情報セキュリティ学特論レポート

園田継一郎

2021 年 12 月 29 日

1　はじめに

2

状態と正規直行基底の内積を計算すると

$$
\begin{aligned}
|\langle \xi_1, \psi \rangle|^2 &= \left(\frac{1}{6}(-2+2+1+0)\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \\
|\langle \xi_2, \psi \rangle|^2 &= \left(\frac{1}{6}(2-2+1+0)\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \\
|\langle \xi_3, \psi \rangle|^2 &= \left(\frac{1}{6}(2+2-1+0)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
|\langle \xi_4, \psi \rangle|^2 &= \left(\frac{1}{6}(2+2+1-0)\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}
\end{aligned}
$$

となる. 公理 2 より, 数値 1, 2, 3, 4 が検出される確率はそれぞれ $\frac{1}{36}, \frac{1}{36}, \frac{1}{4}, \frac{25}{36}$ である.

3

$m, n \in \mathbb{N}$ とし, 集合の元どうしで内積を計算する. $x \in [0, 2\pi]$ のとき $\cos nx, \sin nx \in [0, 1]$ なので,

$$
\begin{aligned}
\overline{\cos nx} &= \cos nx \\
\overline{\sin nx} &= \sin nx
\end{aligned}
$$

が成立する. まず, 元が同じ場合の内積を計算する.

- cos

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \right\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nxdx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 nxdx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2nx)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2nx\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1$$

- sin

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \right\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nxdx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 nxdx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2nx)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2nx\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1$$

続いて, 元が異なる場合の内積を計算する.

- cos $(m \neq n)$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \right\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nxdx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nxdx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(0-0) = 0$$

- sin $(m \neq n)$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \right\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nxdx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nxdx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(0-0) = 0$$

- cos と sin

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \right\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nxdx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nxdx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x - \frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left(-\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n}\right) - \left(-\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n}\right)\right) = 0$$

- sin と cos

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

以上より, 同じ元どうしの内積が 1 になり, 異なる元どうしの内積が 0 になるので,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

は正規直交系である.