測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 6

経済学研究科現代経済コース修士１年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 25, 2018

1 Ex6.3

2 Ex6.8

3 Ex6.10

4 Ex6.12

5 Ex6.14

$$E[X] = E\left[X1_{\{X\le\theta E[X]\}}\right] + E\left[X1_{\{X>\theta E[X]\}}\right]$$

両辺二乗して、第二項にヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$(E[X])^2 \le E\left[X1_{\{X\le\theta E[X]\}}\right]^2 + 2E\left[X1_{\{X\le\theta E[X]\}}\right]E\left[X1_{\{X>\theta E[X]\}}\right] + E[X^2]P\left(X>\theta E[X]\right)$$

これを整理して以下を得る。

$$P\left(X>\theta E[X]\right) \ge \frac{\left(E\left[X1_{\{X\le\theta E[X]\}}\right]-E[X]\right)^2}{E[X^2]}$$

従って、題意を得るためには以下が成立していれば良い。

$$\left(E\left[X1_{\{X\le\theta E[X]\}}\right]-E[X]\right)^2 \ge \left(E[X]-\theta E[X]\right)^2$$

上から打ち切って期待値を撮っているため、$E\left[X1_{\{X\le\theta E[X]\}}\right] < E[X$ であるので、左辺の中身は負である。一方で、$\theta\in[0,1]$ であるので右辺の中身は正である。これより、以下を示せばよい。

$$E[X]-E\left[X1_{\{X\le\theta E[X]\}}\right] \ge E[X]-\theta E[X]$$

ここで、$\theta E[X]$ よりも小さい値についてしか期待値を取れないので、$E\left[X1_{\{X\le\theta E[X]\}}\right] \le \theta E[X]$ であることから上は確かに成立する。よって題意は示された。

6 Ex6.15

6.1 (a)

$p>q>0$ とする。この時、$f(x) = -x^{\frac{q}{p}}$ は凸関数である。従って Jensen の不等式より、

$$E\left[-\left(|X|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right] \ge -\left(E\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow E[(|X|^p)^{\frac{q}{p}}] \le (E[|X|^p])^{\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow (E[|X|^q])^{\frac{1}{q}} \le (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$$

6.2 (b)

$\frac{r-q}{r-p}+\frac{q-p}{r-p}=1$ であるので、ヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$(E[|X|^p])^{\frac{r-q}{r-p}}(E[|X|^r])^{\frac{q-p}{r-p}}=\left(E\left[\left(|X|^{p\frac{r-q}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{r-q}}\right]\right)^{\frac{r-q}{r-p}}\left(E\left[\left(|X|^{r\frac{q-p}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{q-p}}\right]\right)^{\frac{q-p}{r-p}}\geq E\left[|X|^{\frac{p(r-q)+r(q-p)}{r-p}}\right]=E[|X|^q]$$

よって題意は示された。