

# 測度論的確率論 2018 S1S2

## Homework 8

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 24, 2018

### 1 2.2.1

ここはちゃんとやるべき

### 2 2.2.2

$$E \left[ \left( \frac{S_n}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} E[X_i X_j]$$

である。コーシーシュワルツの不等式より、 $E[X_i X_j] \leq (E[X_i^2] E[X_j^2])^{\frac{1}{2}} = r(0)$  である。また仮定より、

$$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0 \text{ s.t. } k \geq K \Rightarrow r(k) < \epsilon$$

である。これより、 $|i - j| \leq K$  に対しては  $E[X_i X_j] \leq r(0)$  とし、 $|i - j| > K$  に対しては  $E[X_i X_j] \leq \epsilon$  で抑えられる。すなわち、

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} E[X_i X_j] \leq \frac{1}{n^2} (n(2K - 1)r(0) + n^2 \epsilon) = \frac{2K + 1}{n} r(0) + \epsilon$$

である。 $K$  は  $n$  に依存しないので  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} E[S_n^2] \leq \epsilon$  である。従って 0 に  $L^2$  収束するので 0 に確率収束する。

### 3 2.2.3

Th2.2.14 の条件を満たすことを確認する。 $U_i$  が一様分布に従うことより以下が成立。

$$E[I_n] = E[f(U_i)] = \int f(x) dx$$

さらに、 $B$  を  $\mathbb{R}$  上の可測集合とすると、 $f$  が可測関数であることより以下が成立する。

$$P(\omega \in U_1^{-1}(f^{-1}(B))) \times \cdots \times P(\omega \in U_n^{-1}(f^{-1}(B))) = P(\omega \in (f \circ U_1)^{-1}(B)) \times \cdots \times P(\omega \in (f \circ U_n)^{-1}(B))$$

また、

$$P(\omega \in U_1^{-1}(f^{-1}(B)), \dots, \omega \in U_n^{-1}(f^{-1}(B))) = P(\omega \in (f \circ U_1)^{-1}(B), \dots, \omega \in (f \circ U_n)^{-1}(B))$$

である。 $\{U_i\}$  は独立であることより上二つの左辺は等しい。従って右辺も等しくなり、 $\{f(U_i)\}$  も独立な確率変数である。以上で Th2.2.14 の条件が成立することが確認されたので、 $I_n \xrightarrow{P} \int_0^1 f(x) dx$  である。

次に  $P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$  を推定するために一様分布の実現値  $\{u_i\}_{i=1}^n$  を  $M$  セット発生させる。この時得られた  $I_n$  を  $I_n^m$  と記し、 $\bar{I}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_n^m$  とする。

$$P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = E\left[1\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

であるので、右辺のサンプル表記である  $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1 \left( |I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right)$  が題意の推定をうまく行えることを以下で示す。

$$\begin{aligned} E \left[ 1 \left( |I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \right] &= P \left( |(I_n^m - I) + (I - \bar{I}_n)| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \\ &\leq P \left( |I_n^m - I| + |I - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \\ &\leq P \left( |I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) + P \left( |I - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

$M$  個のサンプルは独立に生成され、上より可積分なので WLLN より、

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1 \left( |I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{p} E \left[ 1 \left( |I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

である。さらに、チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned} \|E \left[ 1 \left( |I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \right] - P \left( |I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right)\| &\leq P \left( |I - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \\ &\leq \frac{n}{a^2} E \left[ (\bar{I}_n - I)^2 \right] \\ &= \frac{n}{Ma^2} \text{Var}(I_n^m) \\ &= \frac{1}{a^2 M} \text{Var}(f(U_i)) \end{aligned}$$

を得る。従って  $M \rightarrow \infty$  で  $E \left[ 1 \left( |I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \right] \rightarrow P \left( |I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right)$  である。ここで「 $a_n \xrightarrow{p} b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n \xrightarrow{p} b$ 」であることより

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1 \left( |I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{p} P \left( |I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right) = P \left( |I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}} \right)$$

であり、題意が示された。

## 4 2.2.4

まず絶対値の期待値が発散することを確認する。

$$E[|X_i|] = \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{C}{k^2 \log k} = C \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \log k}$$

$k \geq 2$  において  $\frac{1}{k \log k}$  が単調減少であることより積分判定法が使える。

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx = \int_2^{\infty} \frac{(\log x)'}{\log x} dx > \lim_{x \rightarrow \infty} \log \log x = \infty$$

これより確かに先の期待値は発散する。一方で、 $kP(|X_i| > k) \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$  は成立することが以下のようにして確認できる。

$$\begin{aligned} kP(|X_i| > k) &= k \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{C}{l^2 \log l} \leq Ck \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx \\ &= Ck \int_{\log k}^{\infty} \frac{\exp(-z)}{z} dz \leq C \frac{k}{\log k} \int_{\log k}^{\infty} \exp(-z) dz = C \frac{1}{\log k} \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

従って Th2.2.12 が適用できて、

$$\mu_n = E[X_i 1(|X_i| \leq n)] = \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{C}{k \log k}$$

とおくと、 $\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$  である。さらに「交項級数は各項の絶対値が単調減少で 0 に収束するなら収束する」ので、 $\mu_n$  がこの性質を満たすことから、 $\mu_n \rightarrow \mu$  なる  $\mu$  が存在する。以上より  $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{p} 0$  である。

## 5 2.2.5

## 6 2.2.6

フビニの定理より  $E[X]$  は以下のように変形できる。

$$E[X] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1(X \geq n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1(X \geq n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

また同じくフビニの定理より、

$$E[X^2] = E\left[2 \sum_{n=1}^X n - X\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)1(X \geq n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)P(X \geq n)$$

を得る。