下津ゼミ　DPlecture

金子　雄祐

2014/11/19

目次

1.0　はじめに

- Rust(1987) を読める程度に DP（動的計画法）の Lecture を行う
- よって連続時間モデルや測度論が必要になる確率変数が無限となるモデルは扱わない
- まず不確実性のないモデルから説明を始め、次に不確実性を導入する

1.1What's DP?

- そもそも DP（動的計画法）とは何か？
  - A. 無限期間に渡る最適化問題を解く方法
- とりあえず有限期間の最適化問題を考える

(例 1) 最適消費問題 (1 期間)

$$\max_{c} \quad V(I,p) = u(c)$$
$$\text{subject to} \quad pc = I$$

p = price vector c = consumption vector
I = income u = utility function
V = indirect utility function

1.1What's DP?

- ラグランジュの未定乗数法であっさり解けます
- 例 1 は 1 期間についての最適化。→期間が増えた場合はどうする？
- 1 期間以上に渡る最適化について考えなくてはいけないケース
  →最適成長問題、最適消費（多期間、耐久財など)、投資 etc
- 無限期間にわたる最適化問題に対する一般的解法が DP

1.2 有限期間最適化問題

- まず 2 期間の最適消費問題を考える
  （例 2）ケーキ消費問題（2 期間）

$$\begin{aligned} \max_{c_0, c_1} \quad & u(c_0) + \delta u(c_1) \\ \text{subject to} \quad & c_0 + c_1 \leq \bar{x} \\ & c_0 \geq 0 \\ & c_1 \geq 0 \end{aligned}$$

  $\bar{x}$ = ケーキ総量 δ = 割引因子 (discount factor)
- KKT 条件から解ける

1.2 有限期間最適化問題

- KKT 条件より（内点解を仮定）

$$\boldsymbol{u'(c_0^*) = \lambda}$$
$$\boldsymbol{\delta u'(c_1^*) = \lambda}$$

- 従って求める解は

$$\boldsymbol{-u'(c_0^*) + \delta u'(c_1^*) = 0}$$
$$\boldsymbol{c_0^* + c_1^* = \bar{x}}$$

- これを 2 期間から有限期間 T まで拡張した場合どうなるか

1.2 有限期間最適化問題

- 実質的にやることは同じ（KKT 条件より求まる）

$$\delta^t u'(c_t^*) = \lambda \; (t = 0, 1 \dots T - 1)$$

- 求める解は

$$-\delta^{t-1} u'(c_{t-1}^*) + \delta^t u'(c_t^*) = 0$$

$$\sum_{t=0}^{T} c_t^* = \bar{x}$$

1.2 有限期間最適化問題

- 有限期間最適化における要点は解を求めるプロセスにおいて連立方程式を解いていること
- 無限期間は無限個の連立方程式が出てくるがこれは解けない
  →つまり無限期間の場合は KKT 条件から解く方法は使えない
- (また、有限期間問題は T 期から逆向きに解くことが可能だが無限期間だと不可能)
- 無限期間における最適化問題を定式化する

1.3 無限期間最適化問題

- 一般形は次の形になる

$$\max_{x_t\ t=0,1,\ldots} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f(x_t, x_{t+1})$$
$$\text{subject to } \Gamma(x_t, x_{t+1}) \geq 0$$
$$x_0 = \bar{x_0}$$

- とりあえず、$\Gamma(x_t, x_{t+1})$ は x_t, x_{t+1} の関係式、$\bar{x_0}$ は外生的に与えられる 0 期での初期条件として理解すればよい。具体例は次ページから与える。

1.3 無限期間最適化問題

- 再びケーキ消費問題に戻る
- 初期条件は $\bar{x}$,t 期での残りケーキを x_t で表すと、t 期での消費は $x_t - x_{t+1}$ で表される。よって、最大化問題は

$$\max_{x_t \; t=0,1,\ldots} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(x_t - x_{t+1})$$

$$\text{subject to} \quad x_t - x_{t+1} \geq 0 \ (t = 0, 1 \ldots)$$

$$x_0 = \bar{x}$$

- 前ページとの比較で、これは DP の一般形であるとすぐに分かる

1.4 DP(non stochastic)

- とりあえず最大化する目的関数を書き下してみる

$$u(x_0 - x_1) + \delta u(x_1 - x_2) + \dots$$

- x_1 で微分して1階条件を求めると次の式が導出される

$$u'(x_0 - x_1) = \delta u'(x_1 - x_2)$$

- x_t で微分した式は次のようになる

$$u'(x_t - x_{t+1}) = \delta u'(x_{t+1} - x_{t+2})$$
$$u'(c_t) = \delta u'(c_{t+1})$$

- 上の式をオイラー方程式と呼ぶ

1.4 DP(non stochastic)

- オイラー方程式の一般形は次式 $(t = 1, 2 \dots)$

$$\frac{\partial}{\partial x_t} f(x_{t-1}, x_t) + \delta \frac{\partial}{\partial x_t} f(x_t, x_{t+1}) = 0 \quad (1)$$

- オイラー方程式だけで最適解が求まるか？
  → NO
- ケーキ問題を例にとると、最後にはケーキを全部消費し尽くすのが最適消費であることが自明
- オイラー方程式だけでは最後にケーキを消費し尽くすない消費計画が選ばれる可能性がある

1.4 DP(non stochastic)

- オイラー方程式に加えて次の条件を与える

$$\lim_{t \to \infty} \delta^t \frac{\partial}{\partial x_t} f(x_t, x_{t+1}) x_{t+1} = 0 \qquad (2)$$

- これを横断性条件という (横断性条件は十分条件だが、実は色々ある。とりあえず上から与える形で（2）式を与えることにする。)
- オイラー方程式と横断性条件を満たす条件は最適消費経路になる
- また、追加的条件を課すことで最適消費経路は必ずオイラー方程式と横断性条件を満たすことが言える（f は有界で concave, かつ $\frac{\partial f}{\partial x_t}$ >0）

1.4 DP(non stochastic)

- 今までは関数 f ,u の微分可能性を前提として話をしてきた
- しかし、関数が微分不可能であったりする場合ではオイラー方程式の話は使えない
- そこで、次はベルマン方程式による解法を説明する
- わざわざベルマン方程式を使用する理由として、必要な仮定が緩いことがある

1.4 DP(non stochastic)

- 再びケーキ消費問題を見る

$$\max_{x_t\ t=0,1,\ldots} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(x_t - x_{t+1})$$

$$\text{subject to}\quad x_t - x_{t+1} \geq 0\ (t = 0, 1 \ldots)$$

$$x_0 = \bar{x}$$

- この最大化問題の解はある条件で次の方程式の解と一致する

$$V(x) = \max_{c \in [0,x]} u(c) + \delta V(x - c)\ forall x \tag{3}$$

- 上の式をベルマン方程式という

1.4 DP(non stochastic)

- 直感的に言えば、ベルマン方程式は来期以降の最適化問題が今期でも構造的に等しいという回帰構造を利用している
- より分かりやすくするために、来期のケーキ残量を $x' = x - c$ と書くと、ベルマン方程式は次のように書き直せる

$$V(x) = \max_{x' \in [0,x]} u(x - x') + \delta V(x') \ forallx$$

- ベルマン方程式の解き方は後ほどまとめる
- ここで、ケーキの残量 x を状態変数 (state variable), 消費 c を操作変数 (contol variable) という

1.4 DP(non stochastic)

- ベルマン方程式の解が最適化問題の解と一致する条件を最適性原理（principal of optimality）という (SL p.73)

$$\lim_{t\to\infty} \delta^t V(x_t) = 0 \tag{4}$$

- 必要な仮定は、現在の x について来期の x を与える対応 $\Gamma(x)$ が全ての x について存在することと、$\lim_{n\to\infty}\sum_{t=0}^{n}\delta^t F(x_t, x_{t+1})$ が存在すること (SL Assumption 4.1 & 4.2)

1.4 DP(non stochastic)

- ベルマン方程式の解V,xは、関数となるが、このベルマン方程式の解となる関数xの方をを政策関数（Policy Function）という
- 政策関数は数値計算によってベルマン方程式を解くときに極めて有用になる（後述）

1.5 DP(stochastic)

- 次に、不確実性が導入された場合についての解説を行う
- 不確実性がない場合、ベルマン方程式を用いなくてもオイラー方程式から解を求められることが多いが、不確実性が存在する場合はベルマン方程式による解法が有用になる。
- そもそも不確実性はどこに存在するのか?
  →状態変数に不確実性を導入
- DP の場合、確率過程としてマルコフ過程を導入する

1.5 DP(stochastic)

- （１次）マルコフ過程とは、将来に起こることの確率が現在の状態によってのみ決まる過程のこと

$$Pr(z(t) = z_j | z(0), z(1) \dots z(t-1)) = Pr(z(t) = z_j | z(t-1))$$

- マルコフ連鎖の表現は次のようになる

$$Pr(z(t) = z_j | z(t-1) = z'_j) = q_{jj'}$$

$$q_{jj'} \geq 0 \ for \ all j, j' = 1 \dots N$$

$$\sum_{j=1}^{N} q_{jj'} = 1 \ for \ each j' = 1 \dots N$$

1.5 DP(stochastic)

- $q_{jj'}$ のことを遷移確率という
- また、状態 z から次の状態 z' への遷移確率を表す関数を遷移関数と言い $Q(z, z')$ と表す

1.5 DP(stochastic)

- 不確実性が導入されることで、消費計画が実行可能かについて更に困難な問題が発生する
  例：板書
- また、最大化するものも、不確実性の導入により期待効用へと変化する（下式ではとりあえず状態変数は除く）

$$
\begin{aligned}
\max_{x_t\ t=0,1,\ldots} \quad & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t f(x_t, x_{t+1}) \\
\text{subject to} \quad & \Gamma(x_t, x_{t+1}) \geq 0 \\
& x_0 = \bar{x}_0
\end{aligned}
$$

1.5 DP(stochastic)

$$
\begin{aligned}
&V^*(c_0) \\
&= \max_{c_t\ t=0,1,\ldots} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t) \\
&= \max_{c_t\ t=0,1,\ldots} u(c_0) + \delta E_0 E_1 \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u(c_t) \\
&= \max_{c_t\ t=0,1,\ldots} u(c_0) + \delta E_0 V^*(c_1)
\end{aligned}
$$

- 上の式より不確実性下の価値関数が求まった

1.5 DP(stochastic)

- 前スライドの例では状態 z を除いたがより一般的な価値関数は操作変数と状態変数の関数になる
- 効用関数を $U(x(t), x(t+1), z(t))$, t 期の z,x が与えられた時の t+1 期の x についての制約を $x(t+1) \in G(x(t), z(t))$ で表すとする
- また、消費計画を $\bar{x}[z^t]$ で表すと、$\bar{x}[z^t] = x(t+1)$ で、初期状態は $\bar{x}[z^{-1}] = x(0)$ と given となる

1.5 DP(stochastic)

- 前スライドの表記に従うと価値関数は次のようになる

$$
\begin{aligned}
&V(x, z) \\
&= \max_{y \in G(x,z)} U(x, y, z) + \delta E[V(y, z')|z]
\end{aligned}
$$

- $y \in G(x, z)$ は、z が given の時に実行可能な $x(t+1)$ をとるような制約
- 期待値 $E[V(y, z')|z]$ は遷移関数 Q について現在の状態 z を given にした状態で積分して求められる (ルベーグ積分だがやってることは期待値計算そのもの)

1.5 DP(stochastic)

- 先の価値関数から、feasibility は x,z について定義されねばならず、まず t 期には定義は次のように与えられる
  $\Phi(x(t), z(t)) = ([\bar{x}[z^s]]_{s=t-1}^{\infty} : \bar{x}[z^s] \in G(\bar{x}(z^{s-1}), z(s)), \; fors = t-1, t, t+1 \ldots$
- 0 期の時は消費計画そのものになる
  $\Phi(x(0), z(0)) = [\bar{x}[z^s]]_{t=-1}^{\infty}$
- これを満たすように最適消費は求められるか?

1.5 DP(stochastic)

- 結局、ある弱い仮定をおいた場合（SL p246 Assumption 9.1& 9.2）横断性条件を満たせば optimal かつ feasible な消費計画が求まる
- 不確実性下の横断性条件は以下のようになる

$$\lim_{t \to \infty} \delta^t E[V(\bar{x}(z_{t-1}), z(t))] = 0 \tag{5}$$

1.5 DP(stochastic)

- マクロや実証では価値関数が仮定を満たすか確認してベルマン方程式を解くことはあまりなく、勝手に微分可能性などを仮定することが多い
- とりあえずベルマン方程式を解ければよいということで実際には数値計算によって解かれる

1.6 ベルマン方程式の解き方

- Guess and verify
  → 関数形が分かってないと難しい
- Value function iteration or Policy function iteration
  → Part3 で行う数値計算パートで詳しく解説するが、この２つは数値計算によって計算可能。収束するまでプログラムで繰り返し計算させることが肝になる

1.7 参考文献

- Adda, Jerome, and Russell W. Cooper. Dynamic economics: quantitative methods and applications. MIT press, 2003.
- Stokey, Nancy, and R. Lucas. "with E. Prescott (1989): Recursive Methods in Economic Dynamics." 3.
- Acemoglu, Daron Lecture Note "Advanced Economic Growth" http://economics.mit.edu/files/2013
- 原千秋、梶井厚志　Lecture Note http://www.hara.kier.kyoto-u.ac.jp/NoteByInami3.pdf