

測度論的確率論 2018 S1S2

Homework 11

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

July 23, 2018

1 Ex11.6

確率変数列 $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ に対してその分布 $\{\mathcal{L}(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ が一様にタイトであることを仮定する。この時、任意に $\epsilon > 0$ と $c_n \rightarrow 0$ を取ると、

$$P(|c_n X_n| \geq \epsilon) = P\left(|X_n| \geq \frac{\epsilon}{|c_n|}\right)$$

であるので、任意の $\delta > 0$ に対してある $N \geq 0$ が存在して以下を満たす。

$$n \geq N \Rightarrow P(|c_n X_n| \geq \epsilon) \leq P\left(|X_n| \geq \frac{\epsilon}{\delta}\right) = 1 - \mathcal{L}(X_n)\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right) + \mathcal{L}(X_n)\left(-\frac{\epsilon}{\delta}\right)$$

ϵ, δ が任意であることより $\frac{\epsilon}{\delta}$ も任意に取ることができるので、

$$\forall \epsilon, M > 0, \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow P(|c_n X_n| \geq \epsilon) \leq 1 - \mathcal{L}(X_n)(M) + \mathcal{L}(X_n)(-M)$$

である。一様タイト性の仮定より、任意の n について上式の右辺を任意に小さい η で上から抑えることのできる M が必ず存在するので、

$$\forall \epsilon, \eta > 0, \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow P(|c_n X_n| \geq \epsilon) \leq \eta$$

が成立し、これは確率収束の定義から $c_n X_n \xrightarrow{P} 0$ を意味する。

次に逆向きを示す。すなわち任意の $c_n \rightarrow 0$ に対して $c_n X_n \xrightarrow{P} 0$ が成立することを仮定する。これは以下を意味する。

$$\forall \epsilon, \delta > 0, \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow 1 - \mathcal{L}(X_n)\left(\frac{\epsilon}{|c_n|}\right) + \mathcal{L}(X_n)\left(-\frac{\epsilon}{|c_n|}\right) \leq \delta$$

また、 $c_n \rightarrow 0$ であることより、

$$\forall \epsilon, M_\delta > 0, \exists N_1 \text{ s.t. } n \geq N_1 \Rightarrow |c_n| \leq \frac{\epsilon}{M_\delta}$$

である。よって、 $N^* = \max\{N, N_1\}$ と置くと、

$$\forall \delta, M_\delta > 0, n \geq N^* \Rightarrow 1 - \mathcal{L}(X_n)(M_\delta) + \mathcal{L}(X_n)(-M_\delta) \leq \delta$$

であり、また $P(|X_n| \geq M_\delta) = 1 - \mathcal{L}(X_n)(M_\delta) + \mathcal{L}(X_n)(-M_\delta)$ である。これより $X_n \xrightarrow{P} 0$ である。確率収束するならば分布収束するので $X_n \xrightarrow{d} 0$ であり、Th11.7 より分布収束する確率変数列は明らかに一様タイトなので題意は示された。

2 Ex12.2

$\text{Var}(X_{n,m}) = E[(X_{n,m} - \theta_n)^2]$ と置いて、以下の確率変数を考える。

$$Y_{n,m} = \frac{X_{n,m} - \theta_n}{\sqrt{n} \sqrt{\text{Var}(X_{n,m})}}$$

これに対して、 $E[X_{n,m}] = \theta_n$ であることより、

$$E[Y_{n,m}] = \frac{E[X_{n,m}] - \theta_n}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var}(X_{n,m})}} = 0$$

である。また、

$$\sum_{m=1}^n E[Y_{n,m}^2] = \sum_{m=1}^n \frac{E[(X_{n,m} - \theta_n)^2]}{n\text{Var}(X_{n,m})} = 1$$

である。あとは Lindeberg 条件を確認すれば良い。

$$\begin{aligned} g_n(\epsilon) &= \sum_{m=1}^n E \left[\frac{(X_{n,m} - \theta_n)^2}{n\text{Var}(X_{n,m})} 1 \left\{ \frac{X_{n,m} - \theta_n}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var}(X_{n,m})}} > \epsilon \right\} \right] \\ &= E \left[\frac{(X_{n,m} - \theta_n)^2}{\text{Var}(X_{n,m})} 1 \left\{ \frac{X_{n,m} - \theta_n}{\sqrt{\text{Var}(X_{n,m})}} > \epsilon\sqrt{n} \right\} \right] \end{aligned}$$

とおく。ここで、

$$E \left[\frac{(X_{n,m} - \theta_n)^2}{\text{Var}(X_{n,m})} \right] = 1 < \infty$$

なので優収束定理が適用でき、 $\lim_n g_n(\epsilon) = 0$ である。これより Lindeberg 条件は満たされるので、Th12.1 より

$$\sum_{m=1}^n \frac{X_{n,m} - \theta_n}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var}(X_{n,m})}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

である。仮定より $\text{Var}(X_{n,m}) \rightarrow 1$ であるので、スラツキーの定理より、

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n (X_{n,m} - \theta_n) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_n) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

である。

3 Ex12.3

十分大きな n に対して、 $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right|$ を与える x について考える。対称性より $x \geq 0$ についてのみ考えれば良い。まず、部分積分によって標準正規分布の分布関数について以下の表現をえる。

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \times 5} + \cdots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!!} + \cdots \right] \quad (1)$$

n が奇数の時をまず考える。 S_n の定義より $P(S_n \leq x\sqrt{n})$ は、 $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ の整数に対して $\left[\frac{2k-1}{\sqrt{n}}, \frac{2k+1}{\sqrt{n}} \right)$ の範囲で定数 $\frac{1}{2} + \sum_{i=1, i \text{ is odd}}^{2k-1} \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} n C_{\frac{n-i}{2}}$ を取る。またそれ以降は 1 を取る。ここで十分大きな n においては以下の関係が成立する。

$$\sum_{i=1, i \text{ is odd}}^{2k-1} \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} n C_{\frac{n-i}{2}} \leq \Phi\left(\frac{2k-1}{\sqrt{n}}\right)$$

なぜなら、スターリングの公式と (1) より、十分大きな n において

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, i \text{ is odd}}^{2k-1} \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} n C_{\frac{n-i}{2}} - \Phi\left(\frac{2k-1}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1, i \text{ is odd}}^{2k-1} e^{-\frac{i}{2n}} \right) - e^{-\frac{(2k-1)^2}{2n}} \left(2k-1 + \frac{1}{3} \frac{1}{n} (2k-1)^3 + \cdots \right) \right\} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(2k-1)^2}{2n}} (2k-1) \left\{ \frac{k}{2} \frac{1}{2k-1} \exp\left(2 \frac{k(k-1)}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{n} (2k-1)^2 + \cdots \right) \right\} \\ &\rightarrow \frac{k}{2(2k-1)} - 1 \leq 0 \quad \forall k \end{aligned}$$

となるからである。これより、十分大きな n においては任意の $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ に対して、 $x \geq 0$ における $P(S_n \leq \sqrt{nx})$ が定数となる k 番目の区間は収束先の $\Phi(x)$ よりも下に位置することがわかった。

また、 $k < \frac{n}{2}$ について、

$$\frac{{}_nC_{k-1}}{{}_nC_k} = \frac{k}{n-k+1} < 1 \quad (2)$$

であることから、奇数の n について、

$$\frac{{}_nC_{\frac{n-1}{2}}}{{}_nC_{\frac{n-3}{2}}}, \frac{{}_nC_{\frac{n-3}{2}}}{{}_nC_{\frac{n-5}{2}}}, \dots$$

なる列は単調減少の列であることがわかる。すなわち $x \geq 0$ における $P(S_n \leq \sqrt{nx})$ のジャンプは最初のジャンプが一番大きくなることがわかった。

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$ であり、 n が奇数の時必ず $P(S_n \leq 0) = \frac{1}{2}$ となっているので、以上の議論と合わせると、 n についての \liminf を取るのであれば $x \geq 0$ における $P(S_n \leq \sqrt{nx})$ の最初のジャンプの大きさについて極限を考えれば良いことがわかった。

次に n が偶数で十分大きいときを考える。このときは $x = 0$ でジャンプが起こるので奇数の時とは少し事情が異なるので注意が必要である。定義より $0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$ として $x \in \left[\frac{2k}{\sqrt{n}}, \frac{2k+2}{\sqrt{n}}\right)$ において $P(S_n \leq \sqrt{nx}) = \frac{1}{2} + \sum_{i=0, i \text{ is even}}^{2k} \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} {}_nC_{\frac{n-i}{2}}$ である。またそれ以降は 1 を取る。奇数の時と同様に収束先の $\Phi(x)$ との大小を比較すると以下の結果が得られる。

$$\begin{cases} \Phi(x) \leq \frac{1}{2} + \sum_{i=0, i \text{ is even}}^{2k} \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} {}_nC_{\frac{n-i}{2}} & \text{when } k = 0 \\ \Phi(x) \geq \frac{1}{2} + \sum_{i=0, i \text{ is even}}^{2k} \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} {}_nC_{\frac{n-i}{2}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

また、(2) の結果より n が偶数の場合でも $x \geq 0$ におけるジャンプは初項を $x = 0$ におけるジャンプの半分とすれば減少列であることがわかっているので、(3) の結果と合わせて n についての \liminf を考えるのであれば、 $P(S_n \leq \sqrt{nx})$ の $x = 0$ におけるジャンプの半分の大きさについて極限を考えれば良いことがわかった。

以上を合わせると、 $j = 0$ におけるヒントの記法を使って、

$$\liminf_n \sup_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{n} |P(S_n \leq \sqrt{nx}) - \Phi(x)| \geq \frac{1}{2} \lim_n \sqrt{n} P(S_n = j_n)$$

と書けることがわかった。最後に $\lim_n \sqrt{n} P(S_n = j_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ であることを示す。そうであれば上式左辺は 0 以上であることが保証され題意は示される。

以下では j_n をヒントに従って定義された数列であるとする。任意の $j \in \mathbb{N}$ について、

$$\begin{aligned} \sqrt{n} P(S_n = j_n) &= \sqrt{n} \frac{1}{2} \frac{{}_nC_{\frac{n+j_n}{2}}}{{}_nC_{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{j_n}{n}\right)^{-\frac{n+j_n+1}{2}} \left(1 - \frac{j_n}{n}\right)^{-\frac{n-j_n+1}{2}} \\ &= \left(1 - \frac{j_n^2}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{j_n}{n}\right)^{-\frac{j_n}{2}} \left(1 - \frac{j_n}{n}\right)^{\frac{j_n}{2}} \left(1 + \frac{j_n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{j_n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。ただし二つ目の等式は十分大きな n に対してスターリングの公式より成立する（瑣末な計算なので省略する）。Durrett lemma 3.1.1 より $n \rightarrow \infty$ において以下が成立する。ただし $x = \frac{j_n}{\sqrt{n}}$ とおく。

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{j_n^2}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}} &\rightarrow \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ \left(1 + \frac{j_n}{n}\right)^{-\frac{j_n}{2}} &\rightarrow \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ \left(1 - \frac{j_n}{n}\right)^{\frac{j_n}{2}} &\rightarrow \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

これより、 $\sqrt{n} P(S_n = j_n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{j_n^2}{2n}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ であるので題意は示された。

4 Ex12.4

以下のような確率変数列 $\{Y_n\}$ を考える。ただし $p \in (0, 1)$ とする。

$$\begin{cases} P(Y_n = 1) = p \\ P(Y_n = 0) = 1 - p \end{cases}$$

この時、 $S_n = \sum_{m=1}^n Y_m$ として、 $X_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ とおくと、ド・モアブル-ラプラスの定理からこれは標準正規分布に分布収束する。収束先を X で書くとする。ここで、

$$A = \left\{ \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \mid k \geq 0, n \geq 0 \text{ and } k, n \in \mathbb{N} \right\}$$

とすると、 $A \in \mathcal{B}$ であるが、定義より任意の n について $P(X_n \in A) = 1$ であり、同時に X は連続確率変数であることより $P(X \in A) = 0$ である。従って全ての $A \in \mathcal{B}$ に対して $P(X_n \in A) \rightarrow P(X \in A)$ となるわけではないことがわかった。

5 Ex12.7

任意に $\epsilon > 0$ を取る。この時、Lyapunov 条件における $\delta > 0$ に対して、

$$|X_n| \geq \epsilon \Rightarrow \frac{|X_n|}{\epsilon} \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{|X_n|}{\epsilon} \right)^\delta \geq 1$$

である。これより、

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n E[X_{n,m}^2 1\{|X_{n,m}| \geq \epsilon\}] &\leq \sum_{m=1}^n E\left[X_{n,m}^2 \left(\frac{|X_n|}{\epsilon}\right)^\delta 1\{|X_{n,m}| \geq \epsilon\}\right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^\delta} \sum_{m=1}^n E\left[|X_{n,m}|^{2+\delta} 1\{|X_{n,m}| \geq \epsilon\}\right] \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^\delta} \sum_{m=1}^n E\left[|X_{n,m}|^{2+\delta}\right] \end{aligned}$$

である。最終行は Lyapunov 条件が成立する時 $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束するので、Lyapunov 条件が成立するときには Lindeberg 条件も成立することが確認できた。