Imperfect Transferable Utility Matching について

池上慧

2021 年 7 月 18 日

1 何を書くか

Galichon (June 2021) に基づいて Imperfect transferable matching のモデルについてその均衡計算のアルゴリズムを理解する。そのために大体以下の内容について書く。

1. Deterministic utility / Transferable utility の基本モデルとしての Becker (1973)
   - Shapley and Shubik (1971) や Becker (1973) の主張
   - Dual problem の解釈
2. Stochastic utility / Imperfect transferable utility のモデルとしての Galichon, Kominers and Weber (2019)
   - ITU でのマッチングを Becker のような見方をするための涙ぐましい努力
   - Gauss-Seidel による均衡計算
   - Hedonic model と Gauss-Seidel の収束 (Berry, Gandhi and Haile (2013))

2 Becker model

このモデルは Transferable matching (TU) の古典的モデルであり、以降見ていく Imperfect transferable matching (ITU) の土台となるモデルである。

この世界に個人は存在せず、タイプでしか人を識別できない。女側のタイプを X、男側を Y で表す。各 $x \in X, y \in Y$ に属する個体の数はそれぞれ n_x, m_y であるとする。アンマッチは 0 で表す。(x, y) のマッチが一つ成立すると social surplus が Φ_{xy} だけ発生するとする。ここで x, y のみ特定してしまえば生み出す余剰は決定されていることに注意。この時まずマッチメイカー（以下 MM）をソーシャルプランナーとして導入して以下の社会厚生を最大化する問題を考えてみる。

$$\max_{\mu \geq 0} \sum_{x,y} \mu_{xy}\Phi_{xy} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_y \mu_{xy} \leq n_x \ \forall x \\ \sum_x \mu_{xy} \leq m_y \ \forall y \end{cases}$$

ここで μ_{xy} は (x, y) ペアでマッチした数を表す。これは LP で簡単にとける。

次にこの問題の双対問題を導いてみる。まず各制約に対する Lagrange multiplier(LM) を (u_x, v_y) と書くと Lagrange 緩和問題は以下の通り書ける。

$$\max_{\mu \geq 0} \sum_{x,y} \mu_{xy}\Phi_{xy} - \sum_x u_x \left(\sum_y \mu_{xy} - n_x\right) - \sum_y v_y \left(\sum_x \mu_{xy} - m_y\right)$$

LM は非負なのでこの緩和問題の解は元の問題の解を上から押さえてくれる。緩和問題の目的関数を整理すると以下の通りかける。

$$\max_{\mu \geq 0} \sum_{x,y} \left(\Phi_{xy} - u_x - v_y\right) \mu_{xy} + \sum_x n_x u_x + \sum_y m_y v_y$$

ここで $\mu_{xy} \geq 0$ より、一つでも $\Phi_{xy} - u_x - v_y > 0$ なるペア (x, y) が存在してしまうとこの問題の解は無限大に発散してしまう。双対問題は元の問題の上限を最小化することを考えるのでこうなってしまってはだめ。ということで制約として $\Phi_{xy} \leq u_x + v_y$ が全ての (x, y) について必要となる。よって緩和問題の解を最小化するという問題は以下の通り。

$$\begin{aligned}
&\min_{u,v \geq 0} \max_{\mu \geq 0} \sum_{x,y} \left(\Phi_{xy} - u_x - v_y\right) \mu_{xy} + \sum_x n_x u_x + \sum_y m_y v_y \\
&\text{s.t. } u_x + v_y \geq \Phi_{xy}
\end{aligned}$$

もし $u_x + v_y > \Phi_{xy}$ が解をもたらすなら、その時 $\mu_{xy} = 0$ とすることで $\left(\Phi_{xy} - u_x - v_y\right) \mu_{xy} = 0$ とするのが内部の最大化問題の解となることから、目的関数の第 1 項はどうせ 0 になることがわかる。よって μ に依存する部分を消すことができて以下の双対問題を得る。

$$\begin{aligned}
&\min_{u,v \geq 0} \sum_x n_x u_x + \sum_y m_y v_y \\
&\text{s.t. } u_x + v_y \geq \Phi_{xy} \ \forall x, y
\end{aligned} \tag{2}$$

また、この双対問題に対して、LM を μ_{xy} としてまた双対を取ると 1 が得られることも同様に確認できる。

ここで双対問題は以下のように解釈できる。X, Y にそれぞれ補助金を出すことでマッチの結果得られる効用を保証し勝手にマッチしないようにすることを目指す Anti-MM の存在を考える。Anti-MM は $x \in X$ には u_x を $y \in Y$ には v_y を与える。もちろん多額の補助金を出せば、どのペアについてもマッチして得られる余剰よりももともと持っている補助金の合計額が大きくなるのでマッチの発生を防ぐことができるが、Anti-MM はこれを最小の費用で達成することを目指す。そのためには最低限のラインとして全てのペア x, y について $u_x + v_y \geq \Phi_{xy}$ が成立していないといけない。でないと、このペアはマッチして生み出した余剰を配分した方が二人とも元々持っている補助金よりも資産を増やすことができてしまうからだ。従って、目的関数である総コスト $\sum_x n_x u_x + \sum_y m_y v_y$ を $u_x + v_y \geq \Phi_{xy}$ の下で最小化するという問題が得られ、これが双対問題である。

この問題をエージェントの立場から考えてみよう。まず双対問題 (2) の制約条件から以下の関係性を得る。

$$\begin{cases}
u_x \geq \max_y \{\Phi_{xy} - v_y\} \\
v_y \geq \max_x \{\Phi_{xy} - u_x\}
\end{cases}$$

もし、$u_x > \max_y \{\Phi_{xy} - v_y\}$ が解で成立しているとすると、u_x を少し下げることで制約を満たしながら目的関数の値を下げることができてしまう。v_y についても同様なので、結果として上式はいずれも等式で成立することがわかる。すなわち、双対問題の解を与える (u, v) は以下の関数方程式の解であることがわかる。

$$\begin{cases}
u_x = \max_y \{\Phi_{xy} - v_y\} \\
v_y = \max_x \{\Phi_{xy} - u_x\}
\end{cases} \tag{3}$$

この式は $x \in X$ の立場からすると「Anti-MM から u_x だけお金が振り込まれたけど、本当に誰ともマッチしないのがいいのだろうか？」「タイプ y とマッチしたら相手が元々持っている v_y だけ払わないといけない。その元で自分の手元に残るのは $\Phi_{xy} - v_y$ であるから、一番いいマッチ相手は $\max_y \{\Phi_{xy} - v_y\}$ の解である y ということになる。」「しかしその時得られる自分の利得は u_x で、元から自分が持っている補助金の額と同じだ。」「ということで確かに誰ともマッチせずに single でいるのがベストだな。」という話である。$y \in Y$ についても同様の意味を持つ。

つまり (u_x, v_y) はタイプ x, y それぞれとマッチするために必要な価格であると考えることができる。そして「価格を所与としてエージェントが効用最大化問題を解く」という要素と「需給が一致するように価格が設定される[*1]」という二つの要素がマッチング問題を構成しているということを含意している。そして (u_x, v_y) が価格に対応する概念であることに納得すれば、競争均衡の定義と同様に allocation に対応する μ との三組み $(\mu, (u, v))$ が「均衡」の主語であることにも納得がいく。

ようやく均衡を定義できる。主問題と双対問題で合わせて三つの変数 $(\mu, (u, v))$ がある。ここで主問題の slack 変数としてアンマッチの人数を導入することができることに気づく。すなわち $\mu_{x0} = n_x - \sum_y \mu_{xy}$ と $\mu_{0y} = m_y - \sum_x \mu_{xy}$ を定義し、以下では μ と書いた時にはこいつも含んでいるとする。それぞれの問題の解において $(\mu, (u, v))$ の間には以下のような関係性が成り立つ。

1. 主問題の制約（population constraint）

$$\begin{cases} \sum_y \mu_{xy} + \mu_{x0} = n_x \ \forall x \\ \sum_x \mu_{xy} + \mu_{0y} = m_y \ \forall y \\ \mu_{xy} \geq 0 \ \forall x, y \end{cases}$$

2. 双対問題の制約（stability condition）

$$\begin{cases} u_x + v_y \geq \Phi_{xy} \ \forall x, y \\ u_x \geq 0 \ \forall x \\ v_y \geq 0 \ \forall x, y \end{cases}$$

3. 二つの問題の Complementarity conditions

$$\begin{cases} u_x > 0 \ \Rightarrow \ \mu_{x0} = 0 \ \forall x \\ v_y > 0 \ \Rightarrow \ \mu_{0y} = 0 \ \forall y \\ \mu_{xy} > 0 \ \Rightarrow \ u_x + v_y = \Phi_{xy} \ \forall x, y \end{cases}$$

この三つの条件を満たす $(\mu, (u, v))$ を *equilibrium matching* と呼ぶ。双対問題の解釈で見た通り、双対問題の制約は stability condition と解釈することができることに注意する[*2]。ここで TU モデルと言いながら各タイプ間でなされる transfer が均衡で実現するもの以外モデルや定義に出てこないことに注意したい。このように transfer をうまくモデルから省くというのが TU モデルの肝であり、それができず transfer を明示的に考える必要があるというのが ITU を考えるのが難しくなる根本的要因である。

この TU モデルは種問題、双対問題ともに目的関数も制約も線形であることから LP solver で簡単に解ける[*3]。そして以上の議論より TU モデルにおいて社会厚生を最大化するマッチングは stability を満たすという意味で均衡であることもわかった。TU においてはこのように welfare theorem に類似した結果が成立するのである。

3 Imperfect Transferable Utility でのマッチングモデル

3.1 Transfer を入れた表現

ITU のモデルに入る前に、Becker のモデルが transfer を明示的にモデル化してもかけることを確認する。タイプ x, y の間の trasfer を w_{xy} と書く。また、x, y がマッチした時に x が得る効用を α_{xy}、y が得る効用を γ_{xy} とかき、$\Phi_{xy} \equiv \alpha_{xy} + \gamma_{xy}$ と定義する。この時、X, Y が両側で以下の効用最大化を行い、その需給を一致

[*1] これはつまり式 (3) において X,Y 両側について効用最大化問題を同時に解かなくてはいけないということ。

[*2] 文脈に即して書くと、$u_x + v_y < \Phi_{xy}$ の時、条件 3 より $\mu_{xy} = 0$ だが、このペアはマッチすれば現在の利得 u_x, v_y よりも大きい額を両者ともに得られる。すなわち条件 2 は pair wise stability を表現している。

[*3] 汎用ソルバーは速度面で最高というわけでもないしこんな単純な話ではないらしいが、まぁとりあえず解けるは解ける。

させるような価格帯系 w_{xy} を求めるという問題を自然に考えることができる。

$$u_x \equiv \max_y \{\alpha_{xy} + w_{xy}, 0\}$$
$$v_y \equiv \max_x \{\gamma_{xy} - w_{xy}, 0\}$$

そして、(μ, w) が equilibrium matching であるとは以下の３つの性質が満たされていることをいうとする。

1. Population constraint

$$\begin{cases} \sum_y \mu_{xy} + \mu_{x0} = n_x \ \forall x \\ \sum_x \mu_{xy} + \mu_{0y} = m_y \ \forall y \\ \mu_{xy} \geq 0 \ \forall x, y \end{cases}$$

2. Stability condition

$$\begin{cases} u_x \geq \alpha_{xy} + w_{xy} \ \forall x, y \\ v_y \geq \gamma_{xy} - w_{xy} \ \forall x, y \\ u_x, v_y \geq 0 \ \forall x, y \end{cases}$$

3. Complementarity condition

$$\begin{cases} u_x > 0 \implies \mu_{x0} = 0 \ \forall x \\ v_y > 0 \implies \mu_{0y} = 0 \ \forall y \\ \mu_{xy} > 0 \implies u_x = \alpha_{xy} + w_{xy} \wedge v_y = \gamma_{xy} - w_{xy} \ \forall x, y \end{cases}$$

元の均衡の定義との違いは主に stability condition であるが、$w_{xy} \in [-\alpha_{xy}, \gamma_{xy}]$ をパラメータだと思って (u_x, v_y) の取りうる範囲を考えてみると両者は同じ条件であることがわかる。すなわち、transfer(w_{xy}) を明示的に扱うことでより自然な形でマッチングを decentralized problem として理解することができるというわけである。

今、x が y とマッチしてえる効用を $U_{xy}(w_{xy})$、逆を $V_{xy}(xy)$ と書くことにする。すなわち先の becker モデルでは $U_{xy}(w_{xy}) = \alpha_{xy} + w_{xy}, V_{xy}(w_{xy}) = \gamma_{xy} - w_{xy}$ である。ここで自然な拡張として $U_{xy}(w_{xy})$ が w_{xy} について増加/減少であるが線形ではないケースではどうなるのかを考えたくなる。先に確認確認した通り Becker モデルではこれらが w_{xy} について線形であったが故に w_{xy} をキャンセルアウトでき、結果として LP である dual problem (2) とその主問題 (1) に問題を帰着できたため容易に解くことができた。従って、一般の $U_{xy}(w_{xy}), V_{xy}(w_{xy})$ に拡張したときにこの線形計画への帰着ができなくなるのは必至であり、Becker と同じようには解けなくなる。

3.2　緩和問題としての誤差項付きマッチング問題

今のままでは問題を解けない。仕方ないのである種の緩和問題を代わりに解くことを考える。ITU モデルにおける誤差項はこの緩和問題のために付け加えられた要素として理解することができる。

以下では i, j をそれぞれ X, Y 側の個人として表し、x_i, y_j を i, j が属するタイプであるとする。まず *proper bargaining set* ($\mathcal{F}_{ij}$) を導入する。定義を Galichon, Kominers and Weber (2019) から引っ張ってくると Definition 1 のようである。要するにいつもの bargaining set なのでそう理解すれば良い。さらにタイプ x, y に紐付けた bargaining set として $\mathcal{F}_{xy}$ も同じように考えることができる。これらを用いて error term を以下のようにモデルに組み入れる。

Assumption 1　$\|Y\|$ 次元の分布 P_x と $\|X\|$ 次元の分布 Q_y を x, y ごとに考える。ここで個人 i ごとに各 y について $\epsilon_{i,y}$ がこの分布に従って発生しているとする。すなわち $\epsilon_i = \left(\epsilon_{i,y}\right)_{y \in Y_0}$ である。j についても同様に $\eta_j = \left(\eta_{x,j}\right)_{x \in X_0}$ である。この時、$\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{x_i, y_j} \bigoplus (\epsilon_{i, y_j}, \eta_{x_i, j})$ となる P_x, Q_y が存在する。

DEFINITION 1. The set $\mathcal{F}_{ij}$ is a *proper bargaining set* if the three following conditions are met:

i. $\mathcal{F}_{ij}$ is closed and nonempty.
ii. $\mathcal{F}_{ij}$ is *lower comprehensive*: if $u' \leq u$, $v' \leq v$, and $(u, v) \in \mathcal{F}_{ij}$, then $(u', v') \in \mathcal{F}_{ij}$.
iii. $\mathcal{F}_{ij}$ is *bounded above*: if $u_n \to +\infty$ and v_n are bounded below, then for N large enough $(u_n, v_n) \notin \mathcal{F}$ for $n \geq N$; similarly for u_n bounded below and $v_n \to +\infty$.

この仮定は *additive separability* と呼ばれる。これは大きく以下の三つのことを含意している。

1. 個人ごとの選好の違いはマッチング相手のタイプに対してのみ存在することを許されている。マッチング相手については同じタイプの違う人を区別することはできない。
2. ひとつのタイプのペア (x, y) について注目するとその中の個々のペアの配分 (u_i, v_j) はひとつの共通のタイプ specific な配分 (U_x, V_y) から誤差項の分だけ移動したものになる。
3. ひとつのタイプのペア (x, y) の内部で個人の組む相手をどんなふうに入れ替えても全て均衡となる。なぜなら Additive separability の下では error term は誰とくっつくかに依存しておらず、どんな組み方をしても個人の得る利得に変化はないからである。

このように個人を完全に識別した上でのマッチングから、個人をタイプでしか見れないものとして考えるマッチングへと問題を変化させている。先の Becker のモデルではタイプ X は個人を完全に識別するものとなっており、同一の個人がたくさんいるというモデルであった。しかしこの緩和問題でのタイプは不完全な情報しか持っておらず、誤差項も含めてようやくマッチング相手がどんな人か、自分にとってどれだけ良い相手かが決まるモデルとなっている。さらにその誤差項はモデル外の研究者のみならずモデル内のエージェントにも観測できないものとなっている。従ってこのモデルでマッチ相手を探す問題は相手を完全に把握するのではなく相手について不完全な情報しか持ってない中で誤差を許してマッチ相手を選ぶことになる。この意味で元の問題の緩和になっている。

3.3 Individual Equilibrium から Aggregate Equilibrium へ

3.3.1 Individual Equilibrium

まず $\mathcal{F}_{ij}$ への距離関数 $D_{\mathcal{F}_{ij}}$ を以下のように定義して今までの均衡の定義を以降使いやすいように書き換えることから始める。

Definition 1 $D_{\mathcal{F}_{ij}}(u, v) \equiv \min\{z \in \mathbb{R} \mid (u - z, v - z) \in \mathcal{F}_{ij}\}$

つまりどれだけ並行移動すれば $\mathcal{F}_{ij}$ に入れるか、という値である。絵でかくと図 1 のような感じ。また、以下の距離関数の重要な性質も簡単に示せる。

Proposition 1 任意の定数 $a \in \mathbb{R}$ について $D_{\mathcal{F}_{ij}}(u + a, v + a) = D_{\mathcal{F}_{ij}}(u, v) + a$ である。

この距離関数を使うと、先に考えた transfer を明示的に扱った場合の Becker モデルの均衡は以下の三つの条件に書き換えることができる。

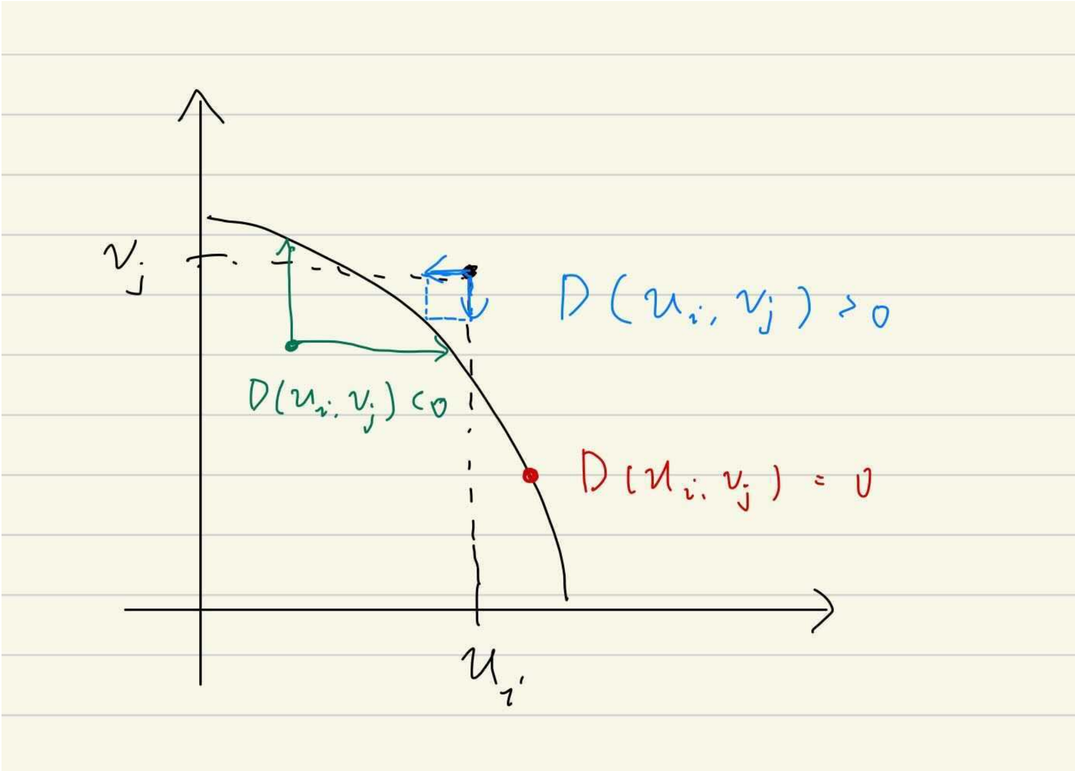

図 1　Distance function の様子

1. Population constraint

$$\begin{cases} \sum_y \mu_{xy} + \mu_{x0} = n_x \ \forall x \\ \sum_x \mu_{xy} + \mu_{0y} = m_y \ \forall y \\ \mu_{xy} \geq 0 \ \forall x, y \end{cases}$$

2. Stability condition

$$\begin{cases} D_{\mathcal{F}_{xy}}\left(u_x, v_y\right) \geq 0 \ \forall x, y \\ u_x, v_y \geq 0 \ \forall x, y \end{cases}$$

3. Complementarity condition

$$\begin{cases} u_x > 0 \implies \mu_{x0} = 0 \ \forall x \\ v_y > 0 \implies \mu_{0y} = 0 \ \forall y \\ \mu_{xy} > 0 \implies D_{\mathcal{F}_{xy}}\left(u_x, v_y\right) = 0 \ \forall x, y \end{cases}$$

また error term を入れることで緩和されたマッチング問題に対しても同様の均衡 $\left(\mu_{ij}, (u_i, v_j)\right)$ を考えることができる。ここで $\mu_{ij} \in \{0, 1\}$ であることに注意したい。すなわち、この均衡概念はあくまで個人に対して用いられるものであるということ、そして今のモデルでは選好の違いを許しているため同一の個人は一人しかいないという二点に注意する必要がある[*4]。

1. Population constraint

$$\begin{cases} \sum_j \mu_{ij} \leq 1 \\ \sum_i \mu_{ij} \leq 1 \end{cases}$$

[*4] Becker モデルは同一の個人がたくさんいる状況であったことを思い出す。

2. Stability condition

$$\begin{cases} D_{\mathcal{F}_{x_i y_j}}\left(u_i, v_j\right) \geq 0 \ \forall i, j \\ u_i, v_j \geq 0 \ \forall x, y \end{cases}$$

3. Complementarity condition

$$\begin{cases} u_i > 0 \ \Rightarrow \ \mu_{i0} = 0 \ \forall i \\ v_j > 0 \ \Rightarrow \ \mu_{0j} = 0 \ \forall j \\ \mu_{ij} = 1 \ \Rightarrow \ D_{\mathcal{F}_{x_i y_j}}\left(u_i, v_j\right) = 0 \ \forall i, j \end{cases}$$

この均衡を *individual equilibrium* と呼ぶ。しかし既に確認した通り、Additive separability の帰結としてタイプ内での組み替えについては複数均衡を許していること、そして error term は econometrician には見えないので実証上使いにくい結果しか出てこないことから、別の均衡概念が欲されるところである。具体的には μ_{ij} ではなく観測できるタイプについてのマッチング μ_{xy} が主語となるような均衡概念があると嬉しい。

3.3.2 Aggregate Equilibrium

ここでは新しい均衡概念として *Aggregate Equilibrium* を導入していく。以下では $D_{\mathcal{F}_{ij}}$ などで $\mathcal{F}$ は省略する。まず、Individual equilibrium の下では以下が成立する。

$$D_{\mathcal{F}_{ij}}(u_i, v_j) \geq 0 \ \forall i, j$$

Additive separability よりこの条件は以下を意味する。

$$D_{x_i y_j}\left(u_i - \epsilon_{i y_j}, v_j - \eta_{x_i j}\right) \geq 0 \ \forall i, j$$

すなわち、タイプについて $\mathcal{F}_{xy}$ のフロンティアに存在しなかったら、個人同士の $\mathcal{F}_{ij}$ のフロンティアには存在できないということである。

これより、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min_{i: x_i = x, j: y_j = y} \left\{D_{xy}\left(u_i - \epsilon_{iy}, v_j - \eta_{xj}\right)\right\} \\ &\leq D_{xy}\left(\min_{i: x_i = x}\{u_i - \epsilon_{iy}\}, \min_{j: y_j = y}\{v_j - \eta_{xj}\}\right) \end{aligned}$$

を得る。これを受けて、タイプの情報のみから決まる決まる効用部分を sytematic utility と呼び、X, Y が受け取る利得をそれぞれ U_{xy}, V_{xy} で書くとして、それらを以下のように定義することを考えてみる。

$$\begin{cases} U_{xy} = \min_{i: x_i = x}\{u_i - \epsilon_{iy}\} \\ V_{xy} = \min_{j: y_j = y}\{v_j - \eta_{xj}\} \end{cases} \tag{4}$$

こう定義すると上で見た通り $D_{xy}(U_{xy}, V_{xy}) \geq 0$ が任意のペア (x, y) で保証される。また、$D_{xy}(U_{xy}, V_{xy}) > 0$ があるペア (x, y) で成り立つとすると、Additive separability よりある個人のペア i, j について配分 (u_i, v_j) が $\mathcal{F}_{ij}$ に入らなくなってしまう。従って $D_{xy}(U_{xy}, V_{xy}) = 0$ が全てのペア (x, y) で成立する。すなわちこのように定義した systematic utility はタイプに関する bargaining set のフロンティアに存在することが保証される。

Individual equilibrium の下で systematic utility に成立するこの性質は「均衡」として望ましい性質である。なぜならば、Additive separability の仮定の下では、$D_{xy}(U_{xy}, V_{xy}) < 0$ の時その中の個人のペア (i, j) の配分 (u_i, v_j) も $\mathcal{F}_{ij}(u_i, v_j) < 0$ となってしまい両者にとってより良い配分が存在することになってしまうし、$D_{xy}(U_{xy}, V_{xy}) > 0$ ならば (u_i, v_j) も実現できない配分になってしまうからである。

また、systematic utility の定義である式 (4) は以下のことを含意する。

$$\begin{aligned}
&U_{xy} = \min_{i:x_i=x}\{u_i - \epsilon_{iy}\} \ \forall x, y \\
&\Rightarrow \ U_{xy} \leq u_i - \epsilon_{iy} \ \forall i : x_i = x, \ \forall x, y \\
&\Leftrightarrow \ u_i \geq U_{xy} + \epsilon_{iy} \ \forall i : x_i = x, \ \forall x, y \\
&\Leftrightarrow \ u_i \geq \max_y \{U_{xy} + \epsilon_{iy}\} \ \forall i : x_i = x, \ \forall x
\end{aligned}$$

ただし、Additive separability の下ではこの不等式は等号で成立する。従って、Individual equilibrium の下で先のように定義した systematic utility を用いると X の問題は以下の離散選択問題として捉えることができるというわけである。

$$u_i = \max_y \{U_{xy} + \epsilon_{iy}\}$$

これは $y \in Y$ についても同様のことが言える。この「離散選択問題に帰着できる」というのは Becker モデルでも実現した性質であり、「均衡」の性質として欲しいものである。

そして Becker モデルを思い出すと「均衡」の性質としては「需給の一致を達成する価格」という要素が欲しいことに気づく。だが今 U_{xy}, V_{xy} を直接扱っていて transfer に対応するものがないことにも気づく。ただこれはそこまで大きな問題ではなく、$U_{xy} = U_{xy}(w_{xy}), V_{xy} = V_{xy}(w_{xy})$ の略称とでも思っておけば良い。「均衡」の定義として allocation と価格のペアを主語にしたい気持ちはあるが、ここでは煩雑にならないように tarnsfer (w_{xy}) を省略して $(\mu_{xy}, (U_{xy}, V_{xy}))$ を主語として「均衡」を定義することにする。すなわち、需給を一致させる w_{xy} ではなく、需給を一致させる w_{xy} の下で実現される systematic utility のペア (U_{xy}, V_{xy}) を均衡の主語とする。

さて、では肝心の「需給の一致」はどのように表記できるかを考える。Galichon and Salanie (2021) の結果は「需給の一致」を非常にシンプルに表現してくれるのでそれを使う。ここまでですでに両サイドの離散選択問題としてマッチング問題を表現することについては納得できているため、以下のような *generalized entropy* を定義したくなる。

$$\begin{cases} G(U) \equiv \sum_x n_x \mathbb{E}\left[\max_y \{U_{xy} + \epsilon_{iy}\}\right] \\ H(V) \equiv \sum_y m_y \mathbb{E}\left[\max_x \{V_{xy} + \eta_{xj}\}\right] \end{cases}$$

ここで期待値はそれぞれ ϵ_i, η_j についてのものである。Daly-Zachary-Williams 定理からタイプ x のタイプ y への需要、タイプ y のタイプ x への需要はそれぞれ $\varrho_{xy} = \frac{\partial G(U)}{\partial U_{xy}}, \varphi_{xy} = \frac{\partial H(V)}{\partial V_{xy}}$ で得られる。「需給の一致」は全てのペア (x, y) についてこの二つが一致していることに他ならない。従って、$\nabla G(U) = \nabla H(V)$ が需給の一致を表現している。

以上で均衡に欲しい要素が individual equilibrium の概念から浮かび上がってきた。これらの性質を *Aggregate equilibrium* の定義として採用する。

Definition 2　$(\mu_{xy}, (U_{xy}, V_{xy}))$ は以下の性質を満たすとき Aggregate equilibrium であるという。

1. Population constraint
2. Feasibility: $D_{xy}(U_{xy}, V_{xy}) = 0 \ \forall x, y$
3. Market clearing: $\mu = \nabla G(U) = \nabla H(V)$

さらに、Galichon and Salanie (2021) に従って G, H の Legendre 変換を $G^\star, H^\star$ とすると以下の主張が成り立つ。

Proposition 2　Population constraint を満たす μ_{xy} を Aggregate equilibrium matching であるようにす

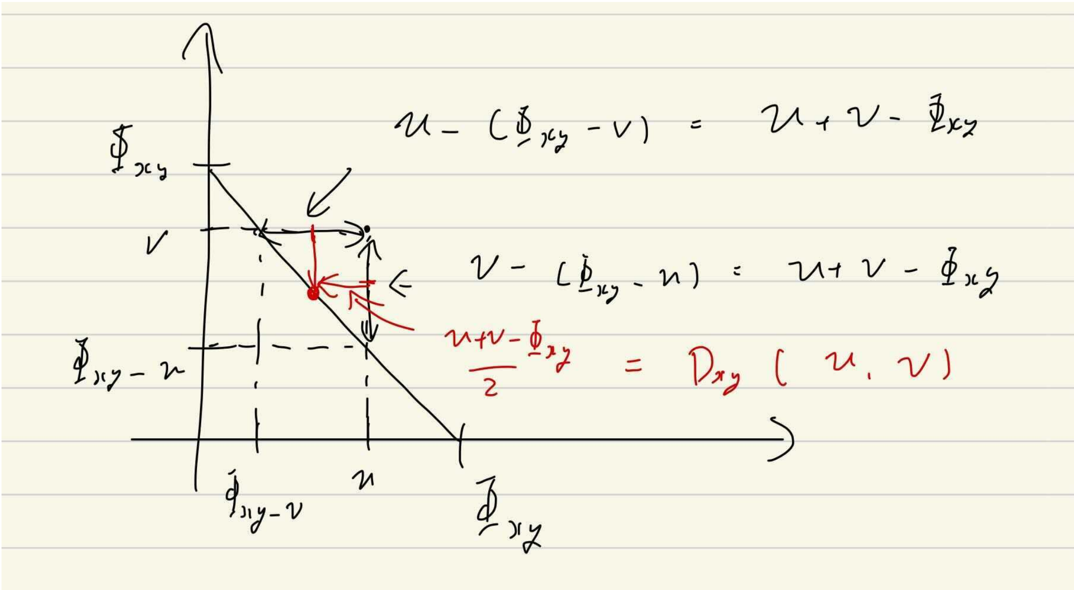

図 2　Choo and Siow (2006) の $\mathcal{F}_{xy}$ と $D_{xy}(u,v)$

る U_{xy}, V_{xy} が存在することの同値条件は、

$$D_{xy}\left(\frac{\partial G^\star(\mu)}{\partial \mu_{xy}}, \frac{\partial H^\star(\mu)}{\partial \mu_{xy}}\right) = 0$$

が全ての x, y で成立することである。

ここで注目すべきは最後の式が μ についてのみの式になっているところである。すなわち、Aggregate equilibrium の定義における三つ目の条件は μ と U, V を繋ぐ役割を果たしており、Generalized entropy の Legendre 変換はその一般的な表現を与えてくれるということである。逆に言えば、Legendre 変換を経由しなくても μ と (U, V) を繋ぐ式が得られていれば、それを二つ目の条件に入れることでマッチング μ についてのみの式と population constraint のみに還元することができるということである。

また、最後の指揮を μ_{xy} についてといたものをマッチングファンクションと呼び、通常アンマッチの数 μ_{x0}, μ_{0y} の関数としてかける。すなわち、$\mu_{xy} = M_{xy}\left(\mu_{x0}, \mu_{0y}\right)$ である。従って、Prop 2 の含意として、$M_{xy}(\mu_{x0}, \mu_{0y})$ を population constraint に組み入れて (μ_{x0}, μ_{0y}) についての連立方程式を解けば均衡マッチング μ_{xy} を計算できる、ということになる。以下ではまずこの事実を Choo and Siow (2006) で確認する。

3.4　具体例としての Choo and Siow（2006）

このモデルは ϵ_{iy}, η_{xj} が独立に同一の Gumbel 分布に従うとしたモデルである。この時離散選択モデルについての結果から $U_{xy} = \ln \frac{\mu_{xy}}{\mu_{x0}}, V_{xy} = \ln \frac{\mu_{xy}}{\mu_{0y}}$ であることが知られている。これが先に述べたような、「Legendre 変換を経由しないで μ と U, V を繋ぐ結果」に相当する。Prop 2 から、マッチングファンクションを計算するには以下のようにすれば良い。

$$\begin{aligned}
& D_{xy}\left(\ln \frac{\mu_{xy}}{\mu_{x0}}, \ln \frac{\mu_{xy}}{\mu_{0y}}\right) = 0 \\
& \Rightarrow\ \ln \mu_{xy} + D_{xy}\left(-\ln \mu_{x0}, -\ln \mu_{0y}\right) = 0 \\
& \Rightarrow\ \mu_{xy} = \exp\left(-D_{xy}\left(-\ln \mu_{x0}, -\ln \mu_{0y}\right)\right) \ \equiv\ M_{xy}\left(\mu_{x0}, \mu_{0y}\right)
\end{aligned}$$

ここで $D_{xy}(u,v) = \frac{u+v-\Phi_{xy}}{2}$ であることが図 2 から容易に確認できる。

従ってマッチングファンクションは以下の表現を得る。

$$M_{xy}^{CS}\left(\mu_{x0},\mu_{0y}\right)=\exp\left(-\frac{-\ln\mu_{x0}-\ln\mu_{0y}-\Phi_{xy}}{2}\right)=\exp\left(\frac{\ln\mu_{x0}+\ln\mu_{0y}+\Phi_{xy}}{2}\right)=\sqrt{\mu_{x0}\mu_{0y}}\exp\left(\frac{\Phi_{xy}}{2}\right)$$

これを用いて population constraint を表現すると、

$$\begin{cases}\sum_y M_{xy}^{cs}(\mu_{x0},\mu_{0y})+\mu_{x0}=n_x\ \forall x\\ \sum_x M_{xy}^{cs}(\mu_{x0},\mu_{0y})+\mu_{0y}=m_y\ \forall y\end{cases}$$

である。この連立方程式は $|X|+|Y|$ この未知変数についての $|X|+|Y|$ 本の式となっているので解ける。これを解くというのが「マッチングモデルを解く」ということである。

4 均衡計算

Choo and Siow (2006) から離れて一般的に ITU モデルを考えるが、引き続き Logit error に話を絞る。すなわち、D_{xy} の形がモデルに応じて変わるだけでマッチングファンクションが $M_{xy}(u,v)=\exp\left(-D_{xy}\left(-\ln\mu_{x0},-\ln\mu_{0y}\right)\right)$ でかける状況に話を絞る。

上の例で見たように、均衡を計算するためには以下の連立方程式を解けば良い。

$$\begin{cases}\sum_y M_{xy}(\mu_{x0},\mu_{0y})+\mu_{x0}=n_x\ \forall x\\ \sum_x M_{xy}(\mu_{x0},\mu_{0y})+\mu_{0y}=m_y\ \forall y\end{cases}\tag{5}$$

これには大きく分けて二つの解法がある。一つはこの等式を FOC と見做せる関数を考えて、その多変数関数の最小化問題として解くやり方である。これを *Gradient Descent method* と呼ぶ。もう一つは連立方程式を反復法で解く *Gauss-Seidel algorithm* またの名を Iterative Proportional Fitting Procedure (IPFP) である。経済学的に面白みがあるのは IPFP なのでここではそちらのみ解説する。Gradient descent については Galichon and Salanie (2021) を参照。

4.1 Gaus-Seidel (IPFP)

アルゴリズムは以下の通り進む。

1. 初期値を設定する。
2. 他の値を所与として一つの値について方程式を解いてアップデートする。
3. アップデートされた値を所与として順番に一つずつ方程式を解いていく。
4. アップデートされなくなるまでこれを続ける。

先の Choo and Siow (2006) の例で具体的に考える。以下の連立方程式を解く。

$$\sum_y \exp\left(\frac{\ln\mu_{x0}+\ln\mu_{0y}+\Phi_{xy}}{2}\right)+\mu_{x0}=n_x$$

$$\sum_x \exp\left(\frac{\ln\mu_{x0}+\ln\mu_{0y}+\Phi_{xy}}{2}\right)+\mu_{0y}=m_y$$

手計算ではたとえ他の変数を固定したところで μ_{x0},μ_{0y} についてこの方程式を解くことは難しいが、実装上は root finding をさせればいいので特に問題はなく IPFP は実行できる。[*5] また、順次アップデートせずに古い値から新しい値へと全ての変数について一斉にアップデートすることも当然できて、こちらは *Jacobi algorithm* と呼ばれる。これら二つはどちらも *coordinate update algorithm* と呼ばれる集団に属しており、収束の証

[*5] 実は工夫すれば手計算でアップデートの式を得ることができる。詳しくは Galichon (June 2021) の Day 2 を参照。

明などは共通である。Gauss-Seidel は新しい情報をすぐ使えるため収束が早そうな一方、Jacobi の方が並列計算しやすいという利点があるので問題に応じてどちらを使うべきかは変わってくる。

4.2 Coordinate update の収束について

Berry, Gandhi and Haile (2013) の結果を使うことに経済学的面白みが直接見えるのは hedonic model のようなケースであって式 (5) を解くということに対してではない気がする。[*6] なので

1. Hedonic model の導入
2. Excess supply function から見る (Gross) substitute 性、そして均衡の存在証明
3. Berry, Gandhi and Haile (2013) の結果に基づいて均衡の唯一性を示す
4. 上記の証明が coordinate update algorithm を使った構成的証明になっていることの確認

という感じの内容を書きます。（が、疲れたので必要になったら書きます）

参考文献

Becker, Gary S., "A Theory of Marriage: Part I," *Journal of Political Economy*, 1973, *81* (4), 813–846.

Berry, Steven, Amit Gandhi, and Philip Haile, "Connected Substitutes and Invertibility of Demand," *Econometrica*, 2013, *81* (5), 2087–2111.

Choo, Eugene and Aloysius Siow, "Who Marries Whom and Why," *Journal of Political Economy*, 2006, *114* (1), 175–201.

Galichon, Alfred, "'math+econ+code' masterclass on equilibrium transport and matching models in economics," June 2021. `https://github.com/math-econ-code/mec_equil`.

_ **and Bernard Salanie**, "Cupid's Invisible Hand: Social Surplus and Identification in Matching Models," 2021.

_ **, Scott Duke Kominers, and Simon Weber**, "Costly Concessions: An Empirical Framework for Matching with Imperfectly Transferable Utility," *Journal of Political Economy*, 2019, *127* (6), 2875–2925.

Shapley, Lloyd S. and Martin Shubik, *The Assignment Game I: The Core*, Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1971.

[*6] Galichon, Kominers and Weber (2019) の Section V、population constraint を無視してる気がするんですが...