы Белла** 52  
**Полустепень** внешняя 158  
 — внутренняя 158  
**Порядковая функция** графа без контуров 173  
 — — классов графа 173  
**Порядок** графа 157  
 — подстановки 92  
**Поток** в транспортной сети 361  
 — максимальный 363  
 — минимальный 370  
 — полный 364  
**Потребность** подмножества сети 377  
 — вершины 378  
**Прадерево** 217, 269, 350  
 — частичное 218, 350  
**z-преобразование** 24  
 — отрицательное 25, 27, 30  
 — экспоненциальное 25, 32  
**Проверочная матрица** 451  
**Производящая функция** 19  
 — — экспоненциальная 19  
**Пропускная способность** выхода 377  
 — — дуги 361  
 — — линии 443  
 — — разреза 362  
**Путь** 161, 169  
 — гамильтонов 163, 315  
 — максимальный через вершины 272  
 — — дуги 273  
 — минимальной длины 288  
 — минимальный через вершины 272  
 — — дуги 273  
 —  $k$ -оптимальный 343  
 — простой 162  
 — составной 162  
 — элементарный 162
- Разбиение** множества 14  
**Размещение** без повторения 12  
 — с повторением 12  
**Разрез** сети 362  
**Рассечение** графа 263  
**Расстояние** между вершинами графа 288  
 — Хэмминга 446  
**Ребро** 191  
**Решето Сильва — Сильвестра** 62  
 — Эратосфера 72
- Симметрическая группа** 89  
**Смежные вершины** 158  
 — дуги 158

Соты 133, 137, 140, 142  
Сочетание без повторения 14  
— с повторением 13  
Степень вершины 192  
— подстановки 91  
Структура 223, 226  
— лексикографическая 239

Таблица истинности 421  
Тождество Коши 99  
Транзитивное замыкание 164  
Транспозиция 93  
Транспортная сеть 361

Уровень 173, 343

Фактор графа 257  
Формула включения и исключения 61, 64, 67  
Функция Гранди 177, 198

Характеристика кольца 428  
— поля 433  
Характеристическая функция объединения 417  
— — отрицания 416  
— — пересечения 417  
— — подмножества 416  
Хроматический класс 200

Цепь 191  
— гамильтонова 193  
— насыщенная 364  
— простая 191  
— чередующаяся 399  
— элементарная 191  
Цикл графа 191  
— — гамильтонов 193  
— — простой 192  
— — элементарный 192  
— подстановки 89

Числа Белла 1-го рода 51  
— — 2-го рода 51  
— Стирлинга 1-го рода 48, 49  
— — — присоединенные 107  
— — 2-го рода 48, 49, 55  
— — — кумулятивные 124  
— — — присоединенные 113  
Число внешней устойчивости 184  
— внутренней устойчивости 180, 199, 393  
— хроматическое 195  
Числовая функция на вершинах графа 271  
— — на дугах графа 273

Энтропия 442  
Энумератор 38, 43

Ядро графа 186

А. КОФМАН

**ВВЕДЕНИЕ В ПРИКЛАДНУЮ КОМБИНАТОРИКУ**

---

М., 1975 г., 480 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *А. Л. Ипатова*

Сдано в набор 11/VII 1974 г. Подписано к печати 7/I 1975 г.

Бумага 60×90<sup>1/16</sup>, тип. № 2. Физ. печ. л. 30

Условн. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 27,72. Тираж 1800 экз. а Цена  
книги 2 р. 12 к. Заказ № 258.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15



Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская  
типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома  
при Государственном Комитете Совета Министров СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли  
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29