測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 7

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 17, 2018

1 Theorem 7.2

まず $P(\epsilon_i = 0) = P(\epsilon_i = 1) = \frac{1}{2}$ を示す。$\epsilon_i \in \{0, 1\}$ なので、1 となる確率のみ求めれば良い。$i = 1$ の時は、

$$P(\epsilon_1 = 1) = P\left(\omega \mid \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)\right) = \frac{1}{2}$$

より確かに成り立つ。$i > 1$ の時は、

$$P(\epsilon_i = 1) = 2^{i-1} \times \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$$

ここで 2^{i-1} は $\{\epsilon_j\}_1^{i-1}$ が取りうる場合の数であり、$\frac{1}{2^i}$ は実現した $\{\epsilon_j\}_1^{i-1}$ に対して $\{\epsilon_j\}_i^\infty$ を使って表現できる ω の集合の測度、すなわち $P\left(\omega \mid \omega \in \left[0, \frac{1}{2^i}\right)\right)$ である。よって確かに任意の i について $P(\epsilon_i = 0) = P(\epsilon_i = 1) = \frac{1}{2}$ が確かめられた。

次に独立性を示す。$D_i \in \{0, 1\}$ として、任意の $\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ に対して以下が成立することを示す。

$$P\left(\epsilon_{i_1} = D_1, \cdots, \epsilon_{i_m} = D_m\right) = P\left(\epsilon_{i_1} = D_1\right) \times \cdots \times P\left(\epsilon_{i_m} = D_,\right)$$

先の結果より、右辺は $\frac{1}{2^m}$ なので、左辺もこの値を取ることを示せばよい。先と同じように考えて以下をえる。

$$P\left(\epsilon_{i_1} = D_1, \cdots, \epsilon_{i_m} = D_m\right) = 2^{i_m - m} \times \frac{1}{2^{i_m}} = \frac{1}{2^m}$$

ここで $2^{i_m - m}$ は少数第 i_m 位までに自由に動かせる桁を組み合わせた時の場合の数であり、$\frac{1}{2^{i_m}}$ は各組み合わせに対して動かせる幅の測度である。よって題意は示された。

2 Ex 7.1

レクチャーノートより $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が独立であることは以下と同値である。

$$\forall \{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \subset \mathbb{N},\ L\left(X_{i_1}, \cdots, X_{i_m}\right) = L\left(X_{i_1}\right) \times \cdots \times L\left(X_{i_m}\right)$$

従って $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が独立の時、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} L\left(X_1, \cdots, X_n\right) \times L(X_{n+1}) &= L\left(X_1\right) \times \cdots \times L\left(X_n\right) \times L\left(X_{n+1}\right) \\ &= L\left(X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}\right) \\ &= L\left(\left(X_1, \cdots, X_n\right), X_{n+1}\right) \end{aligned}$$

なので確かに $(X_1, \cdots, X_n)$ と X_{n+1} は独立である。また逆に、任意の n について $(X_1, \cdots, X_n)$ と X_{n+1} が独立の時、

$$\begin{aligned} L\left(\left(X_1, \cdots, X_n\right), X_{n+1}\right) &= L\left(X_1, \cdots, X_n\right) \times L(X_{n+1}) \\ &= L\left(\left(X_1, \cdots, X_{n-1}\right), X_n\right) \times L(X_{n+1}) \\ &= L\left(\left(X_1, \cdots, X_{n-1}\right)\right) \times L(X_n) times L(X_{n+1}) \\ &\vdots \\ &= L\left(X_1\right) \times \cdots \times L\left(X_{n+1}\right) \end{aligned}$$

が成立する。任意に $\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ をとった時、上記の議論より $(X_1, \cdots, X_{i_m})$ が独立なので、そのサブセットによって構成される $(X_{i_1}, \cdots, X_{i_m})$ も独立となる。

3 Ex 7.3

X と同じ確率変数をもう一つ用意し Y とする。この時分布を $\mu(x), \mu(y)$ と書いて以下の積分を考える。

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f(y)\right)\left(g(x) - g(y)\right) \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$$

f, g はどちらも非減少関数であるので、$x \geq y$ の時は $f(x) - f(y), g(x) - g(y) \geq 0$ であり、$x < y$ の時は $f(x) - f(y), g(x) - g(y) \leq 0$ である。これより被積分関数は常に非負であることがわかる。従って上記の積分は非負である。x, y は同一視できるので、積分の線型性より以下を得る。

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f(y)\right)\left(g(x) - g(y)\right) \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = 2E\left[f(x)g(x)\right] - 2E\left[f(x)\right]E\left[g(y)\right]$$

これより、

$$2E\left[f(x)g(x)\right] - 2E\left[f(x)\right]E\left[g(x)\right] \geq 0 \ \Leftrightarrow \ E\left[f(x)g(x)\right] \geq E\left[f(x)\right]E\left[g(x)\right]$$

また、g が非増加関数の時、$-g$ が非減少関数であり、上記が適用できる。

$$E\left[-f(x)g(x)\right] \geq E\left[f(x)\right]E\left[-g(x)\right] \ \Leftrightarrow \ E\left[f(x)g(x)\right] \leq E\left[f(x)\right]E\left[g(x)\right]$$

よって題意は示された。

4 Ex 7.8

まず連続性を示す。$z, z' \in \mathbb{R}$ をとる。積分の線型性と Ex 4.3 より以下を得る。

$$|f \star g(z) - f \star g(z')| \leq \int |f(z-y) - f(z'-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y$$

ここで関数に対して以下を定義する。ただし μ は関数の定義域に対して定義された測度である。

$$\|g\|_\infty = \inf\left\{C \mid \mu\left(\{|g| > C\}\right) = 0\right\}$$

これを用いて、

$$\int |f(z-y) - f(z'-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|g\|_\infty \int |f(z-y) - f(z'-y)|\,\mathrm{d}y$$

である。仮定より $\|g\|_\infty < \infty$ であるので、$|z - z'| < \delta$ ならば $\int |f(z-y) - f(z'-y)|\,\mathrm{d}y$ が任意に小さい $\epsilon > 0$ で抑えられるような、δ が存在することを示せば定義より連続性が示されたことになる。以下ではこれを示す。

$z' - y = w$ で変数変換し、適当な $R > 0$ に対して $B_R = [-R, R]$ と定義して、三角不等式より以下を得る。

$$\begin{aligned}\int |f(z-y) - f(z'-y)|\,\mathrm{d}y &= \int |f(z - z' + w) - f(w)|\,\mathrm{d}w \\ &\leq \int \left|\left(f(z - z' + w) - f(w)\right)1_{B_R}\right|\mathrm{d}w + \int \left|\left(f(z - z' + w) - f(w)\right)1_{B_R^c}\right|\mathrm{d}w \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $|z - z'| < \frac{R}{2}$ の時、第 2 項は以下のように抑えられる。

$$\int \left|\left(f(z - z' + w) - f(w)\right)1_{B_R^c}\right|\mathrm{d}w \leq \int \left|f(z - z' + w)1_{B_R^c}\right|\mathrm{d}w + \int \left|f(w)1_{B_R^c}\right|\mathrm{d}w \leq 2\left(\int \left|f(w)1_{B_{\frac{R}{2}}^c}\right|\mathrm{d}w\right)$$

なぜなら、$|z - z'| < \frac{R}{2}$ の時、$w \in B_R^c \ \Rightarrow \ z - z' + w \in B_{\frac{R}{2}}^c$ となるからである。仮定より f は可積分関数なので、単調収束定理が適用でき、

$$\lim_{R \to \infty} \int \left|f(w)1_{B_{\frac{R}{2}}^c}\right|\mathrm{d}w = 0$$

すなわち、

$$\forall \epsilon > 0, \exists R_\epsilon > 0 \text{ s.t. } \forall R > R_\epsilon, \int \left| f(w) 1_{B^c_{\frac{R}{2}}} \right| \mathrm{d}w \le \epsilon \tag{2}$$

を得る。

次に (1) の第 1 項を抑えることを考える。まず、Ex 4.21 より、任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$\int |f - \phi_\epsilon| \, \mathrm{d}x < \epsilon$$

を満たすようなコンパクトな台を持つ連続関数 ϕ_ϵ が必ず存在する。この関数を使って以下のように抑える。

$$\begin{aligned}
\int |(f(z - z' + w) - f(w))\, 1_{B_R}| \, \mathrm{d}w \le & \int |(f(z - z' + w) - \phi_\epsilon(z - z' + w))\, 1_{B_R}| \, \mathrm{d}w \\
& + \int |(\phi_\epsilon(z - z' + w) - \phi_\epsilon(w))\, 1_{B_R}| \, \mathrm{d}w \\
& + \int |(\phi_\epsilon(w) - f(w))\, 1_{B_R}| \, \mathrm{d}w
\end{aligned}$$

5 2.1.10

積分の線型性より以下を得る。

$$\begin{aligned}
P(X + Y = n) &= E\left[1(x + y = n)\right] = E\left[\sum_m 1(x = m) 1(y = n - m)\right] \\
&= \sum_m E\left[1(x = m) 1(y = n - m)\right] = \sum_m E\left[1(x = m)\right] E\left[1(y = n - m)\right] = \sum_m P(X = m) p(Y = n - m)
\end{aligned}$$

6 Durrett 2.1.11

前問より以下が成立する。

$$\begin{aligned}
P(X + Y = n) = \sum_m P(X = m) P(Y = n - m) &= \sum_m \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \frac{e^{-\mu} \mu^{(n-m)}}{(n-m)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)(\lambda+\mu)^n}}{n!} \sum_m \frac{n!}{(\lambda+\mu)^n} \frac{\lambda^m \mu^{(n-m)}}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)(\lambda+\mu)^n}}{n!} \sum_m \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{(n-m)} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)(\lambda+\mu)^n}}{n!}
\end{aligned}$$

よって題意は示された。