平成 24 年度　ミクロ計量経済学
講義ノート 9 動学離散選択モデルの構造推定

このノートでは、動学離散選択モデルの推定を考察する。経済主体が将来を見越して各時点で離散選択をしている経済モデルを考え、その構造パラメーターを推定する手法を紹介するのが主な目的である。モデルを解くために動的計画法を扱う必要があり、その点が推定に数値計算上の問題をもたらす。どのように、推定の精度を保ったまま数値計算の負担を減らすかが、計量経済学上の重要な課題となる。

9.1 設定

行動が離散である動学モデルを考える。

状態空間を S とし、s_t を時点 t における状態 $s_t \in S$ の値とする。このノートでは、S は有限集合であるとする。連続な状態変数を扱える方法はそれほど多くなく、連絡な状態変数が観測できる場合でも、離散化してモデル化し推定を行うことが広く行われている。

時点 t における行動を d_t とする。行動の集合を D とし、やはり D は有限集合であると仮定する。

u_t を時点 t における効用とする。u_t は d_t と s_t に依存する。研究者は、u_t の関数系を未知パラメーター θ まではモデル化できているとする。β を割引因子とし、状態と行動のベクトルを $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_T)$ と $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_T)$ として、効用は、

$$U_T(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \theta) = \sum_{t=1}^{T} \beta^t u_t(s_t, d_t, \theta) \tag{1}$$

とする。

次に、s_t の動学をモデル化する。ここでは、s_t はマルコフ仮定であるとし、その遷移確率を $p_t(s_{t+1}|s_t, d_t)$ とする。なお、p_t もモデル化する必要があり、通常は、推定すべきパラメーターを導入するが、このノートでは、p_t の推定は考えず、既知とする。また、個人の行動をモデル化するため、ここでは、マルコフ的な行動をするものとする。つまり、時点 t における行動は s_t にのみ依存するとする。このとき、この個人の戦略は関数列 $\delta_t(s)$ で表すことができる。時点 t での行動は、$d_t = \delta_t(s_t)$ となる。

期待効用最大化を仮定すると、選ばれる戦略は

$$\arg \max_{(\delta_1, \ldots, \delta_T)} E[U_T(\mathbf{s}, \mathbf{d}, \theta)] = \arg \max_{(\delta_1, \ldots, \delta_T)} \sum_{t=1}^{T} \beta^t E[u_t(s_t, \delta_t(s_t), \theta)] \tag{2}$$

である。

9.2 動学的計画問題

E_t を時点 t で利用可能な情報で条件づけた期待値を表すとする。そして、時点 t での価値観数として、

$$V_t(s_t, \theta) = \max_{(\delta_t, \ldots, \delta_T)} \sum_{\tau=t}^{T} \beta^t E_t[u_\tau(s_\tau, \delta_\tau(s_\tau), \theta)] \tag{3}$$

を定義する。最適戦略は、後ろ向き推論によって求めることができる。つまり、まず、

$$\delta_T(s_T,\theta)=\arg\max_d u_T(s_T,d,\theta) \tag{4}$$

かつ

$$V_T(s_T,\theta)=\max_d u_T(s_T,d,\theta) \tag{5}$$

として、T 期目の戦略と価値関数を求めることができる。そして、$t=1,\dots,T-1$ 期においては、 $T-1$ 期から順に

$$\delta_t(s_t,\theta)=\arg\max_d\left\{u_t(s_t,d,\theta)+\beta\int V_{t+1}(s_{t+1},\theta)dp_t(s_{t+1}|s_t,d)\right\} \tag{6}$$

かつ

$$V_t(s_t,\theta)=\max_d\left\{u_t(s_t,d,\theta)+\beta\int V_{t+1}(s_{t+1},\theta)dp_t(s_{t+1}|s_t,d)\right\} \tag{7}$$

として求めることができる。

次に、$T=\infty$ かつ、モデルが定常な場合、つまり $u_t=u$ かつ $p_t=p$ の場合を考える。このときには、定常な戦略 $(\delta=\delta_t)$ を考えると、それは、

$$\delta(s,\theta)=\arg\max_d\left\{u(s,d,\theta)+\beta\int V(s',\theta)dp(s'|s,d)\right\} \tag{8}$$

を満たす。なお、価値関数 V は次のベルマン方程式

$$V(s,\theta)=\max_d\left\{u(s,d,\theta)+\beta\int V(s',\theta)df(s'|s,d)\right\} \tag{9}$$

を満たすものとして定義される。ベルマン方程式は、不動点問題と解釈することも可能であり、その場合、価値関数はベルマン方程式で与えられる不動点となる。

9.3 計量経済学モデル

パラメーター θ を、データを用いて推定するために、まずはモデルを計量経済学モデルとして解釈する。

状態変数を $s=(x,\epsilon)$ と二つにわけ、x が観測できる部分、ϵ が観測できない部分とする。

データとして、状態変数の一部 x_i と行動 d_i を $i=1,\dots,n$ にわたって観測するとする。データはパネルで利用かもしれないが、ここでは、ひとまず横断面での無作為標本が利用可能であるとする。

この節の目的は、上で考察した経済モデルを $\Pr(d_i|x_i,\theta)$ という条件付き確率のモデル化として解釈し直すことである。

まず、d_i を観測するのは、効用最大化から、

$$u(s,d_i,\theta)+\beta\int V(s',\theta)dp\left(s'|s,d_i\right)\geq u(s,d',\theta)+\beta\int V(s',\theta)dp(s'|s,d). \tag{10}$$

がすべての $d_i\neq d'$ について成り立つときである。従って、上のイベントを A とすると、

$$\Pr(d_i|x_i,\theta)=\Pr(A|x_i,\theta) \tag{11}$$

となる。

さて、この確率をもう少し扱いやすくするために次の仮定をおく。

- 加法性: $u(s,d,\theta)=u(x,d,\theta)+\epsilon\,(d)$。
- 条件付き独立性: $p\,(x_{t+1},\epsilon_{t+1}|x_t,\epsilon_t,d_t)=p\,(x_{t+1}|x_t,d_t)$ かつ $p(\epsilon_t|x_t,d_t)=p(\epsilon_t)$。
- ϵ_t は i.i.d. で、他のすべての変数と独立である。

さてここで、

$$v(x,d,\theta)=u(x,d,\theta)+\beta\int V(x',\epsilon,\theta)dp(\epsilon)dp(x'|x,d) \tag{12}$$

を選択ごとの価値関数と呼ぶ。すると、価値関数は、

$$V(s,\theta)=\max_d(v(x,d,\theta)+\epsilon(d)) \tag{13}$$

となり、d_i を観測することは、

$$v(x_i,d_i,\theta)+\epsilon(d)\geq v(x_i,d',\theta)+\epsilon(d'),\quad \forall d'. \tag{14}$$

となることと同義である。これより、ϵ の分布を仮定することにより、$v(x_i,d_i,\theta)$ を確率的効用の観測可能部分とする、多項選択モデルをたてることができる。

なお、$\tilde{V}(x,\theta)=\int V(x,\epsilon,\theta)dp(\epsilon)$ を事前の価値関数、あるいは、McFadden の社会剰余関数と呼ぶ。これは、

$$\tilde{V}(x,\theta)=\int\max_d(v(x,d,\theta)+\epsilon(d))dp(\epsilon) \tag{15}$$

であるため、選択ごとの価値関数のベクトルのか関数と書くこともできる。この関数の重要な性質は

$$\frac{\partial\tilde{V}(x,\theta)}{\partial v(x,i,\theta)}=\Pr(d=i|x,\theta) \tag{16}$$

となることである。

よく使われている仮定は、ϵ が極値分布であるというものであり、このとき、モデルは、多項ロジットモデルのようになる。つまり、

$$\Pr(d|x,\theta)=e^{v(x,d,\theta)}\Big/\sum_{d'\in D}e^{v(x,d',\theta)}. \tag{17}$$

となる。また、選択ごとの価値関数は、

$$v(x,d,\theta)=u(x,d,\theta)+\beta\int\log\left(\sum_{d'\in D}\exp(v(x',d',\theta))\right)dp(x'|x,d) \tag{18}$$

というベルマン方程式のような式の不動点として与えられる。

そうすると、対数尤度関数は、

$$L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\Pr(d_i|x_i,\theta) \tag{19}$$

となる。なお、遷移確率 $p(x_{t+1}|x_t,d_t)$ の推定行う場合は、通常は、効用関数のパラメーターの推定の前に別に行うという、2 段階推定を行う。推定法を紹介している論文では、この 1 段階目の推定誤差の 2 段階目の推定への影響、特に漸近分散への影響について議論しているので、参照のこと。

例: Rust (1987) のバスエンジン交換問題　Rust (1987) の論文は、動学計画法で表記できる経済モデルの構造推定の嚆矢となる論文であり、最初の推定法を提唱した論文である。そこで使われたモデルでは、

- 効用関数:

$$u(x, d, \theta) = \begin{cases} -\theta_1, & d = 1 \\ -\theta_2 x_t, & d = 0 \end{cases} \tag{20}$$

- 遷移確率:

$$p(x_{t+1}|x_t, d_t, \theta) = \begin{cases} g(x_{t+1}, \theta_3), & d_t = 1 \\ g(x_{t+1} - x_t, \theta_3), & d_t = 0 \end{cases} \tag{21}$$

- 割引因子 $\beta = 0$ あるいは $\beta = 0.99$

としている。なお、割引因子が識別可能であるかどうかは不明である。実際、割引因子も推定しようとすると、推定はうまくいかない。おそらく識別できないのではないかと思われるが、この点について一般的な理論があるかどうかは不明である。

9.4　入れ子型不動点アルゴリズム (NFXP)

推定を行うためには、$v(x, d, \theta)$ を導出する必要がある。しかし、この関数は通常明示的に書くことはできない。Rust (1987) によって提案されたのは、数値計算的に、各パラメータごとに $v(x, d, \theta)$ を計算して、$\Pr(d_i|x_i, \theta)$ を計算する方法である。つまり、アルゴリズムとしては、

1. θ を決める。
2. $v(x, d, \theta)$ を計算する。
3. $L(\theta)$ を計算する。
4. Newton 法などを用いて、θ の値を更新する。
5. 上で更新した新しい θ の値を用いて 1-4 を行う。
6. θ の値が収束すれば、計算を終える。

として、最尤推定量を求めるものである。この方法は、入れ子型不動点アルゴリズム (NFXP) と呼ばれる。

$v(x, d, \theta)$ を計算する方法はいつくか提案されている。

- まず、$v_0(x, d, \theta) = 0$ とする。そして、$m = 1, \ldots,$ において、

$$v_m(x, d, \theta) = u(x, d, \theta) + \beta \int \log \left(\sum_{d' \in D} \exp(v_{m-1}(x', d', \theta)) \right) dp(x'|x, d) \tag{22}$$

  として v_m を計算していき、収束させる。

- $v^a(x,d,\theta) = \sum_{k=1}^K c_k \phi_k(x,d)$ として近似関数を作る。c_k はパラメーターで、$\phi_k(x,d)$ は既知の関数である。そして、

$$\left\| v^a(x,d,\theta) - u(x,d,\theta) + \beta \int \log\left(\sum_{d' \in D} \exp(v^a(x',d',\theta))\right) dp(x'|x,d) \right\| \tag{23}$$

を最小化させるように c_k を選び、$v(x,d,\theta)$ の近似を得る。

いずれの方法も、最大値を求める繰り変えしのたびに不動点を見つける作業があるため、計算時間がかかる。この問題を解決するため、これまで色々な、計算時間の短い手法が開発されてきた。ただ、これらの手法は、その代わりに、推定量の漸近分散が大きくなるという問題もある。

9.5 条件付き選択確率法 (CCP)

計算時間をの短い手法の多くは、Hotz and Miller (1993) の条件付き選択確率法 (CCP) が元になっている。この方法は、推定量の有効性の面では問題があり、また使用可能なモデルが限られているものの、計算時間が非常に短いため、現在でも非常に有用である。

まず、手法を理解するために、選択確率 $\Pr(d_i|x_i,\theta)$ もまた、ある関数式の不動点として書けることを見る。一般に、選択確率と、

$$\Delta(x,d,\theta) = v(x,d,\theta) - v(x,1,\theta). \tag{24}$$

の間には、一対一の関係がある。実際 ϵ が極値分布のとき、つまり、モデルがロジットのようなものになるときには、

$$\Delta(x,d,\theta) = \log \frac{\Pr(d|x,\theta)}{\Pr(1|x,\theta)} \tag{25}$$

となる。これより、選択確率のベクトルは、あるオペレーター Ψ_θ があって、

$$P = \Psi_\theta(P) \tag{26}$$

と書ける。Φ_θ の式は、ある仮定の下で、明示的に書くことができる。このオペレーターが明示的に書けることが、この方法のポイントである。

CCP 推定量は、まず、P をデータから推定する。推定量を $\hat{P}$ とする。$\hat{P}$ としては、経験分布を使用することが一般的である。そして、$\tilde{P}(\theta) = \Psi_\theta(\hat{P})$ とする。$\tilde{P}(\theta)$ の要素を $\tilde{P}(d|x,\theta)$ とする。そして、Z_i^j を何らかの外生変数として、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^J Z_i^j \left[I(d_i = j) - \tilde{P}_\theta(j|x_i) \right] = 0. \tag{27}$$

を解くことで、推定量を得る。

- Arcidiacono and Miller (2011) に観測できない個人間の異質性がある場合への CCP 推定量の拡張がある。

9.6 入れ子型疑似最尤法 (NPL)

CCP 推定量は、計算時間が短いものの、推定量の分散が大きくなることが問題とされてきた。Aguirregabiria and Mira (2002) は、計算時間をそれほど増やさずに、推定量の分散を改善する、入れ子型疑似最尤法 (NPL) という方法を開発した。アルゴリズムは、次の通りである。

1. P^0 を決める。通常は、$P^0 = \hat{P}$ とする。
2. $k = 1, \ldots, K$ において、
$$\theta^k = \arg\max_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \log \tilde{P}^k(d_i|x_i, \theta), \tag{28}$$
なお $\tilde{P}^k = \Psi_\theta(P^{k-1})$、を解く。
3. $P^k = \Psi_{\theta^k}(P^{k-1})$ とする。
4. 2-3 を K 回繰り返す。θ^K を求める推定量とする。

この方法は $K = 1$ なら、CCP と同じ方法で、$K = \infty$ なら、NFXP と同じ方法になる。また、P^0 が一致推定量なら、θ の推定量の一致性も K が有限でも保証される。収束するまで繰り返すなら、初期値の一致性は必要ない。

実験によると、K が非常に小さい (4 回など) でも NFXP に見劣りしない精度の推定量を得ることができるようである。

- この方法の問題は、K を大きくした時の収束が保証されていないことである。Kasahara and Shimotsu (2012) に議論があり、また収束を保証するためにどのように手法を変更すればよいかも提案されている。
- 動学ゲームの推定への拡張は、Aguirregabiria and Mira (2007) にある。

参考文献

[1] V. Aguirregabiria and P. Mira. Swapping the nested fixed point algorithm: A class of estimators for markov decision models. *Econometrica*, 70(4):1519–1543, 2002.

[2] V. Aguirregabiria and P. Mira. Sequential estimation of dynamic discrete games. *Econometrica*, 75(1):1–53, 2007.

[3] P. Arcidiacono and R. A. Miller. Conditional choice probability estimation of dynamic discrete choice models with unobserved heterogeneity. *Econometrica*, 79(6):1823–1867, 2011.

[4] V. J. Hotz and R. A. Miller. Conditional choice probabilities and the estimation of dynamic models. *Review of Economic Studies*, 60(3):497–529, 1993.

[5] H. Kasahara and K. Shimotsu. Sequential estimation of structural models with a fixed point constrait. forthcoming in Econometrica, 2012.

[6] J. Rust. Optimal replacement of GMC bus engines: An empirical model of Harold Zurcher. *Econometrica*, 55(5):999–1033, 1987.