卒論テーマ候補 ：ゆびすま

池上　慧

2017 年 9 月 23 日

1 「ゆびすま」とは

「ゆびすま」とは 2 人以上で行われるゲームである。ここでは 2 人で行われるケースを想定する。プレイヤーは毎回「攻め」と「守り」の役目を交互に行う。プレイヤーは毎回好きな本数の親指を上げる。「攻め」のプレイヤーは今回上がる親指の本数を予想し、掛け声とともにその予想した数をコールしながら、自分でも好きな本数だけ親指を上げる。「守り」のプレイヤーは掛け声の後に親指を好きな本数だけあげる。「攻め」がコールした数と実際にあげられた親指の総数が等しかったなら「攻め」の勝ちであり、そうでなければ「引き分け」である。引き分けたら役割を交代してどちらかが勝つまで続けるものとする。（本来であれば勝てば腕を一本減らすことができ、先に二回勝利した方の勝ちというルールであるが、ここでは最初の一回の勝利が起こるまでの、2 本 vs2 本の状況のみを想定する。）

以下ではコールできる指の本数を 2 までに限定した「限定ゆびすま」をまずは考える。このルールのもとでは、守り手の行動を $\{0,1,2\}$ だと正しく認識した場合に、混合戦略ナッシュ均衡で各アクションに割り振られる確率に大小が生じる。一方で後に提示する「通常ゆびすま」ではコールできる指の本数を 4 本まで許容していて、このルールのもとでは正しい認識を持った時、勝つ可能性のある手に振られる確率は全て等しくなる。この二つのルールによる差を何かに使えないか？

2 研究の意図するところ

ゆびすまで攻め手の戦略を決める肝は、「自分のコールと自分で揚げる親指の数の差」であることは明らかである。ここで「a とコールしながら b 本の親指を上げる」という行動を (a,b) と表記することにすると、$\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$ は自分のコールと自分のゆびの数が等しい組（set1）で、$\{(1,0),(2,1)\}$ を自分のコールが自分のゆびの数よりも 1 つ多い組（set2）、$\{(2,0)\}$ を自分のコールが自分のゆびの数よりも 2 つ多い組（set3）の 3 つに戦略を分類することができる。

これらはそれぞれ同じ組の中では勝利確率は等しい。以下で計算するように、相手の戦略を $\{0,1,2\}$、すなわちゆびを上げる本数だと捉えると、この全てをサポートに持つ混合戦略ナッシュ均衡がこのゲームの唯一のナッシュ均衡として存在し、その時以上のセットには全て等確率、すなわち $\frac{1}{3}$ ずつの確率が振られることになる。この時、各セットに含まれる戦略の数は異なっていることに注意すると、個別の戦略に振られる確率は set3 の中身、set2 の中身、set1 の中身の順番で大きくなるはずである。

しかし、この結果は直感に反するものである。$\{(2,0)\}$ を選ぶということは自分は 1 本も上げないで、相手が 2 本とも上げることを想定しているということであるが、これが実現する可能性は低そうに思えてしまう。実際、何も説明せずに友人とこのゲームを繰り返し行った時、いきなり $\{(2,0)\}$ が選ばれる回数は少なかった。

むしろ選ばれがちなのは set2、すなわち $\{(1,0),(2,1)\}$ の 2 つであった。本研究ではゆびすまにおいて set2 が戦略として選ばれやすいことの理由として、「攻め手が知らず知らずのうちに守り手の左右の手を別々の意思決定主体が操作するものだと想定してゲームをプレイしている」という仮説を検証する。

以下で計算するように、守り手の腕を別々の主体と想定した場合の混合戦略ナッシュ均衡は現実的なものが 3 つ存在し、そのどれもで set2 に高い確率が付与されている。逆に set1 や set3 には確率が付与されない均衡も存在し、それらの戦略を極端な手として嫌ってしまう傾向と合致していると言える。

3　限定ゆびすまのナッシュ均衡

計算は別紙。

(q, r, s) で case1 において守り手が $\{0, 1, 2\}$ をそれぞれ取る確率を、p で case2 において守り手の左右の腕が取る混合戦略、すなわち親指を上げる確率を、(x, y, z) で攻め手が取る混合戦略、すなわち set1, set2, set3 をとる確率を表すとする。この時、それぞれのケースでいかが混合戦略ナッシュ均衡となる。

case1：相手が統一された意思決定主体だと想定

$$\begin{cases} (q, r, s) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ (x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \end{cases} \tag{1}$$

case2：相手の左右の手を別々の意思決定主体だと想定

$$\begin{cases} p = \frac{1}{3} \\ (x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ (x, y, z) = (0, 1, 0) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} p = \frac{2}{3} \\ (x, y, z) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \end{cases} \tag{4}$$

4　データへのフィットの比べ方

ゆびすまを実際に対戦させてデータを集めることを想定する。そのデータに対して先の二つのモデルの説明度合いを比較してどちらのモデルが採択されるかを調べたい。単純に考えられるのは以下のように尤度を比較すること。

case1 に対しては通常の意味で対数尤度が計算できる。case2 に対しては以下のように EM アルゴリズムを用いてその対数尤度を計算する。$i = 1, \ldots, n$ を n 回のプレイの index とする。Y_i を攻め手が i 回目のプレイで行った戦略を示す確率変数であるとする。すなわちそのサポートは $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 0), (2, 1), (2, 0)\}$ の 6 つである。$j = 1, 2, 3$ で均衡の index として、それぞれ先の均衡 (2), (3), (4) を示すとする。この時、$f_j(y_i)$ は均衡 j がプレイ i で実現している時に、攻め手が出す戦略の確率分布関数である。先に定義された戦略の set 内では均等に確率が分配されるとすると、それぞれ以下のようになる。

$$f_1(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{9} & y_i \in \text{set1} \\ \frac{1}{3} & y_i \in \text{set2} \\ 0 & y_i \in \text{set3} \end{cases} \quad f_2(y_i) = \begin{cases} 0 & y_i \in \text{set1} \\ \frac{1}{2} & y_i \in \text{set2} \\ 0 & y_i \in \text{set3} \end{cases} \quad f_3(y_i) = \begin{cases} 0 & y_i \in \text{set1} \\ \frac{1}{3} & y_i \in \text{set2} \\ \frac{1}{3} & y_i \in \text{set3} \end{cases} \tag{5}$$

ここで均衡 j が選ばれる確率を ψ_j で書くとすると、Y_i は混合分布である $\sum_j \psi_j f_j(y_i)$ に従うとできる。missing variable として各プレイがどの均衡から生じたものなのかを示した確率変数 u_i を考えると、完全なデータが与えられた時の尤度は、$I(\cdot)$ を指示関数とすると以下のように書ける。

$$L(Y, u|\psi) = \Pi_i \; \Pi_j \; (\psi_j \cdot f_j(y_i))^{I(u_i = j)} \tag{6}$$

Q 関数の定義は以下である。

$$Q(\psi|\psi^{(0)}) = E_{\psi^{(0)}} [\log L(Y, u|\psi) \mid Y]$$

Q 関数はパラメータについて最大化されるので、パラメータに関連する部分だけ残せば最大化のための一階条件を問題なく得られる。従って以下では ψ に関係のない項は省略してイコールで記す。ただし、ψ^0 は EM アルゴリズムない

で一回前の iteration で得られたパラメータの値であり、期待値は missing variable について取られているとする。

$$
\begin{aligned}
E_{\psi^{(0)}}\left[\log\ L(Y,u|\psi)\mid Y\right] &= \sum_i \sum_j E_{\psi^{(0)}}\left[I(u_i=j)\log\ \psi_j \mid Y\right] \\
&= \sum_j \log\ \psi_j\ \sum_i E_{\psi^{(0)}}\left[I(u_i=j)\mid Y\right]
\end{aligned}
\tag{7}
$$

これをパラメータ ψ_1,ψ_2,ψ_3 について最大化することを考える。一階条件より

$$
\psi_j = \frac{1}{n}\sum_i E_{\psi^{(0)}}\left[I(u_i=j)\mid Y\right] \tag{8}
$$

である。

ここで、ベイズの公式より

$$
E_{\psi^{(0)}}\left[I(u_i=j)\mid Y\right] = P_{\psi^{(0)}}(u_i=j\mid Y) = \frac{p_{\psi^{(0)}}(y_i\mid u_i=j)\cdot p_{\psi^{(0)}}(u_i=j)}{p_{\psi^{(0)}}(y_i)} = \frac{f_j(y_i)\cdot\psi_j^{(0)}}{\sum_j \psi_j^{(0)} f_j(y_i)}
$$

を得るので、先の結果と合わせせることでパラメータの更新式として以下を得る。

$$
\forall j\quad \psi_j^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_i \frac{f_j(y_i)\cdot\psi_j^{(0)}}{\sum_j \psi_j^{(0)} f_j(y_i)} \tag{9}
$$

これによって収束させせたパラメータについて先の Q 関数の値を計算し、それを持って case2 の対数尤度とする。case1 の対数尤度と case2 の Q 関数の値を比較してモデルのフィットを比べる。

5　通常ゆびすまのナッシュ均衡

先の限定ゆびすまの時と導かれる混合戦略ナッシュ均衡における各行動集合に割り振られる確率は同じである。守り手についても同様の確率を付与する混合戦略がナッシュ均衡となっている。しかし、通常ゆびすまにおいては先に置いた set がそれぞれ set1 が $\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$、set2 が $\{(1,0),(2,1),(3,2)\}$、set3 が $\{(2,0),(3,1),(4,2)\}$ となり、集合ないの要素の数が同じであるため、各行動に割り振られる確率自体は限定ゆびすまと異なる。データへのフィットの計算も同様に行えるが、確率関数は限定ゆびすまの時と異なるものとなるので注意が必用。

6　守り手のデータを活用する

今までの話は全て攻め手の戦略について注目してきた。データのフィットも攻め手のとった行動に関してのデータのみで行えるものである。しかし守り手の行動を観察することで、「相手の意思決定主体を誤って認識してしまう」という現象が無意識に起こっているか自覚の下で起こっているのかを判断することができるかもしれない。

攻め手がわのデータを用いて、攻め手が守り手の指を別々のものとしてみているというモデルが支持された状況を考える。この時、守り手のとった行動のデータから case1 のモデル、すなわち攻め手が意思決定主体を正しく認識している時のモデルが支持されたとすると、意思決定主体を誤ってしまうのは自分がせめてになった時のみであり、守り手になった時には相手が自分の意思決定主体が統一されていることを理解した上で行動していることを想定していることになる。これはつまり自分が守り手である時は、自分が攻め手に成った時には守り手の意思決定主体を正しく認識して行動するであろうと思っているということを意味する。この場合には意思決定主体の誤認は攻め手に成った時に無意識化でなされている現象だということができるであろう。

守り手がわのデータのフィットを見るのは攻め手がわのデータを用いたものと同様にして行う。（ゆえに同様に妥当性を考えないといけない。）

7　考えたいこと

- 上で挙げたような EM アルゴリズムでも止めた尤度と通常の尤度との比較はそのまま行っていいものなのか。そもそもモデルの妥当性を検証するような枠組みで、この文脈にそぐう手法は何か。

- 「相手の意思決定に関する勘違いが最適な選択からずれた行動を誘導する」事例としては面白いと思うが、ゆびすまという文脈が陳腐すぎる気がする。どのような書き方をすれば面白くなるか。
- 限定ゆびすまと通常ゆびすまの違いを面白い形で利用できないか。