WeinbergQFT Part2

坂井 啓悟 (Sakai Keigo)

まえがき

これは Weinberg 著「The Quantum Theory of Field」の日本語訳「ワインバーグ場の量子論」(以下，WeinbergQFT だったり単に Weinberg という) を読んだりゼミをする中で行った計算を全部書き留めておいて，復習にかける時間を最小限にしたり，同期や後輩たちがもしこの本を勉強に使おうと思ったときにドヤ顔で知ったかぶりをするためのノート．というのは本音で，建前としては，よく「Weinberg は初学者にはオススメできない本」と言われることが多いけど自分で読んでみたところ (少なくとも他の本に比べてそんなこと言われるほど) そうは思わなかったので，そのような悪評 (？) を覆すつもりで行間を一行たりとも残さないつもりで周りに布教するためのノート．

行間埋めの程度としては，この説明なら高校生の頃の自分が理解できたかな？ぐらいの意識でやることにしてる．まあやっぱり実際に高校生が読んで理解できるかは別だと思うけど．行間がある式や難しい文だけピックアップして説明だけ書いていこうとしたけど，写経もかねて (全部自分の言葉で説明するってのは流石にダルいなぁって言い訳だけど) 基本的に本文と似た形式で書くことにした．ただ式番号だけはガチでダルいので，このノートでは基本的に式番号は使ってない．このノート中で式番号が出たら，それは WeibergQFT 本文中の式番号を参照していると思ってほしい．そういう意味でこのノートは全く自己完結してないので，もしこのノートを利用するなら WeinbergQFT と並べて読んでほしい．行間だけ埋めててもただの作業になってしまって面白くないと思うので，自分の興味ある $+\alpha$ くらいの話は書いていこうと思う．もし初学者がこのノートを見るときは，そういう戯言は無視したほうがいいかもね．

計算や理解が間違ってたり，そもそも行間埋めの式が長ったるすぎたり可読性が終わってり，まぁ色々あると思うから，もし苦情があれば keigo@eken.phys.nagoya-u.ac.jp までお知らせしてくれると助かる．

昔はネット上に「ワインバーグ場の量子論を学ぶ人のために」っていう，日本語版 1 巻と 2 巻だけだけど，結構たくさん行間を埋めてくれている神みたいなサイトがあったんだよねぇ．前に URL が無効になってたから多分消えちゃったんだけど．

第 II 部
相対論的量子力学

2.1　量子力学

i) 物理的状態はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 内の射線で表される．ヒルベルト空間は一種の複素ベクトル空間だ．つまり，もし Φ と Ψ がこの空間 $\mathcal{H}$ のベクトル (しばしば「状態ベクトル」と呼ばれる) なら，任意の複素数 $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ を用いて作られる $\xi\Phi + \eta\Psi$ もこの空間 $\mathcal{H}$ のベクトルだ．

また，ヒルベルト空間にはノルム，内積が定義されている (ヒルベルト空間は完備な内積空間で，内積空間はノルム空間の一種だからだ．完備性とは，直感的に言えば「極限をとってもその空間内で必ず収まる」性質である．詳しい定義などは黒田成俊「関数解析」など参照．直接使う場面は特にないので知らなくても良い)．つまり，任意のベクトルの対に対して以下を満たす複素数 (Φ, Ψ) が定義されている．

$$
\begin{aligned}
&(\Phi, \Psi) = (\Psi, \Phi)^* \\
&(\Phi, \xi_1\Psi_1 + \xi_2\Psi_2) = \xi_1(\Phi, \Psi_1) + \xi_2(\Phi, \Psi_2) \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C} \\
&(\eta_1\Phi_1 + \eta_2\Phi_2, \Psi) = \eta_1^*(\Phi_1, \Psi) + \eta_2^*(\Phi_2, \Psi) \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

(最後の式は上二つの公理から導出可能．) ノルム (Ψ, Ψ) は正定値条件を満たす．これは一般に $(\Psi, \Psi) \geq 0$ で，等号条件は $\Psi = 0$ だ．

射線とは，規格化された (つまり $(\Psi, \Psi) = 1$) ベクトルの集合であり，ξ を $|\xi| = 1$ を満たす任意の複素数として，$\Psi' = \xi\Psi$ が成り立てば，Ψ と Ψ' は同じ射線に属するという．(つまり同値類である．同値関係 $\Psi' \sim \Psi$ を関係 $\Psi' = \xi\Psi(|\xi| = 1)$ で定めれば，商空間 $\mathcal{H}/\sim$ が定まり，射線 $\mathcal{R}$ とは商空間 $\mathcal{H}/\sim$ の元となる集合である．Ψ の属する射線 $\mathcal{R}$ とは同値類 (射影空間)$\mathcal{R} = [\Psi] = \{\Psi' | \Psi' = \xi\Psi, |\xi| = 1\}$ である．我々はヒルベルト空間の元であるベクトルそのものを観測するのではなく，系がどのような状態であるかという射線を観測するだけであるから，理論から計算される観測可能量はこの射線の代表元の選び方に依っていてはいけない．)

ii) 観測量はエルミート演算子で表現される．これらは，ヒルベルト空間から自分自身への写像 $\Psi \to A\Psi$ であり

$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi$$

という意味で線形写像だ．(線形写像の定義が $f(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = af(\boldsymbol{v}) + bf(\boldsymbol{w})$ だったのを思い出す．) そして実条件 $A^\dagger = A$ を満たす．ここで，任意の線形写像演算子 A に対してその共役は

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) = (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^*$$

で定義される．また，$A\Psi$ が Ψ の関数として連続である，という仮定もある．ある射影表現 $\mathcal{R}$ で表される状態は，この表現に属するベクトル Ψ が A の固有値 α をもつ固有状態

$$A\Psi = \alpha\Psi$$

であれば，演算子 A で表されている観測量は α という唯一決まった値をもつ．さて

$$
\begin{aligned}
(\Psi, A\Psi) =& (\Psi, \alpha\Psi) = \alpha(\Psi, \Psi) \\
=& (\Psi, A^\dagger\Psi) = (\Psi, A\Psi)^* = \alpha^*(\Psi, \Psi) \quad \because (2.1.5) \\
\therefore \quad \alpha =& \alpha^*
\end{aligned}
$$

となってエルミート演算子の固有値は実数だ．さらに

$$A\Phi = \beta\Phi, \quad A\Psi = \alpha\Psi \quad (\alpha \neq \beta)$$

とすると

$$
\begin{aligned}
(\Phi, A\Psi) =& \alpha(\Phi, \Psi) \\
=& (\Phi, A^\dagger) = (\Psi, A\Phi)^* = \beta^*(\Psi, \Phi)^* = \beta(\Phi, \Psi) \quad \because \beta\text{は実数} \\
\therefore \quad & (\alpha - \beta)(\Phi, \Psi) = 0
\end{aligned}
$$

$\alpha \neq \beta$ より $(\Phi, \Psi) = 0$ となる．したがってエルミート演算子に対して異なる固有値をもつ状態同士は直交する．

iii) もし系が射線 $\mathcal{R}$ で表される状態にあり，この系が互いに直交する射線 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots$ で表される異なる状態のひとつにあるかを実験で調べたとき，この系を $\mathcal{R}_n$ の状態で見出す確率は

$$
P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2
$$

で与えられる．(つまり，射線ごとにエネルギーや運動量などのエルミート演算子の固有値が異なったラベル付けがされており，それらの射線に属するベクトル $\Psi_1 \in \mathcal{R}_1, \Psi_2 \in \mathcal{R}_2, \cdots$ は上の議論から互いに直交 $(\Psi_n, \Psi_m) = 0$ する．未観測の射線 $\mathcal{R}(\ni \Psi)$ から，観測によってエネルギーや運動量やスピンなどが確定されたとき，あるエネルギー E_n や運動量 p_n やスピン σ_n などの実数量でラベル付けされた一つの射線 $\mathcal{R}_n(\ni \Psi_n)$ へ固定される確率が $\mathcal{P}(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n)$ である．この確率は $\mathcal{R}, \mathcal{R}_n$ の代表元 Ψ, Ψ_n の選び方に依らない．実際，射線 $\mathcal{R}, \mathcal{R}_n$ に属する別の元 Ψ', Ψ'_n を選んでも $\Psi' = \alpha\Psi, \Psi'_n = \beta\Psi_n(|\alpha| = |\beta| = 1)$ であるから

$$
|(\Psi', \Psi'_n)|^2 = |\alpha^* \beta(\Psi, \Psi_n)|^2 = |(\Psi, \Psi_n)|^2
$$

となり同じ確率を与える．) 状態ベクトル Ψ_n が完全性をなすとすると，

$$
\Psi = \sum_n \Psi_n f_n
$$

と一意的に展開できる．(添え字 n は離散的かもしれないし連続的かもしれない．連続ならば和は積分となる．) その係数は両辺に Ψ_m でスカラー積をとって

$$
\begin{aligned}
(\Psi_m, \Psi) =& \sum_n (\Psi_m, \Psi_n) f_n = f_m \quad \because (\Psi_m, \Psi_n) = 0, (\Psi_n, \Psi_n) = 1 \\
\therefore \quad \Psi =& \sum_n \Psi_n (\Psi_n, \Psi)
\end{aligned}
$$

となるから

$$
1 = (\Psi, \Psi) = \sum_n (\Psi, \Psi_n)(\Psi_n, \Psi) = \sum_n |(\Psi, \Psi_n)|^2 = \sum_n P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n)
$$

となり，全確率は 1 となることがわかる．

2.2 対称性

対称性変換とは実験の結果を変えない我々の視点の変化のことだ．観測者 O が射線 $\mathcal{R}$ か $\mathcal{R}_1$ か $\mathcal{R}_2$ か $\cdots$ で表される状態にある系を見ると，それと同等な観測者 O' は同じ系を見たとき，それぞれ射線 $\mathcal{R}'$ か $\mathcal{R}'_1$ か $\mathcal{R}'_2$ か $\cdots$ で表される異なった状態を観測する．しかし，この二人の観測者は同じ確率

$$P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'_n)$$

を見出すはずだ．補遺 A で示すウィグナーの定理によると，このような $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ の任意の変換[*1]に対して，ヒルベルト空間の演算子 U

$$\begin{array}{ccccc} T: & \mathcal{R} & \longrightarrow & T\mathcal{R} & = \mathcal{R}' \\ & \Psi & & \Psi & \\ U: & \Psi & \longmapsto & U\Psi & \end{array}$$

が定義できて，もし Ψ が射線 $\mathcal{R}$ に属するならば，$U\Psi$ は射線 $\mathcal{R}'$ に属し，さらに U はユニタリーかつ線型

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi), \quad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi$$

かもしくは反ユニタリーかつ反線型

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^*, \quad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi$$

にできる．

線型演算子 L の共役演算子 $L^\dagger$ は

$$(\Phi, L^\dagger\Psi) \equiv (L\Phi, \Psi)$$

で与えられる．この条件は，反線型演算子には満たすことができない．なぜなら (2.2.6) の右辺は Φ について線型だが，左辺は Φ について反線型だからだ．実際この右辺と左辺を別々に反線型演算子の場合で計算すると

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS} &= (L(\xi_1\Phi_1 + \xi_2\Phi_2), \Psi) = (\xi_1^* L\Phi_1 + \xi_2^* L\Phi_2, \Psi) \\ &= \xi_1(L\Phi_1, \Psi) + \xi_2(\Phi_2, \Psi) \\ \mathrm{LHS} &= (\xi_1\Phi_1 + \xi_2\Phi_2, \Psi) = \xi_1^*(\Phi_1, L^\dagger\Psi) + \xi_2^*(\Phi_2, L^\dagger\Psi) \end{aligned}$$

となって，これらは等しくない．反線型演算子 A の共役 $A^\dagger$ は，上の代わりに

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^\dagger = (\Psi, A\Phi)$$

と定義する．この定義を用いれば，ユニタリー性と反ユニタリー性は共に以下のように書ける．

$$U^\dagger = U^{-1}$$

実際,

$$\begin{aligned} \text{線型演算子}：(\Phi, \Psi) = (\Phi, U^{-1}U\Psi) = (\Phi, U^\dagger U\Psi) = (U\Phi, U\Psi) \\ \text{反線型演算子}：(\Phi, \Psi) = (\Phi, U^{-1}U\Psi) = (\Phi, U^\dagger U\Psi) = (U\Phi, U\Psi)^* \end{aligned}$$

となって，ユニタリー性 (2.2.2) と反ユニタリー性 (2.2.4) が再現される．

[*1] 対称性変換 T は集合 $\mathcal{R}$ を $\mathcal{R}'$ に対応させているが，これは $\mathcal{R}$ の各元から $\mathcal{R}'$ の各元への対応を定めるわけではない．それを与えるのはヒルベルト空間への作用素 U であり，T はどちらかというと商空間 $\mathcal{H}/\sim$ の元 $\mathcal{R}$ を，商空間 $\mathcal{H}/\sim$ の元 $\mathcal{R}'$ に対応させる写像を与えているから，T の集合論的な正しい表記は $T:\mathcal{H}/\sim \to \mathcal{H}/\sim, \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}'$ である．

常に恒等演算子 $U=1$ で表される自明な対称性 $\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ が存在する．この演算子は当然ユニタリーで線型だ．連続性から (ローレンツ変換のような) 対称性変換が，(角度，距離，速度のような) パラメータを連続的に変えて恒等変換にできるときは，それらの対称性変換は線型でユニタリーだ．

特に，恒等変換から微小しか離れていない対称性変換は，1 から微小しか離れていない線型ユニタリー演算子で表される．

$$U=1+i\epsilon t$$

ここで ϵ は実数の微小量だ．これがユニタリーで線型であるためには，t は線型で

$$U^\dagger U=(1-i\epsilon t^\dagger)(1+i\epsilon t)=1+i\epsilon(t-t^\dagger)+O(\epsilon^2)$$

が 1 だからエルミート $t^\dagger=t$ でなければならない．したがって，何らかの観測量になりうる．実際，物理に現れる角運動量や運動量など，ほとんどの観測量はこのような対称性変換から発生する．例えば全運動量は空間座標の並進の生成子であり，ハミルトニアンは時間の並進の生成子であり，全角運動量は空間の回転の生成子である．

対称性変換の集合は，以下の性質を満たす

(1)T_1 が射線 $\mathcal{R}_n$ を $\mathcal{R}'_n$ に変換し，別の変換 T_2 が $\mathcal{R}'_n$ を $\mathcal{R}''_n$ に変換するなら，これらを両方とも行うと T_1T_2 と書ける別の対称性変換ができて，これは $\mathcal{R}_n$ を $\mathcal{R}''_n$ に変換する．(二項演算で閉じている)

$$T_1:\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}'_n, T_2:\mathcal{R}'_n\to\mathcal{R}''_n \quad\Rightarrow\quad T_2T_1:\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}''_n$$

(2) 対称性変換 T が射線 $\mathcal{R}_n$ を $\mathcal{R}'_n$ に変換するとき，そこには T^{-1} と書く逆が存在し，$\mathcal{R}'_n$ を $\mathcal{R}_n$ に変換する．(逆元の存在)

$$T:\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}'_n \quad\Rightarrow T^{-1}:\mathcal{R}'_n\to\mathcal{R}_n$$

(3) 恒等変換 $T=1$ があり，これは射線を変えない．(単位元の存在)

$$T=1:\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}_n$$

(4)$T_1:\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}'_n$ と $T_2:\mathcal{R}'_n\to\mathcal{R}''_n$ の合成をした $T_2T_1:\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}''_n$ と，$T_3:\mathcal{R}''_n\to\mathcal{R}'''_n$ をさらに合成させた $T_3(T_2T_1):\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}'''_n$ が，T_1 と，T_2 と T_3 を合成した T_2T_3 との合成 $(T_3T_2)T_1:\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}'''_n$ が同じ対称性変換となっている．(結合則)

$$T_3(T_2T_1)=(T_3T_2)T_1$$

これは群の公理を満たしているから，したがって対称性変換の集合は群を構成する．

これらの対称性変換に相当するユニタリーか反ユニタリーな演算子 $U(T)$ はこの群構造を反映する性質をもっている．ただ，対称性変換自身とは異なり，$U(T)$ は射線ではなく，ヒルベルト空間のベクトル自体に作用する点で，色々な事情が複雑になっている．その代表的な例が以下でみる射影表現である．

T_1 が $\mathcal{R}_n$ を $\mathcal{R}'_n$ に変換するとき，$U(T_1)$ は射線 $\mathcal{R}_n$ に属するベクトル Ψ_n に作用すると，射線 $\mathcal{R}'_n$ に属するベクトル $U(T_1)\Psi_n$ を与える．同様に，T_2 が $\mathcal{R}'_n$ を $\mathcal{R}''_n$ に変換するなら，$U(T_1)\Psi_n$ に作用すると，ベクトル $U(T_2)U(T_1)\Psi$ は射線 $\mathcal{R}''_n$ に属する．しかし $U(T_2T_1)\Psi$ もまたこの射線に属するから，これらのベクトルは互いに位相 $\phi(T_2,T_1)$ を除いて一致することになる．

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n=e^{i\phi_n(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n$$

さらに，一つの重要な例外を除いて $U(T)$ の線型性 (または反線型性) から，この位相は状態 Ψ_n に依存しないことがわかる．これは以下のように証明される．いま互いに比例関係にない二つのベクトル Ψ_A,Ψ_B を考える．このとき (2.2.10) を状態 $\Psi_{AB}=\Psi_A+\Psi_B$ に施すと

$$U(T_1)U(T_2)\Psi_{AB}=e^{i\phi_{AB}}\Psi_{AB}=e^{i\phi_{AB}}(\Psi_A+\Psi_B)$$

$$
\begin{aligned}
&=U(T_1)U(T_2)(\Psi_A+\Psi_B)=U(T_1)U(T_2)\Psi_A+U(T_1)U(T_2)\Psi_B=e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\Psi_A+e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\Psi_B\\
\Rightarrow\quad &e^{i\phi_{AB}}U(T_2T_1)(\Psi_A+\Psi_B)=e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\Psi_A+e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\Psi_B
\end{aligned}
$$

を得る．どんなユニタリー (か反ユニタリー) な演算子にも，逆 (つまり共役) 演算子があり，それもユニタリーか反ユニタリーである．(2.2.11) に左から $U^{-1}(T_2T_1)$ を施すと,

$$
e^{\pm i\phi_{AB}}(\Psi_A+\Psi_B)=e^{\pm i\phi_A}\Psi_A+e^{\pm i\phi_B}\Psi_B
$$

上下の符号は，それぞれ $U(T_2T_1)$ がユニタリーか反ユニタリーの場合だ．Ψ_A,Ψ_B は線型独立なので,

$$
\begin{aligned}
&\left[e^{\pm i\phi_{AB}}-e^{\pm i\phi_A}\right]\Psi_A+\left[e^{\pm i\phi_{AB}}-e^{\pm i\phi_B}\right]\Psi_B=0\\
\Leftrightarrow\quad &e^{i\phi_A}=e^{i\phi_{AB}}=e^{i\phi_B}
\end{aligned}
$$

が満たされるときのみ可能だ．したがって，(2.2.10) の位相は状態ベクトル Ψ_n に依らないことが示せた．

このため，この式は演算子の関係式として書ける．

$$
U(T_2)U(T_1)=e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)
$$

$\phi=0$ の場合は，$U(T)$ は対称性変換の群表現を与える，という．一般的な位相 $\phi(T_2,T_1)$ の場合，射影表現 (位相を除いて表現になっている) である．リー群の構造だけからは，物理的な状態ベクトルが通常の表現を与えるか射影表現を与えるか分からない．しかし，2.7 節でみるように，この群が固有の射影表現をもつかどうかはわかる．

(2.2.14) を導く議論の例外は，系の状態を $\Psi_A+\Psi_B$ で表せられる状態におけないときに発生する．例えば，系を全角運動量が整数の状態と半整数の状態の重ね合わせにおくことはできないと広く信じられている．なぜならばその二つは回転変換に対して異なる変換を受け，したがってもしそのような重ね合わせ (例えば $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle+\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle)$ のような状態) が作り出すことができるならば，系の回転 $SO(3)$ 対称性が破れていることになる．(例えば 2π 回転すると $|1/2,1/2\rangle$ の方だけ符号が変化する．) しかし我々は系の回転に対して真に対称性があると広く信じているから，このような重ね合わせはそもそも作り出せないと考える．このような場合，異なる類の状態の間に「超選択則」があるという．このとき位相 $\phi(T_2,T_1)$ は，$U(T_2)U(T_1)$ と $U(T_2,T_1)$ がそのどちらの類の状態に作用するかに依存することもできる．2.7 節でこれらのいそうと射影表現についてさらに論じることにする．そこでわかるように，射影表現をもつどんな対称群も (物理的な意味を変更することなしに) その表現が常に $\phi=0$ の非射影表現に拡大することができる．2.7 節まで，単にこれがすでに実行されていて (2.2.14) で $\phi=0$ となっているとする．(つまり，$SO(3,1)$ のユニタリー射影表現ではなく，厳密にはその普遍被覆群である $SL(2,\mathbb{C})$ の非射影なユニタリー表現を扱っている．)

連結リー群と呼ばれる種類の群は，物理で特に重要な役割をする．その変換 $T(\theta)$ が有限個の実の連続パラメータの集合，例えば θ^a で記述され，どの元も単位元と群の内部の経路で結ばれている群をいう．この場合，群の積は,

$$
T(\bar{\theta})T(\theta)=T(f(\bar{\theta},\theta))
$$

という形をとる．ここで $f^a(\bar{\theta},\theta)$ は $\bar{\theta}$とθ の関数だ．(f 全体が T のパラメータなので，実である必要がある．)$\theta^a=0$ を単位元の座標とすると

$$
\begin{aligned}
&T(f(\bar{\theta},0))=T(\bar{\theta})T(0)=T(\bar{\theta})I=T(\bar{\theta})\quad\Rightarrow\quad f^a(\bar{\theta},0)=\bar{\theta}^a\\
&T(f(0,\theta))=T(0)T(\theta)=IT(\theta)=T(\theta)\quad\Rightarrow\quad f^a(0,\theta)=\theta^a\\
\Rightarrow\quad &f^a(0,\theta)=f^a(\theta,0)=\theta^a
\end{aligned}
$$

でなければならない.

このような連続群の変換は物理的ヒルベルト空間上では (反ユニタリーではなく) ユニタリー演算子 $U(T(\theta))$ で表現される ((2.2.9) を参照). リー群ではこれらの演算子は少なくとも単位元の有界な近傍でベキ級数

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \cdots$$

で表される. ここで t_a, は θ に依存しないエルミート演算子だ. $t_{bc} = t_{cb}$ はエルミートとは限らない. (θ^a は可換な実数パラメータだから, $\theta^a\theta^b t_{bc} = \theta^c\theta^b t_{cb} = \theta^b\theta^c t_{cb}$ なので, $t_{bc} = t_{cb}$ がわかる. エルミートでないことは後の結果 (2.2.21) を見れば明白.)$U(T(\theta))$ はこの変換群の通常の (射影でない) 表現, つまり

$$U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar{\theta},\theta)))$$

であるとする. この条件を θ^a と $\bar{\theta}^a$ についてベキ展開するとどうなるか見てみる. (2.2.16) にしたがうと, $f^a(\bar{\theta},\theta)$ を二次まで展開すると

$$f^a(\bar{\theta},\theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a{}_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c +$$

となる. f^a は実かつ θ^a は実パラメータであるから, $f^a{}_{bc}$ は実係数だ. もし θ^2 や $\bar{\theta}^2$ の次数の項があると (2.2.16) が成立しない. このとき, (2.2.18) は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \left[1 + i\bar{\theta}^a t_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^c t_{bc} + \cdots\right]\left[1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \cdots\right] \\
&= 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a)t_a + \frac{1}{2}(\theta^b\theta^c + \bar{\theta}^b\bar{\theta}^c)t_{bc} - \bar{\theta}^b\theta^c t_b t_c \cdots \\
\mathrm{RHS} &= 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f^a{}_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \cdots)t_a \\
&\quad + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + f^b{}_{de}\bar{\theta}^d\theta^e + \cdots)(\theta^c + \bar{\theta}^b + f^c{}_{de}\bar{\theta}^d\theta^e + \cdots)t_{bc} + \cdots \\
&= 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a)t_a + \frac{1}{2}(\theta^b\theta^c + \bar{\theta}^b\bar{\theta}^c)t_{bc} + if^a{}_{bc}t_a\bar{\theta}^b\theta^c + \frac{1}{2}(\theta^b\bar{\theta}^c t_{bc} + \bar{\theta}^b\theta^c t_{bc}) + \cdots \\
&= 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a)t_a + \frac{1}{2}(\theta^b\theta^c + \bar{\theta}^b\bar{\theta}^c)t_{bc} + (if^a{}_{bc}t_a + t_{bc})\bar{\theta}^b\theta^c + \cdots
\end{aligned}$$

$1, \theta.\bar{\theta}, \theta^2, \bar{\theta}^2$ の次数の項は自動的に一致するが, $\bar{\theta}\theta$ の項からは以下の自明でない条件が得られる.

$$t_{bc} = -t_b t_c - if^a{}_{bc}t_a$$

これは, 群の構造, つまり $f(\bar{\theta},\theta)$ がわかって, その二次の項の係数 $f^a{}_{bc}$ を知れば, $U(T(\theta))$ の一次の項に現れる生成子 t_a を用いて二次の項が求められることを示している. しかし t_{bc} は b, c について対称であるから, そのための無矛盾条件が存在する. これは (2.2.21) より

$$\begin{aligned}
&t_{bc} = -t_b t_c - if^a{}_{bc}t_a \\
&{=}t_{cb} = -t_c t_b - if^a{}_{cb}t_a \\
\Rightarrow \quad &[t_b, t_c] \equiv t_b t_c - t_c t_b \\
&\quad = -if^a{}_{bc}t_a + if^a{}_{cb}t_a = i(-f^a{}_{bc} + f^a{}_{cb})t_a \equiv iC^a{}_{bc}t_a
\end{aligned}$$

となる. ここで $C^a{}_{bc}$ は構造定数と呼ばれる実定数だ.

$$C^a{}_{bc} := -f^a{}_{bc} + f^a{}_{cb}$$

この交換関係はリー代数と呼ばれる. t_{bc} についての展開を (2.2.17) に代入すると

$$U(T(\theta)) = 1 + i\left(\theta^a - \frac{1}{2}f^a{}_{bc}\theta^b\theta^c\right)t_a - \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_b t_c + \cdots$$

となり, θ の二次までの項は $f^a(\bar{\theta},\theta)$ の関数と生成子 t_a だけで書くことができる. 2.7 節で, 交換関係 (2.2.22) がこの過程を続けるために必要な唯一の条件であることを実質上証明する. つまり, $U(T(\theta))$ の完全なベキ級

数は群の二項演算を決める $f(\bar{\theta},\theta)$ と，一次項，つまり生成子 t_a を知っている限り (2.2.21) のような関係式を無限に続けることで得られる．これは必ずしも $U(T(\theta))$ が t_a から全ての θ^a に対して一意に決まることは意味しない．しかし $U(T(\theta))$ は少なくとも座標 $\theta^a=0$ の単位元の有界な近傍で $\theta,\bar{\theta}$ と $f(\theta,\bar{\theta})$ がこの近傍にあるなら，(2.2.15) が満たされる，という意味で一意に決まる．全ての θ^a については 2.7 節.

(ところで，上の $U(T(\theta))$ 展開の展開を見ると

$$
\begin{aligned}
U(T(\theta)) =&\exp(i\Omega^a(\theta)t_a)\\
\Omega^a(\theta) =&\theta^a-\frac{1}{2}f^a{}_{bc}\theta^b\theta^c+\mathcal{O}(\theta^3)
\end{aligned}
$$

という形で指数形で書けそうな予感がする．展開についての一般項を求めることはできないのだろうか？同じ流れで次の次数の演算子 t_{abc} についても同様のことをしてみようとしたが，爆発的に項が増えて手に負えなくなったので諦めた．指数写像の数学的な性質を考えると θ の小さいところ (単位元近く) で全単射になるが，遠くへ行くとそうではなさそうだから，あまり意味はなさそうではある．)

これから何度も出会う，特別で重要な場合がある．これは関数 $f(\theta,\bar{\theta})$ が (多分，座標 θ の部分集合について) 単に加法的，つまり

$$
f^a(\theta,\bar{\theta})=\theta^a+\bar{\theta}^a
$$

となる場合だ．このときには (2.2.19) の $f^a{}_{bc}$ も構造定数 $C^a{}_{bc}$ もゼロだ．したがって，生成子は全て可換だ.

$$
[t_b,t_c]=0
$$

このような群は可換群と呼ばれる．この場合は $U(T(\theta))$ が全ての θ^a について容易に計算できる.

$$
\begin{aligned}
U(T(\theta)) &= U\left(T\left(\frac{\theta}{N}+\frac{\theta}{N}+\cdots+\frac{\theta}{N}\right)\right) \quad (N\text{ 個の和})\\
&= U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)\times U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)\times\cdots\times U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right) \quad (N\text{ 個の積})\\
&= \left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)\right]^N
\end{aligned}
$$

となる．$N\to\infty$ として $U(T(\theta/N))$ の一次項のみを残しておくと

$$
U(T(\theta))=\lim_{N\to\infty}\left[1+i\frac{\theta^a}{N}t_a\right]^N=\exp(i\theta^a t_a)
$$

となる．ここで指数行列は

$$
\begin{aligned}
e^A \equiv&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\\
=&I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots
\end{aligned}
$$

で定義される．上の等式の極限 $N\to\infty$ で指数行列に等しくなることは本来自明ではない．したがって以下でこれを証明する.

A を任意の行列 (無限次元の場合は有界線形作用素であることを課す) とする.

$$
f_n(A)=\left(I+\frac{A}{n}\right)^n
$$

とおく．示すべきは

$$
\forall\epsilon>0,\exists N\geq 1\quad \text{s.t.}\quad n\geq N\Rightarrow\left\|f_n(A)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right\|<\epsilon
$$

である．ここで $||\cdot||$ は作用素ノルムであり，有界作用素 A に対して

$$||A|| \equiv \sup_{u\neq 0}\frac{||Au||}{||u||} = \sup_{||u||=1}||Au||$$

で定義されて，次の性質がなりたつ．(証明はしない)

$$||A+B|| \leq ||A||+||B||, \quad ||AB|| \leq ||A||||B||$$

二項定理より

$$\begin{aligned}\left(I+\frac{A}{n}\right)^n =& \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{A}{n}\right)^k \\ =& \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{A}{n}\right)^k\end{aligned}$$

となるから

$$u_{n,k}(A) \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{A}{n}\right)^k$$

とおけば

$$f_n(A) = \sum_{k=0}^{n}u_{n,k}(A)$$

であり，一方 k を固定したとき

$$\begin{aligned}u_{n,k}(A) =& \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{A}{n}\right)^k \\ =& \frac{A^k}{n^k\cdot k!}\cdot n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \\ =& \frac{A^k}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ =& \frac{A^k}{k!}\prod_{m=1}^{k-1}\left(1-\frac{m}{n}\right) \\ \to& \frac{A^k}{k!} \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

となる．ここで $u_k(A)\equiv A^k/k!$ とおけば，$n\to\infty$ で $u_{n,k}(A)\to u_k(A)$ である．また $||u_{n,k}(A)|| < ||u_k(A)||$ もわかる．e^x のマクローリン展開は収束半径が無限大であるから，級数和

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||}$$

は収束し，Cauchy の収束判定法により，任意の $\epsilon>0$ に対して，次を満たす n_0 をとれる．

$$n\geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{||A||^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left\|f_n(A)-\sum_{k=0}^{n_0}u_{n,k}(A)\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n}u_{n,k}(A)-\sum_{k=0}^{n_0}u_{n,k}(A)\right\| = \left\|\sum_{k=n_0+1}^{n}u_{n,k}(A)\right\| \\ &\leq \sum_{k=n_0+1}^{n}\|u_{n,k}(A)\| < \sum_{k=n_0+1}^{n}\|u_k(A)\| \quad \because ||u_{n,k}(A)|| < ||u_k(A)||\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{||A^k||}{k!} \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{||A||^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3}$$

がなりたつ．また $u_{n,k}(A)$ は $u_k(A)$ に収束するから，任意の ϵ' に対して次を満たす n_1 がとれる．

$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=0}^{n_0} (u_{n,k}(A) - u_k(A)) \right\| < \epsilon'$$

ϵ' は任意であるから，$\epsilon' = \epsilon/3$ としてかまわない．したがって $N = \max\{n_0, n_1\}$ とすれば，$n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned}
\left\| f_n(A) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| &= \left\| f_n(A) - \sum_{k=0}^{\infty} u_k(A) \right\| \\
&= \left\| f_n(A) - \sum_{k=0}^{n_0} u_{n,k}(A) + \sum_{k=0}^{n_0} u_{n,k}(A) - \sum_{k=0}^{n_0} u_k(A) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \\
&\leq \left\| f_n(A) - \sum_{k=0}^{n_0} u_{n,k}(A) \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{n_0} u_{n,k}(A) - \sum_{k=0}^{n_0} u_k(A) \right\| + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

以上より証明が完了した．

非有界線形作用素の場合はこの証明を用いることができないが，ハミルトニアンや運動量演算子などの非有界線形作用素についても同様の式が成り立っている．並進演算子や時間発展演算子がいい例だ．これの証明はスペクトル分解定理を用いる．大雑把な説明なので，スペクトル分解定理の各記号の意味や使い方の詳細は黒田「関数解析」など参照．

自己共役作用素 A に対して，Borel 測度 $E(\lambda)$ を用いた分解が存在し

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$$

と書ける (スペクトル分解定理)．任意の Borel 可測関数 f に対して $f(A)$ を

$$f(A) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE(\lambda)$$

と定義できる．したがって $f(\lambda) = \exp(\lambda)$ を代入することで

$$\exp(A) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda} dE(\lambda)$$

が定義できる．任意の複素数 λ について

$$e^{\lambda} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

が成り立つから (これの証明は上の有界作用素の証明を，複素数にしてノルムを絶対値に変更すれば同様に示せる)

$$\begin{aligned}
\exp(A) &:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda} dE(\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n dE(\lambda) \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n dE(\lambda) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

が得られる．これで証明ができた．

2.3　量子論的ローレンツ変換

アインシュタインの (特殊) 相対性原理によれば，「慣性」系の間の同等性が成立する．x^μ をある慣性系の座標 (x^1, x^2, x^3 をデカルト空間座標，光速度を $c=1$ として $x^0=t$ を時間座標) とする．

他の慣性系では，x'^μ は

$$\eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

または，それと同等な

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$$

を満たさなければならない ($dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}dx^\rho$ として代入して係数比較すれば得られる)．ここで $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & (\mu=\nu=0) \\ +1 & (\mu=\nu=1,2,3) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である．

これらの変換は，光速がすべての慣性系で同じだという特別の性質をもつ (アインシュタインの光速度不変の原理)．

速さ 1 の光波は $|d\boldsymbol{x}/dt| = 1$ を満たす．したがって

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu =& d\boldsymbol{x}^2 - dt^2 \\ =& \left(\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2 - 1\right)dt^2 = 0 \\ = \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu =& \left(\left|\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right|^2 - 1\right)dt'^2 \\ \Leftrightarrow \left|\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right| =& 1 \end{aligned}$$

(2.3.2) を満たすどんな座標変換も $x^\mu \to x'^\mu$ も線形，つまり，a^μ を任意の定数，$\Lambda^\mu{}_\nu$ を定数行列として

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

と書ける．(これはアインシュタインの相対性原理により，ある慣性系における等速直線運動が別の慣性系においても等速直線運動に見えるためには x' は x の一次式で表されていなければならないという要請による．)

ここで (2.3.2) より，

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} =& \eta_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\alpha\delta^\alpha_\rho)(\Lambda^\nu{}_\beta\delta^\beta_\sigma) = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \\ \therefore\quad \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma =& \eta_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

を満たす．

行列 $\eta_{\mu\nu}$ は逆を持つので，それを $\eta^{\mu\nu}$ と書く．(成分は $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ である．)(2.3.5) の右から $\eta^{\sigma\tau}\Lambda^\kappa{}_\tau$ をかけると

$$\begin{aligned} (\text{LHS}) =& \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\eta^{\sigma\tau}\Lambda^\kappa{}_\tau = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\left(\Lambda^\nu{}_\sigma\Lambda^\kappa{}_\tau\eta^{\sigma\tau}\right) \\ (\text{RHS}) =& \eta_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\tau}\Lambda^\kappa{}_\tau = \delta^\tau_\rho\Lambda^\kappa{}_\tau = \Lambda^\kappa{}_\rho = \delta^\kappa_\mu\Lambda^\mu{}_\tau = \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\kappa}\Lambda^\mu{}_\rho \\ \therefore\quad & \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\left(\Lambda^\nu{}_\sigma\Lambda^\kappa{}_\tau\eta^{\sigma\tau}\right) = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho(\eta^{\nu\kappa}) \end{aligned}$$

行列 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}$ の逆を左からかけると

$$\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\kappa}{}_{\tau}\eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa}$$

となる．

これらの変換は群をなす．ローレンツ変換 (2.3.4) を最初に行って，第二のローレンツ変換 $x'^{\mu} \to x''^{\mu}$ を次に行うと

$$\begin{aligned} x''^{\mu} =&\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}x'^{\rho} + \bar{a}^{\mu} \\ =&\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\rho}) + \bar{a}^{\mu} \\ =&(\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu})x^{\nu} + (\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}a^{\rho} + \bar{a}^{\mu}) \end{aligned}$$

これは $x^{\mu} \to x''^{\mu}$ のローレンツ変換の形になっている．もし $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ と $\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$ が両方とも (2.3.5) を満たせば，$\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}$ も (2.3.5) を満たす．実際

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}(\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha})(\bar{\Lambda}^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\beta}) =&(\eta_{\mu\nu}\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\bar{\Lambda}^{\nu}{}_{\sigma})\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\Lambda^{\sigma}{}_{\beta} \\ =&\eta_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\Lambda^{\sigma}{}_{\beta} \\ =&\eta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

であるから，(2.3.7) はローレンツ変換になっている．したがって変換 $T(\Lambda, a) : x^{\mu} \mapsto x'^{\mu}$ は物理的状態に施されたとき，合成則

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$$

を満たす．

(2.3.5) は行列表記で $\Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta$ と書けるから，この両辺の行列式をとると，$(\det AB = (\det A)(\det B)$ より)

$$\begin{aligned} (\det\Lambda)(\det\eta)(\det\Lambda) =& \det\eta \\ \therefore \quad (\det\Lambda)^{2} =&1 \neq 0 \quad \because \det\{\eta\} = -1 \end{aligned}$$

よって $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ には逆 $(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\rho}$ があり，(2.3.5) の右からかければ

$$\begin{aligned} (\text{LHS}) =&\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\lambda} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}_{\lambda} = \eta_{\mu\lambda}\Lambda^{\mu}{}_{\rho} \\ (\text{RHS}) =&\eta_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\lambda} \end{aligned}$$

さらに両辺に $\eta^{\alpha\rho}$ を左からかければ

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\rho}\eta_{\mu\lambda}\Lambda^{\mu}{}_{\rho} =&\eta^{\alpha\rho}\eta_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\lambda} \\ \therefore \quad \Lambda_{\lambda}{}^{\rho} \equiv&\eta_{\lambda\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\eta^{\sigma\rho} = (\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\lambda} \end{aligned}$$

であるとわかる．変換 $T(\Lambda, a)$ の逆は，(2.3.8) より

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}\Lambda = 1 \quad &\therefore \bar{\Lambda} = \Lambda^{-1} \\ \bar{\Lambda}a + \bar{a} = \Lambda^{-1}a + \bar{a} = 0 \quad &\therefore \bar{a} = -\Lambda^{-1}a \end{aligned}$$

よって $[T(\Lambda, a)]^{-1} = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ がわかる．恒等変換は当然 $T(1, 0)$ である．以上により，ローレンツ変換は群の公理を満たしていることが分かった．

前節の議論によれば，変換 $T(\Lambda, a)$ は物理的ヒルベルト空間のベクトルにユニタリー変換を引き起こす．

$$\Psi \mapsto U(T(\Lambda, a))\Psi \equiv U(\Lambda, a)\Psi$$

演算子 U は合成則

$$\begin{aligned}U(\bar{\Lambda},\bar{a})U(\Lambda,a) =&U(T(\bar{\Lambda},\bar{a}))U(T(\Lambda,a))\\ =&U(T(\bar{\Lambda}\Lambda,\bar{\Lambda}a+\bar{a}))\\ =&U(\bar{\Lambda}\Lambda,\bar{\Lambda}a+\bar{a})\end{aligned}$$

を満たす．変換 $T(\Lambda,a)$ の全体がなす群は，非斉次ローレンツ群，またはポアンカレ群と呼ばれる．(半直積群)

$a^\mu=0$ の変換は

$$T(\bar{\Lambda},0)T(\Lambda,0)=T(\bar{\Lambda}\Lambda,0)$$

を満たすので，明らかに部分群をなす．これは斉次ローレンツ群と呼ばれる．

また，(2.3.9) より $\det\Lambda=+1$ か $\det\Lambda=-1$ である．$\det\Lambda=+1$ の変換は明らかに斉次または非斉次ローレンツ群の部分群をなす．($\det\Lambda=-1$ の元の集合は，二つの元 $\bar{\Lambda},\Lambda$ の積が $\det\big(\bar{\Lambda}\Lambda\big)=+1$ になるので群をなさない．)

また，(2.3.5) の 00 成分から

$$\begin{aligned}-1=&-\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0+\Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0+\Lambda^2{}_0\Lambda^2{}_0+\Lambda^3{}_0\Lambda^3{}_0\\ (\Lambda^0{}_0)^2=&1+\Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 \quad (\geq 1)\end{aligned}$$

(2.3.6) から同様にして

$$(\Lambda^0{}_0)^2=1+\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i \quad (\geq 1)$$

も得る．よって $\Lambda^0{}_0\geq+1$ か $\Lambda^0{}_0\leq-1$ であることがわかる．$\Lambda^0{}_0\geq+1$ の変換は部分群をなすことを見る．

部分群をなすことを示すには，$\Lambda^\mu{}_\nu,\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu$ が $\Lambda^0{}_0\geq1,\bar{\Lambda}^0{}_0\geq1$ を満たすと仮定したときに $(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0\geq1$ がなりたつことをみればよい．行列の積から

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0=\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0$$

が成り立つ．しかし (2.3.13) より 3 元ベクトル $(\Lambda^1{}_0,\Lambda^2{}_0,\Lambda^3{}_0)$ はノルム $\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2-1}$ をもち，同様に $(\bar{\Lambda}^0{}_1,\bar{\Lambda}^0{}_2,\bar{\Lambda}^0{}_3)$ もノルムが $\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2-1}$ なので，コーシー・シュワルツの不等式より

$$\left|\bar{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0\right|\leq\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2-1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2-1}$$

という制限がかかる．よって

$$\begin{aligned}(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0=&\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0\\ \geq&\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0-\left|\bar{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0+\bar{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0\right|\\ \geq&\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0-\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2-1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2-1}\end{aligned}$$

一行目の等号成立条件は絶対値の中身がマイナスのときだ．最後の式が 1 以上であることを示せればよい．ここで

$$\begin{aligned}&\left(\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0-1\right)^2-\left(\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2-1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2-1}\right)^2\\ &=\left(\Lambda^{\bar{0}}{}_0\Lambda^0{}_0\right)^2-2\Lambda^{\bar{0}}{}_0\Lambda^0{}_0-\left(\Lambda^{\bar{0}}{}_0\Lambda^0{}_0\right)^2+\left(\Lambda^0{}_0\right)^2+\left(\bar{\Lambda}^0{}_0\right)^2-1\\ &=\left(\Lambda^0{}_0\right)^2+\left(\bar{\Lambda}^0{}_0\right)^2-2\Lambda^{\bar{0}}{}_0\Lambda^0{}_0=\left(\bar{\Lambda}^0{}_0-\Lambda^0{}_0\right)^2\geq0\\ \therefore\quad&\left(\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0-1\right)^2\geq\left(\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2-1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2-1}\right)^2\end{aligned}$$

であることと，$\bar{\Lambda}^0{}_0, \Lambda^0{}_0 \geq 1$ より $\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 - 1 \geq 0, (\Lambda^0{}_0)^2 - 1 \geq 0, (\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1 \geq 0$ であることを用いると

$$\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 - 1 \geq \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1}$$
$$\bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1} \geq 1$$

以上より $(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 \geq 1$ がわかる．これが示したかったことだ．

$\det\Lambda = +1$ と $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ のローレンツ変換がなす部分群は．固有順時ローレンツ群 $SO(3,1)$(あるいは $O^{\uparrow}_{+}(3,1)$) と呼ばれる．パラメータを連続的に変化させて，$\det\Lambda = +1$ から $\det\Lambda = -1$ に飛んだり，$\Lambda^0{}_0 \geq +1$ から $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ に飛ぶことはできないので，単位元 (単位行列) から連続的にパラメータを変えて得られるローレンツ変換は単位元と同じ符号の $\det\Lambda$ と $\Lambda^0{}_0$ をもつ．したがって，それらは固有順時ローレンツ群 $SO(3,1)$ に属する．*2

ここで一応，連続的に変化させて飛ぶことができないことを形式的に示しておく．$t \in [0,1]$ をパラメータとして，$\Lambda(t) \in O(3,1)$ を，$O(3,1)$ 内の 2 点を結ぶ任意の連続的な経路で，t に関して連続関数になっているものとする．

$$\tilde{\Lambda} : [0,1] \to O(3,1) \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\Lambda}(0) = \Lambda_1, \tilde{\Lambda}(1) = \Lambda_2 \quad (\Lambda_1, \Lambda_2 \in O(3,1))$$

ここで，Λ_1, Λ_2 を $\det\Lambda_1 = +1, \det\Lambda_2 = -1$ を満たすものだとし，それにもかかわらず，そこに連続的な経路が存在すると仮定しよう．$\det\Lambda$ は行列式の定義

$$\det A = \sum_{\sigma_n \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma_n(1)1} A_{\sigma_n(2)2} \cdots A_{\sigma_n(n)n}$$

より，行列 Λ の行列要素からなる多項式になっており，したがって行列 $\tilde{\Lambda}(t)$ の各要素が t に関して連続関数になっているならば $\det\tilde{\Lambda}(t)$ も t に関して連続関数である．さらに任意の $\Lambda \in O(3,1)$ は実行列だから $\det\tilde{\Lambda}(t)$ は t に関して実関数になっている．以上より，中間値の定理から，閉区間 $[0,1]$ 上で定義される連続な実関数 $\det\tilde{\Lambda}(t)$ は $+1 = \det\tilde{\Lambda}(0)$ と $-1 = \det\tilde{\Lambda}(1)$ の間 $0 < t < 1$ で $\det\tilde{\Lambda}(t) = 0$ を少なくとも一度通らなければいけない．しかし任意の $\Lambda^\mu{}_\nu \in O(3,1)$ は既に述べた性質から $\det\Lambda = \pm 1$ であるから，そのような点 $\tilde{\Lambda}(t) \in O(3,1)$ は存在せず，矛盾となる．したがってそのような連続的な経路は存在しない．同様にして $(\Lambda_1)^0{}_0 \leq -1$ となる Λ_1 と，$(\Lambda_2)^0{}_0 \geq 1$ となる Λ_2 を結ぶ連続的な経路 $\tilde{\Lambda}(t)$ も存在しないことがわかる．これは t について連続な $\tilde{\Lambda}(t) \in O(3,1)$ が再び存在すると仮定し，$(\tilde{\Lambda}(t))^0{}_0$ も t について連続な実関数なことと中間値の定理から，再び $0 < t < 1$ で $(\tilde{\Lambda}(t))^0{}_0 = 0$ を満たすものが存在することがわかるが，そのような Λ は $O(3,1)$ に存在しないため矛盾となり，やはり連続経路が存在しないことがわかる．

どんなローレンツ変換も固有で順時であるか，または固有順時ローレンツ群の要素と離散的変換 $\mathcal{P}, \mathcal{T}$ か $\mathcal{PT}$ の積になっている．ここで $\mathcal{P}$ は空間反転で，$\mathcal{T}$ は時間反転

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

である．実際，任意の固有だが順時でないローレンツ変換 Λ は $\det\Lambda = +1$ で $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ であるが，新しく行列 $\Lambda' = \mathcal{PT}\Lambda$ を定義すると，$\det\Lambda' = +1, (\Lambda')^0{}_0 \geq +1$ を満たすので，この Λ' は固有順時ローレンツ変換になっている．$\mathcal{P}, \mathcal{T}$ は自明な逆行列を持つので，$\Lambda = \mathcal{PT}\Lambda'$ と書けて，固有だが順時でないローレンツ変換は固有順時ローレンツ群の要素と離散的変換 $\mathcal{P}, \mathcal{T}$ の積になっていることが確かめられる．同様に固有でないが

*2 数学の文脈では $SO(3,1)$ を，$O(3,1)$ の部分群で $\det\Lambda = 1$ を満たす固有ローレンツ変換全体の集合であるとして定義している場合がある．その場合，固有順時ローレンツ変換の集合は $SO_0(3,1), SO^{+}(3,1), O^{\uparrow}_{+}(3,1)$ などと書くことが多い．毎回「+」を書くのが面倒なので，以下では $SO(3,1)$ と書いたら固有順時ローレンツ変換の集合であるとする．

順時なローレンツ変換 Λ に対して $\Lambda' = \mathcal{P}\Lambda$ とおけばこれは固有順時ローレンツ変換になっている．固有でも順時でもないローレンツ変換 Λ に対しては $\Lambda' = \mathcal{T}\Lambda$ とおけばこれも固有順時ローレンツ変換になっている．

連結成分にも言及しておく．一般に，ある元 $g \in G$ から連続的な経路で結ぶことができる全ての元を集めてできる集合

$$C_g := \{g' \in G | \exists f \in C^0 : [0,1] \to G \,\mathrm{s.t.}\, f(0) = g, f(1) = g'\}$$

を $g \in G$ の連結成分と呼ぶ．単位元 1 の連結成分は $SO(3,1)$ である．

$$SO(3,1) = C_1 = \{\Lambda \in O(3,1) | \det \Lambda = +1, {\Lambda^0}_0 \geq +1\}$$

残りの連結成分は，$\mathcal{P}$ の連結成分

$$C_{\mathcal{P}} = \{\Lambda \in O(3,1) | \det \Lambda = -1, {\Lambda^0}_0 \geq +1\}$$

と，$\mathcal{T}$ の連結成分

$$C_{\mathcal{T}} = \{\Lambda \in O(3,1) | \det \Lambda = -1, {\Lambda^0}_0 \leq -1\}$$

と，$\mathcal{PT}$ の連結成分

$$C_{\mathcal{PT}} = \{\Lambda \in O(3,1) | \det \Lambda = +1, {\Lambda^0}_0 \leq -1\}$$

で構成される．(本当はそれぞれの空間は

$$\begin{aligned} C'_{\mathcal{P}} =& \{\mathcal{P}\Lambda | \Lambda \in SO(3,1)\} \\ C'_{\mathcal{T}} =& \{\mathcal{T}\Lambda | \Lambda \in SO(3,1)\} \\ C'_{\mathcal{PT}} =& \{\mathcal{PT}\Lambda | \Lambda \in SO(3,1)\} \end{aligned}$$

と書くべきだが，実は同値であることは，この段落の一番上の議論を使えばすぐに示せる．例えば $C'_{\mathcal{P}} \subset C_{\mathcal{P}}, C_{\mathcal{P}} \subset C'_{\mathcal{P}}$ を示して $C_{\mathcal{P}} = C'_{\mathcal{P}}$ となる．)$SO(3,1)$ が連結であることから，これ以上に連結成分は存在しないことはわかる．したがって $O(3,1)$ の連結成分は 4 つである．ただし注意すべきは，これらは所謂「弧状連結」(連続的な経路で任意の二点を結ぶことができる) の意味で連結なのであり，「単連結」(空間内の任意のループが 1 点可縮) の意味ではない．後に 2.7 節にて，$SO(3,1)$ が単連結ではなく二重連結であることを示す．

直感的に $O(3,1)$ の連結成分は，1 と連結な固有順時ローレンツ変換 $SO(3,1)$ と $\mathcal{P}, \mathcal{T}$ と連結な $C_{\mathcal{P}}, C_{\mathcal{T}}$，そして $\mathcal{PT}$ と連結な $C_{\mathcal{PT}}$ から構成され，4 つである．しかし厳密にはそれ以上存在しないことも証明する必要がある．このためには，$SO(3,1)$ が弧状連結であることを示せば十分だ．これを証明するのは若干手間であるからいくつか準備をする．

まず，$SO(3)$ が弧状連結であることを示したい．これにより任意の $SO(3)$ の元が単位元からのパスでつなぐことができる．

数学的帰納法を使うのが一番手っ取り早いと思う．$SO(1) = \{1\}$ であるから，$SO(1)$ は自明に弧状連結である．$SO(n-1)$ が弧状連結であることを用いて，$SO(n)$ が弧状連結であることを証明できれば完了である．$R \in SO(n)$ ならば，$R = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ と列ベクトル表示したとき，$R^T R = I$ より $\{\boldsymbol{v}_k\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなす．この行列に回転 $C \in SO(n)$ を作用させて，次のように変形する．

$$CR = \{\boldsymbol{e}_1, C\boldsymbol{v}_2, \cdots, C\boldsymbol{v}_n\}$$

ただしここで $\boldsymbol{e}_1$ は $(1, 0, \cdots, 0)^T$ である．C が回転 $SO(n)$ の元であることから，$\boldsymbol{e}_1, C\boldsymbol{v}_1, \cdots, C\boldsymbol{v}_n$ も $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなす．(ノルムが 1 である任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1$ となるような連続的な回転移動

$C \in SO(n)$ は必ず存在する．これは後で示す．)C は連続的な回転移動であるから，$t \in [0,1]$ でパラメトライズして

$$C(t) \in SO(n), \quad C(0) = I, C(1) = C$$

となるようにできる．移動途中の状態 $C(t)R$ は全て $SO(n)$ の元となり，よって R と CR は $SO(n)$ 内の弧で連結できる．CR が $SO(n)$ の点であることから

$$I = CR(CR)^T = \{\boldsymbol{e}_1, C\boldsymbol{v}_2, \cdots, C\boldsymbol{v}_n\}\begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ (C\boldsymbol{v}_2)_1 & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ (C\boldsymbol{v}_n)_1 & \cdots \end{pmatrix}$$

という形にできる．11 成分を見てみると

$$1 = 1 + \sum_{i=2}^{n} [(C\boldsymbol{v}_i)_1]^2$$

となっているから，これが成り立つためには全ての i について 1 成分目はゼロ $(C\boldsymbol{v}_i)_1 = 0$ である．したがって

$$CR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R' \end{pmatrix}$$

という形となる．$SO(n)$ の条件から R' は $SO(n-1)$ の元であることがすぐにわかる．仮定より R' は $SO(n-1)$ 内の弧で I と連結できる．以上より $R \sim CR \sim I$ と連結できることが示され，よって任意の $R_1, R_2 \in SO(n)$ は I を介して $SO(n)$ 内の弧で連結でき，証明が完了する．特に $SO(3)$ も弧状連結である．
証明完了

上の証明にて途中で用いた補題を証明する．すなわち，任意のノルムが 1 の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$ となる $C \in SO(n)$ があり，それは単位元と連続的にパスがある．これを証明するためには n 次元極座標空間を考える必要があるから，まず n 次元ユークリッド空間から極座標へ移行する手順を解説する．

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i$ を極座標表示することを目指す．これは次の手順でまとめられる．

1.$\boldsymbol{x}$ を x_1 軸と $x_2x_3\cdots x_n$ 超平面 $(x_1 = 0)$ に射影する．

2.$x_1 = 0$ への射影を，x_2 軸と $x_3x_4\cdots x_n$ 超平面 $(x_2 = 0)$ に射影する．

3. 上と同様の手順を繰り返す．

実際に行ってみる．手順 1 は

$$x_1 = r_1\cos\theta_1, r_2 = r_1\sin\theta_1 \quad (0 \le r_1, 0 \le \theta_1 \le \pi)$$

と書ける．ここで r_1 は $\boldsymbol{r}$ の大きさ

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

で，r_2 は $\boldsymbol{r}$ の $x_2x_3\cdots x_n$ 超平面への射影の大きさ

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}$$

である．この射影に対しても同じことをする．すなわち

$$x_2 = r_2\cos\theta_2, r_3 = r_2\sin\theta_2 \quad (0 \le r_2, 0 \le \theta_2 \le \pi)$$

これを繰り返す．

$$x_3 = r_3\cos\theta_3, r_4 = r_3\sin\theta_3 \quad (0 \le r_3, 0 \le \theta_3 \le \pi)$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots\\
&x_k = r_k\cos\theta_k, r_{k+1} = r_k\sin\theta_k \quad (0 \le r_k, 0 \le \theta_k \le \pi)\\
&\cdots\\
&x_{n-1} = r_{n-1}\cos\theta_{n-1}, r_n = r_{n-1}\sin\theta_{n-1} \quad (0 \le r_{n-1}, 0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi)
\end{aligned}
$$

最後の r_n は，x_n 軸への射影であるから，x_n 座標そのものをあらわす．そのため $r_n \ge 0$ とは限らないから，θ_{n-1} の範囲だけは 0 から 2π である．以上をまとめると

$$
\begin{cases}
x_1 = r\cos\theta_1\\
x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2\\
\vdots\\
x_k = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k\\
\vdots\\
x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\
x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}
\end{cases}
$$

簡潔に書くと

$$
x_k = \begin{cases}
r\cos\theta_1 & (k=1)\\
r\cos\theta_k\prod_{i=1}^{k-1}\sin\theta_i & (k=2,\cdots,n-1)\\
r\prod_{i=1}^{n-1}\sin\theta_i & (k=n)
\end{cases}
$$

となる．これで極座標に移行することができた．これは Hurwitz-Schur の球面座標と呼ばれているらしい．

具体的に $\mathbb{R}^3$ で球座標を導く．まず

$$
z = r\cos\theta, r' = r\sin\theta \quad (0 \le r, 0 \le \theta \le \pi)
$$

となる．ここで $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であり $r' = \sqrt{x^2+y^2}$ である．次に

$$
x = r'\cos\phi, r'' = r'\sin\phi \quad (0 \le \phi \le 2\pi)
$$

となる．r'' は y 軸への射影であるから，y 座標そのものである；$r''=y$．そのため，$r'' \ge 0$ とは限らないので ϕ は 0 から 2π をとる．以上より

$$
z = r\cos\theta, x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi \quad (0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi)
$$

と極座標変換ができた．

$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ 平面だけを角度 θ だけ回転させる変換を $r_{ij}(\theta)$ と書くと，それが引き起こす座標変換は

$$
\begin{aligned}
r_{ij}(\theta) :& \boldsymbol{x} = \sum_i x_i\boldsymbol{e}_i \mapsto r_{ij}(\theta)\boldsymbol{x} = \sum_i x_i'\boldsymbol{e}_i\\
&\begin{pmatrix} x_i\\ x_j\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_i'\\ x_j'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \quad x_k \mapsto x_k' = x_k \quad (k \ne i,j)
\end{aligned}
$$

と書ける．これを用いて，ノルムが 1 の任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$(つまり S^{n-1} の任意の点 $\boldsymbol{x}$) は，回転

$$
r_{1,2}(-\theta_1)r_{2,3}(-\theta_2)\cdots r_{n-1,n}(-\theta_{n-1})
$$

によって北極点 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\cdots,0)^T$ に送ることができる．ここで $\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}$ は Hurwitz-Schur の球面座標に現れる角度変数である．証明は簡単．実際，この写像の表現行列は

$$
C = \begin{pmatrix}
\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & \cdots\\
-\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 1 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots\\
0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & \cdots\\
0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\cdots
\begin{pmatrix}
\ddots & \vdots & & \vdots\\
\cdots & 1 & 0 & 0\\
\cdots & 0 & \cos\theta_{n-1} & \sin\theta_{n-1}\\
\cdots & 0 & -\sin\theta_{n-1} & \cos\theta_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&=:C_{1,2}(\theta_1)C_{2,3}(\theta_2)\cdots C_{n-1,n}(\theta_{n-1})\\
&\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であるから，上の Hurwitz-Schur の球面座標を用いて順々に作用させていけば，最初の $C_{n-1,n}(\theta_{n-1})$ で $x'_n=0$ となり，次に $C_{n-2,n-1}(\theta_{n-2})$ によって $x'_{n-1}=0$ となり…を繰り返し，最後 $x'_1=1$ だけが残る．この C は部分行列が $SO(2)$ となっている行列の積で構成されているから明らかに $\det C=1$ であり，さらに $C^TC=1$ を満たすから $SO(n)$ の元である．この C に対して

$$
C(t)=C_{1,2}(t\theta_1)C_{2,3}(t\theta_2)\cdots C_{n-1,n}(t\theta_{n-1})
$$

とすれば，$C(0)=1$ かつ $C(1)=C$ である連続な経路であり，任意の t で $C(t)\in SO(n)$ である．これで補題の証明が終わった．

以上の準備のもと，$SO(3,1)$ が弧状連結であることを示す．任意の $SO(3,1)$ の元 Λ はローレンツブースト B と回転 $R\in SO(3)$ で $\Lambda=BR$ の形で書けることを示す．任意の $\Lambda\in SO(3,1)$ に対して，純粋に時間的なベクトル $k^\mu=(0,0,0,1)$ と書くと

$$
\bar{\Lambda}=L^{-1}(\Lambda k)\Lambda
$$

は k^μ を不変に保つ．ここで $L(\Lambda k)$ はブースト (2.5.24) で

$$
L(\mathbf{v})=\begin{pmatrix}1+(\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}-1)\frac{\mathbf{v}\hat{\mathbf{v}}^T}{|\mathbf{v}|^2} & \mathbf{v}\\ \mathbf{v}^T & \sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}\end{pmatrix}
$$

あり，これは基準速度 k から $(L(\mathbf{v})k)^\mu=v^\mu$ となるように選んだ基準ブーストである．(このように書ける理由は，p95 のウィグナー回転にて $p=k$ として $L(k)=1$ であることを使えばすぐわかる．実際 $\Lambda:k\to\Lambda k$ としてから $L^{-1}(\Lambda k):\Lambda k\to k$ としているからその合成は k^μ を不変とする．さらに $L(\mathbf{v})$ が固有順時ローレンツ変換 $SO(3,1)$ の元であることは，2.5 節のノートで $L(p)$ が $SO(3,1)$ の元であることを示すから，そこで $\mathbf{p},M\to\mathbf{v},1$ と置き換えればわかる．そこのノートを見てもらうことにして，今は細かい説明を省く．)
時間成分しかないベクトルが不変であることから，この行列 $\bar{\Lambda}$ は空間成分のみを変換するような行列であり，したがって $\bar{\Lambda}$ は空間回転の元であることが推測できる．実際に，以下でそうであることを示そう．$\bar{\Lambda}$ は $k^\mu=(0,0,0,1)$ を不変にするから，なんらかの 3 成分ベクトル $\boldsymbol{u}$ と 3×3 行列 R を用いて一般的に

$$
\bar{\Lambda}=\begin{pmatrix}R & 0\\ \boldsymbol{u}^T & 1\end{pmatrix}
$$

という形で書ける．しかし L,Λ は $SO(3,1)$ の元であるから，$\bar{\Lambda}=L^{-1}(\Lambda k)\Lambda$ も $SO(3,1)$ の元であり，したがって関係式 $\bar{\Lambda}^T\eta\bar{\Lambda}=\eta$ を満たす．

$$
\begin{aligned}
\bar{\Lambda}^T\eta\bar{\Lambda}&=\begin{pmatrix}R^T & \boldsymbol{u}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R & 0\\ \boldsymbol{u}^T & 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}R^T & \boldsymbol{u}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R & 0\\ -\boldsymbol{u}^T & -1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}R^TR-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} & -\boldsymbol{u}\\ -\boldsymbol{u}^T & -1\end{pmatrix}\\
=\eta&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって $\boldsymbol{u}=0,R^TR=1$ となる．$\det\bar{\Lambda}=+1$ より $\det R=+1$ もわかり，したがって $R\in SO(3)$ の元となり $\bar{\Lambda}$ は純粋に空間回転であることが示された．以上より任意の元 $\Lambda\in SO(3,1)$ は $L(\Lambda k)\bar{\Lambda}$ と書くことができ

る．任意の $SO(3)$ の元は単位元とのパスがあることは既に示したから，$R(0)=1$ かつ $R(1)=R$ となるような連続な $R(t)\in SO(3)$ が存在する．さらに任意のブーストも単位元とのパスがある．実際

$$L(t\mathbf{v})=\begin{pmatrix}1+(\sqrt{1+|t\mathbf{v}|^2}-1)\frac{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^T}{|\mathbf{v}|^2} & t\mathbf{v}\\ t\mathbf{v}^T & \sqrt{1+|t\mathbf{v}|^2}\end{pmatrix}$$

は任意の $t\in[0,1]$ に対して $SO(3,1)$ の元であることが，$L(\mathbf{v})$ が $SO(3,1)$ の元であることと全く同様にして示せて，$L(0)=I$ であることもすぐわかる．したがって

$$\begin{aligned}\Lambda(t):=&L(t\Lambda k)\bar{\Lambda}(t)\\ =&\begin{pmatrix}1+(\sqrt{1+|t\mathbf{v}|^2}-1)\frac{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^T}{|\mathbf{v}|^2} & t\mathbf{v}\\ t\mathbf{v}^T & \sqrt{1+|t\mathbf{v}|^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R(t) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad(\mathbf{v}=(\Lambda k)^i={\Lambda^i}_0)\end{aligned}$$

と定めれば，$\Lambda(0)=1$ かつ $\Lambda(1)=\Lambda$ になるようなパスが構成でき，任意の t で $\Lambda(t)\in SO(3,1)$ である．したがって任意の $\Lambda\in SO(3,1)$ も単位元とのパスが存在し，$SO(3,1)$ は弧状連結であることが証明できた．

（$L(p)$ のブロック行列の形は 4×4 行列であることをダイレクトに使っていないことに留意する．したがってこの議論を D 次元ローレンツ変換 $SO(D-1,1)$ に拡張するのは容易である．$SO(D-1)$ の弧状連結性を用いて $SO(D-1,1)$ は弧状連結であることが全く同様にして証明できる．）

2.4　ポアンカレ代数

2.2 節でみたように，どんな対称性リー群の情報も，ほぼ単位元の近傍の元の性質に含まれている．非斉次ローレンツ群については，単位元は $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu, a^\mu = 0$ の変換であるから，$\omega^\mu{}_\nu$ と ϵ^μ のどちらも微小量として

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu$$

となるような変換の性質を調べよう．このときローレンツ変換の条件は (2.3.5) は

$$\begin{aligned}\eta_{\rho\sigma} =& \eta_{\mu\nu}\left(\delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\rho\right)\left(\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma\right)\\ =& \eta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + \mathcal{O}(\omega^2)\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\omega_{\sigma\rho} \equiv \eta_{\mu\sigma}\omega^\mu{}_\rho, \quad \omega^\mu{}_\rho = \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}$$

という記法を使っている．ローレンツ変換の条件 (2.3.5) で ω について一次の項のみをとると

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

四次元の任意の反対称テンソル (2 階) は $(4\times 3)/2 = 6$ 個の独立な条件を持っているので，ϵ^μ の四個の成分と合わせて，非斉次ローレンツ変換は $6+4=10$ 個の独立なパラメータをもつ．$U(1,0)$ はどんな射線もそれ自身に変換するので，恒等演算子に比例しなければならない．(比例なのは，$|\alpha| = 1$ な複素数 α 倍だけする $\Psi \to \Psi' = \alpha\Psi$ を考えると，Ψ, Ψ' は同じ射線に属するからだ．つまり位相因子分の定数が一応許容される．) これは位相を選ぶことで恒等演算子に等しくできる．こうしておけば，(2.4.1) の微小ローレンツ変換で，$U(1+\omega,\epsilon)$ は恒等演算子 1 に $\omega_{\rho\sigma}$ と ϵ_ρ について線形な項を加えたものとなる．これを以下のように書く*3．

$$U(1+\omega,\epsilon) = 1 + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho + \cdots$$

ここで $J^{\rho\sigma}$ と P^ρ は ω と ϵ に依存しない演算子であり，$\cdots$ は ω,ϵ についてより高次の項だ．この $U(1+\omega,\epsilon)$ がユニタリーであるためには，(2.2.9) での議論より，演算子 $J^{\rho\sigma}$ と P^ρ はエルミートでなければならない．

$$(J^{\rho\sigma})^\dagger = J^{\rho\sigma}, \quad (P^\rho)^\dagger = P^\rho$$

$\omega_{\rho\sigma}$ は反対称だから，その係数 $J^{\rho\sigma}$ も反対称としてよい．

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}$$

後でみるように，P^1, P^2, P^3 は運動量演算子の成分で，J^{23}, J^{31}, J^{12} は角運動量の成分，そして P^0 はエネルギー演算子すなわちハミルトニアンだ．

次に $J^{\rho\sigma}$ と P^ρ のローレンツ変換性を調べる．積

$$U(\Lambda,a)U(1+\omega,\epsilon)U^{-1}(\Lambda,a)$$

*3 $\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}$ というのは，前の表記 $\theta_a t_a$ という形とは違い添え字が二つのように見えるが，実際は (例えば簡単のため添え字 $\mu,\nu = 0,1$ だけとして) 生成子が $t_1 = J^{00}, t_2 = J^{01}, t_3 = J^{10}, t_4 = J^{11}$ で与えられ

$$\theta_a t_a = \theta_1 J^{00} + \theta_2 J^{01} + \theta_3 J^{10} + \theta_4 J^{11}$$

という形で生成子の線形結合で展開しており，それぞれの係数 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ を $\omega_{00},\omega_{01},\omega_{10},\omega_{11}$ と改めて書いている．その結果 $\theta_a t_a = \omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$ となっている．つまり添え字が二つの場合で展開しているというよりも，全ての生成子の線形結合をとって，その係数 θ_a をその生成子の添え字に合わせて $\omega_{\mu\nu}$ と書いている．

を考える．ここで $\Lambda^\mu{}_\nu$ と a^μ は新しい変換のパラメータであり，ω, ϵ には関係ない．(2.3.11) によれば，積 $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a) = U(1,0)$ なので，$U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ は $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ は $U(\Lambda, a)$ の逆だ．したがって

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda,a)U(1+\omega,\epsilon)U^{-1}(\Lambda,a) =& U(\Lambda,a)U(1+\omega,\epsilon)U(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)\\
=& U(\Lambda,a)U\left((1+\omega)\Lambda^{-1}, -(1+\omega)\Lambda^{-1}a+\epsilon\right)\\
=& U(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1}, \Lambda(-(1+\omega)\Lambda^{-1}a+\epsilon)+a)\\
=& U(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)\\
=& U(1+\Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)
\end{aligned}
$$

この右辺は再び $\omega' = \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \epsilon' = \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a$ で $U(1+\omega', \epsilon')$ の形になっている．したがって (2.4.3) で展開することができる．したがって

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) =& U(\Lambda,a)\left[1+\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho + \cdots\right]U^{-1}(\Lambda,a)\\
=& 1 + iU(\Lambda,a)\left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho\right]U^{-1}(\Lambda,a) + \cdots\\
(\mathrm{RHS}) =& 1 + \frac{1}{2}i(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\left(\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a\right)P^\mu + \cdots\\
\therefore\quad & U(\Lambda,a)\left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho\right]U^{-1}(\Lambda,a) = \frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \left(\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a\right)P^\mu
\end{aligned}
$$

この式の両辺で $\omega_{\rho\sigma}$ と ϵ_ρ の係数を比べると，(2.3.10) も用いて

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda,a)\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a) =& \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\omega^\beta{}_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu J^{\mu\nu} + \eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\omega^\beta{}_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu a^\nu P^\mu\\
=& \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\eta^{\beta\rho}\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu} + \eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\eta^{\beta\rho}\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\nu{}^\sigma a^\nu P^\mu\\
=& \frac{1}{2}\Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu} + \Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\nu{}^\sigma a^\nu P^\mu\\
=& \frac{1}{2}\Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\nu{}^\sigma a^\nu P^\mu - \frac{1}{2}\Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\nu{}^\sigma a^\mu P^\nu\\
=& \frac{1}{2}\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma\left(J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu\right)\omega_{\rho\sigma}\\
U(\Lambda,a)[-\epsilon_\rho P^\rho]U^{-1}(\Lambda,a) =& -\eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\epsilon^\beta P^\mu\\
=& -\eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\eta^{\beta\rho}\epsilon_\rho P^\mu\\
=& -\Lambda_\mu{}^\rho\epsilon_\rho P^\mu
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a) =& \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma\left(J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu\right)\\
U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a) =& \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu
\end{aligned}
$$

を得る．斉次ローレンツ変換 ($a^\mu = 0$) では，これらの変換則は単に $J^{\mu\nu}$ がテンソルであり P^μ がベクトルであることを意味する．

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda,0)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,0) =& \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}\\
U(\Lambda,0)P^\rho U^{-1}(\Lambda,0) =& \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu
\end{aligned}
$$

純粋な並進 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu$ では，これらから P^μ が並進不変であることを意味するが $J^{\mu\nu}$ はそうではないことがわかる．

$$
\begin{aligned}
U(1,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(1,a) =& J^{\rho\sigma} - a^\rho P^\sigma + a^\sigma P^\rho\\
U(1,a)P^\rho U^{-1}(1,a) =& P^\rho
\end{aligned}
$$

特に，$J^{\rho\sigma}$ の空間-空間成分の空間並進のもとでの変化は，角運動量がそれらを計算する原点の変化のもとでの変化になっている．(例えば，z 軸周りの成分を考えると J^{12} について $a^1=\delta x, a^2=\delta y, a^3=\delta z$ として

$$U(1,a)J^{12}U^{-1}(1,a)=J^{12}-\delta xP^y+\delta yP^x=J^{12}-(\delta\boldsymbol{x}\times\mathbf{P})_z$$

となっている．もっと一般的に書けば，$\mathbf{J}=\{J^{23},J^{31},J^{12}\}$ として

$$U(1,a)\mathbf{J}U^{-1}(1,a)=\mathbf{J}-\delta\boldsymbol{x}\times\mathbf{P}$$

となる．これはまさに，角運動量ベクトル $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ を平行移動して $(\mathbf{r}-\delta\mathbf{x})\times\mathbf{p}$ となったときの変化に等しい．)

次に，(2.4.8)(2.4.9) をそれ自身微小，つまり $\Lambda^\mu{}_\nu=\delta^\mu_\nu+\omega^\mu{}_\nu, a^\mu=\epsilon^\mu$ である場合に適用してみよう．ここでの微小量 $\omega^\mu{}_\nu,\epsilon^\mu$ は前に用いた ω,ϵ とは無関係とする．(2.4.8) より

$$\begin{aligned}
\text{(LHS)}=&\left[1+\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\epsilon_\rho P^\rho+\cdots\right]J^{\rho\sigma}\left[1+\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\epsilon_\rho P^\rho+\cdots\right]\\
=&J^{\rho\sigma}+\left[\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\epsilon_\rho P^\rho\right]J^{\rho\sigma}-J^{\rho\sigma}\left[\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\epsilon_\rho P^\rho\right]+\cdots\\
=&J^{\rho\sigma}+i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\epsilon_\mu P^\mu,J^{\rho\sigma}\right]\\
\text{(RHS)}=&(\delta^\rho_\mu+\omega_\mu{}^\rho)(\delta^\sigma_\nu+\omega_\nu{}^\sigma)(J^{\mu\nu}-\epsilon^\mu P^\nu+\epsilon^\nu P^\mu)\\
=&J^{\rho\sigma}+\omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma}+\omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu}-\epsilon^\rho P^\sigma+\epsilon^\sigma P^\rho\\
\therefore\quad i&\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\epsilon_\mu P^\mu,J^{\rho\sigma}\right]=\omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma}+\omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu}-\epsilon^\rho P^\sigma+\epsilon^\sigma P^\rho
\end{aligned}$$

同様に (2.4.9) より

$$\begin{aligned}
\text{(LHS)}=&\left[1+\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\epsilon_\rho P^\rho+\cdots\right]P^\rho\left[1+\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\epsilon_\rho P^\rho+\cdots\right]\\
=&P^\rho+i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\epsilon_\mu P^\mu,P^\rho\right]\\
\text{(RHS)}=&(\delta^\rho_\mu+\omega_\mu{}^\rho)P^\mu=P^\rho+\omega_\mu{}^\rho P^\mu\\
\therefore\quad i&\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\epsilon_\mu P^\mu,P^\rho\right]=\omega_\mu{}^\rho P^\mu
\end{aligned}$$

これらの式の両辺の $\omega_{\mu\nu}$ と ϵ_μ の係数を比べると (2.4.10) より

$$\begin{aligned}
\text{(LHS)}=&i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]-i\epsilon_\mu[P^\mu,J^{\rho\sigma}]\\
\text{(RHS)}=&\omega_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+\omega_{\nu\mu}\eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}-\epsilon_\mu\eta^{\mu\rho}P^\sigma+\epsilon_\mu\eta^{\mu\sigma}P^\rho\\
=&\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+\frac{1}{2}\omega_{\nu\mu}\eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\nu\mu}\eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}\\
&-\epsilon_\mu(\eta^{\mu\rho}P^\sigma-\eta^{\mu\sigma}P^\rho)\\
=&\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+\frac{1}{2}\omega_{\nu\mu}\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}+\frac{1}{2}\omega_{\nu\mu}\eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu}\\
&-\epsilon_\mu(\eta^{\mu\rho}P^\sigma-\eta^{\mu\sigma}P^\rho)\\
=&\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu}\\
&-\epsilon_\mu(\eta^{\mu\rho}P^\sigma-\eta^{\mu\sigma}P^\rho)\\
\therefore\quad &i[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]=\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-\eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}+\eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu}\\
&i[P^\mu,J^{\rho\sigma}]=\eta^{\mu\rho}P^\sigma-\eta^{\mu\sigma}P^\rho
\end{aligned}$$

(2.4.11) では右辺に ϵ に比例する項が存在しないので

$$[P^\mu,P^\rho]=0$$

がわかる．これがポアンカレ群のリー代数だ．(交換子の左辺が代数の線形結合になっている．)

量子力学では保存される演算子, つまりエネルギー演算子 $H = P^0$ と可換な演算子が特別な役割をする．(ハイゼンベルグ方程式より，時間に依らないこととハミルトニアンに対し可換なことは同値．)(2.4.13)(2.4.14) より

$$
\begin{aligned}
[P^i, P^0] =& 0 \quad (\text{当然 } [P^0, P^0] = 0) \\
i[P^0, J^{\mu\nu}] =& \eta^{0\rho} P^\rho - \eta^{0\sigma} P^\rho \quad (\mu, \nu \text{がともに } 1,2,3 \text{ ならば右辺はゼロ})
\end{aligned}
$$

なので三元運動量

$$
\mathbf{P} = \{P^1, P^2, P^3\}
$$

と三元角運動量

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} =& \{J_{23}, J_{31}, J_{12}\} \\
J_i =& \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} J_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} J^{jk}, \quad J^{ij} = \epsilon_{ijk} J_k
\end{aligned}
$$

と，もちろんエネルギー P^0 それ自身が保存することがわかる．残りの生成子はいわゆる三元「ブースト」演算子だ. [*4]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} =& \{K_1, K_2, K_3\} = \{J_{10}, J_{20}, J_{30}\} \\
K_i =& J_{i0} = -J^{i0}
\end{aligned}
$$

これらは保存しない．このため $\mathbf{K}$ はエルミート演算子だが，固有値は物理的状態を表すためには使わない．

上の三次元記法では交換関係 (2.4.12)(2.4.13)(2.4.14) がどうなるかを見る．(2.4.23) は明らか

$$
[J^i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0
$$

(2.4.24) は

$$
\begin{aligned}
i[P^0, J^{i0}] =& \eta^{0i} P^0 - \eta^{00} P^i = P^i \\
\therefore \quad [K_i, H] =& -iP_i
\end{aligned}
$$

(2.4.22) は

$$
\begin{aligned}
i[P^i, J^{j0}] =& \eta^{ij} P^0 - \eta^{i0} P^j = \delta^{ij} H \\
\therefore \quad [K_i, P_j] =& -iH\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

(2.4.21) は，レヴィチヴィタ記号をかけて

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\epsilon_{jkl} i[P^i, J^{kl}] =& \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\left(\eta^{ik} P^l - \eta^{il} P^k\right) \\
=& \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\left(\delta^{ik} P^l - \delta^{il} P^k\right) \\
=& \frac{1}{2}\epsilon_{jil} P_l - \frac{1}{2}\epsilon_{jki} P_k \\
=& -\epsilon_{ijl} P_l \\
\therefore \quad [J_i, P_j] =& i\epsilon_{ijk} P_k
\end{aligned}
$$

[*4] 本文通りいくと $K_i = J^{i0}$ だが，25.2 節の脚注で述べられている通りこれは誤記らしい．なので後からこのノートを訂正している．ふざけんな．

(2.4.18) は[*5]

$$
\begin{aligned}
i[J_i, J_j] =& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} i[J^{kl}, J^{mn}] \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\left(\eta^{lm}J^{kn} - \eta^{km}J^{ln} - \eta^{nk}J^{ml} + \eta^{nl}J^{mk}\right) \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\left(\delta^{lm}J^{kn} - \delta^{km}J^{ln} - \delta^{nk}J^{ml} + \delta^{nl}J^{mk}\right) \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jln}J^{kn} - \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jkn}J^{ln} - \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmk}J^{ml} + \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jml}J^{mk} \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jln}J^{kn} - \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jkn}J^{ln} - \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jkn}J^{ln} + \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jln}J^{kn} \quad (\text{添字取換}) \\
=& \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jln}J^{kn} - \frac{1}{2}\epsilon_{ilk}\epsilon_{jln}J^{kn} = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jln}J^{kn} + \frac{1}{2}\epsilon_{ilk}\epsilon_{jln}J^{nk} \\
=& \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jln}J^{kn} + \frac{1}{2}\epsilon_{iln}\epsilon_{jlk}J^{kn} \quad (\text{添字取換}) \\
=& \frac{1}{2}(\epsilon_{jln}\epsilon_{kli} + \epsilon_{iln}\epsilon_{jlk})J^{kn} \\
=& -\frac{1}{2}\epsilon_{kln}\epsilon_{ilj}J^{kn} \quad (\text{ヤコビ恒等式}; \epsilon_{jln}\epsilon_{kli} + \epsilon_{iln}\epsilon_{jlk} + \epsilon_{kln}\epsilon_{ilj} = 0) \\
=& -\epsilon_{ijl}\left(\frac{1}{2}\epsilon_{lkn}J^{kn}\right) = -\epsilon_{ijl}J_l \\
\therefore \quad [J_i, J_j] =& i\epsilon_{ijk}J_k
\end{aligned}
$$

(2.4.20) は

$$
\begin{aligned}
i[K_i, K_j] =& i[-J^{i0}, -J^{j0}] \\
=& i[J^{i0}, J^{j0}] \\
=& \eta^{0j}J^{i0} - \eta^{ij}J^{00} - \eta^{i0}J^{j0} + \eta^{00}J^{ji} \\
=& +J^{ij} \\
=& +\epsilon_{ijk}J_k \\
\therefore \quad [K_i, K_j] =& -i\epsilon_{ijk}J_k
\end{aligned}
$$

(2.4.19) は

$$
\begin{aligned}
i[J_i, K_j] =& \frac{1}{2}\epsilon_{ikl} i[J^{kl}, -J^{j0}] \\
=& -\frac{1}{2}\epsilon_{ikl} i[J^{kl}, J^{j0}] \\
=& -\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\left(\eta^{lj}J^{k0} - \eta^{kj}J^{l0} - \eta^{0k}J^{jl} + \eta^{0l}J^{jk}\right) \\
=& -\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}(\delta^{lj}J^{k0} - \frac{1}{2}\delta^{kj}J^{l0}) \\
=& -\frac{1}{2}\epsilon_{ikj}J^{k0} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijl}J^{l0} = \epsilon_{ijl}J^{l0} = -\epsilon_{ijl}K_l \\
\therefore \quad [J_i, K_j] =& i\epsilon_{ijk}K_k
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで i, j, k は $1, 2, 3$ の値をとる．交換関係 (2.4.18) は角運動量演算子のものになっている．若干の誤植があるから，結果を一覧にしてまとめておこう．

$$
[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k
$$

[*5] 他の場の量子論の文献だと $U(\Lambda)$ の生成子の符号や $J^{\mu\nu}$ の交換関係などの符号がこの本と合わないことについてここで言及しておく．それは本質的にミンコフスキー計量の符号の違いからくる．もし他の文献のように $\eta = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, +1)$ をとると，ここまでの計算にその符号依存性は現れないが，ここの計算で $\eta^{ij} = \delta^{ij}$ ではなく $-\delta^{ij}$ が出るため，結果に余分なマイナスがつき，角運動量の交換関係を再現しない．そのために最初の $J^{\mu\nu}$ の生成子にさらにマイナスをかけて，辻褄を合わせる必要があるのだ．運動量演算子 P^μ の符号については交換関係からの符号の制約は決まらない．だから $U(\Lambda)$ の中の $\epsilon_\rho P^\rho$ の符号は今のところただの約束事だ．これについては 3.1 節で述べるが，P^0 が時間発展の生成子 (ハミルトニアン) になるように符号を合わせる必要があるため，やはりここでも計量からの符号の差異が生まれる．

$$
\begin{aligned}
[J_i, K_j] =& i\epsilon_{ijk}K_k \\
[K_i, K_j] =& -i\epsilon_{ijk}J_k \\
[J_i, P_j] =& i\epsilon_{ijk}P_k \\
[K_i, P_j] =& -iH\delta_{ij} \\
[J_i, H] =& [P_i, H] = [H, H] = 0 \\
[K_i, H] =& -iP_i
\end{aligned}
$$

この結果は後から何度も使う．

純粋な並進 $T(1, a)$ は非斉次ローレンツ群の部分群をなす．この群の積の法則は (2.3.7) によって

$$
T(1, \bar{a})T(1, a) = T(1, \bar{a} + a)
$$

となっている．これは (2.2.24) と同じ意味で加法的であり，(2.4.3) を使って，(2.2.26) を導いたのと同様に

$$
\begin{aligned}
U(1, a) =& \left[U\left(1, \frac{1}{N}\right)\right]^N = \left[1 - i\frac{a_\mu P^\mu}{N}\right]^N \\
=& \exp(-ia_\mu P^\mu)
\end{aligned}
$$

となる．また，パラメータ $\omega_{\mu\nu}$ を

$$
\begin{aligned}
\omega^\mu{}_\nu =& \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 & \beta_1 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 & \beta_2 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \end{pmatrix} \\
\omega_{\mu\nu} =& \eta_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 & \beta_1 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 & \beta_2 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 & \beta_3 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & 0 \end{pmatrix} \\
\theta_i =& (\omega^2{}_3, \omega^3{}_1, \omega^1{}_2) = (\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk} \\
\beta_i =& (\omega^1{}_0, \omega^2{}_0, \omega^3{}_0) = \omega^i{}_0 = \omega_{i0} = -\omega_{0i}
\end{aligned}
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
U(1+\omega, 0) =& 1 + i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\
=& 1 + i\frac{1}{2}\omega_{ij}J^{ij} + i\frac{1}{2}\omega_{i0}J^{i0} + i\frac{1}{2}\omega_{0i}J^{0i} \\
=& 1 + i\frac{1}{2}\omega_{ij}\epsilon_{ijk}J_k - i\omega_{i0}K_i \quad \because J_i = \epsilon_{ijk}J^{jk}, K_i = J_{i0} \\
=& 1 + i(\theta_i J_i - \beta_i K_i) = 1 + i(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})
\end{aligned}
$$

となるが，

$$
\Lambda^\nu{}_\mu \Lambda'^\mu{}_\rho = (\delta^\nu_\mu + \omega^\nu{}_\mu)(\delta^\mu_\rho + \omega'^\mu{}_\rho) = \delta^\rho_\nu + \omega^\nu{}_\rho + \omega'^\nu{}_\rho
$$

であるから (ω, ω' について二次の項は無視)，微小ローレンツ変換 $T(1+\omega, 0)T(1+\omega') = T(1+\omega+\omega', 0)$ という加法的な群になる．

$$
\begin{aligned}
U(1+\omega, 0)U(1+\omega', 0) =& U(1+\omega+\omega', 0) \\
=& 1 + i((\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}') \cdot \mathbf{J} - (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}') \cdot \mathbf{K})
\end{aligned}
$$

よって有限な表現は

$$
U(\Lambda, 0) = \left[U\left(1 + \frac{\omega}{N}, 0\right)\right]^N
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[1 + \frac{i}{N}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K})\right]^N \\
&= \exp\Big(i(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K})\Big)
\end{aligned}
$$

となる．ローレンツ変換 Λ が回転 $R(\theta)$ のとき $\beta = 0$ だから

$$U(R(\theta), 0) = \exp(i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J})$$

だ．ブースト $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ は $\beta_i = v_i, \theta_i = 0$ のローレンツ変換だから

$$U(\mathbf{v}) = \exp(-i\mathbf{v}\cdot\mathbf{K})$$

だ．よってパラメータ θ_i, β_i は直感的にそれぞれ角度とラピディティ*[6]に対応したものであることがわかる．(一般的なポアンカレ変換 $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ の場合，(2.3.11) より $U(\Lambda, a)$ は加法的な群にはならないので，

$$U(\Lambda, a) = \exp\left(-ia_\mu P^\mu + i(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K})\right)$$

とはならない．ポアンカレ変換はローレンツ変換 $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ と並進 $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ の合成であるから

$$U(\Lambda, a) = \exp(-ia^\mu P^\mu)\exp\Big(i(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K})\Big)$$

となる．ベーカー・キャンベル・ハウスドロフ (BCH) の公式より，この式は上の正しくない式とは等価にはならない．)

ポアンカレ代数とニュートン力学の対称群，つまりガリレイ群のリー代数を比べる．(2.4.18)〜(2.4.24) から低速度の極限として導く．これがイネヌ・ウィグナー縮約という．代表的な質量が m 程度で，代表的な速度が v の粒子系では，運動量と角運動量，ブースト演算子は $\mathbf{J} \sim 1, \mathbf{P} \sim mv, \mathbf{K} \sim 1/v$ の大きさだと考えられる．(運動量演算子 P^μ の大きさは自明．回転角 θ は無次元な量であり，exp の肩 $i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}$ は無次元である必要があるから $\mathbf{J}$ も無次元である必要がある．同じ理由で $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K}$ も無次元であることより $\mathbf{K} \sim 1/v$ がわかる．) 一方，M を全質量とし，質量以外のエネルギー (運動エネルギーとポテンシャルエネルギー) を W とすると，全エネルギー演算子 $H = M + W$ と書ける．(相対論的には $E = mc^2 + mv^2/2 + \cdots$ となるからだ．) それぞれの大きさは $M \sim m, W \sim mv^2$ となっている．(2.4.18)〜(2.4.24) から，交換関係は $v \ll 1$ のときには

$$
\begin{aligned}
&[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \\
&[K_i, K_j] = 0 \quad \because (K \text{ に比べ } J \text{ は無視できる大きさ}) \\
&[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k \\
&[K_i, P_j] = -iM\delta_{ij} \quad \because (M \text{ に比べ } W \text{ は無視できる大きさ}) \\
&[J_i, M] = [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0 \\
&[J_i, W] = [P_i, W] = 0, \quad [K_i, W] = -iP_i
\end{aligned}
$$

最後の行は $[K_i, H] = [K_i, M] + [K_i, W] = [K_i, W] = -iP_i$ から，また $[J_i, H], [P_i, H]$ でも同様の手順を踏んで残りの式も得られる．

並進 $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{a}$ とブースト $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ の積は $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}$ のはずだが，ヒルベルト空間においてはこれらの演算子はそうは働かない．BCH 公式より

$$\exp(-i\mathbf{v}\cdot\mathbf{K})\exp(-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}) = \exp\left[-i\mathbf{v}\cdot\mathbf{K} - i\mathbf{a}\cdot\mathbf{P} + \frac{1}{2}[-i\mathbf{v}\cdot\mathbf{K}, -i\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}] + \cdots\right]$$

*[6] β が速度であるように見えるが，実際は近似で，実際はラピディティ (無次元量) である．x, t に関するローレンツ変換が

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \beta t \\ t + \beta x \end{pmatrix}$$

と書けることを思い出す．光速 $c = 1$ が ct として入っていることに注意．

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left[-i\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{K}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}\right)+\frac{1}{2}iM\delta_{ij}v_i a_j\right] \\
&= \exp\left(\frac{i}{2}M\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}\right)\exp\left[-i\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{K}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}\right)\right]
\end{aligned}
$$

となる．二, 三行目では，M が他の演算子と可換であるから，それ以上高次の項が現れないことを用いている．位相因子 $\exp\left(\frac{i}{2}M\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}\right)$ が現れることは，ここではこれらの表現が射影表現であり，超選択則によって質量の異なる重ね合わせ (例えば m, m' の質量をもつ 1 粒子状態の重ね合わせ $\Psi_m+\Psi_{m'}$ が禁じられている．)2.2 節でも若干説明したが，ガリレイ群のリー代数に，すべての生成子と可換でその固有値がいろいろな状態の質量になっている生成子 M を付け加えて，ガリレイ群を形式的に拡張して射影表現を通常の非射影表現にできる．これを中心拡大と呼ぶ．(つまり，通常のガリレイ群は $[K_i, P_j]=0$ なのだが，量子力学のユニタリ射影表現だとそれが満たせず，単位元に比例する中心電荷の項が現れてしまう．そこで，上の交換関係では M はまだ単なる数値だが，それを形式的に $M\Psi_m=m\Psi_m$ となる演算子 M で，かつ他の生成子と可換な演算子であると解釈し直し，ガリレイ群の生成子の一員として加えてやる．これで $[K_i, P_j]$ の右辺は単位元ではなくなったから，中心電荷をリー代数から取り除くことができた．そして $\exp(iM\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})$ も位相因子ではなくなったから，非射影表現にできたことになる．．)

2.5　1 粒子状態

1 粒子状態を非斉次ローレンツ群のもとでの変換に従って分類する．

四元エネルギー運動量ベクトル P^μ は互いに可換 $[P^\mu, P^\nu] = 0$ だから，物理的状態ベクトルを，この四元ベクトルの固有値を使って表すことは自然だ．その他の自由度 (粒子のスピンや種類など) をすべて添え字 σ を使って表し，状態ベクトル $\Psi_{p,\sigma}$ は

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma}$$

を満たすとする．

一般的な状態は，例えばいくつかの束縛されていない粒子からなり，そのとき添え字 σ は離散的のみならず連続的な値もとる．(初等的な量子力学において，ポテンシャルに束縛された波動関数は離散的なエネルギー・運動量をとることを思い出すといい．)

⇒「1 粒子状態」の定義に「添え字 σ が純粋に離散的」という条件を含めることにする．そしてここではその場合に話を限る[*7]．

(水素原子の基底状態のような，2 粒子以上の束縛状態は，1 粒子状態として考える．これは「基本粒子」の 1 粒子状態ではないが，この違いはここでは重要ではないらしい．)

(2.5.1) と (2.4.26) から，状態 $\Psi_{p,\sigma}$ が並進のもとで以下のように変換することがわかる．

$$\begin{aligned} U(1,a)\Psi_{p,\sigma} &= \exp(-ia_\mu P^\mu)\Psi_{p,\sigma} \\ &= \exp(-ia_\mu p^\mu)\Psi_{p,\sigma} \end{aligned}$$

これらの状態が，斉次ローレンツ変換のもとでどう変換するかを考える．

(2.4.9) を用いると，$\Psi_{p,\sigma}$ に量子論的斉次ローレンツ変換 $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$ を施すと，四元運動量の固有値が Λp の状態ができることがわかる．

$$\begin{aligned} P^\mu \left[U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}\right] =& U(\Lambda)\left[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)\right]\Psi_{p,\sigma} \\ =& U(\Lambda)\left[(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu P^\rho\right]\Psi_{p,\sigma} \quad \because (2.4.9) \\ =& U(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\rho p^\rho \Psi_{p,\sigma} \\ =& \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho \left[U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}\right] \end{aligned}$$

したがって，$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ は状態ベクトル $\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$ の線形結合でなければならない．

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

(これを (2.5.2) に代入して，等式がなりたつことを確認できる．) 一般に $\Psi_{p,\sigma}$ の適切な線形結合を使って，σ の添え字を，行列 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ がブロック対角になるように選べる．例えば両辺の線形結合をとって

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi'_{p,\alpha} = U(\Lambda)\sum_\sigma A_{\sigma\alpha}\Psi_{p,\sigma} &= \sum_{\alpha'\sigma\sigma'} A_{\sigma'\alpha'}(A^{-1})_{\alpha'\sigma''}C_{\sigma''\sigma}A_{\sigma\alpha}\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \\ &= \sum_{\sigma\sigma'}(A^{-1})_{\alpha'\sigma''}C_{\sigma''\sigma}A_{\sigma\alpha}\left(\sum_{\alpha'} A_{\sigma'\alpha'}\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\right) \\ &= \sum_{\alpha'}(A^{-1}CA)_{\alpha'\alpha}\Psi'_{\Lambda p,\alpha'} \end{aligned}$$

とする．この行列 $A^{-1}CA = C'$ がブロック対角行列にされ，$C' = D^1 \oplus D^2 \oplus \cdots \oplus D^n$ のように完全に分解され，これ以上分解することができないという意味で既約分解されたとき，この既約な成分 $\Psi'_{p,\alpha}$ をまとめて

[*7] このノートでは添え字 σ に連続パラメータ $\theta \in [0, 2\pi)$ をもつような場合も取り上げる．そのようなものは質量ゼロだがローレンツ群 $SO(3,1)$(の小群 $ISO(2)$ の) 無限次元表現をなす．

一種類の粒子と特定するのが自然だ．したがって，非斉次ローレンツ群の既約表現での係数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ の構造を調べることとする．

全ての固有順時ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ のもとで不変な関数は，不変平方 $p^2 \equiv \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ と $p^2 \leq 0$(time-like) のときの p^0 の符号であることに注意する．後者は，固有順時なら $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ だから，

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda^0{}_0 p^0)^2 - \left(\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{p^2 + (p^0)^2}\right)^2 \\
&= -(\Lambda^0{}_0)^2 p^2 + p^2 + (p^0)^2 \\
&= -\left[(\Lambda^0{}_0)^2 - 1\right] p^2 + (p^0)^2 \\
&\geq 0 \quad \because p^2 \leq 0, \Lambda^0{}_0 \geq 1 \\
\therefore \quad &(\Lambda^0{}_0 p^0)^2 \geq \left(\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{p^2 + (p^0)^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

となって，$p^0 \geq 0$ のとき

$$
\Lambda^0{}_0 p^0 \geq \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{p^2 + (p^0)^2}
$$

より

$$
\begin{aligned}
p'^0 =& \Lambda^0{}_\nu p^\nu = \Lambda^0{}_0 p^0 + \Lambda^0{}_i p^i \\
\geq& \Lambda^0{}_0 p^0 - \left|\Lambda^0{}_i p^i\right| \\
\geq& \Lambda^0{}_0 p^0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_i)^2}|\mathbf{p}| \quad \because \text{シュワルツの不等式} \\
=& \Lambda^0{}_0 p^0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{p^2 + (p^0)^2} \geq 0
\end{aligned}
$$

となって，$p'^0 \geq 0$ であり，一方 $p^0 \leq 0$ のとき

$$
-\Lambda^0{}_0 p^0 \geq \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{p^2 + (p^0)^2}
$$

より

$$
\begin{aligned}
p'^0 =& \Lambda^0{}_\nu p^\nu = \Lambda^0{}_0 p^0 + \Lambda^0{}_i p^i \\
\leq& \Lambda^0{}_0 p^0 + \left|\Lambda^0{}_i p^i\right| \\
\leq& \Lambda^0{}_0 p^0 + \sqrt{(\Lambda^0{}_i)^2}|\mathbf{p}| \\
=& \Lambda^0{}_0 p^0 + \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{p^2 + (p^0)^2} \leq 0
\end{aligned}
$$

となって，$p'^0 \leq 0$ である．したがって p^0 の符号は固有順時ローレンツ変換かつ $p^2 \leq 0$ のとき保存する．

したがって，p^2 の値と p^0 の符号それぞれに対して，「基準となる」四元運動量 k^μ を選んで，その類に属するどんな p^μ も以下のように表すことにする．

$$
p^\mu = L^\mu{}_\nu(p) k^\nu
$$

ここで $L^\mu{}_\nu$ は基準となるローレンツ変換で，p^μ に依存し，さらに k^μ として何に選んだかにも依存する．(つまり別の k' をもってきて $p^\mu = L'^\mu{}_\nu(p)k'^\nu$ とすると，$L^\mu{}_\nu(p) \neq L'^\mu{}_\nu(p)$ である．まぁ当たり前か．) こうすると運動量 p の状態 $\Psi_{p,\sigma}$ を

$$
\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p) U(L(p)) \Psi_{k,\sigma}
$$

と定義できる．

(2.5.5) に任意のローレンツ変換を施すと，以下を得る．

$$\begin{aligned}U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} =& N(p)U(\Lambda)U(L(p))\Psi_{k,\sigma}\\ =& N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}\\ =& N(p)U\Big(L(\Lambda p)\cdot L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\Big)\Psi_{k,\sigma}\\ =& N(p)U\Big(L(\Lambda p)\Big)U\Big(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\Big)\Psi_{k,\sigma}\end{aligned}$$

さて，ローレンツ変換 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ は，$L(p) : k \mapsto p$，$\Lambda : p \mapsto \Lambda p$，$L^{-1}(\Lambda p) : \Lambda p \mapsto k$ とする合成変換だ．重要なのは，この変換がローレンツ部分群に属するということだ．この部分群は k^μ を不変に保つローレンツ変換 $W^\mu{}_\nu$ からなっている．

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$$

この部分群は小群と呼ばれている．(2.5.7) を満たすどのような $W^\mu{}_\nu$ についても，以下が成立する．

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}$$

(これは (2.5.3) と対応している．) 係数 $D(W)$ は小群の表現を与える．つまり，どのような $W, \bar{W}$ についても

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma'}\\ =& U(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma} = U(\bar{W})U(W)\Psi_{k,\sigma}\\ =& U(\bar{W})\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma''} = \sum_{\sigma',\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})\Psi_{k,\sigma'}\\ =& \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}\end{aligned}$$

となり，したがって

$$D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})D_{\sigma''\sigma}(W)$$

が成立する．特に (2.5.8) を小群の変換

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$$

に適用して (2.5.6) を使うと

$$\begin{aligned}U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} =& N(p)U\Big(L(\Lambda p)\Big)U\Big(W(\Lambda, p)\Big)\Psi_{k,\sigma}\\ =& N(p)U\Big(L(\Lambda p)\Big)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\Big(W(\Lambda, p)\Big)\Psi_{k,\sigma'}\\ =& N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\Big(W(\Lambda, p)\Big)U\Big(L(\Lambda p)\Big)\Psi_{k,\sigma'}\end{aligned}$$

となる．(2.5.5) の定義を思い出すとさらに

$$\begin{aligned}=& N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\Big(W(\Lambda, p)\Big)\frac{1}{N(\Lambda p)}\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\\ =& \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\right)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\Big(W(\Lambda, p)\Big)\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \quad \left(= \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\right)\end{aligned}$$

となることがわかる．規格化の問題を除けば，変換則 (2.5.3) の係数 $C_{\sigma'\sigma}$ を決めるという問題は，小群の表現 D を求めるという問題に帰着する．

非斉次ローレンツ群のような群の表現を，小群の表現から求めるこの方法は誘導表現の方法といわれる．

表 2.1 を見よう．(a) に関しては $(0,0,0)$ ベクトルを $SO(3)$ 回転させても $(0,0,0)$ ベクトルにしかならないため，$k^\mu = (0,0,0,M)$ の三次元成分を $SO(3)$ 回転させても不変だ．よって基準となる k^μ は $(0,0,0,M)$ で，小群は $SO(3)$ となる．(b)〜(f) も同様に考える．($ISO(2)$ の説明はこの後質量ゼロ状態について調べるときに述べる．) この中で (a)(c)(f) のみが物理的だ．なぜなら物理的にはエネルギー $E = p^0$ は正である必要があり，そのために (b) と (d) は棄却される．さらに p^2 は $-M^2$ に等しくなることが四元運動量の定義よりわかる．

$$\begin{aligned}
-d\tau^2 =& ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
p^2 =& \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 \leq 0, \quad p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}
\end{aligned}$$

このとき $p^2 = 0$ はゼロ質量の粒子の四元運動量であることがわかる．$p^2 = -m^2$ は質量 m の粒子の四元運動量だ．よって (a) と (c) は物理的だ．また，$p^2 \leq 0$ より $(p^0)^2 \geq |\mathbf{p}|^2$ が得られる．したがって (e) は物理的でない．(f) は単に真空状態を表すので，物理的だ．

以下では (a) と (c) の場合のみを考える．これらはそれぞれ $M > 0$ と質量ゼロの場合だ．

量子力学の通常の正規直交化により，基準運動量 k^μ の状態が以下の意味で正規直交になるように選ぶ．

$$(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\sigma'\sigma}$$

($\mathbf{k}$ に関するデルタ関数は，$\Psi_{k,\sigma}, \Psi_{k',\sigma'}$ がそれぞれ固有値 $\mathbf{k}$ をもつエルミート演算子 (ここでは $\mathbf{A}$ とおく) であることより

$$\begin{aligned}
&\int d^3\mathbf{k}\, (\Psi_{k',\sigma}, \mathbf{A}\Psi_{k,\sigma}) = \int d^3\mathbf{k}\,\mathbf{k}\, (\Psi_{k',\sigma}, \Psi_{k,\sigma}) \\
=& \int d^3\mathbf{k}\, (\mathbf{A}\Psi_{k',\sigma}, \Psi_{k,\sigma}) = \mathbf{k}' \int d^3\mathbf{k}\, (\Psi_{k',\sigma}, \Psi_{k,\sigma}) = \mathbf{k}'
\end{aligned}$$

となって，デルタ関数に比例していなければならないことより現れる．最後の行では規格直交化されていることより積分の値が 1 になるようにした．) これより

$$\begin{aligned}
\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\sigma'\sigma} &= (\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) \\
&= (U(W)\Psi_{k',\sigma'}, U(W)\Psi_{k,\sigma}) \\
&= \left(\sum_{\sigma'''} D_{\sigma'''\sigma'}(W)\Psi_{k',\sigma'''}\,,\, \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma''} \right) \\
&= \sum_{\sigma''\sigma'''} D^*_{\sigma'''\sigma'}(W) D_{\sigma''\sigma}(W)\, (\Psi_{k',\sigma'''}, \Psi_{k,\sigma''}) \\
&= \sum_{\sigma''\sigma'''} D^*_{\sigma'''\sigma'}(W) D_{\sigma''\sigma}(W)\, (\Psi_{k',\sigma'''}, \Psi_{k,\sigma''}) \\
&= \sum_{\sigma''\sigma'''} D^*_{\sigma'''\sigma'}(W) D_{\sigma''\sigma}(W) \delta_{\sigma''\sigma'''}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
&= \sum_{\sigma''} D^*_{\sigma''\sigma'}(W) D_{\sigma''\sigma}(W) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
&= \sum_{\sigma''} D^\dagger_{\sigma'\sigma''}(W) D_{\sigma''\sigma}(W) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma''} D^\dagger_{\sigma'\sigma''}(W) D_{\sigma''\sigma}(W) = \delta_{\sigma'\sigma'} \\
\therefore \quad & D^\dagger(W) = D^{-1}(W)
\end{aligned}$$

となって，小群の表現がユニタリーであることがわかる．(有限次元であるとは限らない．実際，$p^2 > 0$ と $p^\mu = 0$ に対応する小群 $SO(2,1)$ と $SO(3,1)$ はコンパクト群でないから，自明でない有限次元ユニタリー表

現を持たない．小群の下で非自明に変換する $p^2>0$ か $p^\mu=0$ の運動量の状態が一つでもあれば，必ず無限個存在し無限次元表現をなす．もう少し詳しく言えば，状態 $\Psi_{k,\sigma}$ にローレンツ変換が自明な表現として作用するとは

$$
\begin{aligned}
U(W)\Psi_{k,\sigma} &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'} \\
&= \sum_{\sigma'} \delta_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'} = \Psi_{k,\sigma}
\end{aligned}
$$

となって，$\Psi_{k,\sigma}$ がローレンツ変換のもとで $D=1$ という表現にしたがって変換することをいう．例えば (f) の場合を考えて，真空は自発的対称性の破れなどにより二種類以上存在するかもしれないが，それらは個別にローレンツ変換のもとで自明な変換をする必要がある．もし，真空が何種類かあって，そのいくつかは自明な変換をするとしても，ひとつでも空気を読まずに非自明な表現 $D\neq 1$ にしたがって変換するものが存在すれば，そのような非自明な変換性をもつ真空は必ず無限個存在していなければならない．）

さて，任意の運動量についてのスカラー積はどうなるだろうか．(2.5.5)(2.5.11) の演算子 $U(\Lambda)$ のユニタリー性から，スカラー積が次のようになることがわかる．

$$
\begin{aligned}
(\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{p,\sigma}) =& N(p)\left(\Psi_{p',\sigma'},U(L(p))\Psi_{k,\sigma}\right) \quad \because (2.5.5) \\
=& N(p)\left(U^{-1}(L(p))\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{k,\sigma}\right) \quad \because U \text{ のユニタリー性} \\
=& N(p)\left(U(L^{-1}(p))\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{k,\sigma}\right) \quad \because U(\Lambda^{-1})=U^{-1}(\Lambda) \\
=& N(p)\left(N(p')\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma'}\Big(W(L^{-1}(p),p')\Big)\Psi_{k',\sigma''}\,,\,\Psi_{k,\sigma}\right) \quad \because (2.5.11)\text{ 上式} \\
=& N(p)N(p')\sum_{\sigma''} D^*_{\sigma''\sigma'}\Big(W(L^{-1}(p),p')\Big)\left(\Psi_{k',\sigma''},\Psi_{k,\sigma}\right) \\
=& N(p)N(p')\sum_{\sigma''} D^*_{\sigma''\sigma'}\Big(W(L^{-1}(p),p')\Big)\delta_{\sigma''\sigma}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
=& N(p)N(p')D^*_{\sigma\sigma'}\Big(W(L^{-1}(p),p')\Big)\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\end{aligned}
$$

ここで $k'\equiv L^{-1}(p)p'$ と定義した．また $k=L^{-1}(p)p$ だから $k-k'=L^{-1}(p)(p-p')$ で，デルタ関数 $\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ は $\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ に比例することがわかる．($\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$ などの公式を思い出せばよい．) このデルタ関数により，右辺では $p=p'$ とできて，このとき，ここに現れる小群の変換は (2.5.10) より

$$
W(L^{-1}(p),p)=L^{-1}(L^{-1}(p)p)L^{-1}(p)L(p)=L^{-1}(k)=1
$$

(最後の変形では $L(k)k=k$ より $L(k)=1$ を用いた) となり自明である．したがってスカラー積は．$D_{\sigma'\sigma}(1)=\delta_{\sigma'\sigma}$ より

$$
(\Psi_{p,\sigma'},\Psi_{p,\sigma})=|N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
$$

となる．残りは $\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ と $\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ の間の比例係数を以下で求める．

任意のスカラー関数 $f(p)$ の四元運動量が $-p^2=M^2\geq 0$ と $p^0>0$(つまり (a) か (c) の場合) の領域でのローレンツ不変な積分は以下のように書くことができる．

$$
\begin{aligned}
&\int d^4p\,\delta(p^2+M^2)\theta(p^0)f(p) \\
=&\int d^3\mathbf{p}\,dp^0\,\delta((p^0)^2-\mathbf{p}^2-M^2)\theta(p^0)f(\mathbf{p},p^0) \\
=&\int d^3\mathbf{p}\,dp^0\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\left[\delta(p^0+\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})+\delta(p^0-\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})\right]\theta(p^0)f(p) \\
&\qquad\qquad \because \delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right] \\
=&\int d^3\mathbf{p}\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\left[\theta(\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})f(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})+\theta(-\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})f(\mathbf{p},-\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})\right]
\end{aligned}
$$

$$= \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}} \quad \because \theta(x > 0) = 1, \theta(x < 0) = 0$$

最初の式のデルタ関数は $p^2 + M^2 = 0$ の領域に制限するため，階段関数は $p^0 > 0$ の領域に制限するために付け加えている．最初の式がローレンツ不変な形式であるため，最後の式もローレンツ不変である．したがって質量殻 $p^2 + M^2 = 0$ 上で積分するとき (つまり $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} > 0$ として関数 $f(p)$ の引数を $f(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2})$ と制限して運動量積分するとき)，ローレンツ不変な不変体積要素は

$$d^3\mathbf{p}/2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$$

で与えられる．(これは (5.2.3)(5.2.4) などで，後からも出てくる．) デルタ関数の定義より

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= \int d^3\mathbf{p}' \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') F(\mathbf{p}') \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}} \left[2\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right] F(\mathbf{p}') \end{aligned}$$

となるので，括弧の中はローレンツ不変でなければならない．したがって不変デルタ関数は

$$2\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = 2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

p', p はそれぞれローレンツ変換 $L(p)$ で k', k と関係していたので，この不変デルタ関数はどちらの変数を使っても等しくなる．

$$2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

したがって結局 (2.5.14) は

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \frac{p^0}{k^0} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

となる．規格化定数 $N(p)$ はしばしば単に $N(p) = 1$ と選ばれる (Peskin,Srednicki など) が，しかしそうするとスカラー積に因子 p^0/k^0 が登場する．このため，ここではよりよく用いられる定義

$$N(p) = \sqrt{k^0/p^0}$$

をとり

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

とする．

以下では，特に重要な (a) と (c) の場合について，つまり質量 $M > 0$ と質量ゼロの粒子について考察する．

(a) 正定値質量

この場合，図 2.2 より小群は三次元回転 $SO(3)$ だ．(半整数スピンも射影表現ではなく表現として組み込むため，以下では回転群として $SU(2)$ を考える．) これはコンパクト群であり，その場合のユニタリー表現は $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots$ に対し $2j+1$ 次元のユニタリー既約表現 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R)$ の直和に分解できる．一般に Peter-Weyl の定理 (小林・大島「リー群と表現論」参照) により，コンパクト群の既約ユニタリー表現は有限次元である．もちろん $SU(2)$ 表現の既約分解は既に量子力学で学んだ．(よりこの本と表記や考え方が近い Weinberg「Lectures on Quantum Mechanics(量子力学講義)」を参照のこと)

これは微小な行列 $\Theta_{ik} = -\Theta_{ki}$ による基準的な微小回転の行列 $R_{ik} = \delta_{ik} + \Theta_{ik}$ から作られる．

$$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(1 + \Theta) = \delta_{\sigma'\sigma} + \frac{i}{2} \Theta_{ik} \left(J^{(j)}_{ik} \right)_{\sigma'\sigma} + \cdots$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\left(J_{21}^{(j)}\right)_{\sigma'\sigma} &= \left(J_{3}^{(j)}\right)_{\sigma'\sigma} = \sigma\delta_{\sigma'\sigma} \quad (\sigma = j, j-1, \cdots, -j+1, -j) \\
(J_{\pm}^{(j)})_{\sigma'\sigma} &= \left(J_{23}^{(j)} \pm iJ_{31}^{(j)}\right)_{\sigma'\sigma} = \left(J_{1}^{(j)} \pm iJ_{2}^{(j)}\right)_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma'\sigma+1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}
\end{aligned}
$$

である．ここで σ は $j, j-1, \cdots, -j$ の値をとる．(この表示は，量子力学での角運動量についての議論を思い出せばよい．磁気量子数 m を，1 粒子状態としての離散的添え字として採用するのである．のちに補足として議論しよう．) 質量 $M > 0$ でスピン j の粒子では，(2.5.11) は

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} =& \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{k^0}}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}\Big(W(\Lambda, p)\Big)\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \\
=& \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}\Big(W(\Lambda, p)\Big)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}
\end{aligned}
$$

となる．ここで小群 $W(\Lambda, p)$(ウィグナー回転) は (2.5.10) で与えられる．

$$
W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)
$$

この回転を計算するためには，四元運動量を $k^\mu = (0, 0, 0, M)$ から p^μ に変化させる「基準ブースト」$L(p)$ を使う必要がある．これは以下のように便宜的に選ばれる．

$$
\begin{aligned}
L^i{}_k(p) =& \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k \\
L^i{}_0(p) =& L^0{}_i = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1} \\
L^0{}_0(p) =& \gamma \\
L(p) =& \begin{pmatrix} 1 + (\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T & \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}} \\ \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}^T & \gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで以下の定義を用いた．

$$
\hat{p}_i \equiv p_i/|\mathbf{p}|, \quad \gamma \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}/M
$$

(γ は相対論でよく使われる $1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$ と同じものである．実際 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ である一方，固有時の定義より

$$
d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt\sqrt{1 - (d\mathbf{x}/dt)^2} = dt/\gamma
$$

で

$$
p^0 = M\frac{dx^0}{d\tau} = \gamma M\frac{dt}{dt} = \gamma M
$$

であることからすぐ $\gamma = p^0/M = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}/M$ がわかる．) この基準ブーストが，$L^\mu{}_\nu(p)k^\nu = p^\nu$ を満たすことと，ローレンツ変換 (2.3.5) を満たすことを確認する．$k^\mu = (0, 0, 0, M)$ より

$$
\begin{aligned}
L^0{}_\nu k^\nu =& L^0{}_0(p)M = \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}}{M}M = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} = p^0 \\
L^i{}_\nu k^\nu =& L^i{}_0(p)M = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1}M = \hat{p}_i\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 + M^2}{M^2} - 1}M = \hat{p}_i\sqrt{\mathbf{p}^2} = p_i
\end{aligned}
$$

となり前者が確認できる．次に (2.3.5) は

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}L^\mu{}_0(p)L^\nu{}_0(p) =& -(L^0{}_0(p))^2 + (L^i{}_0(p))^2 \\
=& -\gamma^2 + \hat{p}_i^2(\gamma^2 - 1) = -\gamma^2 + (\gamma^2 - 1) \\
=& -1 = \eta_{00}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}L^\mu{}_i(p)L^\nu{}_0(p) =& -L^0{}_i(p)L^0{}_0(p)+L^k{}_i(p)L^k{}_0(p)\\
=& -\hat{p}_i\sqrt{\gamma^2-1}\gamma+(\delta_{ki}+(\gamma-1)\hat{p}_k\hat{p}_i)(\hat{p}_k\sqrt{\gamma^2-1})\\
=& -\hat{p}_i\gamma\sqrt{\gamma^2-1}+\hat{p}_i\sqrt{\gamma^2-1}+\hat{p}_i(\gamma-1)\sqrt{\gamma^2-1}\\
=&0=\eta_{i0}\\
\eta_{\mu\nu}L^\mu{}_i(p)L^\nu{}_j(p) =& -L^0{}_iL^0{}_j+L^k{}_i(p)L^k{}_j(p)\\
=& -(\hat{p}_i\sqrt{\gamma^2-1}))(\hat{p}_j\sqrt{\gamma^2-1})+(\delta_{ki}+(\gamma-1)\hat{p}_k\hat{p}_i)(\delta_{kj}+(\gamma-1)\hat{p}_k\hat{p}_j)\\
=& -\hat{p}_i\hat{p}_j(\gamma^2-1)+\delta_{ij}+2\hat{p}_i\hat{p}_j(\gamma-1)+\hat{p}_i\hat{p}_j(\gamma-1)^2\\
=& -\hat{p}_i\hat{p}_j(\gamma^2-1)+\delta_{ij}+2\hat{p}_i\hat{p}_j(\gamma-1)+\hat{p}_i\hat{p}_j(\gamma^2-2\gamma+1)\\
=&\delta_{ij}=\eta_{ij}
\end{aligned}
$$

となり，たしかに $L^\mu{}_\nu(p)$ はローレンツ変換である．(あとから考えれば行列形式の方がわかりやすかった．この場合

$$
\begin{aligned}
&L(p)^T\eta L(p)\\
=&\begin{pmatrix}1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T & \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}\\ \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}^T & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T & \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}\\ \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}^T & \gamma\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T & -\sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}\\ \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}^T & -\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T & \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}\\ \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}^T & \gamma\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}[1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T][1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T]-(\gamma^2-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T & [1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T]\sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}-\gamma\sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}\\ \sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}^T[1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T]-\gamma\sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}} & (\gamma^2-1)\hat{\mathbf{p}}^T\hat{\mathbf{p}}-\gamma^2\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\eta
\end{aligned}
$$

となる．最後の行は $\hat{\mathbf{p}}^T\hat{\mathbf{p}}=1$ を使えば示せる．) さらに行列式が $+1$，つまり固有順時ローレンツ変換 $SO(3,1)$ の元であることも確認する．このためには，ブロック行列に関する行列式の公式を使うのが良い．すなわち，行列 M が部分行列 A,B,C,D によって

$$
M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}
$$

という形になっているならば

$$
\begin{aligned}
\det M =&\det A\det\left(D-CA^{-1}B\right)\quad (A\text{ が正則})\\
=&\det D\det\left(A-BD^{-1}C\right)\quad (D\text{ が正則})
\end{aligned}
$$

となる，というものである．これは簡単に証明できる．一つ目の式を示すには

$$
M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & O\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & A^{-1}B\\ O & I\end{pmatrix}
$$

とすればいい．(右辺から逆算すれば左辺が出てくる．) 両辺の det をとると，右辺の 1 つめと 3 つ目の行列式が 1 であることと，行列の積の det は det の積に分解できることを使えばすぐ示せる．二つ目の式も同様である．今回は二つ目の式を使い，$A=1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T, B=\sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}^T, C=\sqrt{\gamma^2-1}\hat{\mathbf{p}}, D=\gamma$ とすれば

$$
\begin{aligned}
A-BD^{-1}C =&[1+(\gamma-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T]-\frac{1}{\gamma}(\gamma^2-1)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T\\
=&1+\frac{1-\gamma}{\gamma}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\det L(p)=\gamma\det\left(1+\frac{1-\gamma}{\gamma}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T\right)
$$

となる．さらに計算を進めるためには

$$\det\left(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right) = 1 + \mathbf{v}^T\mathbf{u}$$

を使う．これは

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{u} \\ 0 & 1 + \mathbf{v}^T\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

であることから両辺 det をとって示せる (これは matrix determinant lemma という名前で知られているらしい)．これを使えば

$$\begin{aligned}
\det L(p) =& \gamma \det\left(I + \frac{1-\gamma}{\gamma}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}^T\right) \\
=& \gamma\left(1 + \frac{1-\gamma}{\gamma}\hat{\mathbf{p}}^T\hat{\mathbf{p}}\right) \\
=& 1
\end{aligned}$$

となる．$L(p)^0{}_0 = \gamma > +1$ は明らかだから，以上から $L(p)$ が $SO(3,1)$ の元であることがわかる．

$\Lambda^\mu{}_\nu$ が任意の三次元回転 $\mathcal{R}$ であるとき，全ての p についてウィグナー回転 $W(\Lambda, p)$ が $\mathcal{R}$ と同じであることを以下で示す．このために，ブースト (2.5.24) が以下のように表せることを使う．

$$L(p) = R(\mathbf{p})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathbf{p})$$

理由を以下で説明する．ここで $R(\mathbf{p})$ は 3 軸 (運動量ベクトルの z 方向の成分という意) を $\mathbf{p}$ の方向に向ける三次元回転で，$B(|\mathbf{p}|)$ は

$$B(|\mathbf{p}|) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \sqrt{\gamma^2-1} \\ 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2-1} & \gamma \end{pmatrix}$$

これは (2.5.24) で $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = 0, \hat{p}_3 = 1$ とおいたものだ．つまり B は $k^\mu = (0,0,0,M)$ を「空間成分が 3 軸方向に向かっている $p^\mu = (0,0,\mathbf{p},p^0)$」にするローレンツ変換だ．よって

$$\begin{aligned}
\left(R(\mathbf{p})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathbf{p})\right)^\mu{}_\nu k^\nu =& R(\mathbf{p})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathbf{p})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \\
=& R(\mathbf{p})B(|\mathbf{p}|)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \quad \because \text{(空間成分がゼロベクトルなので回転不変)} \\
=& R(\mathbf{p})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\gamma^2-1} \\ \gamma M \end{pmatrix} = R(\mathbf{p})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\mathbf{p}| \\ p^0 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ p^0 \end{pmatrix} \quad \because (R(\mathbf{p})\text{ は 3 軸を }\mathbf{p}\text{ に向ける回転}) \\
=& p^\nu
\end{aligned}$$

となる．たしかに $L(p)$ となっていることがわかる．

こうすると，任意の回転 $\mathcal{R} = \Lambda$ に対して

$$W(\mathcal{R}, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = L^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}L(p)$$

$$
\begin{aligned}
&=\Big(R(\mathcal{R}p)B^{-1}(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathcal{R}p)\Big)\mathcal{R}\Big(R(p)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(p)\Big)\\
&=R(\mathcal{R}p)B^{-1}(|\mathbf{p}|)\Big(R^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}R(p)\Big)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(p)
\end{aligned}
$$

となる．回転 $R^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}R(p)$ は，3 軸を $\mathbf{p}$ の方向に，次に $\mathcal{R}p$ に回転し，そして次に元の 3 軸に回すので，3 軸周りのある角度 θ の回転だとわかる．つまり

$$
R^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}R(p) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

と書ける．これは明らかに $B(|\mathbf{p}|)$ と可換だ．わかりにくければ

$$
B(|\mathbf{p}|) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}
$$

と書いてみればいい．$R(\theta)$ と $B(|\mathbf{p}|)$ は可換であることから

$$
\begin{aligned}
W(\mathcal{R},p) =&R(\mathcal{R}p)B^{-1}(|\mathbf{p}|)R(\theta)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(p)\\
=&R(\mathcal{R}p)B^{-1}(|\mathbf{p}|)B(|\mathbf{p}|)R(\theta)R^{-1}(p)\\
=&R(\mathcal{R}p)R(\theta)R^{-1}(p)\\
=&R(\mathcal{R}p)R^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}R(p)R^{-1}(p)\\
=&\mathcal{R}
\end{aligned}
$$

となる．これが示したかったことだ．つまり，動いている質量がゼロでない粒子の状態 (さらに拡張して，多粒子状態) は回転のもとで，非相対論の場合と同じように変換する．

$$
U(\mathcal{R})\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(\mathcal{R})\Psi_{\mathcal{R}p,\sigma'}
$$

($\mathcal{R}$ は三次元的回転で時間成分を不変にするので，$(\mathcal{R}p)^0 = p^0$ であり係数が 1 になる．) これは一見当たり前のように見えるが，$U(\mathcal{R})$ はもともとローレンツ変換の対称性変換演算子であって，量子力学での回転の演算子とは別だ．ローレンツ変換を三次元回転に制限した結果，それらがたまたま全く同じ変換性を示すのだ．三次元的な回転に関する考察は量子力学でやったように，球面調和関数やクレブシュ・ゴルダン係数などの道具がすでに揃っていたのだった．すなわちこれは，非相対論的量子力学から相対論的量子力学にそれらの道具がそのまま持ってこれることを意味する．

(c) ゼロ質量

この場合の小群はどのような構造を持つかを調べなければならない．k^μ をこの場合の基準となる四元運動量 $k^\mu = (0,0,1,1)$ として $(\kappa = 1)$，$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ を満たす小群の元 $W^\mu{}_\nu$ を考える．そのようなローレンツ変換が時間的四元ベクトル $t^\mu = (0,0,0,1)$ に働いてできた四元ベクトル Wt は，その長さおよび $Wk = k$ との内積が t と同じだ．実際 (2.3.5) より

$$
\begin{aligned}
&\eta_{\mu\nu}W^\mu{}_\rho t^\rho W^\nu{}_\sigma t^\sigma = \eta_{\rho\sigma}t^\rho t^\sigma \qquad \therefore (Wt)_\mu (Wt)^\mu = t_\mu t^\mu = -1\\
&\eta_{\mu\nu}W^\mu{}_\rho t^\rho W^\nu{}_\sigma k^\sigma = \eta_{\mu\nu}W^\mu{}_\rho t^\rho k^\nu = \eta_{\rho\sigma}t^\rho k^\sigma \qquad \therefore (Wt)^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu = -1
\end{aligned}
$$

となる．第二の条件を満たす任意の四元ベクトルは以下のように書ける．

$$
(Wt)^\mu = (\alpha, \beta, \zeta, 1+\zeta)
$$

代入してみればすぐわかる．そして第一の条件より

$$
\begin{aligned}
-1 =&(Wt)_\mu (Wt)^\mu\\
=&\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2 - (1+\zeta)^2
\end{aligned}
$$

$$=\alpha^2+\beta^2-2\zeta-1$$
$$\therefore \zeta = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

が得られる．したがって，$W^\mu{}_\nu$ の t^ν への影響は，ローレンツ変換

$$S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1&0&-\alpha&\alpha\\0&1&-\beta&\beta\\\alpha&\beta&1-\zeta&\zeta\\\alpha&\beta&-\zeta&1+\zeta\end{pmatrix}$$

と同じだ．実際 $S^\mu{}_\nu t^\nu=(\alpha,\beta,\zeta,1+\zeta)=W^\mu{}_\nu t^\nu$ だ．$S^\mu{}_\nu$ の左 1 列以外の要素は，これがローレンツ変換であるための条件 (2.3.5) を満たすようになっている．以下でこれがローレンツ変換であること，つまり

$$\eta_{\mu\nu}S^\mu{}_\rho S^\nu{}_\sigma=\eta_{\rho\sigma}$$

を確かめる．これは行列表示で $S^T\eta S=\eta$ を示すのが一番楽だと思う．

$$\begin{aligned}
&S^T\eta S\\
=&\begin{pmatrix}1&0&\alpha&\alpha\\0&1&\beta&\beta\\-\alpha&-\beta&1-\zeta&-\zeta\\\alpha&\beta&\zeta&1+\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\alpha&\alpha\\0&1&-\beta&\beta\\\alpha&\beta&1-\zeta&\zeta\\\alpha&\beta&-\zeta&1+\zeta\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}1&0&\alpha&\alpha\\0&1&\beta&\beta\\-\alpha&-\beta&1-\zeta&-\zeta\\\alpha&\beta&\zeta&1+\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\alpha&\alpha\\0&1&-\beta&\beta\\\alpha&\beta&1-\zeta&\zeta\\-\alpha&-\beta&\zeta&-(1+\zeta)\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}1+\alpha^2-\alpha^2&\alpha\beta-\alpha\beta&-\alpha+\alpha(1-\zeta)+\alpha\zeta&\alpha+\alpha\zeta-\alpha(1+\zeta)\\\alpha\beta-\alpha\beta&\beta^2-\beta^2&-\beta+\beta(1-\zeta)+\beta\zeta&\beta+\beta\zeta-\beta(1+\zeta)\\-\alpha+\alpha(1-\zeta)+\alpha\zeta&-\beta+\beta(1-\zeta)+\beta\zeta&\alpha^2+\beta^2+(1-\zeta)^2-\zeta^2&-\alpha^2-\beta^2+2\zeta\\\alpha+\alpha\zeta-\alpha(1+\zeta)&\beta+\beta\zeta-\beta(1+\zeta)&-\alpha^2-\beta^2+2\zeta&\alpha^2+\beta^2+\zeta^2-(1+\zeta)^2\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\quad\because\zeta=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\\
=&\eta
\end{aligned}$$

よって S はローレンツ変換だ．さて，$S^\mu{}_\nu t^\nu=(\alpha,\beta,\zeta,1+\zeta)=W^\mu{}_\nu t^\nu$ は W が $S(\alpha,\beta)$ に等しいことを意味するのではない．左から S^{-1} をかけて

$$(S^{-1})^\mu{}_\nu W^\nu{}_\sigma t^\sigma=t^\nu$$

よって $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ は $(0,0,0,1)$ を不変にするローレンツ変換であり，空間成分の純粋な回転であることがわかる．一方

$$W^\mu{}_\nu k^\nu=S^\mu{}_\nu k^\nu=k^\mu$$

も直接計算で確かめられ，よって $S^\mu{}_\nu$ は $W^\mu{}_\nu$ のように光円錐的四元ベクトル $(0,0,1,1)$ を不変にする．したがって $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ は 3 軸を不変にする空間回転 (つまり 3 軸周りの θ 回転)

$$S^{-1}(\alpha,\beta)W=R(\theta)$$

である．ここで $R(\theta)$ は 3 軸周りの θ 回転

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

したがって，小群の最も一般的な弦は，次の形だ．

$$W(\theta,\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta)R(\theta)$$

これは何の群だろうか？ $\theta=0$ か $\alpha=\beta=0$ のときの変換は部分群をなすことを見る．

$$\begin{aligned}
S(\bar\alpha,\bar\beta)S(\alpha,\beta)&=\begin{pmatrix}1&0&-\bar\alpha&\bar\alpha\\0&1&-\bar\beta&\bar\beta\\\bar\alpha&\bar\beta&1-\bar\zeta&\bar\zeta\\\bar\alpha&\bar\beta&-\bar\zeta&1+\bar\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\alpha&\alpha\\0&1&-\beta&\beta\\\alpha&\beta&1-\zeta&\zeta\\\alpha&\beta&-\zeta&1+\zeta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}I&\bar B\\\bar A&\bar C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&B\\A&C\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}I+\bar BA&B+\bar BC\\\bar A+\bar CA&\bar AB+\bar CC\end{pmatrix}\\
\bar BA&=\begin{pmatrix}-\bar\alpha&\bar\alpha\\-\bar\beta&\bar\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\bar\alpha\alpha+\bar\alpha\alpha&-\bar\alpha\beta+\bar\alpha\beta\\-\bar\beta\alpha+\bar\beta\alpha&-\bar\beta\beta+\bar\beta\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\bar BC&=\begin{pmatrix}-\bar\alpha&\bar\alpha\\-\bar\beta&\bar\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\zeta&\zeta\\-\zeta&1+\zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\bar\alpha(1-\zeta)-\bar\alpha\zeta&-\bar\alpha\zeta+\bar\alpha(1+\zeta)\\-\bar\beta(1-\zeta)-\bar\beta\zeta&-\beta\zeta+\bar\beta(1+\zeta)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-\bar\alpha&\bar\alpha\\-\bar\beta&\bar\beta\end{pmatrix}\\
\bar CA&=\begin{pmatrix}1-\bar\zeta&\bar\zeta\\-\bar\zeta&1+\bar\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(1-\bar\zeta)+\alpha\bar\zeta&\beta(1-\bar\zeta)+\beta\bar\zeta\\-\alpha\bar\zeta+\alpha(1+\bar\zeta)&-\beta\bar\zeta+\beta(1+\bar\zeta)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}\\
\bar AB&=\begin{pmatrix}\bar\alpha&\bar\beta\\\bar\alpha&\bar\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha&\alpha\\-\beta&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\bar\alpha\alpha-\bar\beta\beta&\bar\alpha\alpha+\bar\beta\beta\\-\bar\alpha\alpha-\bar\beta\beta&\bar\alpha\alpha+\bar\beta\beta\end{pmatrix}\\
\bar CC&=\begin{pmatrix}1-\bar\zeta&\bar\zeta\\-\bar\zeta&1+\bar\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\zeta&\zeta\\-\zeta&1+\zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-\bar\zeta)(1-\zeta)-\bar\zeta\zeta&(1-\bar\zeta)\zeta+(1+\zeta)\bar\zeta\\-\bar\zeta(1-\zeta)-\zeta(1+\bar\zeta)&-\zeta\bar\zeta+(1+\bar\zeta)(1+\zeta)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1-\zeta-\bar\zeta&\zeta+\bar\zeta\\-\zeta-\bar\zeta&1+\zeta+\bar\zeta\end{pmatrix}\\
\bar AB+\bar CC&=\begin{pmatrix}1-\frac{\alpha^2+2\bar\alpha\alpha+\bar\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2+2\beta\bar\beta+\bar\beta^2}{2}&\frac{\alpha^2+2\bar\alpha\alpha+\bar\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2+2\bar\beta\beta+\bar\beta^2}{2}\\-\frac{\alpha^2+2\bar\alpha\alpha+\bar\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2+2\bar\beta\beta+\bar\beta^2}{2}&1+\frac{\alpha^2+2\bar\alpha\alpha+\bar\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2+2\bar\beta\beta+\bar\beta^2}{2}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1-\frac{(\bar\alpha+\alpha)^2+(\bar\beta+\beta)^2}{2}&\frac{(\bar\alpha+\alpha)^2+(\bar\beta+\beta)^2}{2}\\-\frac{(\bar\alpha+\alpha)^2+(\bar\beta+\beta)^2}{2}&1+\frac{(\bar\alpha+\alpha)^2+(\bar\beta+\beta)^2}{2}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1-\zeta(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)&\zeta(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)\\-\zeta(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)&1+\zeta(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)\end{pmatrix}\\
\therefore S(\bar\alpha,\bar\beta)S(\alpha,\beta)&=\begin{pmatrix}1&0&-(\alpha+\bar\alpha)&\alpha+\bar\alpha\\0&1&-(\beta+\bar\beta)&\beta+\bar\beta\\\alpha+\bar\alpha&\beta+\bar\beta&1-\zeta(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)&\zeta(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)\\\alpha+\bar\alpha&\beta+\bar\beta&-\zeta(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)&1+\zeta(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)\end{pmatrix}\\
&=S(\alpha+\bar\alpha,\beta+\bar\beta)
\end{aligned}$$

また R は回転行列であるから積は自明で，以上より

$$S(\bar\alpha,\bar\beta)S(\alpha,\beta)=S(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta),\quad R(\bar\theta)R(\theta)=R(\bar\theta+\theta)$$

となる．これらは加法的なので互いに可換な，小群の部分群であることがわかる．さらに $\theta=0$ の S 部分群に対して，次の積を計算してみよう．

$$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\alpha&\alpha\\0&1&-\beta&\beta\\\alpha&\beta&1-\zeta&\zeta\\\alpha&\beta&-\zeta&1+\zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0&0\\\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ A & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & RB \\ A & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & RB \\ AR^{-1} & C \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
RB = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta & \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta \\ \alpha\sin\theta - \beta\cos\theta & -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta \end{pmatrix}
$$

$$
AR^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta & -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta \\ \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta & -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta \end{pmatrix}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)^2 + (-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)^2}{2} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \\
\therefore \quad \zeta' \equiv \zeta(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta, -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) &= \zeta(\alpha, \beta)
\end{aligned}
$$

より，$\alpha' \equiv= \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta, \beta' \equiv -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta$ とおくと

$$
\begin{aligned}
R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha' & \alpha' \\ 0 & 1 & -\beta' & \beta' \\ \alpha' & \beta' & 1-\zeta' & \zeta' \\ \alpha' & \beta' & -\zeta' & 1+\zeta' \end{pmatrix} \\
&= S(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta, -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)
\end{aligned}
$$

これから何が言えるかというと，小群の任意の元を $W(\theta,\alpha,\beta)$ として (下での α', β' は上の記号とは関係ない)

$$
\begin{aligned}
W(\theta,\alpha,\beta)S(\alpha',\beta')W^{-1}(\theta,\alpha,\beta) &= S(\alpha,\beta)R(\theta)S(\alpha',\beta')R^{-1}(\theta)S^{-1}(\alpha,\beta) \\
&= S(\alpha,\beta)S(\alpha'\cos\theta + \beta'\sin\theta, -\alpha'\sin\theta + \beta'\cos\theta)S^{-1}(\alpha,\beta) \\
&= S(\alpha'\cos\theta + \beta'\sin\theta, -\alpha'\sin\theta + \beta'\cos\theta) \quad \because (S \text{ は互いに可換})
\end{aligned}
$$

となる．これは $\theta = 0$ の S 部分群に属する．よって $\theta = 0$ の部分群は，元の群の任意の元 W に対して WSW^{-1} が再び S 部分群に属するから，S 部分群は正規部分群だ．平行移動が正規部分群となる群は，ユークリッド運動群 $E(n)$ と同じで，S は二次元平行移動，R は (3 軸を不変とする) 二次元回転，よって小群は二次元ユークリッド運動群 $E(2) = ISO(2) \simeq SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ と同定できる．($\ltimes$ は半直積．詳しい意味は小林・大島「リー群と表現論」p7 など参照．)

不変な可換部分群を持たない群は，半単純と呼ばれる．これまでに見たように，小群 $ISO(2)$ は S と R の可換な部分群をもつので非斉次ローレンツ群と同じく，半単純ではない．このため事情は若干複雑になる．

$ISO(2)$ のリー代数を調べる．θ, α, β が微小のとき，$\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx \theta, \alpha^2 = \beta^2 = 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
W(\theta,\alpha,\beta) &= S(\alpha,\beta)R(\theta) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha - \beta\theta & \alpha\theta + \beta & 1 & 0 \\ \alpha - \beta\theta & \alpha\theta + \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \because (\theta, \alpha, \beta \text{は微小量なので二次を無視})
\end{aligned}
$$

よって一般的な群の元は

$$
W^{\mu}{}_{\nu}(\theta,\alpha,\beta) = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mu\nu} =&\eta_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\omega_{\mu\nu} =& -\omega_{\nu\mu}
\end{aligned}
$$

となる．(2.4.3) より，対応するヒルベルト空間の演算子は以下となる．

$$
\begin{aligned}
U(W(\theta,\alpha,\beta)) =&1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \cdots \\
=&1 + i\omega_{23}J^{23} + i\omega_{31}J^{31} + i\omega_{12}J^{12} \\
&+ i\omega_{10}J^{10} + i\omega_{20}J^{20} + i\omega_{30}J^{30} \\
=&1 - i\beta J_1 + i\alpha J_2 + i\theta J_3 \\
&- i\alpha K_1 - i\beta K_2 \\
=&1 + i\alpha(J_2 - K_1) + i\beta(-J_1 - K_2) + i\theta J_3 \\
=&1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3
\end{aligned}
$$

ここで A, B はエルミート演算子

$$
\begin{aligned}
A =&J^{31} + J^{10} = J_2 - K_1 \\
B =& -J^{23} + J^{20} = -J_1 - K_2
\end{aligned}
$$

であり[*8]，以前と同じように $J_3 = J_{12}$ だ．(2.4.18)-(2.4.20) より

$$
\begin{aligned}
[J_3, A] =&[J_3, J_2] - [J_3, K_1] = -iJ_1 - iK_2 \\
=&iB \\
[J_3, B] =& -[J_3, J_1] - [J_3, K_2] = -iJ_2 + iK_1 \\
=& -iA \\
[A, B] =& -[J_2, J_1] - [J_2, K_2] + [K_1, J_1] + [K_1, K_2] = iJ_3 + 0 + 0 - iJ_3 \\
=&0
\end{aligned}
$$

がわかる．[*9]A, B は可換なエルミート演算子だから，(非斉次ローレンツ群の運動量演算子のように) 状態 $\Psi_{k,a,b}$ で同時対角化できる．

$$
A\Psi_{k,a,b} = a\Psi_{k,a,b}, \quad B\Psi_{k,a,b} = b\Psi_{k,a,b}
$$

(可換かつエルミートな演算子には同時固有状態が存在することは，$A\Psi_{k,a} = a\Psi_{k,a}$ がなりたっているとして

$$
A(B\Psi_{k,a}) = B(A\Psi_{k,a}) = a(B\Psi_{k,a})
$$

となり，固有値 a で縮退していなければ $B\Psi_{k,a} \propto \Psi_{k,a}$ がわかり，その比例定数を b とすれば固有値 b の同時固有状態が見つかることからわかる．縮退していても，同じ固有値をもつ状態の線形結合をとってひとつの状態とすればよい．)(2.5.31) より S は W の $\theta = 0$ の場合であるから

$$
U(R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta)) =U(R(\theta))\left[1 + i\alpha A + i\beta B\right]U^{-1}(R(\theta))
$$

[*8] 前に書いたように本当は $K_i = J_{i0}$ であるから，正しいブースト演算子の符号が変わることに注意．本文の定義は誤植である．

[*9] この交換関係が何を示しているかすぐにはわからないだろうが，実は A, B はそれぞれ x, y 方向の運動量演算子 P_1, P_2 に対応している．実際 (2.4.21) より $[J_3, P_1] = iP_2, [J_3, P_2] = -iP_1$ であり，$[P_1, P_2] = 0$ であるから，$A \leftrightarrow P_1, B \leftrightarrow P_2$ がわかる．これよりパラメータ α, β は x, y 方向への平行移動パラメータに対応しており，J_3 は当然 3 軸周りの回転となり，$ISO(2)$ は 3 軸周りの回転と x, y 軸方向の平行移動を組み合わせた変換群であることが直感的に読み取れる．ただし本当の並進演算子である運動量演算子とは別物である．

$$
\begin{aligned}
&&&=1+i\alpha U(R(\theta))AU^{-1}(R(\theta))+i\beta U(R(\theta))BU^{-1}(R(\theta))\\
&=U\Big(S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta,-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)\Big)&&=1+i(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)A+i(-\alpha\theta+\beta\cos\theta)B\\
&&&=1+i\alpha(A\cos\theta-B\sin\theta)+i\beta(A\sin\theta+B\cos\theta)
\end{aligned}
$$

α,β の係数比較をすれば

$$
\begin{aligned}
U[R(\theta)]AU^{-1}[R(\theta)]=&A\cos\theta-B\sin\theta\\
U[R(\theta)]BU^{-1}[R(\theta)]=&A\sin\theta+B\cos\theta
\end{aligned}
$$

が導ける．したがって任意の θ について

$$
\begin{aligned}
A\Psi^{\theta}_{k,a,b}=&AU^{-1}(R(\theta))\Psi_{k,a,b}\\
=&U^{-1}(R(\theta))\left[A\cos\theta-B\sin\theta\right]\Psi_{k,a,b}\\
=&\left[a\cos\theta-b\sin\theta\right]\Psi^{\theta}_{k,a,b}
\end{aligned}
$$

同様に

$$
B\Psi^{\theta}_{k,a,b}=\left[a\sin\theta+b\cos\theta\right]\Psi^{\theta}_{k,a,b}
$$

が得られる．ここで

$$
\Psi^{\theta}_{k,a,b}\equiv U^{-1}(R(\theta))\Psi_{k,a,b}
$$

である．連続パラメータ θ を変化させると，A,B の固有値は連続的に変化する．しかし質量ゼロの粒子で θ のような連続的な自由度を持っているものは観測されていない．したがって，上のような連続した状態を避けるために，物理的な状態 (いまは $\Psi_{k,\sigma}$ とよぶ) は $a=b=0$ の固有値をもつ A,B の固有状態とする．

$$
A\Psi_{k,\sigma}=B\Psi_{k,\sigma}=0
$$

これらの状態 $\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k,\sigma'}$ は A,B により区別することはできないが，(2.5.35)(2.5.36) より

$$
A(J_3\Psi_{k,\sigma})=0,\quad B(J_3\Psi_{k,\sigma})=0
$$

となり，$J_3\Psi_{k,\sigma}$ は A,B の固有値 $a=b=0$ の状態 $\Psi_{k,\sigma}$ の線形結合

$$
J_3\Psi_{k,\sigma}=\sum_{\sigma'}c_{\sigma\sigma'}\Psi_{k,\sigma'}
$$

で与えられることがわかる．J_3 はエルミート演算子であるから，適当な定数行列を両辺に乗じて

$$
J_3\sum_{\sigma}P_{\alpha\sigma}\Psi_{k,\sigma}=\sum_{\sigma'}P_{\alpha\sigma}c_{\sigma\sigma''}P^{-1}_{\sigma''\alpha'}P_{\alpha'\sigma'}\Psi_{k,\sigma'}
$$

この係数行列は対角化 $(PcP^{-1})_{\alpha\alpha'}=k^{\alpha}\delta_{\alpha\alpha'}$ できる．その固有値 k^{α} を，状態を区別する添え字 σ として再定義し，状態も $(A\Psi)_{k,\alpha}\to\Psi_{k,\sigma}$ と再定義して

$$
J_3\Psi_{k,\sigma}=\sigma\Psi_{k,\sigma}
$$

とできる．(J_3 はエルミート演算子だから，固有値 σ は実数．) これでそれぞれの状態の区別ができるようになった．運動量 $\mathbf{k}=(0,0,1)$ は 3 軸方向にあり，J_3 は角運動量演算子の 3 軸成分であるから，σ は角運動量の運動方向成分，すなわちヘリシティを表す．

以上で，一般的な質量ゼロ粒子の状態のローレンツ変換性が計算できる．2.2 節の一般的な議論より，(2.5.32) を有限な α,β に一般化して

$$
U(S(\alpha,\beta))=\exp(i\alpha A+i\beta B)
$$

を得る．これは (2.5.29) より S は加法的な群になることからわかる．また有限の θ で

$$U(R(\theta)) = \exp(i\theta J_3)$$

となる．これも (2.5.30) から R は加法的な群であることからくる．よって小群の任意の元 W は (2.5.28) の形に書けて

$$U(W) = \exp(i\alpha A + i\beta B)\exp(i\theta J_3)$$

よって

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\alpha A + i\beta B)\exp(i\theta J_3)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\theta\sigma)\Psi_{k,\sigma}$$

となる．したがって (2.5.8) から

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma}$$

となる．ここで θ は W を (2.5.28) のように表した時の角度だ．任意のヘリシティの質量ゼロ粒子のローレンツ変換性は (2.5.11)(2.5.18) から，以下のようになる．

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\exp(i\sigma\theta(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma}$$

ここで $\theta(\Lambda,p)$ は

$$W(\Lambda,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \equiv S(\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p))R(\theta(\Lambda,p))$$

で定義される．

ここまでは，質量ゼロ粒子のヘリシティ σ が任意の実数であることを禁じる理由は見当たらない．2.7 節でみるように，σ を整数か半整数に制限するのは質量がゼロでない粒子と同様，トポロジー的な理由だ．

Λ と p が与えられたとき，小群の元 (2.5.43) を計算するためには，$k^\mu = (0,0,\kappa,\kappa)$ を p^μ に変換するための基準となるローレンツ変換 $L(p)$ を決めておく必要がある．これには，次の形を使うのが便利だ．

$$L(p) = R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\kappa)$$

ここで $B(u)$ は 3 軸方向の純粋なブーストだ．

$$B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u^2+1)/2u & (u^2-1)/2u \\ 0 & 0 & (u^2-1)/2u & (u^2+1)/2u \end{pmatrix}$$

また $R(\hat{\mathbf{p}})$ は以前と同様に，3 軸を単位ベクトル $\mathbf{p}$ に回す純粋な三次元回転だ．この $L(p)$ は実際に基準ブースト

$$\begin{aligned} L^\mu{}_\nu(p)k^\nu =& R(\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (|\mathbf{p}|^2/\kappa^2+1)\kappa/2|\mathbf{p}| & (|\mathbf{p}|^2/\kappa^2-1)\kappa/2|\mathbf{p}| \\ 0 & 0 & (|\mathbf{p}|^2/\kappa^2-1)\kappa/2|\mathbf{p}| & (|\mathbf{p}|^2/\kappa^2+1)\kappa/2|\mathbf{p}| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \kappa \\ \kappa \end{pmatrix} \\ =& R(\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\mathbf{p}| \\ |\mathbf{p}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ p^0 \end{pmatrix} = p^\mu \quad \because \text{質量ゼロ粒子であるから } |\mathbf{p}| = p^0 \end{aligned}$$

となる．$\hat{\mathbf{p}}$ が極座標 θ, ϕ で

$$\hat{\mathbf{p}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

と書くと，$R(\hat{\mathbf{p}})$ は $(0,0,1)$ を $(\sin\theta,0,\cos\theta)$ へと回す 2 軸周りの角度 θ の回転 (以下は時間成分を省略して書く)

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\0\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

と，それに続く 3 軸周りの角度 ϕ の回転

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta\\0\\\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\\sin\theta\sin\phi\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

で分けることができる．

$$R(\hat{\mathbf{p}})=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}=R_3(\phi)R_2(\theta)$$

無限小変換を考えると

$$\begin{aligned}R(\hat{\mathbf{p}})_{ij}=&\delta_{ij}+\omega_{ij}\\ =&\begin{pmatrix}1 & -\phi & 0\\ \phi & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\theta & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\phi & \theta\\ \phi & 1 & 0\\ -\theta & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \omega_{ij}=&\begin{pmatrix}0 & -\phi & \theta\\ \phi & 0 & 0\\ -\theta & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがってユニタリー演算子は (2.4.3) と同様

$$\begin{aligned}U(1+\omega)=&1+\frac{i}{2}\omega_{ij}J^{ij}\\ =&1-i\theta J_2-i\phi J_3\quad(J_2=J^{31},J_3=J^{12})\end{aligned}$$

となり，有限変換にすると

$$U(R(\hat{\mathbf{p}}))=U(R_3(\phi))U(R_2(\theta))=\exp(-i\phi J_3)\exp(-i\theta J_2)$$

となる．ここで $0\le\theta\le\pi,0\le\phi\le 2\pi$ だ．(θ か ϕ を 2π ずらすと同じ $R(\hat{\mathbf{p}})$ の回転 $R_3(\phi+2\pi)R_2(\theta+2\pi)=R_3(\phi)R_2(\theta)$ が得られるが，整数・半整数スピン状態のどちらに作用するかによって $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$ の符号が変わってしまう．たとえば，$\theta=0$ としておいて $U(R(\hat{\mathbf{p}}))=\exp(-i\phi J_3)$ としたとき，σ が整数か半整数かのとき

$$\begin{aligned}U(R(\hat{\mathbf{p}}))\Psi_{k,\sigma}=&\exp(-i\phi\sigma)\Psi_{k,\sigma}\\ U(R(\hat{\mathbf{p}})(\phi+2\pi))\Psi_{k,\sigma}=&\exp(-i(\phi+2\pi)\sigma)\Psi_{k,\sigma}=(-1)^{2\sigma}\exp(-i\phi\sigma)\Psi_{k,\sigma}\end{aligned}$$

となり，整数のときは両者は等しいが半整数の場合は負符号がつくことになる．しかし $R(\hat{\mathbf{p}})=R(\hat{\mathbf{p}})(\phi+2\pi)$ であるから，R とともに θ,ϕ の範囲を与えると矛盾が生じる．したがって θ,ϕ の範囲は R ではなく $U(R)$ とともに設定する必要がある．(2.5.47) は回転によって 3 軸 $(0,0,1)$ を (2.5.46) の方向に回す変換で，たとえ他にそのような $R(\hat{\mathbf{p}})$ があったとしても，せいぜい最初の 3 軸周りの回転の違いしかない (これは 3 軸 (0,0,1) に対しては不変に保ち，$R'(\mathbf{p})=R_3(\phi)R_2(\phi)R_3(\phi')$ という変換もまた 3 軸を $\mathbf{p}$ にするからだ)．これは単に 1 粒子状態の位相の再定義にしかすぎない．つまり

$$U(R'(\mathbf{p}))\Psi_{k,\sigma}=U(R(\mathbf{p}))e^{-i\phi'\sigma}\Psi_{k,\sigma}$$

となるが，位相因子分しか違いはないので，位相を再定義すればどちらの回転が基準かは関係ない．

ヘリシティがローレンツ不変であることに注意しよう．実際 (2.5.42) より，あるヘリシティ σ の質量ゼロの粒子はすべての慣性系で (運動量を除いて) 不変に見えるのだ．実際，質量ゼロの粒子の異なるヘリシティ

状態 $\Psi_\sigma, \Psi_{\sigma'}$ は別の種類の粒子と考えてもよい．しかし，次の節でみるように，ヘリシティが反対の粒子は空間反転 (パリティ) 対称性で関係している．

$\Rightarrow$ 電磁的，重力的な相互作用はパリティ対称性をもつので，電磁的現象にともなうヘリシティ ± 1 の質量ゼロの粒子はともに光子と呼ばれる．また重力にともなうと考えられるヘリシティ ± 2 の質量ゼロの粒子はともに重力子と呼ばれる．一方，核子のベータ崩壊にともなって放出される質量ゼロ (厳密には違うが) ヘリシティ $\pm 1/2$ の粒子は (重力以外に) 空間反転について対称な相互作用を持たない．これらの粒子はそれぞれ異なる名前，つまりヘリシティが $-1/2$ はニュートリノ，ヘリシティ $+1/2$ は反ニュートリノを付けられている．

質量ゼロの粒子のヘリシティはローレンツ不変だが，「状態そのもの」はそうではない．特に (2.5.42) のヘリシティに依存する位相因子 $\exp(i\sigma\theta)$ のせいで，反対のヘリシティをもつ 1 粒子状態の線形結合で作られる状態は，ローレンツ変換のもとで異なる線形結合に変換される．たとえば，一般の 1 光子状態は以下のように書ける．(光子はヘリシティ ± 1 であるから)

$$\Psi_{p;\alpha} = \alpha_+ \Psi_{p,+1} + \alpha_- \Psi_{p,-1}$$

ただし，それぞれの状態が規格化されるように

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1$$

一般的な場合は $|\alpha_\pm|$ は両方ともゼロというわけではなく互いに異なり，楕円偏極と呼ばれる．線偏極は α_+ か α_- がゼロの場合で，その反対の極端な場合 $|\alpha_+| = |\alpha_-| (= 1/\sqrt{2})$ は円偏極と呼ばれる．(本書の用語はおそらく誤植で，反対だ．)

α_+ と α_- に共通の位相は状態の再定義で完全に取り除けるので物理的になんら重要ではない．そのため円偏極ではこの位相を調整して

$$\begin{aligned}
\alpha_+ =& |\alpha_+| e^{i\delta_1} \\
\alpha_- =& |\alpha_-| e^{i\delta_2} \\
\Psi'_{p;\alpha'} =& e^{i\theta}\Psi_{p;\alpha} = e^{i\theta}\alpha_+\Psi_{p,+1} + e^{i\theta}\alpha_-\Psi_{p,-1} \\
=& \alpha'_+\Psi_{p,+1} + \alpha'_-\Psi_{p,-1} \\
\alpha'_- =& |\alpha_-| e^{i(\delta_2+\theta)} = |\alpha_+| e^{i(\delta_1+\delta_2+2\theta)} e^{-i(\delta_1+\theta)} \qquad \because |\alpha_+| = |\alpha_-| \\
=& {\alpha'}^*_+ e^{i(\delta_1+\delta_2+2\theta)} \\
=& {\alpha'}^*_+ \quad (\delta_1 + \delta_2 + 2\theta = 2\pi n \text{ となるように} \theta \text{を選ぶ})
\end{aligned}$$

として $\alpha_- = \alpha_+^*$ とできる．しかし，依然として相対的な位相は重要だ．実際 $\alpha_- = \alpha_+^*$ の線形結合

$$\begin{aligned}
\Psi_{p;\alpha} =& \alpha_+\Psi_{p,+1} + \alpha_+^*\Psi_{p,-1} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\delta}\Psi_{p,+1} + e^{-i\delta}\Psi_{p,-1}\right]
\end{aligned}$$

では，α_+ の位相 δ は，$\mathbf{p}$ に垂直なある基準方向と偏極面との角度を意味する．(ランダウ「場の古典論」p130,(48.9) など参照．)(2.5.42) から，ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ のもとで，この角度は

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)\Psi_{p;\alpha} =& U(\Lambda)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\delta}\Psi_{p,+1} + e^{-i\delta}\Psi_{p,-1}\right] \\
=& \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{2p^0}}\left[e^{+i(\theta+\delta)}\Psi_{\Lambda p,+1} + e^{-i(\theta+\delta)}\Psi_{\Lambda p,-1}\right]
\end{aligned}$$

となり $\theta(\Lambda, p)$ だけ回転することがわかる．面偏極した重力子も同様に定義できて，このときは (2.5.42) から，ローレンツ変換 Λ が偏極面を角度 2θ だけ回転させることがわかる．

$$\Psi_{p,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\delta}\Psi_{p,+2} + e^{-i\delta}\Psi_{p,-2}\right]$$

$$U(\Lambda)\Psi_{p;\alpha} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{2p^0}}\left[e^{+i(2\theta+\delta)}\Psi_{\Lambda p,+2} + e^{-i(2\theta+\delta)}\Psi_{\Lambda p,-2}\right]$$

小群 $ISO(2) = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ はコンパクトではないから，そのユニタリー表現は必ず無限次元となる．しかし上で質量ゼロの有限次元ユニタリー表現が作ることができたのは，$\rho^2 = 0$ を手で課すことによって $ISO(2) = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ が部分群 $SO(2)$ へと縮約 (この縮約は 2.4 節でのイネヌ・ウィグナー縮約 (contraction) と同じ意味で，より小さい群になるということ) され，$SO(2)$ はコンパクトであるから有限次元ユニタリー表現が作ることができたということである．もちろん $\rho = 0$ の場合，昇降演算子 $T_{\pm}$ はゼロ演算子となってしまうから，ヘリシティはひとつの状態しか許されない．これがローレンツ変換により慣性系が変化しても光子などの質量ゼロ粒子のヘリシティが不変である理由である．

ちょっとした補足．ここで，Wigner による完全な 1 粒子表現の分類について説明しておく．実際はここで考えたものよりもっと色んな種類の状態が考えられ，それをリストアップしたものが本文中の表 2.1 である．完全に全ての表現を定量的にリストアップするためには，ポアンカレ代数のカシミア演算子についての説明が不可避となる．それをここで与えよう．

最初に，運動量演算子の二乗 $P_\mu P^\mu$ という演算子を考える．これはポアンカレ代数の全ての生成子と可換である．(まぁ直感的にそう．) 実際

$$\begin{aligned}
[P^\rho, P_\mu P^\mu] =&[P^\rho, P_\mu]P^\mu + P_\mu[P^\rho, P^\mu] = 0\\
[J^{\rho\sigma}, P_\mu P^\mu] =&[J^{\rho\sigma}, P^\mu]P_\mu + P_\mu[J^{\rho\sigma}, P^\mu]\\
=&(i\eta^{\mu\rho}P^\sigma - i\eta^{\mu\sigma}P^\rho)P_\mu + P_\mu(i\eta^{\mu\rho}P^\sigma - i\eta^{\mu\sigma}P^\rho)\\
=&iP^\sigma P^\rho - iP^\rho P^\sigma + iP^\rho P^\sigma - iP^\sigma P^\rho\\
=&0
\end{aligned}$$

となる．この演算子 $P^\mu P_\mu$ は質量演算子と呼ばれる．

次に

$$W^\mu := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu J_{\rho\sigma}$$

という演算子を考える (P と J の交換で出てくるものは完全反対称性により消えるので二つ目の等号が出てくる)．これは Pauli-Lubanski(擬) ベクトルと呼ばれる．ここで $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$ となる完全反対称テンソルだ．$J^{\mu\nu}, P^\mu$ がエルミート演算子だから，W^μ もエルミート演算子となる．

$$(W^\mu)^\dagger = \left(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma\right)^\dagger = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\sigma J_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma = W^\mu$$

これの各成分を見てみると

$$\begin{aligned}
W^0 =&\frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}J_{ij}P_k\\
=&\mathbf{J}\cdot\mathbf{P} \quad \because \epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk}, \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J_{jk} = J_i\\
W^i =&\frac{1}{2}\epsilon^{i\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma\\
=&\frac{1}{2}\epsilon^{i0jk}J_{0j}P_k + \frac{1}{2}\epsilon^{ij0k}J_{j0}P_k + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk0}J_{jk}P_0\\
=&+P^0 J_i + \epsilon^{ijk}K_j P_k\\
=&+J_i P^0 + (\mathbf{K}\times\mathbf{P})_i
\end{aligned}$$

となる．これがどのような物理量と対応するかは後で見る．次にこのベクトルの性質を見てみる．完全反対称性により

$$P_\mu W^\mu = W^\mu P_\mu = 0$$

を満たす．これ自身は全ての成分がポアンカレ代数の生成子と可換なものとなっているわけではないが，それぞれの交換関係を見てみると，まず P^μ との交換関係については

$$\begin{aligned}
[P^\alpha, W^\mu] =&\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[P^\alpha, J_{\nu\rho}P_\sigma]\\
=&\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[P^\alpha, J_{\nu\rho}]P_\sigma\\
=&\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(-i\delta^\alpha_\nu P_\rho + i\delta^\alpha_\rho P_\nu)P_\sigma\\
=&-i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\rho\sigma}P_\rho P_\sigma + i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}P_\nu P_\sigma\\
=&0 \quad \because \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\text{の完全反対称性と } P^\mu\text{同士の可換性}
\end{aligned}$$

となり，また $J^{\mu\nu}$ については

$$\begin{aligned}
0 =&[J^{\alpha\beta}, P_\mu W^\mu] \\
=&[J^{\alpha\beta}, P_\mu]W^\mu + P_\mu[J^{\alpha\beta}, W^\mu] \\
=&(i\delta^\alpha_\mu P^\beta - i\delta^\beta_\mu P^\alpha)W^\mu + P_\mu[J^{\alpha\beta}, W^\mu] \\
=&P_\mu(i\eta^{\beta\mu}W^\alpha - i\eta^{\alpha\mu}W^\beta + [J^{\alpha\beta}, W^\mu]) \\
\therefore \quad [J^{\alpha\beta}, W^\mu] =&i\eta^{\alpha\mu}W^\beta - i\eta^{\beta\mu}W^\alpha
\end{aligned}$$

となる．(同値性が怪しいところだが，直接計算するとうまくいかない．というのも

$$\begin{aligned}
[J^{\alpha\beta}, W^\mu] =&\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[J^{\alpha\beta}, J_{\nu\rho}P_\sigma] \\
=&\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[J^{\alpha\beta}, J_{\nu\rho}]P_\sigma + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}[J^{\alpha\beta}, P_\sigma] \\
=&\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(-i\delta^\beta_\nu J^\alpha{}_\rho + i\delta^\alpha_\nu J^\beta{}_\rho + i\delta^\alpha_\rho J_\nu{}^\beta - i\delta^\beta_\rho J_\nu{}^\alpha)P_\sigma \\
&+ \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}(i\delta^\alpha_\sigma P^\beta - i\delta^\beta_\sigma P^\alpha) \\
=&-i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\beta\rho\sigma}J^\alpha{}_\rho P_\sigma + i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\rho\sigma}J^\beta{}_\rho P_\sigma + i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}J_\nu{}^\beta P_\sigma - i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\beta\sigma}J_\nu{}^\alpha P_\sigma \\
&+ i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}J_{\nu\rho}P^\beta - i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\beta}J_{\nu\sigma}P^\alpha \\
=&-i\epsilon^{\mu\beta\rho\sigma}J^\alpha{}_\rho P_\sigma + i\epsilon^{\mu\alpha\rho\sigma}J^\beta{}_\rho P_\sigma \\
&+ i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}J_{\nu\rho}P^\beta - i\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\beta}J_{\nu\sigma}P^\alpha
\end{aligned}$$

となるから，そのままでは W が出てこない．ただし α, β, μ に具体的な $0, 1, 2, 3$ の値を入れてみれば同じ結果になることがわかる．詳細な途中計算は省くが

$$\begin{aligned}
[J^{0i}, W^j] =&+i\epsilon^{j0kl}J_{ik}P_l + \frac{1}{2}i\epsilon^{jkl0}J_{kl}P^i \\
[J^{01}, W^2] =&0 \\
=&i\eta^{01}W^2 - i\eta^{12}W^0 \\
[J^{01}, W^1] =&-i(J_{23}P_1 + J_{31}P_2 + J_{12}P_2) \\
=&-iW^0 \\
=&i\eta^{01}W^1 - i\eta^{11}W^0
\end{aligned}$$

となる．全成分計算すれば実際に上の交換関係が正しいことがわかると思う．そこまではやりたくないけど．) この交換関係を見ると，W^μ はポアンカレ代数の生成子 $P^\mu, J^{\mu\nu}$ とはまるで P^μ と同じ交換関係を満たすことがわかる ((2.4.13) 参照)．したがって $W^\mu W_\mu$ は $P^\mu P_\mu$ と同様，ポアンカレ代数の生成子とは可換であることが推測できる．実際

$$\begin{aligned}
[P^\alpha, W^\mu W_\mu] =&[P^\alpha, W^\mu]W_\mu + W_\mu[P^\alpha, W^\mu] \\
=&0 \\
[J^{\alpha\beta}, W^\mu W_\mu] =&[J^{\alpha\beta}, W^\mu]W_\mu + W_\mu[J^{\alpha\beta}, W^\mu] \\
=&(i\eta^{\mu\alpha}W^\beta - i\eta^{\mu\beta}W^\alpha)W_\mu + W_\mu(i\eta^{\mu\alpha}W^\beta - i\eta^{\mu\beta}W^\alpha) \\
=&iW^\beta W^\alpha - iW^\alpha W^\beta + iW^\alpha W^\beta - iW^\beta W^\alpha \\
=&0
\end{aligned}$$

となって可換である．あと W^μ 同士の交換関係は

$$\begin{aligned}
[W^\alpha, W^\mu] =&\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[W^\alpha, J_{\nu\rho}P_\sigma] \\
=&\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[W^\alpha, J_{\nu\rho}]P_\sigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(-i\delta^{\alpha}_{\nu}W_{\rho}+i\delta^{\alpha}_{\rho}W_{\nu})P_{\sigma}\\
&=-\frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\alpha\rho\sigma}W_{\rho}P_{\sigma}+\frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}W_{\nu}P_{\sigma}\\
&=i\epsilon^{\alpha\mu\rho\sigma}W_{\rho}P_{\sigma}
\end{aligned}
$$

となる．

以上から，$C_1 := P^\mu P_\mu, C_2 := W^\mu W_\mu$ はポアンカレ代数の生成子と可換なものであり，これらを 2 次のカシミア演算子，4 次のカシミア演算子と呼ぶ．当然これら二つと可換なものとして，運動量演算子 P^μ がある．加えて，W^μ もこれらと可換である．($[P^\alpha, W^\mu] = 0$ かつ $P^\mu P_\mu, W^\mu W_\mu$ が全ての生成子と可換なことから自明だ．) 以上より，

$$
\{P^\mu P_\mu, W^\mu W_\mu, P^\mu, W^3\}
$$

は互いに可換な演算子の組となり，それらには同時固有状態が存在する．(W^μ 同士の交換関係はゼロではないから，W^μ のうち 1 つの成分のみを選ぶ必要がある．) それを $\Psi_{m,\rho;p,w}$ と書き，それはこれらの演算子に対する固有値が $\{m^2, \rho^2, p^\mu, w\}$ となる固有状態

$$
\begin{aligned}
P^\mu P_\mu \Psi_{m,\rho;p,w} =& -m^2\Psi_{m,\rho;p,w}\\
W^\mu W_\mu \Psi_{m,\rho;p,w} =& \rho^2\Psi_{m,\rho;p,w}\\
P^\mu \Psi_{m,\rho;p,w} =& p^\mu\Psi_{m,\rho;p,w}\\
W^3 \Psi_{m,\rho;p,w} =& w\Psi_{m,\rho;p,w}
\end{aligned}
$$

となっている．m^2 と ρ^2 はどちらも質量次元 2 のパラメータである．これらの固有値および固有状態を分類することにより粒子の分類が完了する．$P^\mu P_\mu, W^\mu W_\mu$ はどちらもポアンカレ変換のもとで不変な演算子

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda, a)P^\mu P_\mu U(\Lambda, a)^{-1} =& P^\mu P_\mu\\
U(\Lambda, a)W^\mu W_\mu U(\Lambda, a)^{-1} =& W^\mu W_\mu
\end{aligned}
$$

となっている (ポアンカレ代数の生成子と可換だから明らか) から，その固有値 $-m^2, \rho^2$ は全ての慣性系で共通の固有値となっている．しかし P^μ, W^3 は不変ではないから，その固有値は慣性系によって変化する[*10]．

適当な慣性系をとることにより，有質量の場合は $k^\mu = (0, 0, 0, m)$ とでき，質量ゼロの場合は $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ とできる．有質量の場合，W^μ の値は

$$
w^0 = 0, \quad w^i = mJ^i
$$

となる．よって w^i/m は角運動量ベクトルであり，$w = w^3$ はスピンの 3 軸成分を表す．さらに $W^\mu W_\mu$ の値は

$$
\rho^2 := w^\mu w_\mu = m^2\mathbf{J}^2 = m^2 j(j+1)
$$

となる．質量ゼロの場合，

$$
\begin{aligned}
w^0 =& w^3 = \kappa J_3\\
w^1 =& \kappa(J_1 + K_2) = -\kappa B\\
w^2 =& \kappa(J_2 - K_1) = \kappa A
\end{aligned}
$$

となる．よって $w^0/\kappa = w^3/\kappa$ はヘリシティを表す．$\epsilon_1 := (1, 0, 0, 0) = \mathbf{e}_1, \epsilon_2 := (0, 1, 0, 0) = \mathbf{e}_2$ とを用いるとこれは

$$
w^\mu = k^\mu J_3 - \epsilon_1^\mu \kappa B + \epsilon_2^\mu \kappa A
$$

[*10] ローレンツ添え字の足がつぶれていればいいわけではない．ローレンツ代数だけでなく並進も含めたポアンカレ代数であるから，例えば $J^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$ や $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\mu\nu}J_{\rho\sigma}$ などはカシミア演算子にならない．

とも書ける．さらにカシミア演算子 $W^\mu W_\mu$ の値は

$$\begin{aligned}\rho^2 := w^\mu w_\mu =& \kappa^2(A^2+B^2)\\ =& \kappa^2(A+iB)(A-iB) = \kappa^2 T_+ T_-\end{aligned}$$

となる．すなわち質量ゼロ粒子についても，一般には質量的パラメータ ρ^2 が存在し，それがゼロとなるか正の値となるかによって有限次元表現か無限次元表現かに分かれる．質量ゼロの場合，$[A,B]=0$ であるから w^3 の固有状態ととらずに w^1, w^2 の固有状態をとることも可能になる．どちらをとるかによって表現の形が変化する．

これ以外にも，エネルギーが正か負か，質量が虚数のタキオン状態など，物理的でない状態も許せば様々な表現が存在する．それらも勘定すると，次のようにポアンカレ代数の表現が分類される．

1.Massive & Positive-Energy Representation

これは $P^\mu P_\mu$ の固有値である質量 m が非ゼロの値をとり，さらに P^0 の固有値 $E=p^0$ が正の値をとる場合である．運動量 p^μ が基準運動量 $k^\mu=(0,0,0,m)$ となる慣性系に移動することにより，質量は正であることがわかる．小群は $SO(3)$ となり，スピン $j=0,1/2,1,3/2,\cdots$ とスピンの 3 軸成分 $\sigma=\{-j,-j+1,\cdots,j-1,j\}$ でラベル付けされた $2j+1$ 個の基底がなす $2j+1$ 次元既約表現をなすことがわかるのだった．したがってそのような表現は，それぞれの固有値が

$$\begin{aligned}P^\mu P_\mu :& m^2>0\\ W^\mu W_\mu :& \rho^2=m^2 j(j+1)\\ P^\mu :& p^2+m^2=0,\quad p^0>0\\ W^3 :& w/m\in\{-j,-j+1,\cdots,j-1,j\}\end{aligned}$$

となる．ここで $j(j+1)$ は演算子 $\mathbf{J}^2$ の固有値であり，σ は演算子 J_3 の固有値となる．W^μ はこの表現では $w^0=0, w^i=mJ_i$ として作用する．一つの表現につき，j の値は $0,1/2,1,\cdots$ のうち一つである．

2.Massive & Negative-Energy Representation

これは上の表現とほぼ同じだが，p^0 が負の値をとる表現である．つまり質量が負の値 $-m<0$ となる．このときの基準運動量も $k^\mu=(0,0,0,-m)$ であり，小群は $SO(3)$，固有値もほぼ変わらず

$$\begin{aligned}P^\mu P_\mu :& m^2>0\\ W^\mu W_\mu :& \rho^2=m^2 j(j+1)\\ P^\mu :& p^2+m^2=0,\quad p^0<0\\ W^3 :& w/m\in\{-j,-j+1,\cdots,j-1,j\}\end{aligned}$$

となる．ひとつの表現につき，j の値は $0,1/2,1,\cdots$ のうち一つである．

3.Massless & Positive-Energy & Finite-Spin Representation

これは，$m^2=0$ かつ $\rho^2=0$ となることで前に示した通り，A,B の作用が自明となり有限次元表現となる場合である．かつ正エネルギーであるから，物理的な場合である．基準運動量が $k^\mu=(0,0,\kappa,\kappa)$ となる慣性系に移れば，固有値は

$$\begin{aligned}P^\mu P_\mu :& m^2>0\\ W^\mu W_\mu :& \rho^2=0\\ P^\mu :& p^2=0,\quad p^0>0\\ W^3 :& w/\kappa=h\end{aligned}$$

この場合，一つの表現につき，ヘリシティ h は $0, \pm 1/2, \pm 1, \cdots$ のうち一つである．$\rho^2 = 0$ により昇降演算子が存在しないため，この場合ヘリシティは各表現につき一つだけである．

4.Massless & Negative-Energy & Finite-Spin Representation

上と同様だが，エネルギーが負であることだけが違う．基準運動量は $k^\mu = (0, 0, \kappa, -\kappa)$ となる．固有値は

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu :& m^2 > 0 \\ W^\mu W_\mu :& \rho^2 = 0 \\ P^\mu :& p^2 = 0, \quad p^0 < 0 \\ W^3 :& w/\kappa = h \end{aligned}$$

となる．こちらも一つの表現につき，ヘリシティ h は $0, \pm 1/2, \pm 1, \cdots$ のうち一つである．

5.Massless & Positive-Energy & Infinite-Spin Representation

$\rho^2 > 0$ となり，全ての生成子が非自明な作用をする．この場合は実は無限次元の表現となることを見る．基準運動量は再び $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ であり，固有値は

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu :& m^2 > 0 \\ W^\mu W_\mu :& \rho^2 > 0 \\ P^\mu :& p^2 = 0, \quad p^0 > 0 \\ W^3 :& w/\kappa = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \mathrm{or} \{\pm 1/2, \pm 3/2, \cdots\} \end{aligned}$$

となる．$\rho^2 > 0$ であるから $T_\pm := A \pm iB$ が昇降演算子として働き，一つの表現につきヘリシティは $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ の全て，もしくは $\pm 1/2, \pm 3/2, \cdots$ の全てをとる．この場合を CSP 表現などという．以下でこれを具体的に構成してみよう．

前より少し詳しく小群のもとでの変換性を見る．簡単のため無次元化させた $\rho' := \rho/\kappa$ を，プライムを落として新しく ρ として $\rho^2 = A^2 + B^2$ とする．前に述べたように $[A, B] = 0$ であるから W^3 ではなく A, B の固有状態をとることもできる[*11]．したがってその固有値を $(\rho \cos\theta, -\rho \sin\theta)$ とすれば対応する固有状態は Ψ_k^θ となり (ちゃんと書くと $\Psi_{m=0,\rho;k}^\theta$ だが，$m = 0$ と ρ の値はどの慣性系でも共通だから，固定されているとして添え字を省略する)

$$\begin{aligned} A\Psi_k^\theta =& \rho \cos\theta \Psi_k^\theta \\ B\Psi_k^\theta =& -\rho \sin\theta \Psi_k^\theta \end{aligned}$$

という作用をする．(負符号は $U[R(\theta)]$ の作用が減法ではなく加法的に作用するように選んだ．) さらに

$$\begin{aligned} U[R(\theta)] =& \exp(i\theta J_3) \\ U[R(\theta)] A U^{-1}[R(\theta)] =& A \cos\theta - B \sin\theta \\ U[R(\theta)] B U^{-1}[R(\theta)] =& A \sin\theta + B \cos\theta \end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned} AU[R(\theta)]\Psi_k^\phi =& (\rho \cos\phi \cos\theta - \rho \sin\phi \sin\theta) U^{-1}[R(\theta)]\Psi_k^\phi \\ =& \rho \cos(\theta + \phi) U[R(\theta)]\Psi_k^\theta \\ BU[R(\theta)]\Psi_{\rho;k}^\phi =& (\rho \cos\phi \sin\theta + \rho \sin\phi \cos\theta) U[R(\theta)]\Psi_k^\phi \\ =& -\rho \sin(\theta + \phi) U[R(\theta)]\Psi_k^\theta \end{aligned}$$

[*11] W^3 の固有状態ととれば spin 基底と呼ばれる整数または半整数によりラベル付けされた基底になり，A, B の同時固有状態をとると angle 基底と呼ばれる角度 $(0, 2\pi]$ によってラベル付けされた基底が得られる．ここでは後者を調べ，後に両者の関係も調べる．

$$\therefore \quad U[R(\theta)]\Psi_k^\phi = \Psi_k^{\theta+\phi}$$

となる．J_3 の Ψ_k^θ への作用は，ϕ を微小量とすることにより

$$\begin{aligned}
\Psi_k^{\phi+\theta} &= \Psi_k^\phi + \theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Psi_k^\phi \\
= U[R(\theta)]\Psi_k^\phi &= (1+i\theta J_3)\Psi_k^\phi \\
J_3\Psi_k^\theta &= -i\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_k^\theta
\end{aligned}$$

と書けて，したがって微分演算子として作用することがわかる．以上の表現は実際に，

$$\begin{aligned}
[J_3, A]\Psi_k^\theta &= J_3A\Psi_k^\theta - AJ_3\Psi_k^\theta \\
&= \rho\cos\theta J_3\Psi_k^\theta + i\frac{\partial}{\partial\theta}(A\Psi_k^\theta) \\
&= -i\rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_k^\theta + i\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\cos\theta)\Psi_k^\theta \\
&= -i\rho\sin\theta\Psi_k^\theta \\
&= iB\Psi_k^\theta \\
[J_3, B]\Psi_k^\theta &= J_3B\Psi_k^\theta - BJ_3\Psi_k^\theta \\
&= -\rho\sin\theta J_3\Psi_k^\theta + i\frac{\partial}{\partial\theta}(B\Psi_k^\theta) \\
&= +i\rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_k^\theta - i\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin\theta)\Psi_k^\theta \\
&= -i\rho\cos\theta\Psi_k^\theta \\
&= -iA\Psi_k^\theta \\
[A, B]\Psi_k^\theta &= AB\Psi_k^\theta - BA\Psi_k^\theta \\
&= \rho^2\sin\theta\cos\theta\Psi_k^\theta - \rho^2\sin\theta\cos\theta\Psi_k^\theta \\
&= 0\cdot\Psi_k^\theta
\end{aligned}$$

となって交換関係と矛盾しない．さらに小群のユニタリー演算子は

$$U(W) = \exp(i\alpha A + i\beta B)\exp(i\theta J_3)$$

であったから，これは Ψ_k^ϕ に対して

$$\begin{aligned}
U[W(\theta,\alpha,\beta)]\Psi_k^\phi &= \exp(i\rho\alpha\cos(\theta+\phi) + i\rho\beta\sin(\theta+\phi))\Psi_k^{\theta+\phi} \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{2\pi}D_{\phi'\phi}[\theta,\alpha,\beta]\Psi_k^{\phi'} \\
D_{\phi'\phi}[\theta,\alpha,\beta] &:= (2\pi)\delta(\phi'-\phi-\theta)\exp(i\rho\alpha\cos\phi' + i\rho\beta\sin\phi')
\end{aligned}$$

と作用する．これは明らかに連続表現として変換している．さらに

$$\begin{aligned}
\Big(D[\theta,\alpha,\beta]^\dagger D[\theta,\alpha,\beta]\Big)_{\phi'\phi} &= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi''}{2\pi}D_{\phi''\phi}[\theta,\alpha,\beta]^* D_{\phi''\phi'}[\theta,\alpha,\beta] \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi''}{2\pi}(2\pi)\delta(\phi''-\phi-\theta)\exp(-i\rho\alpha\cos\phi'' - i\rho\beta\sin\phi'') \\
&\qquad\times(2\pi)\delta(\phi''-\phi'-\theta)\exp(i\rho\alpha\cos\phi'' + i\rho\beta\sin\phi'') \\
&= (2\pi)\delta(\phi'-\phi)
\end{aligned}$$

であるから，Ψ_k^ϕ がユニタリー表現として変換されることもわかる．実際

$$\left(\int_0^{2\pi}\frac{d\phi'''}{2\pi}D_{\phi'''\phi'}[\theta,\alpha,\beta]\Psi_{k'}^{\phi'''}, \int_0^{2\pi}\frac{d\phi''}{2\pi}D_{\phi''\phi}[\theta,\alpha,\beta]\Psi_k^{\phi''}\right)$$

$$
\begin{aligned}
=&\int_0^{2\pi}\frac{d\phi''}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi'''}{2\pi}D_{\phi'''\phi'}[\theta,\alpha,\beta]^*D_{\phi''\phi}[\theta,\alpha,\beta](\Psi_{k'}^{\phi'''},\Psi_k^{\phi''})\\
=&\delta^3(k'-k)\int_0^{2\pi}\frac{d\phi''}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi'''}{2\pi}D_{\phi'''\phi'}[\theta,\alpha,\beta]^*D_{\phi''\phi}[\theta,\alpha,\beta](2\pi)\delta(\phi'''-\phi'')\\
=&\delta^3(k'-k)\int_0^{2\pi}\frac{d\phi''}{2\pi}D_{\phi'\phi''}[\theta,\alpha,\beta]^\dagger D_{\phi''\phi}[\theta,\alpha,\beta]\\
=&\delta^3(k'-k)\Big(D[\theta,\alpha,\beta]^\dagger D[\theta,\alpha,\beta]\Big)_{\phi'\phi}\\
=&\delta^3(k'-k)2\pi\delta(\phi'-\phi)=(\Psi_{k'}^{\phi'},\Psi_k^{\phi})
\end{aligned}
$$

となる．ここで正規直交化条件

$$(\Psi_{k'}^{\phi'},\Psi_k^{\phi})=\delta^3(k'-k)2\pi\delta(\phi'-\phi)$$

を用いた．(まぁユニタリー演算子 $U(W)$ から作られたのだからユニタリー性は当然っちゃ当然なのだが…) このようにして angle 基底 $\{\Psi_k^\theta\}_{\theta\in(0,2\pi]}$ が得られる．これは $ISO(2)$ の無限次元ユニタリー表現を構成する．

A, B を対角化するのではなく，J_3 を対角化する基底である spin 基底を得る．ここでトポロジー的な理由により，3 軸周りでの回転は 4π 回転で必ず元の状態に戻るという (2.7 節で示す) ローレンツ群の 2 重連結性が要請する．つまり，angle 基底はローレンツ群の 1 価表現であり

$$\Psi_k^0=\Psi_k^{2\pi}$$

であるか，あるいは

$$\Psi_k^0=-\Psi_k^{2\pi}$$

と (4π 回転で元に戻るように) ローレンツ群の 2 価表現であるかのどちらかである．まず前者の，ローレンツ群の 1 価表現 $\Psi_k^{2\pi}=+\Psi_k^0$ について考える．これは θ について周期 2π の周期関数とみなすことができるから，整数 n によってフーリエ級数展開

$$\Psi_k^\theta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi_k^n e^{in\theta}$$

ができる．係数 Ψ_k^n は

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}e^{-in'\theta}\Psi_k^\theta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi_k^n\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}e^{i(n-n')\theta}=\Psi_k^{n'}$$

で得られる．ここで $n=n'$ ならば

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}e^{i(n-n')\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}=1$$

であり，$n\neq n'$ ならば $n-n'\in\mathbb{Z}-\{0\}$ より

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}e^{i(n-n')\theta}=\left[\frac{e^{i(n-n')\theta}}{i(n-n')}\right]_0^{2\pi}=0$$

となるから

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}e^{i(n-n')\theta}=\delta_{nn'}$$

であることを用いた．後者のローレンツ群の 2 価表現 $\Psi_k^{2\pi}=-\Psi_k^0$ についても考える．これは周期 2π の周期関数にはなっていないが，$e^{i\theta/2}\Psi_k^\theta$ は周期関数になっていることがすぐにわかる．実際 $\theta=2\pi$ を代入すると

$$e^{i\pi}\Psi_k^{2\pi}=(-1)(-\Psi_k^0)=\Psi_k^0=e^{i0/2}\Psi_k^0$$

となり周期性が確かめられる．したがってこちらは整数 n でフーリエ級数展開

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta/2}\Psi_k^\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_k^{n-\frac{1}{2}} e^{in\theta} \\
\therefore \quad \Psi_k^\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_k^{n-\frac{1}{2}} e^{i(n-\frac{1}{2})\theta}
\end{aligned}
$$

ができる．係数 $\Psi_k^{n-\frac{1}{2}}$ は再び

$$
\begin{aligned}
\Psi_k^{n-\frac{1}{2}} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-in\theta} e^{i\theta/2} \Psi_k^\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i(n-\frac{1}{2})\theta} \Psi_k^\theta
\end{aligned}
$$

となる．簡単のため，和の n を半整数 $\pm 1/2, \pm 3/2, \cdots$ をとるように約束すれば，こちらも同様の形

$$
\Psi_k^\theta = \sum_{n=\mathbb{Z}+1/2} \Psi_k^n e^{in\theta}
$$

で書ける．したがって spin 基底を，このフーリエ変換によって

$$
\Psi_k^n := \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-in\phi} \Psi_k^\phi
$$

として得る．n は以上の議論より，ローレンツ群の 1 価表現に対しては整数をとり，2 価表現に対しては半整数をとる．これに J_3 を作用させると

$$
\begin{aligned}
J_3 \Psi_k^n &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-in\phi} J_3 \Psi_k^\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-in\phi} \left(-i\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \Psi_k^\phi \\
&= [e^{-in\phi}\Psi_k^\phi]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \left(-i\frac{\partial}{\partial\phi} e^{-in\phi}\right) \Psi_k^\phi \\
&= e^{-i2\pi n}\Phi_k^{2\pi} - \Psi_k^0 + n\Psi_k^n
\end{aligned}
$$

となる．第一項目と第二項目は Ψ_k^θ が 1 価と 2 価の表現のどちらの場合でも，それぞれ対応して n が整数と半整数をとることに留意すればいずれの場合も打ち消しあうことがわかる．この結果

$$
J_3 \Psi_k^n = n\Psi_k^n
$$

となり，Ψ_k^n は J_3 の固有状態となる．そしてその固有値である n はヘリシティである．この状態に $T_\pm = A \pm iB$ を作用させることを考えると，これは昇降演算子

$$
\begin{aligned}
[J_3, T_\pm] &= [J_3, A] \pm i[J_3, B] = iB \pm A = \pm T_\pm \\
J_3 T_\pm \Psi_k^n &= (n \pm 1) T_\pm \Psi_k^n \\
\therefore T_\pm \Psi_k^n &\propto \Psi_k^{n\pm 1}
\end{aligned}
$$

である．よって $T_\pm$ でヘリシティ n を 1 ずつ上げ下げすることができる．もちろんあらわに書けば

$$
\begin{aligned}
T_\pm \Psi_k^n &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-in\phi} (A \pm iB) \Psi_k^\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-in\phi} (\rho \cos i\phi \mp \rho i \sin\phi) \Psi_k^\phi \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-i(n\pm 1)\phi} \Psi_k^\phi
\end{aligned}
$$

$$=\rho\Psi_k^{n\pm1}$$

となる．量子力学で $SO(3)$ の表現を調べたときのように，直感的には n に上限 j と下限 $-j$ が存在すると予想するかもしれない．しかし，n の最大・最小値が有限であることが $SO(3)$ で得られたのは本質的にはカシミア演算子 $\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ の中に J_3 が入っていたからであり，今回のカシミア演算子 $W^\mu W_\mu = \kappa^2(A^2+B^2)$ の中に J_3 は入っていない．つまりこの J_3 の固有値は $T_\pm$ で無限に上げ下げすることができてしまい，上限や下限は存在しない．以上より spin 基底は無限個 $\{\Psi_k^n\}_{n\in\mathbb{Z}\,\mathrm{or}\,\mathbb{Z}+1/2}$ 存在する．よって $ISO(2)$ の無限次元ユニタリー表現をなし，ヘリシティ n は一つの表現につき $n=0,\pm1,\pm2\cdots$ の全て，あるいは $n=\pm1/2,\pm3/2,\cdots$ の全てをとる．この表現に対する $U(W)$ の作用は

$$\begin{aligned}
U(W[\theta,\alpha,\beta])\Psi_k^n &= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{2\pi}e^{-in\phi}U(W[\theta,\alpha,\beta])\Psi_k^\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{2\pi}e^{-in\phi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{2\pi}D_{\phi'\phi}[\theta,\alpha,\beta]\Psi_k^{\phi'} \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{2\pi}e^{-in\phi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{2\pi}D_{\phi'\phi}[\theta,\alpha,\beta]\sum_{n'}e^{in'\phi'}\Psi_k^{n'} \\
&= \sum_{n'}\left(\int_0^{2\pi}\frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2}e^{in'\phi'}D_{\phi'\phi}[\theta,\alpha,\beta]e^{-in\phi}\right)\Psi_k^{n'} \\
&= \sum_{n'}D_{n'n}[\theta,\alpha,\beta]\Psi_k^{n'}
\end{aligned}$$

となる．ここで行列 $D_{n'n}[\theta,\alpha,\beta]$ を調べよう．これは元々の $D_{\phi'\phi}[\theta,\alpha,\beta]$ を代入することで

$$\begin{aligned}
D_{n'n}[\theta,\alpha,\beta] &:= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2}e^{in'\phi'}D_{\phi'\phi}[\theta,\alpha,\beta]e^{-in\phi} \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2}e^{in'\phi'}(2\pi)\delta(\phi'-\phi-\theta)\exp(i\rho\alpha\cos\phi'+i\rho\beta\sin\phi')e^{-in\phi} \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{2\pi}e^{in'\phi'}\exp(i\rho\alpha\cos\phi'+i\rho\beta\sin\phi')e^{-in(\phi'-\theta)}
\end{aligned}$$

と書けて，さらに $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \varphi=\tan^{-1}(\beta/\alpha)$ とおけば指数部分で三角関数の合成ができて

$$i\rho\alpha\cos\phi'+i\rho\beta\sin\phi' = i\rho R\cos(\phi'-\varphi)$$

と書ける．さらにここでベッセル関数の母関数の公式

$$\begin{aligned}
e^{\frac{z}{2}(\omega-\frac{1}{\omega})} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(z)\omega^n \\
\therefore\quad e^{iz\cos\theta} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}i^m J_m(z)e^{im\theta}
\end{aligned}$$

を使うと

$$e^{i\rho R\cos\left(\phi'-\varphi\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}i^m J_m(\rho R)e^{im(\phi'-\varphi)}$$

と書くことができるから

$$\begin{aligned}
D_{n'n}[\theta,\alpha,\beta] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{2\pi}e^{in'\phi'}i^m J_m(\rho R)e^{im(\phi'-\varphi)}e^{-in(\phi'-\theta)} \\
&= e^{in\theta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^m e^{-im\varphi}J_m(\rho R)\int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{2\pi}e^{i(n'-n+m)\phi'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&e^{in\theta}\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\varphi} J_m(\rho R)\delta_{n-n',m} \\
=&e^{in\theta}(ie^{-i\varphi})^{n-n'} J_{n-n'}(\rho R) = e^{in\theta}(ie^{i\varphi})^{n'-n} J_{n'-n}(\rho R)
\end{aligned}
$$

最後の変形はベッセル関数の性質 $J_{-k}(z) = (-1)^k J_k(z)$ と $-i = i^{-1}$ を用いた．(添え字の順番を合わせたかっただけ．) したがって，小群は spin 基底に対してベッセル関数 $J_{n'-n}(\rho R)$ として作用する．さて，$\rho \to 0$ の極限をとろう．ベッセル関数は

$$
J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}
$$

と級数展開できることを思い出すと，$J_{n'-n}(\rho R)$ は $n' - n = 0$ のとき $J_{n'-n} = 1$ を与え，そうでなければ $J_{n'-n} = 0$ を与える．したがって極限 $\rho \to 0$ は $J_{n'-n} \to \delta_{n'n}$ と書ける．したがって，$ISO(2)$ を $SO(2)$ に縮約 (contraction) する極限 $\rho \to 0$ で

$$
D_{n'n}[\theta, \alpha, \beta] \to e^{in\theta}\delta_{n'n}
$$

となる．これは質量ゼロ有限次元表現における小群のユニタリー表現 (本文 p101 参照) に他ならない！すなわち，spin 基底にて $\rho \to 0$ の極限をとることによってベッセル関数の性質からちゃんと通常の有限次元表現が回復する．

最後に，spin 基底のユニタリー性および直交関係を考えて終わりとする．行列 $D_{n'n}[\theta, \alpha, \beta]$ は

$$
\begin{aligned}
(D^\dagger D)_{n'n} =& \sum_m D^*_{mn'} D_{mn} \\
=& \sum_m \int_0^{2\pi} \frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2} e^{-im\phi'} D_{\phi'\phi} e^{+in'\phi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\theta'}{(2\pi)^2} e^{im\theta'} D^*_{\theta'\theta} e^{-in\theta} \\
=& \int_0^{2\pi} \frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\theta'}{(2\pi)^2} D^*_{\phi'\phi} D_{\theta'\theta} e^{+in'\phi} e^{-in\theta} \sum_m e^{im(\theta'-\phi')} \\
=& \int_0^{2\pi} \frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\theta'}{(2\pi)^2} D^*_{\phi'\phi} D_{\theta'\theta} e^{+in'\phi} e^{-in\theta} (2\pi)\delta(\theta' - \phi') \\
=& \int_0^{2\pi} \frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} D^\dagger_{\phi\phi'} D_{\phi'\theta} e^{+in'\phi} e^{-in\theta} \\
=& \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (D^\dagger D)_{\phi\theta} e^{+in'\phi} e^{-in\theta} \\
=& \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (2\pi)\delta(\phi - \theta) e^{+in'\phi} e^{-in\theta} \\
=& \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{+i(n'-n)\phi} \\
=& \delta_{n'n}
\end{aligned}
$$

であるからユニタリー行列である．したがって spin 基底を

$$
(\Psi^{n'}_{k'}, \Psi^n_k) = \delta^3(k' - k)\delta_{n'n}
$$

と正規直交化すれば，これもまたユニタリー表現をなす．

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{m'} D_{m'n'}\Psi^{m'}_{k'}, \sum_m D_{mn}\Psi^m_k\right) =& \sum_{m'm} D^*_{m'n'} D_{mn} (\Psi^{m'}_{k'}, \Psi^m_k) \\
=& \sum_{m'm} D^\dagger_{n'm'} D_{mn} \delta^3(k' - k)\delta_{m'm} \\
=& \delta^3(k' - k)(D^\dagger D)_{n'n} \\
=& \delta^3(k' - k)\delta_{n'n} = (\Psi^{n'}_{k'}, \Psi^n_k)
\end{aligned}
$$

このように構成した表現は $ISO(2)$ の無限次元ユニタリー表現に従い，連続スピン表現 (Continuous Spin Representation,CSR) などと呼ばれる．

流石にこれ以上はうまく説明できなかったのでもっと詳しくは Philip Schuster らによる 2013 年の「On the Theory of Continuous-Spin Particles: Wavefunctions and Soft-Factor Scattering Amplitudes」を参照のこと．多分ワインバーグからこの論文へ，以上の説明で滑らかに接続できたと思う．

6.Massless & Negative-Energy & Infinite-Spin Representation

上の場合と同様だが，エネルギーの符号だけが異なる．基準運動量は $k^\mu = (0, 0, \kappa, -\kappa)$ であり，それぞれの固有値は

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu :& m^2 > 0 \\ W^\mu W_\mu :& \rho^2 > 0 \\ P^\mu :& p^2 = 0, \quad p^0 < 0 \\ W^3 :& w/\kappa = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \mathrm{or} \{\pm 1/2, \pm 3/2, \cdots\} \end{aligned}$$

となる．これ以上は特に説明しない．

7.Zero-Momentum(Vacuum) Representation

これは $p^\mu = 0$ となる，所謂真空状態に対応する表現である．基準運動量は当然 $k^\mu = (0, 0, 0, 0)$ であり，この場合の小群は $SO(3, 1)$ そのものとなり，明らかにコンパクトではない．したがって真空に対するローレンツ群の作用が自明

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}\right)\Psi_0 =& \Psi_0 \\ \Leftrightarrow \quad J^{\mu\nu}\Psi_0 =& 0 \end{aligned}$$

でない限り無限次元表現とならざるを得ない．真空は複数種類存在してもよいが，それぞれの真空はこの条件を満たしていると基本的に仮定する．それぞれの固有値は

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu :& m^2 = 0 \\ W^\mu W_\mu :& \rho^2 = 0 \\ P^\mu :& p^\mu = 0 \\ W^3 :& w = 0 \end{aligned}$$

となる．無限次元表現となる場合を考えたらなんか深堀りできる気もするが，よくわからなかったのでここではこれ以上は考えない．

8.Tachyon Representation

これは $m^2 < 0$ となり，したがって m が虚数となる場合の表現である．基準運動量は $k^\mu = (0, 0, m, 0)$ となり，小群は 3 軸固定とした時間と空間を混ぜる $SO(2, 1)$ となる．この表現はよくわからなかったので，ここではこれ以上考えない．

以上でポアンカレ代数の分類が終わった．多分これ以上の表現が存在しないんじゃないかと思う．もちろん，物理的に存在するだろうと考えられているのは (1) の Massive かつ正エネルギーの表現と (3) の質量ゼロかつ正エネルギーの有限次元表現の場合だけである．もしかしたら (5) の連続スピン表現に属する粒子もあるかもしれないが，全く見つかっていない．

表現が考えられるからといって，対応する粒子が自然界に存在するかどうかは全くの別問題である．物理的でないという理由で排除した表現以外にも，無質量正エネルギーでヘリシティ 2 以上の粒子なども見つかって

いない．実際，理論的にも無質量でヘリシティが 2 より大きい粒子の理論で，ちゃんと相互作用のある理論を作ることはできないと言われている．[*12]

少し微妙な点だけ述べて終わりにする．上で 2 次と 4 次のカシミア演算子を作り，その固有値を分類することでポアンカレ代数の表現の分類をしたのだったが，本当はこれ以上高次のカシミア演算子が存在しないことを示す必要がある．もっとちゃんと言えば，6 次や 8 次やそれより高次のカシミア演算子が作れたとしても，それは 2 次と 4 次のカシミア演算子の自明な積から構築されたものであって，Pauli-Lubanski ベクトルのような非自明な積から作られる高次のカシミア演算子はもう存在しない，ということを示す必要がある．しかしそれはかなり大変だ．半単純なリー代数の場合は，その代数のランクとカシミア演算子の数が一致するという便利な定理 (Chevalley の定理) が存在するらしいが，ポアンカレ代数 $\mathfrak{iso}(3,1)$ は運動量 P^μ が不変可換部分代数をなし，半単純ではないためこの定理は使えない．しかしカシミア演算子の数が 2 個であることを「理解」する方法はある．それは de-Sitter 群 $SO(4,1)$ から contraction することでポアンカレ群 $ISO(3,1)$ を得る方法である．

概要を述べる．$SO(4,1)$ の代数は，$(\mu,\nu,\rho,\sigma$ はそれぞれ $0,1,\cdots,4$ をとるとして$)$

$$i[M^{\mu\nu},M^{\rho\sigma}]=\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}-\eta^{\mu\sigma}M^{\rho\nu}+\eta^{\nu\sigma}M^{\rho\mu}$$

となっている．この代数は半単純でありそのランクは 2 であることが実は示される．したがってカシミア演算子の数も上の定理により 2 個であることが言える．しかしここで $J^{\mu\nu}:=M^{\mu\nu}, P^\mu:=\frac{1}{R}M^{\mu 4}(\mu,\nu=0,1,\cdots,3)$ とする，つまり 4 番目の次元方向との回転を「並進」とみなすと

$$\begin{aligned}
i[M^{\mu 4},M^{\rho\sigma}]=&\eta^{4\rho}M^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}M^{4\sigma}-\eta^{\mu\sigma}M^{\rho 4}+\eta^{4\sigma}M^{\rho\mu}\\
i[M^{\mu 4},M^{\rho 4}]=&\eta^{4\rho}M^{\mu 4}-\eta^{\mu\rho}M^{44}-\eta^{\mu 4}M^{\rho 4}+\eta^{44}M^{\rho\mu}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
i[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]=&\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-\eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}+\eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu}\\
i[P^{\mu},J^{\rho\sigma}]=&\eta^{\mu\rho}P^{\sigma}-\eta^{\mu\sigma}P^{\rho}\\
i[P^{\mu},P^{\nu}]=&-\frac{1}{R^2}J^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

となる．ここで R は縮約パラメータであり，$R\to\infty$ の極限をとると[*13]これはポアンカレ代数 $\mathfrak{iso}(3,1)$ に一致する．これにより $ISO(3,1)$ のカシミア演算子も 2 個であることが「上から降ってくる」形で理解できる．

[*12] 自由場の理論はゲージ理論として普通に作ることができる．しかし，ヘリシティが 2 より大きい質量ゼロ粒子 (高階スピン粒子) の理論はゲージ対称性の制限がきつすぎて相互作用項が書けないと言われているらしい．実際この本の 13.1 節でやる低エネルギー定理からも高階スピンが長距離力の媒介をすることはできないことがわかる．ただし，これはミンコフスキー時空上の理論の場合で，AdS 時空上だと高階スピンの理論が作れるらしい．Vasiliev theory とか higher-spin gauge theory とかで調べると色々出てくる．まじで意味わからんかったけど．

[*13] この極限は，de-Sitter 時空の曲率半径を無限大に飛ばし平坦時空 (ミンコフスキー空間) にする，という物理的描像と対応しているらしい．

2.6 空間反転と時間反転

2.3 節で，どんな斉次ローレンツ変換も固有順時 (つまり $\det\Lambda = +1$ かつ $\Lambda^0{}_0 \geq +1$) か，または固有順時変換に $\mathcal{P}$ か $\mathcal{T}$ か $\mathcal{PT}$ をかけたものだとわかったのだった．ここで $\mathcal{P}, \mathcal{T}$ はそれぞれ以下の空間反転と時間反転だ．

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

かつては，ポアンカレ群の基本的な積の法則

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$$

は，Λ と $\bar{\Lambda}$ の両方かどちらかに $\mathcal{P}$ か $\mathcal{T}$ か $\mathcal{PT}$ が含まれていても明らかに正しいと考えられていた．特に，$\mathcal{P}, \mathcal{T}$ に対応する (線形ユニタリー・反線形反ユニタリー) 演算子そのものが存在，つまり

$$\mathsf{P} \equiv U(\mathcal{P}, 0), \quad \mathsf{T} \equiv U(\mathcal{T}, 0)$$

が任意の固有順時ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ と並進 a^μ に対して (ポアンカレ群において $U(\bar{\Lambda}, 0)U(\Lambda, a)U^{-1}(\bar{\Lambda}, 0) = U(\bar{\Lambda}\Lambda\bar{\Lambda}^{-1}, \bar{\Lambda}a)$ であることに対応し)

$$\mathsf{P}U(\Lambda, a)\mathsf{P}^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a)$$
$$\mathsf{T}U(\Lambda, a)\mathsf{T}^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a)$$

を満たすと信じられていた．これらの変換則は，P か T が保存する，ということをほぼ意味している．(後ほど示す (2.6.13) を参照)

1956-57 年に，P についての変換則は，原子核のベータ崩壊などのおこす弱い相互作用を無視したときにのみ近似的に正しいと理解されるようになった．時間反転はそれからしばらく生き延びたが，1964 年に T について，これはやはり近似的正しいという間接的証拠が見つかった．(3.3 節参照) 以下では，(2.6.1)(2.6.2) を満たす演算子 P, T が実際に存在するとして話を進めるが，以上の話よりこれは近似でしかない．

(2.6.1)(2.6.2) を微小変換

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu$$

に適用する．ここで $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ と ϵ_μ はともに微小量とする．(2.4.3) を使い，(2.6.1)(2.6.2) の $\omega_{\rho\sigma}, \epsilon_\rho$ の係数を等しいとして，ポアンカレ生成子の P, T 変換性を (2.4.8)(2.4.9) と同様にして以下を得る．

$$\mathsf{P}iJ^{\rho\sigma}\mathsf{P}^{-1} = i\mathcal{P}_\mu{}^\rho\mathcal{P}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}$$
$$\mathsf{P}iP^\rho\mathsf{P}^{-1} = i\mathcal{P}_\mu{}^\rho P^\mu$$
$$\mathsf{T}iJ^{\rho\sigma}\mathsf{T}^{-1} = i\mathcal{T}_\mu{}^\rho\mathcal{T}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}$$
$$\mathsf{T}iP^\rho\mathsf{T}^{-1} = i\mathcal{T}_\mu{}^\rho P^\mu$$

これは (2.4.8)(2.4.9) とよく似ているが，いまはまだ P, T が線形ユニタリーか反線形反ユニタリーかを決めていないので，これらの式で両辺の i を打ち消してはいけない．

線形・反線形性を決めるのは簡単だ．(2.6.4) で $\rho = 0$ とすれば $P^0 = H$ より

$$\mathsf{P}iH\mathsf{P}^{-1} = iH$$

となる．ここで H はエネルギー演算子だ．もし，P が反線形反ユニタリーなら，i と反可換であり

$$\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1} = -H$$

となる．しかしこのときには，エネルギーが $E>0$ のどんな状態 Ψ にも，エネルギーが $-E<0$ の別の状態 P^{-1} が付随することになる．

$$
\begin{aligned}
H\Psi =& E\Psi \\
\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1}\mathsf{P}\Psi =& E\mathsf{P}\Psi \\
H(\mathsf{P}\Psi) =& -E(\mathsf{P}\Psi)
\end{aligned}
$$

負のエネルギー (真空より低いエネルギー) の状態は存在しないので，別の選択が必要である．すなわち，P は線形ユニタリーで，H と可換 $\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1}=H$ であり，反可換ではない．

一方，(2.6.6) で $\rho=0$ とすると

$$
\mathsf{T}iH\mathsf{T}^{-1}=-iH
$$

となるが，先ほどと同様に，もし T が線形ユニタリーならば単に i を打ち消し $\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1}=-H$ となるが，これも負のエネルギー $-E$ の状態が生じる．

$$
\begin{aligned}
H\Psi =& E\Psi \\
\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1}\mathsf{T}\Psi =& E\mathsf{T}\Psi \\
H(\mathsf{T}\Psi) =& -E(\mathsf{T}\Psi)
\end{aligned}
$$

したがって T は反線形反ユニタリーだ．

P は線形で T は反線形だと決めたので，(2.6.3)-(2.6.6) を三次元記法での生成子 (2.4.15)-(2.4.17) を使って書いておく．

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}iJ_k\mathsf{P}^{-1} =& \mathsf{P}\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}J^{jk}\mathsf{P}^{-1}=\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{P}_\mu{}^j\mathcal{P}_\nu{}^kJ^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}(-\delta^j_\mu)(-\delta^k_\nu)J^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}J^{ij}=iJ_k \\
\therefore\quad \mathsf{P}\mathbf{J}\mathsf{P}^{-1} =& +\mathbf{J} \\
\mathsf{P}iK_i\mathsf{P}^{-1} =& \mathsf{P}i(-J^{i0})\mathsf{P}^{-1}=-i\mathcal{P}_\mu{}^i\mathcal{P}_\nu{}^0J^{\mu\nu}=-i(-\delta^i_\mu)\delta^0_\nu J^{\mu\nu}=iJ^{i0}=-iK_i \\
\therefore\quad \mathsf{P}\mathbf{K}\mathsf{P}^{-1} =& -\mathbf{K} \\
\mathsf{P}iP^i\mathsf{P}^{-1} =& i\mathcal{P}_\mu{}^iP^\mu=i(-\delta^i_\mu)P^\mu=-iP^i \\
\therefore\quad \mathsf{P}\mathbf{P}\mathsf{P}^{-1} =& -\mathbf{P} \\
\mathsf{T}iJ_k\mathsf{T}^{-1} =& \mathsf{T}\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}J^{jk}\mathsf{T}^{-1}=\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{T}_\mu{}^j\mathcal{T}_\nu{}^kJ^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\delta^j_\mu\delta^k_\nu J^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}J^{ij}=iJ_k \\
\therefore\quad \mathsf{T}\mathbf{J}\mathsf{T}^{-1} =& -\mathbf{J} \\
\mathsf{T}iK_i\mathsf{T}^{-1} =& \mathsf{T}i(-J^{i0})\mathsf{T}^{-1}=-i\mathcal{T}_\mu{}^i\mathcal{T}_\nu{}^0J^{\mu\nu}=-i\delta^i_\mu(-\delta^0_\nu)J^{\mu\nu}=iJ^{i0}=-iK_i \\
\therefore\quad \mathsf{T}\mathbf{K}\mathsf{T}^{-1} =& +\mathbf{K} \\
\mathsf{T}iP^i\mathsf{T}^{-1} =& i\mathcal{T}_\mu{}^iP^\mu=i\delta^i_\mu P^\mu=iP^i \\
\therefore\quad \mathsf{T}\mathbf{P}\mathsf{T}^{-1} =& -\mathbf{P}
\end{aligned}
$$

そして，そうであるように決めたように

$$
\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1}=\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1}=H
$$

が成立する．

空間反転 P が $\mathbf{J}$ の符号を保つのは物理的に自然だ．なぜなら軌道部分はベクトル積 $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ であり，$\mathbf{r}$ も $\mathbf{p}$ も空間反転で符号が同時に変わるからだ．

一方，T は $\mathbf{J}$ を反転する．これは時間反転の後では，観測者はすべての物体が反対方向に回っているのを見ることになり，これは運動量のみが符号を変わるからだ．(ちなみに $\mathbf{J}\times\mathbf{J}=i\mathbf{J}$ は，同じベクトルの外積によってゼロになりそうだが，これは

$$
(\mathbf{J}\times\mathbf{J})_i = \epsilon_{ijk}J_jJ_k
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_jJ_k-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_kJ_j=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}[J_j,J_k]\\
=&\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}J_l\\
=&i\delta_{il}J_l=iJ_i \quad \because \epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}=2\delta_{il}
\end{aligned}
$$

とすればわかる．演算子は通常のベクトルのようには交換できない．)

ところで (2.6.10) は角運動量の交換関係 $\mathbf{J}\times\mathbf{J}=i\mathbf{J}$ と矛盾しない．一見，右辺は負符号が二つ出現し，右辺は一つだけが出現するように見えるが，T は $\mathbf{J}$ のみならず，i の符号も変えるからだ．(2.6.7)-(2.6.13) が (2.4.18)-(2.4.24) と矛盾しないことは，すべて容易に確かめられる．

つぎに P と T が 1 粒子状態にどのように作用するかを調べる．

P : $M>0$

1 粒子状態 $\Psi_{k,\sigma}$ は $(k^\mu=(0,0,0,M)$ なので，$)\mathbf{P},H,J_3$ がそれぞれ固有値 $0,M,\sigma$ をもつ状態とする．(2.6.7)(2.6.9)(2.6.13) より

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma}=0 \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{P}(\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma})=-\mathsf{P}\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma}=0\cdot(\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma})\\
H\Psi_{k,\sigma}=M\Psi_{k,\sigma} \quad &\Rightarrow \quad H(\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma})=\mathsf{P}H\Psi_{k,\sigma}=M\cdot(\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma})\\
J_3\Psi_{k,\sigma}=\sigma\Psi_{k,\sigma} \quad &\Rightarrow \quad J_3(\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma})=\mathsf{P}J_3\Psi_{k,\sigma}=\sigma\cdot(\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma})
\end{aligned}
$$

となり $\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}$ も同じ固有値をもつ状態である．よってこれらの状態は (縮退がないとして) 高々位相だけしか違わない．

$$
\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}=\eta_\sigma\Psi_{k,\sigma}
$$

ここで位相因子 $|\eta|=1$ はスピン σ に依存するかどうかはまだわからない．η_σ が σ に依存しないことを示すには，(2.5.8)(2.5.20)(2.5.21) から，j を粒子のスピン角運動量の大きさとして

$$
(J_1\pm iJ_2)\Psi_{k,\sigma}=\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,\sigma\pm1}
$$

であることを使う．両辺に P を施すと

$$
\begin{aligned}
\text{(LHS)}=&\mathsf{P}(J_1\pm iJ_2)\mathsf{P}^{-1}\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}=(J_1\pm iJ_2)\eta_\sigma\Psi_{k,\sigma}=\eta_\sigma\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,\sigma\pm1}\\
\text{(RHS)}=&\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}(\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma\pm1})=\eta_{\sigma\pm1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,\sigma\pm1}\\
\therefore \quad &\eta_\sigma=\eta_{\sigma\pm1}
\end{aligned}
$$

となり，よって η は σ に依存しないことがわかる．そのため，次のように書けることがわかる．

$$
\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}=\eta\Psi_{k,\sigma}
$$

ここで η は固有パリティと呼ばれる位相で，P が作用する粒子の種類のみに依る．

ゼロでない運動量をもつ状態を得るためには，ブースト (2.5.24) に対応するユニタリー演算子 $U(L(p))$ を施す．(2.5.5)(2.5.18) と $k^0=M$ から

$$
\Psi_{k,\sigma}=\sqrt{\frac{M}{p^0}}U(L(p))\Psi_{k,\sigma}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^\mu{}_\nu L(p)^\nu{}_\rho(\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\sigma k^\sigma=&\mathcal{P}^\mu{}_\nu L(p)^\nu{}_\rho k^\rho\\
=&\mathcal{P}^\mu{}_\nu p^\nu=(\mathcal{P}p)^\mu=L(\mathcal{P}p)^\mu{}_\nu k^\nu\\
\therefore \quad &\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1}=L(\mathcal{P}p)\\
\mathcal{P}p=&(-\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})
\end{aligned}
$$

したがって (2.6.1)(2.6.15) より

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} =& \sqrt{\frac{M}{p^0}}\mathsf{P}U(L(p))\mathsf{P}^{-1}\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} \\
=& \sqrt{\frac{M}{p^0}}U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1})\eta\Psi_{k,\sigma} = \eta\sqrt{\frac{M}{p^0}}U(L(\mathcal{P}p))\Psi_{k,\sigma} \\
=& \eta\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}
\end{aligned}
$$

となる．

$\mathsf{T} : M > 0$

(2.6.10)(2.6.12)(2.6.13) より，P のときと同様に

$$
\mathbf{P}(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = 0, \quad H(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = M(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}), \quad J_3(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = -\sigma(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma})
$$

したがって

$$
\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma}
$$

ここで ζ_σ は位相因子だ．再び演算子 T を (2.6.14) の両辺に作用させ，これは $\mathbf{J}$ および虚数単位 i と反可換だから

$$
\begin{aligned}
\text{(LHS)} =& \mathsf{T}(J_1 \pm iJ_2)\mathsf{T}^{-1}\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = (-J_1 \pm iJ_2)\zeta_\sigma\Psi_{k,-\sigma} \\
=& -\zeta_\sigma\sqrt{(j \pm (-\sigma))(j \mp (-\sigma) + 1)}\Psi_{k,-\sigma\mp1} \\
=& -\zeta_\sigma\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\Psi_{k,-\sigma\mp1} \\
\text{(RHS)} =& \sqrt{(j \pm \sigma)(j \mp \sigma + 1)}T\Psi_{k,\sigma\pm1} \\
=& \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\zeta_{\sigma\pm1}\Psi_{k,-\sigma\mp1} \\
\therefore \quad & -\zeta_\sigma = \zeta_{\sigma\pm1}
\end{aligned}
$$

となる．これは粒子の種類にのみ依る別の位相因子 ζ を用いて，解を $\zeta_\sigma = (-1)^{j-\sigma}\zeta$ と書ける．(実際これが $-\zeta_\sigma = \zeta_{\sigma\pm1}$ を満たすことはすぐ確かめられる．) よって

$$
\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma}
$$

となる．しかし，先ほどの固有パリティ η とは異なり，時間反転の位相 ζ はなんら物理的に重要ではない．これは一粒子状態の位相を

$$
\Psi_{k,\sigma} \to \Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{1/2}\Psi_{k,\sigma}
$$

と再定義すれば，時間反転の変換則から位相 ζ を完全に消すことができるからだ．

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T}\Psi'_{k,\sigma} =& (\zeta^*)^{1/2}\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} \because \mathsf{T}\text{ は反ユニタリー} \\
=& (\zeta^*)^{1/2}\zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma} = |\zeta|^{1/2}\zeta^{1/2}(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma} \\
=& (-1)^{j-\sigma}\Psi'_{k,-\sigma} \quad \because |\zeta| = 1
\end{aligned}
$$

以下では，(2.6.17) に任意の位相 ζ を置いておく．これは単に 1 粒子状態の位相を選べるようにしておくためだ．この位相は重要ではない．

ゼロでない運動量を扱うために，ブーストを再び施す．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^\mu{}_\nu L^\nu{}_\rho(p)(\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\sigma k^\sigma =& \mathcal{T}^\mu{}_\nu L^\nu{}_\rho(p)(-k^\rho) \quad \because k = (0,0,0,M)\text{ で時間成分だけマイナスにする} \\
=& -\mathcal{T}^\mu{}_\nu p^\nu \\
=& -(p^1, p^2, p^3 -, p^0) = (-p^1, -p^2, -p^3, p^0) = (\mathcal{P}p)^\mu = L(\mathcal{P}p)^\mu{}_\sigma k^\sigma
\end{aligned}
$$

したがって

$$\mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1} = L(\mathcal{P}p)$$

(つまり，時間成分の添え字を奇数個持つ $L^{\mu}{}_{\nu}$ の成分の符号をすべて変えることは，空間成分の添え字を奇数個持つ成分の符号をすべて変えることに同等．)P のときと同様に (2.6.2)(2.5.5) より

$$\begin{aligned}
\Psi_{p,\sigma} =& \sqrt{\frac{M}{p^0}} U(L(p))\Psi_{k,\sigma} \\
\Rightarrow \mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} =& \sqrt{\frac{M}{p^0}} U(\mathcal{T})U(L(p))U(\mathcal{T})^{-1}\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} \quad \because U(\mathcal{T}) = \mathsf{T} \\
=& \sqrt{\frac{M}{p^0}} U(\mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1})\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} \\
=& \sqrt{\frac{M}{p^0}} U(L(\mathcal{P}p))\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} \\
=& \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}
\end{aligned}$$

次にゼロ質量の場合の考察をする．

$\mathsf{P} : M = 0$

状態 $\Psi_{k,\sigma}$ は固有値 $k^{\mu} = (0, 0, \kappa, \kappa)$ を持つ P^{μ} の固有ベクトルであり，また固有値 σ を持つ J_3 の固有ベクトルだ．この状態に演算子 P が作用した $\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}$ の性質を調べる．(2.6.9)(2.6.13) より

$$P^{\mu}\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = \begin{cases} -\mathsf{P}\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = -(0, 0, \kappa)\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} & (\mu = 1, 2, 3) \\ \mathsf{P}H\Psi_{k,\sigma} = \kappa\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} & (\mu = 0) \end{cases}$$

となって，4 元運動量が $(\mathcal{P}k)^{\mu} = (0, 0, -\kappa, \kappa)$ で，J_3 の固有値は (2.6.7) より

$$J_3\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = +\mathsf{P}J_3\Psi_{k,\sigma} = +\sigma\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}$$

となって，$+\sigma$ の状態であることがわかる．このためヘリシティ σ の状態は，ヘリシティ $-\sigma$ の状態になる．(ヘリシティは $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}$ に比例していたことを思い出そう．運動量方向への射影が入っているので，反転によりマイナスがつく．)p102〜p103 で述べたように，空間反転対称性がここから成り立つためには，ゼロでないヘリシティ σ を持つどんな種類の質量ゼロ粒子も，その反対のヘリシティ $-\sigma$ をもつ質量ゼロ粒子が伴わなければならない．非ゼロな場合と違い，今回の場合 P は基準運動量 k^{μ} を不変に保たないので，$\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}$ をブーストして一般の運動量の場合の反転を調べることができない．(ブースト演算子は，自分で選んで固定した基準運動量 k からしか p にブーストできないから．)
$\Rightarrow$ 代わりに演算子 $U(R_2^{-1})\mathsf{P}$ を考える方が便利．ここで R_2 は k を $\mathcal{P}k$ に変換する回転で，便宜上 R_2^{-1} を 2 軸周りの $-180°$ 回転とする．

$$R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi) & 0 & \sin(-\pi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-\pi) & 0 & \cos(-\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U(R_2^{-1}) = \exp(-i\pi J_2) \quad (\text{回転}\exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) = \exp(i\theta_i J_i)\ \text{の角度パラメータが}\theta_i = (0, -\pi, 0)$$

(ここはおそらく誤植で，$U(R_2)$ ではなく $U(R_2^{-1})$ が $\exp(-i\pi J_2)$ である．でなければ (2.6.21) が出てこない．)$J_3 = J^{12}$ だから，(2.4.8) より

$$U(R_2^{-1})J_3U(R_2) = (R_2^{-1})_{\mu}{}^{1}(R_2^{-1})_{\nu}{}^{2}J^{\mu\nu} = (R_2^{-1})_{1}{}^{1}(R_2^{-1})_{2}{}^{2}J^{12} = -J^{12} = -J_3$$

で，J_3 の符号を反転させる．また

$$U(R_2^{-1})P^\mu U(R_2) = (R_2^{-1})_\nu{}^\mu P^\nu = (-P^1, P^2, -P^3, H)$$

よって，$\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}$ の代わりに $U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}$ に対する P^μ, J_3 の固有値を調べると

$$\begin{aligned}
P^\mu U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} =& U(R_2^{-1})(-P^1, P^2, -P^3, H)\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} \\
=& (0, 0, \kappa, \kappa)U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = k^\mu U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} \\
J_3 U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} =& -U(R_2^{-1})J_3\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = -\sigma U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}
\end{aligned}$$

となり，固有値が $k^\mu, -\sigma$ であることが確認できる．したがって再び縮退がないと仮定して

$$U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma \Psi_{k,-\sigma}$$

と書くことができる．ここで η_σ は位相因子だ．これならブースト演算子を使うことができる！

さて $R_2^{-1}\mathcal{P}$ は

$$R_2^{-1}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから，ローレンツブースト $B(|\mathbf{p}|/\kappa)$(2.5.45) と可換だ．そして $\mathcal{P}$ は 3 軸を $\mathbf{p}$ に回す回転 $R(\hat{p})$(p96 あるいは (2.5.47) 参照) と可換．(実際，$R(\hat{p})\mathcal{P}$ は空間成分を $(0, 0, |\mathbf{p}|) \to (0, 0, -|\mathbf{p}|) \to (-p^1, -p^2, -p^3)$ とするが，$\mathcal{P}R(\hat{p})$ も同様に $(0, 0, |\mathbf{p}|) \to (p^1, p^2, p^3) \to (-p^1, -p^2, -p^3)$ とするので，両者は等しい．よって可換である．) したがって，(2.5.5) に P を施すと，一般的な 4 元運動量 p^μ に対して，(2.5.44) より

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} =& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U(\mathcal{P})U(L(p))\Psi_{k,\sigma} \\
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U(\mathcal{P})U\left(R(\hat{p})B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,\sigma} \quad \because (2.5.44) \\
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U(\mathcal{P})U\left(R(\hat{p})B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\left(U(R_2^{-1})U(\mathcal{P})\right)^{-1}\left(U(R_2^{-1})U(\mathcal{P})\right)\Psi_{k,\sigma} \\
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U\left(\mathcal{P}R(\hat{p})B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)(R_2^{-1}\mathcal{P})^{-1}\right)U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} \\
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U\left(R(\hat{p})\mathcal{P}(R_2^{-1}\mathcal{P})^{-1}B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} \quad \because R(\hat{p}) \text{ と } \mathcal{P}, \text{および } B \text{ と } R_2^{-1}\mathcal{P} \text{ の可換性} \\
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U\left(R(\hat{p})R_2 B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} \\
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} \eta_\sigma U\left(R(\hat{p})R_2 B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma} \quad \because (2.6.20)
\end{aligned}$$

$R(\hat{p})R_2$ は (3 軸をマイナスにしてから $\mathbf{p}$ の方向に回すので)3 軸を $-\mathbf{p}$ へ回す回転だ．しかし $U(R(\hat{p})R_2)$ は $U(R(-\hat{p}))$ と完全に同じではない．どのような違いがあるか？

⇒ 学部の物理でやったように，位置ベクトル $\mathbf{r}$ を (2.5.46) のように極座標変数で書いたとき，$-\mathbf{r}$ に対応して極座標変数は $(\theta, \phi) \to (\pi - \theta, \phi \pm \pi)$ となることを思い出そう．実際

$$\Big(\sin(\pi - \theta)\cos(\phi \pm \pi), \sin(\pi - \theta)\sin(\phi \pm \pi), \cos(\pi - \theta)\Big) = (-\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta) = -\mathbf{p}$$

となる．(学部でやるような普通の反転では $\phi + \pi$ で良いが，ここで $\phi + \pi$ が 0 から 2π の範囲内から出てしまうことを防ぐために，$0 \le \phi < \pi$ の場合 $\phi + \pi$ を，$\pi \le \phi < 2\pi$ の場合 $\phi - \pi$ とする．) したがって (2.5.47) より

$$U(R(-\hat{p})) = \exp(-i(\phi \pm \pi)J_3)\exp(-i(\pi - \theta)J_2)$$

となる．これと (2.5.47)(2.6.19) を用いると ((2.6.19) の誤植を訂正し，$U(R_2) = \exp(i\pi J_2)$ とする)

$$\begin{aligned}
&U(R(-\hat{p}))^{-1}U(R(\hat{p})R_2) = U(R(-\hat{p}))^{-1}U(R(\hat{p}))U(R_2) \\
=&\Big\{\exp(-i(\phi \pm \pi)J_3)\exp(-i(\pi-\theta)J_2)\Big\}^{-1}\exp(-i\theta J_3)\exp(-i\theta J_2)\exp(+i\pi J_2) \\
=&\exp(i(\pi-\theta)J_2)\exp(i(\phi\pm\pi)J_3)\exp(-i\phi J_3)\exp(i(\pi-\theta)J_2) \\
=&\exp(i(\pi-\theta)J_2)\exp(\pm i\pi J_3)\exp(-i(\pi-\theta)J_2)
\end{aligned}$$

となる．さらに，(2.6.19) の主張と同様に，3 軸周りの $\pm 180^\circ$ は J_2 の符号を変える．実際 $R_3 = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$ を 3 軸周りの $\pm 180^\circ$ 回転として，再び (2.4.8) より

$$\begin{aligned}
U(R_3) =& \exp(\pm i\pi J_3) \\
U(R_3^{-1})J_2U(R_3) =& U(R_3^{-1})J^{31}U(R_3) = {(R_3)_\mu}^3{(R_3)_\nu}^1 J^{\mu\nu} = -J^{31} = -J^2
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\exp(i(\pi-\theta)J_2)\exp(\pm i\pi J_3) = \exp(\pm i\pi J_3)\exp(-i(\pi-\theta)J_2)$$

を得るので，結局

$$\begin{aligned}
U(R(-\hat{p}))^{-1}U(R(\hat{p})R_2) =& \exp(\pm i\pi J_3) \\
\therefore \quad U(R(\hat{p})R_2) =& U(R(-\hat{p}))\exp(\pm i\pi J_3)
\end{aligned}$$

となる．以上から

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} =& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma U\left(R(\hat{p})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma} \\
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma U(R(-\hat{p}))\exp(\pm i\pi J_3)U\left(B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma}
\end{aligned}$$

ここで B はブースト $(0,0,\kappa,\kappa) \to (0,0,\mathbf{p},|\mathbf{p}|)$ であるから，3 軸周りの $\pm 180^\circ$ 回転 $U(R_3) = \exp(\pm i\pi J_3)$ とは可換である．よってさらに変形することができて

$$\begin{aligned}
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma U(R(-\hat{p}))U\left(B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\exp(\pm i\pi J_3)\Psi_{k,-\sigma} \\
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)U\left(R(-\hat{p})B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma}
\end{aligned}$$

$R(-\hat{p})B$ は (2.5.44) の通り，$(0,0,\kappa,\kappa) \to (0,0,|\mathbf{p}|,p^0) \to (-p^1,-p^2,-p^3,p^0) = (-\mathbf{p},p^0) = \mathcal{P}p$ の方向への基準ブースト $L(\mathcal{P}p)$ だ．これにより結局

$$\begin{aligned}
=& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)U(L(\mathcal{P}p))\Psi_{k,-\sigma} = \eta_\sigma\exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} \\
\therefore \quad \mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} =& \eta_\sigma\exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}
\end{aligned}$$

を得る．これが結果である．ここで位相 $\exp(\mp i\pi\sigma)$ は，元の方位角が $0 \le \phi < \pi$ か $\pi \le \phi < 2\pi$ か，すなわち (2.5.46) より $\mathbf{p}$ の第二成分が正か負によってそれぞれ $-i\pi\sigma$ か $+i\pi\sigma$ になる．例えばスピン $\sigma = 1/2$ の粒子の場合，$\exp(\mp i\pi\sigma) = \mp i$ となる．

半整数スピンの質量ゼロ粒子にパリティが作用するときの位相の奇妙な符号変化は，(2.5.47) で任意の運動量の質量ゼロ粒子状態を定義するのに用いた回転のために生じる．回転群 $SO(3)$ は単連結ではない (普遍被覆群がスピン群 $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$) ので，この種の非連続性は回避するのは難しい．(ニュートリノの生じる弱い相互作用はパリティが破れているので，前提を満たさないのでこの議論には参加できない．だから今のところこの困難が生じる物理的な模型は素粒子物理学では特になさそうに思われる．)

この結果，η_σ はスピン σ に依存する場合があるので，単純に議論することは難しい．しかし次に議論する T の場合は幾分簡単な作用を見せてくれる．

$\mathsf{T} : M = 0$

状態 $\Psi_{k,\sigma}$ では，P^μ と J_3 が値 $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ と σ を持つ．この状態に時間反転の演算子 T が作用すると

$$P^\mu \mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \begin{cases} -\mathsf{T}\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = -(0,0,\kappa)\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} & (\mu = 1,2,3) \\ \mathsf{P}H\Psi_{k,\sigma} = \kappa \mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} & (\mu = 0) \end{cases}$$

となって，4 元運動量が $(\mathcal{P}k)^\mu = (0, 0, -\kappa, \kappa)$ で，J_3 の固有値は (2.6.7) より

$$J_3 \mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = +\mathsf{T}J_3\Psi_{k,\sigma} = +\sigma\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}$$

となって，P^μ と J_3 が $(\mathcal{P}k)^\mu = (0, 0, -\kappa, \kappa)$ と $-\sigma$ の値をもつ状態が生じる．したがって，ヘリシティは $+\sigma$ となり，T はヘリシティ $\mathbf{J}\cdot\mathbf{k}$ を変えず，それだけではあるヘリシティ σ の質量ゼロ粒子とヘリシティ $-\sigma$ の粒子を何も関連付けない．ここで，T は P と同様に基準運動量 k を不変に保たないから，前と同じように $U(R_2^{-1})\mathsf{T}$ を考えるのが便利になる．$U(R_2^{-1})$ は前に示した通り J_3 と反可換 $U(R_2^{-1})J_3 = -J_3U(R_2^{-1})$ であるから，$U(R_2^{-1})\mathsf{T}$ は J_3 と可換

$$J_3U(R_2^{-1})\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = -U(R_2^{-1})J_3\mathsf{T} = U(R_2^{-1})\mathsf{T}J_3$$

となる．したがって $U(R_2^{-1})\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}$ も J_3 の固有値 σ の固有状態となる．

$$J_3U(R_2^{-1})\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \sigma U(R_2^{-1})\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}$$

再び縮退がないとすれば，

$$U(R_2^{-1})\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma\Psi_{k,\sigma}$$

となる．ここで，ζ_σ は位相だ．$\mathcal{P}$ と同様，$R_2^{-1}\mathcal{T}$ はブースト (2.5.45) と可換となる．なぜなら

$$R_2^{-1}\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = -R_2^{-1}\mathcal{P}$$

で，$R_2^{-1}\mathcal{P}$ は既にローレンツブースト B と可換であることを示しているので，当然 $R_2^{-1}\mathcal{T}$ も可換となる．さらに $\mathcal{T}$ は回転 $R(\hat{p})$ と可換だ．(空間回転なので自明だが，あらわに書いておくと

$$\mathcal{T}R(\hat{p}) : (0, 0, |\mathbf{p}|, p^0) \to (p^1, p^2, p^3, p^0) \to (p^1, p^2, p^3, -p^0)$$
$$R(\hat{p})\mathcal{T} : (0, 0, |\mathbf{p}|, p^0) \to (0, 0, |\mathbf{p}|, -p^0) \to (p^1, p^2, p^3, -p^0)$$

となることから分かる．) よって $\mathcal{P}$ のときと同様に，T を状態 (2.5.5) に施すと

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\zeta_\sigma U\left(R(\hat{p})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma}$$

が得られる．さらに，(2.6.21) より同様に

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} =& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\zeta_\sigma U\left(R(-\hat{p})\right)\exp(\pm i\pi J_3)U\left(B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,\sigma} \\ =& \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\zeta_\sigma U\left(R(-\hat{p})\right)U\left(B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{k,\sigma} \\ =& \zeta_\sigma\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} \end{aligned}$$

となる．以前と同様，上と下の符号は，運動量 $\mathbf{p}$ の 2 軸成分が正か負かに対応する．

時間反転の演算子の 2 乗 T^2 は，質量ゼロでない粒子状態と質量ゼロの粒子状態に非常に簡単に作用する．(2.6.18) と，T が反ユニタリーであることを使うと，質量ゼロでない 1 粒子状態では

$$\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} = \mathsf{T}\zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}$$

$$
\begin{aligned}
&=\zeta^*(-1)^{j-\sigma}\mathsf{T}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} \quad \because \mathsf{T}\text{ の反ユニタリー性}\\
&=\zeta^*(-1)^{j-\sigma}\zeta(-1)^{j-(-\sigma)}\Psi_{p,\sigma} \quad \because \mathcal{P}(\mathcal{P}p)=p\\
&=(-1)^{2j}\Psi_{p,\sigma} \quad \because |\zeta|=1
\end{aligned}
$$

となる．質量ゼロの粒子状態については，もし $\mathbf{p}$ の 2 軸成分が正ならば，空間反転された運動量 $\mathcal{P}\mathbf{p}=-\mathbf{p}$ の 2 軸成分は負になり，逆に $\mathbf{p}2$ 軸成分が負ならば逆に $\mathcal{P}\mathbf{p}=-\mathbf{p}$ の 2 軸成分は正になる．したがって $\mathsf{T}\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}$ に現れる (2.6.25) での $\exp(\pm i\pi\sigma)$ は，一つ目の T で現れる符号と反対になる．よって

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} &=\mathsf{T}\zeta_\sigma\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}\\
&=\zeta_\sigma^*\exp(\mp i\pi\sigma)\mathsf{T}\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} \quad \because \mathsf{T}\text{ の反ユニタリー性}\\
&=\zeta_\sigma^*\exp(\mp i\pi\sigma)\zeta_\sigma\exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}\\
&=\exp(\mp 2i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}
\end{aligned}
$$

となる．σ が整数か半整数である限り，これは

$$
\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma}=(-1)^{2|\sigma|}\Psi_{p,\sigma}
$$

と書き換えられる．質量ゼロの粒子における「スピン」とは，通常ヘリシティの絶対値のことを意味するので $|\sigma|=j$ と書けて，これは質量ゼロでない粒子と同じ表式となる．

T^2 が相互作用しない質量ゼロか質量ゼロでない粒子の系の，任意の状態 Ψ に作用するとき，1 粒子につき，それぞれ因子 $(-1)^{2j}$ か $(-1)^{2|\sigma|}$ が出る．

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T}^2\Psi_{p_1,\sigma_1;p_2,\sigma_2;,\cdots,;p_n,\sigma_n} &=(-1)^{2j_1}(-1)^{2|\sigma_2|}\cdots(-1)^{2|\sigma_n|}\Psi_{p_1,\sigma_1;p_2,\sigma_2;,\cdots,;p_n,\sigma_n}\\
&=(-1)^{2(j_1+|\sigma_2|+\cdots+|\sigma_n|)}\Psi_{p_1,\sigma_1;p_2,\sigma_2;,\cdots,;p_n,\sigma_n}
\end{aligned}
$$

したがって，もし状態に半整数のスピンかヘリシティを持つ粒子が奇数個 (1 個でもよい) あれば，(整数のスピンかヘリシティを持つ粒子は何個あってもよい) 全体の符号の変化は

$$
\mathsf{T}^2\Psi=-\Psi
$$

となる．もし，いろいろな相互作用の「スイッチを入れ」ても (つまりこの状態を相互作用のない系ではなく，3 章で議論する in,out 状態のような相互作用のある系だとしても)，この結果は，それらの相互作用がたとえ回転不変でなくても時間反転のもとで不変である限り，変わらない．なぜなら自由状態の系を相互作用のある系にするための相互作用ハミルトニアンが時間反転 T と可換なら

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T}\Psi_\alpha^\pm &=\lim_{\tau\to\mp\infty}\mathsf{T}\exp(+iH\tau)\exp(-iH_0\tau)\Phi_\alpha\\
&=\lim_{\tau\to\mp\infty}\exp(-iH\tau)\exp(+iH_0\tau)\mathsf{T}\Phi_\alpha\\
&=-\lim_{\tau\to\mp\infty}\exp(-iH\tau)\exp(+iH_0\tau)\Phi_\alpha\\
&=-\Psi_\alpha^\mp
\end{aligned}
$$

自由状態に作用するのと変わらないからだ．たとえば，この議論は系が任意の静的な重力場や電場のもとにあっても，重力相互作用は重力外場にも相互作用にも時間反転不変性があるからだ．電磁相互作用自体は時間反転不変だが，外場となる磁場が時間反転で $\mathbf{B}\to-\mathbf{B}$ と変化するから，時間反転で不変 $\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ な電場に限っている．) さて，Ψ がハミルトニアンの固有状態とする．T はハミルトニアンと可換だから，$\mathsf{T}\Psi$ もまたハミルトニアンの固有状態だ．これは同じ状態 (同じ射線に属している) だろうか？もしそうなら，$\mathsf{T}\Psi$ は Ψ と位相だけしか違わないことになる．

$$
\mathsf{T}\Psi=\zeta\Psi
$$

しかしそのとき

$$
\mathsf{T}^2\Psi=\mathsf{T}(\zeta\Psi)=\zeta^*\mathsf{T}\Psi=|\zeta|^2\Psi=\Psi
$$

となって，(2.6.28) と矛盾する．こうして，(2.6.28) を満たすどのようなエネルギー固有状態も，同じエネルギーの他の射線に属する固有状態と縮退していることがわかる．これは「クラマーの縮退」と呼ばれる．もちろん，この結論はもし系が回転不変な環境にあれば自明だ．なぜなら，この場合の状態は回転変換に対し不変空間となっており，そのような状態は全角運動量 j によってラベル付けされる．(2.6.28) により全角運動量 j は (半整数スピンかヘリシティの粒子が奇数個だから) 半整数であり，$2j+1=2,4,\cdots$ 個の縮退した状態が存在するからだ．驚くべき結果は，回転不変性が静電場などの外場の摂動 (例えば $H=e\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r}$ のシュタルク効果) によって破られていても，その外場が最低限 T のもとで不変な限り，Ψ と TΨ の 2 重縮退が残るということだ．特に，もしその粒子が電気 (または重力) 双極子モーメントを持っている (つまり先程のハミルトニアンを摂動で持つ) と仮定すると，摂動によって系の回転不変性が失われ，結果その $2j+1$ 個のスピン状態の間の縮退は外部電場か重力場のもとで完全に解ける．しかし先程言ったように二重縮退は残っていなければならない！したがって仮定が偽となり，半整数のスピンかヘリシティを持つ粒子が奇数個集まって作られる電気 (重力) 双極子モーメントは，時間反転不変性によって禁止される！

議論を完全にするために，P と T は同じ質量の粒子の多重項により複雑に作用しうるとする場合も考える．(補遺 C で考察する．) この場合で物理的に意味のある場合は知られていない．

2.7 射影表現

ここで，2.2 節で述べた，対称性の群が物理的状態の上で射影表現になっている，つまり対称性群の元 $T, \bar{T}$ などが物理的ヒルベルト空間上で，ユニタリー演算子 $U(T), U(\bar{T})$ 等で表されていて，次の結合則を満たしている場合を考える．

$$U(T)U(\bar{T}) = \exp\Big(i\phi(T,\bar{T})\Big)U(T\bar{T})$$

ここで ϕ は実の位相だ．(2.7.1) の位相 ϕ が満たさなければならない基本的な条件は，結合則

$$U(T_3)\Big(U(T_2)U(T_1)\Big) = \Big(U(T_3)U(T_2)\Big)U(T_1)$$

からくるもので，

$$\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) =& U(T_3)\exp(i\phi(T_2,T_1))U(T_2T_1) \\
=& \exp(i\phi(T_2,T_1) + i\phi(T_3,T_2T_1))U(T_3T_2T_1) \\
(\mathrm{RHS}) =& \exp(i\phi(T_3,T_2))U(T_3T_2)U(T_1) \\
=& \exp(i\phi(T_3,T_2) + i\phi(T_3T_2,T_1))U(T_3T_2T_1) \\
\therefore \quad & \phi(T_2,T_1) + \phi(T_3,T_2T_1) = \phi(T_3,T_2) + \phi(T_3T_2,T_1)
\end{aligned}$$

となる．もちろん，次の形をしたどんな位相もこの関係式を満たす．

$$\phi(T,\bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T})$$

実際

$$\begin{aligned}
\phi(T_2,T_1) + \phi(T_3,T_2T_1) =& [\alpha(T_2T_1) - \alpha(T_2) - \alpha(T_1)] + [\alpha(T_3T_2T_1) - \alpha(T_3) - \alpha(T_2T_1)] \\
=& -\alpha(T_3) - \alpha(T_2) \\
& + \alpha(T_3T_2T_1) - \alpha(T_1) \\
=& \alpha(T_3T_2) - \alpha(T_3) - \alpha(T_2) \\
& + \alpha(T_3T_2T_1) - \alpha(T_3T_2) - \alpha(T_1) \\
=& \phi(T_3,T_2) + \phi(T_3T_2,T_1)
\end{aligned}$$

となって関係式を満たしていることが分かる．そのような位相をもつ射影表現は，以下のように $U(T)$ の置き換えをすれば通常の表現となる．

$$\tilde{U}(T) := U(T)\exp(i\alpha(T))$$

実際

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(T)\tilde{U}(\bar{T}) =& \exp\big(i\alpha(T) + i\alpha(\bar{T})\big)U(T)U(\bar{T}) \\
=& \exp\big(i[\alpha(T) + \alpha(\bar{T})]\big)\exp\big(i\phi(T,\bar{T})\big)U(T\bar{T}) \\
=& \exp\big(i\alpha(T\bar{T})\big)U(T\bar{T}) \\
=& \tilde{U}(T\bar{T})
\end{aligned}$$

(2.7.2) を満たし，(2.7.3) の形をした $\Delta\phi(T,\bar{T})$ だけしか互いに異ならない関数の集合

$$[\phi(T,\bar{T})] = \{\phi'(T,\bar{T}) | \phi'(T,\bar{T}) = \phi(T,\bar{T}) + \Delta\phi(T,\bar{T})\}$$

は「2 コサイクル」と呼ばれる．

ここでコサイクルについて補足しておく．群 G の n 個直積 G^n から実数 $\mathbb{R}$ への関数の集合 $C^n : G^n \to \mathbb{R}$ を n コチェインと呼び，その元 $f \in C^n$ に対して n コバウンダリ作用素 $\delta_n : C^n \to C^{n+1}$ を

$$(\delta_n f)(g_1,g_2,\cdots,g_{n+1}) = f(g_2,\cdots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1}f(g_1,\cdots,g_n)$$

で定義する．これは $\delta_{n+1}\circ\delta_n=0$ を満たす意味で境界作用素の双対である．一般の場合で示すのは面倒だから，わかりやすく本質的な $n=1$ の場合で示すと

$$
\begin{aligned}
(\delta_2(\delta_1 f))(g_1,g_2,g_3)=&(\delta_1 f)(g_2,g_3)-(\delta_1 f)(g_1g_2,g_3)+(\delta_1 f)(g_1,g_2g_3)-(\delta_1 f)(g_1,g_2)\\
=&f(g_3)-f(g_2g_3)+f(g_2)\\
&-f(g_3)+f(g_1g_2g_3)-f(g_1g_2)\\
&+f(g_2g_3)-f(g_1g_2g_3)+f(g_1)\\
&-f(g_2)+f(g_1g_2)-f(g_1)\\
=&0
\end{aligned}
$$

となる．コバウンダリ作用素の像

$$\mathrm{Im}\delta_{n-1}=\{\delta_{n-1}f|f\in C^{n-1}\}\in C^n$$

を n コサイクル B^n と呼ぶ．具体的に 2 コサイクル B^2 の元は

$$(\delta_1 h)(g_1,g_2)=h(g_2)-h(g_1g_2)+h(g_1)$$

と書ける．一方

$$\mathrm{Ker}\delta_n=\{f|\delta_n f=0\}\in C^n$$

を n コバウンダリ Z^n と呼ぶ．2 コバウンダリ Z^2 の元は

$$0=(\delta_2 f)(g_1,g_2,g_3)=f(g_2,g_3)-f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2)$$

を満たす関数 f である．n コホモロジー H^n は，それらの剰余類をとり

$$H^n=Z^n/B^n$$

としたもので定義される．すなわち，$\Delta f\in B^n$ だけ異なる二つの Z^n の元 $f'=f+\Delta f$ を同一視することで得られる同値類の集合である．

(2.7.2) を書き換えると $(\delta_2\phi)(T_3,T_2,T_1)=0$ となり，(2.7.3) は $\phi(T,\bar{T})=(\delta_1\alpha)(T,\bar{T})$ と書くことができる．したがって射影表現の位相 ϕ は 2 コサイクル Z^2 の元であり，2 コバウンダリ B^2 だけの違いは $U(T)$ の再定義によって同じ射影表現とみなすことができる．自明なコサイクルは関数 $\phi=0$ を含み，したがって (2.7.3) の形の関数のみでできている．これらは $U(T)$ の再定義で吸収できるのだった．ここでは，対称群が自明でない 2 コサイクルが持てるかどうかに興味ある．つまり，それが，物理的なヒルベルト空間上で，$\phi(T,\bar{T})$ が上のように消すことができないという意味で，固有に射影的であるのかどうか，という点だ．

この問題に答えるために，まず最初に (2.7.1) の位相 ϕ が微小変換の生成子の交換関係に与える影響を調べる．$\bar{T}$ か T が恒等変換ならば，位相 ϕ は明らかに消える．

$$
\begin{aligned}
U(T)U(1)=&\exp(i\phi(T,1))U(T1)\quad\Rightarrow\quad\phi(T,1)=0\\
U(1)U(\bar{T})=&\exp\bigl(i\phi(1,\bar{T})\bigr)U(1\bar{T})\quad\Rightarrow\quad\phi(1,\bar{T})=0
\end{aligned}
$$

よって，もし T と $\bar{T}$ が共に恒等変換の近傍ならば，位相は小さいはずだ．座標 θ^a を使って (2.2 節と同様に) 群の元を $T(0)=1$ となるようにパラメータ化すると，(2.7.4) から $\phi(T(\theta),T(\bar{\theta}))$ の $\theta=\bar{\theta}=0$ の周りの展開が $\theta\bar{\theta}$ の次数から始まることがわかる．($\theta,\bar{\theta},\theta^2,\bar{\theta}^2$ から始まると，片方だけ $\theta=0$ か $\bar{\theta}=0$ のときに (2.7.4) を満たさない．)

$$\phi\Bigl(T(\theta),T(\bar{\theta})\Bigr)=f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b+\cdots$$

ここで ϕ が実位相だから，f_{ab} は実の数係数だ．この展開を (2.7.1) のベキ級数展開に代入して再び $\theta\bar{\theta}$ の項を比べると

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) =& \left[1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \cdots\right]\left[1 + i\bar{\theta}^a t_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^c t_{bc} + \cdots\right] \\
=& \cdots - \theta^b\bar{\theta}^c t_b t_c + \cdots \\
= (\mathrm{RHS}) =& (1 + i f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b + \cdots) \\
& \times \left[1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f^a{}_{bc}\theta^b\bar{\theta}^c + \cdots)t_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + \cdots)(\theta^c + \bar{\theta}^c + \cdots)t_{bc} + \cdots\right] \\
=& \cdots + i f_{bc}\theta^b\bar{\theta}^c + i f^a{}_{bc}\theta^b\bar{\theta}^c t_a + t_{bc}\theta^b\bar{\theta}^c + \cdots \\
\therefore \quad & t_{bc} = -t_b t_c - i f^a{}_{bc} t_a - i f_{bc}
\end{aligned}
$$

$t_{cb} = t_{bc}$ より

$$
\begin{aligned}
-t_c t_b - i f^a{}_{bc} t_a - i f_{cb} =& - t_b t_c - i f^a{}_{bc} t_a - i f_{bc} \\
\therefore \quad [t_b, t_c] =& i(-f^a{}_{bc} + f^a{}_{cb})t_a + i(-f_{bc} + f_{cb}) \\
=& i C^a{}_{bc} t_a + i C_{bc} 1
\end{aligned}
$$

となる．ここで C_{bc} は反対称係数

$$
C_{bc} := -f_{bc} + f_{cb}
$$

である．交換関係の右辺に単位元 1 に比例する項 (通常，中心電荷と呼ばれる) が現れることは，群の射影表現に位相 ϕ があることのリー代数への反映だ．

係数 C_{bc} と $C^a{}_{bc}$ はヤコビ恒等式から導かれるある重要な拘束条件に従う．(2.7.6) と t_d との交換子をとると

$$
\begin{aligned}
[[t_b, t_c], t_d] =& i C^a{}_{bc}[t_a, t_d] + i C_{bc}[1, t_d] \\
=& i C^a{}_{bc}(i C^e{}_{ad} t_e + i C_{ad} 1) \\
=& - C^a{}_{bc} C^e{}_{ad} t_e - C^a{}_{bc} C_{ad} 1
\end{aligned}
$$

であるから，ヤコビ恒等式から

$$
\begin{aligned}
0 =& [[t_b, t_c], t_d] + [[t_c, t_d], t_b] + [[t_d, t_b], t_c] \\
=& (-C^a{}_{bc} C^e{}_{ad} t_e - C^a{}_{bc} C_{ad} 1) + (-C^a{}_{cd} C^e{}_{ab} t_e - C^a{}_{cd} C_{ab} 1) + (-C^a{}_{db} C^e{}_{ac} t_e - C^a{}_{db} C_{ac} 1) \\
=& - (C^a{}_{bc} C^e{}_{ad} + C^a{}_{cd} C^e{}_{ab} + C^a{}_{db} C^e{}_{ac}) t_e - (C^a{}_{bc} C_{ad} + C^a{}_{cd} C_{ab} + C^a{}_{db} C_{ac}) 1
\end{aligned}
$$

となって，二つの条件

$$
\begin{aligned}
C^a{}_{bc} C^e{}_{ad} + C^a{}_{cd} C^e{}_{ab} + C^a{}_{db} C^e{}_{ac} =& 0 \\
C^a{}_{bc} C_{ad} + C^a{}_{cd} C_{ab} + C^a{}_{db} C_{ac} =& 0
\end{aligned}
$$

を得る．これは常に自明なゼロでない解

$$
C_{ab} = C^e{}_{ab}\phi_e
$$

を持っている．ここで ϕ_e は任意の実定数だ．(実際に二つ目の条件式に代入し，一つ目の条件式を使えば解になっていることがすぐ確かめられる．) これが解となっている射影表現 (つまり位相 ϕ に現れる f_{ab} が，(2.7.7) と (2.7.16) で関係付いているとき) では，(2.7.6) から中心電荷を以下の生成子の再定義で消すことができる．

$$
t_a \to \tilde{t}_a := t_a + \phi_a
$$

こうすると，新しい生成子は中心電荷のない交換関係を満たすことができる．

$$
\begin{aligned}
[\tilde{t}_b, \tilde{t}_c] =&[t_b, t_c] + [t_b, \phi_c] + [\phi_b, t_c] + [\phi_b, \phi_c] \\
=&[t_b, t_c] = iC^a{}_{bc} t_a + iC_{bc} 1 \\
=&iC^a{}_{bc}(t_a + \phi_a) \\
=&iC^a{}_{bc}\tilde{t}_a
\end{aligned}
$$

もちろん，リー代数は (2.7.9) の解として (2.7.10) 以外のものを持つ場合も，そうでない場合もある．(中心電荷を消しただけであって，これで固有射影表現が消せるかどうかはまだわからない．)

ここで固有の射影表現があるかどうか，を決める鍵となる定理を述べる．

任意の群の，どんな表現 $U(T)$ の位相も，もし以下の 2 つの条件が満たされれば (2.7.1) で $\phi = 0$ と選ぶことができる．

1. この群の生成子を (2.7.11) でしたように再定義して，リー代数から全ての中心電荷を消去する．

2. 群が単連結である．つまり，どんな二つの群の元も，群の内部を通る経路で結ばれていて，そのような経路は連続的に変形できる．

この定理はこの章の補遺 B で証明する．そこではまた，単連結ではない群についても述べる．この定理によれば，固有射影表現が可能になるには，ちょうど二つの (同時でもよい) やりかたがある．一つは代数的なもので，群が単位元の近傍でも射影的に表現される場合で，もう一つは，トポロジー的で，群が単連結ではなく，「1 から $\bar{T}$ に行き，$\bar{T}$ から $T\bar{T}$ に行く経路」が,「1 から $T\bar{T}$ に行く他の経路」に連続的に変形できないことがある場合だ．後者の場合は，U 演算子を定義するのに使った (2.7.1) の位相 ϕ は，様々な群の元と原点を結ぶ基準経路の選び方による．

これらの可能性を非斉次ローレンツ群の特殊な場合について順に調べる．

(A) 代数

中心電荷があるとした場合の，非斉次ローレンツ群の生成子の交換関係は (2.4.12)〜(2.4.14) の代わりに以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] =&\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} + C^{\rho\sigma,\mu\nu} \\
i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] =&\eta^{\mu\rho} P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma} P^{\rho} + C^{\rho\sigma,\mu} \\
i[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] =&\eta^{\nu\rho} P^{\mu} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu} + C^{\rho,\mu\nu} \\
i[P^{\mu}, P^{\rho}] =&C^{\rho,\mu}
\end{aligned}
$$

(これは ϕ を具体的に決めて得られるというより，単位元に比例する項を単に追加したものだ．) 左辺の交換子の反対称性により

$$
\begin{aligned}
C^{\rho\sigma,\mu\nu} =& -C^{\mu\nu,\rho\sigma} \\
C^{\rho\sigma,\mu} =& -C^{\mu,\rho\sigma} \\
C^{\rho,\mu} =& -C^{\mu,\rho}
\end{aligned}
$$

が満たされている．さらに $J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}$ であることに対応して

$$
\begin{aligned}
C^{\rho\sigma,\mu\nu} =& -C^{\sigma\rho,\mu\nu} = -C^{\rho\sigma,\nu\mu} \\
C^{\rho,\mu\nu} =& -C^{\rho,\nu\mu}
\end{aligned}
$$

も満たされている．これらの定数全ては単に，ある代数的性質を持ち，そのために $J^{\mu\nu}$ と P^{μ} を定数分だけ (2.7.11) のようにずらすことによって取り除けることを示す．これを示すためには，(2.7.8)(2.7.9) と同様，ヤコビ恒等式を使う．

$$
0 = [J^{\mu\nu}, [P^{\rho}, P^{\sigma}]] + [P^{\sigma}, [J^{\mu\nu}, P^{\rho}]] + [P^{\rho}, [P^{\sigma}, J^{\mu\nu}]]
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},P^{\rho}]\right] + \left[P^{\rho},\left[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}\right]\right] + \left[J^{\mu\nu},\left[P^{\rho},J^{\lambda\eta}\right]\right] \\
0 &= \left[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]\right] + \left[J^{\rho\sigma},\left[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}\right]\right] + \left[J^{\mu\nu},\left[J^{\rho\sigma},J^{\lambda\eta}\right]\right]
\end{aligned}
$$

(ちなみに，(2.7.16) より $[P^{\mu},[P^{\rho},P^{\sigma}]]=0$ なので，3 つの P^{μ} を含むヤコビ恒等式は自動的に満たされており，新しい情報を何ももたらさない．) 一つ目の恒等式は

$$
\begin{aligned}
[J^{\mu\nu},[P^{\rho},P^{\sigma}]] &= [J^{\mu\nu},-iC^{\sigma,\rho}] = 0 \\
[P^{\sigma},[J^{\mu\nu},P^{\rho}]] &= -i\eta^{\nu\rho}\,[P^{\sigma},P^{\mu}] + i\eta^{\mu\rho}\,[P^{\sigma},P^{\nu}] - i\,[P^{\sigma},C^{\rho,\mu\nu}] \\
&= -\eta^{\nu\rho}C^{\mu,\sigma} + \eta^{\mu\rho}C^{\nu,\sigma} \\
[P^{\rho},[P^{\sigma},J^{\mu\nu}]] &= -i\eta^{\sigma\mu}\,[P^{\rho},P^{\nu}] + i\eta^{\sigma\nu}\,[P^{\rho},P^{\mu}] - i\,[P^{\rho},C^{\mu\nu,\sigma}] \\
&= -\eta^{\sigma\mu}C^{\nu,\rho} + \eta^{\sigma\nu}C^{\mu,\rho} \\
\therefore\quad 0 &= +\eta^{\nu\rho}C^{\mu,\sigma} - \eta^{\mu\rho}C^{\nu,\sigma} - \eta^{\sigma\nu}C^{\mu,\rho} + \eta^{\sigma\mu}C^{\nu,\rho}
\end{aligned}
$$

を与える．二つ目の恒等式からは

$$
\begin{aligned}
\left[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},P^{\rho}]\right] &= -i\eta^{\nu\rho}\left[J^{\lambda\eta},P^{\mu}\right] + i\eta^{\mu\rho}\left[J^{\lambda\eta},P^{\nu}\right] - i\left[J^{\lambda\eta},C^{\rho,\mu\nu}\right] \\
&= -\eta^{\nu\rho}\left(\eta^{\eta\mu}P^{\lambda} - \eta^{\lambda\mu}P^{\eta} + C^{\mu,\lambda\eta}\right) + \eta^{\mu\rho}\left(\eta^{\eta\nu}P^{\lambda} - \eta^{\lambda\nu}P^{\eta} + C^{\nu,\lambda\eta}\right) \\
\left[P^{\rho},\left[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}\right]\right] &= -i\eta^{\eta\mu}\left[P^{\rho},J^{\lambda\nu}\right] + i\eta^{\lambda\mu}\left[P^{\rho},J^{\eta\nu}\right] + i\eta^{\nu\lambda}\left[P^{\rho},J^{\mu\eta}\right] - i\eta^{\nu\eta}\left[P^{\rho},J^{\mu\lambda}\right] - i[P^{\rho},C^{\mu\nu,\lambda\eta}] \\
&= -\eta^{\eta\mu}(\eta^{\rho\lambda}P^{\nu} - \eta^{\rho\nu}P^{\lambda} + C^{\lambda\nu,\rho}) + \eta^{\lambda\mu}(\eta^{\rho\eta}P^{\nu} - \eta^{\rho\nu}P^{\eta} + C^{\eta\nu,\rho}) \\
&\quad + \eta^{\nu\lambda}(\eta^{\rho\mu}P^{\eta} - \eta^{\rho\eta}P^{\mu} + C^{\mu\eta,\rho}) - \eta^{\nu\eta}(\eta^{\rho\mu}P^{\lambda} - \eta^{\rho\lambda}P^{\mu} + C^{\mu\lambda,\rho}) \\
\left[J^{\mu\nu},\left[P^{\rho},J^{\lambda\eta}\right]\right] &= -\left[J^{\mu\nu},\left[J^{\lambda\eta},P^{\rho}\right]\right] \\
&= +\eta^{\eta\rho}\left(\eta^{\nu\lambda}P^{\mu} - \eta^{\mu\lambda}P^{\nu} + C^{\lambda,\mu\nu}\right) - \eta^{\lambda\rho}\left(\eta^{\nu\eta}P^{\mu} - \eta^{\mu\eta}P^{\nu} + C^{\eta,\mu\nu}\right)
\end{aligned}
$$

(三つ目は，一つ目の $(\mu,\lambda)\leftrightarrow(\lambda,\eta)$ の置換をすると簡単に得られる．) これらを足し合わせると (ちゃんと P^{μ} に比例する項は全て打ち消しあって)

$$
\begin{aligned}
0 =& \eta^{\nu\rho}C^{\mu,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho}C^{\nu,\lambda\eta} - \eta^{\mu\eta}C^{\rho,\lambda\nu} + \eta^{\lambda\mu}C^{\rho,\eta\nu} \\
&+ \eta^{\lambda\nu}C^{\rho,\mu\eta} - \eta^{\eta\nu}C^{\rho,\mu\lambda} + \eta^{\rho\lambda}C^{\eta,\mu\nu} - \eta^{\rho\eta}C^{\lambda,\mu\nu}
\end{aligned}
$$

が得られる．($C^{\mu\nu,\rho}=-C^{\rho,\mu\nu}$ に気を付ける．) 三つ目の恒等式からは

$$
\begin{aligned}
\left[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]\right] &= -i\eta^{\nu\rho}\left[J^{\lambda\eta},,J^{\mu\sigma}\right] + i\eta^{\mu\rho}\left[J^{\lambda\eta},J^{\nu\sigma}\right] + i\eta^{\sigma\mu}\left[J^{\lambda\eta},J^{\rho\nu}\right] - i\eta^{\sigma\nu}\left[J^{\lambda\eta},J^{\rho\mu}\right] \\
&\quad - i\left[J^{\lambda\eta},C^{\rho\sigma,\mu\nu}\right] \\
&= -\eta^{\nu\rho}(\eta^{\eta\mu}J^{\lambda\mu} - \eta^{\lambda\mu}J^{\eta\sigma} - \eta^{\sigma\lambda}J^{\mu\eta} + \eta^{\sigma\eta}J^{\mu\lambda} + C^{\mu\sigma,\lambda\eta}) \\
&\quad + \eta^{\mu\rho}(\eta^{\eta\nu}J^{\lambda\sigma} - \eta^{\lambda\nu}J^{\eta\sigma} - \eta^{\sigma\lambda}J^{\nu\eta} + \eta^{\sigma\eta}J^{\nu\lambda} + C^{\nu\sigma,\lambda\eta}) \\
&\quad - \eta^{\sigma\mu}(\eta^{\eta\nu}J^{\lambda\rho} - \eta^{\lambda\nu}J^{\eta\rho} - \eta^{\rho\lambda}J^{\nu\eta} + \eta^{\rho\eta}J^{\nu\lambda} + C^{\nu\rho,\lambda\eta}) \\
&\quad + \eta^{\sigma\nu}(\eta^{\eta\mu}J^{\lambda\rho} - \eta^{\lambda\mu}J^{\eta\rho} - \eta^{\rho\lambda}J^{\mu\eta} + \eta^{\rho\eta}J^{\mu\lambda} + C^{\mu\rho,\lambda\eta}) \\
\left[J^{\rho\sigma},\left[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}\right]\right] &= -\eta^{\eta\mu}(\eta^{\sigma\lambda}J^{\rho\lambda} - \eta^{\rho\lambda}J^{\sigma\nu} - \eta^{\nu\rho}J^{\lambda\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\lambda\rho} + C^{\lambda\nu,\rho\sigma}) \\
&\quad + \eta^{\lambda\mu}(\eta^{\sigma\eta}J^{\rho\eta} - \eta^{\rho\eta}J^{\sigma\nu} - \eta^{\nu\rho}J^{\eta\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\eta\rho} + C^{\eta\nu,\rho\sigma}) \\
&\quad - \eta^{\nu\lambda}(\eta^{\sigma\eta}J^{\rho\mu} - \eta^{\rho\eta}J^{\sigma\mu} - \eta^{\mu\rho}J^{\eta\sigma} + \eta^{\mu\sigma}J^{\eta\rho} + C^{\eta\mu,\rho\sigma}) \\
&\quad + \eta^{\nu\eta}(\eta^{\sigma\lambda}J^{\rho\mu} - \eta^{\rho\lambda}J^{\sigma\mu} - \eta^{\mu\rho}J^{\lambda\sigma} + \eta^{\mu\sigma}J^{\lambda\rho} + C^{\lambda\mu,\rho\sigma}) \\
\left[J^{\mu\nu},\left[J^{\rho\sigma},J^{\lambda\eta}\right]\right] &= -\eta^{\sigma\lambda}(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\eta} - \eta^{\eta\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\eta\nu}J^{\rho\mu} + C^{\rho\eta,\mu\nu}) \\
&\quad + \eta^{\rho\lambda}(\eta^{\nu\sigma}J^{\mu\eta} - \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\eta} - \eta^{\eta\mu}J^{\sigma\nu} + \eta^{\eta\nu}J^{\sigma\mu} + C^{\sigma\eta,\mu\nu}) \\
&\quad - \eta^{\eta\rho}(\eta^{\nu\sigma}J^{\mu\lambda} - \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\lambda} - \eta^{\lambda\mu}J^{\sigma\nu} + \eta^{\lambda\nu}J^{\sigma\mu} + C^{\sigma\lambda,\mu\nu}) \\
&\quad + \eta^{\eta\sigma}(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} - \eta^{\lambda\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\lambda\sigma}J^{\rho\mu} + C^{\rho\lambda,\mu\nu})
\end{aligned}
$$

(一つ目から $(\lambda,\eta,\mu,\nu,\rho,\sigma)\rightarrow(\rho,\sigma,\lambda,\eta,\mu,\nu)$ と $(\lambda,\eta,\mu,\nu,\rho,\sigma)\rightarrow(\mu,\nu,\rho,\sigma,\lambda,\eta)$ の置換で二つ目と三つ目が得られる．) これらを足し合わせると，(ちゃんと $J^{\mu\nu}$ に比例する項は全て打ち消しあって)

$$
0 = +\eta^{\nu\rho}C^{\mu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho}C^{\nu\sigma,\lambda\eta} + \eta^{\sigma\mu}C^{\nu\rho,\lambda\eta} - \eta^{\sigma\nu}C^{\mu\rho,\lambda\eta}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\eta^{\eta\mu}C^{\lambda\nu,\rho\sigma}-\eta^{\lambda\mu}C^{\eta\nu,\rho\sigma}+\eta^{\nu\lambda}C^{\eta\mu,\rho\sigma}-\eta^{\nu\eta}C^{\lambda\mu,\rho\sigma}\\
&+\eta^{\sigma\lambda}C^{\rho\eta,\mu\nu}-\eta^{\rho\lambda}C^{\sigma\eta,\mu\nu}+\eta^{\eta\rho}C^{\sigma\lambda,\mu\nu}-\eta^{\eta\sigma}C^{\rho\lambda,\mu\nu}
\end{aligned}
$$

が得られる．(2.7.23) の両辺を $\eta_{\nu\rho}$ と縮約させて

$$
\begin{aligned}
0=&\eta_{\nu\rho}\eta^{\nu\rho}C^{\mu,\sigma}-\eta_{\nu\rho}\eta^{\mu\rho}C^{\nu,\sigma}-\eta_{\nu\rho}\eta^{\sigma\nu}C^{\mu,\rho}+\eta_{\nu\rho}\eta^{\sigma\mu}C^{\nu,\rho}\\
=&4C^{\mu,\sigma}-C^{\mu,\sigma}-C^{\mu,\sigma}+0\\
=&2C^{\mu,\sigma}\\
\therefore\quad C^{\mu,\sigma}=&0
\end{aligned}
$$

を得る．(ここで，(2.7.19) より

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}C^{\mu,\nu}=&\eta_{\nu\mu}C^{\nu,\mu}\quad(\text{和の添え字の取り換え})\\
=&-\eta_{\mu\nu}C^{\mu,\nu}\\
\therefore\quad\eta_{\mu\nu}C^{\mu,\nu}=&0
\end{aligned}
$$

であることを使った．)(2.7.24) の両辺を $\eta_{\nu\rho}$ と縮約すると

$$
\begin{aligned}
0=&4C^{\mu,\lambda\eta}-C^{\mu,\lambda\eta}-\eta^{\mu\eta}\eta_{\nu\rho}C^{\rho,\lambda\nu}+\eta^{\lambda\mu}\eta_{\nu\rho}C^{\rho,\eta\nu}\\
&+C^{\lambda,\mu\eta}-C^{\eta,\mu\lambda}+C^{\eta,\mu\lambda}-C^{\lambda,\mu\eta}\\
=&3C^{\mu,\lambda\eta}-\eta^{\mu\eta}\eta_{\rho\nu}C^{\rho,\lambda\nu}+\eta^{\lambda\mu}\eta_{\rho\nu}C^{\rho,\eta\nu}\\
\therefore\quad C^{\mu,\lambda\eta}=&\frac{1}{3}\eta^{\mu\eta}\eta_{\rho\nu}C^{\rho,\lambda\nu}-\frac{1}{3}\eta^{\lambda\mu}\eta_{\rho\nu}C^{\rho,\eta\nu}\\
=&\eta^{\mu\eta}C^{\lambda}-\eta^{\mu\lambda}C^{\eta}\\
C^{\lambda}:=&\frac{1}{3}\eta_{\rho\nu}C^{\rho,\lambda\nu}
\end{aligned}
$$

となる．(注意, $C^{\mu,\rho\sigma}$ は ρ,σ に関して反対称だが，コンマを超えて入れ替えてはいけない．よって $\eta_{\rho\nu}C^{\rho,\lambda\nu}=0$ ではない．以下で行う $C^{\mu\nu,\rho\sigma}$ についても同様で，μ,ν と ρ,σ に関してはそれぞれ反対称だが，コンマを超えて入れ替えて反対称だとは考えてはいけない．$\eta_{\nu\rho}C^{\nu,\rho}=0$ は 2 つの添え字しかなく ν,ρ について反対称だという性質 (2.7.19) からうまくゼロになるだけだ．もちろん $\eta_{\nu\rho}C^{\mu,\nu\rho}=0$ と $\eta_{\nu\rho}C^{\nu\rho,\mu\sigma}=0$ は成り立っている．)(2.7.25) と $\eta_{\nu\rho}$ を縮約して

$$
\begin{aligned}
0=&4C^{\mu\sigma,\lambda\eta}-C^{\mu\sigma,\lambda\eta}+\eta^{\rho\mu}\eta_{\nu\rho}C^{\rho\nu,\lambda\eta}+C^{\sigma\mu,\lambda\eta}\\
&+\eta^{\eta\mu}\eta_{\nu\rho}C^{\lambda\nu,\rho\sigma}-\eta^{\lambda\mu}\eta_{\nu\rho}C^{\eta\nu,\rho\sigma}-C^{\mu\eta,\lambda\sigma}+C^{\mu\lambda,\eta\sigma}\\
&+\eta^{\sigma\lambda}\eta_{\nu\rho}C^{\rho\eta,\mu\nu}-C^{\sigma\eta,\mu\lambda}+C^{\sigma\lambda,\mu\eta}-\eta^{\eta\sigma}\eta_{\nu\rho}C^{\rho\lambda,\mu\nu}\\
=&2C^{\mu\sigma,\lambda\eta}+\eta^{\eta\mu}(\eta_{\nu\rho}C^{\lambda\nu,\rho\sigma})-\eta^{\lambda\mu}(\eta_{\nu\rho}C^{\eta\nu,\rho\sigma})+\eta^{\sigma\lambda}(\eta_{\nu\rho}C^{\rho\eta,\mu\nu})+\eta^{\eta\sigma}(\eta_{\nu\rho}C^{\lambda\rho,\mu\nu})\\
=&2C^{\mu\sigma,\lambda\eta}-\eta^{\eta\mu}(\eta_{\nu\rho}C^{\lambda\nu,\sigma\rho})+\eta^{\lambda\mu}(\eta_{\nu\rho}C^{\eta\nu,\sigma\rho})-\eta^{\sigma\lambda}(\eta_{\rho\nu}C^{\eta\rho,\mu\nu})+\eta^{\eta\sigma}(\eta_{\rho\nu}C^{\lambda\rho,\mu\nu})\\
\therefore\quad C^{\mu\sigma,\lambda\eta}=&\frac{1}{2}\eta^{\eta\mu}(\eta_{\nu\rho}C^{\lambda\nu,\sigma\rho})-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}(\eta_{\nu\rho}C^{\eta\nu,\sigma\rho})+\frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\eta_{\rho\nu}C^{\eta\rho,\mu\nu})-\frac{1}{2}\eta^{\eta\sigma}(\eta_{\rho\nu}C^{\lambda\rho,\mu\nu})\\
=&\eta^{\eta\mu}C^{\lambda\sigma}-\eta^{\lambda\mu}C^{\eta\sigma}+\eta^{\sigma\lambda}C^{\eta\mu}-\eta^{\eta\sigma}C^{\lambda\mu}\\
C^{\lambda\sigma}:=&\frac{1}{2}\eta_{\nu\rho}C^{\lambda\nu,\sigma\rho}
\end{aligned}
$$

を得る．(縮約することで所謂，情報を少なくしてこれらの式を出したが，逆にこれらを (2.7.24)(2.7.25) に代入すると自動的に満たしているから，ヤコビ恒等式からはこれ以上有益な情報は得られない．) これらの結果と交換関係 (2.4.12)(2.4.13)(2.4.14) の右辺との類似性を見比べよう．$J^{\mu\nu}\to C^{\mu\nu},P^{\rho}\to C^{\rho}$ と置き換えたものと同じだ！よって，もしそれぞれの C がゼロでない (中心電荷が存在する) なら，新しい生成子を以下のように定義してこれらの係数を消すことができる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}^{\mu}:=&P^{\mu}+C^{\mu}\\
\tilde{J}^{\mu\sigma}:=&J^{\mu\sigma}+C^{\mu\sigma}
\end{aligned}
$$

実際この結果，交換関係は

$$
\begin{aligned}
i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] =& i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] + i[J^{\mu\nu}, C^{\rho\sigma}] + i[C^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] + i[C^{\mu\nu}, C^{\rho\sigma}] \\
=& i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] \\
=& \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} + C^{\rho\sigma,\mu\nu} \\
=& \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} \\
& + \eta^{\nu\rho} C^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} C^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma} C^{\rho\mu} \\
=& \eta^{\nu\rho}(J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma}) - \eta^{\mu\rho}(J^{\nu\sigma} + C^{\nu\sigma}) - \eta^{\mu\sigma}(J^{\rho\nu} + C^{\rho\nu}) + \eta^{\nu\sigma}(J^{\rho\mu} + C^{\rho\mu}) \\
=& \eta^{\nu\rho} \tilde{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \tilde{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \tilde{J}^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma} \tilde{J}^{\rho\mu} \\
i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{P}^{\rho}] =& i[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] \\
=& \eta^{\nu\rho} P^{\mu} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu} + C^{\rho,\mu\nu} \\
=& \eta^{\nu\rho} P^{\mu} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu} + \eta^{\nu\rho} C^{\mu} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu} \\
=& \eta^{\nu\rho}(P^{\mu} + C^{\mu}) - \eta^{\mu\rho}(P^{\nu} + C^{\nu}) \\
=& \eta^{\nu\rho} \tilde{P}^{\mu} - \eta^{\mu\rho} \tilde{P}^{\nu} \\
i[\tilde{P}^{\mu}, \tilde{P}^{\rho}] =& i[P^{\mu}, P^{\rho}] = C^{\mu,\rho} = 0
\end{aligned}
$$

となって，通常のポアンカレ代数と同じ形になる．交換関係は今後常にこの形 (中心電荷は存在しない) として，チルダを落とすことにする．

ところで，$J^{\mu\nu}$ だけの代数 (ローレンツ代数) に中心電荷が存在しないことは，この代数が「半単純」であることからすぐに結論付けることができる．(半単純リー代数とは，「不変可換」部分代数，つまりお互いに可換な生成子の集合で，かつそれと他の生成子との交換関係が必ずこの集合に属するもの，が存在しないリー代数をいう．たとえば $ISO(2)$ のリー代数 (2.5.35)(2.5.36)(2.5.37) は不変可換部分代数は A, B で張られ，実際に他の生成子 J_3 との交換関係が A, B で張られる集合に属しているから，これは半単純ではない．) 一般的な定理によれば，半単純リー代数のどのような中心電荷も (2.7.32) のような生成子の再定義で取り除ける．一方，$J^{\mu\nu}$ と P^{μ} によって張られる全ポアンカレ代数は半単純ではない．実際 P^{μ} が不変可換部分代数をなす．したがって，その中心電荷も消せることを証明するために長い議論が必要だったのだ．実際，2.4 節で論じた非半単純ガリレイ部分代数には中心電荷である質量演算子 M がある．

非斉次ローレンツ群はこうして，中心電荷が存在しても生成子の再定義によってそれらを取り除けることがわかったので，固有射影表現を排除するための 2 つの条件のうち (a) の条件は満たされていることがわかった！次に調べるべきは，ポアンカレ群が単連結かどうかだ．

(B) トポロジー

非斉次ローレンツ群のトポロジーを調べるには，非斉次ローレンツ変換を 2×2 複素行列で表すのが便利だ．任意の実 4 元ベクトル V^{μ} から，エルミート 2×2 行列が

$$
v := V^{\mu}\sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}
$$

ここで σ_{μ} は,

$$
\sigma_0 := 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

からなる．逆に，任意の 2×2 エルミート行列は上の形に書ける (後に示す) ので，実 4 元ベクトル V^{μ} が定義できる．

エルミート性は，任意の複素 2×2 行列 λ を使った以下の変換で保たれる．

$$
v \to \lambda v \lambda^{\dagger}
$$

(実際 $(\lambda v\lambda^\dagger)^\dagger = \lambda v^\dagger\lambda^\dagger = \lambda v\lambda^\dagger$ となってエルミートだ．) さらに 4 元ベクトルの不変二乗積 $V_\mu V^\mu$ は v を用いて

$$
\begin{aligned}
V_\mu V^\mu =&(V^1)^2+(V^2)^2+(V^3)^2-(V^0)^2\\
=&-\left[(V^0+V^3)(V^0-V^3)-(V^1-iV^2)(V^1+iV^2)\right]=-\mathrm{Det}v
\end{aligned}
$$

と書ける．この行列式は変換 (2.7.37) のもとで

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Det}v\to&-\mathrm{Det}(\lambda v\lambda^\dagger)\\
=&-(\mathrm{Det}\lambda)(\mathrm{Det}\lambda)^*\mathrm{Det}v\quad \mathrm{Det}(AB)=(\mathrm{Det}A)(\mathrm{Det}B)\\
=&-|\mathrm{Det}\lambda|^2\mathrm{Det}v
\end{aligned}
$$

と変換される．したがって (複素数の絶対値は必ず正だから)

$$|\mathrm{Det}\lambda|=1$$

ならば不変二乗積 $V^\mu V_\mu$ は不変だ．(2.7.39) を満たす複素 2×2 行列 λ は (2.7.38) を不変にする実線形変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$，つまり斉次ローレンツ変換 $\Lambda(\lambda)$ を定義する．実際，$\lambda\sigma_\mu\lambda^\dagger$ は再びエルミート行列であるから σ_ν に実係数をかけて一意に展開することができて，

$$\lambda\sigma_\mu\lambda^\dagger=\Lambda(\lambda)^\nu{}_\mu\sigma_\nu$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
v=V^\mu\sigma_\mu\to&\lambda v\lambda^\dagger\\
=&V^\mu\lambda\sigma_\mu\lambda^\dagger\\
=&V^\mu\Lambda(\lambda)^\nu{}_\mu\sigma_\nu\\
=&(\Lambda(\lambda)^\nu{}_\mu V^\mu)\sigma_\mu
\end{aligned}
$$

となって，さらに λ が $|\mathrm{Det}\lambda|=1$ を満たすようなものであれば二乗積は不変だったのだから

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Det}\lambda|=&1\quad\Rightarrow\quad \eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu=\eta_{\mu\nu}\Lambda(\lambda)^\mu{}_\rho V^\rho\Lambda(\lambda)^\nu{}_\sigma V^\sigma\\
\therefore\quad \eta_{\mu\nu}=&\eta_{\mu\nu}\Lambda(\lambda)^\mu{}_\rho\Lambda(\lambda)^\nu{}_\sigma
\end{aligned}
$$

したがって $\Lambda(\lambda)$ はローレンツ変換となる．構成から明らかに λ に対して $\Lambda(\lambda)$ がただ一つ定まり，これは写像となる．さらにそのような二つの行列 $\lambda,\bar\lambda$ について

$$
\begin{aligned}
(\lambda\bar\lambda)V^\mu\sigma_\mu(\lambda\bar\lambda)^\dagger=&\Big(\Lambda(\lambda\bar\lambda)^\mu{}_\nu V^\nu\Big)\sigma_\mu\\
=\lambda(\bar\lambda V^\mu\bar\lambda^\dagger)\lambda^\dagger=&\lambda\Lambda(\bar\lambda)^\mu{}_\nu V^\nu\sigma_\mu\lambda^\dagger\\
=&\Lambda(\lambda)^\mu{}_\rho\Lambda(\bar\lambda)^\rho{}_\nu V^\nu\sigma_\mu
\end{aligned}
$$

となるから，以下が成立する．

$$\Lambda(\lambda\bar\lambda)=\Lambda(\lambda)\Lambda(\bar\lambda)$$

したがってこの λ から $\Lambda(\lambda)$ への写像は積を保存し，すなわち準同型写像である．

ところで，二つの λ が全体の位相だけ異なっている $(\lambda'=\lambda e^{i\theta}(\phi\in\mathbb{R}))$ とき，(2.7.37) で v には同じ影響を及ぼす

$$\lambda' v\lambda'^\dagger=\lambda e^{i\theta}ve^{-i\theta}\lambda^\dagger=\lambda v\lambda^\dagger$$

よってこの全体の位相だけ異なっている二つの λ は同一のローレンツ変換に対応するから，(2.7.39) により $\mathrm{Det}\lambda=e^{i\theta}(\theta\in\mathbb{R})$ となっているなら $\lambda\to\lambda e^{-i\theta}$ と再定義して左辺の位相を消すだけの自由度がある．よって λ の位相を

$$\mathrm{Det}\lambda=1$$

となるように選んでおく．これは (2.7.39) を満たしているから (2.7.41) と矛盾しない．行列式が 1 の複素 2×2 行列は $SL(2,\mathbb{C})$ と知られる群をなす．

$$SL(2,\mathbb{C}) = \{\lambda|\mathrm{Det}\lambda = 1, \lambda\in GL(2,\mathbb{C})\}$$

群の元は $4-1=3$ 個の複素パラメータ，つまり 6 個の実パラメータに依存する．これはローレンツ群と同じ数だ．($\Lambda^\mu{}_\nu$ は 4×4 行列で 16 個の要素があるが，条件式 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ によって制限されている．ρ,σ について対称なのでこの条件式は 10 個あり，よって独立パラメータは 6 個だ．) ただし，$SL(2,\mathbb{C})$ はローレンツ群と同一ではない．もし λ が $SL(2,\mathbb{C})$ の行列ならば ($n\times n$ 行列について $\mathrm{Det}(aA) = a^n\mathrm{Det}A$ だから)，$-\lambda$ も

$$\mathrm{Det}(-\lambda) = (-1)^2\mathrm{Det}\lambda = \mathrm{Det}\lambda = 1$$

となり，$SL(2,\mathbb{C})$ の行列であることがわかる．しかし (2.7.40) は λ について二次で入っているから，λ も $-\lambda$ も同じローレンツ変換を与える．

$$\begin{aligned}(-\lambda)V^\mu\sigma_\mu(-\lambda)^\dagger =&(\Lambda(-\lambda)^\mu{}_\nu V^\nu)\sigma_\mu\\ = \lambda V^\mu\sigma_\mu\lambda =&(\Lambda(\lambda)^\mu{}_\nu V^\nu)\sigma_\mu\\ \Lambda(-\lambda) = \Lambda(\lambda)&\end{aligned}$$

(σ_μ は 2×2 行列の基底を張り，一意的に展開されるから，それぞれの σ_μ の係数は等しくなる．) 実際

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{-i\theta/2}\end{pmatrix}$$

は $\mathrm{Det}\lambda = 1$ を満たすから $SL(2,\mathbb{C})$ の元であり，(2.7.40) に用いると

$$\begin{aligned}
\lambda v\lambda^\dagger &= \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{-i\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^0+V^3 & V^1-iV^2\\ V^1+iV^2 & V^0-V^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{i\theta/2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{-i\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} (V^0+V^3)e^{-i\theta/2} & (V^1-iV^2)e^{i\theta/2}\\ (V^1+iV^2)e^{-i\theta/2} & (V^0-V^3)e^{i\theta/2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} V^0+V^3 & (V^1-iV^2)e^{i\theta}\\ (V^1+iV^2)e^{-i\theta} & V^0-V^3\end{pmatrix}\\
= V'^\mu\sigma_\mu &= \begin{pmatrix} V'^0+V'^3 & V'^1-iV'^2\\ V'^1+iV'^2 & V'^0-V'^3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (V^1-iV^2)e^{i\theta} = V'^1-iV'^2,\quad (V^1+iV^2)e^{-i\theta} = V'^1+iV'^2,\quad V'^3 = V^3, V^0 = V'^0$$

$$\begin{aligned}
V'^1 =& \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}V^1 - i\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}V^2 = \cos\theta V^1 + \sin\theta V^2\\
V'^2 =& \frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2i}V^1 + \frac{ie^{-i\theta}+ie^{i\theta}}{2i}V^2 = -\sin\theta V^1 + \cos\theta V^2
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} V'^1\\ V'^2\\ V'^3\\ V'^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^1\\ V^2\\ V^3\\ V^0\end{pmatrix}$$

$$\Lambda(\lambda(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

となって，3 軸周りの角度 θ の回転をおこすローレンツ変換 $\Lambda(\lambda(\theta))$ に対応することがわかる．$\theta = 2\pi$ とすると，これは角度 2π の回転を引き起こし，それはこれは回転のない $\theta = 0$ の単位元 $\Lambda(\lambda(2\pi)) = 1$ に対応する．しかし $\lambda(2\pi) = -1$ であるから，異なる λ に対して同じローレンツ変換が対応していることが簡単にわかる．したがって，ローレンツ群は $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$，すなわち行列式が 1 の複素 2×2 行列で，λ と $-\lambda$ を同一視した群に同型だ．

$$SO(3,1)\simeq SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

つまり，$\Lambda : SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1)$ は $\lambda = +1, -1$ をともに単位元 $\Lambda(\lambda) = 1$ に送る全射 $\mathrm{Im}\Lambda = SO(3,1)$ だから，$\mathrm{Ker}\Lambda = \mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ となり，したがって群の準同型定理により同型

$$SO(3,1) = \mathrm{Im}\Lambda \simeq SL(2,\mathbb{C})/\mathrm{Ker}\Lambda = SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

がなりたつ．ちなみに Λ の全射性は自明ではない．まず微小な ω のときのローレンツ変換 ${\Lambda^\mu}_\nu$ に対する λ を示す必要があるが，これは (25.2.17) を導くときに繰り返すので，その計算を参照．さらに有限化する必要がある．微小ローレンツ行列

$$\begin{aligned}
{\Lambda^\mu}_\nu =& \delta^\mu_\nu + {\omega^\mu}_\nu \\
=& \delta^\mu_\nu + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(i\delta^\rho_\nu \eta^{\mu\sigma} - i\delta^\sigma_\nu \eta^{\mu\rho}) \\
=& \left[1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right]^\mu{}_\nu \quad \left({(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu}_\nu := i\delta^\rho_\nu \eta^{\mu\sigma} - i\delta^\sigma_\nu \eta^{\mu\rho}\right)
\end{aligned}$$

) から，有限で任意の $SO(3,1)$ の元は

$${\Lambda^\mu}_\nu = \left[\exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)\right]^\mu{}_\nu$$

と書くことができる．これは (2.4.27) あたりの計算で示した方法と同じやり方だ．そしてそれに対応する (25.2.17) の λ は

$$\begin{aligned}
\lambda =& 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}i\epsilon_{ijk}\omega_{ij} + \omega_{k0}\right] \\
=& 1 + \left[i\theta_k \frac{\sigma_k}{2} + \beta_k \frac{\sigma_k}{2}\right] \quad \because \theta_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{ij}, \quad \beta_i = \omega_{i0}
\end{aligned}$$

より有限の大きさにして

$$\lambda = \exp\left(i\theta_k \frac{\sigma_k}{2} + \beta_k \frac{\sigma_k}{2}\right)$$

と書くことができる．これは $\lambda\sigma_\mu\lambda^\dagger = {\Lambda^\nu}_\mu \sigma_\nu$ を満たすことが示せる．(これも有限化すれば簡単に示せる．実際，二つの微小パラメータ $\omega, \bar{\omega}$ を用いた λ をそれぞれ $\lambda(\omega), \bar{\lambda}(\bar{\omega})$ とおけば

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}\lambda =& 1 + \left[i(\theta_k + \bar{\theta}_k)\frac{\sigma_k}{2} + (\beta_k + \bar{\beta}_k)\frac{\sigma_k}{2}\right] \\
\bar{\lambda}\lambda\sigma_\mu(\bar{\lambda}\lambda)^\dagger =& \bar{\lambda}\lambda\sigma_\mu\lambda^\dagger\bar{\lambda}^\dagger \\
=& \bar{\lambda}(\sigma_\mu + {\omega^\nu}_\mu\sigma_\nu)\bar{\lambda} \\
=& \sigma_\mu + ({\omega^\nu}_\mu + {\bar{\omega}^\nu}_\mu)\sigma_\nu \\
=& \left[1 + \frac{i}{2}(\omega + \bar{\omega})_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right]^\nu{}_\mu \sigma_\nu
\end{aligned}$$

から両辺のパラメータが加法的になっていることに気付けば，両辺が自明に積分できて，有限な

$$\left[\exp\left(i\theta_k\frac{\sigma_k}{2} + \beta_k\frac{\sigma_k}{2}\right)\right]\sigma_\mu\left[\exp\left(i\theta_k\frac{\sigma_k}{2} + \beta_k\frac{\sigma_k}{2}\right)\right]^\dagger = \left[\exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)\right]^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

がなりたっていることがわかる．)$\mathrm{Det}\exp(A) = \exp(\mathrm{Tr}A)$ の公式 (後で示す) を使えば，$\mathrm{Tr}\sigma_k = 0$ と合わせてすぐ $\mathrm{Det}\lambda = 1$ が示せる．よってこれは $SL(2,\mathbb{C})$ の元だ．(λ と $-\lambda$ のどちらかが存在することさえ示せればよい．二重性によりもう片方の存在は自動的に保証される．) これで任意の元 $\Lambda \in SO(3,1)$ に対して $\lambda \in SL(2,\mathbb{C})$ が存在することが示せたので，写像は全射である．

(ちなみにだが，$SO(3,1)$ の任意の元は上のように書けるが，$SL(2,\mathbb{C})$ はそうではなく，上の表記で任意の元が書けるわけではない．例えば

$$\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は明らかに $SL(2,\mathbb{C})$ の元だが，上の表記のパラメータ θ_i, β_i をどのようにとってもこの元を表せない．あくまで，$SO(3,1)$ に対応した λ か $-\lambda$ の片方が上のように書ける，という表記であり，このような例外は所謂もう片方 $-\lambda$ に対応した元である．)

ローレンツ群のトポロジーを本格的に調べる前に，行列の極分解定理について述べておく．これは今後も何度か使うものだからここでしっかりと示す必要がある．

任意の正方行列 $\lambda \in M(n,\mathbb{C})$ に対し，半正定値エルミート行列 $H \in M_{\geq 0}(n,\mathbb{C})$ とユニタリー行列 $U \in U(n)$ が存在し，

$$\lambda = UH$$

と表すことができる．以下でこれを証明する．

まず，$\lambda^\dagger\lambda$ は半正定値エルミート行列である．実際

$$(\lambda^\dagger\lambda) = \lambda^\dagger\lambda$$

であるからエルミートであり，任意のゼロでない $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\boldsymbol{x}^\dagger(\lambda^\dagger\lambda)\boldsymbol{x} = (\lambda\boldsymbol{x})^\dagger\lambda\boldsymbol{x} = ||\lambda\boldsymbol{x}||^2 \geq 0$$

であるから半正定値である．エルミート行列には正規直交基底をなす固有ベクトルが存在するから，固有ベクトルで正規直交基底をなすものを

$$\{\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_n\}$$

とすると，これらは

$$\begin{aligned}\lambda^\dagger\lambda\boldsymbol{m}_i =& r_i\boldsymbol{m}_i\\ \boldsymbol{m}_i^\dagger\boldsymbol{m}_j =& \delta_{ij} \quad (i,j = 1,\cdots,n)\end{aligned}$$

がなりたつ．ここで $r_i(i=1,\cdots,n)$ は $\lambda^\dagger\lambda$ の固有値であり，$\lambda^\dagger\lambda$ はエルミートだから固有値は全て実数である．さらに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_i^\dagger\lambda^\dagger\lambda\boldsymbol{m}_i =& ||\lambda\boldsymbol{m}_i||^2 \geq 0\\ =& r_i\boldsymbol{m}_i^\dagger\boldsymbol{m}_i\\ =& r_i\end{aligned}$$

より全ての固有値は非負の実数である (半正定値エルミート行列の性質)．そこで固有値を正のものとゼロのものに分けて

$$\begin{aligned}r_i >& 0 \quad (i = 1,\cdots,r)\\ r_i =& 0 \quad (i = r+1,\cdots,n)\end{aligned}$$

とする．r は正の固有値の数である．$i = r+1,\cdots,n$ に関して

$$||\lambda\boldsymbol{m}_i||^2 = \boldsymbol{m}_i\lambda^\dagger\lambda\boldsymbol{m}_i = r_i = 0$$

であるから，内積の定義により $\lambda\boldsymbol{m}_i = 0(i = r+1,\cdots,n)$ である．ところで，正規直交基底の性質から

$$I = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{m}_i^\dagger$$

と書くことができて，

$$\lambda = \lambda I$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger \quad \because \lambda \boldsymbol{m}_i = 0 (i = r+1, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

である．ここで

$$
\boldsymbol{v}_i := \frac{1}{\sqrt{r_i}} \lambda \boldsymbol{m}_i
$$

と定めると

$$
\lambda = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{r_i} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger
$$

と書ける．$||\lambda \boldsymbol{m}_i||^2 = r_i$ より

$$
\boldsymbol{v}_i^\dagger \boldsymbol{v}_j = \frac{r_i}{\sqrt{r_i}\sqrt{r_j}} \delta_{ij} = \delta_{ij}
$$

を満たし，$\boldsymbol{v}_i (i = 1, \cdots, r)$ は正規直交基底をなす独立なベクトルである．したがって $\mathrm{Spec}\{\boldsymbol{v}_i, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ は n 次元ベクトル空間の中の r 次元部分空間を構成する．この部分空間に対する $n-r$ 次元の補空間の正規直交基底を $\{\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ とすると，任意の n 次元ベクトル $\mathbb{C}^n$ の元は正規直交基底

$$
\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} \\
&\boldsymbol{v}_i^\dagger \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

で一意に展開できる．$i = r+1, \cdots, n$ に関して $r_i = 0$ であることから，上での λ の正規直交基底での展開を拡張して

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \sum_{i=1}^{r} \sqrt{r_i} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger + 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{r_i} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger
\end{aligned}
$$

とできる．さらに

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{r_j} \boldsymbol{v}_i \delta_{ij} \boldsymbol{m}_j^\dagger \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{r_j} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{m}_j^\dagger \\
&= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger \sum_{j=1}^{n} \sqrt{r_j} \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{m}_j^\dagger
\end{aligned}
$$

と書ける．ここで行列 U, H を

$$
\begin{aligned}
U &:= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger \\
H &:= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{r_j} \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{m}_j^\dagger
\end{aligned}
$$

と定めれば,

$$
\lambda = UH
$$

と書ける．これらの行列は

$$
\begin{aligned}
U^\dagger U =& \sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{v}_i^\dagger \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{m}_j^\dagger \\
=& \sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{m}_i \delta_{ij} \boldsymbol{m}_j^\dagger \\
=& \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{m}_i^\dagger \\
=& I
\end{aligned}
$$

であるから U はユニタリー行列であり，

$$
\begin{aligned}
H^\dagger =& \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{r_j} \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{m}_j^\dagger \right)^\dagger \\
=& \sum_{j=1}^{n} \sqrt{r_j} \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{m}_j^\dagger \\
=& H
\end{aligned}
$$

であるからエルミートである．また任意のゼロでないベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ で

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^\dagger H \boldsymbol{x} =& \sum_{j=1}^{n} \sqrt{r_j} \boldsymbol{x}^\dagger \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{m}_j^\dagger \boldsymbol{x} \\
=& \sum_{j=1}^{n} \sqrt{r_j} ||\boldsymbol{m}_j^\dagger \boldsymbol{x}||^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

より H は半正定値行列である．これで証明ができた．

これは右極分解と呼ばれる．同様に $\lambda = H'U$ と別の半正定値エルミート行列 H' で分解できることも証明でき，それを左極分解と呼ぶ (U は右極分解と同じユニタリー行列)．これを示すには，右極分解の証明での最後の分解を，代わりに

$$
H' := \sum_{j=1}^{n} \sqrt{r_j} \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^\dagger
$$

として分解すればよい．

もし λ が特に正則行列だとすると，$\lambda^\dagger \lambda$ の固有値は全て正 $r_i > 0$ だから，H は正定値エルミート行列となる．さらにこのとき，極分解は一意的である．一意性を以下で証明する．

別の $V \in U(n), D \in M_{>0}(n, \mathbb{C})$ を持ってきて，$\lambda = UH = VD$ と表せたとする．まず $D \neq H$ と仮定し矛盾を導く．

$$
\begin{aligned}
H^2 =& H^\dagger H \quad \because H \text{ のエルミート性} \\
=& H^\dagger U^\dagger U H \quad \because U \text{ のユニタリー性} \\
=& \lambda^\dagger \lambda
\end{aligned}
$$

同様に $D^2 = \lambda^\dagger \lambda$ だから，$H^2 = D^2$ となる．ここで

$$
(H - D)\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v}
$$

を満たすゼロでない固有ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ とゼロでない固有値 $c \in \mathbb{R}$ が少なくとも一つ存在する．(なぜなら，H, D はともにエルミートだから，$(H - D)$ の両側からユニタリー行列で挟むことで固有値が対角成分になるように対角化できて

$$
\tilde{U}(H - D)\tilde{U}^{-1} = [\mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)]
$$

もし全ての固有値がゼロだと仮定すると，$H-D=\tilde{U}^{-1}0\tilde{U}=0$ より $H=D$ が導かれ仮定と反する．）このとき，任意の $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^n$ に対して H,D のエルミート性より $\boldsymbol{u}^\dagger HD\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^\dagger DH\boldsymbol{u}$ であるから

$$\begin{aligned}0=\boldsymbol{v}^\dagger(H^2-D^2)\boldsymbol{v}=&\boldsymbol{v}^\dagger(H+D)(H-D)\boldsymbol{v}\\=&c\boldsymbol{v}^\dagger(H+D)\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{v}^\dagger H\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{v}^\dagger H\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

となる．H,D の正定値性から $\boldsymbol{v}^\dagger H\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}^\dagger D\boldsymbol{v}$ はともに正で，よって右辺はゼロでない．よって矛盾が導けたので $H=D$ である．$\lambda^\dagger\lambda=UH=VH$ で H の正則性を使えば $U=V$ も導かれる．これで証明が完了した．

さらに H が正定値エルミート行列であるから，その固有値 $r_i(i=1,\cdots,n)$ は全て正であり，$r_i=e^{x_i}$ を満たす実数 x_i がただひとつ存在する．したがって

$$\begin{aligned}H=&P\mathrm{diag}(r_1,\cdots,r_n)P^{-1}\\=&P\mathrm{diag}(e^{x_1},\cdots e^{x_n})P^{-1}\\=&P\exp[\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)]P^{-1}\\=&\exp\left[P\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)P^{-1}\right]\end{aligned}$$

ここで $X:=P\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)P^{-1}$ とすると，これは

$$X^\dagger=\left[P\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)P^{-1}\right]^\dagger=P\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)P^{-1}=X$$

であるからエルミート行列となり，これを用いて $H=\exp X$ と書ける．よって任意の正則行列はユニタリー行列 U とエルミート行列 X により

$$\lambda=Ue^X$$

の形で書ける．

もう一つ線形代数に関する定理を示しておく．

任意の正方行列 $A\in M(n,\mathbb{C})$ に関して

$$\mathrm{Det}(e^A)=e^{\mathrm{Tr}A}$$

である．以下でこれを証明する．

(エルミート行列に限らず) 正方行列 $A\in M(n,\mathbb{C})$ にはジョルダン標準形 J(対角成分が A の固有値で，上三角行列なもの)

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \cdots & & \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

が存在し，ユニタリー行列 P と $A=PJP^{-1}$ で関係している．(これは証明しないで認めることにする．) したがって A の指数行列 e^A は

$$\begin{aligned}e^A=&e^{PJP^{-1}}\\=&\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}(PJP^{-1})^n\\=&P\left[\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}J^n\right]P^{-1}\\=&Pe^JP^{-1}\end{aligned}$$

と書ける．両辺の行列式をとると

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(e^A) =&\mathrm{Det}(Pe^JP^{-1})\\ =&\mathrm{Det}(e^J)\end{aligned}$$

ここで J は上三角行列で，対角成分は A の固有値 $\lambda_i (i = 1, \cdots, n)$ だから，e^J も上三角行列で対角成分は $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ である．(J のベキを考えて，$e^A = \sum \frac{1}{n!}A^n$ より明らか)

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \cdots & & \\ 0 & e^{\lambda_2} & & & \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

よって，行列式の定義を思い出すと，対角成分の積の項だけが生き残るから

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(e^A) =&\mathrm{Det}(e^J)e^J\\ =&e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n}\\ =&e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\\ =&e^{\mathrm{Tr}A}\end{aligned}$$

がなりたつ．最後の変形は，行列のトレースとその行列の固有値の和が等しいことを用いた．(トレースの巡回性とジョルダン標準形から

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}(PJP^{-1}) = \mathrm{Tr}J$$

であることを用いてもよい．) これで証明が完了した．

さて，上で示した通り，極分解定理により任意の特異でない (正則な) 行列 λ も以下の形で書ける．

$$\lambda = ue^h$$

ここで u はユニタリーで h はエルミートだ．

$$u^\dagger u = 1, \quad h^\dagger = h$$

ユニタリー行列の行列式 $\mathrm{Det}u$ は位相因子だ．実際

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}u(\mathrm{Det}u)^* =&\mathrm{Det}u\mathrm{Det}u^\dagger\\ =&\mathrm{Det}(uu^\dagger) = \mathrm{Det}1 = 1\end{aligned}$$

となって，したがって $|\mathrm{Det}u| = 1, \mathrm{Det}u = e^{i\theta}$ である．また $\mathrm{Det}e^h = e^{\mathrm{Tr}h}$ は実で正だ．

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{Det}e^h\right]^* = \mathrm{Det}(e^h)^\dagger = \mathrm{Det}e^{h^\dagger} = \mathrm{Det}e^h\\ &\mathrm{Tr}h \in \mathbb{R}, \quad e^{\mathrm{Tr}h} > 0\end{aligned}$$

ここで h はエルミートだから全ての h の固有値は実数であることを用いた．よって (2.7.42) の条件は以下の二つを共に要請する．

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}u =&1\\ \mathrm{Tr}h =&0\end{aligned}$$

ちなみに，因子 u は単にローレンツ群の回転部分群を構成する．実際，(2.7.36) より $V^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}v$ であるから，$h = 0$ のときの $\lambda = u$ による変換は

$$V^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}v \to \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(uvu^\dagger) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}v = V^0$$

となり，$\Lambda(u)$ のもとで V^0 は不変だ．したがって u による変換 $\Lambda(u)$ は純粋に空間成分の線形変換に対応しており，つまり回転だ．

さらにこの極分解は先に証明した通り一意的だから，$SL(2,\mathbb{C})$ の元 λ は (u,h) の組と 1 対 1 対応し，トポロジー的に全ての u のなす空間と全ての h の空間の直積 (点の対の集合) との間に全単射が存在する．さて，2×2 行列は独立な成分が 4 つあり，したがって 4 つの行列基底で展開できる．実際

$$(A,B)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^\dagger B),\quad (A,B\in M(2,\mathbb{C}))$$

で内積を定めれば (内積の公理を満たすことはすぐわかる．)，エルミートな 4 つの行列の組 $\sigma_\mu=(1,\boldsymbol{\sigma})$ は正規直交する基底となる．

$$\begin{aligned}(\sigma_0,\sigma_0)&=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(I^2)=1,\quad (\sigma_i,\sigma_i)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i^2)=1\\(\sigma_0,\sigma_i)&=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(I\sigma_i)=0,\quad (\sigma_i,\sigma_j)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j)=0\quad (i\neq j)\end{aligned}$$

したがって任意の 2×2 行列 A は $s^\mu\in\mathbb{C}(\mu=0,1,\cdots,3)$ を成分として $A=s^\mu\sigma_\mu$ と一意に展開できる．このときエルミートやトレースレスに対応する各成分の制限は

$$\begin{aligned}\text{Hermite}:&\quad A^\dagger=A\quad\Leftrightarrow s^\mu\in\mathbb{R}\\\text{Traceless}:&\quad \mathrm{Tr}A=0\quad\Leftrightarrow s^0=0\end{aligned}$$

である．したがってトレースレスの任意の 2×2 エルミート行列 h は

$$h=a\sigma_1+b\sigma_2+c\sigma_3=\begin{pmatrix}c & a-ib\\ a+ib & -c\end{pmatrix}$$

と表せる．ここで a,b,c は実数で，それ以外特に拘束されていない．h はこのように一意的に展開されるため，h と組 (a,b,c) は 1 対 1 対応する．すなわち，全ての h の空間はトポロジー的に通常の 3 次元のフラットな空間 $\mathbb{R}^3$ に等しい．

一方，行列式が 1 の任意のユニタリー行列は以下のように書ける．

$$u=\begin{pmatrix}d+ie & f+ig\\ -f+ig & d-ie\end{pmatrix}=f\sigma_0+(if)\sigma_1+(ig)\sigma_2+(ie)\sigma_3$$

これを示そう．まず 2×2 行列を

$$u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C})$$

と書き，$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ とする．このとき，まずユニタリー条件は

$$\begin{aligned}u^\dagger u=\begin{pmatrix}\alpha^* & \gamma^*\\ \beta^* & \delta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}|\alpha|^2+|\gamma|^2 & (\alpha\beta^*+\gamma\delta^*)^+\\ \alpha\beta^*+\gamma\delta^* & |\beta|^2+|\delta|^2\end{pmatrix}=I\\\Leftrightarrow\quad |\alpha|^2+|\gamma|^2&=|\beta|^2+|\delta|^2=1,\quad \alpha\beta^*+\gamma\delta^*=0\\\Leftrightarrow\quad (\alpha,\gamma)^*\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}&=(\beta,\delta)^*\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}=1,\quad (\beta,\delta)^*\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}=0\end{aligned}$$

と書ける．すなわち $(\alpha,\gamma)^T$ と $(\beta,\delta)^T$ が 2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の正規直交基底をなすことがわかる．しかし $(\alpha,\gamma)^T$ は $(-\gamma^*,\alpha^*)^T$ とも直交し，2 次元ベクトル空間では一つのベクトルと正規直交する二つのベクトルは比例関係にある必要があるから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}=&x\begin{pmatrix}-\gamma^*\\ \alpha^*\end{pmatrix}\quad x\in\mathbb{C}\\\beta=&-x\gamma^*,\quad \delta=x\alpha^*\end{aligned}$$

である．したがってユニタリーな 2×2 行列 u は

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & -x\gamma^* \\ \gamma & x\alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$$

という形をとる必要がある．さらに行列式が 1 であるという条件は

$$\mathrm{Det} u = x|\alpha|^2 + x|\gamma|^2 = x = 1$$

を与える．したがって行列式が 1 の，任意のユニタリーな 2×2 行列は，$\gamma = -\beta^*$ と再定義して

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

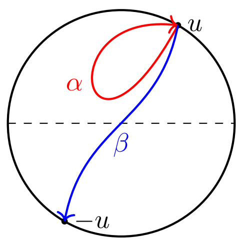
の形をとらなければならないことが証明できた．α, β を実部と虚部にわけて $\alpha = d + ie, \beta = f + ig$ と実数 d, e, f, g で書けば

$$u = \begin{pmatrix} d + ie & f + ig \\ -f + ig & d - ie \end{pmatrix}, \quad d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1, \quad d, e, f, g \in \mathbb{R}$$

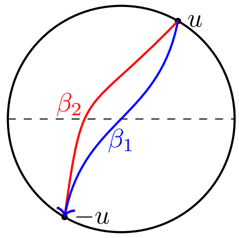
とできる．これが示したかったことだ．したがって全ての u が作る $SU(2)$ 空間は，$d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1$ を満たす実数パラメータ空間と同型であり，この条件はトポロジー的にフラットな 4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内に埋め込まれた 3 次元球殻 S_3 だ．

以上より，$SL(2, \mathbb{C})$ はトポロジー的に直積 $\mathbb{R}^3 \times S_3$ と同型である．この空間は単連結 (2 点を繋ぐ任意の曲線が連続的に変形できる．あるいは任意のループが 1 点可縮) だ．(なぜなら $\mathbb{R}^2$ と S_3 は単連結であり，単連結な空間の直積空間は再び単連結となる．)

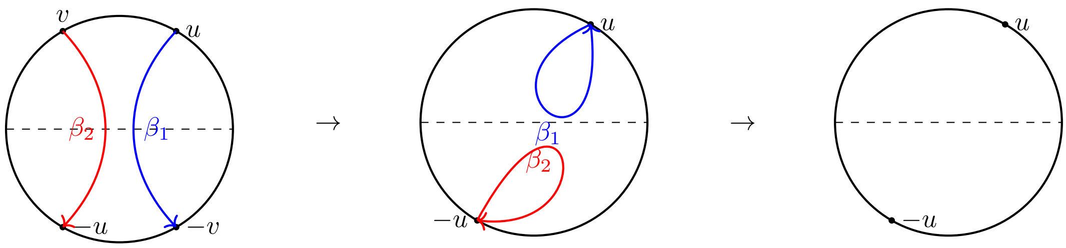
しかし，ここで興味があるのは $SL(2, \mathbb{C})$ 自体ではなく，ローレンツ群 $SO(3,1) \simeq SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ だ．λ と $-\lambda$ を同一視することは，ユニタリー因子 u と $-u$ を同一視することと等しい．(e^h は正定値エルミートである必要があるから，こちらにこの条件を課すことはできない．) したがって，ローレンツ群は $\mathbb{R}^3 \times S_3/\mathbb{Z}_2$ と同じトポロジーを持つ．ここで $S_3/\mathbb{Z}_2$ は，3 次元球殻 S_3 上の点とその反対側にある点を同一視したものだ．この空間は単連結ではない．実際 $S_3/\mathbb{Z}_2$ は 2 重連結だ．つまり南半球と北半球を分けて，赤道を通る経路を禁止すると単連結空間になっている．(n 重連結とは，単連結でない空間だが n 本のカットを入れると空間が単連結になるような空間のこと．) 任意の 2 点を結ぶ経路は，$u \to -u$ の反転を含むかどうかで 2 種類に分けられる．つまり，反転を二度含むような経路は反転を一度も含まない経路と同じだ．(補遺 B で論じるが，これは数学的には $S_3/\mathbb{Z}_2$ の基本群，あるいは第一ホモトピー群が $\mathbb{Z}_2$ でるという．) 同様に，非斉次ローレンツ群はさらに平行移動の 4 つの実数パラメータが存在し，これは $\mathbb{R}^4$ に等しい．したがって $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \times S_3/\mathbb{Z}_2$ と同じトポロジーを持ち，2 重連結だ．



次元を一つ落として，わかりやすい図で理解しよう．これは 3 次元空間に埋め込まれた 2 次元球殻 S_2 の反対側にある対蹠点を同一視した空間 $S_2/\mathbb{Z}_2$ を図示したものである．(三次元の図を書くのは手間だったので，矢印線は手前側の球殻面を通っているとでもイメージしてほしい．)u と $-u$ は同一視された点だから経路 α, β はともに u を基点としたループとなる．しかしループ α は 1 点可縮だが，ループ β はそうではない．したがってこの空間は単連結ではないことがわかる．では 2 重ループはどうなるだろうか？つまり，u から $-u(=u)$ を横切り，u から再出発し $-u$ へ向かうループ $\beta * \beta$ を考える．(区別しやすいよう，一周目の経路を β_1，二週目の経路を β_2 と書こう．)



実はこれは 1 点可縮である．なぜならば点 $P(u)$ から出発し，$Q'(-u)$ へ行き，$P'(u)$ から再出発し $Q(-u)$ へと到着するルートの点 P', Q' は途中通過点に過ぎないから，$Q'(-u) \to Q'(-v)$ と移動させるのと同時に $P'(u) \to P'(v)$ と連続的にルートを変形することができる．最終的に $Q'(-v)$ を $P(u)$ に，$P'(v)$ を $Q(-u)$ へと一致させることで，1 点にループを連続的に縮めることができる．



(数学的にちゃんと示すには，ホモトピー群を用いて $S_3/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{R}P^2$(実射影空間) の三角形分割を与えて示す必要がある．その方法は中原幹夫「理論物理学のための幾何学とトポロジー」p145 等参照)

ローレンツ群 (斉次でも非斉次でも) は単連結になっていないので，固有射影表現を持てる．しかし，1 から $\bar{\Lambda}$ へ，そして $\Lambda\bar{\Lambda}$ へ行き，また 1 へ戻ることをもう一度繰り返してできる 2 重ループは 1 点に縮めることができるのだった！つまり

$$\left[U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})\right]^2 = 1$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned} &U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm 1 \\ \therefore \quad &U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}) \end{aligned}$$

つまり位相 $e^{i\phi(\Lambda,\bar{\Lambda})}$ は単に符号 ± 1 だ．同様に非斉次ローレンツ群についても

$$U(\Lambda, a)U(\bar{\Lambda}, \bar{a}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{a} + a)$$

となる．これらの「符号を除いた表現」はなじみのものだ．この符号はどこから来るだろうか？これは角運動量の 3 軸成分が σ の状態に 3 軸周りの 2π 回転が働いたときに位相 $e^{2i\pi\sigma}$ が出るために発生するものだ．つまり 3 軸周りの角度 θ 回転に対応する $\lambda(\theta)$ に対して，そのユニタリー変換が (2.4.27) から

$$U\Big(\Lambda[\lambda(\theta)]\Big) = \exp(i\theta J_3) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

であることを用いると

$$U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Big)U\Big(\Lambda[\lambda(2\pi)]\Big) = U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Big)\exp(-2\pi i J_3)$$

であるが，一方

$$\begin{aligned} U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Lambda[\lambda(2\pi)]\Big) &= U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}\lambda(2\pi)]\Big) \quad \because (2.7.41) \\ &= U\Big(\Lambda[-\bar{\lambda}]\Big) \end{aligned}$$

$$=U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Big) \quad \because (\Lambdaは\lambdaと-\lambdaの同一視をする)$$

であり，よってこの両辺が $\Psi_{p,\sigma}$ に作用すると

$$\begin{aligned}
U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Big)U\Big(\Lambda[\lambda(2\pi)]\Big)\Psi_{p,\sigma} =& e^{2\pi i\sigma}U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Big)\Psi_{p,\sigma} \\
=& \begin{cases} +U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Big)\Psi_{p,\sigma} & (\sigma=0,1,2,\cdots) \\ -U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Big)\Psi_{p,\sigma} & (\sigma=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots) \end{cases} \\
=& \begin{cases} +U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Lambda[\lambda(2\pi)]\Big)\Psi_{p,\sigma} & (\sigma=0,1,2,\cdots) \\ -U\Big(\Lambda[\bar{\lambda}]\Lambda[\lambda(2\pi)]\Big)\Psi_{p,\sigma} & (\sigma=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots) \end{cases}
\end{aligned}$$

つまり，3 軸周りの 2π 回転を含む場合，整数スピンの状態には何の影響もない．したがって整数スピン状態は厳密に $SO(3,1)$ ローレンツ群の表現になっている．しかし一方半整数スピンでは符号を変えるため，半整数スピン状態は $SO(3,1)$ の表現にはなっておらず射影表現となっている．したがって，(2.7.43) あるいは (2.7.44) は超選択則を与える．つまり，整数と半整数のスピン状態を重ね合わせることはできない．

質量がゼロでないときには，小群の生成子のよく知られた表現，つまり単に整数か半整数の j の軌道角運動量行列 $\mathbf{J}^{(j)}$ を使って，純粋に代数的にスピンが整数か半整数に限られることを以前に導いた．一方，質量がゼロの場合は，小群の物理的 1 粒子状態への作用は，単に運動量の周りの回転であり，この場合ヘリシティが整数か半整数に限られる代数的理由はなかった．しかし，トポロジー的な理由はある．つまり運動量の周りの 4π 回転は，上のトポロジー的な議論から，連続的に恒等変換に変形できる必要がある．したがって因子 $e^{4\pi i\sigma}$ は 1 であり，

$$\begin{aligned}
4\pi i\sigma =& 2\pi i n \quad (n=0,1,2\cdots) \\
\therefore \quad \sigma =& \frac{n}{2}=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots
\end{aligned}$$

したがって，σ は整数か半整数でなければならない．

なぜ射影表現が大事なのだろうか？ここで改めて論じることにする．ローレンツ変換 $\Lambda : SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1)$ は λ と $-\lambda$ を同一視し，いわば全射によって「つぶしている」．その影響により，表現になっているのは整数スピンの状態だけだ．半整数スピン表現は $SO(3,1)$ 表現でなく，$SL(2,\mathbb{C})$ 表現にしか存在しない．それを無理やり $SO(3,1)$ 表現の枠組みに組み込もうとするから射影表現にならざるを得ない．それは量子力学で回転 $SO(3)$ によるスピノルの変換を調べるときにも問題なのだった．($SU(2)$ にしかスピノル表現は存在しない．) そこで，半整数スピンの表現を実際に調べる上では，射影表現ではなく被覆群である $SL(2,\mathbb{C})$ の表現を調べる．すなわち，$U : SO(3,1) \to B(\mathcal{H}); \Lambda[\lambda] \mapsto U\Big(\Lambda[\lambda]\Big)$ ではなく，Λ を経由せずに $U : SL(2,\mathbb{C}) \to B(\mathcal{H}); \lambda \mapsto U(\lambda)$ を考える．(ここで $B(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ への作用素のなす空間) こちらは，例えば 3 軸成分の回転に対応した $\lambda(\theta)$ はその表式から明らかなように 2π 回転で戻ることが課されず，4π 回転で元に戻るから，そのユニタリー作用素は

$$U(\lambda(\theta)) = \exp(i\theta J_3) \quad (0 \le \theta < 4\pi)$$

となっている．この $SL(2,\mathbb{C})$ のユニタリー作用素 U は半整数スピン状態も含めて表現になっている．

$$U(\lambda)U(\bar{\lambda}) = U(\lambda\bar{\lambda})$$

上で 2π 回転を考えたときに食い違いが生じたのは途中で $\Lambda(\lambda) = \Lambda(-\lambda)$ を同一視を用いたからだということに気付けば，この場合にはそのような食い違いが生じないことがわかるだろう．

しかし数学的ではなく物理的に考える上ではこの違いは実は超選択則を与える以外には重要ではない．なぜならば我々は状態を射線，すなわち絶対値が 1 だけ異なるベクトルを同値とみなしているからだ．つまり，物

理的状態の空間は，元々のヒルベルト空間 $\mathcal{H}(\ni\Psi)$ 自体ではなく射影空間 $\mathcal{H}/\sim(\ni[\Psi])$ であり，位相分だけ異なる違いを許容する．したがって，元のヒルベルト空間に対する作用が表現となっていなくても，射影空間上に写像した結果に限り表現となっている場合が存在する．それが射影表現だ．

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})\Psi &= e^{i\phi}U(\Lambda\bar{\Lambda})\Psi \\
U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})[\Psi] &= e^{i\phi}U(\Lambda\bar{\Lambda})[\Psi] = U(\Lambda\bar{\Lambda})[\Psi]
\end{aligned}
$$

我々はベクトルそのものを観測しているわけではなく，射線 $\mathcal{R}=[\Psi]$ から得られる確率や物理的な観測可能量を観測しているだけであり，射線 $\mathcal{R}=[\Psi]$ のどの Ψ を代表元としてとっているか (つまり状態 Ψ 全体にかかっている位相が何か) を判別する方法は存在しない．それが射影表現を物理的には許容する理由だ．ただし何度も言うように，全体の状態が何らかの状態の重ね合わせ $\Psi=\Psi_A+\Psi_B$ となっているときに，Ψ_A と Ψ_B の間の相対的な位相は依然として重要だ (それは量子力学的な干渉，例えば二重スリット実験の干渉縞やアハラノフ・ボーム効果のような結果を実際に及ぼし，実験的に観測可能なものだからだ)．世界の真の対称性だと公理化したのに，変な重ね合わせをした結果，重ね合わせ全体が真の対称性変換に従わない変換をするならば，そのような重ね合わせはそもそも世界が禁止していると結論付ける以外にない．それが超選択則だ．しかし，我々が公理として定める真の対称性である「ローレンツ対称性」を与える群が，実際にこの世界において $SO(3,1)$ なのか $SL(2,\mathbb{C})$ なのかを本当に判別する方法はない．$SO(3,1)$ 対称性を公理として認めるならば，それは「整数スピンと半整数スピンの重ね合わせ禁止」の超選択則という形で状態の重ね合わせを制限する．しかし $SL(2,\mathbb{C})$ を「($SO(3,1)$ のさらに根底にある) ローレンツ対称性の群」として公理として定めても，それは超選択則を与えないだけで他に影響はない．もちろんそれは物理的な状態を，整数スピンと半整数スピンの状態の線形結合として用意できることは意味しない．ただ，自然界の観測された「ローレンツ不変性」からそのような重ね合わせが不可能である，という証明ができないだけだ．実験的に，そのような重ね合わせを実際に作り出すことができたならば，この世界の真の対称性は $SL(2,\mathbb{C})$(あるいはもっと大きな群) かもしれない，という程度しかいえない．

この議論から，我々がローレンツ群 $SO(3,1)$ の射影表現を扱うとしても，超選択則で禁止されるような重ね合わせをしなければ，射影表現に出てくる位相は射影空間で無視して通常の表現とみなして考えればよいことがわかる．つまり単に $\phi=0$ としてよい．あるいは半整数スピンでも非射影表現を与える $SL(2,\mathbb{C})$ に対称群を拡張してしまい，やはり $\phi=0$ で計算してもよい．これで今まで 2.5 節まで頑張って計算してきた内容が保証されるというものだ．

同様のことはどの対称群にも当てはまる．もし，そのリー代数が中心電荷を持つならば，全てと可換でその固有値が中心電荷の値になるような生成子をもつように代数を中心拡大すればよい．これは 2.4 節でガリレイ群のリー代数に質量演算子 M を付け加えたのと同じ操作だ．このようにして拡張されたリー代数では，もちろん中心電荷をもたず，群の単位元に近い部分では通常の表現しか持たないから，超選択則を必要としない．同様に，リー群 G が単連結でなければ，G の「普遍被覆群」として知られる単連結の群 C と，C の不変部分群 H を使って G は常に C/H と表せる．一般に，対称群を G の代わりに C としてよい．これは G からは超選択則[*14]が導かれ，C ではそうではないということを除いて，その結果に差異がないからだ．

物理的状態は任意の重ね合わせとして用意できるものも，用意できないものもある．しかし，これは対称性原理から決めることはできない．なぜなら，自然界の対称群をどのようなものと考えるにせよ，常に超選択則を導かないこと以外は同じ結果を与える他の群があるからだ．

ちなみにここまでは固有順時ローレンツ群 $SO(3,1)$ の被覆群について説明してきたが，全ての連結成分を含んだ一般ローレンツ群 $O(3,1)$ 全体の被覆群については何も説明していない．一般に回転群 $SO(3)$ やローレンツ群 $SO(3,1)$ に対するスピノル表現も含んだ被覆群はそれぞれ $\mathrm{Spin}(3)\simeq SU(2)$ や $\mathrm{Spin}(3,1)\simeq SL(2,\mathbb{C})$

[*14] $SO(3,1)$ 以外では，例えば電磁理論により $U(1)_{\mathrm{em}}$ ゲージ対称性は世界の真の対称性だと考えられている．しかし $U(1)\simeq S_1$ は単連結でないから，電荷の異なる状態は重ね合わせられないという超選択則が導かれる．$U(1)$ の普遍被覆群は $\mathbb{R}$ である．

となっており，これらをスピン群と呼ぶ．$O(3,1)$ は $\mathrm{Det}\Lambda = +1$ の制限がないから，その被覆群も当然「Special」でない群である必要があり，$O(3)$ や $O(3,1)$ に対する被覆群をピン群と呼び $\mathrm{Pin}(3)$ や $\mathrm{Pin}(3,1)$ と書かれる．スピン (Spin) 群から「Special」の S をとったのでピン (Pin) 群…という数学者セールの冗談から命名された不遇な群．)$\mathrm{Spin}(n)$ や $\mathrm{Pin}(n)$ に関しては本間泰史「スピン幾何学」などを参照．どのみち，時間反転や空間反転の対称性は破れていることが実験的に示されているから，これを世界の真の対称性と公理化したとき超選択則がどのように与えられるか，その被覆群がどうか，などを議論することに特に意味はないだろう．

補遺 A:対称性の表現に関する定理

この補遺では，どのような対称性変換もヒルベルト空間上で線形ユニタリー

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi), \quad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \zeta U\Phi + \eta U\Psi$$

か反線形反ユニタリー

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^*, \quad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta^* U\Psi$$

な演算子で表されるというウィグナーの基礎的な定理の証明を与える．このために主に使う対称性変換の性質は，それが遷移確率を変えない射線変換だということだ．つまり，もし Ψ_1 と Ψ_2 が射線 $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ に属する状態ベクトルなら，変換を $T : \mathcal{R}_k \to T\mathcal{R}_k$ とすると，変換された射線 $T\mathcal{R}_1$ と $T\mathcal{R}_2$ に属する任意の状態ベクトル Ψ'_1 と Ψ'_2 は以下を満たす．

$$|(\Psi'_1, \Psi'_2)|^2 = |(\Psi_1, \Psi_2)|^2$$

また対称性変換は逆を持ち (群の逆元の存在から)，逆変換も上と同様に遷移確率を変えないものとする．

ここで注意．(2.A.1) の Ψ_k と Ψ'_k はそれぞれ射線 $\mathcal{R}_k$ と $\mathcal{R}'_k$ という集合の任意の元であり，したがって対称性変換で直接 $\Psi_k \mapsto \Psi'_k$ と対応していなくとも構わない．$\mathcal{R}'_k$ の中の元は全て同値関係で結ばれているから，対称性変換 T が引き起こす実際のヒルベルト空間の変換は $\Psi_k \mapsto e^{i\theta}\Psi'_k$ という対応であってもかまわない．対称性変換は射線に対する写像であって，ヒルベルト空間の元たるベクトルの写像はそれとは別であることに注意．むしろ大事なのは，$\mathcal{R}$ の元 Ψ に対して $T\mathcal{R}$ のどの元 Ψ' を $U\Psi$ に対応させるか，ということである．(前提として定まっている対応は，対称性変換が $\mathcal{R}$ に対して $T\mathcal{R}$ を対応させるということだけだ．) 結局この節でやることを大まかにいえば，この「対応 U」を我々がただ一つに定めるのだが，その対応をうまく決めることで (反) ユニタリー (反) 線形にできる，ということを示しているに過ぎない．ZFC の公理論的集合論で集合の対応から写像を構築する話を知らないと少し難しいかもしれないが，それを知っていればかなりイメージがしやすいと思う．

まず，射線 $\mathcal{R}_k (k = 1, 2, \cdots)$ に属し，以下を満たす完全正規直交な状態ベクトルの族 $\{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考える．

$$(\Psi_k, \Psi_l) = \delta_{kl} \quad (\forall k \in \mathbb{N}, \Psi_k \in \mathcal{R}_k)$$

また Ψ'_k を，変換された $T\mathcal{R}_k$ に属する任意の状態ベクトルとする．仮定 (2.A.1) より

$$\begin{aligned} |(\Psi'_k, \Psi'_l)|^2 =& |(\Psi_k, \Psi_l)|^2 = \delta_{kl} \\ \therefore \quad |(\Psi'_k, \Psi'_k)| =& 1, \quad |(\Psi'_k, \Psi'_l)| = 0 \quad (k \neq l) \end{aligned}$$

となる．よって $(\Psi'_k, \Psi'_k) = e^{i\theta}$ の形になるが，内積の公理より自分自身との内積は自動的に実かつ正なので $(\Psi'_k, \Psi'_k) = +1$ となる．よって

$$(\Psi'_k, \Psi'_l) = \delta_{kl}$$

が得られる．

次に，$\{\Psi'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は完全系をなす，すなわちヒルベルト空間内の任意の元 Ψ は Ψ'_k で展開できることを示す．もし全ての Ψ'_k と直交するゼロでない状態ベクトル Ψ' が存在すると仮定する (つまり Ψ'_k の貼る部分空間に対する直交補空間が存在すると仮定する) ならば，Ψ' が属する射線の逆変換 T^{-1} はゼロでない状態ベクトル Ψ'' であり，(2,A,1) より全ての k について

$$|(\underset{\mathcal{R}_k}{\Psi_k}, \underset{\mathcal{R}}{\Psi''})|^2 = |(\underset{\mathcal{R}'_k}{\Psi'_k}, \underset{\mathcal{R}'}{\Psi'})|^2 = 0$$

となる．しかし仮定より $\{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は完全系をなすので，これは矛盾．よって直交補空間は存在せず，$\{\Psi'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は完全系をなす．

ここまではまだ対称性変換によって Ψ_k から，$\mathcal{R}'_k$ の中のどの Ψ'_k か，つまり位相分だけ異なる $e^{i\theta}\Psi'_k$ のどれに移すのかの任意性があり，写像 (対応) が正確に決まっていない (位相分だけ違っても $(e^{i\theta_k}\Psi'_k, e^{i\theta_l}\Psi'_l) = \delta_{kl}$ だから上で示した規格条件と矛盾しないから)．よって次に Ψ'_k の位相を決める．

まず，Ψ_k のうち一つを取り出し，それを Ψ_1 とする．$k \neq 1$ についての射線 $\mathcal{S}_k$ に属する以下のベクトルを考える．

$$\Upsilon_k := \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_1 + \Psi_k\right] \in \mathcal{S}_k$$

(これは規格化されているから，この Υ_k の絶対値 1 の複素数倍の集合 $\mathcal{S}_k$ は実際に射線となる．)$\mathcal{S}_k$ から変換された射線 $T\mathcal{S}_k$ に属する任意のベクトル Υ'_k は，完全性をなす状態ベクトル Ψ'_k で展開できるから

$$\Upsilon'_k = \sum_l c_{kl}\Psi'_l$$

と書ける．仮定 (2.A.1) より

$$\begin{aligned}
|(\underset{T\mathcal{S}_k}{\Upsilon'_k}, \underset{T\mathcal{R}_1}{\Psi'_1})|^2 =& |(\underset{\mathcal{S}_k}{\Upsilon_k}, \underset{\mathcal{R}_1}{\Psi_1})| = \frac{1}{2} \\
= \left|\sum_l c^*_{kl}(\Psi'_l, \Psi'_1)\right|^2 =& |c_{k1}|^2 \\
\therefore \quad |c_{k1}| =& \frac{1}{\sqrt{2}} \\
|(\underset{T\mathcal{S}_k}{\Upsilon'_k}, \underset{T\mathcal{R}_k}{\Psi'_k})|^2 =& |(\underset{\mathcal{S}_k}{\Upsilon_k}, \underset{\mathcal{R}_k}{\Psi_k})| = \frac{1}{2} \\
= \left|\sum_l c^*_{kl}(\Psi'_l, \Psi'_k)\right|^2 =& |c_{kk}|^2 \\
\therefore \quad |c_{kk}| =& \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

が分かる．$l(\neq 1, k)$ に対しては

$$\begin{aligned}
|(\underset{T\mathcal{S}_k}{\Upsilon'_k}, \underset{T\mathcal{R}_l}{\Psi'_l})|^2 =& |(\underset{\mathcal{S}_k}{\Upsilon_k}, \underset{\mathcal{R}_l}{\Psi_l})| = 0 \\
= \left|\sum_m c^*_{km}(\Psi'_m, \Psi'_l)\right|^2 =& |c_{kl}|^2 \\
\therefore \quad c_{kl} =& 0
\end{aligned}$$

となる．

$|c_{k1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}, |c_{kk}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $c_{k1} = e^{i\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}, c_{kk} = e^{i\theta'}\frac{1}{\sqrt{2}}$ となって

$$\begin{aligned}
\Upsilon'_k =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\theta}\Psi'_1 + e^{i\theta'}\Psi'_k\right] \\
\therefore \quad e^{-i\theta}\Upsilon'_k =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi'_1 + e^{i(\theta'-\theta)}\Psi'_k\right]
\end{aligned}$$

よって Ψ'_1 の位相を自分で一つ決めると，2 つの $T\mathcal{S}_k$ と $\mathcal{R}_k$ から状態ベクトル Υ'_k と Ψ'_k を選んで対応させるとき，どの位相の元を持ってくるかは

$$\Upsilon'_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi'_1 + \Psi'_k\right]$$

がなりたつように要請すれば自然にただ一つ選び方が決まる．(位相を二つ定めるために θ', θ の 2 自由度が対応している．Ψ'_1 の位相だけは自分の手で決められることは，最終的に U と $e^{i\theta}U$ が同じ (反) ユニタリー性 (反) 線形性をもたらすから，全体の位相だけは任意性があることと対応している．) このように選ぶことで対応 $\Psi_1 \mapsto \Psi'_1, \Psi_k \mapsto \Psi'_k, \Upsilon_k \mapsto \Upsilon'_k (k \neq 1)$ がただ一つに決まる．全ての $k(\neq 1)$ についてこの操作を行うことができて，このように選んだ状態ベクトル $\Upsilon'_k (k \neq 1)$ と $\Psi'_k (k \in \mathbb{N})$ をそれぞれ $U\Upsilon_k$ と $U\Psi_k$ と書く．これにより

$$\begin{aligned} U\frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_1 + \Psi_k] =& U\Upsilon_k \\ =& \Upsilon'_k = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi'_1 + \Psi'_k] = \frac{1}{\sqrt{2}}[U\Psi_1 + U\Psi_k] \end{aligned}$$

となる．これで Ψ_k からの対応 $U\Psi_k$ が定義できた．これは線形性を表しているように見えるが，しかしまだ一般的な状態ベクトル Ψ に対する対応 $U\Psi$ を定義していないため，作用素 U が定義できていない．

ここで，任意の射線 $\mathcal{R}$ に属する任意の状態ベクトル Ψ を考える．Ψ_k は完全系をなすので，Ψ_k で Ψ を展開できる．

$$\Psi = \sum_k C_k \Psi_k$$

Ψ'_k も完全性をなすから，変換された射線 $T\mathcal{R}$ に属する任意の状態 Ψ' は $\Psi'_k = U\Psi_k$ で展開できる．

$$\Psi' = \sum_k C'_k U\Psi_k$$

ここで仮定 (2.A.1) より

$$\begin{aligned} |(\underset{\mathcal{R}_k}{\Psi_k}, \underset{\mathcal{R}}{\Psi})|^2 =& |(\underset{T\mathcal{R}_k}{U\Psi_k}, \underset{T\mathcal{R}}{\Psi'})|^2 \\ \left|\sum_m C_m (\Psi_k, \Psi_m)\right|^2 =& \left|\sum_m C'_m (U\Psi_k, U\Psi_m)\right|^2 \\ \therefore \quad |C_k|^2 =& |C'_k|^2 \quad \because (2.A.2)(2.A.3) \end{aligned}$$

が成立する．(ここでの k は $k = 1$ を含む全ての k である．(2.A.3) は今では $(U\Psi_k, U\Psi_l) = \delta_{kl}$ と書かれることに注意．) また，全ての $k \neq 1$ に対して再び仮定 (2.A.1) より

$$\begin{aligned} |(\underset{\mathcal{S}_k}{\Upsilon_k}, \underset{\mathcal{R}}{\Psi})|^2 =& |(\underset{T\mathcal{S}_k}{U\Upsilon_k}, \underset{T\mathcal{R}}{\Psi'})|^2 \\ (\mathrm{LHS}) = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_1 + \Psi_k], \sum_l C_l \Psi_l\right)\right|^2 =& \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_l C_l(\Psi_1, \Psi_l) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_l C_l(\Psi_k, \Psi_l)\right|^2 \\ =& \frac{1}{2}|C_1 + C_k|^2 \\ (\mathrm{RHS}) = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}[U\Psi_1 + U\Psi_k], \sum_l C_l U\Psi_l\right)\right|^2 =& \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_l C_l(U\Psi_1, U\Psi_l) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_l C_l(U\Psi_k, U\Psi_l)\right|^2 \\ =& \frac{1}{2}|C'_1 + C'_k|^2 \\ \therefore \quad |C_1 + C_k|^2 =& |C'_1 + C'_k|^2 \quad (k \neq 1) \end{aligned}$$

である．(2.A.9)(2.A.8) の比をとると，全ての $k \neq 1$ について

$$\begin{aligned} \left|1 + \left(\frac{C_k}{C_1}\right)\right|^2 =& \left|1 + \left(\frac{C'_k}{C'_1}\right)\right|^2 \\ 1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{C_k}{C_1}\right) + \left|\frac{C_k}{C_1}\right|^2 =& 1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right) + \left|\frac{C'_k}{C'_1}\right|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Re}\left(\frac{C_k}{C_1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right) \quad \because (2.A.8)$$

ここで，任意の 2 つの複素数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2 =&(\alpha+\beta)(\alpha^*+\beta^*)\\ =&|\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha\beta^*+\alpha^*\beta\\ =&|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha\beta^*)\end{aligned}$$

であることを用いた．よって (2.A.8) より

$$\begin{aligned}|C_k|^2 =&|C'_k|^2\\ \left|\frac{C_k}{C_1}\right|^2 =&\left|\frac{C'_k}{C'_1}\right|^2\\ \left\{\mathrm{Re}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)\right\}^2+\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)\right\}^2 =&\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right)\right\}^2+\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right)\right\}^2\\ \therefore \quad \left\{\mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)\right\}^2 =&\left\{\mathrm{Im}\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right)\right\}^2 \quad (k\neq 1) \quad \because (2.A.10)\\ \therefore \quad \mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right) =&\pm\,\mathrm{Im}\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right) \quad (k\neq 1)\end{aligned}$$

を得る．(2.A.10)(2.A.11) の両辺を足すと

$$\mathrm{Re}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)+i\mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right)\pm i\mathrm{Im}\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right) \quad (k\neq 1)$$

したがって

$$\frac{C_k}{C_1}=\frac{C'_k}{C'_1}, \quad \text{or} \qquad \frac{C_k}{C_1}=\left(\frac{C'_k}{C'_1}\right)^* \quad (k\neq 1)$$

が導かれる．

どの $k\neq 1$ についても，このどちらか一方だけを選ばなければならないことを以下で示す．つまり，ある k では $C_k/C_1=C'_k/C'_1$ であり，別の $l\neq k$ では $C_l/C_1=(C'_l/C'_1)^*$ である，と仮定して矛盾を導き，この両立が不可能であることを示す．ここで，これらが本当に異なる場合になるように，両者の比が共に複素数であるという前提があるとする．(もし全ての比が実だと，どのような組 (k,l) をとってきても $C_k/C_1=C'_k/C_1=(C'_k/C'_1)^*$ が成り立ってしまい，両者のどちらの関係式も満たしてしまう．この例外は言い換えると，全ての C_k の位相が一致している $(C_1=c_1e^{i\theta}, C_k=c_ke^{i\theta}, \Psi=e^{i\theta}\sum_k c_k\Psi_k)$ ことに対応しており，したがって全体の位相を再定義することで全ての係数が実数となることに対応している．ここの議論は後最終的に演算子が線形か反線形かを分類できることを示しているから，この例外 (実数係数) は演算子が線形か反線形かを分ける意味がそもそもないことを示している．よってこの可能性は考慮しなくてよい．どちらも比が複素数となる C_k, C_l が二つ存在するだけでいいから，いくつかの比が実数となることを禁止しているわけでもない．このあと定義する Φ は早速この比が全て実数になるが，そうなる場合を別に禁止しているわけではない．) 前提条件より $k\neq 1, l\neq 1, k\neq l$ とする．この話を整理して，示すべき命題は次の通りだ．

射線 C_k を $\Psi=\sum_k C_k\Psi_k$ と展開したときの係数，C'_k も $\Psi'=\sum_k C'_kU\Psi_k$ と展開したときの係数とする．任意の $k\neq 1$ について比 C_k/C_1 は実数でないとする．このとき，全ての $k\neq 1$ について $C_k/C_1=C'_k/C'_1$ を満たしているか，そうでなければ全ての $k\neq 1$ について $C_k/C_1=(C'_k/C'_1)^*$ を満たしている．

証明しよう．前述の通り，ある k では $C_k/C_1=C'_k/C'_1$ であり，別の $l\neq k$ では $C_l/C_1=(C'_l/C'_1)^*$ であるような対 (k,l) がとれる，と仮定する．まず，状態ベクトル

$$\Phi:=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\Psi_1+\Psi_k+\Psi_l\right]$$

を定義する．これは規格化されているから，射線に属する．この状態ベクトルの係数の比は全て実数

$$
\begin{aligned}
C_1 =& \frac{1}{\sqrt{3}}, C_k = \frac{1}{\sqrt{3}}, C_l = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\frac{C_k}{C_1} =& 1 = \frac{C'_k}{C'_1} = \frac{C'_k}{C'_1} \quad \therefore C'_k = C'_1 \\
\frac{C_l}{C_1} =& 1 = \frac{C'_l}{C'_1} = \frac{C'_l}{C'_1} \quad \therefore C'_l = C'_1 \\
\therefore \quad C'_1 =& C'_k = C'_l
\end{aligned}
$$

($n \neq k$ かつ $n \neq l$ な n では $C_n = 0$ より $C'_n = 0$) ここから

$$
\begin{aligned}
|C_1|^2 =& \frac{1}{3} = |C'_1|^2 \\
\therefore \quad C'_1 =& C'_k = C'_l = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \\
\Phi' =& \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \left[U\Psi_1 + U\Psi_k + U\Psi_l \right]
\end{aligned}
$$

となる．ここで α は $|\alpha| = 1$ となる任意の複素数だ．

遷移確率について仮定 (2.A.1) より

$$
\begin{aligned}
|(\Phi, \Psi)|^2 =& |(\Phi', \Psi')|^2 \\
(\mathrm{LHS}) =& \left| \left(\frac{1}{\sqrt{3}} [\Psi_1 + \Psi_k + \Psi_l] \, , \sum_m C_m \Psi_m \right) \right|^2 \\
=& \frac{1}{3} |C_1 + C_k + C_l|^2 \\
(\mathrm{RHS}) =& \left| \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} [U\Psi_1 + U\Psi_k + U\Psi_l] \, , \sum_m C'_m U\Psi_m \right) \right|^2 \\
=& \frac{1}{3} |C'_1 + C'_k + C'_l|^2
\end{aligned}
$$

$|C_1|^2 = |C'_1|^2$ で両辺で比をとって

$$
\left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C'_k}{C'_1} + \frac{C'_l}{C'_1} \right|^2
$$

また仮定より $C_k/C_1 = C'_k/C'_1, C_l/C_1 = (C'_l/C'_1)^*$ であるから

$$
\left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C^*_l}{C^*_1} \right|^2
$$

となる．展開して

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) =& 1^2 + \left| \frac{C_k}{C_1} \right|^2 + \left| \frac{C_l}{C_1} \right|^2 + 2\mathrm{Re} \left(1 \cdot \frac{C^*_k}{C^*_1} \right) + 2\mathrm{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \cdot \frac{C^*_l}{C^*_1} \right) + 2\mathrm{Re} \left(\frac{C_l}{C_1} \cdot 1 \right) \\
(\mathrm{RHS}) =& 1^2 + \left| \frac{C_k}{C_1} \right|^2 + \left| \frac{C^*_l}{C^*_1} \right|^2 + 2\mathrm{Re} \left(1 \cdot \frac{C^*_k}{C^*_1} \right) + 2\mathrm{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \cdot \frac{C_l}{C_1} \right) + 2\mathrm{Re} \left(\frac{C^*_l}{C^*_1} \cdot 1 \right) \\
=& 1^2 + \left| \frac{C_k}{C_1} \right|^2 + \left| \frac{C_l}{C_1} \right|^2 + 2\mathrm{Re} \left(1 \cdot \frac{C^*_k}{C^*_1} \right) + 2\mathrm{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \cdot \frac{C_l}{C_1} \right) + 2\mathrm{Re} \left(\frac{C_l}{C_1} \cdot 1 \right) \\
\therefore \quad \mathrm{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \cdot \frac{C^*_l}{C^*_1} \right) =& \mathrm{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \cdot \frac{C_l}{C_1} \right)
\end{aligned}
$$

ここで，複素数 $\alpha = a + ib, \beta = c + id$ について

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\alpha\beta^*) =& \mathrm{Re}(\alpha\beta) \\
\mathrm{Re}((a + ib)(c - id)) =& \mathrm{Re}((a + ib)(c + id))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ac + bd =& ac - bd \\
bd =& 0 \\
\mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta) =& 0
\end{aligned}
$$

と同値変形できることから，$\alpha = C_k/C_1, \beta = C_l/C_1$ とおけば上の関係式は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{C_l}{C_1}\right) = 0 \\
\therefore \quad \mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right) = 0, \quad \mathrm{or} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)
\end{aligned}
$$

を与える．したがって C_k/C_1 か C_l/C_1 のどちらかは必ず実となり，これは仮定に反する．したがって仮定が偽であり，どのような対 (k, l) を任意に取ろうとも $C_k/C_1 = C'_k/C'_1$ かつ $C_l/C_1 = (C'_l/C'_1)^*$ であることは不可能，すなわち全ての $k \neq 1$ について $C_k/C_1 = C'_k/C'_1$ か，そうでなければ $C_k/C_1 = (C'_k/C'_1)^*$ を満たす．これが示したいことだった．

よって与えられた対称性変換 T が，状態ベクトル $\sum_k C_k\Psi_k$ に施されたとき，全ての k について (2.A.12) か (2.A.13) である．

ここまでくれば，任意の射線 $\mathcal{R}$ の任意の Ψ に対して $T\mathcal{R}$ のどの Ψ' を選ぶかを定め，対応 $\Psi \to U\Psi$ をただ一つに定めることができ，写像 U を決めることができる．(2.A.7) より，まず (2.A.12) がなりたっている場合

$$
\begin{aligned}
\Psi' =& \sum_k C'_k U\Psi_k \\
=& \frac{C'_1}{C_1}\sum_k C_k U\Psi_k
\end{aligned}
$$

と書ける．この場合，$U\Psi$ は $C_1 = C'_1$ となるように位相が選ばれた Ψ' だとする．すなわち Ψ に対して

$$
U\Psi = \sum_k C_k U\Psi_k
$$

が対応する．一方，(2.A.13) がなりたっている場合

$$
\begin{aligned}
\Psi' =& \sum_k C'_k U\Psi_k \\
=& \frac{C'_1}{C^*_1}\sum_k C^*_k U\Psi_k
\end{aligned}
$$

と書ける．この場合，$U\Psi$ は $C_1 = C'^*_1$ となるように位相が選ばれた Ψ' だとする．すなわち Ψ に対して

$$
U\Psi = \sum_k C^*_k U\Psi_k
$$

が対応する．($|C_1| = |C'_1|$ はすでに (2.A.8) で示せるが，全体の位相がどうなるように決めるかの任意性があったのだった．そこで決められた Ψ に対して Ψ' の位相を，Ψ_1 の係数 C_1 と Ψ'_1 の係数 C'_1(あるいは C'^*_1) の位相が等しくなるように定める．これで Ψ に対して $T\mathcal{R}$ のどの元を対応させればいいのかがただ一つに定まったことになる．くどい説明で申し訳ない．) このように定めると前者は

$$
\begin{aligned}
U\Psi =& U\left(\sum_k C_k\Psi_k\right) \\
= \Psi' =& \sum_k C_k U\Psi_k \\
\therefore \quad U\left(\sum_k C_k\Psi_k\right) =& \sum_k C_k U\Psi_k
\end{aligned}
$$

を与え，後者は

$$\begin{aligned} U\Psi =& U\left(\sum_k C_k\Psi_k\right) \\ =\Psi' =& \sum_k C_k^* U\Psi_k \\ \therefore \quad & U\left(\sum_k C_k\Psi_k\right) = \sum_k C_k^* U\Psi_k \end{aligned}$$

を与える．

一つのベクトルを Ψ_k で展開したとき，対称性変換の前後でその係数には共通の関係があることがわかった．しかし，同じ対称性変換でも，二つの異なるベクトル Ψ, Ψ' を持ってきたら，$\Psi = \sum_k C_k\Psi_k$ の方は (2.A.12) の方を満たすように変換されるが別の $\Psi' = \sum_k D_k\Psi_k$ の方は (2.A.13) を満たされるように変換されるかもしれない．同じ対称性変換なのに変換性がベクトルによって違うなんてことが起きてしまうと困る．そのようなことがないことを証明しよう．

ある変換 T に対し，ある状態が (2.A.12)

$$U\left(\sum_k A_k\Psi_k\right) = \sum_k A_k U\Psi_k$$

と変換されるが，別の状態では (2.A.13)

$$U\left(\sum_k B_k\Psi_k\right) = \sum_k B_k^* U\Psi_k$$

と変換されると仮定する．仮定 (2.A.1) より

$$\begin{aligned} \left|\left(\sum_k B_k\Psi_k, \sum_l A_l\Psi_l\right)\right|^2 &= \left|\left(\sum_k B_k^* U\Psi_k, \sum_l A_k U\Psi_k\right)\right|^2 \\ \therefore \quad \left|\sum_k B_k^* A_k\right|^2 &= \left|\sum_k B_k A_k\right|^2 \end{aligned}$$

となる．

$$\begin{aligned} (\text{LHS}) =& \left(\sum_k B_k^* A_k\right)\left(\sum_l B_l A_l^*\right) \\ =& \sum_{kl} B_k^* B_l A_k A_l^* \\ =& \frac{1}{2}\sum_{kl}\left(B_k^* B_l A_k A_l^* + B_k B_l^* A_k^* A_l\right) \\ =& \sum_{kl}\mathrm{Re}(B_k^* B_l A_k A_l^*) \\ (\text{RHS}) =& \left(\sum_k B_k A_k\right)\left(\sum_l B_l^* A_l^*\right) \\ =& \sum_{kl}\mathrm{Re}(B_k B_l^* A_k A_l^*) \end{aligned}$$

$B_k^* B_l = (B_k B_l^*)^*$ を用いてさらに変形して

$$(\text{LHS}) = \sum_{kl}\mathrm{Re}\Big\{\left[\mathrm{Re}(B_k B_l^*) - i\mathrm{Im}(B_k B_l^*)\right]\left[\mathrm{Re}(A_k A_k^*) + i\mathrm{Im}(A_k A_l^*)\right]\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{kl} \Big[\mathrm{Re}(B_k B_l^*) \mathrm{Re}(A_k A_k^*) + \mathrm{Im}(B_k B_l^*) \mathrm{Im}(A_k A_l^*) \Big] \\
\text{(RHS)} &= \sum_{kl} \mathrm{Re} \Big\{ [\mathrm{Re}(B_k B_l^*) + i \mathrm{Im}(B_k B_l^*)] \, [\mathrm{Re}(A_k A_k^*) + i \mathrm{Im}(A_k A_l^*)] \Big\} \\
&= \sum_{kl} \Big[\mathrm{Re}(B_k B_l^*) \mathrm{Re}(A_k A_k^*) - \mathrm{Im}(B_k B_l^*) \mathrm{Im}(A_k A_l^*) \Big] \\
\therefore \quad & \sum_{kl} \mathrm{Im}(B_k B_l^*) \mathrm{Im}(A_k A_l^*) = 0
\end{aligned}
$$

となる．この等式が，異なる射線に属する二つの状態ベクトル $\sum_k A_k \Psi_k, \sum_k B_k \Psi_k$ について満たされている可能性はある．しかし，A_k も B_k も全て同じ位相ではない状態ベクトルの任意の対について，常に第三の状態ベクトル $\sum_k C_k \Psi_k$ があり，以下が成立するようにできる．

$$
\sum_{kl} \mathrm{Im}(C_k^* C_l) \mathrm{Im}(A_k^* A_l) \neq 0
$$

かつ

$$
\sum_{kl} \mathrm{Im}(C_k^* C_l) \mathrm{Im}(B_k^* B_l) \neq 0
$$

(どちらか (あるいはどちらも) のベクトルの全ての位相が同じな場合，例えば前者のベクトルについて $A_k = |A_k| e^{i\theta}, A_l = |A_l| e^{i\theta}$ となっているならば $\mathrm{Im}(A_k^* A_l) = \mathrm{Im}(|A_k||A_l|) = 0$ となり，全ての対 (k,l) についてそれが成り立っているから上の式は自動的に満たされる．しかしこの場合は心配ない．先程の議論と同様，再び全体の位相を再定義して全ての係数が実となるようにできて，その時は前述の通り U が線形か反線形かを区別する必要性がそもそもなくなる．)

これを示そう．

(1) ある対 (k,l) で，$A_k^* A_l$ と $B_k^* B_l$ が共に複素数なら，

$$
\mathrm{Im}(A_k^* A_l) \neq 0, \quad \mathrm{Im}(B_k^* B_l) \neq 0
$$

だから，C_k, C_l を除くすべての C_i を全てゼロにして，$\mathrm{Im}(C_k^* C_l) \neq 0$ となるように，つまり C_k と C_l の位相が異なるように選べばよい．

(2) ある対 (k,l) で，$A_k^* A_l$ が複素数で $B_k^* B_l$ が実数なら，

$$
\mathrm{Im}(A_k^* A_l) \neq 0, \quad \mathrm{Im}(B_k^* B_l) = 0
$$

なので，B_k と B_l は位相が同じだ．前提より $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は必ずどれかの位相が違うので，別の位相を持つ対 B_m, B_n をもう一度選べば $B_m^* B_n$ が複素数となり $\mathrm{Im}(B_m^* B_n) \neq 0$ となる．(B_k と位相が違う 1 つを持ってくればいいので，B_m, B_n のどちらかは B_k か B_l としてよい．ただし当然，両方とも等しくはしない．) このように別の対を選んだとき，$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 側も添え字に対応して別の対 A_m, A_n が選ばれるが，新しい対 $A_m^* A_n$ が複素数か実数かで C_k の選び方が次の二通りに分かれる．

(2)(i) このように別の対を持ってきたとき，もし $A_m^* A_n$ も複素数なら，

$$
\mathrm{Im}(A_m^* A_n) \neq 0, \quad \mathrm{Im}(B_m^* B_n) \neq 0
$$

となり，C_m, C_n 以外の C_i をゼロとして $\mathrm{Im}(C_m^* C_n) \neq 0$ となるように，つまり C_m と C_n の位相が異なるように選べばよい．

(2)(ii)$A_m^* A_n$ が実数なら，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(A_k^* A_l) \neq 0, \quad \mathrm{Im}(B_k^* B_l) = 0 \\
\mathrm{Im}(A_m^* A_n) = 0, \quad \mathrm{Im}(B_m^* B_n) \neq 0
\end{aligned}
$$

なので，C_k, C_l, C_m, C_n を除いたすべての C_i がゼロとなるようにして，これらの係数が全て異なるように，つまり $\mathrm{Im}(C_k^* C_l) \neq 0$ かつ $\mathrm{Im}(C_m^* C_n) \neq 0$ になるように選ぶ．これで全体の和はちゃんと (2.A.17)(2.A.18) を満たすようにできる．

(3) ある対 (k, l) で，今度は $A_k^* A_l$ が実数で $B_k^* B_l$ が複素数となる場合．この場合も (2) と同様の手順で $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ をうまく選べる．

これで証明ができた．

(2.A.17) から，このようにして選んだ $\sum_k C_k \Psi_k$ は対称性変換 T のもとで $\sum_k A_k \Psi_k$ と共通する (2.A.14) を満たさなければならない．そうでなければ $\sum_k C_k \Psi_k$ は (2.A.15) を満たすはずだが，そのとき (2.A.17) の右辺は (2.A.16) を示したのと同様にしてゼロとなってしまい矛盾する．しかし同様に，(2.A.18) から，$\sum_k C_k \Psi_k$ は対称性変換 T のもとで $\sum_k B_k \Psi_k$ と共通する (2.A.15) を満たさなければならない．これは矛盾だ．したがって仮定が偽となり，異なるベクトル $\sum_k A_k \Psi_k, \sum_k B_k \Psi_k$ の変換則は (2.A.14) か (2.A.15) を共通して選ばれていなければならない．したがって，与えられた対称性 T について全ての状態ベクトルは，(2.A.14) を満たすか，もしくは全ての状態ベクトルは (2.A.15) を満たす．

ここまでくれば，定義に従って，量子力学的演算子 U が線形ユニタリーか反線形反ユニタリーであることは簡単に示せる．(2.A.14) が全ての状態ベクトル $\sum_k C_k \Psi_k$ について成立するとする．Ψ_k は完全系をなすから，どのような二つの状態ベクトル Ψ と Φ も

$$\Psi = \sum_k A_k \Psi_k, \quad \Phi = \sum_k B_k \Psi_k$$

と一意的に展開でき，したがって (2.A.14) より

$$\begin{aligned}
U(\alpha\Psi + \beta\Phi) =& U\left(\sum_k (\alpha A_k + \beta B_k)\Psi_k\right) \\
=& \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) U\Psi_k \quad \because (2.A.14), C_k = \alpha A_k + \beta B_k \text{とおく} \\
=& \alpha \sum_k A_k U \Psi_k + \beta \sum_k B_k U \Psi_k \\
=& \alpha U \left(\sum_k A_k \Psi_k\right) + \beta \left(U \sum_k B_k \Psi\right) \quad \because (2.A.14) \\
=& \alpha U\Psi + \beta U\Phi
\end{aligned}$$

となり，U は線形演算子となる．また (2.A.2)(2.A.3) より

$$\begin{aligned}
(U\Psi, U\Phi) &= \sum_{kl} A^* B_l (U\Psi_k, U\Psi_l) \quad \because (2.A.14) \\
&= \sum_{kl} A_k^* B_l \delta_{kl} \quad \because (2.A.3) \\
&= \sum_k A_k^* B_k
\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}
(\Psi, \Phi) &= \sum_{kl} A_k^* B_l (\Psi_k, \Psi_l) \\
&= \sum_{kl} A_k^* B_l \delta_{kl} \quad \because (2.A.2) \\
&= \sum_k A_k^* B_k
\end{aligned}$$

より

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi)$$

であり，U はユニタリー演算子だ．

一方，今度は (2.A.15) が全ての状態ベクトル $\sum_k C_k \Psi_k$ について成立するとする．同様に

$$\begin{aligned}
U(\alpha\Psi + \beta\Phi) =& U\left(\sum_k (\alpha A_k + \beta B_k)\Psi_k\right) \\
=& \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k)^* U\Psi_k \quad \because (2.A.15), C_k = \alpha A_k + \beta B_k \text{とおく} \\
=& \alpha^* \sum_k A_k^* U\Psi_k + \beta^* \sum_k B_k^* U\Psi_k \\
=& \alpha^* U\left(\sum_k A_k \Psi_k\right) + \beta^* \left(U \sum_k B_k \Psi\right) \quad \because (2.A.15) \\
=& \alpha^* U\Psi + \beta^* U\Phi
\end{aligned}$$

よって U は反線形演算子となる．

また (2.A.2)(2.A.3) より同様に

$$\begin{aligned}
(U\Psi, U\Phi) &= \sum_{kl} A_k B_l^* (U\Psi_k, U\Psi_l) \quad \because (2.A.15) \\
&= \sum_{kl} A_k B_l^* \delta_{kl} \quad \because (2.A.3) \\
&= \sum_k A_k B_k^* \\
(\Psi, \Phi)^* &= \left(\sum_k A_k^* B_k\right)^* = \sum_k A_k B_k^*
\end{aligned}$$

となって

$$(U\Psi, U\Psi) = (\Psi, \Phi)^*$$

であり U は反ユニタリー演算子だ．

補遺 B:群の演算子とホモトピー類

この補遺では，2.7 節で述べた定理を証明する．有限対称性変換 T の演算子 $U(T)$ は，

(a) リー代数に中心電荷が現れないように群の生成子の再定義が可能

(b) 群が単連結

が満たされるとき，その位相を選ぶことにより群の射影表現ではなく通常の表現をなすようにできる．

変換パラメータとして，実変数 θ^a の集合 M を

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T\Big(f(\bar{\theta},\theta)\Big)$$

が成立するように導入する．さて，ヒルベルト空間の演算子 $U(T(\theta)) =: U[\theta] \in B(\mathcal{H})$ が，対応して

$$U[\bar{\theta}]U[\theta] = U\Big[f(\bar{\theta},\theta)\Big]$$

を満たすように構成したい．(ここで角括弧 $[\cdots]$ は，群のパラメータの関数として構成した U と，群の変換そのものの関数として表したものを区別するために用いている．$U[\theta]$ は後者だ．) これを行うために，群のパラメータ空間に，原点からそれぞれの点 $\theta \in M$ への任意の基準経路 $\Theta^a_\theta(s)$ を

$$\Theta^a_\theta : I = [0,1] \to M, \quad s \mapsto \Theta^a_\theta(s)$$

で定義する．このとき境界条件は $\Theta^a_\theta(0) = 0$ と $\Theta^a_\theta(1) = \theta^a$ とし，それぞれの経路に沿って関数

$$U_\theta : I \to B(\mathcal{H}), s \mapsto U_\theta(s)$$

を以下の微分方程式で定義する．

$$\frac{d}{ds}U_\theta(s) = it_\alpha U_\theta(s) h^a{}_b(\Theta_\theta(s))\frac{d\Theta^b_\theta(s)}{ds}$$

初期条件は

$$U_\theta(0) = 1$$

であり，ここで行列 h を

$$\left[h^{-1}\right]^a{}_b(\theta) := \left[\frac{\partial f^a(\bar{\theta},\theta)}{\partial\bar{\theta}^b}\right]_{\bar{\theta}=0} = \frac{\partial f^a}{\partial\bar{\theta}^b}(0,\theta)$$

と定めた．最終的には演算子 $U[\theta]$ を $U_\theta(1)$ と同定する．

とはいえ，急に微分方程式をお出しされても意味がわからないと思うから，簡易的なモチベーションを説明しておく．(2.B.1) から，$\bar{\theta}$ を微小な $\delta\theta$ とおき，$U[\theta]$ の微小な変化を見てやる．

$$U[\delta\theta]U[\theta] = U[f(\delta\theta,\theta)]$$

パラメータ $\delta\theta^a$ が微小なとき，演算子 $U[\theta]$ は単位元周りで生成子 t_a を用いて (2.2.17) と書けるから

$$\begin{aligned}(1+i\delta\theta^a t_a)U[\theta] =& U\left[f^a(0,\theta) + \left.\frac{\partial f^a(\bar{\theta},\theta)}{\partial\bar{\theta}^b}\right|_{\bar{\theta}=0}\delta\theta^b\right] \\ =& U\Big[\theta^a + [h^{-1}]^a{}_b(\theta)\delta\theta^b\Big] \quad \because (2.2.16)(2.B.4)\end{aligned}$$

とテイラー展開できるはずだ．θ はパラメータ空間 M の点であり，θ から $\delta\theta$ だけ移動させ $f^a(\delta\theta,\theta)$ にずらしたとき，$U[\theta]$ もそれに伴って $U[f(\delta\theta,\theta)]$ へとずれる．そのずらす経路に沿って，経路の各点でこの関係式

が成り立っていると解釈できる．つまり，これを拡張して経路 $\Theta_\theta^a(s)$ に沿った方程式にするには $\theta\to\Theta_\theta(s)$ と単に置き換えて

$$(1+i\delta\theta^a t_a)U[\Theta_\theta(s)]=U\Big[\Theta_\theta^a(s)+[h^{-1}]^a{}_b(\Theta_\theta(s))\delta\theta^b\Big]$$

と書けばいいと気付く．さて，右辺の引数の $\Theta_\theta^a(s)+[h^{-1}]^a{}_b(\Theta_\theta(s))\delta\theta^b$ は $\Theta_\theta^a(s+\delta s)$ と解釈できる．なぜなら，これは最初の式より $f(\delta\theta,\theta)$ に対応し，$\Theta_\theta(s)$ から (s でパラメータ化された) 経路に沿って微小に変化させた M の点を表しており，それは経路パラメータ s を微小に δs だけ変化させた $s+\delta s$ における点 $\Theta_\theta^a(s+\delta s)$ に違いないからだ．これを少し変形してやると

$$\begin{aligned}
\Theta_\theta^a(s+\delta s):=&\Theta_\theta^a(s)+[h^{-1}]^a{}_b(\Theta_\theta(s))\delta\theta^b\\
\therefore\quad \delta\theta^a=&h^a{}_b(\Theta_\theta(s))\Big(\Theta_\theta^a(s+\delta s)-\Theta_\theta^a(s)\Big)\\
=&h^a{}_b(\Theta_\theta(s))\delta\Theta_\theta^a(s)
\end{aligned}$$

したがって元の式は

$$\begin{aligned}
(1+i\delta\theta^a t_a)U[\Theta_\theta(s)]=&U\Big[\Theta_\theta^a(s)+[h^{-1}]^a{}_b(\Theta_\theta(s))\delta\theta^b\Big]\\
=&U[\Theta_\theta(s+\delta s)]\\
U[\Theta_\theta(s+\delta s)]-U[\Theta_\theta(s)]=&i\delta\theta^a t_a U[\Theta_\theta(s)]\\
=&it_a U_\theta[\Theta_\theta(s)]h^a{}_b(\Theta_\theta(s))\delta\Theta_\theta^b(s)
\end{aligned}$$

両辺を δs で割ってやると，微分の定義から

$$\frac{d}{ds}U[\Theta_\theta(s)]=it_a U[\Theta_\theta(s)]h^a{}_b(\Theta_\theta(s))\frac{d\Theta_\theta^b(s)}{ds}$$

と書ける．$U_\theta(s):=U[\Theta_\theta(s)]$ とおけば，(2.B.2) の微分方程式

$$\frac{d}{ds}U_\theta(s)=it_\alpha U_\theta(s)h^a{}_b(\Theta_\theta(s))\frac{d\Theta_\theta^b(s)}{ds}$$

が得られる．この説明により，最終的に $U_\theta(1)=U[\theta]$ となぜ同定したいかの見当が若干つくだろう．$U_\theta(s)$ の定義より $U_\theta(1)=U[\Theta_\theta(1)]=U[\theta]$ だからだ．

まず合成則を調べるために，2 点 θ_1,θ_2 を考え，まず 0 から θ_1 へ行き，その後 $f(\theta_2,\theta_1)$ へ進む経路 $\mathcal{P}$ を定義する．

$$\Theta_{\mathcal{P}}^a(s)\equiv\begin{cases}\Theta_{\theta_1}^a(2s) & \left(0\le s\le\frac{1}{2}\right)\\ f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1) & \left(\frac{1}{2}\le s\le 1\right)\end{cases}$$

実際，これがそのような経路になっていることを確認する．始点 $s=0$ は

$$\Theta_{\mathcal{P}}^a(0)=\Theta_{\theta_1}^a(0)=0$$

だ．中間の $s=1/2$ では

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\frac{1}{2}-0}\Theta_{\mathcal{P}}^a(s)=&\Theta_{\theta_1}^a(1)=\theta_1\\
\lim_{s\to\frac{1}{2}+0}\Theta_{\mathcal{P}}^a(s)=&f^a(\Theta_{\theta_2}(0),\theta_1)=f^a(0,\theta_1)=\theta_1\\
\therefore\quad \Theta_{\mathcal{P}}^a(1/2)=&\theta_1
\end{aligned}$$

となって中間が θ_1 で連続だ．終点の $s=1$ では

$$\Theta_{\mathcal{P}}^a(1)=f^a(\Theta_{\theta_2}(1),\theta_1)=f^a(\theta_2,\theta_1)$$

となっている．正しく経路になっていることが確認できる．

$U_{\mathcal{P}}(s)$ は (2.B.2) により微分方程式

$$\frac{d}{ds}U_{\mathcal{P}}(s) = it_a U_{\mathcal{P}}(s) h^a{}_b(\Theta_{\mathcal{P}}(s))\frac{d\Theta^b_{\mathcal{P}}(s)}{ds}$$

で定義される．第一区分 $0 \le s \le \frac{1}{2}$ では

$$\frac{d}{ds}U_{\mathcal{P}}(s) = it_a U_{\mathcal{P}}(s) h^a{}_b(\Theta_{\theta_1}(2s))\frac{d\Theta^b_{\theta_1}(2s)}{ds}$$

である．一方，$U_{\theta_1}(2s)$ の微分方程式を (2.B.2) に従って立てると

$$\frac{d}{ds}U_{\theta_1}(2s) = it_a U_{\theta_1}(2s) h^a{}_b(\Theta_{\theta_1}(2s))\frac{d\Theta^b_{\theta_1}(2s)}{ds}$$

となり，両者は同じ微分方程式を満たすことがわかる．初期条件も，ともに $U_{\mathcal{P}}(0) = 1 = U_{\theta_1}(0)$ となり一致するから，常微分方程式の解の一意性により $0 \le s \le \frac{1}{2}$ では $U_{\mathcal{P}}(s) = U_{\theta_1}(2s)$ となる．よって最初の区分の終わり $s = \frac{1}{2}$ では $U_{\mathcal{P}}(\frac{1}{2}) = U_{\theta_1}(1)$ となる．

$U_{\mathcal{P}}(s)$ の第二区分 ($\frac{1}{2} \le s \le 1$) でのふるまいを求めるためには，途中で $f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1), \theta_1)$ の微分が必要となるから先に計算しておく．このために，基本結合則

$$\begin{aligned}
T(\theta_3)T(\theta_2)T(\theta_1) =& T\Big(f(\theta_3,\theta_2)\Big)T(\theta_1) = T\Big(f(f(\theta_3,\theta_2),\theta_1)\Big)\\
=& T(\theta_3)T\Big(f(\theta_2,\theta_1)\Big) = T\Big(f(\theta_3, f(\theta_2,\theta_1))\Big)\\
\therefore \quad f^a(f(\theta_3,\theta_2),\theta_1) =& f^a(\theta_3, f(\theta_2,\theta_1))
\end{aligned}$$

を使う．$\theta_3 \to 0$ の極限で

$$\begin{aligned}
f^a(f(\theta_3,\theta_2),\theta_1) =& f^a\left(f^b(0,,\theta_2) + \left.\frac{\partial f^b(\bar{\theta},\theta_2)}{\partial\bar{\theta}^c}\right|_{\bar{\theta}=0}\theta_3^c\,,\,\theta_1\right)\\
=& f^a\Big(\theta_2^b + [h^{-1}]^b{}_c(\theta_2)\theta_3^c\,,\,\theta_1\Big)\\
=& f^a(\theta_2,\theta_1) + \frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^b}[h^{-1}]^b{}_c(\theta_2)\theta_3^c\\
= f^a(\theta_3, f(\theta_2,\theta_1)) =& f^a(0, f(\theta_2,\theta_1)) + \left.\frac{\partial f^a(\bar{\theta}, f(\theta_2,\theta_1))}{\partial\bar{\theta}^b}\right|_{\bar{\theta}=0}\theta_3^b\\
=& f^a(\theta_2,\theta_1) + [h^{-1}]^a{}_b(f(\theta_2,\theta_1))\theta_3^b
\end{aligned}$$

θ_3^c の係数を比較して，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^b}[h^{-1}]^b{}_c(\theta_2) =& [h^{-1}]^a{}_c(f(\theta_2,\theta_1))\\
\therefore \quad h^c{}_a(f(\theta_2,\theta_1))\frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^b} =& h^c{}_b(\theta_2)\\
h^c{}_a(f(\theta_2,\theta_1))\frac{\partial f^a}{\partial\theta_2^b}(\theta_2,\theta_1) =& h^c{}_b(\theta_2)
\end{aligned}$$

(最後に別の表記をしたのは，こっちの方が次の計算の変形がわかりやすくなると思ったからだ．) さて，$\frac{1}{2} \le s \le 1$ では $U_{\mathcal{P}}(s)$ の微分方程式は (2.B.2) より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}U_{\mathcal{P}}(s) =& it_a U_{\mathcal{P}}(s) h^a{}_b\Big(f(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1)\Big)\frac{df^b(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1)}{ds}\\
=& it_a U_{\mathcal{P}}(s) h^a{}_b\Big(f(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1)\Big)\left.\frac{\partial f^b(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^c}\right|_{\theta_2=\Theta_{\theta_2}(2s-1)}\frac{d\Theta_{\theta_2}(2s-1)}{ds}\\
=& it_a U_{\mathcal{P}}(s) h^a{}_b\Big(f(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1)\Big)\frac{\partial f^b}{\partial\theta_2^c}(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1)\frac{d\Theta_{\theta_2}(2s-1)}{ds}
\end{aligned}$$

$$=it_a U_{\mathcal{P}}(s) h^a{}_c(\Theta_{\theta_2}(2s-1)) \frac{d\Theta_{\theta_2}(2s-1)}{ds}$$

となる．一方，$U_{\theta_2}(2s-1)$ の微分方程式は (2.B.2) より

$$\frac{d}{ds} U_{\theta_2}(2s-1) = it_a U_{\theta_2}(2s-1) h^a{}_c(\Theta_{\theta_2}(2s-1)) \frac{d\Theta_{\theta_2}(2s-1)}{ds}$$

となり，両者は同じ微分方程式を満たすことが分かる．しかし初期条件が違い，$U_{\theta_2}(2s-1)$ は $s=\frac{1}{2}$ で $U_{\theta_2}(0)=1$ だが，$U_{\mathcal{P}}(s)$ は先程示した通り $s=\frac{1}{2}$ で $U_{\mathcal{P}}(\frac{1}{2})=U_{\theta_1}(1)\neq 1$ となる．そこで $U_{\mathcal{P}}(s)$ ではなく $U_{\mathcal{P}}(s)U_{\theta_1}^{-1}(1)$ を代わりに考えると，$U_{\theta_1}^{-1}(1)$ は s に対して定数だからこれも同じ微分方程式を満たし，しかも $s=\frac{1}{2}$ で $U_{\mathcal{P}}(\frac{1}{2})U_{\theta_1}^{-1}(1)=1$ となり初期条件も一致する．したがって常微分方程式の解の一意性より $\frac{1}{2}\leq s\leq 1$ では

$$U_{\mathcal{P}}(s) U_{\theta_1}^{-1}(s) = U_{\theta_2}(2s-1)$$

となる．特に

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U_{\theta_2}(1) U_{\theta_1}(1)$$

となる．

一見，θ_1 での $U_{\theta_1}(1)$ と θ_2 での $U_{\theta_2}(1)$ が合成された結果，θ_1 と θ_2 の合成 $f(\theta_2,\theta_1)=\Theta_{\mathcal{P}}(1)$ での $U_{\mathcal{P}}(1)$ になったように見える．しかし，これは $U_\theta(1)$ が複合則 (2.B.1) を満たすことは意味しない．なぜなら，たしかに経路 $\Theta_{\mathcal{P}}(1)$ は $\theta^a=0$ から $\theta^a=f^a(\theta_2,\theta_1)$ へのものだが，前に選んだ基準経路 $\Theta_{f(\theta_2,\theta_1)}(s)$ とは一般には違うものだからだ．$U_\theta(1)$ は経路の取り方で変化するかもしれない．

そこで，$U_\theta(1)$ が 0 と θ を結ぶ経路の取り方に依らないことを示す必要がある．

0 から θ への基準経路 $\Theta_\theta(s)$ に微小変化 $\delta\Theta(s)$ を加え，そのもとでの $U_\theta(s)$ への変化 δU を調べよう．(2.B.2) の変分をとると，変分は微分と同じように振舞うから

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\delta U =& it_a \delta U h^a{}_b(\Theta)\frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U \delta(h^a{}_b(\Theta))\frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h^a{}_b(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds} \\
=& it_a \delta U h^a{}_b(\Theta)\frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U \frac{\partial h^a{}_b(\Theta)}{\partial\Theta^c}\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h^a{}_b(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds} \\
=& it_a \delta U h^a{}_b(\Theta)\frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h^a{}_{b,c}\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h^a{}_b(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds}
\end{aligned}$$

ここで

$$h^a{}_{b,c} := \frac{\partial h^a{}_b(\Theta)}{\partial\Theta^c}$$

と定義した．

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{ds}1 = \frac{d}{ds}(U^{-1}U) = \left(\frac{d}{ds}U^{-1}\right)U + U^{-1}\left(\frac{d}{ds}U\right) \\
\therefore \quad \left(\frac{d}{ds}U^{-1}\right) = -U^{-1}\left(\frac{d}{ds}U\right)U^{-1}
\end{aligned}$$

であることを使うと

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(U^{-1}\delta U) =& \left(\frac{d}{ds}U^{-1}\right)\delta U + U^{-1}\left(\frac{d}{ds}\delta U\right) \\
=& -U^{-1}\left(\frac{d}{ds}U\right)U^{-1}\delta U + U^{-1}\left(\frac{d}{ds}\delta U\right) \\
=& -iU^{-1}t_a \delta U h^a{}_b(\Theta)\frac{d\Theta^b}{ds}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+iU^{-1}t_a\delta U h^a{}_b(\Theta)\frac{d\Theta^b}{ds}+iU^{-1}t_aUh^a{}_{b,c}\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}+iU^{-1}t_aUh^a{}_b(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds}\\
=&iU^{-1}t_aUh^a{}_{b,c}\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}+iU^{-1}t_aUh^a{}_b(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds}\\
=&iU^{-1}t_aUh^a{}_{b,c}\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}+iU^{-1}t_aUh^a{}_b(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds}\\
&-iU^{-1}t_aUh^a{}_{c,b}\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}+iU^{-1}t_aU\frac{\partial h^a{}_c(\Theta)}{\partial\Theta^b}\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}\quad(\leftarrow \text{合わせて}\pm 0)\\
=&iU^{-1}t_aU\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}(h^a{}_{b,c}-h^a{}_{c,b})\\
&+iU^{-1}t_aUh^a{}_b(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds}+iU^{-1}t_aU\frac{\partial h^a{}_c(\Theta)}{\partial\Theta^b}\frac{d\Theta^b}{ds}\delta\Theta^c\\
=&iU^{-1}t_aU\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}(h^a{}_{b,c}-h^a{}_{c,b})\\
&+iU^{-1}t_aUh^a{}_b(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds}+iU^{-1}t_aU\frac{\partial h^a{}_c(\Theta)}{ds}\delta\Theta^c\\
=&iU^{-1}t_aU\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}(h^a{}_{b,c}-h^a{}_{c,b})+iU^{-1}t_aU\frac{d}{ds}\left(h^a{}_b(\Theta)\delta\Theta^b\right)\\
=&iU^{-1}t_aU\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}(h^a{}_{b,c}-h^a{}_{c,b})+\frac{d}{ds}\left(iU^{-1}t_aUh^a{}_b(\Theta)\delta\Theta^b\right)\\
&-i\frac{d}{ds}\left(iU^{-1}t_aU\right)h^a{}_b(\Theta)\delta\Theta^b
\end{aligned}
$$

となり，さらに仮定 (a) より (中心電荷なしの) リー交換関係 (2.2.22) を使って

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(U^{-1}t_aU\right)=&-U^{-1}\left(\frac{d}{ds}U\right)U^{-1}t_aU+U^{-1}t_a\left(\frac{d}{ds}U\right)\\
=&-iU^{-1}t_bt_aUh^b{}_c\frac{d\Theta^c}{ds}+iU^{-1}t_at_bUh^b{}_c\frac{d\Theta^c}{ds}\qquad\because(2.B.2)\\
=&iU^{-1}[t_a,t_b]Uh^b{}_c\frac{d\Theta^c}{ds}\\
=&-U^{-1}C^d{}_{ab}t_dUh^b{}_c\frac{d\Theta^c}{ds}\\
-i\frac{d}{ds}(U^{-1}t_aU)h^a{}_e\delta\Theta^e=&iU^{-1}t_dUC^d{}_{ab}h^b{}_ch^a{}_e\delta\Theta^e\frac{d\Theta^c}{ds}
\end{aligned}
$$

と書けるから，以上を合わせて

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(U^{-1}\delta U)=&\frac{d}{ds}\left(iU^{-1}t_aUh^a{}_b(\Theta)\delta\Theta^b\right)\\
&+iU^{-1}t_aU\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds}(h^a{}_{b,c}-h^a{}_{c,b}+C^a{}_{ed}h^e{}_bh^d{}_c)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，結合条件 (2.B.6) で極限 $\theta_3,\theta_2\to 0$ をとる．まず $\theta_3\to 0$ は前と同じようにできて ((2.B.7) の計算を見返す)

$$
\frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^b}\left.\frac{\partial f^b(\bar\theta,\theta_2)}{\partial\bar\theta^c}\right|_{\bar\theta=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\bar\theta^c}f\Big(\bar\theta,f(\theta_2,\theta_1)\Big)\right|_{\bar\theta=0}
$$

さらに加えて $\theta_2\to 0$ とする．一つずつ見ていくと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^b}=&\left.\frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^b}\right|_{\theta_2=0}+\left.\frac{\partial^2 f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^e\partial\theta_2^b}\right|_{\theta_2=0}\theta_2^e\\
=&[h^{-1}]^a{}_b(\theta_1)+\left.\frac{\partial^2 f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^e\partial\theta_2^b}\right|_{\theta_2=0}\theta_2^e\\
\left.\frac{\partial f^b(\bar\theta,\theta_2)}{\partial\bar\theta^c}\right|_{\bar\theta=0}=&\frac{\partial}{\partial\bar\theta^c}\left.\left(f^b(\bar\theta,0)+\left.\frac{\partial f^b(\bar\theta,\theta_2)}{\partial\theta_2^d}\right|_{\theta_2=0}\theta_2^d\right)\right|_{\bar\theta=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^c}\left(\bar{\theta}^b + \left.\frac{\partial f^b(\bar{\theta},\theta_2)}{\partial \theta_2^d}\right|_{\theta_2=0}\theta_2^d\right)\Bigg|_{\bar{\theta}=0} \\
&=\delta^b_c + \left.\frac{\partial^2 f^b(\bar{\theta},\theta_2)}{\partial\bar{\theta}^c\partial\theta_2^d}\right|_{\bar{\theta}=\theta_2=0}\theta_2^d \\
&=\delta^b_c + f^b{}_{cd}\theta_2^d \qquad \because (2.2.19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^c} f\Big(\bar{\theta}, f(\theta_2,\theta_1)\Big)\Big|_{\bar{\theta}=0} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^c} f^a\left(\bar{\theta}, f^d(0,\theta_1) + \left.\frac{\partial f^d(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^e}\right|_{\theta_2=0}\theta_2^e\right)\Bigg|_{\bar{\theta}=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^c} f^a\Big(\bar{\theta}, \theta_1^d + [h^{-1}]^d{}_e(\theta_1)\theta_2^e\Big)\Big|_{\bar{\theta}=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^c}\left[f^a(\bar{\theta},\theta_1) + \frac{\partial f^a(\bar{\theta},\theta_1)}{\partial\theta_1^d}[h^{-1}]^d{}_e(\theta_1)\theta_2^e\right]\Bigg|_{\bar{\theta}=0} \\
&= \left.\frac{\partial f^a(\bar{\theta},\theta_1)}{\partial\bar{\theta}^c}\right|_{\bar{\theta}=0} + \left.\frac{\partial f^a(\bar{\theta},\theta_1)}{\partial\theta_1^d\partial\bar{\theta}^c}\right|_{\bar{\theta}=0}[h^{-1}]^d{}_e(\theta_1)\theta_2^e \\
&=[h^{-1}]^a{}_c(\theta_1) + \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1^d}[h^{-1}]^a{}_c(\theta_1)\right)[h^{-1}]^d{}_e(\theta_1)\theta_2^e
\end{aligned}
$$

よって元の式に代入して，θ_2 について 1 次の項の係数比較をすれば

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) &= \frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^b}\left.\frac{\partial f^b(\bar{\theta},\theta_2)}{\partial\bar{\theta}^c}\right|_{\bar{\theta}=0} \\
&=[h^{-1}]^a{}_c(\theta_1) + \left.\frac{\partial^2 f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^e\partial\theta_2^c}\right|_{\theta_2=0}\theta_2^e + [h^{-1}]^a{}_b(\theta_1)f^b{}_{cd}\theta_2^d \\
&=[h^{-1}]^a{}_c(\theta_1) + \left[\left.\frac{\partial^2 f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^d\partial\theta_2^c}\right|_{\theta_2=0} + [h^{-1}]^a{}_b(\theta_1)f^b{}_{cd}\right]\theta_2^d \\
(\mathrm{RHS}) &=[h^{-1}]^a{}_c(\theta_1) + \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1^b}[h^{-1}]^a{}_c(\theta_1)\right)[h^{-1}]^b{}_d(\theta_1)\theta_2^d \\
\therefore \quad & \left.\frac{\partial^2 f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^d\partial\theta_2^c}\right|_{\theta_2=0} + [h^{-1}]^a{}_b(\theta_1)f^b{}_{cd} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1^b}[h^{-1}]^a{}_c(\theta_1)\right)[h^{-1}]^b{}_d(\theta_1)
\end{aligned}
$$

が得られる．さらに右辺は $\frac{\partial}{\partial\theta}h^{-1} = -h^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}h\right)h^{-1}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1^b}[h^{-1}]^a{}_c(\theta_1)\right)[h^{-1}]^b{}_d(\theta_1) &= -[h^{-1}]^a{}_m(\theta_1)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1^b}h^m{}_n(\theta_1)\right)[h^{-1}]^n{}_c(\theta_1)[h^{-1}]^b{}_d(\theta_1) \\
&= -[h^{-1}]^a{}_m(\theta_1)h^m{}_{n,b}(\theta_1)[h^{-1}]^n{}_c(\theta_1)[h^{-1}]^b{}_d(\theta_1)
\end{aligned}
$$

と書ける．左から h を一つ，右から h を 2 つかけて行列計算することで

$$
h^a{}_{b,c}(\theta) = -f^a{}_{de}h^d{}_b(\theta)h^e{}_c(\theta) + h^a{}_d(\theta)\left.\frac{\partial^2 f^a(\theta_2,\theta)}{\partial\theta_2^d\partial\theta_2^e}\right|_{\theta_2=0}h^d{}_b(\theta)h^e{}_c(\theta)
$$

となる．右辺第二項目は (微分が d,e について対称だから)b,c について対称になっている．したがって b,c について反対称化させると消えて

$$
\begin{aligned}
h^a{}_{c,b}(\theta) - h^a{}_{b,c}(\theta) &= -f^a{}_{de}h^d{}_c(\theta)h^e{}_b(\theta) + f^a{}_{de}h^d{}_b(\theta)h^e{}_c(\theta) \\
&= -f^a{}_{ed}h^d{}_b(\theta)h^e{}_c(\theta) + f^a{}_{de}h^d{}_b(\theta)h^e{}_c(\theta) \\
&= -(-f^a{}_{de} + f^a{}_{ed})h^d{}_b(\theta)h^e{}_c(\theta) \\
&= -C^a{}_{de}h^d{}_b(\theta)h^e{}_c(\theta) \qquad \because (2.2.23)
\end{aligned}
$$

となるから

$$
h^a{}_{c,b}(\theta) - h^a{}_{b,c}(\theta) + C^a{}_{ed}h^e{}_b(\theta)h^d{}_c(\theta) = 0
$$

が成立することが分かる．これにより (2.B.9) の最後の項は消えることから

$$\frac{d}{ds}\left[U^{-1}\delta U - iU^{-1}t_a U h^a{}_b(\Theta)\delta\Theta^b\right] = 0$$

となり，したがって

$$A := U^{-1}\delta U - iU^{-1}t_a U h^a{}_b(\Theta)\delta\Theta^b$$

という量は経路のパラメータ s に対して定数であることがわかる．

$\delta\Theta$ は始点 $\Theta_\theta(0) = 0$ と終点 $\Theta_\theta(1) = \theta$ は変えない，つまり $\delta\Theta(0) = \delta\Theta(1) = 0$ である．さらに初期条件 (2.B.3)$U_\theta(0) = 1$ より $\delta U(0) = 0$ もわかっているから，$s = 0$ とおいて

$$A = U(0)\underbrace{\delta U(0)}_{=0} - iU^{-1}(0)t_a U(0)h^a{}_b\underbrace{\delta\Theta^b(0)}_{=0} = 0$$

より s の値にかかわらず $A = 0$ がわかり，さらに $s = 1$ とおいて

$$\begin{aligned}0 = A =& U^{-1}(1)\delta U(1) - iU^{-1}(1)t_a U(1)h^a{}_b\underbrace{\delta\Theta^b(1)}_{=0}\\ =& U^{-1}(1)\delta U(1)\end{aligned}$$

よって $\delta U(1) = 0$ であり，$U_\theta(1)$ は始点 $\Theta_\theta(0) = 0$ と終点 $\Theta_\theta(1) = \theta$ を変えない経路の微小変分 $\delta\Theta$ のもとで停留することが分かる．($\delta U(s)$ とは，$\delta\Theta$ だけ変化させたときの $U_\theta(s)$ の変化分だったことを思い出そう．) 仮定 (b) より，パラメータ空間 M は単連結であり，どのような経路も互いに連続的に変形できるので，よって $U_\theta(1)$ は 0 から θ の間の途中経路に依らない．したがって $U_\theta(1)$ を θ のみの関数とできる！

$$U[\theta] := U_\theta(1)$$

特に，経路 $\mathcal{P}$ は 0 から $\theta = f(\theta_2, \theta_1)$ を繋ぐので

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U[f(\theta_2, \theta_1)]$$

が成立する．したがって (2.B.8) より

$$\begin{aligned}U[f(\theta_2, \theta_1)] =& U_{\mathcal{P}}(1)\\ =& U_{\theta_2}(1)U_{\theta_1}(1)\\ =& U[\theta_2]U[\theta_1]\end{aligned}$$

が成立し，$U[\theta]$ が群の積の法則 (2.B.1) を満たすことが分かる．これで証明が完了した．

これで非射影的表現 $U[\theta]$ が構成できた．しかしまだ，別の表現をとってきたら射影表現になっており，位相だけの再定義しても非射影表現にならないような表現があるかもしれない．よって最後に，同じ表現の生成子 t_a を持つ同じ群のどのような射影表現 $\tilde{U}[\theta]$ も $U[\theta]$ と位相だけしか違わない

$$\tilde{U}[\theta] = e^{i\alpha(\theta)}U[\theta]$$

ことを証明する．これが成立すれば，射影表現 $\tilde{U}[\theta]$ の積の法則での位相 ϕ

$$\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta] = e^{i\phi(\theta',\theta)}\tilde{U}[f(\theta', \theta)]$$

は単に $\tilde{U}[\theta]$ の位相変化 $\tilde{U} \to e^{-i\alpha}\tilde{U}$ で取り除けることになる．これを見るには，演算子

$$\begin{aligned}U[\theta]^{-1}U[\theta']^{-1}\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta] =& \Big(U[\theta']U[\theta]\Big)^{-1}\Big(\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta]\Big)\\ =& U[f(\theta', \theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta', \theta)]e^{i\phi(\theta',\theta)}\end{aligned}$$

を考える．仮定より，$U[\theta]$ と $\tilde{U}[\theta]$ は同じ生成子 t_a を持つ

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a}U[\theta]\bigg|_{\theta=0} = \frac{\partial}{\partial\theta^a}\tilde{U}[\theta]\bigg|_{\theta=0} = it_a$$

から，左辺の θ'^a 微分は $\theta'=0$ でゼロになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta^a}U[\theta]^{-1}\bigg|_{\theta=0} =& -U[0]^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^a}U[\theta]\right)\bigg|_{\theta=0}U[0]^{-1} = -it_a \\
\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\left\{U[\theta']^{-1}\tilde{U}[\theta']\right\}\bigg|_{\theta=0} =& -it_a + it_a = 0 \\
\therefore\quad \frac{\partial}{\partial\theta'^a}\left\{U[\theta]^{-1}U[\theta']^{-1}\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta]\right\}_{\theta'=0} =& 0
\end{aligned}$$

したがって，両辺の θ' 微分は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\left\{U[\theta]^{-1}U[\theta']^{-1}\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta]\right\} \\
=&\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\left\{U[f(\theta',\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]e^{i\phi(\theta',\theta)}\right\} \\
=&\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\left\{U[f(\theta',\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]\right\}e^{i\phi(\theta',\theta)} \\
&+U[f(\theta',\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]^{-1}e^{i\phi(\theta',\theta)}i\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\phi(\theta',\theta) \\
=&e^{i\phi(\theta',\theta)}\left[\frac{\partial f^b(\theta',\theta)}{\partial\theta'^a}\frac{\partial}{\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\}_{\theta=f(\theta',\theta)}+U[f(\theta',\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]^{-1}i\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\phi(\theta',\theta)\right]
\end{aligned}$$

となり，$\theta'=0$ とおけば左辺はゼロになるから，

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial f^b(\theta',\theta)}{\partial\theta'^a}\bigg|_{\theta'=0}\frac{\partial}{\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\}_{\theta=f(0,\theta)} \\
&+i\left[\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\phi(\theta',\theta)\right]_{\theta'=0}U[f(0,\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(0,\theta)] \\
=&[h^{-1}]^b{}_a(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\} \\
&+i\left[\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\phi(\theta',\theta)\right]_{\theta'=0}U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta] \\
\therefore\quad 0 =& \frac{\partial}{\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\}+i\left[\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\phi(\theta',\theta)\right]_{\theta'=0}h^a{}_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta] \\
=&\frac{\partial}{\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\}+i\left[\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\phi(\theta',\theta)\right]_{\theta'=0}h^a{}_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta] \\
=&\frac{\partial}{\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\}+i\phi_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\phi_b(\theta) := \left[\frac{\partial}{\partial\theta'^a}\phi(\theta',\theta)\right]_{\theta'=0}h^a{}_b(\theta)$$

だ．もう一度 θ^c で微分すると

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial^2}{\partial\theta^c\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\}+i\frac{\partial\phi_b(\theta)}{\partial\theta^c}U[f(\theta',\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]^{-1} \\
&+i\phi_b(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta^c}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\} \\
=&\frac{\partial^2}{\partial\theta^c\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\}+i\frac{\partial\phi_b(\theta)}{\partial\theta^c}U[f(\theta',\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]^{-1} \\
&+\phi_b(\theta)\phi_c(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta] \quad \because \frac{\partial}{\partial\theta^b}\left\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right\} = -i\phi_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]
\end{aligned}$$

となる．第一項目と第三項目は b, c について対称だから，b, c について反対称化すると

$$0 = \frac{\partial\phi_b(\theta)}{\partial\theta^c} - \frac{\partial\phi_c(\theta)}{\partial\theta^b}$$

を得る．パラメータ空間 M は単連結だから，これはポアンカレの定理 (あるいは可積分条件．単連結な空間上で，$d\omega = 0$ ならば $\omega = d\zeta$ となる ζ の存在 (d は外微分)) より

$$\begin{aligned}
d(\phi_a d\theta^a) =& \frac{\partial\phi^a}{\partial\theta^b} d\theta^b \wedge d\theta^a \\
=& \frac{\partial\phi^a}{\partial\theta^b}(d\theta^b \otimes d\theta^a - d\theta^a \otimes d\theta^b) \\
=& \left(\frac{\partial\phi^b}{\partial\theta^a} - \frac{\partial\phi^a}{\partial\theta^b}\right) d\theta^a d\theta^b \\
=& 0 \\
\therefore \quad \exists\beta \quad \mathrm{s.t} \quad \phi_b d\theta^a = d\beta = & \frac{\partial\beta(\theta)}{\partial\theta^b} d\theta^b \\
\phi_b(\theta) =& \frac{\partial\beta(\theta)}{\partial\theta^b}
\end{aligned}$$

と書ける．したがって，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta^b}\left[U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]e^{i\beta(\theta)}\right] =& \frac{\partial}{\partial\theta^b}\left[U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\right] e^{i\beta(\theta)} + U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta] i \frac{\partial\beta(\theta)}{\partial\theta^b} e^{i\beta(\theta)} \\
=& -i\phi_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta] + i\phi_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta] \\
=& 0
\end{aligned}$$

から，量

$$B := U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]e^{i\beta(\theta)}$$

は θ について一定であることがわかる．その値を $\theta = 0$ での値ととれば

$$\begin{aligned}
B := U[0]^{-1}\tilde{U}[0]e^{i\beta(0)} =& e^{i\beta(0)} \quad \because U[0] = \tilde{U}[0] = 1 \\
U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]e^{i\beta(\theta)} =& B = e^{i\beta(0)} \\
\therefore \quad \tilde{U}[\theta] =& U[\theta]\exp(-i\beta(\theta) + i\beta(0))
\end{aligned}$$

となる．これで証明が完了した．

この解析により，「リー代数に中心電荷がない」が，「群は単連結でない」とき，群の積の法則に現れる位相因子の性質についてある程度のことがわかる．いま，0 から θ へ，そして $f(\bar{\theta}, \theta)$ へ進む経路 $\mathcal{P}$ が，0 から $f(\bar{\theta}, \theta)$ へ行く基準経路に変形できないとする．言い換えると，0 から θ，$f(\bar{\theta}, \theta)$ へと進み，再び 0 へと戻るある経路が連続的に 1 点に縮めることができない，とする．このとき，このとき $U^{-1}[f(\theta_2, \theta_1)]U[\theta_2]U[\theta_1]$ は位相因子 $\exp(i\phi(\theta_2, \theta_1)) \neq 1$ となりうる．しかし ϕ は互いに連続的に変形できる経路についてはすべて同一だ．(原点 0 からスタートして 0 に戻ってきたときの原点での $U[0 \to 0] = e^{i\phi}$ は 1 ではないが，その経路から若干変化させたときの δU は，Θ が連続的に変形できる限り 0 になり，よって位相因子 $e^{i\phi}$ は変化しないからだ．) 原点から出て原点に戻る全てのループのうち，あるループに連続的に変形できるものの集合は，そのループのホモトピー類を作る．これまでに見たように，$\phi(\theta_2, \theta_1)$ は 0 から θ，$f(\bar{\theta}, \theta)$ へと進み 0 に戻る経路のホモトピー類にのみ依存する．ホモトピー類の集合は群をなす (ホモトピー群)．$\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$ のホモトピー群の「積」は $\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$ を続いてまわるループのホモトピー類だ．ループ $\mathcal{L}$ のホモトピー類の「逆元」は $\mathcal{L}$ を逆方向に回るループのホモトピー類だ．「単位元」は原点に縮められるループのホモトピー類だ．この群は，この空間の第一ホモトピー群，または基本群という．位相因子がこの群の表現となっていることはすぐにわかる．実際，ループ $\mathcal{L}$ を一周して位相因子 $e^{i\phi}$ が出て，ループ $\bar{\mathcal{L}}$ を一周して位相因子 $e^{i\bar{\phi}}$ が出るなら，両方の

ループを回れば位相因子 $e^{i\phi}e^{i\bar{\phi}}$ が出る．したがって，もし与えられた (中心電荷を持たない) 群 $\mathcal{G}$ のパラメータ空間 M の第一ホモトピー群の 1 次元表現がわかれば，$\mathcal{G}$ の射影表現として適切なものを全て書き出せることになる．例えば，$SO(3,1)$ の第一ホモトピー群は $\mathbb{Z}_2$ であり，したがって射影表現の位相因子は $\mathbb{Z}_2$ の一次元表現 $\{+1,-1\}$ であることがわかる．

ホモトピー群は 4 巻で詳しく調べる．

補遺 C:反転と縮退した多重項

通常，反転 T と P は，1 粒子状態を同じ種類の別の 1 粒子状態へ，しばしば粒子の種類に依る位相因子を伴って変換する，と仮定する．2.6 節では，1 粒子状態の縮退した多重項に対してはこれより複雑に作用するかもしれない，と簡潔に述べた．ここでは一般化された反転演算子を調べる．

時間反転から調べる．より一般的な可能性を探るために，質量がゼロでない 1 粒子には次のように作用するとする．

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma}\sum_m \mathcal{T}_{mn}\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,m}$$

ここで $\mathbf{p}, j, \sigma$ はそれぞれ，この粒子の運動量，スピン，スピンの z 成分であり，n, m はその粒子の縮退した多重項の成分を区別するための添え字だ．(2.6 節で述べたように，1 粒子でもスピン 1/2 の粒子が奇数個，つまり 1 個あれば時間反転でクラマーの縮退は起きる．) 因子 $(-1)^{j-\sigma}$ は (2.6.17) と同様に導かれる．行列 $\mathcal{T}_{mn}$ は，T が反ユニタリーだから

$$\begin{aligned}
\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n} &= (\Psi_{\mathbf{p}',\sigma',n'},\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}) = (\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n},\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p}',\sigma',n'})\\
&=(-1)^{j-\sigma}(-1)^{j-\sigma'}\sum_{mm'}\mathcal{T}^*_{mn}\mathcal{T}_{m'n'}(\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,m},\Psi_{-\mathbf{p}',-\sigma',m'})\\
&=(-1)^{j-\sigma}(-1)^{j-\sigma'}\sum_{mm'}\mathcal{T}^\dagger_{nm}\mathcal{T}_{m'n'}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{mm'}\delta_{\sigma\sigma'}\\
&=(-1)^{2j-2\sigma}\left(\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}\right)_{nn'}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma\sigma'}
\end{aligned}$$

$(-1)^{2j-2\sigma}$ は $j-\sigma$ が必ず整数だから必ず 1 となる．したがってこれが成り立つためには $\mathcal{T}$ はユニタリー行列でなければならない．ただしそれ以外は未知だ．

さて，1 粒子状態の基底を適当に選びなおして，$\mathcal{T}$ を対角化できるかなどで，この変換を簡単化できるか見てみる．新しい状態を

$$\Psi'_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{U}_{mn}\Psi_{\mathbf{p},m}$$

で定義する．このとき，変換 (2.C.1) は

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}\Psi'_{\mathbf{p},\sigma,n} &= \sum_m \mathcal{U}^*_{mn}\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},m}\\
&=(-1)^{j-\sigma}\sum_{mm'}\mathcal{U}^*_{mn}\mathcal{T}_{mm'}\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,m'}\\
&=(-1)^{j-\sigma}\sum_{mm'kl}\mathcal{U}^{-1}_{nm}\mathcal{T}_{mm'}\mathcal{U}^*_{m'l}(\mathcal{U}^\dagger_{lk})^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,k} \quad \because (\text{ユニタリー性 } \mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1})\\
&=(-1)^{j-\sigma}\sum_{mm'kl}\mathcal{U}^{-1}_{nm}\mathcal{T}_{mm'}\mathcal{U}^*_{m'l}\mathcal{U}_{kl}\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,k}\\
&=(-1)^{j-\sigma}\sum_m(\mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{U}^*)_{nm}\Psi'_{-\mathbf{p},-\sigma,m}
\end{aligned}$$

となるから，これは行列 $\mathcal{T}$ を以下と入れ替えたもので与えられる．

$$\mathcal{T}' := \mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{U}^*$$

$\mathcal{T}$ はユニタリー行列だから，うまいユニタリー行列 $\mathcal{U}$ で $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{U}$ と挟めれば対角化できる．しかし今回は右の $\mathcal{U}$ が $\mathcal{U}^*$ となっており，この形では一般的には対角化できない．したがって一般的には，T がユニタリーのときのように，このように 1 粒子状態の基底の選択によって $\mathcal{T}'$ を対角的にすることはできない．しかし，その代わりにブロック対角にはできる．そのブロックは，1×1 の位相か，以下の形の 2×2 行列になる．

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi/2}\\ e^{-i\phi/2} & 0\end{pmatrix}$$

ここで ϕ は色々な実数の位相である．まずこの命題を証明しよう．

まず (2.C.2) より

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}'\mathcal{T}'^{*} =& \mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{U}^{*}(\mathcal{U}^{-1})^{*}\mathcal{T}^{*}\mathcal{U} \\
=& \mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{T}^{*}\mathcal{U}
\end{aligned}
$$

が得られる．これはユニタリー行列 $\mathcal{U}$ による相似変換になっているから，ユニタリー行列 $\mathcal{T}'\mathcal{T}'^{*}$ が対角的になっているように $\mathcal{U}$ を選ぶことができる．

エルミート行列が対角化可能なことは有名だが，ユニタリー行列もユニタリー行列による相似変換によって対角化できることはあまり有名ではないから，ここで証明しておく．まず，任意の $n \times n$ ユニタリー行列 U の固有値は絶対値 1 の複素数となることを示す．固有値 λ とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ をとることで

$$
\begin{aligned}
U\boldsymbol{x} =& \lambda\boldsymbol{x} \\
(\lambda\boldsymbol{x})^{\dagger}(\lambda\boldsymbol{x}) =& |\lambda|^2||\boldsymbol{x}||^2 \\
= (U\boldsymbol{x})^{\dagger}(U\boldsymbol{x}) =& \boldsymbol{x}^{\dagger}U^{\dagger}U\boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}||^2
\end{aligned}
$$

となり，$|\lambda| = 1$ がわかる．次に，ユニタリー行列においてもエルミート行列と同様に異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを示す．（一般の行列の場合，固有ベクトル同士が正規直交することは普通成り立たない．）これは固有値が絶対値 1 の複素数であることから $e^{i\lambda}(\lambda \in \mathbb{R})$ と書けて，異なる固有値をもつベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
& U\boldsymbol{u} = e^{i\lambda}\boldsymbol{u}, \quad U\boldsymbol{v} = e^{i\mu}\boldsymbol{v} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, e^{i\lambda} \neq e^{i\mu} \\
(U\boldsymbol{u})^{\dagger}(U\boldsymbol{v}) =& e^{i(\mu-\lambda)}\boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{v} \\
= \boldsymbol{u}^{\dagger}U^{\dagger}U\boldsymbol{v} =& \boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{v} \\
\therefore \quad [e^{i(\mu-\lambda)} - 1]\boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{v} =& 0
\end{aligned}
$$

となり，仮定より $e^{i(\mu-\lambda)} \neq 1$ であるから $\boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{v} \neq 0$ が示せる．したがって，$n \times n$ ユニタリー行列 U に対して n 個の正規直交基底がとれて，それらを $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ とすれば，それらが固有値 $\lambda_1 = e^{i\phi_1}, \cdots, \lambda_n = e^{i\phi_n}$ を持つとすれば

$$
P^{-1}UP = \mathrm{diag}(e^{i\phi_1}, \cdots, e^{i\phi_n}), \quad P = [\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n]
$$

としてユニタリー行列 P を用いて対角化することが可能となる．

これが $\mathcal{U}$ によって行われ，D が位相 $e^{i\phi_n}$ を対角成分とする対角行列 $D_{nm} = e^{i\phi_n}\delta_{nm}$ となっていて，$\mathcal{T}'\mathcal{T}'^{*} = D$ となっているとする．プライムを省略して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}\mathcal{T}^{*} =& \mathcal{T}(\mathcal{T}^{T})^{-1} = D \\
\therefore \quad \mathcal{T} =& D\mathcal{T}^{T}
\end{aligned}
$$

となる．これからすぐに

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{nm} =& \sum_{l} D_{nl}\mathcal{T}^{T}_{lm} \\
=& e^{i\phi_n}\mathcal{T}_{mn} \\
\therefore \quad \mathcal{T}_{nn} =& e^{i\phi_n}\mathcal{T}_{nn}
\end{aligned}
$$

となり，$e^{i\phi_n} = 1$ でない限り対角成分 $\mathcal{T}_{nn}$ はゼロになることがわかる．さらに，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{nm} =& e^{i\phi_n}\mathcal{T}_{mn} \\
=& e^{i\phi_n}e^{i\phi_m}\mathcal{T}_{nm}
\end{aligned}
$$

だから，$e^{i\phi_n}=1$ でも $e^{i\phi_m}\neq 1$ ならば $\mathcal{T}_{nm}=\mathcal{T}_{mn}=0$ となることがわかる．(ただし $e^{i\phi_n}\neq 1$ かつ $e^{i\phi_m}\neq 1$ となる場合でも $e^{i\phi_m}=e^{-i\phi_n}$ となるときに限り，対角成分 $\mathcal{T}_{nn}$ はゼロだが非対角成分 $\mathcal{T}_{nm}$ はゼロとは限らない．$e^{i\phi_m}=e^{-i\phi_n}$ も満たさない (n,m) では $\mathcal{T}_{nm}=\mathcal{T}_{mn}=0$ だ．) したがって，$e^{i\phi_n}=e^{i\phi_m}=1$ となる組 (n,m) の成分では $\mathcal{T}_{nn},\mathcal{T}_{nm},\mathcal{T}_{mn}$ は非ゼロになることができ，特にそのような (n,m) 成分だけから構成される部分行列 $\mathcal{T}_{nm}$ は $\mathcal{T}_{nm}=\mathcal{T}_{mn}$ 対称行列となる．

よって，$e^{i\phi_n}=1$ となる全ての行と列を最初に並べると約束すれば，そのような n で最大のものを M とおいて，$N\times N$ 行列 $\mathcal{T}$ は

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}\mathcal{A} & 0\\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix}$$

という形になる．(さらにちゃんと説明すると，対角にした後に ii 成分と jj 成分を入れ替えるのは

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{ij}=&\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & & & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ \vdots & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1\end{pmatrix}\\ =&I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}\end{aligned}$$

で $\mathcal{P}_{ij}^{-1}D\mathcal{P}_{ij}$ と挟めばいい．これを繰り返し $\mathcal{P}=\mathcal{P}_{i_1j_1}\mathcal{P}_{i_2j_2}\cdots\mathcal{P}_{i_nj_n}$ で $\mathcal{P}^{-1}D\mathcal{P}$ と作用させて，望みの順番になるようにしてやればいい．ここで E_{ij} は ij 成分のみが 1 でそれ以外全ての成分がゼロの行列 (行列基底) だ．この行列で挟む操作は，行列の i 列目と j 列目を入れ替えるのと i 行目と j 行目を入れ替える操作に対応する．これも実直交行列となっているから，$\mathcal{T}$ から $\mathcal{T}'$ への変換は D を対角化させる $\mathcal{U}$ と一緒にして $\mathcal{UP}$ で変換してやればいい．) ここで $\mathcal{A}$ は $M\times M$ 対称行列となっており，$\mathcal{B}$ は対角成分が全てゼロの $(N-M)\times(N-M)$ 行列となっている．実際上での考察を用いれば，行列成分 (n,m) の行成分 n が $n\leq N$ を満たすものであれば $e^{i\phi_n}=1$ を満たし，さらに列成分 m も $m\leq N$ ならば $e^{i\phi_m}=1$ も満たす．したがってこれは上の考察より $\mathcal{T}_{nn},\mathcal{T}_{nm},\mathcal{T}_{mn},$ が非ゼロになるかもしれず，$\mathcal{T}_{nm}=\mathcal{T}_{mn}$ の対称な形なっている．したがって $\mathcal{A}$ は対称行列だ．もし行成分は $n\leq N$ だが列成分が $m>N$ ならば，$e^{i\phi_n}=1$ だが $e^{i\phi_m}\neq 1$ であるから，そのような $\mathcal{T}_{nm}=0$ となる．逆でも同様であり，したがって右上と左下の行列成分はゼロとなることがわかる．$n>N$ かつ $m>N$($\mathcal{B}$ の成分) では $e^{i\phi_n}\neq 1$ かつ $e^{i\phi_m}\neq 1$ を満たすから，対角成分はゼロ $\mathcal{T}_{nn}=0$ となるが，$e^{i\phi_n}=e^{-i\phi_m}$ を満たすかもしれないから，非対角成分が非ゼロにはなるかもしれない．

さらに

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\mathcal{T}^*&=\begin{pmatrix}\mathcal{A} & 0\\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{A}^* & 0\\ 0 & \mathcal{B}^*\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\mathcal{A} & 0\\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{A}^\dagger & 0\\ 0 & \mathcal{B}^*\end{pmatrix}\quad\because\mathcal{A}^T=\mathcal{A}\\ &=\begin{pmatrix}\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger & 0\\ 0 & \mathcal{B}\mathcal{B}^*\end{pmatrix}\\ &=D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\phi}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

という形になるから (ここで $e^{i\phi}$ は，対角成分が $e^{i\phi}$ となる $(N-M)\times(N-M)$ 行列)，$\mathcal{A}$ は対称な上にユニタリーである．したがって $\mathcal{A}$ は対称かつ反エルミートな行列の指数行列として表すことができる．実際 $\mathcal{A}$

はユニタリー行列であるから，前に述べたように，あるユニタリー行列 P を用いて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} =& P^{-1}\mathrm{diag}[e^{i\lambda_1},\cdots,e^{i\lambda_N}]P \\
=& P^{-1}\exp(i\mathrm{diag}[\lambda_1,\cdots,\lambda_N])P \\
=& \exp\bigl(iP^{-1}\mathrm{diag}[\lambda_1,\cdots,\lambda_N]P\bigr) \\
=& e^{iX}
\end{aligned}
$$

と書くことができる．$P^{-1}\mathrm{diag}[\lambda_1,\cdots,\lambda_N]P$ は $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ が実数であることと P がユニタリーであることから自明に X エルミート行列であり，したがって虚数 i と合わせた行列 X は反エルミートとなる．さらに $\mathcal{A}$ が対称であることから X も対称である必要がある．エルミートかつ対称な X は実対称行列である．実対称行列は実直交行列で対角化可能だったのだから，X を対角化させるような対称行列を G とし (ちなみに一般に固有値の重複などのせいで P とは異なる可能性あり)

$$
G^TXG = \mathrm{diag}[x_1,\cdots,x_N]
$$

，変換 (2.C.2) で，$\mathcal{U}$ を $\mathcal{A}$ だけに作用するように

$$
\mathcal{U} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

と選べば，G が実直交行列であることからこれは実際にユニタリー $\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}$ で

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}' =& \mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{U}^* \\
=& \begin{pmatrix} G^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} G^Te^{iX}G & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} e^{iG^TXG} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix} \quad \because G^T = G^{-1} \\
=& \begin{pmatrix} \mathrm{diag}[e^{ix_1},\cdots e^{ix_N}] & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と部分行列 $\mathcal{A}$ は対角化できる．これがブロック対角化における 1×1 の位相因子の部分だ．この $\mathcal{A}$ の部分は (2.C.1) では位相因子を与えるのみだから，ここからは $(N-M)\times(N-M)$ 正方行列 $\mathcal{B}$ のみを考えればよい．

残りの位相因子について考える．対角行列 D の $e^{i\phi} = 1$ となる部分については完全に終わったので，$e^{i\phi} \neq 1$ となる位相因子の中で一つ持ってきて，それを $e^{i\phi_1}$ とする．同じ位相因子 $e^{i\phi} = e^{i\phi_1}$ を与える $e^{i\phi}$ 全てを対角成分の (1 の後の) 最初に持ってくる．その位相因子の個数を L_1^+ 個とする．次に $e^{i\phi_1}$ と反対の位相 $e^{i\phi} = e^{-i\phi_1}$ を持つ位相因子を全て持ってくる．この位相因子は L_1^- 個とする．その次に $e^{i\phi_1}, e^{-i\phi_1}$ のどちらとも異なる残りの位相因子から一つ選び，それを $e^{i\phi_2}$ とする．同じ位相因子となるもの (L_2^+ 個) と反対の位相因子となるもの (L_2^- 個) を並べる…というのを繰り返す．すると

$$
\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathcal{B}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i \\ e^{-\phi_i/2}\mathcal{C}_i^T & 0 \end{pmatrix}
$$

という形になる．なぜなら，$e^{i\phi_i}e^{i\phi_j} = 1$ となる場合以外はゼロになるのだったから，i 番目の $e^{i\phi_i}$ と同じ位相因子となる L_i^+ 個の $\mathcal{T}_{ij}(j = 1,\cdots,L_i^+)$ はゼロになるから，$\mathcal{T}_{ii} = \mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ji} = 0(j = 1,\cdots,L_i^+)$ となり，$\mathcal{T}_{ij}(i = 2,\cdots,L_i^+)$ についてそれは同じだから，したがって $\mathcal{B}_i$ の左上の $L_i^+ \times L_i^+$ 行列はゼロ行列となる．同様に右下の $L_i^- \times L_i^-$ 行列についてもゼロ行列となる．一方，右上の $L_i^+ \times L_i^-$ 行列についてはゼロではない．なぜなら $\mathcal{T}_{ij}$ の i について $e^{i\phi_i} \neq 1$ であって，仮定より L_i^- 個の j について $e^{i\phi_j} = e^{-i\phi_i}$ であるから，$\mathcal{T}_{ij} \neq 0$ である．L_i^+ 個の i についてこれが成り立つから，$\mathcal{B}_i$ の右上の $L_i^+ \times L_i^-$ 行列はある非ゼロな行列

$e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i$ と書ける (すぐ後の便利のため位相因子を抜き出しておく)．左下の部分行列についても同様のことが言えて，$L_i^- \times L_i^+$ 行列 $\mathcal{D}_i$ と書けて

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i \\ \mathcal{D}_i & 0 \end{pmatrix}$$

という形に書ける．しかし $e^{i\phi}e^{i\phi_j} = 1$ を満たす組 i, j について

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ji} =& e^{i\phi_j}\mathcal{T}_{ij} = e^{-i\phi_i}\mathcal{T}_{ij} \\ (\mathcal{D}_i)_{nm} =& e^{-i\phi_i}(e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i)_{mn} = e^{-i\phi_i/2}(\mathcal{C}_i^T)_{nm} \\ \therefore \quad \mathcal{D}_i =& e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i^T \end{aligned}$$

がわかる．これで示すことができた．

さらに $\mathcal{T}$ のユニタリー性は $\mathcal{B}$ のユニタリー性を導き，それにより $\mathcal{B}_i$ のユニタリー性を導く．よって

$$\begin{aligned} 1 =& \mathcal{B}_i^\dagger \mathcal{B}_i \\ =& \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i \\ e^{-i\phi_i/2}\mathcal{C}_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i^* \\ e^{-i\phi_i/2}\mathcal{C}_i^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \mathcal{C}_i\mathcal{C}_i^\dagger & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_i^T\mathcal{C}_i^* \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad 1 =& \mathcal{C}_i\mathcal{C}_i^\dagger, \quad 1 = \mathcal{C}_i^\dagger\mathcal{C}_i \end{aligned}$$

左上の $1 = \mathcal{C}_i\mathcal{C}_i^\dagger$ は $L_i^+ \times L_i^+$ 正方行列であり，右下の $1 = \mathcal{C}_i^\dagger\mathcal{C}_i$ は $L_i^- \times L_i^-$ 正方行列となっている．行列の rank に関して

$$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$$

がなりたつから，前者から

$$\mathrm{rank}(C_iC_i^\dagger) = L_i^+ \leq \mathrm{rank}(C_i^\dagger) = L_i^-$$

がわかり，後者から

$$\mathrm{rank}(C_i^\dagger C_i) = L_i^- \leq \mathrm{rank}(C_i) = L_i^+$$

がわかる．したがって $L_i^+ = L_i^- = L_i$ が導かれる．したがって $\mathcal{C}_i$ は $L_i \times L_i$ 正方行列かつユニタリー行列であることがわかる．(同時に，$e^{i\phi_i} \neq 1$ を与える位相因子に対して $e^{i\phi_j} = e^{-i\phi_i}$ を与える位相因子は同数だけ存在することがわかる．)$\mathcal{U}$ が $\mathcal{T}$ と同じ意味でブロック対角であり

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}[\mathcal{U}_i] \end{pmatrix}$$

となっていて，i 番目ブロックが任意のユニタリー行列 V_i, W_i を使って

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} V_i & 0 \\ 0 & W_i \end{pmatrix}$$

となるようにすれば，この $\mathcal{U}$ による変換 (2.C.2) は

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' =& \mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{U} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}[\mathcal{U}_i]^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{diag}[e^{ix_1}, \cdots e^{ix_N}] & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}[\mathcal{B}_i] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}[\mathcal{U}_i]^* \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \mathrm{diag}[e^{ix_1}, \cdots e^{ix_N}] & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}[\mathcal{U}_i^{-1}\mathcal{B}_i\mathcal{U}_i^*] \end{pmatrix} \\ \mathcal{U}_i^{-1}\mathcal{B}_i\mathcal{U}_i^* =& \begin{pmatrix} V_i^{-1} & 0 \\ 0 & W_i^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i \\ e^{-\phi_i/2}\mathcal{C}_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i^* & 0 \\ 0 & W_i^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2}V_i^{-1}\mathcal{C}_i W_i^* \\ e^{-\phi_i/2}W^{-1}\mathcal{C}_i^T V_i^* & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2}V_i^{-1}\mathcal{C}_i W_i^* \\ e^{-\phi_i/2}[V^{-1}\mathcal{C}_i W_i^*]^T & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となり，部分行列の変換 $\mathcal{C}_i \to V_i^{-1}\mathcal{C}_i W_i^*$ が対応していることが分かる．$V_i = \mathcal{C}_i, W_i = 1$ と選べば $\mathcal{C}_i' = 1$ となるようにできる．さらに実直交行列 $\mathcal{P}_{nm}$ を繰り返しかけて作った $\mathcal{P}_i$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} \to \mathcal{T}` =& \mathcal{P}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{P}^* \\
\mathcal{P} =& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}[\mathcal{P}_i] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と変換してやれば，この $\mathcal{T}'$ は 1×1 の位相因子の対角部分と，2×2 の

$$
\begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}
$$

のブロック対角の部分に分かれることが分かる．$\mathcal{P}_i$ は，列の置換

$$
(1, 2, \cdots, L_i, L_i+1, \cdots, 2L_i) \to (1, L_i+1, 2, L_i+2, 3, \cdots, L_i, 2L_i)
$$

を考えて作る．$L_i = 3$ あたりで実験して確かめよう．$L_i = 3$ では

$$
\begin{aligned}
&(1,2,3,4,5,6) & \\
\to&(1,4,3,2,5,6) & 2,4\text{ 個目の入れ替え} \\
\to&(1,4,5,2,3,6) & 3,5\text{ 個目の入れ替え} \\
\to&(1,4,2,5,3,6) & 3,4\text{ 個目の入れ替え}
\end{aligned}
$$

を考えればいいので，$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{2,4}\mathcal{P}_{3,5}\mathcal{P}_{3,4}$ と構成すればいいことがわかる．実際

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_i =& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\longrightarrow \mathcal{P}_{2,4}^{-1}\mathcal{C}_i\mathcal{P}_{2,4}^* =& \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\longrightarrow \mathcal{P}_{3,5}^{-1}\mathcal{P}_{2,4}^{-1}\mathcal{C}_i\mathcal{P}_{2,4}^*\mathcal{P}_{3,5}^* =& \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \\
\longrightarrow \mathcal{P}_{3,4}^{-1}\mathcal{P}_{3,5}^{-1}\mathcal{P}_{2,4}^{-1}\mathcal{C}_i\mathcal{P}_{2,4}^*\mathcal{P}_{3,5}^*\mathcal{P}_{3,4}^* =& \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

という変換をしてやればよい．これで証明が完了した．

ここで，(2.C.3) のブロック対角行列で $e^{i\phi}\neq 1$ となる場合，時間反転を対角化するように状態を選ぶことは不可能であることがわかる．この部分からは，状態の対 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ があり，それに T が行列 (2.C.3) で作用するときには

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}=e^{\pm i\phi/2}(-1)^{j-\sigma}\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,\mp}$$

となる．したがって，これらの状態の任意の一次結合に対して，時間反転は

$$\begin{aligned}&\mathsf{T}(c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+}+c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-})\\&\qquad=(-1)^{j-\sigma}\left(e^{i\phi/2}c_+^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,-}+e^{-i\phi/2}c_-^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,+}\right)\end{aligned}$$

と作用する．($c_\pm$ の複素共役は T の反線形性によるもの．) したがってこの一次結合が T のもとで位相 λ で変換される

$$\mathsf{T}(c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+}+c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-})=\lambda(c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+}+c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-})$$

ためには,

$$e^{i\phi/2}c_+^*=\lambda c_-,\quad e^{-i\phi/2}c_-^*=\lambda c_+$$

とならなければならない．しかし，これらの式を組み合わせると $e^{\pm i\phi/2}c_\pm^*=|\lambda|^2c_\pm^*e^{\mp i\phi/2}$ となる．これは自明な結合 $c_+=c_-=0$ か $e^{i\phi}=1$ がなりたっていなければ不可能だ．したがって，$e^{i\phi}\neq 1$ のときには，時間反転不変性はこれらの状態に，スピンに関する縮退の他に，2 重の縮退を必ず要請する．

もし余分な内部対称性演算子 S がこれらの状態を

$$\mathsf{S}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}=e^{\pm i\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp}$$

と変換するならば，時間反転演算子を新しく $\mathsf{T}':=\mathsf{S}^{-1}\mathsf{T}$ と再定義し，この演算子が $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ を互いに混ぜないようにできる．したがって，このような内部対称性がないときにのみ，粒子状態の二重性は時間反転不変性で説明できる．

T^2 の問題．変換 (2.C.8) を繰り返すと

$$\mathsf{T}^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}=(-1)^{2j}e^{\mp i\phi}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$$

となる．位相 ϕ によって，ここに現れる因子は 1 になったり 1 でない位相因子になったりする．

パリティ演算子 P の場合でも，同様に複雑な作用を考えることができる．

$$\mathsf{P}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}=\sum_m\mathcal{P}_{nm}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,m}$$

しかしこの場合 $\mathcal{P}$ はユニタリーだが，P は今度は反線形性がないので通常通り $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}$ のユニタリーな線形結合で新しい基底を選べばいつでも $\mathcal{P}$ を対角化できる．ただし，この基底の選び方が，上で $\mathcal{U}$ による時間反転の簡単な作用をするように選んだ基底の選び方と異なっている場合がある．したがって原則的には P, T の両方が簡単に作用するものはほぼなく，両方を同時に使うと余分に縮退が起きるらしい．

どんな場の量子論も CPT という対称性を満たすと考えられている．これは 1 粒子状態に以下のような作用をする．

$$\mathsf{CPT}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}=(-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n^c}$$

ここで n^c は粒子 n の反粒子 (荷電共役) を意味する．この変換ではどんな位相も行列も許されない．これにより

$$(\mathsf{CPT})^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}=(-1)^{2j}\Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n}$$

となる．(5 章を書いてからここらへん更新予定．)