

測度論的確率論 2018 S1S2

Homework 3

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 5, 2018

1 Ex2.3

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

1.1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ を示す。

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。なぜなら、

$$\forall (x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \quad a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \Rightarrow \exists n_1, n_2 \text{ s.t. } x \leq b_1 - \frac{1}{n_1}, y \leq b_2 - \frac{1}{n_2}$$

なので、 $N = \max(n_1, n_2)$ とおけば、 $\forall n \geq N \quad (x, y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ となるので、 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。

逆向きの包含関係も、任意に $(x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ をとると、ある N については必ず $(x, y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}]$ であるので、 $(a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}] \subset (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ であることから示される。

すなわち、 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ は \mathcal{B}^2 を生成する半開区間の可算和で表現できることがわかった。したがって、Borel sigma field の定義より $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in (\mathcal{B}^2)^2$ である。

ここで、「 \mathbb{R}^2 の任意の開集合は \mathbb{R}^2 の開区間の可算和でかける (主張 1)」とすると、sigma field の性質から $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ の可算和で表現される任意の集合は $(\mathcal{B}^2)^2$ に含まれているので、 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ が示された。

よって以下では (主張 1) を証明する。to be written

1.2 $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を示す。

まず、 $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ を示す。左辺が右辺に含まれることは以下のように確認できる。任意に $(x, y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ をとると、

$$\forall n \geq 1 \quad \begin{cases} a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \\ a_2 < y < b_2 + \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad (x, y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \Rightarrow (x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$$

である。

逆向きの包含関係は以下のように確認できる。任意に $(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ をとると、 $\forall n \geq 1 \quad (x, y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ である。この時、

$$a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \Rightarrow a_1 < x \leq \inf \left(b_1 + \frac{1}{n} \right) \Rightarrow a_1 < x \leq b_1$$

である。 y についても同様にできるので、 $(x, y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ であることがわかる。

これより、 \mathcal{B}^2 を生成する集合の要素は \mathbb{R}^2 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることがわかる。これはつまり、 \mathcal{B}^2 が \mathbb{R}^2 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることを意味する。また、 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を生成する開集合全体には明らかに \mathbb{R}^2 上の開区間全体が含まれているため、 \mathbb{R}^2 上の開区間全体を含む最小の sigma field は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に含まれる。したがって $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である。

2 Ex2.5

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

2.1 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$

開集合 $A \subset X$ を任意にとる。まず、 $A \times Y$ が $X \times Y$ の開集合であることを示す。

まず、直積空間 $X \times Y$ 上に以下のように距離 (d) が定義できる。

$$\text{let } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), \text{ where } x_1, y_1 \in X, x_2, y_2 \in Y \text{ then } d(x, y) \equiv d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

すなわち $(X \times Y, d)$ は距離空間とできる。以下ではこの距離 d について $A \times Y$ が開集合であることを確認する。全体集合 Y が開かつ閉集合であることより、 $(p, q) \in A \times Y$ について以下の二つが成立する。

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } \{x \in X \mid d_1(x, p) < \epsilon\} \subset A$$

$$\exists \eta > 0 \text{ s.t. } \{y \in Y \mid d_2(y, q) < \eta\} \subset Y$$

ここで、上の集合に含まれる (x, y) について、

$$d((x, y), (p, q)) = d_1(x, p) + d_2(y, q) < \epsilon + \eta$$

が成立する。従って、 (p, q) を任意にとっても、 $\{(x, y) \in X \times Y \mid d((x, y), (p, q)) < \delta\}$ なる集合が δ を十分小さくすることによって $A \times Y$ に含まれることがわかる。これより $A \times Y$ は開集合である。

これより Borel sigma field の定義から、 $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。ここで、 $\mathcal{C} = \{A \subset X \mid A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)\}$ とする。先の議論より任意の開集合 $A \subset X$ について $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ であるので、 $\{X \text{ の開集合全体}\} \subset \mathcal{C}$ である。

また、 $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ をとる。明らかに $\bigcup_{i=1}^{\infty} c_i \times Y$ が開集合であり、 $\mathcal{B}(X \times Y)$ に含まれることから、 \mathcal{C} は sigma field、それも X の開集合全体を含む sigma field である。Borel sigma field の定義より $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$ である。

これより、 $A \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$ なので、任意の $A \in \mathcal{B}(X)$ について $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。 Y 上の開集合 B についても同様の議論が適用できて、任意の $B \in \mathcal{B}(Y)$ について $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。

従って、以下が成立する。

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), B \in \mathcal{B}(Y) \ A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$$

すなわち $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ である。

2.2 $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$

「 X, Y が可分ならば $X \times Y$ も可分（主張 2）」を所与とすると、以下のように証明できる。

任意に開集合 $A \times B \subset X \times Y$ をとる。開集合の定義より、任意の $(x, y) \in A \times B$ について、距離 d を用いた ϵ -ball を $B_{\epsilon}((x, y))$ と書くと以下が成立する。

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B_{\epsilon}((x, y)) \subset A \times B$$

ここで $X \times Y$ について稠密な可算集合を D と書く。この時、任意の $(x, y) \in A \times B$ について

$$(s, t)_{(x, y)} \in B_{\frac{\epsilon}{3}}((x, y)) \cap D \subset A \times B$$

が必ず取れる。ここで $\epsilon_{(x, y)} = \frac{\epsilon}{2}$ とすると、

$$(x, y) \in B_{\epsilon_{(x, y)}}((s, t)_{(x, y)})$$

が必ず成立する。

つまり、 $A \times B$ の任意の要素は、 $D \cap (A \times B)$ の要素を中心として、それ自身も $A \times B$ に含まれるような ϵ -ball に入れることができる。今、 $\bigcup_{(s, t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$ を考える。ただしここで $B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$ はそれ自身が $A \times B$ に含まれるように取られている。先の議論より、 $A \times B \subset \bigcup_{(s, t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$ である。逆向きの包含関係については、 $\exists (s, t) \text{ s.t. } (x, y) \in B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$ の時、 $B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$ がもともと $A \times B$ に含まれるように取られているので当然 $(x, y) \in A \times B$ であることから確認できる。

従って $A \times B = \bigcup_{(s, t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$ である。ここで、左辺は open ball の可算個の和集合となっている。 $X \times Y$ の任意の開集合は $X \times Y$ 上の open ball の可算個の和集合で表現できる。これは、

$$\mathcal{B}(X \times Y) \subset X \times Y \text{ の open ball が生成する最小の sigma field}$$

を意味する。

さらに、 $X \times Y$ の open ball 全体は、明らかに $\{A' \times B' \mid A' \in \mathcal{B}(X), B' \in \mathcal{B}(Y)\}$ に含まれているので、

$$\mathcal{B}(X \times Y) \subset \sigma\left(\{A' \times B' \mid A' \in \mathcal{B}(X), B' \in \mathcal{B}(Y)\}\right) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$$

が成立する。

3 Ex2.6

前問後半と同様の議論により、開集合 $A \subset X$ に対して以下が成立する。

$$A = \bigcup_{s \in A \cap D} B_{\epsilon_s}(s)$$

これより、 $\mathcal{B}(X) \subset \sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\})$ である。open ball は必ず開集合なので、明らかに $\sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}) \subset \mathcal{B}(X)$ であるので、 $\mathcal{B}(X) = \sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\})$ である。ここで、 D が可算集合なので、 $\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}$ は可算集合。また、明らかに $\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\} \subset \mathcal{B}(X)$ であるので、 $\mathcal{B}(X)$ は countably generated である。

4 Ex3.3

\mathcal{B}^* を拡張実数 $\bar{\mathbb{R}}$ に入っている sigma field であるとする。この時、任意に $B \in \mathcal{B}^*$ を取ってくると、

$$h^{-1}(B) = \{\{f^{-1}(B)\} \cap A\} \cup \{\{g^{-1}(B)\} \cap A^c\}$$

であり、 f, g が可測関数であることから、 $f^{-1}(b), g^{-1}(B)$ は \mathcal{A} に入っており、仮定より $A, A^c \in \mathcal{A}$ であるので、 $h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ である。よって定義より $h(X) : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は可測関数である。

5 Ex3.4

1. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\sigma(\{A_1, \dots, A_m\})$ 可測
2. $\exists b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ s.t. $f = \sum_{i=1}^m b_i \cdot 1_{A_i}$

が同値であることを示す。

5.1 $1 \Rightarrow 2$ を示す。

$\{A_1, \dots, A_m\}$ が排反であることから、 $\sigma(\{A_1, \dots, A_m\})$ の要素は全て $\{A_1, \dots, A_m\}$ の要素を組み合わせ得られる和集合、または ϕ である。 lemma3.5 より、任意の $a \in \mathbb{R}$ について $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \in \sigma(\{A_1, \dots, A_m\})$ であるので、 $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ が $\{A_1, \dots, A_m\}$ の要素を組み合わせ得られる和集合、または ϕ でないといけない。

仮に、 $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ s.t. $\sup_{x \in A_i} f(x) > \inf_{x \in A_i} f(x)$ とすると、このような i を i^* とすると、 $\inf_{x \in A_{i^*}} f(x) < a < \sup_{x \in A_{i^*}} f(x)$ となるように $a \in \mathbb{R}$ をとったときに、

$$\{x \in A_{i^*} \mid f(x) \leq a\} \neq A_{i^*} \setminus \{x \in A_{i^*} \mid f(x) \leq a\} \subset A_{i^*}$$

であるので、 $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ は $\{A_1, \dots, A_m\}$ の要素の和集合では表すことができないため、 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は $\sigma(\{A_1, \dots, A_m\})$ 可測でなくなる。

従って、1 を仮定した時、

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall x \in A_i \quad f(x) \text{ is constant}$$

を得る。これはすなわち 2 を意味する。

5.2 $2 \Rightarrow 1$ を示す。

任意に $a \in \mathbb{R}$ をとる。この時、

$$\{x \in X \mid f(x) \leq a\} = \left\{x \in X \mid \sum_{i=1}^m b_i \cdot 1_{A_i}(x) \leq a\right\} = \bigcup_{i: b_i < a} \{A_i\} \in \sigma(\{A_1, \dots, A_m\})$$

なので、lemma3.5 より $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は $\sigma(\{A_1, \dots, A_m\})$ 可測である。

6 Ex3.6

7 Ex3.15

8 Ex3.16