第19章　一般最適化理論

すでに制約条件付き極大化（極小化）問題の解法については，制約が等式の場合を取り上げた．ここでは，制約が不等式で与えられる一般的なケースを扱う．ラグランジュ未定乗数法を拡張したキューン＝タッカー条件を導出することが，ここでの目標である．

19.1　最初の描写－－非負制約下の最適問題

まず，不等式制約下の最大化問題の例として，非負制約下の最大化問題を取り上げることにしよう．これを用いて，不等式制約の捉え方に対する基本的な考え方を見ておく．

$f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ への関数で，定義域の全域で微分可能であるとする．いま，$x \geq 0$ の下で $f(x)$ を最大化するとしよう．図 19.1 には可能なケースが描かれている．(a) は内点解のケースであり，解 $x^* > 0$ において $f'(x^*) = 0$ が成立している．(b)，(c) は端点解のケースであり，解は $x^* = 0$ である．ここでは，$f'(x^*) \leq 0$ が成立している．これらすべてのケースを含む最適条件は，

$$f'(x^*) \leq 0, \quad x^* \geq 0, \quad x^* f'(x^*) = 0 \tag{19.1}$$

と書くことができる．定義域の下限である 0 において最大となるとき，$f'(x^*)$ は最大でも 0 を超えることはない．(d) は上限がある場合の端点解のケースを示している．このとき，$f'(x^*)$ は正になりうるし，(19.1) のようには書けない．一般的な表現は次節で考える．

条件 (19.1) を多変数のケースに拡張してみよう．$f(x_1, x_2)$ は $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}$ への関数で，定義域の全域で微分可能であり，$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ の下で $f(x_1, x_2)$ を最大化するとしよう．f_i $(i = 1, 2)$ を第 i 偏導関数とすれば，解 x_1^*, x_2^* では，

$$f_i(x_1^*, x_2^*) \leq 0, \quad x_i^* \geq 0, \quad x_i^* f_i(x_1^*, x_2^*) = 0 \tag{19.2}$$

が成り立つ．全部で 9 つの可能性があるが，図 19.2 の (a)，(b)，(c) に 3 つのケースが描かれている．(a) は内点解のケースだが，(b)，(c) は端点解のケースであり，解は $x_2^* = 0$，また (d) も端点解のケースで，解は $x_1^* = 0$ である．

19.2　スラック変数と一般的な不等式制約

次に，非負条件を 1 つの例として含む一般的な不等式制約の下での一般最適化問題の必要条件を考えるために，前節の 2 変数 1 不等式制約の極大化問題を取り上げよう．

$$\begin{aligned} &\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \\ &\text{s.t.} \quad g(x_1, x_2) \geq 0 \end{aligned} \tag{19.3}$$

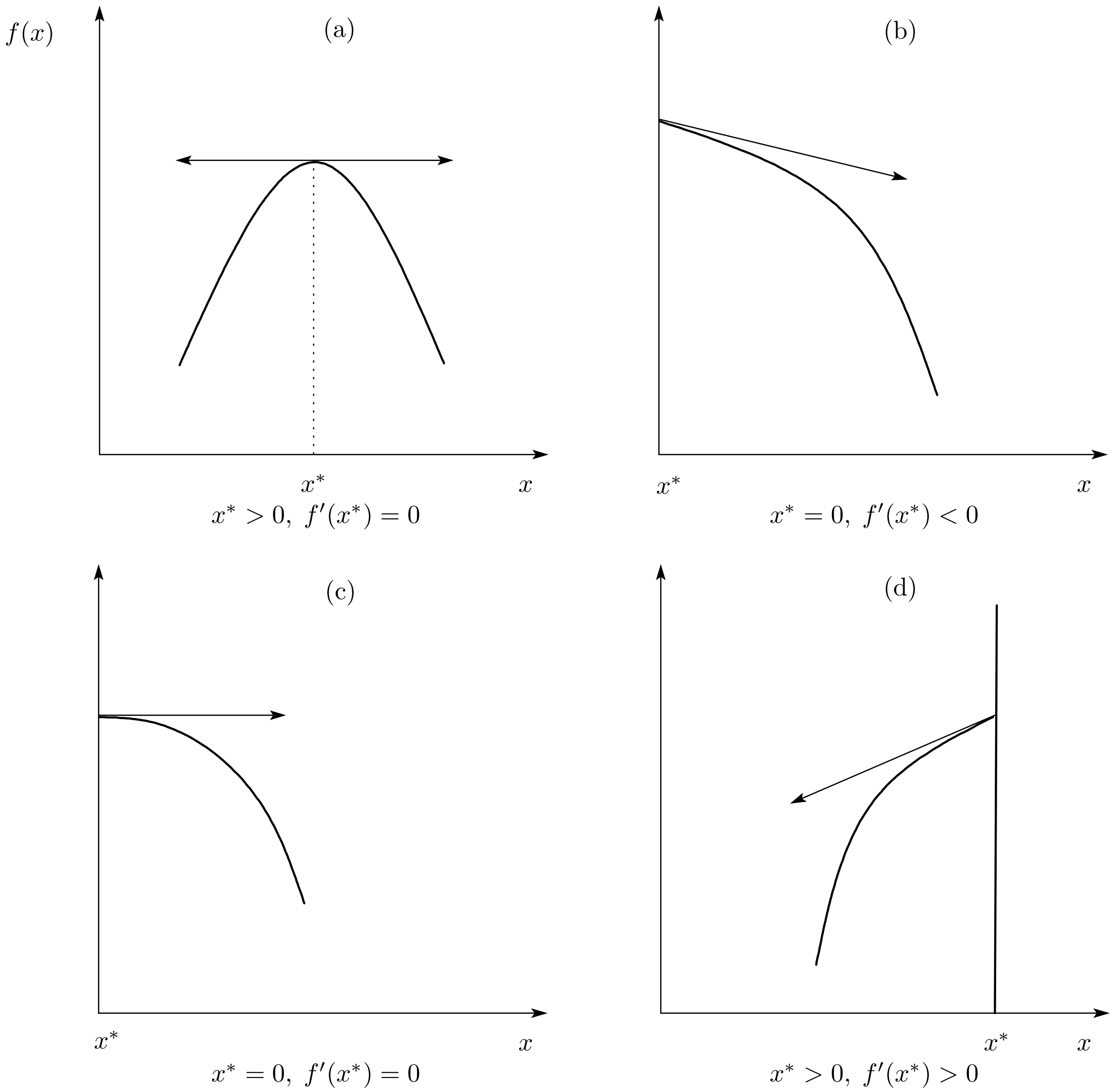

図 19.1: 1 変数の一般最適化

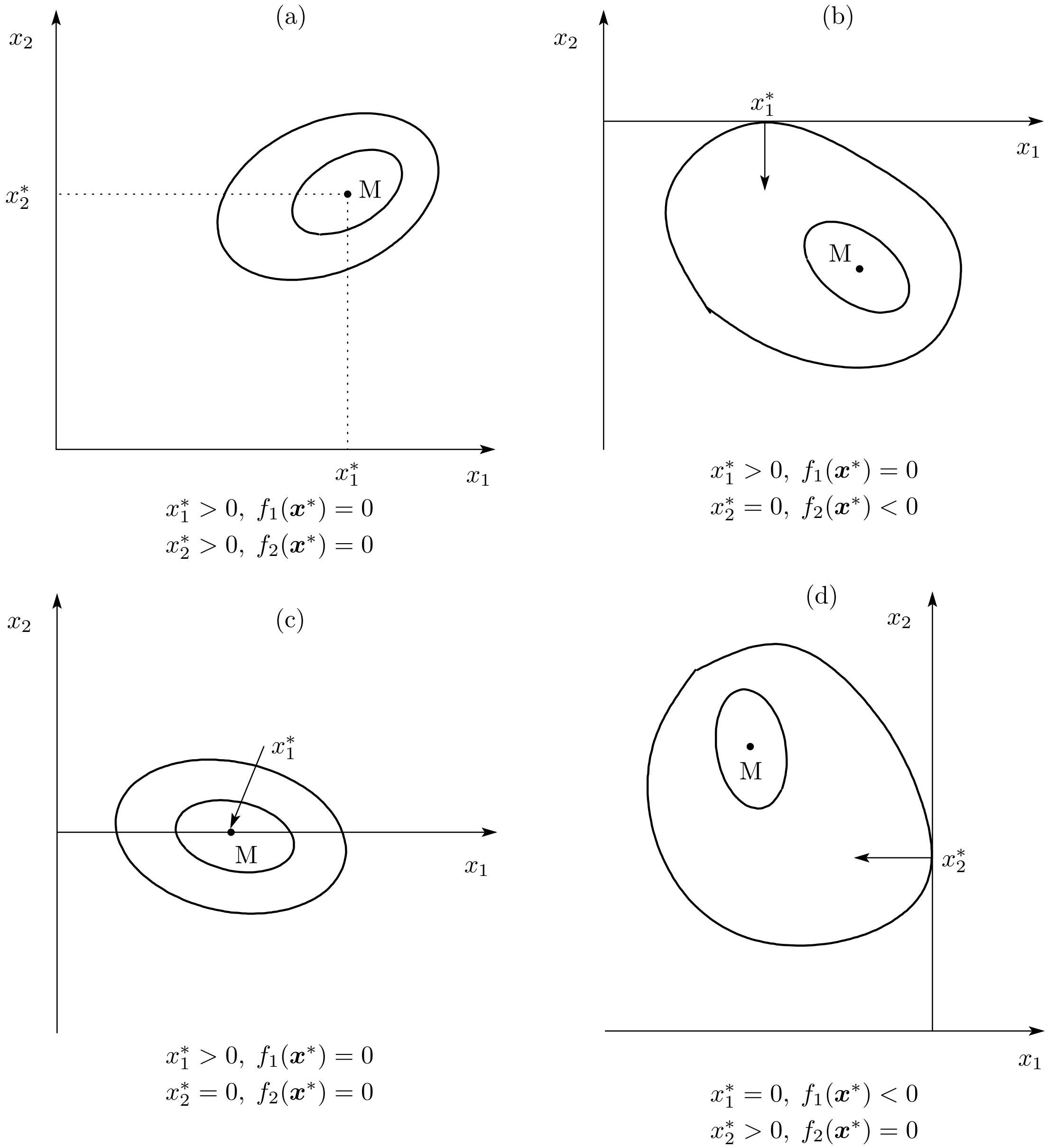

図 19.2: 2 変数の一般最適化

ただし，f，g はともに微分可能であると仮定する．スラック変数 s を導入して，問題 (19.3) を非負条件付き等式制約問題に書き換えよう．

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) \\ &\ \text{s.t.}\quad g(x_1,x_2)-s=0,\quad s\geq 0 \end{aligned} \tag{19.4}$$

この問題 (19.4) をラグランジュ未定乗数法の考え方によって解く．いま，解を $\boldsymbol{x}^*$，s^* とし，$\boldsymbol{x}^*$ の近くの点で制約 $g(x_1,x_2)-s=0$ を満たす点を $\boldsymbol{x}^*+d\boldsymbol{x}=(x_1^*+dx_1,x_2^*+dx_2)\neq\boldsymbol{x}^*$ とすれば

$$g_1(\boldsymbol{x}^*)dx_1+g_2(\boldsymbol{x}^*)dx_2-ds=0 \tag{19.5}$$

が成り立つ．ここで $g_1(\boldsymbol{x}^*)\neq 0$ と仮定する．そのとき，

$$dx_1=-\frac{g_2(\boldsymbol{x}^*)}{g_1(\boldsymbol{x}^*)}dx_2+\frac{1}{g_1(\boldsymbol{x}^*)}ds$$

$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}^*$ において極大値をとるから，

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{x}^*+d\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}^*) \\ =&f_1(\boldsymbol{x}^*)dx_1+f_2(\boldsymbol{x}^*)dx_2 \\ =&\left\{-f_1(\boldsymbol{x}^*)\frac{g_2(\boldsymbol{x}^*)}{g_1(\boldsymbol{x}^*)}+f_2(\boldsymbol{x}^*)\right\}dx_2+\frac{f_1(\boldsymbol{x}^*)}{g_1(\boldsymbol{x}^*)}ds\leq 0 \end{aligned}$$

まず，$ds=0$，$dx_2\neq 0$ のときを考える．dx_2 は正負いずれの値もとりうるから，

$$-f_1(\boldsymbol{x}^*)\frac{g_2(\boldsymbol{x}^*)}{g_1(\boldsymbol{x}^*)}+f_2(\boldsymbol{x}^*)=0 \tag{19.6}$$

次に，$dx_2=0$，$ds\neq 0$ のときを考える．$s^*=0$ のとき $ds>0$ のみ可能だが，$s^*>0$ のときは ds は正負いずれの値もとりうる．そこで，$s^*>0$ のとき

$$\frac{f_1(\boldsymbol{x}^*)}{g_1(\boldsymbol{x}^*)}=0 \tag{19.7}$$

$s^*=0$ のとき

$$\frac{f_1(\boldsymbol{x}^*)}{g_1(\boldsymbol{x}^*)}\leq 0 \tag{19.8}$$

となる．等式制約付き極大化問題と同様に，$\dfrac{f_1(\boldsymbol{x}^*)}{g_1(\boldsymbol{x}^*)}=-\lambda^*$ とおくと，

$$f_1(\boldsymbol{x}^*)+\lambda^*g_1(\boldsymbol{x}^*)=0 \tag{19.9}$$

(19.6) より，

$$f_2(\boldsymbol{x}^*)+\lambda^*g_2(\boldsymbol{x}^*)=0 \tag{19.10}$$

また，(19.7)，(19.8) より

$$\lambda^*\geq 0 \tag{19.11}$$

$$\lambda^*s^*=0 \tag{19.12}$$

が成り立つ．これが，制約 $g(\boldsymbol{x})-s=0$ の下で $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}^*$ において極大値をとるための必要条件である．

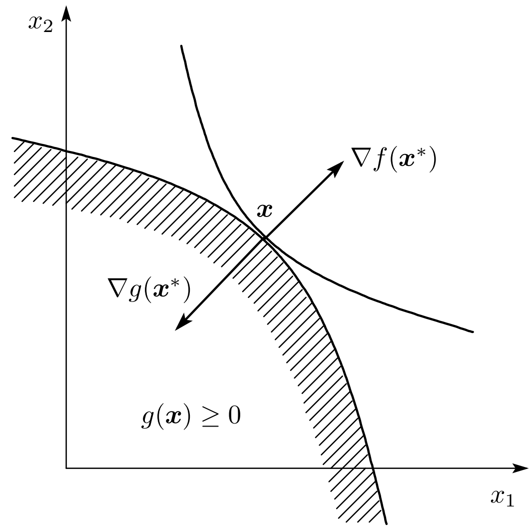

図 19.3: 一般最適化 (1)

いま，ラグランジュ関数を

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x}) \tag{19.13}$$

とおくと，$s^* = g(\boldsymbol{x}^*)$ より，(19.9)，(19.10) および $s \geq 0$ なる条件は次のように書ける．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) &= f_i(\boldsymbol{x}^*) + \lambda^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad (i = 1, 2) \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) &= g(\boldsymbol{x}^*) \geq 0 \\
\lambda^* \frac{\partial}{\partial \lambda} L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) &= \lambda^* g(\boldsymbol{x}^*) \ (= \lambda^* s^*) = 0 \\
\lambda^* &\geq 0
\end{aligned} \tag{19.14}$$

が成り立つ．これらの条件は**キューン=タッカー条件** (Kuhn=Tucker condition) と呼ばれる．図 19.3 は制約条件が 1 つで，かつ拘束的であるケースを示している．図 19.4 にはスラック変数が存在するケースを示している．以上の議論は制約条件が複数になったときにも容易に拡張することができる．2 つの不等式制約与えられたときを考えよう．図 19.5 は，2 つの制約がともに拘束的で，

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}^*) + \lambda_1^* g_1^1(\boldsymbol{x}^*) + \lambda_2^* g_2^1(\boldsymbol{x}^*) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}^*) + \lambda_1^* g_1^2(\boldsymbol{x}^*) + \lambda_2^* g_2^2(\boldsymbol{x}^*) = 0 \end{cases} \tag{19.15}$$

を満たすケースである．すなわち，$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)$ は $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)$ と $\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)$ の 1 次結合として表されている．もちろん，そのためには $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)$ と $\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)$ が 1 次独立でなければならない．

一般的な不等式制約の下で求められたキューン=タッカー条件 (19.14) と，前節の不等式制約における極大値の必要条件 (19.2) にはいかなる関係があるであろうか．非負制約は一般的な不等式制約の 1 つであるから，条件 (19.14) から条件 (19.2) は導かれるはずである．そこでラグランジュ関数を，$x_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$ として，

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda x}$$

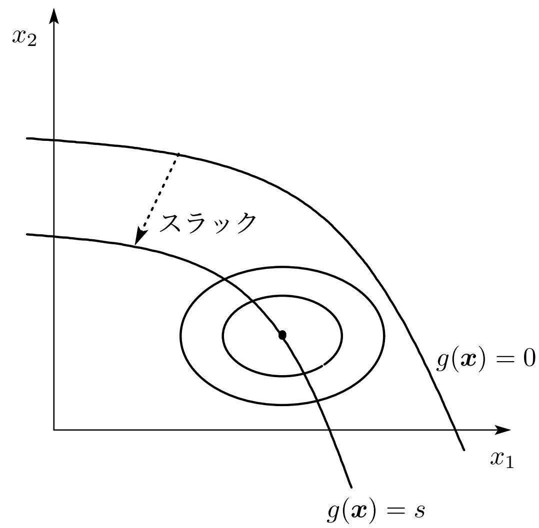

図 19.4: スラックの存在

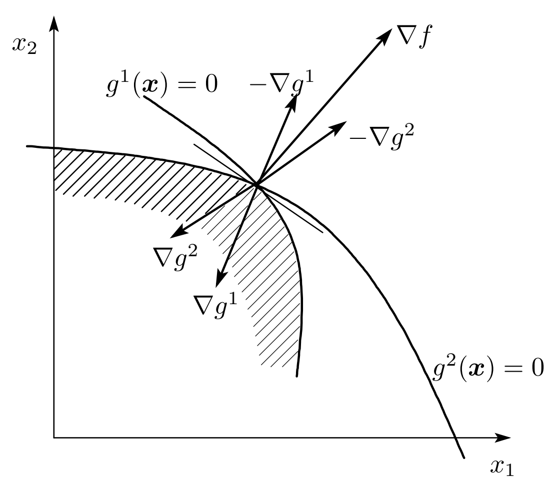

図 19.5: 一般最適化 (2)

とおくと，(19.14) より，キューン=タッカー条件は

$$\frac{\partial}{\partial x_i}L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=f_i(\boldsymbol{x}^*)+\lambda_i^*=0 \qquad (i=1,2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i}L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=x_i^*\geq 0 \qquad (i=1,2)$$

$$\lambda_i^*\frac{\partial}{\partial \lambda_i}L(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*)=\lambda_i^*x_i^*=0 \qquad (i=1,2)$$

$$\lambda_i^*\geq 0 \qquad (i=1,2)$$

となる．これらより

$$f_i(\boldsymbol{x}^*)=-\lambda_i^*\leq 0$$

$$x_i^*f_i(\boldsymbol{x}^*)=-\lambda_i^*x_i^*=0$$

であるから，非負制約下の最大の必要条件は

$$\begin{aligned} f_i(\boldsymbol{x}^*)&\leq 0\\ x_i^*f_i(\boldsymbol{x}^*)&=0\\ x_i^*&\geq 0 \qquad (i=1,2)\end{aligned}$$

となる．

では，非負制約と不等式制約の両方がある場合は，どのような条件になるであろうか．

$$L^+(\boldsymbol{x},\lambda,\boldsymbol{\mu})=f(\boldsymbol{x})+\lambda g(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{x}$$

とおくと，キューン=タッカー条件より

$$\frac{\partial}{\partial x_i}L^+(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\boldsymbol{\mu}^*)=f_i(\boldsymbol{x}^*)+\lambda g_i(\boldsymbol{x}^*)+\mu_i^*=0 \qquad (i=1,2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}L^+(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\boldsymbol{\mu}^*)=g(\boldsymbol{x}^*)\geq 0 \qquad (i=1,2)$$

$$\lambda^*\frac{\partial}{\partial \lambda}L^+(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\boldsymbol{\mu}^*)=\lambda^*g(\boldsymbol{x}^*)=0$$

$$\lambda^*\geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i}L^+(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\boldsymbol{\mu}^*)=x_i^*\geq 0 \qquad (i=1,2)$$

$$\mu_i^*\frac{\partial}{\partial \mu_i}L^+(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*,\boldsymbol{\mu}^*)=\mu_i^*x_i^*=0 \qquad (i=1,2)$$

$$\mu_i^*\geq 0 \qquad (i=1,2)$$

となる．$\mu_i^*\geq 0$ より

$$f_i(\boldsymbol{x}^*)+\lambda^*g_i(\boldsymbol{x}^*)\leq 0$$

また，

$$f_i(\boldsymbol{x}^*)+\lambda^*g_i(\boldsymbol{x}^*)=-\mu_i^*$$

の両辺に x_i^* をかけると

$$x_i^*[f_i(\boldsymbol{x}^*) + \lambda^* g_i(\boldsymbol{x}^*)] = -\mu_i^* x_i^* = 0$$

が成り立つ．まとめると，ラグランジュ関数

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x})$$

を作り，

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) = f_i(\boldsymbol{x}^*) + \lambda g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \qquad (i = 1, 2)$$
$$x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) = x_i^*[f_i(\boldsymbol{x}^*) + \lambda^* g_i(\boldsymbol{x}^*)] = 0 \qquad (i = 1, 2)$$
$$x_i^* \geq 0 \qquad (i = 1, 2)$$
$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) = g(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$$
$$\lambda^* \frac{\partial}{\partial \lambda} L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) = \lambda^* g(\boldsymbol{x}^*) = 0$$
$$\lambda^* \geq 0$$

となる $\boldsymbol{x}^*$, λ^* を見つけることである．

例 19.1

$$\max_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} (x_1 + 3) x_2$$
$$s.t.\ 1 - x_1 - x_2 \geq 0$$

を解く．ラグランジュ関数を作ると，

$$L = (x_1 + 3)x_2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

となる．x_i $(i = 1, 2)$, λ で L を偏微分したものをそれぞれ L_i, L_λ で表せば，

$$L_1 = x_2 - \lambda \leq 0$$
$$x_1 L_1 = x_1(x_2 - \lambda) = 0$$
$$x_1 \geq 0$$
$$L_2 = x_1 + 3 - \lambda \leq 0$$
$$x_2 L_2 = x_2(x_1 + 3 - \lambda) = 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$L_\lambda = 1 - x_1 - x_2 \geq 0$$
$$\lambda L_\lambda = \lambda(1 - x_1 - x_2) = 0$$
$$\lambda \geq 0$$

まず，$x_1 > 0$ と仮定すると，$x_2 = \lambda$．このとき，$x_2 \geq x_1 + 3$ が成り立つから

$$1 \geq x_1 + x_2 \geq 4x_1 + 3 > 3$$

これは矛盾．よって，$x_1 = 0$.

次に，$1-x_1-x_2>0$ とすると，$\lambda=0$．このとき，$x_1+3\leq 0$．これは $x_1=0$ に矛盾．よって，$1-x_1-x_2=0$．$x_1=0$ より $x_2=1$．そのとき，$\lambda=3,\ (x_1+3)x_2=3$.

比較のために，次の問題を解こう．

$$\max_{x_1,x_2}\ (x_1+3)x_2$$
$$s.t.\ 1-x_1-x_2=0$$

ラグランジュ関数は

$$L=(x_1+3)x_2+\lambda(1-x_1-x_2)$$

であるから，

$$L_1=x_2-\lambda=0$$
$$L_2=x_1+3-\lambda=0$$
$$L_\lambda=1-x_1-x_2=0$$

まず，最初の *2* つの式より $x_2=x_1+3$ が成り立つ．それを *3* 番目の式に代入すると，$x_1=-1,\ x_2=2,\ (x_1+3)x_2=4$.

例 19.2

$$\max\ f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2+4x_1+x_2$$
$$s.t.\ -x_1^2+4x_1-x_2\geq 0$$

を解く．ラグランジュ関数

$$L=-x_1^2-x_2^2+4x_1+x_2+\lambda(-x_1^2+4x_1-x_2)$$

を作る．$x_i\ (i=1,2),\ \lambda$ で L を偏微分したものをそれぞれ $L_i,\ L_\lambda$ で表せば，

$$L_1=-2x_1+4-2\lambda x_1+4\lambda=0$$
$$L_2=-2x_2+1-\lambda=0$$
$$L_\lambda=-x_1^2+4x_1-x_2\geq 0$$
$$\lambda L_\lambda=\lambda(-x_1^2+4x_1-x_2)=0$$
$$\lambda\geq 0$$

まず，$\lambda>0$ と仮定すると，$-x_1^2+4x_1-x_2=0$．また，第 *1*，*2* 式より

$$-2x_1+4+(-2x_1+4)\lambda=0$$
$$(-2x_1+4)(\lambda+1)=0$$
$$(-2x_1+4)(-2x_2+2)=0$$
$$\therefore x_1=2,\ x_2=1$$

$x_1=2$ のとき，$x_2=4$ であるから $\lambda=-7$ となるが，これは矛盾．

次に，$x_2=1$ とすると，$\lambda=-1<0$．これは矛盾．

そこで，$\lambda=0$ とする．このとき，$-2x_1+4=0$，$-2x_2+4=0$．よって $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$．そのとき，$f=\frac{1}{4}$.

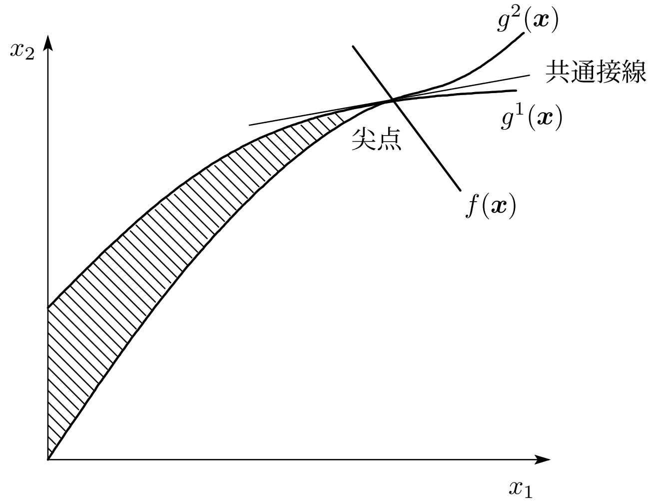

図 19.6: 尖点の存在

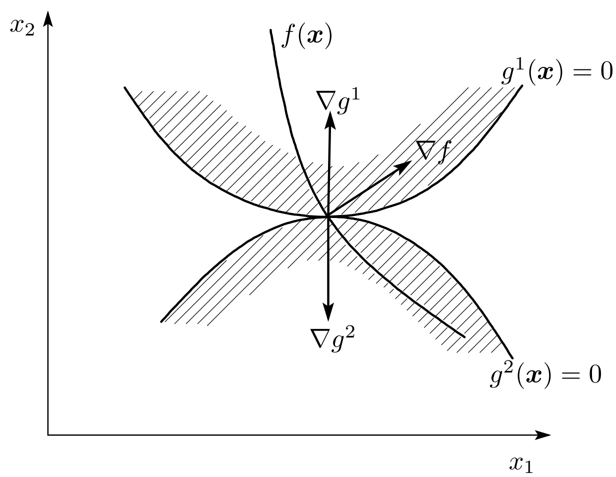

図 19.7: 退化のケース

19.3　キューン＝タッカー条件と制約想定

極値を特徴づけるキューン＝タッカー条件は常に成立するわけではない．前節の (19.5) において $g_1(\boldsymbol{x}^*) \neq 0$ が仮定されていたし，(19.15) では，

$$\begin{vmatrix} g_1^1(\boldsymbol{x}^*) & g_2^1(\boldsymbol{x}^*) \\ g_1^2(\boldsymbol{x}^*) & g_2^2(\boldsymbol{x}^*) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{19.16}$$

が必要である．その他，尖点のケース（図 19.6）や退化のケース（図 19.7）を排除する必要がある．このように，キューン=タッカー条件が極値の必要条件となるためには，制約条件に何らかの制約を加える必要がある．これを**制約想定**という．

第 1 の制約想定は正規条件と呼ばれるものである．添字の集合 $I(\boldsymbol{x})$ を

$$I(\boldsymbol{x}^*) = \{j|\ g^j(\boldsymbol{x}^*) = 0\}$$

と定義する．

定義 19.1 正規条件 (regularity condition)
$\boldsymbol{x}^*$ において導関数の集合 $\{\nabla g^j|\ j \in I(\boldsymbol{x}^*)\}$ の要素が *1* 次独立であるとき，$\boldsymbol{x}^*$ において正規条件が満たされるという．

これを用いて，次の定理を証明することができる．

定理 19.1 定義域において連続微分可能な n 変数実数値関数 $f,\ g^1,\ g^2, \cdots,\ g^m$ が与えられたとする．問題

$$\max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \qquad (\text{ あるいは } \min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}))$$
$$s.t.\ g^j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

が内点解 $\boldsymbol{x}^*$ をもち，$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$ において正規条件が成り立つとする．このとき m 個の独立変数 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ を新たに導入して，関数

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(\boldsymbol{x}) \tag{19.17}$$

を作ると，ある $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_m^*)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_i^j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{19.18}$$
$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = g^j(\boldsymbol{x}^*) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{19.19}$$
$$\lambda_j^* \frac{\partial}{\partial \lambda_j} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \lambda_j^* g^j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{19.20}$$
$$\lambda_j^* \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{19.21}$$

が成り立つ．

(証明)$\boldsymbol{x}^*$ において極大値をとり，m' 個の制約式が拘束的であるとする．すなわち，

$$g^j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m' \leq m)$$

拘束的ではない制約式を無視してラグランジュ関数を作る．

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m'} \lambda_j g^j(\boldsymbol{x}) \tag{19.22}$$

このとき，ラグランジュ未定乗数法より，ある $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_m'^*)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m'} \lambda_j^* g_i^j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{19.23}$$
$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = g^j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m') \tag{19.24}$$

まず，(19.24) に付随する乗数が，$\lambda_j^* \geq 0$ となることを示す．いま

$$g^j(\boldsymbol{x}^*) - \alpha_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m')$$

とし，付随する乗数を λ_k とする．α_k は最初は 0 で，ごくわずか $\epsilon > 0$ だけ増加させるとする．これにより実行可能領域は縮小するので，目的関数の最大値は増大することはない．よって，

$$\frac{df(\boldsymbol{x}^*)}{d\alpha_k} \leq 0 \quad k = 1, 2, \cdots, m'$$

ところで，ラグランジュ関数を

$$L^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{m'} \lambda_k \{g^k(\boldsymbol{x}) - \alpha_k\} \tag{19.25}$$

とすれば，包絡線定理より

$$\begin{aligned} \frac{df(\boldsymbol{x}^*)}{d\alpha_k} &= \frac{\partial L^\alpha}{\partial \alpha_k} = -\lambda_k \leq 0 \\ \therefore \lambda_k &\geq 0 \end{aligned} \tag{19.26}$$

となる．ここで，$g^j(\boldsymbol{x}) > 0$ となる制約に付随する乗数に対しては $\lambda_j = 0$，すなわち $\lambda_{m'+1} = \lambda_{m'+2} = \cdots = \lambda_m = 0$ とすると

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m'} \lambda_j g^j(\boldsymbol{x}) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

したがって，極大化の 1 階の条件 (19.24) は

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad g^j(\boldsymbol{x}^*) \geq 0, \quad \lambda_j^* g^j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

条件 (19.23) は

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_i^j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

よって，定理が成立する．

正規条件は $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)$ と $\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)$ が 1 次従属ならば, 使うことができない．そのようなケースでは別の制約想定が必要とされる．それが次の条件である．

定義 19.2 スレーター条件 (Slater's condition)
すべての $j = 1, 2, \cdots, m$ に対して $g^j(\boldsymbol{x})$ が凹関数であり，$g^j(\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$ となる $\bar{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{0}$ が存在する．

練習問題

キューン=タッカー条件を導き，解を求めよ．

1. $\displaystyle\max_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} \ln x_1 + \ln(x_2 + 5)$
   s.t. $4 - x_1 - x_2 \geq 0$

2. $\displaystyle\max_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} 6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1 x_2 - 2x_2^2$
   s.t. $x_1 + 2x_2 \leq 2, \quad 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0$

3. $\max\limits_{x_1\geq 0, x_2\geq 0} -8x_1^2 - 10x_2^2 + 12x_1x_2 - 50x_1 + 80x_2$
s.t. $x_1 + x_2 \leq 1, \quad 8x_1^2 + x_2^2 \leq 2.25$

4. $\max\limits_{x_1\geq 0, x_2\geq 0} -x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 + x_1 + 2x_2$
s.t. $2x_1 + x_2 \leq 2, \quad -x_1 + x_2 \leq -1$

5. $\max\limits_{x_1\geq 0, x_2\geq 0} -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1$
s.t. $3x_1 + 4x_2 \leq 6, \quad -x_1 + 4x_2^2 \leq -\dfrac{1}{3}$

6. $\max\limits_{x_1\geq 0, x_2\geq 0} 100 + \ln x_1 + \ln x_2$
s.t. $98 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \quad 418 - x_1^2 - 6x_2^2 \geq 0$