Non Stochastic Dynamic Programming ＿＿学習の手引き＿＿

池上慧

2015 年 10 月 26 日

概要

この学習の手引きは、DP 学習がスムーズに進むように作成されたものである。理論上重要な証明が載っている文献をネットから拾ってきただけなので偉そうなことは言えないが、注釈に記したページ数に飛べば定理等の証明をすぐに参照できるようになっている。一応池上は一通り証明もこなしたので、わからなかったら聞いてください。また、最後の方に、経済学とは直接関係ないが、数理最適化問題の解法としては DP がどのように使われるかがよくわかる例を乗せたのでこちらもご参照ください。iteration が何を行っているのかがよくわかる良い例だと思います。とりあえず京大の経済学のための数学を読めばどういう話なのかわかります。iteration のくだりは縮小写像原理とかあって難しいので、東工大の例でイメージを掴んで、京大の証明をみてください。今回は non stochastic な DP を扱いますが、stochastic 編と iteration の python プログラミングコード編も作ろうと思います。

1 DP 概説

動的計画法（Dynamic Programming）は、無限期間最適化問題の解法のことである。一般に、無限期間最適化問題が最終的に求めたい物は、無限期間での効用最大化を達成するために取るべき最適行動の列である。ここで DP は、直接に行動の列を算出することで問題を解こうとするのではなく、現在の意思決定を一期前の行動を変数とした関数で表すためにはどのような関数であればよいか、を特定することでこの問題を解こうというものである。目的関数が微分可能であれば、オイラー方程式と横断性条件を使って同様の無限期間最適化問題を解くことができる[*1]が、そのような仮定を置くことができない場合の一般的な解法としてベルマン方程式を使って解く DP が存在する、と考えると良い。このような事情のため、動的計画法の解説にはオイラー方程式や横断性条件との関係性[*2]が言及されることも多いが、とりあえず DP を解くということに関してはそれらは関係なく、ベルマン方程式さえ解ければ良い。

ベルマン方程式を解けば DP が解ける[*3]、ということを理解した次に学ぶべきはベルマン方程式の解き方である。解法として抑えておきたいのは以下の三つである。

- Guess and Verify[*4]
- Value function iteration[*5]
- Policy function iteration[*6]

[*1] 京大 75 から 82
[*2] 京大 88、動学最適化 8
[*3] 京大 82 86、動学最適化 5 8、
[*4] マクロ 10 から 11
[*5] マクロ 8 から 9
[*6] マクロ 11 から 13

上から順に説明していくと、最初の Guess and Verify は value function の形を山勘で当てて、それがベルマン方程式の解となっていることを確認するというものだ。数学的帰納法で漸化式を解く際に山勘で一般項の形を当てはめてそれを正当化する解法が大学受験の際にあったが、あれとやっていることは同じである。次に value function iteration である。これが最も基本的なベルマン方程式の解法である。value function の形を適当に推測し、ベルマン方程式に代入、出力結果を再びベルマン方程式に代入し、といった具合に、入力と出力がほとんど同じになるまでこれを繰り返すことで value function を求めるやり方。これによって velue function の形に近づいていけることの証明[*7]。最後が policy function iteration であり、これは value function と policy function との間で iteration を行うアルゴリズム。policy function が入力と出力であまり変化しなくなるまで続ける。この解法は収束が早いことで知られているが、policy function の真の形に近づくことの証明はなされていない。

2 用語説明

Policy function 日本語では政策関数。DP を解く際に求めたい物であるのは先に述べた通り、一期前の行動と現在の意思決定とをつなげる関数であり、この求めたい関数を policy function と呼ぶ。

Value function 日本語では価値関数。定義としては初期値を変数として目的関数の最大値を表す関数である。すなわち無限期間最適化問題において最大化された目的関数（を初期値の関数として表現したもの）のことである。最適性の原理（後述）により、ある期における状態を入力すると、その状態から達成しうる最大の利得を出力する関数と考えることができる。

Bellman equation 今期の状態を入力すると、今期の行動によって得られる値と今期の行動によって決定される次期の状態を同じ関数に入力して得られる値との和を最大にするような今期の行動を探しだし、その行動をとって得られた最大値を出力するような関数を、解として算出する関数方程式のことである。最適性の原理とは、先の value function がこの bellman equation の解となることを示す定理、すなわち無限期間最適化問題の解をベルマン方程式が与えるということである[*8]。

3 諸注意と参照もと

この学習の手引きは以下の pdf ファイルを参考にしている。また、各種証明は tex で打つあまりのめんどくささに挫折したので、以下の pdf ファイルから切り取ってきている。

- 経済学のための数学、京都大学経済学研究所、原千秋・梶井厚志
- 動学的最適化入門、工藤教考
- 2013 年度夏学期　上級マクロ経済学講義ノート：動的計画法、阿部修人
- 動的計画法、東工大

特に京大の経済学のための数学は便利であった。

[*7] 京大 86 から 87
[*8] 京大 82 から 86

また、このように様々な文献から証明部分を切りはりしているので、問題の定式化が異なっていることが多々ある。注意深く読めば問題ないはずだが、の書き方にふた通りあることには特に注意が必要だ。京大やStokey and Lucas が採用しているのが利得関数を現在の状態と、次の状態の関数で表されている形態である。こちらは、ベルマン方程式の中に行動という変数（操作変数が出てこない）。二つ目が利得関数を現在の状態と今の意思決定の関数として表したもので、こちらは工藤などが採用している。慣れてくると、この違いは気にならなくなるので、なれるまで読みましょう。

4 無限次元の最適化問題：動的計画法

4.1 無限期間の最適化問題

この章[16]では無限期間の最適化問題を解く方法として，動的計画法を説明する．その準備として，まずは簡単な 2 期間の最適化問題を考えよう．全体として $\bar{x}$ 単位の消費可能な財があるとして，それを 2 期間かけて消費するような場合に，各期にどれだけの消費を割り当てるべきかを考えることにする．このとき問題は,

$$\begin{aligned} \max_{(c_0,c_1)} \quad & u(c_0)+\delta u(c_1) \\ \text{subject to} \quad & c_0+c_1 \leq \bar{x} \\ & c_0 \geq 0 \\ & c_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

のように書ける．ここで u は効用関数を，c_0 および c_1 はそれぞれ 0 期と 1 期の消費量を表す．δ は割引因子である．

問題 (4.1) の解 (c_0^*, c_1^*) が内点解であると仮定すれば，クーン＝タッカー必要条件により，

$$\begin{aligned} u'(c_0^*) &= \lambda \\ \delta u'(c_1^*) &= \lambda \end{aligned}$$

が成立しているはずである．よってラグランジュ乗数 λ を消去して，予算制約と合わせれば

$$\begin{aligned} -u'(c_0^*)+\delta u'(c_1^*) &= 0 \\ c_0^*+c_1^* &= \bar{x} \end{aligned}$$

のように整理することができ，この連立法的式を解けば解を得られる．

考慮する期間を長くしても，この問題の構造は変わらない．例えばより一般的に，$\bar{x}$ 単位の消費可能な財を T 期間かけて消費するような場合を考えよう．すると先ほどの問題 (4.1) は,

$$\begin{aligned} \max_{(c_0,\ldots,c_{T-1})} \quad & u(c_0)+\delta u(c_1)+\delta^2 u(c_2)+\cdots+\delta^{T-1}u(c_{T-1}) \\ \text{subject to} \quad & c_0+c_1+\cdots+c_{T-1} \leq \bar{x} \\ & c_0 \geq 0 \\ & c_1 \geq 0 \\ & \vdots \\ & c_{T-1} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

と書き直すことができる．2 期間の場合と同様に，問題 (4.2) の解 $(c_0^*, \ldots, c_{T-1}^*)$ が内点解であると仮定すれば，クーン＝タッカー必要条件により

$$\begin{aligned} u'(c_0^*) &= \lambda \\ \delta u'(c_1^*) &= \lambda \\ &\vdots \\ \delta^{T-1}u'(c_{T-1}^*) &= \lambda \end{aligned}$$

[16] この章の内容をより詳しく知るためには，Stokey-Lucas, chapeter4 を見よ．

が導かれる．よって予算制約と合わせれば

$$-\delta^{t-1}u'(c^*_{t-1})+\delta^t u'(c^*_t)=0,\quad t=1,2,\dots,T{-}1$$
$$c^*_0+c^*_1+\cdots+c^*_{T-1}=\bar{x}$$

のように整理することができ，この連立法的式を解けば解を得られる．

以上から，期間 T が有限である限りで，この問題を解くことは可能であると分かる．では，期間 T が無限となるようなケースについてはどうであろうか．$\bar{x}$ 単位の財を無限期間かけて消費するような問題は，

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t:t=0,1,\dots\}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(c_t) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} c_t \le \bar{x} \\ & c_t \ge 0,\quad t=0,1,\dots \end{aligned} \tag{4.3}$$

のように書くことができる．しかしこの無限期間の最適化問題に対しては，上記の方法で解を見つけることができない．同様の方法を適用しても無限個の変数と無限本の方程式が導かれてしまい，その連立方程式体系を解くことができないからである．このような問題に答えるために必要とされるのが，本章で説明する動的計画法（Dynamic Programming: DP）である．

4.2 動的計画法

これ以降の議論では $\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{R}^n_+$ とし，$x_t\in\boldsymbol{X}$ と約束する．また δ は $0<\delta<1$ を満たす定数であり，関数 $f:\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{R}$ は与えられているものとする．

4.2.1 動的計画法の定式化

動的計画法の問題 $\mathrm{DP}(\bar{x}_0)$ は，一般に次のような最適化問題として定式化される．

$$\begin{aligned} \max_{\{x_t:t=1,2,\dots\}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x_t,x_{t+1}\right) \\ \text{subject to} \quad & \Gamma\left(x_t,x_{t+1}\right)\ge 0,\quad t=0,1,\dots \\ & x_0=\bar{x_0} \end{aligned}$$

ただし，任意の $x\in\boldsymbol{X}$ について，$\Gamma(x,y)\ge 0$ を満たす $y\in\boldsymbol{X}$ が存在するものと仮定する．

4.1 例 (**ケーキ食べ問題**)**.** 自由に消費できる $\bar{x}$ 単位のケーキが用意されており，その最適な消費スケジュールを決める問題を考えよう．この個人がケーキを z 単位だけ消費することで得られる効用は $u(z)$，割引因子は δ であるとする．

この問題を，各期に消費するケーキの量 $\{c_t\}$ を決定するものであると考えれば，これはちょうど (4.3) のように定式化できる．しかし一方で，これを次の期に残しておくケーキの量を決定する問題であると捉えることもできる．t 期のはじめの時点で残っているケーキの量を $\{x_t\}$ と置けば，

$$c_t=x_t-x_{t+1}$$
$$\bar{x}=x_0$$

の関係が成り立つから，問題 (4.3) は

$$\begin{aligned} \max_{\{x_t:t=0,1,\dots\}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u\left(x_t - x_{t+1}\right) \\ \text{subject to} \quad & x_0 = \bar{x} \\ & x_t - x_{t+1} \geq 0, \quad t = 0,1,\dots \end{aligned}$$

のように書ける．ここで

$$\begin{aligned} f\left(x_t, x_{t+1}\right) &:= u\left(x_t - x_{t+1}\right) \\ \Gamma\left(x_t, x_{t+1}\right) &:= x_t - x_{t+1} \end{aligned}$$

のように $f\left(x_t, x_{t+1}\right)$ および $\Gamma(x_t, x_{t+1})$ を定義すれば，

$$\begin{aligned} \max_{\{x_t:t=0,1,\dots\}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\left(x_t, x_{t+1}\right) \\ \text{subject to} \quad & x_0 = \bar{x} \\ & \Gamma\left(x_t, x_{t+1}\right) \geq 0, \quad t = 0,1,\dots \end{aligned}$$

として，ケーキ食べ問題を上記の動的計画法 *DP* の形に書くことができる．

練習問題 4.1 (ケーキ食べ問題). 上記のケーキ食べ問題の想定を少し変え，各期に残されたケーキの量が次の期の始めに β 倍 ($\beta > 0$) になるとする．すなわち，t 期の消費量と $t+1$ 期に残されるケーキの量との間には，

$$x_{t+1} = \beta(x_t - c_t)$$

の関係が成り立つものとする．この想定の下でのケーキ食べ問題を，DP の形で書きなさい．

練習問題 4.2 (貯蓄と消費). t 期における資産保有を x_t，消費を c_t，貯蓄を s_t と置き，貯蓄に対する金利は i で一定とする．資産と消費，貯蓄の間には

$$c_t + s_t = x_t$$

の関係が成立し，t 期の貯蓄と $t+1$ 期の資産は

$$x_t = (1+i)s_t$$

で関係付けられている．この制約の下で，消費から得られる生涯効用

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u\left(c_t\right)$$

を最大化する問題を，上記のような DP の形に書きなさい．

4.1 定義 (実行可能プラン). ベクトル列 $\{x_t : t = 0,1,\dots\}$ が問題 DP($\bar{x}_0$) の制約を全て満たすとき，$\{x_t : t = 0,1,\dots\}$ を（$\bar{x}_0$ を始点とする）実行可能プラン（あるいは実行可能経路）と呼ぶ．また特に，$\Gamma\left(x_t, x_{t+1}\right) > 0$ がすべての t について成立するとき，その実行可能プランは内点であるという．

4.2.2 オイラー方程式

以上のようにして定式化される動的計画法について，その解の求め方を見ていこう．この節では $\boldsymbol{X}$ を開集合とし，$f : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ を連続微分可能であると仮定する．有限の非線形計画法におい

てクーン=タッカー必要条件を用いて解を求めたように，無限の最適化問題でも必要条件から解を特定してゆくことになる．動的計画法において必要条件に対応するものは，以下のオイラー方程式（Euler equation）と呼ばれるものである．

$$\frac{\partial}{\partial x_t} f\left(x_{t-1}, x_t\right) + \delta \frac{\partial}{\partial x_t} f\left(x_t, x_{t+1}\right) = 0, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

このオイラー方程式が問題 DP($\bar{x}_0$) の内点解が満たすべき必要条件になっていることを，以下の定理を証明しながら確認する．

4.1 定理 (解の必要条件)． ベクトル列 $\{x_t : t = 0, 1, 2, \ldots\}$ が問題 DP($\bar{x}_0$) の内点解であれば，オイラー方程式 (4.4) が成立する．

4.1 定理の証明． ベクトル列 $\{x_t\}$ が問題 DP($\bar{x}_0$) の内点解であるとする．この時，目的関数の値は

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\left(x_t, x_{t+1}\right) = f\left(x_0, x_1\right) + \delta f\left(x_1, x_2\right) + \cdots + \delta^{t-1} f\left(x_{t-1}, x_t\right) + \delta^t f\left(x_t, x_{t+1}\right) + \ldots \tag{4.5}$$

である．ここで時点 t を任意に選び，変数 x_t のみを操作することによってこの目的関数の値を変化させることを考えよう．すなわち，

$$V\left(z\right) = f\left(x_0, x_1\right) + \delta f\left(x_1, x_2\right) + \cdots + \delta^{t-1} f\left(x_{t-1}, z\right) + \delta^t f\left(z, x_{t+1}\right) + \ldots \tag{4.6}$$

なる関数 $V(z)$ について，制約条件を加えた最適化問題

$$\begin{aligned} \max_{z} \quad & V\left(z\right) \\ \text{subject to} \quad & \Gamma\left(x_{t-1}, z\right) \geq 0 \\ & \Gamma\left(z, x_{t+1}\right) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

を考える．ここでもし $z = x_t$ が解でなかったとすれば，制約式を満たす x'_t が存在し

$$V\left(x'_t\right) > V\left(x_t\right)$$

すなわち

$$f\left(x_0, x_1\right) + \cdots + \delta^{t-1} f\left(x_{t-1}, x'_t\right) + \delta^t f\left(x'_t, x_{t+1}\right) + \cdots > \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\left(x_t, x_{t+1}\right)$$

が成立する．経路 $\{x_0, x_1, \ldots x'_t, \ldots\}$ は実行可能プランであるから，これは $\{x_0, x_1, \ldots x_t, \ldots\}$ が問題 DP($\bar{x}_0$) の解であることに反する．したがって (4.8) の解は $z = x_t$ でなければならず，$z = x_t$ は (4.8) の 1 階条件

$$\left.\frac{d}{dz} V(z)\right|_{z=x_t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta^{t-1} \frac{\partial}{\partial x_t} f\left(x_{t-1}, x_t\right) + \delta^t \frac{\partial}{\partial x_t} f\left(x_t, x_{t+1}\right) = 0$$

を満たさなければならない．さらに両辺を δ^{t-1} で割れば，

$$\frac{\partial}{\partial x_t} f\left(x_{t-1}, x_t\right) + \delta \frac{\partial}{\partial x_t} f\left(x_t, x_{t+1}\right) = 0 \tag{4.8}$$

となる．時点 t は任意に選んであったから，結局この必要条件はオイラー方程式 (4.4) に他ならない． □

4.2 例 (ケーキ食べ問題). ケーキ食べ問題についてオイラー方程式を求めてみよう．問題は，

$$\begin{aligned} \max_{\{x_t:t=0,1,\dots\}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u\left(x_t - x_{t+1}\right) \\ \text{subject to} \quad & x_t - x_{t+1} \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots \\ & x_0 = \bar{x} \end{aligned}$$

であったから，オイラー方程式は

$$-u'\left(x_{t-1} - x_t\right) + \delta u'\left(x_t - x_{t+1}\right) = 0$$

である．ちなみに，これを各期の消費量 c_t で表してみると，

$$-u'\left(c_{t-1}\right) + \delta u'\left(c_t\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta u'\left(c_t\right)}{u'\left(c_{t-1}\right)} = 1 \tag{4.9}$$

となる．$t-1$ 期の消費の限界効用は $\delta^{t-1} u'\left(c_{t-1}\right)$，$t$ 期の消費の限界効用は $\delta^t u'\left(c_t\right)$ であるから，(4.9) の左辺は $t-1$ 期の限界効用と t 期の限界効用の比に相当する．一方の右辺は，$t-1$ 期のケーキと t 期のケーキの価格比である[17]．よってこの問題のオイラー方程式 (4.9) が，限界効用の比が価格比に等しくなるという 1 階条件を表すものであることを確認できる．

4.2.3 横断面条件

オイラー方程式は，あくまで問題 DP($\bar{x}_0$) の解が満たすべき必要条件である．したがって，ある実行可能経路がオイラー方程式を満たしたからと言って，それが最適解であるとは限らない．有限の非線形計画法の場合は，目的関数や制約式が凹関数であれば 1 階条件が最適性の十分条件にもなったが，ここで問題としている無限の場合では十分性のための追加的な条件を考える必要がある．その十分条件の一部として用いられるのが，

$$\lim_{t \to \infty} \delta^t \frac{\partial}{\partial x_t} f\left(x_t, x_{t+1}\right) x_t = 0 \tag{4.10}$$

という条件であり，これを横断面条件（Transversality Condition: TC）と呼ぶ．

4.2 定理 (解の十分条件). 関数 $f\left(x_t, x_{t+1}\right)$ は $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ 上の有界な凹関数で，$\dfrac{\partial}{\partial x_t} f\left(x_t, x_{t+1}\right) \gg 0$ が $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ 上で成立しているとする．この時，内点の実行可能経路 $\{x_t : t = 0, 1, \dots\}$ が

1. オイラー方程式 (4.4)
2. 横断面条件 (4.10)

を満たすならば，$\{x_t : t = 0, 1, \dots\}$ は問題 DP($\bar{x}_0$) の解である．

4.2 定理の証明. 内点の実行可能経路 $\{x_t : t = 0, 1, \dots\}$ がオイラー方程式 (4.4) と横断面条件 (4.10) を満たしているとする．この時，任意の実行可能経路 $\{x'_t : t = 0, 1, \dots\}$ に対して，

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\left(x_t, x_{t+1}\right) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\left(x'_t, x'_{t+1}\right)$$

が成立することを示せばよい．

[17] この問題ではどの期のケーキの価格も等しい．

まず極限操作の順序交換に注意すれば

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f(x_t,x_{t+1})-\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x'_t,x'_{t+1}\right) &= \lim_{T\to\infty}\left(\sum_{t=0}^{T}\delta^t f(x_t,x_{t+1})-\sum_{t=0}^{T}\delta^t f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)\right)\\ &= \lim_{T\to\infty}\left(\sum_{t=0}^{T}\delta^t\Big(f(x_t,x_{t+1})-f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)\Big)\right)\quad(4.11)\end{aligned}$$

を得る．また $f(x_t,x_{t+1})$ が凹関数であることにより

$$\begin{aligned}f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)-f(x_t,x_{t+1}) &\le Df(x_t,x_{t+1})\cdot\left(x'_t-x_t,x'_{t+1}-x_{t+1}\right)\\ &= f_1(x_t,x_{t+1})(x'_t-x_t)+f_2(x_t,x_{t+1})\left(x'_{t+1}-x_{t+1}\right)\end{aligned}$$

すなわち

$$f(x_t,x_{t+1})-f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)\ge f_1(x_t,x_{t+1})(x_t-x'_t)+f_2(x_t,x_{t+1})\left(x_{t+1}-x'_{t+1}\right)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\left(\sum_{t=0}^{T}\delta^t\Big(f(x_t,x_{t+1})-f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)\Big)\right)\\ &\qquad\ge\lim_{T\to\infty}\left(\sum_{t=0}^{T}\delta^t\Big(f_1(x_t,x_{t+1})(x_t-x'_t)+f_2(x_t,x_{t+1})\left(x_{t+1}-x'_{t+1}\right)\Big)\right)\qquad(4.12)\end{aligned}$$

である．さらに $x_0=x'_0$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}&\sum_{t=0}^{T}\delta^t\Big(f_1(x_t,x_{t+1})(x_t-x'_t)+f_2(x_t,x_{t+1})\left(x_{t+1}-x'_{t+1}\right)\Big)\\ &= f_1(x_0,x_1)(x_0-x'_0)\ +\\ &\quad f_2(x_0,x_1)(x_1-x'_1)\ +\ \delta f_1(x_1,x_2)(x_1-x'_1)\ +\\ &\quad \delta f_2(x_1,x_2)(x_2-x'_2)\ +\ \delta^2 f_1(x_2,x_3)(x_2-x'_2)\ +\\ &\quad \delta^2 f_2(x_2,x_3)(x_3-x'_3)\ +\ \delta^3 f_1(x_3,x_4)(x_3-x'_3)\ +\\ &\qquad\vdots\\ &\quad \delta^{T-1}f_2(x_{T-1},x_T)(x_T-x'_T)\ +\ \delta^T f_1(x_T,x_{T+1})(x_T-x'_T)\ +\\ &\quad \delta^T f_2(x_T,x_{T+1})\left(x_{T+1}-x'_{T+1}\right)\\ &= \sum_{t=0}^{T-1}\delta^t\Big(f_2(x_t,x_{t+1})+\delta f_1(x_{t+1},x_{t+2})\Big)\left(x_{t+1}-x'_{t+1}\right)\ +\ \delta^T f_2(x_T,x_{T+1})\left(x_{T+1}-x'_{T+1}\right)\end{aligned}$$

と整理することができるので，(4.12) の右辺は

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\left(\sum_{t=0}^{T}\delta^t\Big(f_1(x_t,x_{t+1})(x_t-x'_t)+f_2(x_t,x_{t+1})\left(x_{t+1}-x'_{t+1}\right)\Big)\right)\\ &\qquad=\lim_{T\to\infty}\left(\sum_{t=0}^{T-1}\delta^t\Big(f_2(x_t,x_{t+1})+\delta f_1(x_{t+1},x_{t+2})\Big)\left(x_{t+1}-x'_{t+1}\right)\right)\\ &\qquad\qquad+\lim_{T\to\infty}\delta^T f_2(x_T,x_{T+1})\left(x_{T+1}-x'_{T+1}\right)\qquad(4.13)\end{aligned}$$

である．ここでオイラー方程式 (4.4) により

$$f_2(x_t,x_{t+1})+\delta f_1(x_{t+1},x_{t+2}),\qquad t=0,1,2,\ldots$$

が成立するから，(4.13) の右辺の第 1 項は

$$\lim_{T\to\infty}\left(\sum_{t=0}^{T-1}\delta^t\Big(f_2\left(x_t,x_{t+1}\right)+\delta f_1\left(x_{t+1},x_{t+2}\right)\Big)\left(x_{t+1}-x'_{t+1}\right)\right)=0 \tag{4.14}$$

であり，第 2 項についても

$$\lim_{T\to\infty}\delta^T f_2\left(x_T,x_{T+1}\right)\left(x_{T+1}-x'_{T+1}\right)=-\lim_{T\to\infty}\delta^{T+1}f_1\left(x_{T+1},x_{T+2}\right)\left(x_{T+1}-x'_{T+1}\right) \tag{4.15}$$

と書き直すことができる．(4.11)，(4.12)，(4.13)，(4.14)，(4.15) を合わせれば,

$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x_t,x_{t+1}\right)-\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)\geq-\lim_{T\to\infty}\delta^{T+1}f_1\left(x_{T+1},x_{T+2}\right)\left(x_{T+1}-x'_{T+1}\right) \tag{4.16}$$

となる．この (4.16) の右辺は，仮定により $\dfrac{\partial}{\partial x_t}f\left(x_t,x_{t+1}\right)\gg 0$ であり，なおかつ x'_{T+1} は非負ベクトルであるから，

$$\begin{aligned}-\lim_{T\to\infty}\delta^{T+1}f_1\left(x_{T+1},x_{T+2}\right)\left(x_{T+1}-x'_{T+1}\right)&=-\lim_{T\to\infty}\delta^{T+1}f_1\left(x_{T+1},x_{T+2}\right)x_{T+1}\\&\quad+\lim_{T\to\infty}\delta^{T+1}f_1\left(x_{T+1},x_{T+2}\right)x'_{T+1}\\&\geq-\lim_{T\to\infty}\delta^{T+1}f_1\left(x_{T+1},x_{T+2}\right)x_{T+1}\end{aligned} \tag{4.17}$$

を満たす．また TC により

$$\lim_{T\to\infty}\delta^T f_1\left(x_T,x_{T+1}\right)x_T=0$$

が成立するから，(4.17) の右辺は 0 であることが言える．よって (4.16) と (4.17) を合わせれば,

$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x_t,x_{t+1}\right)-\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)\geq 0 \tag{4.18}$$

が成り立つ．最後に，関数 $f\left(x_t,x_{t+1}\right)$ が有界であることから

$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)<\infty$$

が言えるので，(4.18) は

$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x_t,x_{t+1}\right)\geq\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)$$

したがって，$\{x_t:t=0,1,\dots\}$ は問題 DP$(\bar{x}_0)$ の最適解である． □

4.1 注意. 4.2 定理の中にある「関数 f が有界である」と言う条件は,「任意の実行可能経路 $\{x'_t:t=0,1,\dots\}$ について $\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\left(x'_t,x'_{t+1}\right)$ が絶対収束する」という条件に等しい.

関数 f が有界であるという条件は，そのままだと使いにくい．一例を挙げると，f が

$$f(x_t,x_{t+1})=u\left(g(x_t)-x_{t-1}\right)$$

のような形状をとるようなケースには応用上頻繁に遭遇するが，効用関数が $u=\ln(z)$ で定義されている場合などは f が $\boldsymbol{R}$ 上で有界でなくなってしまう．したがって，定理をそのまま当てはめようとするとすぐに困ることになる．このような時は，定義域 $\boldsymbol{X}$ を工夫するのが定石である．例えばケーキ食べ問題などでは，実行可能経路においては x が必ず減少してゆくので定義域 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{R}$ 全体にする必要はない．最初から $\boldsymbol{X}$ を $[0,M]$ のような有界な形にとっておいても，最適経路の選択に問題は生じないのである.

4.3 例 (ケーキ食べ問題). ケーキ食べ問題の効用関数が

$$u(z) = \ln(z)$$

で与えられる場合について，具体的に問題を解いてみよう．このとき問題は

$$\begin{aligned} \max_{\{x_t : t=0,1,\dots\}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(x_t - x_{t+1}) \\ \text{subject to} \quad & x_t - x_{t+1} \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots \\ & x_0 = \bar{x} \end{aligned}$$

である．まず必要条件から考えると，オイラー方程式は

$$-\frac{1}{x_t - x_{t+1}} + \delta \frac{1}{x_{t+1} - x_{t+2}} = 0, \quad t = 0, 1, \dots$$

である．$c_t = x_t - x_{t+1}$ であったから，これは

$$-\frac{1}{c_t} + \delta \frac{1}{c_{t+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{t+1} = \delta c_t \tag{4.19}$$

と書ける．(4.19) が $t = 0, 1, 2, \dots$ で成立するから，

$$c_t = \delta^t c_0, \quad t = 0, 1, \dots \tag{4.20}$$

の関係が成立し，最適な消費経路はこれに従うはずである．

しかしながら，(4.20) を満たす消費経路は無数に存在する．(4.20) が表す条件は c_0 に依存しており，その c_0 の選び方については何も言っていないからである．従って，オイラー方程式だけで解を特定することはできず，解を一意的に決定するためには外生的に与えられた値，すなわち x_0 を用いた条件が必要となる．そこで (4.20) に加えて,「最終的にケーキを食べつくさなければならない」という条件を設けることによって，解を絞り込むことを考える．(4.20) を満たす消費経路上のケーキの総消費量を考えると

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} c_t &= c_0 \left(1 + \delta + \delta^2 + \dots\right) \\ &= c_0 \frac{1}{1-\delta} \end{aligned}$$

であるから，最終的にケーキを食べつくすためには

$$c_0 \frac{1}{1-\delta} = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - c_0 = \delta x_0$$

が満たされなければならない．ここで $c_0 = x_0 - x_1$ の関係を用いれば,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - c_0 \\ &= \delta x_0 \end{aligned}$$

さらに $c_1 = x_1 - x_2$ の関係を用いれば,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - c_1 \\ &= \delta (x_0 - c_0) \\ &= \delta^2 x_0 \end{aligned}$$

同様の作業を繰り返せば,

$$x_t = \delta^t x_0, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{4.21}$$

の関係を得る．ここで x_0 は外生的に与えられているため，この条件を満たす経路は一意に決まる．

以上から，(4.21) を満たす実行可能経路 $\{x_t : t = 0, 1, \ldots\}$ が問題の解であると予想できる．次に十分性を確認することによって，この経路が最適解であることを確かめよう．いま $f(z) = \ln(z)$ と定義していたから，4.2 定理の条件の中で，関数 f が凹関数であることと，$\dfrac{\partial}{\partial x_t} f(x_t, x_{t+1}) \gg 0$ が満たされることは容易に確認できる．また上で述べたように，あらかじめ定義域を有界にとっておけば $f(x_t, x_{t+1})$ も実質的に有界であると考えてよい．よって，あとは TC が満たされていることを確認できさえすれば十分である．そこで TC をチェックすると

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial x_t} f(x_t, x_{t+1}) &= \frac{1}{x_t - x_{t+1}} \\
&= \frac{1}{c_t} \\
&= \frac{1}{\delta^t c_0}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \delta^t \frac{\partial}{\partial x_t} f(x_t, x_{t+1}) x_t &= \lim_{t\to\infty} \delta^t \frac{1}{\delta^t c_0} \delta^t x_0 \\
&= \lim_{t\to\infty} \delta^t \frac{x_0}{c_0} \\
&= \lim_{t\to\infty} \delta^t \frac{1}{1-\delta} \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成立し，TC が満たされていることを確認できる．以上から，(4.21) に従って生成される経路が問題の解である．

4.2.4 ベルマン方程式

オイラー方程式を用いた解法は便利であるが，目的関数や制約式が微分可能でない場合や凸性の条件を満たさないケースには当てはめることができない．従って，関数の微分可能性などが満たされないような場合には別の解法を用いる必要があり，それがこの節で扱うベルマン方程式（Bellman equation）と呼ばれるものである[18]．

4.2 定義 (ベルマン方程式). 関数 $v : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ について

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \qquad v(x) = \max_{y:\, \Gamma(x,y)\geq 0} \Big\{ f(x,y) + \delta v(y) \Big\} \tag{4.22}$$

で表される関数方程式を，ベルマン方程式という．

ベルマン方程式は，関数 v を変数とする関数方程式である．したがってこの方程式の解くことは，(4.22) を満たす関数 v を見つけ出すことに相当する．

4.3 定義 (Policy Function). ある関数 $v(x)$ が，ベルマン方程式を満たしているとしよう．この時,

$$\phi(x) \in \max_{y:\, \Gamma(x,y)\geq 0} \Big\{ f(x,y) + \delta v(y) \Big\}$$

で定義される関数 $\phi(x)$ を Policy Function（最適政策関数，最適戦略関数）と呼ぶ.

[18] よって，この節の議論では微分可能性を前提としない.

4.3 定理 (**最適性原理：必要性**). 問題 DP$(\bar{x}_0)$ が，全ての $\bar{x}_0 \in \boldsymbol{X}$ に関して解 $\{x_t^* : t = 0, 1, \dots\}$ を持つとする．このとき

$$v^*(\bar{x}_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) \tag{4.23}$$

によって定義される関数 v^* は，ベルマン方程式 (4.22) を満たす．

(4.23) によって定義される関数 v^* は Value Function（価値関数）と呼ばれるもので，$x_0 = \bar{x}_0$ を所与として目的関数が実現し得る最大の「価値」を表している．この 4.3 定理は，実行可能プラン $\{x_t^* : t = 0, 1, \dots\}$ が問題 DP$(\bar{x}_0)$ の解であるならば，それに対応する Value Function はベルマン方程式を満たしていなければならないという，最適性の必要条件を示している．

4.3 定理の証明. 仮定により全ての $\bar{x}_0 \in \boldsymbol{X}$ に対して問題 DP$(\bar{x}_0)$ の解 $\{\bar{x}_0, x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots\}$ が存在するので，任意の $\bar{x}_0 \in \boldsymbol{X}$ について Value Function v^* は

$$\begin{aligned} v^*(\bar{x}_0) &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) \\ &= f\left(\bar{x}_0, x_1^*\right) + \delta f\left(x_1^*, x_2^*\right) + \delta^2 f\left(x_2^*, x_3^*\right) + \dots \end{aligned} \tag{4.24}$$

のように書ける．$v^*(\bar{x}_0)$ について，背理法の仮定として

$$v^*(\bar{x}_0) < f\left(\bar{x}_0, \hat{x}_1\right) + \delta v^*(\hat{x}_1) \tag{4.25}$$

を満たす $\hat{x}_1 \in \{x \in \boldsymbol{X} |\, \Gamma(\bar{x}_0, x) \geq 0\}$ が存在したとしよう．するとこの $\hat{x}_1$ を初期値とした問題

$$\begin{aligned} \max_{\{x_t : t=2,3,\dots\}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\left(x_{t+1}, x_{t+2}\right) \\ \text{subject to} \quad & \Gamma\left(x_t, x_{t+1}\right) \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots \\ & x_1 = \hat{x}_1 \end{aligned}$$

を考えることができ，その解を $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots\}$ と置けば，Value Function の定義により，

$$v^*(\hat{x}_1) = f\left(\hat{x}_1, \hat{x}_2\right) + \delta f\left(\hat{x}_2, \hat{x}_3\right) + \delta^2 f\left(\hat{x}_3, \hat{x}_4\right) + \dots \tag{4.26}$$

と書ける．この時 (4.25) は，(4.24) および (4.26) により，

$$\begin{aligned} f\left(\bar{x}_0, x_1^*\right) + \delta f\left(x_1^*, x_2^*\right) + \dots &< f\left(\bar{x}_0, \hat{x}_1\right) + \delta v^*(\hat{x}_1) \\ &= f\left(\bar{x}_0, \hat{x}_1\right) + \delta f\left(\hat{x}_1, \hat{x}_2\right) + \delta^2 f\left(\hat{x}_2, \hat{x}_3\right) + \dots \end{aligned}$$

なる実行可能プラン $\{\bar{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots\}$ が存在することを意味する．しかしこれは，$\{\bar{x}_0, x_1^*, x_2^*, \dots\}$ が問題 DP$(\bar{x}_0)$ の解であることに矛盾する．従って仮定 (4.25) は誤りで

$$\forall x_1 \in \{\Gamma(\bar{x}_0, x_1) \geq 0\}, \quad v^*(\bar{x}_0) \geq f\left(\bar{x}_0, x_1\right) + \delta v^*(x_1) \tag{4.27}$$

でなければならない．$\bar{x}_0 \in \boldsymbol{X}$ が任意であったことに注意すれば，これは

$$\forall \bar{x}_0 \in \boldsymbol{X}, \quad v^*(\bar{x}_0) = \max_{x_1 :\, \Gamma(\bar{x}_0, x_1) \geq 0} \Big\{ f(\bar{x}_0, x_1) + \delta v(x_1) \Big\}$$

に他ならず，v^* がベルマン方程式 (4.22) を満たすことが確認できる． □

4.4 例 (ケーキ食べ問題). ケーキ食べ問題を例にして，4.3 定理を確認しよう．効用関数が

$$u(z) = \ln(z)$$

で定義されるケースでは，最適解は

$$x_t = \delta^t x_0 \quad \Leftrightarrow \quad c_t = (1-\delta)\delta^t x_0$$

であったから，Value Function は

$$v^*(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln\big((1-\delta)\delta^t x\big)$$

となる．したがってベルマン方程式は

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \qquad v^*(x) \;=\; \max_{y:\,\Gamma(x,y)\geq 0} \Big\{ \ln(x-y) + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln\big((1-\delta)\delta^t y\big) \Big\} \tag{4.28}$$

である．ここで

$$\begin{aligned} \max_{y} \qquad & \ln(x-y) + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln\big((1-\delta)\delta^t y\big) \\ \text{subject to} \quad & \Gamma(x,y) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

は通常の凹関数の最大化問題であるから，y に関する 1 階の条件を確認すればよい．

$$\ln\big((1-\delta)\delta^t y\big) = \ln y + \ln(1-\delta)\delta^t$$

に注意すれば，1 階の条件は

$$-\frac{1}{x-y} + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{1}{y} = 0$$

である．これを y について解くことにより

$$y = \delta x$$

が最大化問題の解であることが分かる．従って，これを (4.29) の目的関数に代入することにより

$$\begin{aligned} \max_{y:\,\Gamma(x,y)\geq 0} \Big\{ \ln(x-y) + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln\big((1-\delta)\delta^t y\big) \Big\} &= \ln(x-\delta x) + \delta \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln\big((1-\delta)\delta^t \delta x\big) \\ &= \ln\big((1-\delta)x\big) + \sum_{t=0}^{\infty} \delta^{t+1} \ln\big((1-\delta)\delta^{t+1} x\big) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln\big((1-\delta)\delta^t x\big) \\ &= v^*(x) \end{aligned}$$

となるから，ベルマン方程式 (4.28) が満たされていることが確認できる．

練習問題 4.3. 効用関数が

$$u(z) = \ln(z)$$

で定義されるとき，練習問題 4.1 および練習問題 4.2 について，Value Function を求めよ．

4.3 定理により，実行可能プラン $\{x_t^*: t=0,1,\dots\}$ が問題 DP$(\bar{x}_0)$ の解であるならば，対応する Value Function はベルマン方程式を満たすことが分かる．実は逆に，ベルマン方程式を満たす関数 v が，ある種の境界条件が満たされる限りで，問題 DP$(\bar{x}_0)$ の解に対応する Value Function であることも示せる．つまり，最適化問題の解はベルマン方程式を解くことによっても求められるのである．

4.4 定理 (最適性原理：十分性)． ある関数 v について，

1. v はベルマン方程式 (4.22) の解である．
2. 任意の実行可能プラン $\{x_t: t=0,1,\dots\}$ について $\lim_{t\to\infty}\delta^t v(x_t)=0$ が成り立つ[19]．

の条件が満たされる時，対応する政策関数 ϕ に従って生成される実行可能プラン $\{\bar{x}_0,\phi(\bar{x}_0),\phi^2(\bar{x}_0),\dots\}$ は問題 DP$(\bar{x}_0)$ の解である．

4.4 定理の証明． 仮定により v はベルマン方程式を満たすから，

$$\forall x\in\boldsymbol{X},\qquad v(x)=\max_{y:\,\Gamma(x,y)\geq 0}\Big\{f(x,y)+\delta v(y)\Big\} \tag{4.30}$$

が成立する．右辺の問題

$$\begin{array}{cc}\displaystyle\max_{y} & f(x,y)+\delta v(y)\\ \text{subject to} & \Gamma(x,y)\geq 0\end{array}$$

の解が政策関数 $\phi(x)$ であるから，(4.30) は ϕ を用いて

$$\forall x\in\boldsymbol{X},\qquad v(x)=f\big(x,\phi(x)\big)+\delta v\big(\phi(x)\big) \tag{4.31}$$

と表せる．さらに $\phi(x)\in\boldsymbol{X}$ であるから (4.31) は $x=\phi(x)$ としても成立し

$$\forall x\in\boldsymbol{X},\qquad v\big(\phi(x)\big)=f\big(\phi(x),\phi\circ\phi(x)\big)+\delta v\big(\phi\circ\phi(x)\big)$$

である．この操作を繰り返し行えば，

$$\begin{aligned}\forall x\in\boldsymbol{X},\qquad v(x)&=f\big(x,\phi(x)\big)+\delta v\big(\phi(x)\big)\\&=f\big(x,\phi(x)\big)+\delta f\big(\phi(x),\phi^2(x)\big)+\delta^2 v\big(\phi^2(x)\big)\\&\ \ \vdots\\&=\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\big(\phi^t(x),\phi^{t+1}(x)\big)\end{aligned}$$

と書ける．ただし

$$\begin{aligned}\phi^0(x)&=x\\\phi^t(x)&=\underbrace{\phi\circ\phi\circ\cdots\circ\phi}_{t}(x),\qquad t\geq 1\end{aligned}$$

である．x は任意であったから，$x=\bar{x}_0$ とすれば，

$$v(\bar{x}_0)=\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t f\big(\phi^t(\bar{x}_0),\phi^{t+1}(\bar{x}_0)\big) \tag{4.32}$$

であり，(4.32) における $\{\bar{x}_0,\phi(\bar{x}_0),\phi^2(\bar{x}_0),\dots\}$ はその構成方法からして明らかに実行可能プランである．

[19] 詳しくは解説しないが，この条件は横断性条件と基本的に同じであることを示すことができる．

一方，v がベルマン方程式を満たすことから，$\Gamma(\bar{x}_0, x_1) \geq 0$ を満たす任意の x_1 について，

$$v(\bar{x}_0) \geq f(\bar{x}_0, x_1) + \delta v(x_1) \tag{4.33}$$

が成り立つ．さらに，ここで任意に選んだ x_1 を所与として，$\Gamma(x_1, x_2) \geq 0$ を満たす任意の x_2 について

$$v(x_1) \geq f(x_1, x_2) + \delta v(x_2)$$

が成り立つから，(4.33) は

$$\begin{aligned} v(\bar{x}_0) &\geq f(\bar{x}_0, x_1) + \delta v(x_1) \\ &\geq f(\bar{x}_0, x_1) + \delta f(x_1, x_2) + \delta^2 v(x_2) \end{aligned}$$

と書ける．この操作を繰り返し行うことによって，任意の実行可能プラン $\{x_t : t = 0, 1, \ldots\}$ に対して

$$\begin{aligned} v(\bar{x}_0) &\geq f(\bar{x}_0, x_1) + \delta v(x_1) \\ &\geq f(\bar{x}_0, x_1) + \delta f(x_1, x_2) + \delta^2 v(x_2) \\ &\geq f(\bar{x}_0, x_1) + \delta f(x_1, x_2) + \delta^2 f(x_2, x_3) + \delta^3 v(x_3) \\ &\vdots \\ &\geq \sum_{t=0}^{T} \delta^t f(x_t, x_{t+1}) + \delta^T v(x_T) \\ &\vdots \\ &\geq \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f(x_t, x_{t+1}) \end{aligned} \tag{4.34}$$

を得る．ただし最後の不等式は，仮定により

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \left(\sum_{t=0}^{T} \delta^t f(x_t, x_{t+1}) + \delta^T v(x_T) \right) &= \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta^t f(x_t, x_{t+1}) + \lim_{T\to\infty} \delta^T v(x_T) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f(x_t, x_{t+1}) \end{aligned}$$

が成り立つことによる．

(4.32) および (4.34) により，任意の実行可能プラン $\{x_t : t = 0, 1, \ldots\}$ に対して

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f\big(\phi^t(\bar{x}_0), \phi^{t+1}(\bar{x}_0)\big) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f(x_t, x_{t+1})$$

が成立する．これは，政策関数 ϕ に従って生成される経路 $\{\bar{x}_0, \phi(\bar{x}_0), \phi^2(\bar{x}_0), \ldots\}$ が問題 $\mathrm{DP}(\bar{x}_0)$ の解であることに他ならない． □

ベルマン方程式は微分可能性や凸性に関する仮定を必要としないため，幅広い問題に適用できる．ただしベルマン方程式は関数方程式であるから，一般には式の変形を施すだけでは解くことができない．そのため問題の解や Policy Function がある程度予想できる場合には，それに基づいて Value Function v を計算し，v がベルマン方程式を満たすかどうかを確認することによって問題を解くことになる．

しかし当然ながら，中にはもっともらしい予想が困難なケースもある．そのような場合には，次のようなシステマティックな方法でベルマン方程式を解くことができる．まず関数 $v : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ を適当に予想して，

$$Tv(x) \;\; := \max_{y:\Gamma(x,y)\geq 0} \left\{ f(x,y) + \delta v(y) \right\} \tag{4.35}$$

のように $Tv(x)$ を置く．ここでもし，右辺の問題

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{y} & f(x,y) + \delta v(y) \\ \text{subject to} & \Gamma(x,y) \geq 0 \end{array}$$

を解いた結果として

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \qquad Tv(x) = v(x) \tag{4.36}$$

が成立すれば，これはすなわち

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \qquad v(x) \;\; = \max_{y:\Gamma(x,y)\geq 0} \left\{ f(x,y) + \delta v(y) \right\}$$

が成立することに他ならないから，偶然にも最初に予想した v がベルマン方程式の解であったことになる．しかし v は適当に予想したものであるため，一般に (4.36) は成り立たない．そこで予想を修正することになるのであるが，修正された新たな予想として，(4.35) で定義した Tv を用いるのである．そして最初の v と同様にして，

$$T^2v(x) \;\; := \max_{y:\Gamma(x,y)\geq 0} \left\{ f(x,y) + \delta Tv(y) \right\} \tag{4.37}$$

のように $T^2v(x)$ を置き，右辺の問題を解く．その結果として

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \qquad T^2v(x) = Tv(x) \tag{4.38}$$

が成立すれば，これはすなわち

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \qquad Tv(x) \;\; = \max_{y:\Gamma(x,y)\geq 0} \left\{ f(x,y) + \delta Tv(y) \right\}$$

が成立することに他ならないから，予想を修正した Tv がベルマン方程式の解である．もし (4.38) が成り立たない場合には，今度はさらに修正した予想として，(4.37) で定義した T^2v を用いる．同様の手続きを繰り返すことによって，T^nv を得ることができる．そしてこの予想は最終的にある関数 v^* へと収束し，その v^* についてベルマン方程式が満たされるのである．最初の v を任意に選んだことを考えると，これはずいぶんと乱暴な議論にも見えるが，次の定理はこのような素朴な方法でベルマン方程式が「解ける」ことを示している．

4.5 定理. 問題 DP($\bar{x}_0$) における目的関数 f が連続で，定義域 $\boldsymbol{X}$ が有界な閉集合であるとする．この時，全ての $x \in \boldsymbol{X}$ について $T^nv(x)$ の極限が存在し，その極限を

$$v^*(x) := \lim_{n\to\infty} T^nv(x)$$

と置くと，

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \qquad v^*(x) \;\; = \max_{y:\Gamma(x,y)\geq 0} \left\{ f(x,y) + \delta v^*(y) \right\}$$

が成立する．なお，v^* は v の選び方に依存しない．

4.5 定理は，最初の予想 v の選び方によらず，T^nv がベルマン方程式の解 v^* に収束することを示している．つまりどのような関数 v から始めても，結局は v^* に行き着くのである．

4.3　オイラー方程式とベルマン方程式の関係

ベルマン方程式とオイラー方程式は，いずれも無限次元の最適化問題に対する解法である．同一の問題に対する解の条件を与えるものである以上，それらの間には何らかの関係性があると予想されよう．実際，二つの方程式は密接に関連しており，次のような手順でベルマン方程式からオイラー方程式を導出することができる．

いまベルマン方程式の解として，関数 $v : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ が得られたとしよう．つまりこの v について，

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \qquad v(x) \;=\; \max_{y:\ \Gamma(x,y)\geq 0} \Big\{ f(x,y) + \delta v(y) \Big\}$$

が成立したとする．ここで v の微分可能性と，右辺の問題

$$\begin{array}{cl} \displaystyle\max_{y} & f(x,y) + \delta v(y) \\ \text{subject to} & \Gamma(x,y) \geq 0 \end{array}$$

の内点解を仮定する．すると，Policy Function を $\phi(x)$ と書けば，1 階の条件から

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \quad f_2(x, \phi(x)) + \delta v'(\phi(x)) = 0 \tag{4.39}$$

が成り立つはずである．一方，ベルマン方程式でパラメタを x と見れば，包絡線定理により

$$\frac{d}{dx} v(x) = \frac{\partial}{\partial x} \Big\{ f(x,y) + \delta v(y) \Big\} \Big|_{y=\phi(x)}$$

すなわち

$$v'(x) = f_1(x, \phi(x))$$

が成立するから，これを (4.39) に代入することにより

$$\forall x \in \boldsymbol{X}, \quad f_2(x, \phi(x)) + \delta f_1(\phi(x), \phi^2(x)) = 0 \tag{4.40}$$

を得る．$\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ が最適なプランであるとすれば，Policy Function の定義により

$$\phi(x_{t-1}) = x_t, \quad \phi^2(x_{t-1}) = x_{t+1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

と表せるから，(4.40) において $x = x_{t-1} \in \boldsymbol{X}$ と置くことで，オイラー方程式

$$f_2\left(x_{t-1}, x_t\right) + \delta f_1\left(x_t, x_{t+1}\right) = 0, \quad t = 1, 2, \dots$$

が導かれる．

4.4　応用：簡単な仕入れ問題

ベルマン方程式を活用する例として，次のような「仕入れ問題」を考えよう．いま x を非負の整数として，x 単位の財を在庫として持っている店があるとする．この店では在庫さえあれば，1 期間あたり 1 単位の財が価格 p で自動的に売れてゆく．在庫を増やすためには，仕入れのための固定費用 $a > 0$ に加えて単位あたりの限界費用 $c > 0$ が必要で，例えば y 単位の財を仕入れる費用は $a + cy$ となる．また，仕入れた財が在庫に追加されるのは次の期の期首である．割引因子を δ で表す．

この問題を DP の形に書いてみる．在庫の量を変数と考え，t 期の期首における在庫を $x_t \in \boldsymbol{X}$ で表す．ただし $\boldsymbol{X}$ は非負整数の集合，すなわち $\boldsymbol{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ である．$x_t \geq 1$ であれば t 期に 1 単位売れるので，t 期末の在庫は $x_t - 1$ となる．$t+1$ 期の期首の在庫を x_{t+1} で表すと，t 期の仕入れ

量は $x_{t+1}-(x_t-1)$ で表すことができるから，t 期に発生する仕入れの費用は $a+c(x_{t+1}-x_t+1)$ である．

目的関数 f は 1 期間の利益，すなわち

$$f(x_t,x_{t+1})=\begin{cases}\pi(x_t)-\bigl(a+c(x_{t+1}-x_t+1)\bigr) & (\ x_{t+1}-x_t+1>0\,\text{のとき}\ ),\\ \pi(x_t) & (\ x_{t+1}-x_t+1\le 0\,\text{のとき}\ ).\end{cases}$$

とおく．ただしここで

$$\pi(x_t)=\begin{cases}p & (\ x_t>0\,\text{のとき}\ ),\\ 0 & (\ x_t\le 0\,\text{のとき}\ ).\end{cases}$$

である．また制約条件は

$$\Gamma(x_t,x_{t+1})=x_{t+1}-x_t+1\ge 0$$

と書ける．

練習問題 4.4. 上で定義した f, π, Γ からなる DP が，仕入れ問題に対応していることを確認せよ．

仕入れる度に固定費用 a が発生するので，仕入れの回数はなるべく少ないほうがよいことは容易に分かる．しかし一度に大量に仕入れた場合，仕入れに伴うコストはすぐに発生する一方で売り上げは 1 期間に 1 単位分しか生じないため，利益は割引率の分だけ目減りすることになる．つまり，大量に仕入れればよいという訳でもないのである．したがって最も自然な仕入れ方は,（1）在庫が 2 単位以上あるうちには仕入れをせず,（2）在庫が 1 単位，あるいは 0 単位になった時点で「適度な」量を仕入れる，というものになろう．そこで以下の議論では，今述べた仕入れ方が最適な方法であると予想して Value Function の候補を計算し，それがベルマン方程式を満たすことを確認するという作戦をとることにする．

このような手順で議論を進めるためには，まず「適度な」量を確定しておく必要がある．n を正の整数として n 単位だけ仕入れ，その後は仕入れを行わずにいた場合の割引利益は

$$\begin{aligned} r_n &:= p(\delta+\delta^2+\cdots+\delta^n)-(a+cn)\\ &= p\frac{1-\delta^n}{1-\delta}-(a+cn)\end{aligned}$$

となる．仕入れた在庫が尽きる度に（すなわち n 期ごとに）これを繰り返すと，割引総利益は

$$\begin{aligned} r_n\Bigl(1+\delta^n+\bigl(\delta^n\bigr)^2+\dots\Bigr) &= r_n\frac{1}{1-\delta^n}\\ &= p\frac{1}{1-\delta}-\frac{a+cn}{1-\delta^n} \end{aligned}\tag{4.41}$$

である．

1 単位だけ仕入れることで得る利益は $p\delta$ で，そのために必要なコストは $a+c$ である．したがって $p\delta>a+c$ であれば，仕入れをしない（したがって将来に渡って販売を行わない）よりも $n=1$ とした方が利益 (4.41) は大きくなるから，仕入れを全く行わないというやり方が最適となることはない．一方で，(4.41) の値はある数 n を境に減少してゆくことが分かるので，割引総利益を最大にするような仕入れ数 n^* が存在すると言える．

練習問題 4.5. 上記の議論を確認せよ.（ヒント：n を実数と見れば，ある n を超えると (4.41) が減少に転じることが確認できるはず.）

これ以降の議論では $p\delta>a+c$ を仮定し，(4.41) の最大値を Π^* と置くことにする．つまり

$$\Pi^*:=p\frac{1}{1-\delta}-\frac{a+cn^*}{1-\delta^{n^*}}$$

と書く．ここで n^* は，在庫が尽きるたびに仕入れるという方針をとった場合の利益 (4.41) を最大にする仕入れ量であるが，これが上で言う「適度な」量，すなわち DP の解に対応する仕入れ量であるとすれば，Value Function v は

$$\begin{aligned}
v(1) &= p+\Pi^* \\
v(2) &= p+\delta v(1) = (p+\delta p)+\delta\Pi^* \\
v(3) &= p+\delta v(2) = (p+\delta p+\delta^2 p)+\delta^2\Pi^* \\
&\vdots \\
v(x) &= p+\delta v(x-1) = (p+\delta p+\ldots\delta^{x-1}p)+\delta^{x-1}\Pi^* \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

すなわち $x\geq 1$ に対して

$$v(x) = p\frac{1-\delta^x}{1-\delta}+\delta^{x-1}\Pi^* = \frac{1}{1-\delta}p+\left(p-\frac{a+cn^*}{1-\delta^{n^*}}\right)\delta^{x-1} \qquad (4.43)$$

のように書けるはずである．

練習問題 4.6. $v(0)$ がどのようになるか書きなさい．

任意の実行可能解について，$\lim_{t\to\infty}\delta^t v(x_t)=0$ が成り立つことに注意しよう．なぜなら，$x\to\infty$ のとき $\left(p-\frac{a+cn^*}{1-\delta^{n^*}}\right)\delta^{x-1}$ はゼロに収束するため，任意の実行可能解に対して $v(x_t)$ が発散することはないからである．

練習問題 4.7. 上の主張をより丁寧に示せ．

したがって 4.4 定理により，後は (4.43) で予想した v がベルマン方程式を満たすことが示されれば，上で記述した自然な戦略が最適な仕入れ方法であることが言える．$x\geq 1$ の在庫を抱えた状態を考えよう．もしも $y\geq 1$ 単位の仕入れを行えば今期の利益は $p-(a+cy)$，次期以降の総割引価値は $\delta v(x-1+y)$ となる．一方，仕入れを行わなければ今期の利益は p，次期以降の総割引価値は $\delta v(x-1)$ である．よって $x\geq 1$ の時のベルマン方程式は

$$v(x)=\max\left\{p+\delta v(x-1),\ \max_{y\geq 1}\Big(p-(a+cy)+\delta v(x-1+y)\Big)\right\} \qquad (4.44)$$

と書ける．

練習問題 4.8. $y\geq 1$ において，$p-(a+cy)+\delta v(x-1+y)$ が y に関する減少関数となる（したがって，(4.44) における右辺の第 2 項は $y=1$ の時に最大化される）ことを示せ．また，$x\geq 1$ ならば $p+\delta v(x-1)\geq p-(a+c)+\delta v(x)$ であることを示せ.（ヒント：(4.43) を直接代入する．また，Π^* の決め方から $\frac{a+cn^*}{1-\delta^{n^*}}\leq\frac{a+cn}{1-\delta^n}$ であり，特に $n=1$ の時にもこれが成立するすることに注意すること.）

以上から，(4.44) の成立を示すためには $x\geq 1$ の時に $v(x)=p+\delta v(x-1)$ となることを示せば十分であると言えるが，これは (4.42) から直接確認することができる．

練習問題 4.9. $x=0$ の時もベルマン方程式が成立していることを示せ．

動学的最適化入門*

工藤教孝

2007 年 10 月 22 日

1　はじめに

ここではサーチ理論を理解するうえで不可欠な数学的ツールである動学的最適化の手法を簡単に解説する．無限期間の最大化問題に焦点を当て，2 つの手法を紹介する．ひとつは最適制御理論 (Optimal Control Theory) で，もうひとつはダイナミック・プログラミング (Dynamic Programming; DP; 動的計画法) である．数理的な証明よりもむしろ，この道具をいかに使えるようになるか，という点に力を注ぐ．DP の参考文献として Adda and Cooper (2004), Stokey and Lucas (1989), Sargent (1987), Ljungqvist and Sargent (2004), Dixit (1990), Lucas (1987) を，連続時間最適制御理論および連続時間 DP の参考文献として Léonard and Van Long (1992) と Kamien and Schwartz (1991) を挙げておく．

2　新古典派成長モデル

2.1　最適制御理論：ラグランジュ乗数法

ダイナミック・プログラミングの考え方を理解するために，最初に新古典派経済成長モデルを取り上げてみたい．本書が想定している読者，つまり大学院レベルのマクロ経済学のコースワーク経験者にとってはなじ

*この原稿は『サーチ理論』（今井・工藤・佐々木・清水，東京大学出版会 2007）の数学補論として執筆されたものであるが，サーチ理論学習者だけでなく，マクロ経済学など他の関連分野の学習にも役に立つように書かれている．この原稿を作成する際に山田知明氏 (立正大学経済学部) からコメントをいただいた．

みのモデルであろう．時間は離散的で経済を代表する家計は無限に生き，生涯効用を最大化させるように消費計画を立てる．貯蓄は資本市場を通じて資本蓄積となり，それが将来の生産拡大につながる．これが最も基本的かつ典型的な最適成長モデルの構造である．家計が直面する最大化問題を定式化すると，

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \tag{1}$$

subject to

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) \tag{2}$$

for $t = 0, 1, 2, ...$ で，初期値 k_0 は所与である．なお，資本ストック (または資本・労働比率) である k_t を状態変数 (state varible)，消費 c_t を操作変数 (control variable) と呼ぶ．このような最適成長モデルでは，家計は第 0 期にこの最大化問題に直面し，無限期間にわたる最適な消費計画を $t = 0$ 時点で計算してその後は計画通りに行動をとるという定式化になっている．なお，状態変数 k_t は t 時点では操作不可能であり，家計はこれを所与とみなすが，k_{t+1} は操作可能である．

　この最大化問題に対応するラグランジュ関数 (Lagrangian) は

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \Lambda_t \left[f(k_t) - c_t - k_{t+1} \right]$$

または

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ U(c_t) + \lambda_t \left[f(k_t) - c_t - k_{t+1} \right] \right\}$$

のようになり，$\lambda_t \equiv \Lambda_t / \beta^t$ は制約条件に対応する乗数である．最大化の一階の条件は

$$\begin{aligned} U'(c_t) &= \lambda_t && (3) \\ \lambda_t &= \beta \lambda_{t+1} f'(k_{t+1}) && (4) \\ k_{t+1} &= f(k_t) - c_t && (5) \\ \lim_{t \to \infty} \beta^t \lambda_t k_{t+1} &= 0 && (6) \end{aligned}$$

で，最後の条件式は横断性条件 (transversality condition) と呼ばれている．(3) と (4) から

$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} = \beta f'(k_{t+1}) \tag{7}$$

を得る．この条件式はマクロ経済学でオイラー方程式 (Euler equation) と呼ばれる．一般に，ここで扱っているような動学的最適化問題では，解を定数の組み合わせで表記できるというような幸運はめったにない．つまり，closed-form solution や analytical solution(解析解) と呼ばれるようなものはほとんど得られないのである．しかし，ある非常に特定化された形の問題にはそのような解があることが知られており，ここではモデルを解いた気分になれるようにそのような特殊なケースのみ扱うことにする．生産関数を $f(k) = Ak^{\alpha}$，効用関数を $U(c) = \ln c$ のように特定化しよう．すると (7) と (5) は

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} \tag{8}$$

$$k_{t+1} = Ak_t^{\alpha} - c_t \tag{9}$$

となる．

この最適化問題を解くために未定係数法というものを使おう．この方法は一般的に使えるというわけではないが，少なくともこれから解こうとしている問題を扱うには便利である．まず，最終的に得られる解が $c_t = \pi A k_t^{\alpha}$ のような形をしている，という山勘 (guess) が働いたとしよう．この勘は間違っているかもしれないが，すでに正しいということが知られているので説明を続ける．ゴールは係数 π の値をつきとめることである．この解を使って (8) を書き換えると $k_{t+1} = \beta\alpha A k_t^{\alpha}$ となる．これをさらに (9) に代入すると $c_t = (1-\beta\alpha)Ak_t^{\alpha}$ が得られる．こうして最適解が満たすべき条件を全て満たすような π を得ることに成功したので，最初の山勘は正しかったことになり，正確な closed-form solution が得られたことになる．ではなぜ $c_t = (1-\beta\alpha)Ak_t^{\alpha}$ を解と呼ぶことができるのだろうか．実際，初期値 k_0 が与えられると c_0 と k_1 の値が判明する．同様に，k_1 の値が判明すると c_1 を k_2 の値が分かる．つまり，$c_t = (1-\beta\alpha)Ak_t^{\alpha}$ が得られた結果，消費と資本ストックの列 $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ と $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ を完全に記述できることを意味する．従って，この動学的最適化問題は「解けた」のである．

2.2 ダイナミック・プログラミングによる解法

では次に，全く同じ最適成長モデルをダイナミック・プログラミングを使って解いてみよう．基本的な考え方は，無限期間ある計画期間のうちの任意の 2 期間を取り出して考察するというものである．ここで重要なのが状態変数と価値関数 (value function) である．過去の活動 (action)

は全て現在の状態 (state) という形で集約される．それを所与として現在行動をとるわけだが，その行動は現在の利得のみならず，将来の状態にも影響を与えるのである．

すでに前節で計算した解 $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ を目的関数に代入した値を $v\,(k_0)$ のように定義しよう．これが価値関数 (value function) である．厳密に言うと，価値関数とは最大化された生涯効用の割引現在価値で，その値は初期値 k_0 に依存する．では，ここから 1 期間過ぎたとしよう．すると，もしももう一度最大化問題を解くならば $\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U(c_t)$ subject to (2) given k_1 と表すことができる．第 1 期以降の問題は全く同じなのでやはり解 $\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$ を得る．したがって，第 1 期にもう一度最適化問題を解いた場合の価値関数を $v(k_1)$ と定義できる．すると，第 0 期に家計が直面する問題を

$$v(k_0) = \max_{c_0} \{U(c_0) + \beta v(k_1)\} \tag{10}$$

subject to $c_0 + k_1 = f(k_0)$ と表現できるはずである．この解釈は，k_0 を所与に最適な消費計画を立てる価値 $v(k_0)$ は，第 0 期の消費と第 1 期以降最適な行動をとる結果得られるであろう価値 $v(k_1)$ の現在価値の和となるといえる．つまり $v(k_1)$ は来期以降に活動が継続される価値 (continutation value) を表している．

第 0 期と第 1 期の間だけでなく，任意の隣り合う 2 期間について (10) が成り立つので，価値関数は

$$v(k_t) = \max_{c_t} \{U(c_t) + \beta v(k_{t+1})\} \tag{11}$$

を満たす．ここで制約条件式は (2) である．(11) をベルマン方程式 (Bellman equation) と呼ぶ．一般に，ベルマン方程式は関数方程式 (functional equation) である．つまりベルマン方程式の解は数字ではなく関数 $v(k_t)$ そのものなのである．しかしながら，多くの経済学の問題にとって最終的な目的は価値関数について知ることではなく，むしろ意思決定ルール (decision rule) について知ることである．意思決定ルールの別名は政策関数 (policy function) で，これは $c_t = h(k_t)$ などのように，選択変数を状態変数の関数の形で表記する．つまり，現在の状態が与えられたとき，どのような行動をとるべきか，について知りたいのである．これがまさに動学的最適化問題における解なのである．

では，最適成長モデルの分析を進めよう．上のベルマン方程式は制約条件が付いているが，条件式を代入することで記述を単純化できる．c_t を

消去しても k_{t+1} を消去してもどちらでもかまわない．それぞれ

$$
\begin{aligned}
v(k_t) &= \max_{k_{t+1}} \{U(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta v(k_{t+1})\} &(12)\\
v(k_t) &= \max_{c_t} \{U(c_t) + \beta v(f(k_t) - c_t)\} &(13)
\end{aligned}
$$

どちらを使ってもよいが，ここでは (12) を使おう．選択変数についての最大化一階の条件は

$$
U'\left(f(k_t) - k_{t+1}\right) = \beta v'(k_{t+1}) \tag{14}
$$

である．包絡線条件 (envelope condition) という条件は，価値関数を状態変数で微分することで得られる．

$$
v'(k_t) = U'\left(f(k_t) - k_{t+1}\right) f'(k_t) \tag{15}
$$

これらを使うと再びオイラー方程式 $U'\left(c_t\right) = \beta U'\left(c_{t+1}\right) f'(k_{t+1})$ を得ることができる．すると，前節と同様に未定係数法を使って計算を進めることができる．例によって生産関数を $f(k) = Ak^\alpha$，効用関数を $U(c) = \ln c$ のように特定化しよう．前節同様に政策関数についての guess をしてもよいが、ここでは価値関数についての guess をしてみよう．価値関数を $\Phi_1 + \Phi_2 \ln k_t$ と予測して係数 Φ_1, Φ_2 を求めよう．(14) を書き換えると

$$
\frac{1}{Ak_t^\alpha - k_{t+1}} = \beta\Phi_2 \frac{1}{k_{t+1}}
$$

なので、$k_{t+1} = \beta\Phi_2(1+\beta\Phi_2)^{-1}Ak_t^\alpha$ となる．ここから $c_t = (1+\beta\Phi_2)^{-1}Ak_t^\alpha$ が分かり、さらにこれを (15) に代入すると $\Phi_2 k_t^{-1} = (1+\beta\Phi_2)\alpha k_t^{-1}$ となるので，$\Phi_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$ であることが分かる．すると政策関数と価値関数は

$$
\begin{aligned}
c_t &= h(k_t) = (1 - \beta\alpha)Ak_t^\alpha\\
v(k_t) &= \Phi_1 + \frac{\alpha}{1 - \beta\alpha} \ln k_t
\end{aligned}
$$

を得ることができる．なお，もうひとつの係数 Φ_1 の導出はここでは省略する．興味のある読者は Sargent (1987) などを参照してほしい．

3 ダイナミック・プログラミング

3.1 不確実性のないケース

前節では最適成長モデルを使ってダイナミック・プログラミングを紹介したが，ここではもうすこし一般的に DP という分析ツールについて解説しよう．まずは不確実性のないケースをみていこう．

DP を理解するうえで最も重要な概念が状態 (state) であろう．その日の天候，技術水準，資産の量，雇用状態，そしてサンスポットなど，分析の対象に応じて状態変数は様々な形を取る．いま，s_t を状態変数 (state variable)，c_t を操作変数 (control variable) とする．なお，これらはスカラーである必要はなく，ベクトルと考えてもよい．状態変数の値は選択変数によって影響を受けるとし，それを，初期状態 s_0 は所与して

$$s_{t+1} = g(s_t, c_t) \tag{16}$$

for $t = 0, 1, 2, ...$ と表現しよう．これは資本蓄積方程式などに対応する．制約集合 $\{(s_{t+1}, s_t) : s_{t+1} \leq g(s_t, c_t)\}$ はコンパクトな凸集合と仮定する．

各期の利得は状態変数と選択変数に依存すると仮定し，$r(s_t, c_t)$ と表す．r は凹関数であると仮定する．これは効用でも利潤でもよいのでここでは一般的に利得関数 (return function) と呼ぶことにしよう．$\beta \in (0, 1)$ を割引因子として，無限期間にわたる利得最大化問題を定式化すると

$$\max_{\{c_\tau\}_{\tau=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(s_t, c_t)$$

subject to (16) と表すことができる．この問題は，第 0 期に全ての期間の計画を立てる，つまり数値の列について解くことから，文献では流列問題 (sequence problem; SP) と呼ばれている．この問題に解があると仮定しよう．すると，最適解の下での目的関数の値は初期値 s_0 に依存し，この関係を

$$v(s_0) \equiv \max_{\{c_\tau\}_{\tau=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(s_t, c_t)$$

subject to (16) と表す．これを価値関数 (value function) と呼ぶ．

では，この価値関数を使って以下の問題

$$v(s_t) = \max_{c_t} \{r(s_t, c_t) + \beta v(s_{t+1})\} \tag{17}$$

subject to $s_{t+1} = g(s_t, c_t)$ を考察しよう．なお，制約条件式を (17) の中に代入して

$$v(s_t) = \max_{c_t} \{r(s_t, c_t) + \beta v(g(s_t, c_t))\} \tag{18}$$

のようにしても良いし，条件式 $s_{t+1} = g(s_t, c_t)$ を選択変数について解いてから利得関数に代入することで

$$v(s_t) = \max_{s_{t+1}} \{R(s_t, s_{t+1}) + \beta v(s_{t+1})\} \tag{19}$$

としてもよい．これらをベルマン方程式(Bellman equation) と呼ぶ．Ljungqvist and Sargent (2004) は (18) を，Stokey and Lucas (1989) は (19) の形を採用している．DP の目的は，問題 (SP) の最適解を数値の流列 (sequence) として求める代わりに，最適な行動ルールを関数として得ることである．この行動ルールのことを政策関数 (policy function) と呼ぶ．ベルマン方程式は関数方程式 (functional equation; FE) となっており，つまり，方程式を満たす関数 v を解とするのである．

ベルマン方程式の解は価値関数 $v(s_t)$ であり，同時に対応する政策関数を得ることができる．経済学的に重要なのは政策関数を得ることである．(18) を用いた場合の政策関数は $c_t = h(s_t)$ で，(19) の場合は来期の状態変数そのものを選択する形なので政策関数を

$$s_{t+1} = g(s_t, c_t) = g(s_t, h(s_t)) \equiv \phi(s_t)$$

と表現しよう．ここで知りたいのは

1. ベルマン方程式に解は存在するのか，そしてその解は一意なのか．

2. ベルマン方程式の解は (SP) の解となっているのか．

ということである．

ここでは Stokey and Lucas (1989) で得れらた結果を紹介したい．最初に，(19) に対応する流列問題を書くと

$$\max_{\{s_{\tau+1}\}_{\tau=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t R(s_t, s_{t+1})$$

なので，最大化問題の一階の条件と TVC は

$$R_2(s_t, s_{t+1}) + \beta R_1(s_{t+1}, s_{t+2}) = 0, t = 0, 1, 2, ... \tag{20}$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t R_1(s_t, s_{t+1}) s_t = 0 \tag{21}$$

である．なお，R_1, R_2 はそれぞれ利得関数を第一要素に関して偏微分した導関数と第二要素に関して偏微分した導関数を表す．(20) はオイラー方程式である．オイラー方程式 (20) と横断性条件 (21) を満たすような流列 $\{s_t\}_{t=0}^{\infty}$ は流列問題 (SP) の解であることが知られている．

今度は同じ問題をベルマン方程式 (19) で表そう．すると，

1. ベルマン方程式 (19) を満たすような連続関数 v が一意に存在し，v は時間に依存しない (time-invariant).

2. 政策関数 $\phi(s)$ は時間に依存せず,

$$v(s) = R(s, \phi(s)) + \beta v[\phi(s)]$$

を満たす．政策関数は一意かつ連続である．

3. $s_{t+1} = \phi(s_t)$ を満たす流列 $\{s_t\}_{t=0}^{\infty}$ は流列問題 (SP) の一意解である．

詳しくは Stokey and Lucas (1989) を参照のこと．なお，すでに前節で見たように，ベルマン方程式からオイラー方程式を導出することもできる．ベルマン方程式 (19) における最大化一階の条件は

$$R_2(s, \phi(s)) + \beta v'(\phi(s)) = 0$$

で，包絡線条件 (envelope condition) は

$$v'(s) = R_1(s, \phi(s))$$

である．これらを書き換えるとオイラー方程式になる．

ここで一つ注意をしておくと，DP は非常に強力な分析ツールではあるが，動学的最適化問題に常にそのまま使えるわけではない．経済分析をする上で特に重要なのが (1) 問題が再帰的 (recursive) になっているかどうかという点と (2)r が有界 (bounded) であるかどうか，という 2 点である．時間に直接依存する項が問題に含まれると (1) を満たさなくなるが，これは状態変数の再定義などによって回避可能な場合がある．また，経済学で用いる効用関数には (2) が満たされない場合も多い．それでも DP を応用できる場合が多くあることが知られてる．詳しくは Stokey and Lucas (1989) を参照のこと．また，Alvarez and Stokey (1998) は r が有界でない場合でも，r が一次以下の同次関数で制約が一次同次であれば DP を使えることを示した．

解の存在と一意性が保障されたとして，ではどのようにしてその解を導出すればよいのだろうか．大きく分けると 3 つある．

1. Eular Equation

2. Guess and Verify

3. Iteration

最初の方法はベルマン方程式からオイラー方程式を導出するもので，これは本質的にはラグランジュ乗数法と同じである．この場合はオイラー方程式に横断性条件を加えて解を求めることになる．分析の対象が定常状態だけであればオイラー方程式のみで十分である．

次の方法は Guess and Verify と呼ばれているもので，直訳は，山勘と確認．これは，価値関数または政策関数の形についてある程度見当をつけて，それを最大化一階の条件や包絡線条件などの情報とつき合わせて真の関数を求めるという方法である．もちろん常にこの方法が使えるというわけではないが，これが使える場合は手計算で価値関数や政策関数を得ることができるというメリットがある．

最後は iteration．繰り返し近似である．ほとんどの動学的最適化問題では analytical solution を得られない．つまり，手計算で得られる形をした解がそもそもないのである．その場合は数値計算に頼る必要がある．数値計算を許すならば，ベルマン方程式の解を得る方法は非常に簡単である．存在証明で使う縮小写像定理 (contraction mapping theorem) によると，ベルマン方程式を繰り返し近似していくといずれ真の価値関数になることが知られている．具体的には，最初に適当に価値関数を値を定めてそこからスタートさせる．価値関数の 0 回目の近似値を v_0 とし，例えばそれに 0 という値を与える．そのうえでベルマン方程式の右辺の最大化問題を解き，最大化された利得関数の値に 0 を加えたものを次の近似値 v_1 とするのである．こんどは v_1 を使ってベルマン方程式の右辺の最大化問題を解いてその次の近似値を得る．このプロセスを繰り返すと真の価値関数 $v(s)$ に収束していくことを contraction mapping theorem は保障してくれるのである． このような数値的な解法については Ljungqvist and Sargent (2004) や Judd (1998) を参照のこと．

第 2 節で分析した最適成長モデルでは状態変数が連続変数であった．つまり考慮すべき状態の数が無限にあるわけで，これがベルマン方程式の解を手計算できなくさせる要因でもあったのだが，分析の対象によっては状態変数は離散的でかつ有限になってくれることもあり得る．ここでは非常に簡単に計算できるように状態の数が 2 つであるような例を挙げたい．

ある家計が直面する問題を考えよう．計画期間は無限で，利得に影響のある状態は 2 つだけである．一つは雇用されているという状態 (employed) で，状態変数は $s = e$ となる．もう一つの状態は失業 (unemployed) で，状態変数を $s = u$ と表す．選択変数も極めて単純である．この家計は次

の期の状態 s_{t+1} を自ら決めると考える．つまり，$s_{t+1}=g(s_t,c_t)=c_t$ である．利得はその期の状態にのみ依存し，$s_t=e$ ならば $y_t=2$ で，$s_t=u$ ならば $y_t=1$ であると仮定する．目的関数は $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t y_t$ であり，家計はこれを最大化するように来期働くかどうかを決めている．もちろんこんな問題はDPを使うまでもなく，家計は「毎期働く」という選択をとることは自明である．これをDPで考えてみよう．ベルマン方程式を書くと

$$v(s_t)=\max_{s_{t+1}}\{y_t+\beta v(s_{t+1})\} \tag{22}$$

subject to $y_t=2$ if $s_t=e$ and $y_t=1$ if $s_t=u$ という形になる．価値関数は状態に依存し，今回の問題ではその状態がたった2つなので，(22)を次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} v(e) &= \max\{2+\beta v(e), 2+\beta v(u)\} \\ v(u) &= \max\{1+\beta v(e), 1+\beta v(u)\} \end{aligned}$$

さらに単純化できて，

$$v(e) = 2+\max\{\beta v(e), \beta v(u)\} \tag{23}$$
$$v(u) = 1+\max\{\beta v(e), \beta v(u)\} \tag{24}$$

となる．(24)を(23)から引くと $v(e)-v(u)=1>0$ を簡単に示すことができる．つまり，状態 e の方が状態 u よりもよいので家計の最適な選択，つまり政策関数(policy function)は $c_t=h(s_t)$ で，その中身は

$$h(s_t)=\begin{cases} e & \text{if } s_t=e \\ e & \text{if } s_t=u \end{cases}$$

となる．もちろんこれは自明である．なお，価値関数は $v(e)=2/(1-\beta)$ と $v(u)=(1+\beta)/(1-\beta)$ のように計算できる．

3.2 不確実性のあるケース

ここからは不確実性の環境にDPを応用する．このような確率的ダイナミック・プログラミング(stochastic dynamic programming)について詳しいのは，例えばStokey and Lucas (1989)であるがLucas (1987)も大変参考になる．不確実性のある環境でも基本的な考え方は同じである．状

を得ることが出来る。期間を t 期にすると

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}} \left[\ln \left(Ak_t^{\alpha} - k_{t+1} \right) + \beta V(k_{t+1}) \right] \tag{25}$$

期間によらず、最適化問題が同一の構造をとっていることに注目すると、時間の index を削除することが可能であり

$$V(k) = \max_{k'} \left[\ln \left(Ak^{\alpha} - k' \right) + \beta V(k') \right] \tag{26}$$

を得ることが出来る。(26) は Bellman 方程式と呼ばれる。また、$V(k)$ は Value Function と呼ばれる。Value Function がわかれば、その解として Policy Function を得ることが出来、Policy Function がわかれば、各期の最適な資本ストックの水準を得ることが出来るのである。無論、全ての動的最適化問題がこのような形で定式化できるとは限らないが、各期で繰り返し同一の問題に直面することが多い経済学の問題では応用範囲は広い。

1.3 一般ケース

Ljungqivist and Sargent (2004) に従い、各期の return function を r、transition function を g で表し、動的最適化問題を以下のように定義する。

$$\max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \tag{27}$$

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t) \tag{28}$$

$$x_0 : given. \tag{29}$$

上記の問題を解いて得た最適化された生涯効用を V^* であらわすと

$$V^* = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \quad s.t. x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{and } x_0 \tag{30}$$

そこで、Bellman 方程式は以下のように定義される。

$$V(x_t) = \max_{u} \left(r(x, u) + \beta V(x') \right) \quad s.t. x' = g(x, u). \tag{31}$$

ここで問題になるのは、(1)Bellman 方程式を満たす関数 V は存在するか否か、(2) 存在するとき、それは一意か、それとも複数存在するか、(3)

その解は V^* と一致するか?である。もしも Bellman 方程式の解が一つしか存在せず、しかも V^* と一致すれば、無限視野の最適化問題は一期間の最適化問題を満たす関数 V を探す問題に変換することが可能になる。

残念ながら、常に Bellman 方程式の解が V^* と一致するとは限らない。また、Bellman 方程式をみたす関数が複数存在する可能性もある。以下に、Bellman 方程式がユニークな解をもち、それが V^* と一致するための十分条件を示す。詳しくは Stokey and Lucas with Prescott(1987), Chapter 4, Section 2 を参照せよ。

(1)　r は強く凹かつ有界である。

(2)　集合 $\left\{(x_{t+1}, x_t) : x_{t+1} \in g\left(x_t, u_t\right), u_t \in R^k\right\}$ は凸かつコンパクトである。

(1) は、各期の効用関数が凹関数かつ、上限値があることを意味し、(2) は各期の生産可能集合が凸かつコンパクトであることを意味する。以上の条件の下で Bellman 方程式をみたす関数 V は以下の性質を持つ。

1.　$V\left(x\right)$ は単調増加関数である。

2.　$V\left(x\right)$ は強く凹であり、Policy function は single-valued function になる。

3.　$V\left(x\right)$ は V^* と一致する。

4.　Bellman 方程式の解 V は以下の iteration で得ることが出来る。

$$V_{j+1} = \max_u \left(r\left(x, u\right) + \beta V_j\left(x'\right)\right) \quad s.t. x' = g\left(x, u\right). \tag{32}$$

5.　上記の iteration の収束先として得られた Value Function $V\left(x\right)$ は以下の性質を満たす。

$$V'\left(x\right) = \frac{\partial r}{\partial x}\left(x, h\left(x\right)\right) + \beta \frac{\partial g}{\partial x}\left(x, h\left(x\right)\right) V'\left(g\left(x, h\left(x\right)\right)\right). \tag{33}$$

5 の性質は Benveniste and Scheinkman の定理と呼ばれるものである。これは包絡線の定理とも呼ばれる。なぜなら、状態変数の一単位の増加は、それが瞬間効用関数 r と生産可能性集合 g を拡大させる直接効果のみが Value Function に影響を及ぼし、Policy Function の変化を通じた間接効果は Value Function には影響を与えないことを示しているためである。

Benveniste and Scheinkman の定理はクーンタッカーを用いた解との対比をするときに有効である。(26) の問題を考えてみよう。ここに Benveniste and Scheinkman の定理を当てはめると

$$V'\left(k\right) = \frac{\alpha A k^{\alpha-1}}{A k^\alpha - k'}. \tag{34}$$

最適化の一階条件は

$$0 = \frac{-1}{Ak^{\alpha} - k'} + \beta V'(k') \tag{35}$$

$V'(k)$ の中が k と k' であることに注意してこの導関数を消去すると

$$-\frac{1}{Ak^{\alpha} - k'} + \beta \frac{\alpha A k'^{\alpha-1}}{Ak'^{\alpha} - k''} = 0. \tag{36}$$

ところで、DP ではなく、通常の動学問題として解くとオイラー方程式を下記のように得ることができる。

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}\right),$$
$$\beta \frac{A\alpha k_t^{\alpha-1}}{Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}} - \frac{1}{Ak_{t-1}^{\alpha} - k_t} = 0$$

したがって、Benveniste and Scheinkman の定理から、通常のオイラー方程式を導くことができる。

条件 (2) は内生成長理論など、収穫逓増を含む生産関数を考えなければ通常は満たされる仮定である。しかし、(1) の扱いには注意が必要である。例で用いた対数効用関数には上限は存在せず、したがってこの条件 (1) を満たさない。実際、多くの場合、効用関数や利潤関数が有界であると仮定することはごく稀であり、標準的な経済モデルでは、この定理を用いることが出来ないのである。例えば、有名な Hall の消費のモデルでは効用関数が 2 次式と仮定しているが、この下では Bellman 方程式を満たす関数は複数存在することが知られている。Stokey and Lucas with Prescott(1987) の 4.4 節で有界でないケースを論じているが、マクロモデルで頻繁に用いられる関数形において、Value Function の一意性や最適性を保証することは通常非常に困難である。実際には、制約条件の凸、コンパクト性と効用関数が凹であることを確認し厳密な議論を避けて Value Function を用いることが多い。この厳密性の欠如が深刻な問題をつくるかどうかは今後の課題であるが、近年の論文によると、有界のケースを非有界のケースの多くの場合に拡張できるようである。

ここで興味深い性質は 4. である。最適化問題に解があることを示す定理は多いが、具体的にその解を導くアルゴリズムまで示すものは少ない。この iteration は Value Function Iteration と呼ばれるものであり、Dynamic Programming を解く際に中心的な役割を担うことになる。

1.4 Value Function Iteration

(32) で与えられたアルゴリズムを具体的にどう利用するか考える。まず、j=0 のとき、すなわち最初の時点での問題を考える。すると

$$V_1 = \max_u \left(r\left(x, u\right) + \beta V_0 \left(x'\right)\right) \quad s.t. x' = g\left(x, u\right) \tag{37}$$

となる。右辺の最大化問題を解くには関数 V_0 を知る必要があるが、このアルゴリズムではとくに V_0 に関しては何も記述がない。上記の問題がもしも縮小写像になっていれば初期の V_0 は任意の関数でよいことが知られており、どんな関数、たとえば定数でも構わない。上記の問題を解いて得た関数 V_1 を右辺に持っていき、j=1 として

$$V_2 = \max_u \left(r\left(x, u\right) + \beta V_1 \left(x'\right)\right) \quad s.t. x' = g\left(x, u\right) \tag{38}$$

と定義する。こうして V_j と V_{j+1} あるいはそれを生成する Policy Function $h_j\left(x\right)$ と $h_{j+1}\left(x\right)$ が十分に近くなったとき、すなわち iteration が違いを生み出さなくなるまでこのプロセスを続ける。そして得られた関数が求める Value Function および Policy Function、またはそれらの近似とみなすのである。

一部門の最適成長モデルを用いて、Value Function Iteration を実際に応用してみる。

まず $V_0 = 0$ を仮定する。すると、j=0 の問題は

$$V_1 = \max_{k'} \ln\left(Ak^\alpha - k'\right) + \beta \times 0. \tag{39}$$

この問題の解は $k' = 0$ のとき、

$$V_1 = \ln Ak^\alpha = \ln A + \alpha \ln k \tag{40}$$

となる。つぎに、j=1 として、この V_1 を用いて

$$V_2 = \max_{k'} \ln\left(Ak^\alpha - k'\right) + \beta\left(\ln A + \alpha \ln k'\right) \tag{41}$$

とする。この最適化問題の一階条件は

$$\frac{-1}{Ak^\alpha - k'} + \beta\alpha\frac{1}{k'} = 0 \tag{42}$$

である。整理すると

$$k' = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}Ak^\alpha \tag{43}$$

であり、これを代入すると

$$V_2 = \ln\left(\left(1 - \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right)Ak^{\alpha}\right) + \beta\left(\ln A + \alpha\ln\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}Ak^{\alpha}\right) \tag{44}$$

したがって

$$V_2 = \ln\frac{A}{1+\alpha\beta} + \beta\ln A + \alpha\beta\ln\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} + \left(\alpha + \alpha^2\beta\right)\ln k \tag{45}$$

さらにこれを用いて j=2 とすると

$$V_3 = \max_{k'}\ln\left(Ak^{\alpha} - k'\right) + \beta\left(Const1 + \left(\alpha + \alpha^2\beta\right)\ln k'\right) \tag{46}$$

この一階条件は

$$\frac{-1}{Ak^{\alpha} - k'} + \beta\left(\alpha + \alpha^2\beta\right)\frac{1}{k'} = 0 \tag{47}$$

であり、

$$k' = \frac{\alpha\beta\left(1+\alpha\beta\right)}{1+\alpha\beta\left(1+\alpha\beta\right)}Ak^{\alpha} \tag{48}$$

が解となる。V_3 は

$$V_3 = Const2 + \alpha\left(1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2\right)\ln k' \tag{49}$$

となる。これを繰り返していくと、

$$V(k) = \frac{1}{1-\beta}\left(\ln\left(A\left(1-\alpha\beta\right) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln\left(A\alpha\beta\right)\right)\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k \tag{50}$$

を得る。これが正確な Value Function であり、付随する Policy Function は

$$k' = \alpha\beta k^{\alpha} \tag{51}$$

である。

この例からわかるように、Value Function は手法としては単純であるが、収束が遅い。上記の例では lnk の係数は等比数列の和として表れ、その無限和が所望の Value Function となる。もう少し速く収束させる、または容易に Value Function を求める手法がいくつか開発されている。

1.5 Guess and Verify

もっとも単純なDPの解法はGuess and Verifyである。これは、Value FunctionをGuessし、その関数がBellman Equationを満たすことを確認する、すなわちVerifyするというものである。[4]これはValue Functionの形状についてある程度の知識があることが前提となる。残念ながら、この手法の応用範囲は狭く、Closed Formで解が存在するものに限られる。

再び、(18)を用いてGuess and Verifyを実践してみよう。効用関数が対数であることから、Value Functionも対数であるとGuessしてみよう。すなわち、

$$V(k) = E + F\ln k \tag{52}$$

ただし、EとFは定数である。ここで、このValue FunctionがBellman Equationを満たす、すなわち

$$E + F\ln k = \max_{k'} \ln\left(Ak^{\alpha} - k'\right) + \beta\left(E + F\ln k'\right) \tag{53}$$

であることをVerifyすることができればよい。最適化の一階条件は

$$0 = \frac{-1}{Ak^{\alpha} - k'} + \frac{\beta F}{k'} \tag{54}$$

である。したがって

$$k' = \frac{\beta F A k^{\alpha}}{1 + \beta F} \tag{55}$$

となる。これをBellman Equationに代入して整理すると

$$E + F\ln k = \ln\frac{A}{1+\beta F} + \alpha\ln k + \beta E + \beta F\ln\frac{\beta F A}{1+\beta F} + \alpha\beta F\ln k \tag{56}$$

これが恒等式であるとすると

$$F = \alpha + \alpha\beta F, \tag{57}$$

$$E = \ln\frac{A}{1+\beta F} + \beta E + \beta F\ln\frac{\beta F A}{1+\beta F}. \tag{58}$$

これをE,Fに関する連立方程式と考えると

$$F = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \tag{59}$$

[4] Long and Plosser(1983)はGuess and Verifyを用いてDynamic Programmingを解いている。

$$E = \frac{1}{1-\beta}\left(\ln \frac{A}{1+\beta F} + \beta F \ln \frac{\beta F A}{1+\beta F}\right) \tag{60}$$

を得る。E と F に関して解ききったので、この関数は Bellman Equation を満たすことがわかり、この Guess は正しかったことが証明されたことになる。

この手法が実際に応用可能なモデルは数えるほどしかなく、あまり実用的ではない。また、どのような関数を Guess するかに関しても決まっ手法はなく、一種の技法として考えるしかない。

1.6 Policy Function Iteration

これは Value Function の代わりに Policy Function を iterate する手法であり、Value Function よりも速く収束することが多いと言われている。別名 Howard's Policy Improvement Algorithm とも言われる。

1. まず、実行可能な Policy Function の候補

   $$u = h_0(x_0) \tag{61}$$

   を適当にとる。

2. つぎに、この Policy Function により得られる Value Function の候補を計算する。すなわち

   $$V_0(x_0) = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, h_0(x_t)) \quad s.t. x_{t+1} = g(x_t, h_0(x_t)) \quad \text{and } x_0. \tag{62}$$

3. 上で得られた Value Function の下で、新たに Policy Function を計算する。すなわち

   $$\max_u (r(x,u) + \beta V_0(x')) \quad s.t. x' = g(x,u) \tag{63}$$

   を解く。

4. また 1. から繰り返し、Policy Function があまり変化しなくなるまで続ける。

再び、(18) を用いて Policy Function Iteration を実践してみる。

1. まず、実行可能な Policy Function を適当に推測する。例えば、貯蓄性向が 1/2 であると仮定し
$$k_{t+1} = \frac{1}{2}Ak_t^{\alpha} \tag{64}$$
とする。

2. これを効用関数に代入し、生涯効用、すなわち Value Function の候補を計算する。
$$V_0\left(k_0\right) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln\left(Ak_t^{\alpha} - \frac{1}{2}Ak_t^{\alpha}\right) \tag{65}$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln\left(\frac{1}{2}Ak_t^{\alpha}\right) \tag{66}$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \left(\ln\left(\frac{1}{2}A\right) + \alpha \ln k_t\right) \tag{67}$$
ここで、
$$k_t = \frac{1}{2}Ak_{t-1}^{\alpha} \tag{68}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\alpha} A^{1+\alpha}k_{t-2}^{\alpha^2} \tag{69}$$
であることを利用して
$$k_t = \ln D + \alpha^t k_0 \tag{70}$$
ただし、D は定数である。したがって、
$$V_0\left(k_0\right) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \left(\ln\left(\frac{1}{2}A\right) + \alpha \ln D + \alpha^{t+1}\ln k_0\right) \tag{71}$$
$$V_0\left(k_0\right) = const + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k_0. \tag{72}$$

3. 上で求められた Value Function を用いて Bellman Equation に戻ると

$$V_0(k) = \max_{k'} \ln(Ak^\alpha - k') + \beta\left(const + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k'\right) \tag{73}$$

この一階条件を用いると

$$\frac{-1}{Ak^\alpha - k'} + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\frac{1}{k'} = 0 \tag{74}$$

したがって

$$k' = \alpha\beta Ak^\alpha \tag{75}$$

となり、一回の iteration で正しい解が得られたことになる。

Polify Function Iteration の方が収束が早いことを証明した研究は、筆者の知る限りない。しかしながら、筆者の経験からくる直感的理由は下記のようなものである。最適化問題を解くとき、Value Function が求まれば、Policy を求めることができる。同様に、Policy から Value Function を定義することも可能であり、数学的にはどちらを求めても同じ筈である。しかしながら、求める精度が同じであれば、例えば 0.0001 の精度で Value Function を求める場合と、0.00001 の精度で Policy を求める場合にかかる時間は後者のほうが短いケースが多い。Policy をごくわずか変更しても、Value の値は大きく変化してしまうことがある。Value の値は Policy の累積であるためである。逆をいうと、Value が求まれば、その近傍での Policy はほぼ同じものとなる。ある精度の Policy を求めることは、より高い精度の Value を求めることと同じになるのである。

2 数値計算: Discretization (本節は中間試験範囲には含まれない)

これまで紹介した Value Function Iteration、Guess and Verify、および Policy Function Iteration は、いずれも正しい解を手計算で得ることができた。しかしながら、これが可能だったのは各ステップで Value Function や Policy Function の候補を State Variable の関数として、Closed Form で表現することができたためである。残念ながら一般に Closed Form の

7 動的計画法

この章では動的計画法 (DP) のアイデアを説明します。DP はベルマン（R.E.Bellman) によって案出され、工学、経済学、その他の多くの分野において使用されてきました。線形計画法は線形関数の場合だけを取り扱うのに対して、動的計画法は非線形の関数、解析的な形になっていない関数も取り扱えます。しかし、一般的な数理計画問題に常に適用できるわけではなく、問題が多段決定問題、つまり、各段における決定の系列を求めるような問題に変換できれば、動的計画法によって解くことが可能です。動的計画法の特徴は、再帰方程式 (漸化式) を巧妙につくるところにあります。

DP の考え方を理解するため、まず、次の例を見ましょう。

例 7.1. 総額 3 単位の資金を四つのプロジェクトにどのように配分したら、最大の収益が得られるのかという問題を考えます。第 i プロジェクトに x_i 単位を投資した場合の収益 $g_i(x_i)$ は次のように与えられており、

	0	*1*	*2*	*3*
$g_1(x_1)$	*0*	*5.0*	*7.0*	*8.0*
$g_2(x_2)$	*0*	*4.0*	*6.0*	*6.5*
$g_3(x_3)$	*0*	*6.0*	*7.5*	*8.0*
$g_4(x_4)$	*0*	*7.0*	*8.0*	*8.4*

この問題は次のように定式化されます。

$$\begin{aligned} \max.\quad & f(x_1,x_2,x_3,x_4) = g_1(x_1)+g_2(x_2)+g_3(x_3)+g_4(x_4) \\ s.t.\quad & x_1+x_2+x_3+x_4 \le 3 \\ & x_i \ge 0,\ i=1,...,4. \end{aligned} \tag{7}$$

最大の収益が得るために、総額 3 単位の資金を四つのプロジェクトにどのように配分したらよいでしょうか。

DP の基本的考え方を説明するため、資金 c 単位、プロジェクト の個数 N であるような一般化した問題について議論します。このとき、上の問題は次の関数値 $f_N(c_N)$, (ここでは $c_N = c$) を求めることと同じです。

$$f_N(c_N) = \max_{x_1+x_2+\cdots+x_N \le c_N} \{g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_N(x_N)\}.$$

資金の配分方法の一つはベクトル $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ に対応し、これを政策と呼ぶことにします。また、関数値を最適にする政策を最適政策と言います。$N \ge 2$ のとき、

$$\begin{aligned} f_N(c_N) = & \max_{0\le x_N \le c_N} \{ \max_{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}\le c_N - x_N} \{g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_{N-1}(x_{N-1})+g_N(x_N)\}\} \\ & \max_{0\le x_N \le c_N} \{g_N(x_N) + \max_{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}\le c_N - x_N} \{g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_{N-1}(x_{N-1})\}\} \end{aligned} \tag{8}$$

となり、$f_N(c)$ の定義式を用いると、

$$f_{N-1}(c_N - x_N) = \max_{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1} \le c_N - x_N} \{g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_{N-1}(x_{N-1})\}$$

と表わされるので、上の式 (8) は

$$f_N(c_N) = \max_{0 \le x_N \le c_N} \{g_N(x_N) + f_{N-1}(c - x_N)\} \tag{9}$$

と書きかえ可能です。特に、$N = 1$ に対しては

$$f_1(c_1) = \max_{0 \le x_1 \le c_1} g_1(x_1) = g_1(c_1)$$

となり、上の問題 (7) を解くことは $f_N(c)$ についての方程式

$$\begin{aligned} & f_1(c_1) = g_1(c_1) \\ & f_N(c_N) = \max_{0 \le x_N \le c_N} \{g_N(x_N) + f_{N-1}(c_N - x_N)\} \quad (N \ge 2) \end{aligned} \tag{10}$$

を解くことと同じです。上の式 (10) は $f_N(c)$ に対する再帰方程式 (漸化式) で、最適性の原理を表しています。

最適性の原理: 決定の全系列にわたって最適化を行うためには、初期の状態と最初の決定がどんなものであっても、残りの決定は最初の決定から生じた状態に関して最適な政策を構成していなければならない

別の表現をすれば、「最適経路中の部分経路もまた最適経路になっている」ということを意味しています。

$f_N(c)$ を解くには、$f_{N-1}(c_N - x_{N-1}) = f_{N-1}(c_{N-1})$, $c_{N-1} = 0, 1, \ldots, c$ が分からなければなりません。式 (9) で N を $N-1$ としますと、

$$f_{N-1}(c_{N-1}) = \max_{0 \le x_{N-1} \le c_{N-1}} \{g_{N-1}(x_{N-1}) + f_{N-2}(c_{N-1} - x_{N-1})\}$$

となります。上の式で示すように、$f_{N-1}(c_{N-1})$ を計算するには、$f_{N-2}(c_{N-1} - x_{N-1}) = f_{N-2}(c_{N-2})$, $c_{N-2} = 0, 1, \ldots, c$ が分からなければなりません。以下同様に考えてみると、

$$\begin{aligned} f_2(c_2) &= \max_{0 \le x_2 \le c_2} \{g_2(x_2) + f_1(c_2 - x_2)\} \\ &= \max_{0 \le x_2 \le c_2} \{g_2(x_2) + f_1(c_1)\} \end{aligned} \tag{11}$$

となります。最終的に $f_1(c_1)$ が分かっていれば、上のプロセスを逆に辿っていけば、最適値 $f_N(c)$ を計算することができます。

次に再帰方程式にもとづいて最初の例 7.1 を解いてみます。

式 (11) にある $f_1(c_2 - x_2)$ において、$c_2 = 0, 1, 2, 3$ と $0 \le x_2 \le c_2$ より、$f_2(c_2)$ を計算するとき、$f_1(0)$、$f_1(1)$、$f_1(2)$、$f_1(3)$ を必要とします。これは手元に投資可能の金額それぞれ０単位、１単位、

２単位、３単位をプロジェクト１に投資するときの最大利益を計算することです。プロジェクト１に投資可能な金額を $c_1 = 0,1,2,3$ とします。$N = 1$ のとき、これらを計算しておきます。

$$c_1 = 0 \quad : \quad f_1(0) = 0, \quad x_1^* = 0$$

$$c_1 = 1 \quad : \quad f_1(1) = 5, \quad x_1^* = 1$$

$$c_1 = 2 \quad : \quad f_1(2) = 7, \quad x_1^* = 2$$

$$c_1 = 3 \quad : \quad f_1(3) = 8, \quad x_1^* = 3$$

$N = 2$ のとき、$f_2(c_2)$ を計算します。手元にある c_2 単位の金額をプロジェクト１、２に投資する場合の最大利益を計算します。$c_2 = 0,1,2,3$ より、f_2 のそれぞれの値が以下になります。ここで、上で計算された f_1 が使われています。

$$c_2 = 0 \quad : \quad f_2(0) = g_2(0) + f_1(0) = 0$$

$$x_2^* = 0, c_1 = 0$$

$$c_2 = 1 \quad : \quad f_2(1) = \max \begin{cases} g_2(1) + f_1(0) = 4 \\ g_2(0) + f_1(1) = 5^* \end{cases} = 5$$

$$x_2^* = 0, c_1 = 1.$$

$$c_2 = 2 \quad : \quad f_2(2) = \max \begin{cases} g_2(0) + f_1(2) = 7 \\ g_2(1) + f_1(1) = 9^* \\ g_2(2) + f_1(0) = 6 \end{cases} = 9$$

$$x_2^* = 1, c_1 = 1$$

$$c_2 = 3 \quad : \quad f_2(3) = \max \begin{cases} g_2(0) + f_1(3) = 8 \\ g_2(1) + f_1(2) = 11^* \\ g_2(2) + f_1(1) = 11^* \\ g_2(3) + f_1(0) = 6.5 \end{cases} = 11$$

$$x_2^* = 1, c_1 = 2.$$

$$x_2^* = 2, c_1 = 1.$$

同様の考え方で、$N = 3$ のとき

$$c_3 = 0 \quad : \quad f_3(0) = g_3(0) + f_2(0) = 0$$

$$x_3^* = 0, c_2 = 0$$

$$c_3 = 1 \quad : \quad f_3(1) = \max \begin{cases} g_3(0) + f_2(1) = 5 \\ g_3(1) + f_2(0) = 6^* \end{cases} = 6$$

$$x_3^* = 1, c_2 = 0.$$

$$c_3 = 2 \quad : \quad f_3(2) = \max \begin{cases} g_3(0) + f_2(2) = 9 \\ g_3(1) + f_2(1) = 11^* \\ g_3(2) + f_2(0) = 7.5 \end{cases} = 11$$

$$x_3^* = 1, c_2 = 1.$$

$$c_3 = 3 \quad : \quad f_3(3) = \max \begin{cases} g_3(0) + f_2(3) = 11 \\ g_3(1) + f_2(2) = 15^* \\ g_3(2) + f_2(1) = 12.5 \\ g_3(3) + f_2(0) = 8 \end{cases} = 15$$

$$x_3^* = 1, c_2 = 2.$$

$N = 4$ のとき

$$c_3 = 0 \quad : \quad f_4(0) = g_4(0) + f_3(0) = 0$$

$$x_4^* = 0, c_3 = 0.$$

$$c_4 = 1 \quad : \quad f_4(1) = \max \begin{cases} g_4(0) + f_3(1) = 6 \\ g_4(1) + f_3(0) = 7^* \end{cases} = 7$$

$$x_4^* = 1, c_3 = 0.$$

$$c_4 = 2 \quad : \quad f_4(2) = \max \begin{cases} g_4(0) + f_3(2) = 11 \\ g_4(1) + f_3(1) = 13^* \\ g_4(2) + f_3(0) = 8 \end{cases} = 13$$

$$x_4^* = 1, c_3 = 1.$$

$$c_4 = 3 \quad : \quad f_4(3) = \max \begin{cases} g_4(0) + f_3(3) = 15 \\ g_4(1) + f_3(2) = 18^* \\ g_4(2) + f_3(1) = 14 \\ g_4(3) + f_3(0) = 8.4 \end{cases} = 18$$

$$x_4^* = 1, c_3 = 2.$$

$f_4(3)$ より、最大収益は 18 になります。最適解は各プロジェクトへの投資の内訳ですので、上の計算を逆に辿って求めることができます。

$x_4^* = 1$、そのとき、残りの資金は２単位です。

$x_3^* = 1$、 そのとき、残りの資金は１単位です。

$x_2^* = 0$、 そのとき、残りの資金は１単位です。

$x_1^* = 1$。

以上をまとめますと資金の最適配分は次のようになります。

プロジェクト **1** に **1** 単位を投資、	得られる利益は **5** 単位
プロジェクト **2** に **0** 単位を投資、	得られる利益は **0** 単位
プロジェクト **3** に **1** 単位を投資、	得られる利益は **6** 単位
プロジェクト **4** に **1** 単位を投資、	得られる利益は **7** 単位

例 **7.2.** $c,\ a_1, ..., a_n$ は正の定数とする。条件

$$x_1, ..., x_n \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = c$$

のもとで関数 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ の最小値を求めよ。

$f_N(y)$ を N 個の変数に限定したときの問題の関数値：

$$f_N(y) = \quad \textbf{mininize} \ \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^2 \quad \textbf{subject to} \ \sum_{i=1}^{N} x_i = y,\ \ x_1, ..., x_N \geq 0$$

とする (ただし、$y \geq 0$) と、例 **7.2** で求める最小値は $f_n(c)$ となります。最適性の原理を用いると、次の方程式が得られます。

$$f_1(y) = a_1 y^2$$
$$f_N(y) = \min_{0 \leq x_N \leq y} \{a_N x_N^2 + f_{N-1}(y - x_N)\} \qquad (N \geq 2).$$

$N = 2$ のとき、

$$f_2(y) = \min_{0 \leq x_2 \leq y} \{a_2 x_2^2 + f_1(y - x_2)\} = \min_{0 \leq x_2 \leq y} \{a_2 x_2^2 + a_1 (y - x_2)^2\}.$$

ここで、

$$g(x_2) = a_2 x_2^2 + a_1 (y - x_2)^2$$

とおけば、

$$g'(x_2) = 2a_2 x_2 - 2a_1 (y - x_2).$$

よって、$g'(x_2) = 0$ から、

$$x_2 = x_2(y) = \frac{a_1 y}{a_1 + a_2} = \frac{1}{a_2} \frac{y}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}$$

が得られます。従って、$g(x_2)$ の最小値 $f_2(y)$ は

$$f_2(y) = a_2 (\frac{a_1 y}{a_1 + a_2})^2 + a_1 (y - \frac{a_1 y}{a_1 + a_2})^2 = \frac{y^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}$$

となります。しかも、この値は

$$x_1 = x_1(y) = y - x_2(y) = y - \frac{a_1 y}{a_1 + a_2} = \frac{a_2 y}{a_1 + a_2} = \frac{y}{a_1(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})}$$

$$x_2 = x_2(y) = \frac{y}{a_2(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})}$$

のときに達成されます。次に最適解の一般形式を帰納法で証明します。$N = n-1$ に対して

$$x_i(y) = \frac{y}{a_i(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}})}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

のとき、

$$f_{n-1}(y) = \frac{y^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}}}$$

が成りたつと仮定すると、$N = n$ の場合には

$$f_n(y) = \min_{0 \le x_n \le y} \{a_n x_n^2 + \frac{(y - x_n)^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}}}\}$$

となります。右辺の括弧内を $g(x_n)$ とおくと、

$$g'(x_n) = 2a_n x_n - \frac{2(y - x_n)}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}}}.$$

$g'(x_n) = 0$ から、

$$x_n(y) = \frac{y}{a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}$$

が得られます。したがって、$g(x_n)$ の最小値 $f_n(y)$ の値は

$$\begin{aligned} f_n(y) &= a_n\Big(\frac{y}{a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}\Big)^2 \\ &+ \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}}\Big(y - \frac{y}{a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}\Big)^2 \\ &= \frac{y^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \end{aligned}$$

となります。しかも、$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ の値に関しては

$$\begin{aligned} x_i = x_i(y - x_n(y)) &= \frac{1}{a_i(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}})}\Big(y - \frac{y}{a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}\Big) \\ &= \frac{y}{a_i(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})}, \qquad i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

となっています。したがって、例 **7.2** の最適値は $f_n(c) = \frac{c^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$、最適解は $x_i = x_i(c) = \frac{c}{a_i(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ となります。

> **例 7.3.** *0-1* ナップザック問題*:* 品物 $G_1, G_2 \ldots, G_n$ をナップザックに詰めてハイキングに出かけたい。すべての品物を詰めようとすると、品物の体積 a_i *(*$i = 1, \ldots, n$*)* の総和がナップザックの容量 b を越えてしまいます。それぞれの品物に対して価値 c_i *(*$i = 1, \ldots, n$*)* が与えられており、どの品物をナップザックに詰めていけば一番価値が高くなるかを考えたい。
> 『容量 y の中に詰める品物の候補を $G_1, \ldots, G_k$ に限定したときに得られる最大の価値』を $f_k(y)$ として、$f_k(y)$ に関する再帰方程式 *(*漸化式*)* を示しなさい。また、$n = 4$、$b = 10$ とし、c_j と a_j を以下のように設定して、$f_4(10)$ を求めなさい。
>
> | j | *1* | *2* | *3* | *4* |
> |---|---|---|---|---|
> | c_j | *1* | *3* | *5* | *9* |
> | a_j | *2* | *3* | *4* | *7* |

品物が $G_1, G_2 \ldots, G_n$ の n 個の場合、それぞれに変数 $x_1, \ldots, x_n$ を設定し、

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{品物 } G_j \text{をナップザックに詰めるとき} \\ 0, & \text{品物 } G_j \text{をナップザックに詰めないとき} \end{cases}$$

と定めます。これにより、この問題は以下のように定式化できます。

$$(P) \left| \begin{array}{ll} \textbf{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \textbf{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, n \end{array} \right. \tag{12}$$

ただし、係数 a_j, c_j $(j = 1, \ldots, n)$, b はすべて正の定数で

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > b$$

であるものとします。

ここで、$f_k(y)$ は、

$$\begin{aligned} f_k(y) = \max\{c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k : \ & a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k \le y, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \ (j = 1, \ldots, k)\} \end{aligned}$$

になります。この関数は各 $k = 1, \ldots, n$ と $y = 0, 1, \ldots, b$ について定義されます。特に、$f_n(b)$ はもと

のナップザック問題の最大値に一致します。$f_k(y)$ ($k=1,\ldots,n$ と $y=0,1,\ldots,b$) の間には、

$$f_1(y)=\begin{cases} 0 & y<a_1\text{のとき} \\ c_1 & a_1\leq y\text{のとき} \end{cases}$$
$$f_k(y)=\max\{f_{k-1}(y), f_{k-1}(y-a_k)+c_k\} \quad (k=2,3,\ldots,n)$$

が成立します。ただし、$y-a_k<0$ の時には、$f_{k-1}(y-a_k)=-\infty$ と仮定しています。$f_k(y)$ は、品物 G_k を持って行かないときの最大値 $f_{k-1}(y)$ と G_k を持って行くときの最大値 $f_{k-1}(y-a_k)+c_k$ の大きい方になっています。$f_4(10)$ の計算については、例 **7.1** と同様にやってみてください。

7.1 演習問題

演習問題 7.1. 3つの変数 x_1,x_2,x_3 はいずれも非負の整数とする。このとき、$2x_1+x_2+x_3\leq 7$ の条件のもとで、関数

$$2x_1^2+2x_2^2+x_3^2$$

を最大になるように、x_1,x_2 及び x_3 の値を定めよ。

演習問題 7.2. いま、5人の科学者を A、B 及び C のプロジェクトに割り付けようとしているが、科学者を各プロジェクトへそれぞれ x_A、x_B 及び x_C 人割り付けたとすると、その効果は、

$$f_A(x_A)f_B(x_B)f_C(x_C)$$

となるという。ここで、$f(x)$ なる関数は次の表によって、その値があたえられているという。効果を最大にさせるような科学者を各プロジェクトに配分する案を作りなさい。

科学者の数	効果関数		
	$f_A(x_A)$	$f_B(x_B)$	$f_C(x_C)$
0	1	1	1
1	2	3	2
2	5	6	3
3	8	9	5
4	15	12	7
5	30	20	10

演習問題 7.3. 制約条件 $x_1+x_2+\cdots+x_N=c, x_i\geq 0$ の下に

$$x_1x_2\cdots x_N$$

を最大にする $x_1,x_2,\cdots x_N, x_i\geq 0$ を求めよ。

演習問題 7.4. ある造船会社では、向こう *3* 期にわたって造船計画を立てなければならない。各期における需要造船隻数と造船能力隻数は表 *23*、*24* の通りである。この場合、明らかに需要隻数は造船能力を越えているので、残業などによる割増し作業と作りだめによる在庫によって需要を満たす計画を考えている。割増し作業による支出増は表 *25* の通りである。また、在庫による 1 隻を次期まで持ち越すごとに *2* 億円の在庫費用がかかる。最適な造船計画を動的計画法で求めよ。

表 23: 需要隻数

	1 期	2 期	3 期
隻数	2	4	9

表 24: 造船能力隻数

	1 期	2 期	3 期
隻数	5	4	3

表 25: 割増し作業支出増

能力を越えた造船隻数	1	2	3	4	5	6
支出増費用（億円）	3	9	15	22	30	35

演習問題 7.5. 世界で最大の銅生産国チリにある鉱業会社の生産性を考慮した 1 期の売上高を見積りたい。この会社には、掘削機 1 台と大型トラック複数台を 1 つの重機グループとして運営している。現在使用可能な重機グループは４つあり、それぞれを活用するには最低でも１０人、６人、４人、２人の労働者が必要である。銅鉱石の市場価格と 1 期中の採掘量を反映した上記の重機グループ当りの売上高はそれぞれ５、２、１、２単位である。

a. 現在日雇い労働者が１７人いるとすれば、1 期の最大の売上高はどのような最適化問題を解けば求まるか。

b. 動的計画法を用いて上記で定式化した問題を解け。

c. 日雇い労働者の人数が 9 人の時に、売上高は何単位になるか。