応用関数解析特論レポート

園田継一郎

2021 年 12 月 17 日

1

$\mathbb{C}^2$ の標準基底

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について $\mathrm{H}e_1, \mathrm{H}e_2$ を計算すると

$$\mathrm{H}e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{H}e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

となる．それぞれの内積は

$$\langle \mathrm{H}e_1, \mathrm{H}e_1 \rangle = \frac{1}{2}(1+1) = 1 = \langle e_1, e_1 \rangle$$
$$\langle \mathrm{H}e_1, \mathrm{H}e_2 \rangle = \frac{1}{2}(1-1) = 0 = \langle e_1, e_2 \rangle$$
$$\langle \mathrm{H}e_2, \mathrm{H}e_1 \rangle = \frac{1}{2}(1-1) = 0 = \langle e_2, e_1 \rangle$$
$$\langle \mathrm{H}e_2, \mathrm{H}e_2 \rangle = \frac{1}{2}(1+1) = 1 = \langle e_2, e_2 \rangle$$

となり，標準基底について H はユニタリ作用素の条件を満たす．$^\forall x, y \in \mathbb{C}^2$ は e_1, e_2 の線形結合で表せるので，

$$\langle \mathrm{H}x, \mathrm{H}y \rangle = \langle x, y \rangle$$

が得られる．よって H はユニタリ作用素である．

2

$\mathbb{C}^3$ の正規直交基底の 1 つとして,

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

が挙げられる.