経済数学入門
— ラグランジュ乗数法をきっちり勉強 —

丹野忠晋*

2000年8月24日

1 はじめに

このノートは自分が経済数学を学んで不満に感じた点や曖昧な点をはっきりさせることを目的としています．そして，このノートを読んだ人が経済数学を勉強するときに役に立つことができれば幸いです．詳しい証明よりも定理の内容を正確に把握することが必要だと思います．自分で経済問題を解く時は既存の方法を正確に理解していなければなりません．特に，経済数学では直感的な説明に主な力点を置いたり，逆に厳密な証明に力点を置いたり両極端です．前者は定理の前提をはっきり示すことに成功していません．後者は厳密にやろうとするあまり大事な数学的なセンスを身につける機会を奪っています．また，自分の力量を超えたことをやろうとするあまり，現代数学に対する無知によりトンデモな間違いを犯している場合もあります.「直感的な説明」や「厳密な証明」は正確な理解に役に立ちますが，けれども実際に例を用いて試してみてその経済学が応用している定理の能力を試して見るのがいいと思います．ここでは例や論理を用いて経済問題を解くときにラグランジュ乗数定理をどのように使えばいいのか，その適応範囲をはっきり理解することを目指します．また，経済学の応用では位相に関する取り扱いが必要になります．ほとんどのテキストでは位相的な概念をラグランジュ乗数法の説明では省いています．本論ではユークリッド位相に限定して考えることにします．そうすることによって一般位相

*一橋大学大学院経済研究科 (pg00306@srv.cc.hit-u.ac.jp).

までさかのぼって勉強することなく，ラグランジュ乗数法が適応できないケースも明瞭に分類することができます.

このノートは品川陽子氏と坂本真紀氏からの質問から躓きの元を書き表わすことが必要だと考えて書きました．彼女らと貴重なコメントを下さった石川竜一郎氏，林行成氏に感謝します．当分の間は完成することはありませんが，何か些細な事でもコメントがありましたらお知らせ下さい．できるだけ反映したいと思います.

2　条件付き最大・最小化問題

制約条件付き最大化問題を考えましょう．選択変数 $\boldsymbol{x}$ を上手く選んで目的関数 f の関数値 $f(\boldsymbol{x})$ をある制約の下で最大にするとします．選択変数 $\boldsymbol{x}$ が取りうる範囲は X とします．このとき f の定義域は X でなければなりません．というのは，X からどんな点 $\boldsymbol{x}$ も選ぶことができるのであるから，その点での評価 $f(\boldsymbol{x})$ が定まっていなければならないからです．また変数は 2 個以上である $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geq 2)$ とします．一般には $X \subset \mathbb{R}^n$ であるけれども，何も指定しない場合は $X = \mathbb{R}^n$ とします．普通の教科書では後者の場合のみを考えているようです．ここでは $X \subset \mathbb{R}^n$ の場合を考えよう．そうすることは 2 つのメリットがあります．経済問題を考えて見ると, 効用 $u(x_1, x_2)$ を最大化[1]する場合 1 財と 2 財の量の組み (x_1, x_2) は非負の値を取ることを念頭に置いています．つまり，財の負の消費をすることはできないのです．この消費者問題を分析するためには $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X を考えた方がいいでしょう．第 2 にラグランジュ乗数定理は X が $\mathbb{R}^n$ の開集合[2]であれば証明できます．もちろん，$\mathbb{R}^n$ は開集合であるので一般ケースは $\mathbb{R}^n$ の場合を特殊ケースとして含んでいます.

$\boldsymbol{x}$ が動く範囲の制約条件を考えよう．それをある関数 $g : X \to \mathbb{R}$ についてその値 $g(\boldsymbol{x})$ が常に一定の値 $c \in \mathbb{R}$ となるように設定します．そうすると最大化問題は次のようになります.

$$\max_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{制約条件 } g(\boldsymbol{x}) = c.$$

[1]財がごみや公害のような悪 bads であれば最小化問題になります.

[2]開集合は後で定義します．始めて聞く方はある性質を持つ $\mathbb{R}^n$ の部分集合とでも取りあえず理解して下さい.

英語を用いて

$$\max_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

$$\text{subject to } g(\boldsymbol{x}) = c \tag{2}$$

と書いたりします．ここでパラメータ c は $c \in g(X)$ を満たすことが通常仮定されています．つまり，例えば，$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ として $c = -1$ のような実数の範囲に $g(\boldsymbol{x}) = c$ の解がない場合は普通考えません．明らかに選ぶべき対象がないのですから最大化問題の解がないのです．解がない問題を分析してもしょうがありません．けれども，この条件がなくても矛盾を生じる訳ではありません．というのは，すべての必要条件や十分条件は解の存在性を仮定していますから，もし存在しない場合は仮定が偽ですか正しい命題です．ですから普通の教科書ではこのは書きません．しかし，マニアックなこのノートでははっきりと書いておきましょう．

$$\text{制約付最大化問題の仮定:} \qquad c \in g(X). \tag{3}$$

同様に最小化問題は，

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{subject to } g(\boldsymbol{x}) = c$$

と書くことができます．最大化問題と同様に仮定 (3) を採用します．

3　効用最大化問題

経済学で最も馴染みのある問題は次の消費者の効用最大化問題です．x_1 を消費財 1 の量，および x_2 を消費財 2 の量とします．ある消費者がこの 2 財の量 (x_1, x_2) を消費したときに得られる効用を $u(x_1, x_2)$ とします．ただし，u は消費者の効用関数です．ここで市場で第 1 財の価格 p_1, および第 2 財の価格 p_2 が成立しているとします．この市場では消費者のどんな行動も市場で成立する価格には影響を与えないと仮定します．ここで消費者の効用最大化問題とは彼が m 円の所得を持っているとき，彼の効用を最大化する消費財の各々の量 (x_1, x_2)

は何かということです．この問題を (1) や (2) と同じ方法で書き表すと

$$\max_{(x_1,x_2)\in X} u(x_1,x_2) \tag{4}$$

$$\text{subject to } p_1x_1+p_2x_2=m \tag{5}$$

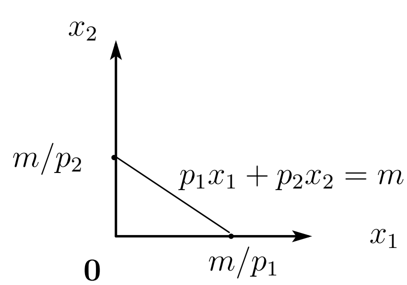
となります．ここで $f=u$，$g(x_1,x_2)=p_1x_1+p_2x_2$, $c=m$ となります．m は所得ですから非負，p_1 と p_2 は価格ですから非負です．しかし，所得が 0 ならば何も買えない，価格が 0 ならばその財はいくらでも買えますからつまらない問題です．取るに足らない状況を除くためにこれらのパラメータ (m,p_1,p_2) は正であるとします．

では X は何でしょうか？消費する財の量ですから正かまたは 0 です．つまり, $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\geq 0 \text{ かつ } x_2\geq 0\}$ となります．$\mathbb{R}$ は実数全体を, $\mathbb{R}^2$ は 2 つの実数の組み (x_1,x_2) 全体を表わします．ここで $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\geq 0 \text{ かつ } x_2\geq 0\}$ の省略法として $\mathbb{R}^2_+$ を用います．同様に，$\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ かつ } x_2 > 0\}$ を $\mathbb{R}^2_{++}$ で表わします．

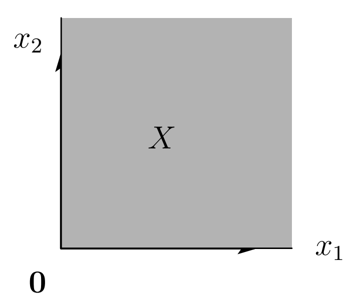
この X が $\mathbb{R}^2_+$ のときにパラメータの条件 $m>0$, $p_1>0$, $p_2>0$ から制約付最大化問題の仮定 (3) が成り立ちます．仮定を消費者の問題に書き換えると

$$\exists\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+ \quad p_1x_1+p_2x_2=m$$

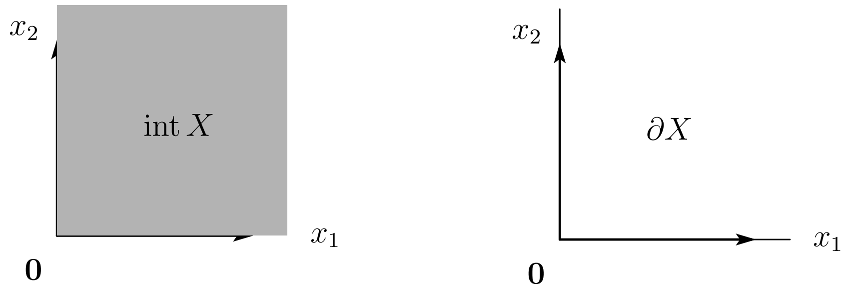
が成立しています．次の図のようにどんなに所得が小さくても第 1 象現に上の仮定を満たす財の量 (x_1,x_2) が出てきます．



f と g の定義域 X を図示すると以下のようになります．



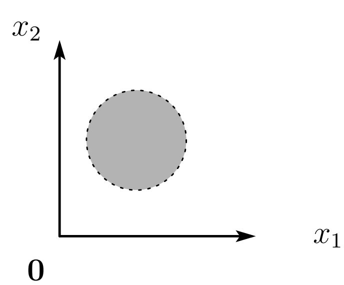
ラグランジュ乗数法を上手く使うためには X の部分集合を内部と境界に分ける必要があります．X の内部を $\operatorname{int} X$, その境界を ∂X と表わすと次のように図示できます.



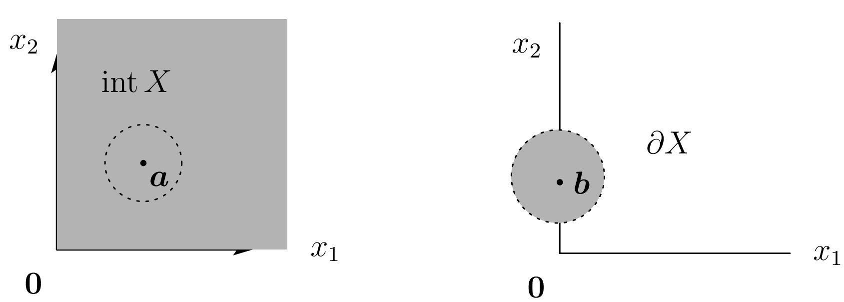
X の境界は x_1 軸と x_2 軸の正の部分と原点からなり，X の内部は X からその境界を引いた部分です．図から見ると内部と境界は直感的に明らかですが，数学的な定義を示してそこからこの図形になることを示した訳ではありません．次に内部と境界の定義を示しましょう.

4　選択変数の定義域の分類—内部と境界—

内部の点を内点，境界の点は境界点とよびます．これを数学的にどう定式化したらよいでしょか？基本的なアイディアを定式化するために開円盤を定義します．ある点 $\boldsymbol{x}$ を中心とする円を描きます．その円は円周を含まないことにします．このような円を開円盤あるいは開球とよびます.



この開円盤を用いて内点と境界の基本的なアイディアは次の図で説明できます.
(見にくいので境界の方は座標軸を描いていません．)



点 $\boldsymbol{a}$ は内点，点 $\boldsymbol{b}$ は境界点です．そこを中心とする半径の十分小さな開円盤を描きます．この 2 つの開円盤から内点と境界点の明らかな違いが分かります．この内点を中心とする円盤は，すっぽりと X に含まれます．一方，この境界点を中心とする円盤は，すっぽりと X に含まれることはなく，X に含まれる部分と X の補集合 X^c に含まれる部分が出てきます．これが彼らの定義です．つまり，点 $\boldsymbol{a}$ が X の内点であるとは，点 $\boldsymbol{a}$ を中心とする十分小さな半径の円盤が X に含まれることができることです．そして，内点の集まりが内部です．

一方，点 $\boldsymbol{b}$ は X の境界点であるとは，点 $\boldsymbol{b}$ を中心とするどんな円盤も X に属する点と X^c に属する点が出てくることです．そして，境界点の集まりが境界です．

次に，開集合を開円盤で定義します．$A \subset \mathbb{R}^2$ が開集合であるとは，A に属する点 $\boldsymbol{a}$ を中心とする円盤を考えたとき，その半径を十分小さくしたときに開円盤が A に含まれることができることです．

例を見てみましょう．

1. $\mathbb{R}^2$ は開集合である．
2. 開円盤は開集合である．
3. $\operatorname{int} X$ は開集合である．
4. ∂X は開集合でない．
5. X は開集合でない．

形式的な定義は付録を見て下さい．

5 ラグランジュ乗数法

この節ではラグランジュ乗数法を定義して，最大化問題を解いてみよう．制約付最大化問題 (2), (1) を思い出そう．それは次のような問題であった．

$$\max_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{subject to } g(\boldsymbol{x}) = c.$$

ただし，選択集合 X は $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．ここで，問題に新しい仮定をおこう．それは, 目的関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と制約関数 $g : X \to \mathbb{R}$ は共に 1 階偏微分微分可能で，そのすべての偏導関数が連続であるとする．この場合，f や g は C^1 級であるといいます．

ラグランジュ乗数法. (1) この問題に対して次のようなラグランジュ関数 L を定義する.

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) := f(\boldsymbol{x}) + \lambda(c - g(\boldsymbol{x})). \tag{6}$$

ここで λ はラグランジュ乗数とよばれるある変数である．ラグランジュ乗数の導入によりラグランジュ関数 L は $n+1$ 変数関数になる．(2) 次に，各変数について L を偏微分して 0 とおく．つまり，

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0.$$

(3) そうすると $n+1$ 本の方程式が出てくる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) &= 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) &= 0, \\
g(\boldsymbol{x}) - c &= 0.
\end{aligned}$$

最後の方程式は制約条件と一致しています．この $n+1$ 本の方程式を $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ について解こう.

ここでつぎのようなことが成り立ちます.

ラグランジュ乗数法

x^* が制約付最大化問題の最大点で，(1) x^* は X の内点でありかつ (2) $\nabla g(\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{0}$ であるならば，あるラグランジュ乗数 λ^* が存在して $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ はラグランジュ乗数法のステップ 3 の $n+1$ 本の方程式を満足する.

2 つ条件がありますが，それを満たす限りにおいて x^* が制約付最大化問題の解ならば，x^* はある乗数 λ^* について $n+1$ 本の方程式から成る連立方程式の解になるのです.

ではいくつか問題を解いてみましょう.

6　ラグランジュ乗数定理

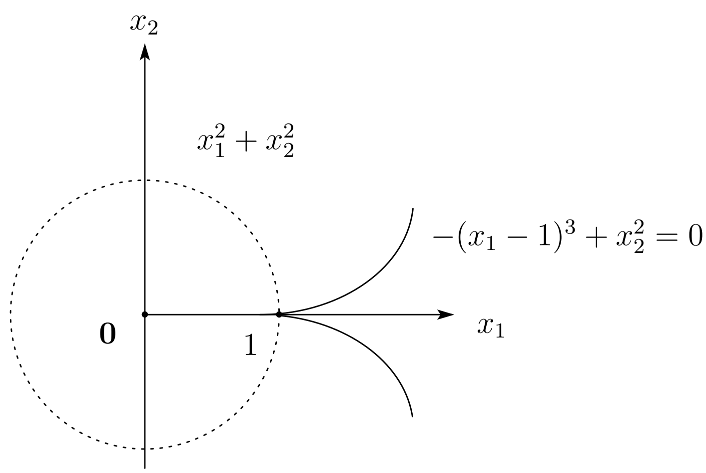
Theorem 6.1 (ラグランジュ乗数定理) 変数が 2 以上である ($n \geq 2$) 選択集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義される目的関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と制約式 $g : X \to \mathbb{R}$ は C^1 級であるとする．点 $\boldsymbol{x}^*$ は制約付最大化問題 (1), (2) の極大点あるいは制約付最小化問題の極小点であるとする．さらに，点 $\boldsymbol{x}^*$ は $\nabla g(\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{0}$ を満たし，かつ X の内点である ($\boldsymbol{x}^* \in \operatorname{int} X$) であるとする．そのとき，ある数 λ が存在して，

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{x}^*). \qquad \square$$

注意 1. 極大点あるいは極小点で $\nabla g(\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{0}$ が満たされていなければなりません．例えば，次の最小化問題を考えよう．

$$\max_{(x_1,x_2)} x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{subject to } -(x_1-1)^3 + x_2^2 = 0$$

制約式を図に描くと，原点からその制約を満たす点までの最小距離が問題の解であることが分かります．



図から明らかにこの問題は一意な最小点 $\boldsymbol{x}^* = (1, 0)$ をもちます．しかし，ラグランジュ乗数は存在しません．すなわち， $\boldsymbol{x}^* = (1, 0)$ において，

$$\nabla g(\boldsymbol{x}^*) = (-3(x_1^* - 1)^2, 2x_2^*) = (0, 0)$$

であるので，条件 $\nabla g(\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{0}$ を満たしていません．ちなみに $\boldsymbol{x}^* = (1, 0)$ のような $\nabla g(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ を満たす点を特異点といいます[3].

[3]さらに「特異点論」の分類では $\boldsymbol{x}^*$ は尖点あるいはカプスと呼ばれます.

問い　この例にはラグランジュ乗数が存在しないことを示して下さい．

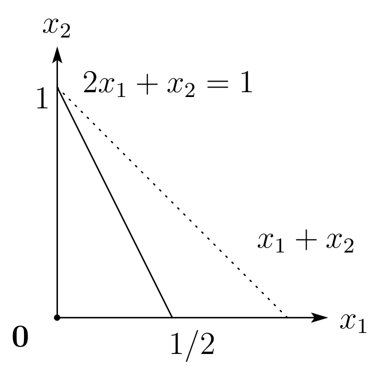
この例は定理の対偶を取ればよく分かります．命題を少し変更すると，

> 定理の仮定の下でラグランジュ乗数 λ が存在しなければ，$\nabla g(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$ である．

注意 2. ラグランジュ乗数法は X の内部で適応できます．例えば，次の例を考えよう．

$$\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+} x_1 + x_2$$
$$\text{subject to } 2x_1 + x_2 = 1$$

これは消費者理論で 1 財の価格が 2 円，2 財の価格が 1 円で所得が 1 円の下で線型効用関数 x_1+x_2 を最大化する問題に対応しています[4]．このとき $\operatorname{int} X = \mathbb{R}^2_{++}$ となります．一意な最大点 $\boldsymbol{x}^* = (0, 1)$ を持ちますが，これは端点解でラグランジュ乗数は存在しません．



問い　この例にはラグランジュ乗数が存在しないことを示して下さい．

この例は定理と矛盾するわけではありません．つまり，定理の前提の $\operatorname{int} X$ のどこにも極大点あるいは極小点が存在しない例なのです．前提が偽であれば，結論がどうであってもその定理は真であることに注意して下さい．

[4]みみっちい例だ．

7　ラグランジュ乗数法を用いて最大化問題を解く場合の手順

これらの注意をまとめてラグランジュ乗数法を用いて最大化問題を解く場合の手順を示すと次の通りになります.

1. $\mathrm{int}\,X$ でラグランジュ問題の解 $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ があるかどうか調べる.
2. その解の中から極大値を求め最大になっているものを探す.
3. 乗数が存在しなければ $\nabla g(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$ を満たしている点の中から最大になる点を求める.（注意１に相当）
4. ∂X の中から最大になる点を求める.（注意２に相当）

最初から X が開集合であれば４番目の手順は省略できる．つまり，一般の極値問題では２つのケースを調べればよい.

1. $\mathrm{int}\,X$ でラグランジュ問題の解 $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ の中から求める.
2. $\mathrm{int}\,X$ の中で g の特異点の中から探す.

これらの２つのケースの最大点のうち最も大きいものが問題の解となります．しかし，普通の経済学の問題では２のケースはとても希です．２の特異点という名称からして珍しくてめったに現れる点ではありません．特に，上に挙げた効用最大化問題では，$g(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$ でした．パラメータの仮定として，$p_1 > 0$ かつ $p_2 > 0$ でしたので，任意の $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ において，

$$\nabla g(x_1, x_2) = (p_1, p_2) \neq (0, 0)$$

となります．したがって，g の特異点はありません．通常の消費者問題では

1. ラグランジュ乗数法で $\mathrm{int}\,X$ の中で解があるかどうか調べる.
2. ∂X の中から最大になる点を求める.

で十分でということになります.

[2] にはこのような注意はありません．[4] の 56 ページにラグランジュ乗数定理が紹介されていますが，注意２にあるような目的関数の定義域に関する条件がありません．[1] の 289 ページではなぜか $\partial g(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_1 \neq 0$ を仮定しています．第１変数の偏微係数が 0 でなくてもラグランジュ乗数定理は成り立ちます．つ

まり，上で述べたようにすべてが 0 でなければいい．[5] では 67 ページの 13.15 に対応しています．f の定義域に関する条件がありませんね．

付録

A　論理

数学では日常使われている曖昧な概念や推論を避けるために，論理記号を用いた論理規則に則って推論を進めます．q が p であるための**必要条件**とは，

$$p \Longrightarrow q \tag{7}$$

を意味します．つまり，p が成り立つならば q は必ず成立するということです．いくつか数学で例を挙げると

$$\text{関数 } f \text{ は微分可能} \Longrightarrow \text{関数 } f \text{ は連続}$$
$$\text{行列 } A \text{ は対称行列} \Longrightarrow \text{行列 } A \text{ の固有値はすべて実数.}$$

最大化問題では

$$f \text{ は } x^* \text{ で最大値をとる} \Longrightarrow f'(x^*) = 0$$

がよく用いられます．つまり，微分して 0 は最大点のための必要条件です．論理式 (7) で

必要条件は矢印の先

と覚えて下さい．

B　C^r 級

一変数関数 f が一回微分可能でその偏導関数が連続のとき f は C^1 級であるといいます．同様に，f は r 回微分可能で $f^{(r)}$ が連続のとき C^r 級であるといいます．f はすべての $r = 1, 2, \dots$ に対して r 回微分可能な場合 C^∞ 級であるといいます．また，単に連続な場合 C^0 級といいます．次の初等関数は C^∞ 級です．

$$f_1(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = \log x.$$

一方，次の関数 f_4 は C^2 級です．

$$f_4(x) = \begin{cases} x^{7/3} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

なぜならば， f_4 を 2 回微分すると，非負の x に対して

$$f_4''(x) = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} x^{1/3}$$

となるからです．これは連続ですが，もはや原点 $x = 0$ で微分可能ではありません．(ピンとこない人は f_4'' のグラフを書いてみて下さい．)

問い 次の関数 f_5 は何級か？

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

多変数の場合は，r 次までのすべての偏導関数を有し，それらがすべて連続のとき C^r といいます．

C　ユークリッド位相

$\mathbb{R}^n$ のユークリッド位相あるいは標準位相を紹介する．中心 $\boldsymbol{x}$ 半径 $\varepsilon > 0$ の球あるいは円盤 $D(\boldsymbol{x};\varepsilon)$ を考える．集合の記法を用いると $D(\boldsymbol{x};\varepsilon) = \{\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon\}$ となる．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が n 次元ユークリッド位相で開集合であるとは，X のどんな点 $\boldsymbol{x}$ についても半径 $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば $\boldsymbol{x}$ を中心とする球 $D(\boldsymbol{x};\varepsilon)$ は X に含まれることができることである．記号で表わせば，

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in X\ \exists\, \varepsilon > 0\ D(\boldsymbol{x};\varepsilon) \subset X.$$

$\mathbb{R}^n$ や $D(\boldsymbol{x};\varepsilon)$ は開集合である．X の内部 $\operatorname{int} X$ を定義しよう．$X \subset \mathbb{R}^n$ の内部 $\operatorname{int} X$ とはつぎのように定義される $\{\boldsymbol{x} \mid \exists\, \varepsilon > 0\, D(\boldsymbol{x};\varepsilon) \subset X\}$．つぎに X の閉包 $\operatorname{cl} X$ を定義しよう．$\operatorname{cl} X := \{\boldsymbol{x} \mid \forall\, \varepsilon > 0\, X \cap D(\boldsymbol{x};\varepsilon) \neq \emptyset\}$．そうすると X の境界 ∂X は次のように定義される．$\partial X := \operatorname{cl} X \cap \operatorname{cl}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

D　今後やるべきこと

1. ∇ を定義する.

参考文献

[1] 神谷和也, 浦井憲『経済学のための数学入門』東京大学出版会, 1996 年

[2] 西村和雄『経済数学早わかり』日本評論社, 1982 年.

[3] Marsden, J.E. and M.J. Hoffman, Elementary Classical Analysis 2nd Edition, Freeman, 1993.

[4] 西村清彦『経済学のための最適化理論入門』東京大学出版会, 1990 年.

[5] ピーター・バーク, クヌート・シュドセーテル著『エコノミスト数学マニュアル』鈴村興太郎監訳, 丹野忠晋訳, 日本評論社, 1996 年.