WeinbergQFT Part5

坂井 啓悟 (Sakai Keigo)

目次

第 VI 部

ファインマン図

5.1　ファインマン則の導出

正規順序積同士の積についての便利な公式を与えておこう．

再び 4.2 節で導入した生成・消滅演算子の省略記法

$$a(q) := a(\mathbf{p}\sigma n)$$

を用いて，生成消滅演算子の生成汎関数

$$N[\eta,\xi] \equiv: \exp\left(\int dq\eta(q)a^\dagger(q) + \int dqa(q)\xi(q)\right):$$

を考える．ここで $\eta(q)=\eta(\mathbf{p},\sigma,n), \xi(q)=\xi(\mathbf{p},\sigma,n)$ は，n がボゾン的な粒子の種類であれば互いに可換な c 数であり，n がフェルミオン的な粒子の種類であれば，ボゾン的なものとは可換だがフェルミオン的なもの同士では反可換な c 数とする．任意の生成・消滅演算子からなる正規順序多項式 : $F[a,a^\dagger]$: は，適当な微分作用素を用いてこの生成汎関数から得ることができる．すなわち，ある形式的な作用素 $\hat{F}\left(\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{\delta}{\delta\xi}\right)$ を用いて

$$:F[a,a^\dagger] := \hat{F}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi}\right)N[\eta,\xi]\Bigg|_{\eta=\xi=0}$$

と書ける．例えば

$$:a(q_1)a^\dagger(q_2)a(q_3):=\pm a^\dagger(q_2)a(q_1)a(q_3) = \pm\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta(q_1)}N[\eta,\xi]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi(q_1)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi(q_3)}\Bigg|_{\eta=\xi=0}$$

として得られる．さて，二つの生成汎関数同士の積は

$$\begin{aligned}
&N[\eta_1,\xi_1]N[\eta_2,\xi_2]\\
=&:\exp\left(\int dq\eta_1(q)a^\dagger(q)+\int dq\xi_1(q)a(q)\right)::\exp\left(\int dp\eta_2(q)a^\dagger(q)+\int dqa(q)\xi_2(q)\right):\\
=&e^{\int dq\eta_1(q)a^\dagger(q)}e^{\int dqa(q)\xi_1(q)}e^{\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}e^{\int dqa(q)\xi_2(q)}\\
=&e^{\int dq\eta_1(q)a^\dagger(q)}e^{\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}e^{\int dqa(q)\xi_1(q)}e^{\int dqa(q)\xi_2(q)}\exp\left(\int dqdq'\xi_1(q)[a(q),a^\dagger(q')]_\mp\eta_2(q')\right)\\
=&e^{\int dq(\eta_1(q)+\eta_2(q))a^\dagger(q)}e^{\int dqa(q)(\xi_1(q)+\xi_2(q))}\exp\left(\int dqdq'\xi_1(q)[a(q),a^\dagger(q')]_\mp\eta_2(q')\right)\\
=&e^{\int dq(\eta_1(q)+\eta_2(q))a^\dagger(q)}e^{\int dqa(q)(\xi_1(q)+\xi_2(q))}\exp\left(\int dqdq'\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a_1(q)}[a(q),a^\dagger(q')]_\mp\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a_2^\dagger(q')}\right)\\
=&N[\eta_1+\eta_2,\xi_1+\xi_2]\exp\left(\int dqdq'\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a_1(q)}[a(q),a^\dagger(q')]_\mp\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a_2^\dagger(q')}\right)\\
=&N[\eta_1+\eta_2,\xi_1+\xi_2]\exp\left(\int dqdq'\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a_1(q)}[a(q),a^\dagger(q')]_\mp\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a_2^\dagger(q')}\right)
\end{aligned}$$

となる．(ただし $\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a_1(q)}$ と $\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a_2^\dagger(q')}$ は $\eta_1(q),\xi_2(q)$ の係数にある $a(q)$ と $a^\dagger(q)$ にのみ微分が作用することを意味する．) ここで

$$:\exp\left(\int dq\eta(q)a^\dagger(q)+\int dqa(q)\xi(q)\right):=e^{\int dq\eta(q)a^\dagger(q)}e^{\int dqa(q)\xi(q)}$$

であることと，BCH 公式より

$$e^{\int dqa(q)\xi_1(q)}e^{\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}$$

$$
\begin{aligned}
=&e^{\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}\left[e^{-\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}e^{\int dqa(q)\xi_1(q)}e^{\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}\right]\\
=&e^{\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}\exp\left(\int dqa(q)\xi_1(q)-\int dqdq'[\eta_2(q')a^\dagger(q'),a(q)\xi_1(q)]+\cdots\right)\\
=&e^{\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}\exp\left(\int dqa(q)\xi_1(q)+\int dq\xi_1(q)\eta_2(q)\right)\\
=&e^{\int dq\eta_2(q)a^\dagger(q)}e^{\int dqa(q)\xi_1(q)}\exp\left(\int dq\xi_1(q)\eta_2(q)\right)
\end{aligned}
$$

となることを用いた．(途中で

$$
\begin{aligned}
[\eta_2(q')a^\dagger(q'),a(q)\xi_1(q)]=&\eta_2(q')a^\dagger(q')a(q)\xi_1(q)-a(q)\xi_1(q)\eta_2(q')a^\dagger(q')\\
=&(-1)^{\pi(q)\pi(q')+\pi(q)+\pi(q')}\xi_1(q)a^\dagger(q')a(q)\eta_2(q')\\
&-(-1)^{\pi(q)+\pi(q')}\xi_1(q)a(q)a^\dagger(q')\eta_2(q')\\
=&-(-1)^{\pi(q)+\pi(q')}\xi_1(q)\Big(a(q)a^\dagger(q')-(-1)^{\pi(q)\pi(q')}a^\dagger(q')a(q)\Big)\eta_2(q')\\
=&-(-1)^{\pi(q)+\pi(q')}\xi_1(q)[a(q),a^\dagger(q')]_\mp\eta_2(q')\\
=&-(-1)^{\pi(q)+\pi(q')}\xi_1(q)\delta(q-q')\eta_2(q')\\
=&-(-1)^{2\pi(q)}\xi_1(q)\delta(q-q')\eta_2(q')\\
=&-\xi_1(q)\delta(q-q')\eta_2(q')
\end{aligned}
$$

を用いた．これは c 数であるから高次の交換子はゼロである．また $\delta(q-q')=\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{nn'}$ の $\delta_{nn'}$ により，$[a(q),a^\dagger(q')]_\mp$ に現れる $a(q)$ と $a^\dagger(q')$ は同じ粒子の種類でありそうでなければゼロとなるから $\xi_1(q')$ と $\eta_2(q)$ はともにボゾン的かともにフェルミオン的である．）したがって，二つの正規順序多項式の積は

$$
\begin{aligned}
&:F[a,a^\dagger]::G[a,a^\dagger]:\\
=&\hat{F}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_1},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi_1}\right)\hat{G}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_2},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi_2}\right)N[\eta_1,\xi_1]N[\eta_2,\xi_2]\Big|_{\eta=\xi=0}\\
=&\hat{F}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_1},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi_1}\right)\hat{G}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_2},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi_2}\right)\\
&\quad\times N[\eta_1+\eta_2,\xi_1+\xi_2]\exp\left(\int dq\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a_1(q)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a_2^\dagger(q)}\right)\Big|_{\eta=\xi=0}\\
=&\hat{F}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi}\right)\hat{G}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi}\right)\exp\left(\int dq\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a_1(q)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a_2^\dagger(q)}\right)N[\eta,\xi]\Big|_{\eta=\xi=0}\\
=&\exp\left(\int dq\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a_1(q)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a_2^\dagger(q)}\right)\hat{F}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi}\right)\hat{G}\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta},\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\xi}\right)N[\eta,\xi]\Big|_{\eta=\xi=0}\\
=&\exp\left(\int dq\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a_1(q)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a_2^\dagger(q)}\right):F[a,a^\dagger]G[a,a^\dagger]:\\
=&\exp\left(\int dq\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a^{(F)}(q)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^{(G)\dagger}(q)}\right):F[a,a^\dagger]G[a,a^\dagger]:\\
=&:F[a,a^\dagger]\exp\left(\sum_{\sigma n}\int d^3\mathbf{p}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a^{(F)}(\mathbf{p},\sigma,n)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^{(G)\dagger}(\mathbf{p},\sigma,n)}\right)G[a,a^\dagger]:
\end{aligned}
$$

という公式が得られる．ここで $\delta/\delta\eta_1$ によって置き換えられた $a(q)$ は $\eta_1(q)$ のもともと係数であるものだったのだから，それはまさに $\delta/\delta a_1(q)$ によって微分されるものであり，したがって $\delta/\delta a_1(q)$ はそのまま $F[a,a^\dagger]$ の $a(q)$ を微分する $\delta/\delta a^{(F)}(q)$ に置き換えられることを用いた．他の部分も同様である．この公式は，書き換えると

$$:F[a,a^\dagger]::G[a,a^\dagger]:$$

$$
=:F[a,a^\dagger]\exp\left(\sum_n\sum_{\sigma\sigma'}\int d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a^{(F)}(\mathbf{p},\sigma,n)}[a(\mathbf{p},\sigma,n),a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma',n)]_\mp\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^{(G)\dagger}(\mathbf{p}',\sigma',n)}\right)G[a,a^\dagger]:
$$

となり，$:F[a,a^\dagger]:$ の右側に並べられた消滅演算子を $:G[a,a^\dagger]$ の左側に並べられた生成演算子を超えて並び替えることにより $:F[a,a^\dagger]G[a,a^\dagger]:$ にするとき，「(反) 交換関係 $[a(\mathbf{p},\sigma,n),a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma',n)]_\mp=\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'}$ を用いて (反) 交換させていく」という描像を少し見方を変えて，「$a(\mathbf{p},\sigma,n)$ と $a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma',n)$ の組を対にして消す代わりに $[a(\mathbf{p},\sigma,n),a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma',n)]_\mp=\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'}$ を生み出す」という描像にするものである．

実際に確かめると

$$
\begin{aligned}
:F[a,a^\dagger]:=&a(q_1)a(q_2)\\
:G[a,a^\dagger]:=&a^\dagger(q_3)a^\dagger(q_4)\\
:F::G:=&a(q_1)a(q_2)a^\dagger(q_3)a^\dagger(q_4)\\
=&\delta(q_2-q_3)a(q_1)a^\dagger(q_4)+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}a(q_1)a^\dagger(q_3)a(q_2)a^\dagger(q_4)\\
=&\delta(q_2-q_3)a(q_1)a^\dagger(q_4)+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}a(q_1)a^\dagger(q_3)\delta(q_2-q_4)\\
&+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_4)}a(q_1)a^\dagger(q_3)a^\dagger(q_4)a(q_2)\\
=&\delta(q_2-q_3)\delta(q_1-q_4)+(-1)^{\pi(q_1)\pi(q_4)}\delta(q_2-q_3)a^\dagger(q_4)a(q_1)\\
&+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}\delta(q_1-q_3)\delta(q_2-q_4)+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_1)\pi(q_3)}a^\dagger(q_3)a(q_1)\delta(q_2-q_4)\\
&+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_4)}\delta(q_1-q_3)a^\dagger(q_4)a(q_2)\\
&+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_4)}(-1)^{\pi(q_1)\pi(q_3)}a^\dagger(q_3)a(q_1)a^\dagger(q_4)a(q_2)\\
=&\delta(q_2-q_3)\delta(q_1-q_4)+(-1)^{\pi(q_1)\pi(q_4)}\delta(q_2-q_3)a^\dagger(q_4)a(q_1)\\
&+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}\delta(q_1-q_3)\delta(q_2-q_4)+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_1)\pi(q_3)}a^\dagger(q_3)a(q_1)\delta(q_2-q_4)\\
&+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_4)}\delta(q_1-q_3)a^\dagger(q_4)a(q_2)\\
&+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_4)}(-1)^{\pi(q_1)\pi(q_3)}\delta(q_1-q_4)a^\dagger(q_3)a(q_2)\\
&+(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_2)\pi(q_4)}(-1)^{\pi(q_1)\pi(q_3)}(-1)^{\pi(q_1)\pi(q_4)}a^\dagger(q_3)a^\dagger(q_4)a(q_1)a(q_2)\\
=&:a(q_1)a(q_2)a^\dagger(q_3)a^\dagger(q_4):\\
&+\int dp:a(q_1)a(q_2)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a(p)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^\dagger(p)}a^\dagger(q_3)a^\dagger(q_4):\\
&+\frac{1}{2!}\int dp_1dp_2:a(q_1)a(q_2)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a(p_1)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^\dagger(p_1)}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a(p_2)}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^\dagger(p_2)}a^\dagger(q_3)a^\dagger(q_4):
\end{aligned}
$$

となる．

さて，我々は場を通じてのみ生成・消滅演算子に依存する関数を考えたいのだった．一般に粒子の種類 n の場は

$$
\psi_\ell(x)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\sigma\left[u_\ell(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma)+v_\ell(q)e^{-ip\cdot x}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\right]
$$

と書ける[*1]から，$\delta a,\delta a^\dagger$ の変分に対する場の変分は

$$
\begin{aligned}
\delta\psi_\ell(x)=&\int\frac{dq}{(2\pi)^{3/2}}\left[\delta a(\mathbf{p},\sigma)u_\ell(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}+\delta a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)v_\ell(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}\right]\\
\therefore\quad&\frac{\overleftarrow{\delta}\,\psi_\ell(x)}{\delta a(\mathbf{p},\sigma)}=\frac{u_\ell(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}e^{ip\cdot x},\quad\frac{\overleftarrow{\delta}\,\psi_\ell^\dagger(x)}{\delta a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)}=\frac{u_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ip\cdot x}\\
&\frac{\overleftarrow{\delta}\,\psi_\ell^\dagger(x)}{\delta a^c(\mathbf{p},\sigma)}=\frac{v_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}e^{ip\cdot x},\quad\frac{\overleftarrow{\delta}\,\psi_\ell(x)}{\delta a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)}=\frac{v_\ell(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ip\cdot x}
\end{aligned}
$$

[*1] 線形結合の係数 κ,λ はともに 1 にしている．後の節で示すように，これは常に可能である．

となるから，チェーンルールより，自分自身が反粒子でない場合 $a \neq a^c$ では

$$
\begin{aligned}
\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a(\mathbf{p},\sigma)} =& \sum_\ell \int d^4x \frac{\overleftarrow{\delta}\psi_\ell(x)}{\delta a(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(x)} = \sum_\ell \int d^4x \frac{u_\ell(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip\cdot x} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(x)} \\
\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)} =& \sum_\ell \int d^4x \frac{\overrightarrow{\delta}\psi_\ell^\dagger(x)}{\delta a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^\dagger(x)} = \sum_\ell \int d^4x \frac{u_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip\cdot x} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^\dagger(x)} \\
\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a^c(\mathbf{p},\sigma)} =& \sum_\ell \int d^4x \frac{\overleftarrow{\delta}\psi_\ell^\dagger(x)}{\delta a^c(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^\dagger(x)} = \sum_\ell \int d^4x \frac{v_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip\cdot x} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^\dagger(x)} \\
\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)} =& \sum_\ell \int d^4x \frac{\overrightarrow{\delta}\psi_\ell(x)}{\delta a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(x)} = \sum_\ell \int d^4x \frac{v_\ell(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip\cdot x} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(x)}
\end{aligned}
$$

であり，自分自身が反粒子の場合 $a = a^c$ では (ψ と $\psi^\dagger$ が独立でないから)

$$
\begin{aligned}
\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a(\mathbf{p},\sigma)} =& \sum_\ell \int d^4x \frac{\overleftarrow{\delta}\psi_\ell(x)}{\delta a(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(x)} = \sum_\ell \int d^4x \frac{u_\ell(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip\cdot x} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(x)} \\
\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)} =& \sum_\ell \int d^4x \frac{\overrightarrow{\delta}\psi_\ell(x)}{\delta a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(x)} = \sum_\ell \int d^4x \frac{v_\ell(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip\cdot x} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(x)}
\end{aligned}
$$

となる．これを用いれば，まず反粒子が自分自身でない場合では (粒子の種類 n に関する和の n と n^c の部分だけ取り出して)

$$
\begin{aligned}
&\sum_\sigma \int d^3\mathbf{p} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a^{(F)}(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^{(G)\dagger}(\mathbf{p},\sigma)} + \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a^{(F)c}(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^{(G)c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)} \\
=& \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\ell m} \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p} \int d^4x d^4y e^{ip\cdot x} e^{-ip\cdot y} u_\ell(\mathbf{p},\sigma) u_m^\dagger(\mathbf{p},\sigma) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{(F)}(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^{\dagger(G)}(y)} \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\ell m} \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p} \int d^4x d^4y e^{iq\cdot(x-y)} v_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma) v_m(\mathbf{p},\sigma) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{(F)\dagger}(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^{(G)}(y)} \\
=& \sum_{\ell m} \int d^4x d^4y \sum_\sigma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} u_\ell(\mathbf{p},\sigma) u_m^\dagger(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot(x-y)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{(F)}(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^{\dagger(G)}(y)} \\
&+ \sum_{\ell m} \int d^4x d^4y \sum_\sigma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} v_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma) v_m(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot(x-y)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{\dagger(F)}(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^{(G)}(y)} \\
=& \sum_{\ell m} \int d^4x d^4y [\psi_\ell^+(x), \psi_m^{+\dagger}(y)]_\mp \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{(F)}(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^{\dagger(G)}(y)} \\
&+ \sum_{\ell m} \int d^4x d^4y [\psi_\ell^{c-\dagger}(x), \psi_m^{c-}(y)]_\mp \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{\dagger(F)}(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^{(G)}(y)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
\psi_\ell^+(x) =& \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} u_\ell(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot x} a(\mathbf{p},\sigma) \\
\psi_\ell^{c-}(x) =& \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} v_\ell(\mathbf{p},\sigma) e^{-ip\cdot x} a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma) \\
\psi_\ell^{+\dagger}(x) =& \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} u_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma) e^{-ip\cdot x} a^\dagger(\mathbf{p},\sigma) \\
\psi_\ell^{c-\dagger}(x) =& \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} v_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot x} a^c(\mathbf{p},\sigma) \\
[\psi_\ell^+(x), \psi_m^{+\dagger}(y)]_\mp =& \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} u_\ell(\mathbf{p},\sigma) u_m^\dagger(\mathbf{p}',\sigma') e^{ip\cdot x - ip'\cdot y} [a(\mathbf{p},\sigma), a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')]_\mp
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} u_\ell(\mathbf{p},\sigma) u_m^\dagger(\mathbf{p}',\sigma') e^{ip\cdot x - ip'\cdot y} \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'} \\
&= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} u_\ell(\mathbf{p},\sigma) u_m^\dagger(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot(x-y)} \\
[\psi_\ell^{c-\dagger}(x), \psi_m^{c-}(y)]_\mp &= \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} v_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma) v_m(\mathbf{p}',\sigma') e^{ip\cdot x - ip'\cdot y} [a^c(\mathbf{p},\sigma), a^{c\dagger}(\mathbf{p}',\sigma')]_\mp \\
&= \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} v_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma) v_m(\mathbf{p}',\sigma') e^{ip\cdot x - ip'\cdot y} \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'} \\
&= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} v_\ell^\dagger(\mathbf{p},\sigma) v_m(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot(x-y)}
\end{aligned}
$$

であることを用いた．自分自身が反粒子の場合は

$$
\begin{aligned}
&\sum_\sigma \int d^3\mathbf{p} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta a^{(F)}(\mathbf{p},\sigma)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta a^{(G)\dagger}(\mathbf{p},\sigma)} \\
&= \sum_{\ell m} \int d^4x d^4y \sum_\sigma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n) v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p},\sigma,n) e^{ip\cdot(x-y)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{(F)}(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_{\bar{\ell}}^{(G)}(y)} \\
&= \sum_{\ell m} \int d^4x d^4y [\psi_\ell^+(x), \psi_{\bar{\ell}}^-(y)]_\mp \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{(F)}(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_{\bar{\ell}}^{(G)}(y)}
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&: F[\psi(x), \psi^\dagger(x)] :: G[\psi(y), \psi^\dagger(y)] : \\
&= : F[\psi(x), \psi^\dagger(x)] \exp\Bigg(\sum_{\ell m} \int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{(F)}(u)} [\psi_\ell^+(u), \psi_m^{+\dagger}(v)]_\mp \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^{\dagger(G)}(v)} \\
&\qquad + \sum_{\ell m} \int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^{\dagger(F)}(u)} [\psi_\ell^{c-\dagger}(u), \psi_m^{c-}(v)]_\mp \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^{(G)}(v)} \Bigg) G[\psi(y), \psi^\dagger(y)] :
\end{aligned}
$$

という公式が得られる．

S 行列に現れる時間順序積は

$$
\begin{aligned}
T\{\mathcal{H}_I(x_1), \mathcal{H}_I(x_2), \cdots, \mathcal{H}_I(x_n)\} &= \cdots \mathcal{H}_I(x_i)\theta(x_i^0 - x_j^0)\mathcal{H}_I(x_j)\cdots \\
&\quad + \cdots \mathcal{H}_I(x_j)\theta(x_j^0 - x_i^0)\mathcal{H}_I(x_i)\cdots
\end{aligned}
$$

という，x_i と x_j の相互作用の積と，その入れ替えをした積が足し合わされる．ここでは簡単のため，2 個の時間順序積

$$
T\{\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(y)\} = \theta(x-y)\mathcal{H}_I(x)\mathcal{H}_I(y) + \theta(y-x)\mathcal{H}_I(y)\mathcal{H}_I(x)
$$

を考えよう．5.1 節で述べたように，相互作用は場とその共役場の関数を正規順序積にしたもの $\mathcal{H}_I(x) \equiv: \mathcal{F}[\psi(x), \psi^\dagger(x)]:$ で与えられ，かつ $\mathcal{H}_I(x)$ は多項式だから単項式 $\mathcal{H}_i(x)$ の和で書くことができるはずであるから $\mathcal{F}[\psi, \psi^\dagger]$ も同様に場と共役場の単項式で分解しよう．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\psi(x), \psi^\dagger(x)] &= \sum_i g_i \mathcal{F}_i[\psi(x), \psi^\dagger(x)] \\
\mathcal{H}_i(x) &\equiv : \mathcal{F}_i[\psi(x), \psi^\dagger(x)] : \\
\therefore \quad \mathcal{H}_I(x) &= \sum_i g_i \mathcal{H}_i(x)
\end{aligned}
$$

したがって，2 個の時間順序積は

$$
T\{\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(y)\}
$$

$$
\begin{aligned}
=\sum_{ij} g_i g_j \Big[&\theta(x-y) : \mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] :: \mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] : \\
&+ \theta(y-x) : \mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] :: \mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] : \Big]
\end{aligned}
$$

という形になる．上で与えた公式より

$$
\begin{aligned}
&: \mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] :: \mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] : \\
=& : \mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] \exp\Bigg(\sum_{\ell m}\int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(u)}[\psi_\ell^+(u),\psi_m^{+\dagger}(v)]_\mp \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^\dagger(v)} \\
&\qquad + \sum_{\ell m}\int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^\dagger(u)}[\psi_\ell^{c-\dagger}(u),\psi_m^{c-}(v)]_\mp \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m(v)}\Bigg)\mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] :
\end{aligned}
$$

を用いれば，第一項目の $\mathcal{F}_i(x)[\psi(x),\psi^\dagger(x)]$ の中にある $\psi_\ell(x)$ と，$\mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)]$ の中にある $\psi_m^\dagger(y)$ の間から

$$
\theta(x-y)[\psi_\ell^+(x),\psi_m^{+\dagger}(y)]_\mp
$$

が現れることがわかる．同時に時間順序積の第二項目も

$$
\begin{aligned}
&: \mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] :: \mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] : \\
=& : \mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] \exp\Bigg(\sum_{\ell m}\int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_m(u)}[\psi_m^+(u),\psi_\ell^{+\dagger}(v)]_\mp \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^\dagger(v)} \\
&\qquad + \sum_{\ell m}\int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_m^\dagger(u)}[\psi_m^{c-\dagger}(u),\psi_\ell^{c-}(v)]_\mp \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(v)}\Bigg)\mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] : \\
=& : \mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] \exp\Bigg(\pm\sum_{\ell m}\int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^\dagger(v)}[\psi_m^+(u),\psi_\ell^{+\dagger}(v)]_\mp \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m(u)} \\
&\qquad \pm \sum_{\ell m}\int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(v)}[\psi_m^{c-\dagger}(u),\psi_\ell^{c-}(v)]_\mp \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^\dagger(u)}\Bigg)\mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] :
\end{aligned}
$$

より (ここでフェルミオン的な汎関数微分同士は反可換になることを用いた)，$\mathcal{F}_i(x)[\psi(x),\psi^\dagger(x)]$ の中にある $\psi_\ell(x)$ と $\mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)]$ の中にある $\psi_m^\dagger(y)$ との間から

$$
\pm\theta(y-x)[\psi_m^{c-\dagger}(y),\psi_\ell^{c-}(x)]_\mp
$$

が現れる．これらを足し合わせれば，$\mathcal{H}_i(x)$ に含まれる $\psi_\ell(x)$ と，$\mathcal{H}_j(y)$ に含まれる $\psi_m^\dagger(y)$ との対から

$$
\begin{aligned}
&\theta(x-y)[\psi_\ell^+(x),\psi_m^{+\dagger}(y)]_\mp \pm \theta(y-x)[\psi_m^{c-\dagger}(y),\psi_\ell^{c-}(x)]_\mp \\
=&: -i\Delta_{\ell m}(x,y)
\end{aligned}
$$

が生じることがわかる．この結果をまとめれば

$$
\begin{aligned}
&T\{: \mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] :, : \mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] :\} \\
=& : \mathcal{F}_i[\psi(x),\psi^\dagger(x)] \exp\Bigg(\sum_{\ell m}\int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell(u)}(-i\Delta_{\ell m}(u,v)) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m^\dagger(v)} \\
&\qquad \pm \sum_{\ell m}\int d^4u d^4v \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\ell^\dagger(u)}(-i\Delta_{\ell m}(v,u)) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi_m(v)}\Bigg)\mathcal{F}_j[\psi(y),\psi^\dagger(y)] :
\end{aligned}
$$

となる．($x > y$ と $y < x$ の場合で分ければ, プロパゲータがそれぞれ $[\psi_\ell^+(x),\psi_m^{+\dagger}(y)]_\mp$ と $[\psi_m^{c-\dagger}(y),\psi_\ell^{c-}(x)]_\mp$ になり，どちらの場合でも上の表式と一致する．) これをウィックの定理と呼ぶ.

以上の公式を用いて S 行列の計算を考えよう．3 章で与えたように，S 行列は次の形式で与えられる.

$$
S_{\beta\alpha}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha)\\
&=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{N!}\int d^4x_1\cdots d^x_N\\
&\quad\times\big(a^\dagger(\mathbf{p}'_1,\sigma'_1,n'_1)a^\dagger(\mathbf{p}'_2,\sigma'_2,n'_2)\cdots\Phi_0, T\{\mathcal{H}_I(x_1)\cdots\mathcal{H}_I(x_N)\}a^\dagger(\mathbf{p}_1,\sigma_1,n_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2,\sigma_2,n_2)\cdots\Phi_0\big)\\
&=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{N!}\int d^4x_1\cdots d^x_N\\
&\quad\times\big(\Phi_0,\cdots a(\mathbf{p}'_1,\sigma'_1,n'_1)a(\mathbf{p}'_2,\sigma'_2,n'_2)T\{\mathcal{H}_I(x_1)\cdots\mathcal{H}_I(x_N)\}a^\dagger(\mathbf{p}_1,\sigma_1,n_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2,\sigma_2,n_2)\cdots\Phi_0\big)
\end{aligned}
$$