動学的最適化入門*

工藤教孝

2007 年 10 月 22 日

1　はじめに

ここではサーチ理論を理解するうえで不可欠な数学的ツールである動学的最適化の手法を簡単に解説する．無限期間の最大化問題に焦点を当て，2 つの手法を紹介する．ひとつは最適制御理論 (Optimal Control Theory) で，もうひとつはダイナミック・プログラミング (Dynamic Programming; DP; 動的計画法) である．数理的な証明よりもむしろ，この道具をいかに使えるようになるか，という点に力を注ぐ．DP の参考文献として Adda and Cooper (2004), Stokey and Lucas (1989), Sargent (1987), Ljungqvist and Sargent (2004), Dixit (1990), Lucas (1987) を，連続時間最適制御理論および連続時間 DP の参考文献として Léonard and Van Long (1992) と Kamien and Schwartz (1991) を挙げておく．

2　新古典派成長モデル

2.1　最適制御理論：ラグランジュ乗数法

ダイナミック・プログラミングの考え方を理解するために，最初に新古典派経済成長モデルを取り上げてみたい．本書が想定している読者，つまり大学院レベルのマクロ経済学のコースワーク経験者にとってはなじ

*この原稿は『サーチ理論』（今井・工藤・佐々木・清水，東京大学出版会 2007）の数学補論として執筆されたものであるが，サーチ理論学習者だけでなく，マクロ経済学など他の関連分野の学習にも役に立つように書かれている．この原稿を作成する際に山田知明氏 (立正大学経済学部) からコメントをいただいた．

みのモデルであろう．時間は離散的で経済を代表する家計は無限に生き，生涯効用を最大化させるように消費計画を立てる．貯蓄は資本市場を通じて資本蓄積となり，それが将来の生産拡大につながる．これが最も基本的かつ典型的な最適成長モデルの構造である．家計が直面する最大化問題を定式化すると，

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \tag{1}$$

subject to

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) \tag{2}$$

for $t = 0, 1, 2, ...$ で，初期値 k_0 は所与である．なお，資本ストック (または資本・労働比率) である k_t を状態変数 (state varible)，消費 c_t を操作変数 (control variable) と呼ぶ．このような最適成長モデルでは，家計は第 0 期にこの最大化問題に直面し，無限期間にわたる最適な消費計画を $t = 0$ 時点で計算してその後は計画通りに行動をとるという定式化になっている．なお，状態変数 k_t は t 時点では操作不可能であり，家計はこれを所与とみなすが，k_{t+1} は操作可能である．

この最大化問題に対応するラグランジュ関数 (Lagrangian) は

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \Lambda_t \left[f(k_t) - c_t - k_{t+1} \right]$$

または

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ U(c_t) + \lambda_t \left[f(k_t) - c_t - k_{t+1} \right] \right\}$$

のようになり，$\lambda_t \equiv \Lambda_t / \beta^t$ は制約条件に対応する乗数である．最大化の一階の条件は

$$\begin{aligned} U'(c_t) &= \lambda_t & (3) \\ \lambda_t &= \beta \lambda_{t+1} f'(k_{t+1}) & (4) \\ k_{t+1} &= f(k_t) - c_t & (5) \\ \lim_{t \to \infty} \beta^t \lambda_t k_{t+1} &= 0 & (6) \end{aligned}$$

で，最後の条件式は横断性条件 (transversality condition) と呼ばれている．(3) と (4) から

$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} = \beta f'(k_{t+1}) \tag{7}$$

を得る．この条件式はマクロ経済学でオイラー方程式 (Euler equation) と呼ばれる．一般に，ここで扱っているような動学的最適化問題では，解を定数の組み合わせで表記できるというような幸運はめったにない．つまり，closed-form solution や analytical solution(解析解) と呼ばれるようなものはほとんど得られないのである．しかし，ある非常に特定化された形の問題にはそのような解があることが知られており，ここではモデルを解いた気分になれるようにそのような特殊なケースのみ扱うことにする．生産関数を $f(k) = Ak^{\alpha}$，効用関数を $U(c) = \ln c$ のように特定化しよう．すると (7) と (5) は

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} \tag{8}$$

$$k_{t+1} = A k_t^{\alpha} - c_t \tag{9}$$

となる．

この最適化問題を解くために未定係数法というものを使おう．この方法は一般的に使えるというわけではないが，少なくともこれから解こうとしている問題を扱うには便利である．まず，最終的に得られる解が $c_t = \pi A k_t^{\alpha}$ のような形をしている，という山勘 (guess) が働いたとしよう．この勘は間違っているかもしれないが，すでに正しいということが知られているので説明を続ける．ゴールは係数 π の値をつきとめることである．この解を使って (8) を書き換えると $k_{t+1} = \beta\alpha A k_t^{\alpha}$ となる．これをさらに (9) に代入すると $c_t = (1-\beta\alpha)Ak_t^{\alpha}$ が得られる．こうして最適解が満たすべき条件を全て満たすような π を得ることに成功したので，最初の山勘は正しかったことになり，正確な closed-form solution が得られたことになる．ではなぜ $c_t = (1-\beta\alpha)Ak_t^{\alpha}$ を解と呼ぶことができるのだろうか．実際，初期値 k_0 が与えられると c_0 と k_1 の値が判明する．同様に，k_1 の値が判明すると c_1 を k_2 の値が分かる．つまり，$c_t = (1-\beta\alpha)Ak_t^{\alpha}$ が得られた結果，消費と資本ストックの列 $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ と $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ を完全に記述できることを意味する．従って，この動学的最適化問題は「解けた」のである．

2.2　ダイナミック・プログラミングによる解法

では次に，全く同じ最適成長モデルをダイナミック・プログラミングを使って解いてみよう．基本的な考え方は，無限期間ある計画期間のうちの任意の 2 期間を取り出して考察するというものである．ここで重要なのが状態変数と価値関数 (value function) である．過去の活動 (action)

は全て現在の状態 (state) という形で集約される．それを所与として現在行動をとるわけだが，その行動は現在の利得のみならず，将来の状態にも影響を与えるのである．

すでに前節で計算した解 $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ を目的関数に代入した値を $v\,(k_0)$ のように定義しよう．これが価値関数 (value function) である．厳密に言うと，価値関数とは最大化された生涯効用の割引現在価値で，その値は初期値 k_0 に依存する．では，ここから 1 期間過ぎたとしよう．すると，もしももう一度最大化問題を解くならば $\max\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t U(c_t)$ subject to (2) given k_1 と表すことができる．第 1 期以降の問題は全く同じなのでやはり解 $\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$ を得る．したがって，第 1 期にもう一度最適化問題を解いた場合の価値関数を $v(k_1)$ と定義できる．すると，第 0 期に家計が直面する問題を

$$v(k_0) = \max_{c_0}\{U(c_0) + \beta v(k_1)\} \tag{10}$$

subject to $c_0 + k_1 = f(k_0)$ と表現できるはずである．この解釈は，k_0 を所与に最適な消費計画を立てる価値 $v(k_0)$ は，第 0 期の消費と第 1 期以降最適な行動をとる結果得られるであろう価値 $v(k_1)$ の現在価値の和となるといえる．つまり $v(k_1)$ は来期以降に活動が継続される価値 (continutation value) を表している．

第 0 期と第 1 期の間だけでなく，任意の隣り合う 2 期間について (10) が成り立つので，価値関数は

$$v(k_t) = \max_{c_t}\{U(c_t) + \beta v(k_{t+1})\} \tag{11}$$

を満たす．ここで制約条件式は (2) である．(11) をベルマン方程式 (Bellman equation) と呼ぶ．一般に，ベルマン方程式は関数方程式 (functional equation) である．つまりベルマン方程式の解は数字ではなく関数 $v(k_t)$ そのものなのである．しかしながら，多くの経済学の問題にとって最終的な目的は価値関数について知ることではなく，むしろ意思決定ルール (decision rule) について知ることである．意思決定ルールの別名は政策関数 (policy function) で，これは $c_t = h(k_t)$ などのように，選択変数を状態変数の関数の形で表記する．つまり，現在の状態が与えられたとき，どのような行動をとるべきか，について知りたいのである．これがまさに動学的最適化問題における解なのである．

では，最適成長モデルの分析を進めよう．上のベルマン方程式は制約条件が付いているが，条件式を代入することで記述を単純化できる．c_t を

消去しても k_{t+1} を消去してもどちらでもかまわない．それぞれ

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{U(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta v(k_{t+1})\} \tag{12}$$
$$v(k_t) = \max_{c_t} \{U(c_t) + \beta v(f(k_t) - c_t)\} \tag{13}$$

どちらを使ってもよいが，ここでは (12) を使おう．選択変数についての最大化一階の条件は

$$U'(f(k_t) - k_{t+1}) = \beta v'(k_{t+1}) \tag{14}$$

である．包絡線条件 (envelope condition) という条件は，価値関数を状態変数で微分することで得られる．

$$v'(k_t) = U'(f(k_t) - k_{t+1}) f'(k_t) \tag{15}$$

これらを使うと再びオイラー方程式 $U'(c_t) = \beta U'(c_{t+1}) f'(k_{t+1})$ を得ることができる．すると，前節と同様に未定係数法を使って計算を進めることができる．例によって生産関数を $f(k) = Ak^\alpha$，効用関数を $U(c) = \ln c$ のように特定化しよう．前節同様に政策関数についての guess をしてもよいが、ここでは価値関数についての guess をしてみよう．価値関数を $\Phi_1 + \Phi_2 \ln k_t$ と予測して係数 Φ_1, Φ_2 を求めよう．(14) を書き換えると

$$\frac{1}{Ak_t^\alpha - k_{t+1}} = \beta\Phi_2 \frac{1}{k_{t+1}}$$

なので、$k_{t+1} = \beta\Phi_2(1+\beta\Phi_2)^{-1}Ak_t^\alpha$ となる．ここから $c_t = (1+\beta\Phi_2)^{-1}Ak_t^\alpha$ が分かり、さらにこれを (15) に代入すると $\Phi_2 k_t^{-1} = (1+\beta\Phi_2)\alpha k_t^{-1}$ となるので，$\Phi_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$ であることが分かる．すると政策関数と価値関数は

$$c_t = h(k_t) = (1 - \beta\alpha)Ak_t^\alpha$$
$$v(k_t) = \Phi_1 + \frac{\alpha}{1 - \beta\alpha} \ln k_t$$

を得ることができる．なお，もうひとつの係数 Φ_1 の導出はここでは省略する．興味のある読者は Sargent (1987) などを参照してほしい．

3　ダイナミック・プログラミング

3.1　不確実性のないケース

前節では最適成長モデルを使ってダイナミック・プログラミングを紹介したが，ここではもうすこし一般的に DP という分析ツールについて解説しよう．まずは不確実性のないケースをみていこう．

DP を理解するうえで最も重要な概念が状態 (state) であろう．その日の天候，技術水準，資産の量，雇用状態，そしてサンスポットなど，分析の対象に応じて状態変数は様々な形を取る．いま，s_t を状態変数 (state variable)，c_t を操作変数 (control variable) とする．なお，これらはスカラーである必要はなく，ベクトルと考えてもよい．状態変数の値は選択変数によって影響を受けるとし，それを，初期状態 s_0 は所与して

$$s_{t+1} = g(s_t, c_t) \tag{16}$$

for $t = 0, 1, 2, ...$ と表現しよう．これは資本蓄積方程式などに対応する．制約集合 $\{(s_{t+1}, s_t) : s_{t+1} \le g(s_t, c_t)\}$ はコンパクトな凸集合と仮定する．

各期の利得は状態変数と選択変数に依存すると仮定し，$r(s_t, c_t)$ と表す．r は凹関数であると仮定する．これは効用でも利潤でもよいのでここでは一般的に利得関数 (return function) と呼ぶことにしよう．$\beta \in (0, 1)$ を割引因子として，無限期間にわたる利得最大化問題を定式化すると

$$\max_{\{c_\tau\}_{\tau=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(s_t, c_t)$$

subject to (16) と表すことができる．この問題は，第 0 期に全ての期間の計画を立てる，つまり数値の列について解くことから，文献では流列問題 (sequence problem; SP) と呼ばれている．この問題に解があると仮定しよう．すると，最適解の下での目的関数の値は初期値 s_0 に依存し，この関係を

$$v(s_0) \equiv \max_{\{c_\tau\}_{\tau=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(s_t, c_t)$$

subject to (16) と表す．これを価値関数 (value function) と呼ぶ．

では，この価値関数を使って以下の問題

$$v(s_t) = \max_{c_t} \{r(s_t, c_t) + \beta v(s_{t+1})\} \tag{17}$$

subject to $s_{t+1} = g(s_t, c_t)$ を考察しよう．なお，制約条件式を (17) の中に代入して

$$v(s_t) = \max_{c_t} \{r(s_t, c_t) + \beta v(g(s_t, c_t))\} \tag{18}$$

のようにしても良いし，条件式 $s_{t+1} = g(s_t, c_t)$ を選択変数について解いてから利得関数に代入することで

$$v(s_t) = \max_{s_{t+1}} \{R(s_t, s_{t+1}) + \beta v(s_{t+1})\} \tag{19}$$

としてもよい．これらをベルマン方程式 (Bellman equation) と呼ぶ．Ljungqvist and Sargent (2004) は (18) を，Stokey and Lucas (1989) は (19) の形を採用している．DP の目的は，問題 (SP) の最適解を数値の流列 (sequence) として求める代わりに，最適な行動ルールを関数として得ることである．この行動ルールのことを政策関数 (policy function) と呼ぶ．ベルマン方程式は関数方程式 (functional equation; FE) となっており，つまり，方程式を満たす関数 v を解とするのである．

ベルマン方程式の解は価値関数 $v(s_t)$ であり，同時に対応する政策関数を得ることができる．経済学的に重要なのは政策関数を得ることである．(18) を用いた場合の政策関数は $c_t = h(s_t)$ で，(19) の場合は来期の状態変数そのものを選択する形なので政策関数を

$$s_{t+1} = g(s_t, c_t) = g(s_t, h(s_t)) \equiv \phi(s_t)$$

と表現しよう．ここで知りたいのは

1. ベルマン方程式に解は存在するのか，そしてその解は一意なのか．

2. ベルマン方程式の解は (SP) の解となっているのか．

ということである．

ここでは Stokey and Lucas (1989) で得れらた結果を紹介したい．最初に，(19) に対応する流列問題を書くと

$$\max_{\{s_{\tau+1}\}_{\tau=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t R(s_t, s_{t+1})$$

なので，最大化問題の一階の条件と TVC は

$$\begin{aligned} R_2(s_t, s_{t+1}) + \beta R_1(s_{t+1}, s_{t+2}) &= 0, t = 0, 1, 2, ... \quad (20) \\ \lim_{t\to\infty} \beta^t R_1(s_t, s_{t+1}) s_t &= 0 \quad (21) \end{aligned}$$

である．なお，R_1, R_2 はそれぞれ利得関数を第一要素に関して偏微分した導関数と第二要素に関して偏微分した導関数を表す．(20) はオイラー方程式である．オイラー方程式 (20) と横断性条件 (21) を満たすような流列 $\{s_t\}_{t=0}^{\infty}$ は流列問題 (SP) の解であることが知られている．

今度は同じ問題をベルマン方程式 (19) で表そう．すると，

1. ベルマン方程式 (19) を満たすような連続関数 v が一意に存在し，v は時間に依存しない (time-invariant)．

2. 政策関数 $\phi(s)$ は時間に依存せず,

$$v(s) = R(s, \phi(s)) + \beta v[\phi(s)]$$

を満たす．政策関数は一意かつ連続である．

3. $s_{t+1} = \phi(s_t)$ を満たす流列 $\{s_t\}_{t=0}^{\infty}$ は流列問題 (SP) の一意解である．

詳しくは Stokey and Lucas (1989) を参照のこと．なお，すでに前節で見たように，ベルマン方程式からオイラー方程式を導出することもできる．ベルマン方程式 (19) における最大化一階の条件は

$$R_2(s, \phi(s)) + \beta v'(\phi(s)) = 0$$

で，包絡線条件 (envelope condition) は

$$v'(s) = R_1(s, \phi(s))$$

である．これらを書き換えるとオイラー方程式になる．

ここで一つ注意をしておくと，DP は非常に強力な分析ツールではあるが，動学的最適化問題に常にそのまま使えるわけではない．経済分析をする上で特に重要なのが (1) 問題が再帰的 (recursive) になっているかどうかという点と (2)r が有界 (bounded) であるかどうか，という 2 点である．時間に直接依存する項が問題に含まれると (1) を満たさなくなるが，これは状態変数の再定義などによって回避可能な場合がある．また，経済学で用いる効用関数には (2) が満たされない場合も多い．それでも DP を応用できる場合が多くあることが知られてる．詳しくは Stokey and Lucas (1989) を参照のこと．また，Alvarez and Stokey (1998) は r が有界でない場合でも，r が一次以下の同次関数で制約が一次同次であれば DP を使えることを示した．

解の存在と一意性が保障されたとして，ではどのようにしてその解を導出すればよいのだろうか．大きく分けると 3 つある．

1. Eular Equation
2. Guess and Verify
3. Iteration

最初の方法はベルマン方程式からオイラー方程式を導出するもので，これは本質的にはラグランジュ乗数法と同じである．この場合はオイラー方程式に横断性条件を加えて解を求めることになる．分析の対象が定常状態だけであればオイラー方程式のみで十分である．

次の方法は Guess and Verify と呼ばれているもので，直訳は，山勘と確認．これは，価値関数または政策関数の形についてある程度見当をつけて，それを最大化一階の条件や包絡線条件などの情報とつき合わせて真の関数を求めるという方法である．もちろん常にこの方法が使えるというわけではないが，これが使える場合は手計算で価値関数や政策関数を得ることができるというメリットがある．

最後は iteration．繰り返し近似である．ほとんどの動学的最適化問題では analytical solution を得られない．つまり，手計算で得られる形をした解がそもそもないのである．その場合は数値計算に頼る必要がある．数値計算を許すならば，ベルマン方程式の解を得る方法は非常に簡単である．存在証明で使う縮小写像定理 (contraction mapping theorem) によると，ベルマン方程式を繰り返し近似していくといずれ真の価値関数になることが知られている．具体的には，最初に適当に価値関数を値を定めてそこからスタートさせる．価値関数の 0 回目の近似値を v_0 とし，例えばそれに 0 という値を与える．そのうえでベルマン方程式の右辺の最大化問題を解き，最大化された利得関数の値に 0 を加えたものを次の近似値 v_1 とするのである．こんどは v_1 を使ってベルマン方程式の右辺の最大化問題を解いてその次の近似値を得る．このプロセスを繰り返すと真の価値関数 $v(s)$ に収束していくことを contraction mapping theorem は保障してくれるのである． このような数値的な解法については Ljungqvist and Sargent (2004) や Judd (1998) を参照のこと．

第 2 節で分析した最適成長モデルでは状態変数が連続変数であった．つまり考慮すべき状態の数が無限にあるわけで，これがベルマン方程式の解を手計算できなくさせる要因でもあったのだが，分析の対象によっては状態変数は離散的でかつ有限になってくれることもあり得る．ここでは非常に簡単に計算できるように状態の数が 2 つであるような例を挙げたい．

ある家計が直面する問題を考えよう．計画期間は無限で，利得に影響のある状態は 2 つだけである．一つは雇用されているという状態 (employed) で，状態変数は $s = e$ となる．もう一つの状態は失業 (unemployed) で，状態変数を $s = u$ と表す．選択変数も極めて単純である．この家計は次

の期の状態 s_{t+1} を自ら決めると考える．つまり，$s_{t+1} = g(s_t, c_t) = c_t$ である．利得はその期の状態にのみ依存し，$s_t = e$ ならば $y_t = 2$ で，$s_t = u$ ならば $y_t = 1$ であると仮定する．目的関数は $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t$ であり，家計はこれを最大化するように来期働くかどうかを決めている．もちろんこんな問題はDPを使うまでもなく，家計は「毎期働く」という選択をとることは自明である．これをDPで考えてみよう．ベルマン方程式を書くと

$$v(s_t) = \max_{s_{t+1}} \{y_t + \beta v(s_{t+1})\} \tag{22}$$

subject to $y_t = 2$ if $s_t = e$ and $y_t = 1$ if $s_t = u$ という形になる．価値関数は状態に依存し，今回の問題ではその状態がたった2つなので，(22)を次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} v(e) &= \max\{2 + \beta v(e), 2 + \beta v(u)\} \\ v(u) &= \max\{1 + \beta v(e), 1 + \beta v(u)\} \end{aligned}$$

さらに単純化できて，

$$v(e) = 2 + \max\{\beta v(e), \beta v(u)\} \tag{23}$$
$$v(u) = 1 + \max\{\beta v(e), \beta v(u)\} \tag{24}$$

となる．(24)を(23)から引くと $v(e) - v(u) = 1 > 0$ を簡単に示すことができる．つまり，状態 e の方が状態 u よりもよいので家計の最適な選択，つまり政策関数 (policy function) は $c_t = h(s_t)$ で，その中身は

$$h(s_t) = \begin{cases} e & \text{if } s_t = e \\ e & \text{if } s_t = u \end{cases}$$

となる．もちろんこれは自明である．なお，価値関数は $v(e) = 2/(1-\beta)$ と $v(u) = (1+\beta)/(1-\beta)$ のように計算できる．

3.2 不確実性のあるケース

　ここからは不確実性の環境にDPを応用する．このような確率的ダイナミック・プログラミング (stochastic dynamic programming) について詳しいのは，例えばStokey and Lucas (1989) であるがLucas (1987) も大変参考になる．不確実性のある環境でも基本的な考え方は同じである．状

態変数に対応する最適な選択変数の値を知りたいのである．不確実性がある場合の最適な計画のことを特に contingency plan と呼ぶ．

確率変数 ε_t の分布は分布関数 $G(\varepsilon)$ が与えるとし，状態変数 s_t は s_0 を所与として次のように推移すると仮定しよう

$$s_{t+1} = g(s_t, c_t, \varepsilon_t) \tag{25}$$

for $t = 0, 1, 2, ...$ つまり，状態変数は確率ショックにも影響を受けると考える．E_t を期待値の演算記号とすると，ベルマン方程式は

$$v(s_t) = \max_{c_t} \{r(s_t, c_t) + \beta E_t v(s_{t+1})\} \tag{26}$$

のように書き表せる．もしも確率変数 ε_t が連続変数ならば，

$$v(s_t) = \max_{c_t} \left\{ r(s_t, c_t) + \beta \int v(g(s_t, c_t, \varepsilon_t)) dG(\varepsilon_t) \right\} \tag{27}$$

のように書くこともできる．

ここでも，確率的 DP を使って自明な問題を解いてみよう．状態は晴れ $(s = e)$ と雨 $(s = u)$ の 2 つである．選択変数は傘を持つか $(c_t = y)$，持たないか $(c_t = n)$ である．利得も単純で，$r(u, y) = r(e, n) = 1$ および $r(e, y) = r(u, n) = -1$ である．つまり，雨で傘を持つ場合と晴れで持たない場合の利得が 1 で，雨なのに傘を持たない場合と晴れなのに持つ場合が -1 の利得となる．家計の目的は $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(s_t, c_t)$ を最大化させることである．ここでは状態変数 (天気) を観測した後で傘を持つかどうか選べるので，解は自明である．つまり，雨なら傘を持つし，晴れなら持たない．一応定式化してみよう．次の期に晴れる $(s_{t+1} = e)$ 確率が p で，この確率は現在の状態に依存せず時間を通じて同じだと仮定しよう．すると

$$E_t v(s_{t+1}) = pv(e) + (1 - p)v(u) \tag{28}$$

なので，ベルマン方程式 (26) は

$$\begin{aligned} v(e) &= \max \{r(e, y) + \beta E_t v(s_{t+1}), r(e, n) + \beta E_t v(s_{t+1})\} \\ v(u) &= \max \{r(u, y) + \beta E_t v(s_{t+1}), r(u, n) + \beta E_t v(s_{t+1})\} \end{aligned}$$

となる．さらに書き換えると

$$\begin{aligned} v(e) &= \max \{-1, 1\} + \beta[pv(e) + (1 - p)v(u)] \\ v(u) &= \max \{1, -1\} + \beta[pv(e) + (1 - p)v(u)] \end{aligned}$$

となる．したがって，政策関数 (policy function) は $c_t = h\left(s_t\right)$ で，関数の中身は

$$h(s_t) = \begin{cases} n & \text{if } s_t = e \\ y & \text{if } s_t = u \end{cases}$$

である．自明な結果であるが，厳密に示すことができた．価値関数は

$$\begin{aligned} v(e) &= 1 + \beta\left[pv(e) + (1-p)v(u)\right] \\ v(u) &= 1 + \beta\left[pv(e) + (1-p)v(u)\right] \end{aligned}$$

より，$v(e) = v(u) = 1/(1-\beta)$ である．状態変数の取り得る値それぞれに対応して最適な行動を発見するというのがここでの基本的アイデアである．

ここでは，状態変数である天気を観測した後で傘を持つかどうか選べるので解は確率分布に依存しなかったが，例えば折りたたみ傘をかばんに入れて出勤するかどうか決めるという問題の場合，事前に傘を持つかどうか決める必要がある．そのようなケースでは，かさを持っているかどうかは状態変数として扱う必要がある．そして来期の状態，つまり折りたたみ傘を持って出勤するかどうかを決めるという問題を解く必要があり，この場合には天気の分布が decision rule に影響を与えることになる．

4 連続時間モデル

4.1 最適制御理論

連続時間モデルにおける最適制御問題を考えよう．これは離散時間モデルにおける流列問題に対応する．離散時間モデルでは目的関数を最大化するような数列を得ようとしたのに対し，連続時間モデルでは経路を得ようとする点が特徴である．c_t を t 時点における選択変数，s_t を状態変数，そして $\dot{s} = ds/dt$ とする．連続時間モデルでは添え字 t を省略することが多い．目的関数を $F(c, s, t)$，状態変数の推移を表す遷移方程式を $\dot{s} = G(c, s, t)$ とする．状態変数の初期値を s_0 とすると，最大化問題は

$$\max \int_0^\infty F\left(c, s, t\right) dt \tag{29}$$

subject to $\dot{s} = G\left(c, s, t\right)$ である．このような問題を解く場合，離散時間モデルではラグランジュ関数を利用したが，連続時間モデルではハミル

トン関数 (Hamiltonian，またはハミルトニアン) を利用する．この最大化問題に対応するハミルトニアンは

$$H \equiv F(c,s,t) + \Lambda G(c,s,t) \tag{30}$$

である．ここで，Λ_t のことを共益変数 (costate variable) と呼ぶ．最大化の必要条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &= 0, & (31)\\ \dot{s} &= \frac{\partial H}{\partial \Lambda} = G(c,s,t) & (32)\\ \dot{\Lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial s} & (33) \end{aligned}$$

である．横断性条件 (transversality condition) は

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda s = 0 \tag{34}$$

と書ける．以上の条件式を満たす c_t の経路 (離散時間では数列) が最大化問題の解となることが知られている．なお，ここで登場したハミルトニアンは特に，現在価値ハミルトニアン (present value Hamiltonian) と呼ばれる．

経済学で登場する動学的最適化問題の多くは，時間に関して分離可能な目的関数を持ち，さらに状態変数の推移を決める動学方程式は自律系 (autonomous)，つまり時間に直接影響を受けないものになっている．そのような場合はハミルトニアンを再定義することで，すこし計算を楽にすることができる．

まず，目的関数を $F(c,s,t) = e^{-rt}f(c,s)$ と定義しよう．ここで r は割引率である．さらに，遷移方程式は自律系，つまり $\dot{s} = G(c,s,t) = g(c,s)$ だとしよう．すると，最大化問題を

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} f(c,s)\, dt \tag{35}$$

subject to $\dot{s} = g(c,s)$ と書き換えることができる．$\lambda = e^{rt}\Lambda$ と costate variable を再定義すると新しいハミルトニアンを

$$\tilde{H} \equiv e^{rt} H = f(c,s) + \lambda g(c,s) \tag{36}$$

と定義できる．これを時価ハミルトニアン (current value Hamiltonian) と呼ぶ．

時価ハミルトニアンに対応する最大化必要条件は

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial c} = 0, \tag{37}$$

$$\dot{s} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda} = g\left(c, s\right) \tag{38}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} + r\lambda \tag{39}$$

で，横断性条件は

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} \lambda s = 0 \tag{40}$$

である．

4.2 連続時間 DP

同じ問題を今度は DP を使って分析しよう．離散時間 DP から連続時間 DP に変換する方法は『サーチ理論』第 1 章で紹介しているが，ここでは別の方法を紹介する．最大化問題は

$$\max \int_{t_0}^{\infty} F\left(c, s, t\right) dt \tag{41}$$

subject to $\dot{s} = G(c, s, t)$ なので，計画の初期時点 t_0 と状態変数の初期値 $s(t_0) = s_0$ を与えると解が得られる．その値を価値関数で表すと

$$J(t_0, s_0) = \max_c \int_{t_0}^{\infty} F(c, s, t) dt \tag{42}$$

である．これは c の流列を求める問題であるが，DP では，これをある瞬間とそれ以降とに分けて考える．連続時間なので，Δt という単位時間を考える．すると，

$$J(t_0, s_0) = \max_c \left\{ \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} F(c, s, t) dt + J(t_0 + \Delta t, s_0 + \Delta s) \right\} \tag{43}$$

と書き換えることができる．ここで，第 1 項目の積分を

$$F(c, s, t)\Delta t \tag{44}$$

で近似し，第 2 項目をテイラー展開により

$$J(t_0, s_0) + J_1(t_0, s_0)\Delta t + J_2(t_0, s_0)\Delta s + O(\Delta t) \tag{45}$$

とする．なお，最後の項は残差をまとめた部分で，$\lim_{\Delta t \to 0} O(\Delta t)/\Delta t = 0$ である．(44) と (45) を (43) に代入して，全体を Δt で割り，最後に $\Delta t \to 0$ とすると，

$$0 = \max_{c} \{F(s_0, c, t_0) + J_1(t_0, s_0) + J_2(t_0, s_0)\dot{s}\} \tag{46}$$

を得る．これが一般性の高い書き方であるが，経済学では，目的関数が時間に関して分離可能で，状態変数の推移式が自律系であることが多いので，ハミルトニアンの時と同様 $F(s, c, t) = e^{-rt} f(s, c)$ および $\dot{s} = g(s, c)$ として分析しよう．すると，

$$\begin{aligned} J(t_0, s_0) &= \max_{c} \int_{t_0}^{\infty} e^{-rt} f(c, s) dt \\ &= e^{-rt_0} \max_{c} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} f(c, s) dt \\ &= e^{-rt_0} \max_{c} \int_{0}^{\infty} e^{-r\tau} f(c, s) d\tau \end{aligned}$$

である．なお，$\tau = t - t_0$ と定義した．ここで

$$V(s_0) = \max_{c} \int_{0}^{\infty} e^{-rt} f(c, s) dt \tag{47}$$

と定義すると，これは，どの時点に計画を立てているのか，は無関係となり，価値関数が状態変数のみに依存する形になる．すると，

$$J(t_0, s_0) = e^{-rt_0} V(s_0) \tag{48}$$
$$J_1(t_0, s_0) = -re^{-rt_0} V(s_0) \tag{49}$$
$$J_2(t_0, s_0) = e^{-rt_0} V'(s_0) \tag{50}$$

これらを使って (46) を書き換えると，最終的に

$$rV(s) = \max_{c} \{f(s, c) + V'(s) g(s, c)\} \tag{51}$$

を得る．

　では，連続時間 DP の応用問題として，『サーチ理論』第 1 章で分析した効率配分問題を分析しよう．第 1 章 3.4 節同様，効率配分問題は

$$\max_{u,\theta} \int_{0}^{\infty} e^{-rt} \left[p(1-u) + zu - c\theta u\right] dt \tag{52}$$

subject to $\dot{u} = \delta(1-u) - \theta q(\theta) u$ である．u についての遷移式があるので，u を状態変数として扱い θ を選択変数として (51) を応用すると，

$$rV(u) = \max_{\theta} \{p(1-u) + zu - c\theta u + V'(u) \left[\delta(1-u) - \theta q(\theta) u\right]\} \tag{53}$$

を得る．Shimer (2004) に従ってこれを Guess and Verify の手法で解こう．まず，価値関数を $V(u) = A + Bu$ としよう．すると，θ に関する最大化一階の条件は

$$-cu - Bu\left[q(\theta) + \theta q'(\theta)\right] = 0 \tag{54}$$

で，包絡線条件は

$$rB = -p + z - c\theta - B\delta - B\theta q(\theta) \tag{55}$$

である．これらの条件式から B を消去して書き換えると

$$(1-\eta(\theta))(p-z) = \frac{r+\delta+\theta q(\theta)\eta(\theta)}{q(\theta)}c \tag{56}$$

$$\eta(\theta) = -\frac{\theta}{q(\theta)}q'(\theta) \tag{57}$$

を得る．問題が再帰的になっている場合はハミルトニアンでも連続時間 DP でも同じ条件式を得ることができるのである．第 1 章 3.4 節同様，$\eta(\theta) = \beta$ の時，すなわち Hosios 条件が満たされているときに最適解と市場均衡が一致する．

参考文献

[1] Jérôme Adda and Russell Cooper (2004) Dynamic Economics, MIT Press.

[2] Fernando Alcvarez and Nancy Stokey (1999) "Dynamic Programming with Homegeneous Functions," Journal of Economic Theory 82, 167-189.

[3] Avinash Dixit (1990) Optimization in Economic Theory, Oxford University Press.

[4] Kenneth Judd (1998) Numerical Methods in Economics, MIT Press.

[5] Morton Kamien and Nancy Schwartz (1991) Dynamic Optimization, North-Holland.

[6] Daniel Léonard and Ngo Van Long (1992) Optimal Control Theory and Static Optimination in Economics, Cambridge University Press.

[7] Lars Ljungqvist and Thomas Sargent (2004) Recursive Macroeconomic Theory, MIT Press.

[8] Robert Lucas (1987) Models of Business Cycles, Blackwell.

[9] Thomas Sargent (1987) Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press.

[10] Robert Shimer (2004) "The Planning Solution in a Textbook Model of Search and Matching: Discrete and Continuous Time," mimeo.

[11] Nancy Stokey and Robert Lucas, with Edward Prescott (1989) Recurve Methods in Economic Dynamics, Harvard University Press.