極値，最大最小問題，ラグランジュの未定乗数法

作成日：November 24, 2008

今回の目標

今回は 2 変数および多変数関数の極値問題とその応用を扱います．まずは極値や最大値などの求め方を覚え，とにかく計算できるようになりましょう．ラグランジュの未定乗数法は一年の講義ではやらないかもしれませんが，応用上非常に大切です．

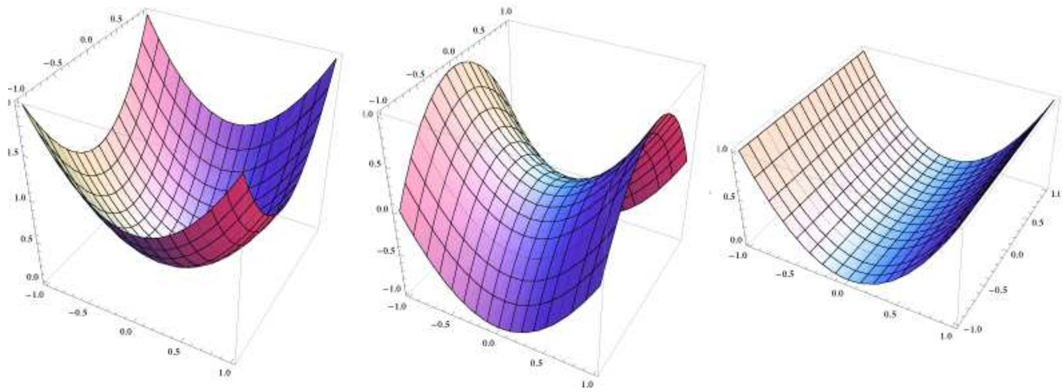
2 次曲面

ここでは極値を分類する最初の Step として 2 次曲面の極値の分類について述べる．2 次曲面とは $z = f(x, y)$ で $f(x, y)$ が 2 次の多項式という場合である．適当に座標変換して $f(x, y)$ が 2 次の同次多項式とし，原点での振る舞いを調べる．

次の 3 つの型の 2 次形式 $z = f(x, y)$ が重要である．

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (2) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (3) $f(x, y) = x^2$

原点の近傍でのグラフはそれぞれ次のようになる．



左図 $z = x^2 + y^2$ のとき原点で極値をもつ．中央の図 $z = x^2 - y^2$ では方向によって上に凸だったり下に凸だったりするので，極値をもたない．形が馬の鞍に似ていることからこのような形になっている点を鞍点と呼ぶ．右図の $z = x^2$ は一応 $x = 0$ という線上で極値を持っているが，微小変化に弱い不安定な形である．(下の補足 1 を参照.)

実は適当に変数変換すると 2 次曲面は上の 3 つのどれかと本質的に同じ型をしている．どの型になるかは判別式などを使って判定できる．

定理 1 a, b, c を実数とし，2 次形式 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を考える．$D = 4ac - b^2$ を $f(x, y)$ の判別式とする．(a, b, c のどれかは 0 でないとする.) このとき適当な実数 α, β, γ, δ を選んで $X = \alpha x + \beta y$, $Y = \gamma x + \delta y$ と変換すると

(1) $D > 0$ のとき．$f(x, y)$ は $a > 0$ なら $X^2 + Y^2$, $a < 0$ なら $-X^2 - Y^2$ という型になる．

(2) $D < 0$ のとき．$f(x, y)$ は $X^2 - Y^2$ の型になる．

(3) $D = 0$ のとき．$f(x, y)$ は $\pm X^2$ の型になる．

2変数関数の極値とヘッシアン

1変数関数 $y = f(x)$ のグラフを書いたり, 最大最小問題に答える一般的な方法は次のようであった. まず $f'(\alpha) = 0$ となる点 α を求める. 次に $f''(\alpha)$ の符号を調べて凹凸具合を調べる. $f''(\alpha) \neq 0$ のときはこれで解決するが, $f''(\alpha) = 0$ となってしまうときは, さらに高次の微分を見たり, 個別の議論が必要である. 2変数の場合も本質的に同じである. 問題は f' や f'' の符号が2変数では何に対応するのか正しく解釈することである. 2変数では f' は (f_x, f_y) に対応し, f'' の符号に相当するのがヘッシアンの符号である.

C^2 級の関数 $f(x, y)$ に対し曲面 $z = f(x, y)$ がいつ極値をもつか考える. 点 (a, b) で極値をもったとすると, 1変数のときと同様に極値においては接平面が xy-平面と平行になっていなければならないので, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. このとき点 (a, b) でテイラー展開を考えると, $(x, y) = (a, b)$ の十分小さい近傍で

$$f(x,y) - f(a,b) = AX^2 + BXY + CY^2 + o(X^2 + Y^2). \tag{1}$$

ここで $A = f_{xx}(a, b)/2$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)/2$ であり, また $X = x - a, Y = y - b$ と座標変換 (平行移動) した. これより $o(X^2 + Y^2)$ の部分を無視するとこの曲面は点 (a, b) の十分小さな近傍では $AX^2 + BXY + CY^2$ の原点付近でのグラフのように振る舞うと期待される. 実際に判別式 $4AC - B^2$ がゼロでないときはそうなっていることがわかり, 前の節の事実から次の定理がわかる. (後の補足も参照せよ.)

定理 2 関数 $z = f(x, y)$ の極値を求めるには次のようにする.

(1) まず $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となる点 (a, b) を探す.

(2) 次にこの点 (a, b) でのヘッセ行列

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

の行列式 $\det H(a, b)$ (これを**ヘッシアン**という) を計算する. このとき

(a) $\det H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ ならば**極大**,

(b) $\det H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ ならば**極小**,

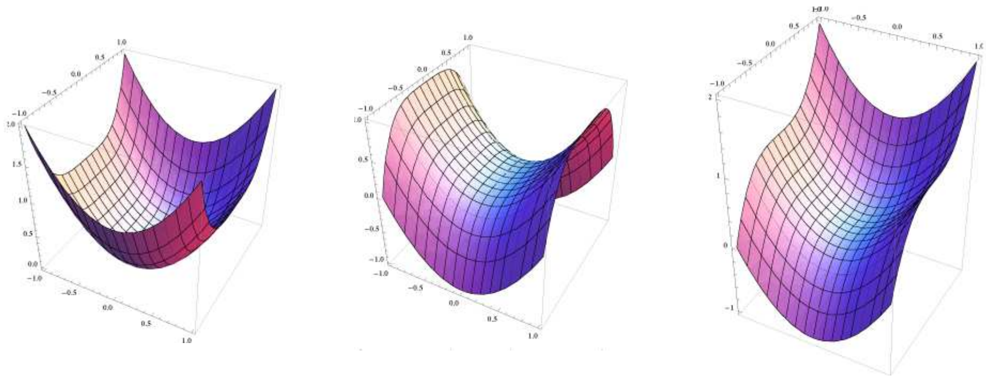
(c) $\det H(a, b) < 0$ ならば**鞍点**,

(d) $\det H(a, b) = 0$ ならば何らかの方法で個別に調べる必要がある.

補足 1. i) 曲面 $Z = AX^2 + BXY + CY^2$ の原点でのヘッシアンが判別式 $4AC - B^2$. この判定法を忘れてしまったら2次曲面の場合を思い出して類推すればよい.

ii) $\det H(a, b) = 0$ の場合について注意をしておく. この場合が厄介なのは (1) のテイラー展開において $o(X^2 + Y^2)$ の誤差が無視できないことによる. 実際, $\det H(a, b) = 0$ つまり $4AC - B^2 = 0$ の場合として, 原点の近傍で $z = f(x, y) = x^2$ という曲面の振る舞いを考える. このとき $f(x, y)$ と $x^2 + y^4$, $x^2 - y^4$, $x^2 + y^3$ は原点の近傍で $o(x^2 + y^2)$ の違いしかないが, グラフの形 (極値かどうか) はまったく異なる. (高次の項 y^4, $-y^4$, y^3 の影響をも

ろにうける! 下の図を参照.) 一方判別式が 0 でない 2 次式 x^2+y^2 や x^2-y^2 の原点近傍でのグラフの形は $o(x^2+y^2)$ のずれで安定である.



補足 2. 今は 2 変数の場合であったが, 多変数の場合でも考え方は同じである. つまりテイラー展開の 2 次の項に注目して, 多変数の 2 次曲面の凹凸問題に帰着する. やはりヘッセ行列が重要になるが, 今度はヘッシアンの正負だけでは極値かどうか判定できない. しかしヘッシアンが 0 でないときは, 主小行列式というものの正負から判定できる. そしてヘッシアンが 0 のときは 2 変数のときと同様個別の議論が必要になる. 例えば杉浦光夫, 解析入門 I の §8 を見よ. 特に定理 8.3 と定理 8.4 とその系を見よ.

ラグランジュの未定乗数法

ラグランジュの未定乗数法とは条件つき極値問題を解くのに有効な方法である. たとえば x,y が $g(x,y)=0$ という条件を満たしながら動くとき, $z=f(x,y)$ がいつ極値をとるかといった問題である. このような問題は最大最小問題を解くときに自然に発生する. 問題自体に条件がついている事も多いが, $x^2+y^2\le 1$ という範囲で $z=f(x,y)$ の最大最小問題を考えると, 内点の集合 $x^2+y^2<1$ においては, 前の節の定理によって極値を求めることができる. これらの極値が実際に最大値や最小値になっているかどうかは, 境界 $x^2+y^2=1$ における $z=f(x,y)$ の最大最小値を求めて比較する必要がある. このようにして自然に条件つき極値問題に導かれる.

ラグランジュの未定乗数法 条件 $g(x,y)=0$ のもとに $f(x,y)$ が点 (a,b) において極値をとるとき, $(g_x(a,b),g_y(a,b))\neq \mathbf{0}$ ならば

$$(f_x(a,b),f_y(a,b))=\lambda\,(g_x(a,b),g_y(a,b))$$

を満たす実数 λ が存在する. 特に方程式

$$g(x,y)=0,\quad f_x(a,b)=\lambda\,g_x(a,b),\quad f_y(a,b)=\lambda\,g_y(a,b) \tag{2}$$

において a,b,λ を未知数と思うと方程式の数と未知数の数はともに 3 なので, 逆にこの方程式を満たす a,b,λ を (有限個) 求めることができる. (つまり極値をとる点 (a,b) の候補がわかる.)

補足 3. i) 条件 (2) は 3 変数関数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ の (条件なし) 極値条件のひとつ

$$F_x(x,y,\lambda)=F_y(x,y,\lambda)=F_\lambda(x,y,\lambda)=0$$

になる．よって $F(x,y,\lambda)$ の停留点 (微分がすべて消える点) を求めると覚えた方が, 覚えやすいかもしれない．

ii) ラグランジュの未定乗数法はあくまで極値の候補を求める方法であって, 候補となった点で実際に極値をもつかどうかは, 適当な方法で調べなければならない．2 変数の場合, これらの候補が極値をもつかどうかの判定法として次がある．

定理 3 $F(x,y,\lambda)$ を補足 3 の i) のように定義する．$(x,y,\lambda)=(a,b,\lambda_0)$ が $F(x,y,\lambda)$ の停留点だったとする．このとき $(x,y,\lambda)=(a,b,\lambda_0)$ における 3 変数関数 $F(x,y,\lambda)$ のヘッシアンが正ならば極大値, 負ならば極小値をもつ．このヘッシアンは縁付きヘッシアン (bordered hessian) と呼ばれ, 具体的には次の行列式に等しい．

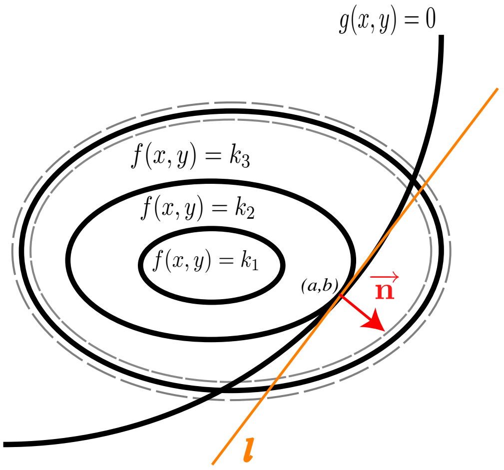
$$\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & F_{xx}(a,b,\lambda_0) & F_{xy}(a,b,\lambda_0) \\ g_y(a,b) & F_{yx}(a,b,\lambda_0) & F_{yy}(a,b,\lambda_0) \end{vmatrix}$$

(縁付きヘッシアンが 0 になるときはこの方法では判定できない.)

一般に極値の候補が実際に極値かどうか決定するのは複雑な問題になることが多いが, 最大最小値を知りたいときは, 候補を求めるだけで十分なことが多い．(次の節を参照.)

iii) 点 (a,b) が未定乗数法を使って極値の候補かどうか判定するとき, 条件 $g(x,y)=0$ が $(g_x(a,b),g_y(a,b))\neq\mathbf{0}$ を満たす必要がある．$(g_x(a,b),g_y(a,b))=\mathbf{0}$ のときは, 点 (a,b) は $g(x,y)=g_x(x,y)=g_y(x,y)=0$ という 3 つの方程式の解という強い制約を受けるので, 通常これからこのような (a,b) を具体的に求めることが可能である．これらも極値の候補であり, これらが本当に極値かどうか調べるには個別の議論が必要になる．

iv) ラグランジュの未定乗数法の直感的な説明は次のようである．与えられた実数 k に対し $f(x,y)=k$ となる x,y の軌跡 (等高線) を考える．そして k をいろいろ動かして等高線の様子をみる．例えば $k=k_1,k_2,k_3$ と動かしたときに下の図のようになっていたとする．



$k=k_1$ のときは等高線 $f(x,y)=k_1$ と $g(x,y)=0$ が交わっていないので, $g(x,y)=0$ をみたし $f(x,y)=k_1$ を満たす (x,y) はない．とくに k_1 は極値ではない．(そもそも $f(x,y)$ は値

k_1 をとらない.) $k = k_3$ のときは $g(x,y) = 0$ をみたす (x,y) で $f(x,y) = k_3$ となるものがある. しかし k_3 を微小な $\epsilon > 0$ だけ変化させた等高線 $f(x,y) = k_3 \pm \epsilon$(図では破線) を考えると, やはり $g(x,y) = 0$ と交わるので, $f(x,y) = k_3 \pm \epsilon$ となる (x,y) が存在する. したがって k_3 は極値ではない. これより極値になるためには少なくても等高線は $f(x,y) = k_2$ のように $g(x,y) = 0$ と接していないといけないことがわかる. このときは点 (a,b) において $g(x,y) = 0$ と $f(x,y) = k_2$ は接線 l(高次元なら接平面) を共有する. これは共通の法線 $\vec{\boldsymbol{n}}$ をもつということに他ならない. 接平面の方程式や K109 の問 7 を思い出すと, $g(x,y) = 0$ の点 (a,b) での法線のひとつは $(g_x(a,b), g_y(a,b))$ で与えられ, $f(x,y) = k$ の点 (a,b) での法線のひとつは $(f_x(a,b), f_y(a,b))$ で与えられる. これから極値では共通の法線を持つということが, 未定乗数法の主張「$(f_x(a,b), f_y(a,b)) = \lambda(g_x(a,b), g_y(a,b))$ となる λ がある」ということに他ならない.

今は条件が一つであったが, 変数が多くて条件も多い場合にも同じ考え方でラグランジュの未定乗数法を作ることができる. K109 でも定義したように一般に $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ に対し, $\mathrm{grad} f$ を $\mathrm{grad}\, f = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ で定める.

ラグランジュの未定乗数法 (多変数多条件版) 条件

$$g_i = g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

のもとに $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ が点 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ において極値をとるものとする. このとき, もし g_i のヤコビ行列 $(\frac{\partial g_i}{\partial x_j})_{i,j}$ の階数が m ならば, $\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})$ は $(\mathrm{grad}\, g_i(\boldsymbol{a}))_i$ の張るベクトル空間 (m 次元平面) に含まれる. つまりある実数 λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ に対し次が成り立つ.

$$\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \mathrm{grad}\, g_i(\boldsymbol{a}). \tag{3}$$

補足 4. i) 上式 (3) と $g_i = 0$ をあわせると方程式の数が $n + m$ 個で, 未知数の数が $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ の $n + m$ 個なので, 乗数法を使って解 (極値の候補) が求まる.

ii) 条件 (3) は次の $n + m$ 変数関数の (条件なし) 極値条件と同じである.

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

iii) 極値の候補が実際に極値であるかどうか判定する方法として, 2 変数のときと同様, 縁付きヘッセ行列の理論がある. 今度は縁付きヘッセ行列の適当な主小行列式の正負で判定する. 数学ではあまり使わないかもしれないが, 経済学や保険数学では基本的な理論である. 将来アクチュアリーの試験などを受ける人は勉強しておくとよい. 縁付きヘッセ行列による極値判定法は, ちょっと詳しい経済数学の本になら大抵載っている. 例えば小山昭雄 著, 経済数学教室 5, 岩波書店や A.C. チャン 著, 現代経済学の数学基礎 (上), シーエーピー出版など. 数学者が書いた微分積分学の本は星の数ほどあるにもかかわらず, これが載っているものがほとんどないことは本当に驚くべきことである.

最大値最小値

関数 $y=f(x)$ の閉区間 $[a,b]$ での最大値最小値を求める一般的な手続きは以下のようであった．まず $[a,b]$ の内点の集合である開区間 (a,b) において $y=f(x)$ の最大値最小値を求める．これは開区間においては最大値最小値があったとするとそれは極値になるという事実を使って，$y=f(x)$ の極値から最大値最小値を絞り込む．次に境界での値 $f(a)$, $f(b)$ と開区間 (a,b) における最大値最小値を比べる．

2 変数関数の最大値最小値を求める方法も 1 変数の場合と基本的に同じである．例えば $f(x,y)$ の集合 D での最大値最小値を求めるときは，まず D の内点での最大値最小値を調べる．これは内点では最大値や最小値は極値になることを使って，$f(x,y)$ の極値から絞り込むことができる．次に D の境界での $f(x,y)$ の最大値最小値を求める．これは条件つき極値問題になり，ラグランジュの未定乗数法などを使って求められる．実はこの方法で最大値最小値を決定できることを保証するために次の事実を使うことが多い．

ワイヤシュトラスの定理 D を $\mathbb{R}^n$ の空でない有界閉集合とする．このとき D 上の連続関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ は D において必ず最大値と最小値をもつ．

閉集合とは大雑把にいうと境界を含んでいる集合である．例えば閉円板 $x^2+y^2\le 1$ は閉集合である．しかし開円板 $x^2+y^2<1$ は閉集合ではない．有界というのは原点からの距離が無限に行くような点列を含まないということ．

この定理は一次元のときは自明に思えるかもしれないが，一般の $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合のときはまったく非自明である．また未定乗数法を使って最大値最小値を求めるときには，理論上非常に重要である．実際，未定乗数法では極値の候補しか見つけられない．しかし最大値の存在がわかっているときは，(D の内側では) 最大値は必ず極値になるので，この候補達の中に入っている．従って未定乗数法で求めた極値の候補の中で最大のものが自動的に最大値となる．この議論では最大値が存在することが予めわかっていることが前提であり，それを保証するのによく使われるのがワイヤシュトラスの定理である．

極値がいつ最大値最小値になるかは多変数だとかなり微妙な問題である．例えば開区間 (a,b) 上のなめらかな 1 変数関数は，もし極値がただひとつでそこで極大値をもつなら，それは最大値であった．しかし 2 変数ではこの事実は正しくない．(問題 7 参照.) 最大最小問題を扱うときは，そもそも最大値や最小値が存在するのか必ず議論をすること!

例題 (Examples)

例題 1. 関数 $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ $(0<x<2\pi, 0<y<2\pi)$ の極値を求めよ．

【解答】 まず停留点 ($f_x=f_y=0$ となる点) を求める．

$$f_x(x,y)=\cos x+\cos(x+y)=0,\qquad f_y(x,y)=\cos y+\cos(x+y)=0$$

を解くと，まず $\cos x=\cos y$．これから x,y の範囲 $0<x<2\pi, 0<y<2\pi$ に注意すると，$x=y$ または $x+y=2\pi$ がわかる．$x=y$ のときは $f_x=0$ の式から

$$f_x=\cos x+\cos(2x)=\cos x+2\cos^2 x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$$

を解いて, $x = \pi$ または $\cos x = 1/2$. 従ってこの場合の停留点は $(x,y) = (\pi,\pi), (\pi/3,\pi/3), (5\pi/3, 5\pi/3)$ の三つ. $x + y = 2\pi$ の場合も同様に停留点は $(x,y) = (\pi,\pi)$ であることがわかる.

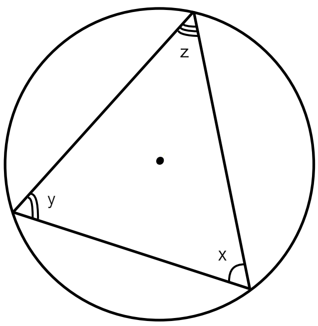
次にこの3つの点でのヘッシアンを計算しよう. ヘッセ行列は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin y - \sin(x+y) \end{pmatrix}.$$

これより $\det H(\pi,\pi) = 0$, $\det H(\pi/3,\pi/3) = \det H(5\pi/3, 5\pi/3) = 9/4 > 0$. 定理2より $(x,y) = (\pi/3,\pi/3)$ のときは $f(x,y)$ は極大値 $3\sqrt{3}/2$ を取り, $(x,y) = (5\pi/3, 5\pi/3)$ のときは $f(x,y)$ は極小値 $-3\sqrt{3}/2$ を取る. $(x,y) = (\pi,\pi)$ のときはヘッシアンからは何もわからない. しかし $f(x,x) = 2\sin x + \sin(2x) = 2\sin x(1 + \cos x)$ より, x が π に十分近いとき, $x < \pi$ なら $f(x,x) > 0$ であり, $x > \pi$ なら $f(x,x) < 0$ である. よって $(x,y) = (\pi,\pi)$ のどんな小さな近傍でも $f(x,y)$ は $f(\pi,\pi) = 0$ よりも大きい値も小さい値も取り得る. 従って $(x,y) = (\pi,\pi)$ は極値ではない.

例題 2. 直径1の円に内接する三角形の中で, その周の長さが最大のものを求めよ.

【解答】 下図のように角度 x, y, z を取る.



このとき内接三角形の周の長さは $\sin x + \sin y + \sin z$ である. ここで $\pi = x + y + z$ であり, 従って周の長さを最大にする問題は $\sin x + \sin y + \sin(\pi - x - y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ を $x, y > 0$ かつ $x + y < \pi$ で最大にする x, y を求める問題と同値である. 例題1よりこの関数は $x = y = \pi/3$ で唯一の極大値 $3\sqrt{3}/2$ を持つ. これからこれが最大値であると結論づけたいかもしれないが, それは間違いである. まずそもそも最大値が存在するかわからないし, 下の問題7のように唯一の極大値だからといって最大値になるわけではない. これを克服するためには次にようにする.

$\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ を境界を含めた範囲 $x, y \geq 0$ かつ $x + y \leq \pi$ で考える. (これは幾何的には退化してつぶれた三角形, つまり線分も考えることに対応する.) このとき $x, y \geq 0$ かつ $x + y \leq \pi$ で定まる集合は有界閉集合なのでワイヤシュトラスの定理より最大値が存在する. しかしこの最大値を境界で取ることはありえない. 実際境界 ($x = 0$ のときなど) におけるこの関数の最大値は2であり, これは内点 $(x,y) = (\pi/3,\pi/3)$ における値 $3\sqrt{3}/2$ より小さい. これよりこの関数は内点において最大値をとる. しかし内点で最大値となる点は極大値でなければならないから, 唯一の極大値 $(x,y) = (\pi/3,\pi/3)$ に一致する. 以上よりこの関数は $(x,y) = (\pi/3,\pi/3)$ において最大値 $3\sqrt{3}/2$ をとる. とくに正三角形のとき最大値をとる.

例題 3.　$x^2+y^2=1$ の条件のもとで，関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ の最大値最小値を求めよ．

【解答】　まず $x^2+y^2=1$ は有界閉集合なのでワイヤシュトラスの定理より最大値最小値が存在する．方法は 2 つある．一つ目の方法は $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ を $f(x,y)$ に代入し，x だけの 1 変数関数の最大最小問題にする．二つ目の方法はラグランジュの未定乗数法を使う．ここでは 2 つ目のやり方で求めてみよう．$g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおく．このとき $g=g_x=g_y=0$ となる点は存在しないのですべての点において未定係数法の仮定を満たす．従って

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

とおきこの 3 変数関数の停留点を求める．

$$F_x(x,y,\lambda)=3x^2-3-2\lambda x=0, F_y(x,y,\lambda)=3y^2-3-2\lambda y=0, F_\lambda(x,y,\lambda)=-x^2-y^2+1=0$$

を解く．最初の 2 式より x,y はともに $3t^2-2\lambda t-3=0$ の解である．ここで $x\neq y$ のときはこの x,y はこの 2 次方程式の異なる 2 根である．これより解と係数の関係から $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4\lambda^2/9+2=1$ でなければならない．しかしこのような λ は存在しない．これより $x=y$ の場合のみを考えれば良い．このときは $x=y=\sqrt{2}/2$ または $x=y=-\sqrt{2}/2$ となり，また F の停留点となる λ も存在する．したがってもし極値は存在したとすると，これらの 2 つの点に含まれている．しかし今の場合最大値最小値が存在しそれらは必ず極大値，極小値になるので，極値は 2 つ存在する．これから $(x,y)=(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$ は唯一の極大値であり，しかも最大値 $5\sqrt{2}/2$ をとると結論づけることができる．また $(x,y)=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ は唯一の極小値であり，しかも最小値 $-5\sqrt{2}/2$ をとると結論づけることができる．

例題 4.　$a_1,\ldots,a_n$ はどれかは 0 でない実数とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において，原点と超平面 $H: a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$ 上の点との最小距離は $|b|/\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ で与えられることを示せ．(最小の距離が存在することも示せ.)

【解答】　これは $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$ という条件のもとで $\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ の最小値を求める問題である．しかしこれは同じ条件のもとで $x_1^2+\cdots+x_n^2$ の最小値を求める問題と本質的に同じである．こちらを解いた方が微分が楽なので簡単である．$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_n^2$, $g(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n-b$ とおいて，未定乗数法より

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b,\quad 2x_1-\lambda a_1=0,\quad \ldots\quad ,2x_n-\lambda a_n=0$$

を解く．これから $x_i=\lambda a_i/2$ であり，$\lambda=2b/(a_1^2+\cdots+a_n^2)$ である．したがって $z_i=ba_i/(a_1^2+\cdots+a_n^2)$ とおくと，極値の候補は一点 $(z_1,\ldots,z_n)$ のみである．ここでは値

$$f(z_1,\ldots,z_n)=\frac{b^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

をとる．従ってこれが最小値であることを示せばよい．

まず最小値の存在を保証するためにワイヤシュトラスの定理が使える状況にする．実数 R を $|b|/\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ より大きくとる．このとき超平面 H の点で $|x_i| \le R$ $(i=1,\ldots,n)$ を満たす集合 D を考える．D は点 $(z_1,\ldots,z_n)$ を含むので空でない．従って D は空でない有界閉集合なのでワイヤシュトラスの定理が使えて，最小値が存在する．しかしこれは超平面 H 全体上の最小値にもなる．実際もし点 $(y_1,\ldots,y_n)$ が，ある i に対し $y_i > R$ となったとすると，この点で

$$f(y_1,\ldots,y_n) > b^2/(a_1^2+\cdots+a_n^2) = f(z_1,\ldots,z_n)$$

である．したがって点 $f(y_1,\ldots,y_n)$ は最小値ではありえない．よって $f(x_1,\ldots,x_n)$ は全超平面 H 上で最小値をもつ．これより内点で最小値をもつことがわかったので，$f(x_1,\ldots,x_n)$ は極小値をもつ．したがって極値の唯一の候補である点 $(z_1,\ldots,z_n)$ は実際極小値でなければならなく，しかも最小値を与える点と一致しなければならない．

問題 (Problems)

問題 1. i) $f(x,y)=x^2-xy+2y^2-x-2y$ の極値を求めよ．
ii) $f(x,y)=(x+y)e^{-xy}$ の極値を求めよ．

問題 2. 定理 1 を証明せよ．

問題 3. $x>0, y>0, z>0$ とする．ラグランジュの未定乗数法を使って次の関数の最大値を求めよ．
i) $x^2+y^2+z^2=a^2$ の条件下で，$xy+yz+zx$．
ii) $xy+yz+zx=k^2$ のとき，xyz．

問題 4. 陰関数定理を使ってラグランジュの未定乗数法 (2 変数版) を証明せよ．つまり C^1 級の $f(x,y)$, $g(x,y)$ に対し，条件 $g(x,y)=0$ のもとに $f(x,y)$ が点 (a,b) において極値をとるとき，$(g_x(a,b),g_y(a,b)) \neq \mathbf{0}$ ならば

$$(f_x(a,b),f_y(a,b)) = \lambda\,(g_x(a,b),g_y(a,b))$$

を満たす実数 λ が存在することを示せ．

問題 5. i) 楕円に内接する三角形の面積の最大値を求めよ．(最大値の存在も示せ.)
ii) 楕円に外接する三角形の面積の最小値を求めよ．(最小値の存在も示せ.)

問題 6. 3 次元空間に n 個の点 A_i が与えられたとする．このとき

$$PA_1^2+\cdots+PA_n^2$$

を最小にする点が存在することを示し，それを求めよ．

問題 7. $p_1, \ldots, p_n > 0$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$ のとき,

$$H := -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k$$

に最大値が存在することを示し, その値を求めよ.

問題 8. $y^2 = x^3$ のグラフを書け. また $y^2 = x^3$ という条件のもとで, 関数 $f(x, y) = y - (x+1)^2$ の最大値を求めよ. (未定乗数法は使えるか?)

問題 9. 定理 3 を証明せよ. ヒント: 1 変数関数 $y = f(x)$ の場合は, $f'(\alpha) = 0$ となる点 $x = \alpha$ における 2 次導関数の値 $f''(\alpha)$ の正負で極値かどうか判定できた. 陰関数の定理を使ってこの 1 変数の場合に帰着せよ.

問題 10. i) $y = f(x)$ を開区間 (a, b) 上で定義された C^1 級の関数とする. もし $f'(\alpha) = 0$ となる点がただ一つで, そこで $f(x)$ が極小値をもつならば, それは最小値であることを示せ.
ii) $z = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上で定義されたなめらかな関数とする. ここで f の停留点 ($f_x = f_y = 0$ となる点) がただ一つで, そこで $z = f(x, y)$ が極小値をもつとする. このとき $z = f(x, y)$ はその停留点で最小値をもつといえるか？(答えは No! 反例を具体的に構成せよ.)

問題 11. 条件なし極値問題は, 2 変数の場合ヘッシアンを使って判定する方法があったが, 多変数の場合はどうなるか？対応する理論を作れ. (補足 2 を参照.)

問題 12. 条件つき極値問題におけるラグランジュの未定乗数法に関して, 多変数の場合に, 縁付きヘッセ行列を使った極値判定法を作れ. (補足 4 を参照.)

宿題 (Homework)

問題 13. i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$ の極値を求めよ.
ii) $f(x, y) = xy(a - x - y)$ の極値を求めよ.

問題 14. 定円に外接する三角形の中で面積が最小のものが存在することを示し, それを求めよ.

問題 15. 曲面 $2xy + z^2 - 1 = 0$ と点 $(1, 1, 2)$ の最小距離を求めよ. (最小の距離が存在することも示せ.)