

# Empirical Test on Pure Strategy Nash Equilibrium : Entry Game Case

池上 慧

2017 年 12 月 23 日

## 1 Introduction

データの拡充と推定手法の開発、そしてそれを可能にする計算環境の実現に伴い戦略的状況を扱った実証分析は近年大きく進展している分野である。静学ゲームでは例えば [1] で行われた寡占市場の分析や [2],[3],[4] の参入の分析、[5] による社会的相互作用モデルを用いた peer effect の分析などが戦略的状況を扱った代表的な研究である。また動学ゲームにおいても、[6] で開発された参入退出ゲームと [9] や [10] で開発された推定手法を用いて [7] や [8] など動学的な要素を考慮した戦略的意思決定の実証が行われている。

こういった戦略的な状況の分析の基盤は現実のデータがある種の均衡状態から生み出されたものであるという構造を仮定することにある。静学ゲームでは完備情報下では純粋戦略ナッシュ均衡、不完備情報下であれば純粋戦略ベイジアンナッシュ均衡がプレイされているとしてモデルのパラメータを推定する。動学ゲームにおいても同様にマルコフ完全均衡がプレイされているという仮定の下でモデルのパラメータを推定する。

しかし現実にはモデルの予測するある種の均衡が必ずしもプレイされるわけではないということが実験を通して明らかにされてきた。そもそもナッシュ均衡の各種精緻化概念も現実をよりよく説明するために生み出されてきたものであるが、ホニャやホゲが提案した認知階層モデルや level-k モデルなどの限定合理性モデルも既存の均衡では予測できない実験データを説明するために作られたモデルである。こういったモデルの正当性は実験データをどれだけ説明できるかという基準で検証されるが、それはそのモデル自体の正当性ではなく、他のモデルと比しての妥当性に過ぎない。また、[12] が指摘したようにデータへのフィットという観点でモデルの妥当性を図ることには正当性がない場合も存在する。

このようにモデルや均衡概念自体への検証というトピックは実験データを用いた場合にすら厳密な蓄積が少ないが、現実のデータを用いる場合にはほとんど研究の蓄積がない。[13] はサッカーのペナルティキックにおける混合戦略ナッシュ均衡の実証を行い、[11] はスウェーデンで実際に行われたゲームを用いて実験的状況下でないデータから均衡概念のチェックを行っている。こういった研究においても扱われる事象は極めて限定的かつ特殊なものであり、社会で広く観察される現象に対する均衡概念の検証はほとんど行われていない。この困難は研究者には観測できない変数の存在や異質性の問題、そしてそもそも利得が観測できずそれ自体が推定する対象であるパラメータであるという事実などによると考えられる。

本研究では広く観察される市場参入という現象に対して、戦略的状況の分析で一般に仮定される純粋戦略ナッシュ均衡を仮説検定によって検証する手法を提示する。モデルは [2] で提案された完備情報参入ゲームを用いる。本論は以下のように進む。2 章では関連する研究として [11] と [13] をレビューし、均衡に対する検証がなぜ困難かを整理する。3 章では主要な結果を述べる。その際にモデルの説明、純粋戦略がとられていない場合の推定手法、純粋戦略ナッシュ均衡への検定という順番で進む。4 章では結語としてより包括的な枠組みの可能性を述べる。

## 2 Literatures

段落 1 : Chiappori のレビュー

段落 2 : Ostring のレビュー

[11] で引用されている Robert Aumann の言葉にある通り、戦略的な状況を記述し分析するためにはそのゲームが厳格なルールを持っている必要がある。特に均衡を検証するという目的のためにはこれが重要であり、そのため利得をコントロールできる実験的状況や上記二つのような厳密なルールの下でプレイされるゲームしか検証に用いることができ

ないのである。しかし一般に実証研究の対象となる経済事象はそのような理想的な状況ではなく、情報構造や利得の構造、さらに手番に関しても研究者にとっては不確実なものである。以下で扱う参入ゲームもその例外ではなく、実証に用いられるモデルは様々に特定化されている。

その特定化の一つとして純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされているという仮定が置かれる。これは実現した結果についてプレイヤーが両者ともに別の行動をとればよかったと後悔することがないということを意味するが、支配戦略が存在しない事象においては強すぎる仮定である。よって、以下ではこの仮定を検証する枠組みを提示する。

### 3 Model and Equilibrium

#### 3.1 Toy Model

以下の利得表を持つ参入ゲームを考える。ここで、 $\theta_\mu$  は一社のみ参入することができた時に得られ利得であり、 $\theta_\delta$  は

表 1 Toy model 利得表

|          |       | Player 2                       |  |
|----------|-------|--------------------------------|--|
|          |       | 参入しない                          | 参入する   |
| Player 1 | 参入しない | $(0, 0)$                       | $(0, \theta_\mu + \epsilon_2)$   |
|          | 参入する  | $(\theta_\mu + \epsilon_1, 0)$ | $(\theta_\mu + \theta_\delta + \epsilon_1, \theta_\mu + \theta_\delta + \epsilon_2)$ |

二社が参入してしまった時の利得減少分を表すパラメータである。 $\theta_\delta$  は以下で競争効果と呼ぶ。 $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  はプレイヤー同士では観測可能だが研究者には観測できない利得であり、標準正規分布に従うとする。この確率変数は各市場ごとに毎期生成される、つまりデータとして得られる市場ではそれぞれプレイヤーは異なる利得表のゲームをプレイしていることに注意する。以下「参入しない」を 0、「参入する」を 1 で表記する。

プレイヤーは合理的であるとし、支配戦略がある時はその戦略をとることができるとする。例えばプレイヤー 1 については、

$$\begin{cases} \Pr(\text{player 1 takes 0}) = 1 & \text{if } \epsilon_1 < -\theta_\mu \\ \Pr(\text{player 1 takes 1}) = 1 & \text{if } \epsilon_1 > -\theta_\mu - \theta_\delta \end{cases}$$

である。

また、支配戦略を用いて行動の逐次削除もできるとする。すなわち、相手にとって支配戦略が存在する時はその事実を用いて自身の行動について被支配戦略を削除することで行動を確定させることができる。例えばプレイヤー 1 について  $-\theta_\mu < \epsilon_1 < -\theta_\mu - \theta_\delta$  の時、

$$\begin{cases} \Pr(\text{player 1 takes 0}) = 1 & \text{if } \epsilon_2 > -\theta_\mu - \theta_\delta \\ \Pr(\text{player 1 takes 1}) = 1 & \text{if } \epsilon_2 < -\theta_\mu \end{cases}$$

以上の仮定は Second Order Rationality と呼ばれる仮定であり、以降 SOR と呼称する。SOR の下でプレイヤーの行動が確定しないのは  $\{(\epsilon_1, \epsilon_2) \mid -\theta_\mu < \epsilon_1 < -\theta_\mu - \theta_\delta \wedge -\theta_\mu < \epsilon_2 < -\theta_\mu - \theta_\delta\}$  のみである。この領域（以下 ☆）における純粋戦略ナッシュ均衡は  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  の二つである。

☆ においては  $x$  をプレイヤー 1 の参入しない確率、 $y$  をプレイヤー 2 の参入しない確率とした時に  $(x, y) = \left(\frac{\theta_\mu + \theta_\delta + \nu_2}{\theta_\delta}, \frac{\theta_\mu + \theta_\delta + \nu_1}{\theta_\delta}\right)$  が混合戦略ナッシュ均衡として存在する。☆ において混合戦略がプレイされることは  $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \star$  でも一定の確率で  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$  が実現してしまうことを意味する。よって推定の際にはこの  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$  が実現する割合の歪みを適切に処理することが必要である。

#### 3.2 General Model

上記の単純なモデルを [3] のようにプレイヤーとマーケットの性質によって利得が変化し、競争効果もプレイヤーによって異なる一般のモデルへと拡張する。データは  $M$  市場について  $T$  期分得られているとする。市場  $m \in \{1, \dots, M\}$  におけるプレイヤー  $i \in \{1, 2\}$  の利得に関わる  $K$  個の変数をまとめて  $\mathbf{x}_{m,i}$  の確率ベクトルで表記する。これを用いてプ

レイヤー  $i$  の利得 ( $u_i$ ) は以下のように欠ける。

$$u_i = \mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i \mathbf{1}[y_{-i} = 1] + \epsilon_i$$

ここで  $\mathbf{1}[y_{-i} = 1]$  は相手プレイヤーが参入することの指示関数であり、 $\delta_i$  はプレイヤー  $i$  の競争効果、 $\epsilon_i$  は標準正規分布に従う研究者には観測不可能な確率的な効用である。これを用いて市場  $m$  における利得表は以下のように書くことができる。

表 2 general model 利得表

|          |       | Player 2                                       |  |
|----------|-------|--|--|
|          |       | 参入しない  | 参入する   |
| Player 1 | 参入しない | (0, 0)   | (0, $\mathbf{x}'_{m,2}\beta_2 + \epsilon_2$ )  |
|          | 参入する  | ( $\mathbf{x}'_{m,1}\beta_1 + \epsilon_1, 0$ ) | ( $\mathbf{x}'_{m,1}\beta_1 + \delta_1 + \epsilon_1, \mathbf{x}'_{m,2}\beta_2 + \delta_2 + \epsilon_2$ ) |

toy model と同様に SOR の仮定を置くと、市場  $m$  ごとの  $\star_m$  で  $(x, y) = \left( \frac{(\mathbf{x}'_{m,1}\beta_1 + \delta_1 + \epsilon_1)}{\delta_1}, \frac{\mathbf{x}'_{m,2}\beta_2 + \delta_2 + \epsilon_1}{\delta_2} \right)$  を混合戦略ナッシュ均衡として持つ。

## 4 Inference

以下では一般のモデルにおけるパラメータの推定量として、 $\star_m$  における均衡の仮定に応じて 3 種類与える。一つ目の仮定は純粋戦略ナッシュ均衡の仮定（以下 pure strategy Nash equilibrium を略して PN と呼称する）である。すなわち  $\star_m$  においては必ず (0, 1), (1, 0) のどちらかが実現するという仮定の下で推定するものであり、ここでは [2] において考案された複数均衡に対して頑健な参入企業数を結果変数として用いた最尤推定量を紹介する。この推定量を以下 PN 推定量と呼ぶ。二つ目の仮定は  $\star_m$  においては必ず混合戦略ナッシュ均衡に従ってエームがプレイされるという仮定（以下 Always mixed strategy Nash equilibrium を略して AMN と呼称する）である。すなわち  $\star_m$  においてもある確率で (1, 1), (0, 0) がプレイされてしまう状況を想定し、それによって生じる参入企業数の実現確率の歪みを考慮して推定する手法を与える。これによって得られた推定量を以下で AMN 推定量と呼ぶ。三つ目は  $\star_m$  において純粋戦略ナッシュ均衡と混合戦略ナッシュ均衡がどのような割合で実現していてもパラメータを一致推定できる頑健な推定量を与える。これを以下では Robust 推定量と呼ぶ。

### 4.1 PN 推定量

純粋戦略を仮定した時、 $\star_m$  においては複数の均衡が存在するので単純にプレイヤーの参入結果を結果変数に用いると、すべての事象の実現確率を足すと 1 を超えてしまうため適切な尤度を構成できない。しかし、 $\star_m$  において二つある純粋戦略ナッシュ均衡の結果がどちらも 1 社のみ参入するという結果であることを利用して、参入した企業数を結果変数とした Bivariate Probit を行うことでパラメータが推定できる。

市場  $m$  に着目する。 $t_2^m$  を 2 社がどちらも参入した回数、 $t_0^m$  をどちらも参入しなかった回数とする。企業  $i$  について参入することが支配戦略となる確率と参入しないことが支配戦略となる確率とをそれぞれ  $(q_i^1, q_i^0)$  で表記する。これは  $\phi(\cdot)$ ,  $\Phi(\cdot)$  をそれぞれ標準正規分布の確率密度関数、確率分布関数とした時以下のように書ける。

$$\begin{cases} q_i^1 = \int_{-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i - \delta_i}^{\infty} \phi(\epsilon_i) d\epsilon_i = \Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i) \\ q_i^0 = \int_{-\infty}^{-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i} \phi(\epsilon_i) d\epsilon_i = \Phi(-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) \end{cases}$$

従って市場  $m$  におけるデータを  $D^m$ 、パラメータの組を  $\theta$  で表記すると対数尤度は以下のようなものである。またこれによって得た推定量を  $\theta^P$  で表記する。

$$\sum_{m=1}^M g(D^m | \theta)$$

$$\text{where } g(D^m | \theta) = t_2^m \log(q_1^1 q_2^1) + t_0^m \log(q_1^0 q_2^0) + (T - t_2^m - t_0^m) \log(1 - q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

## 4.2 AMN 推定量

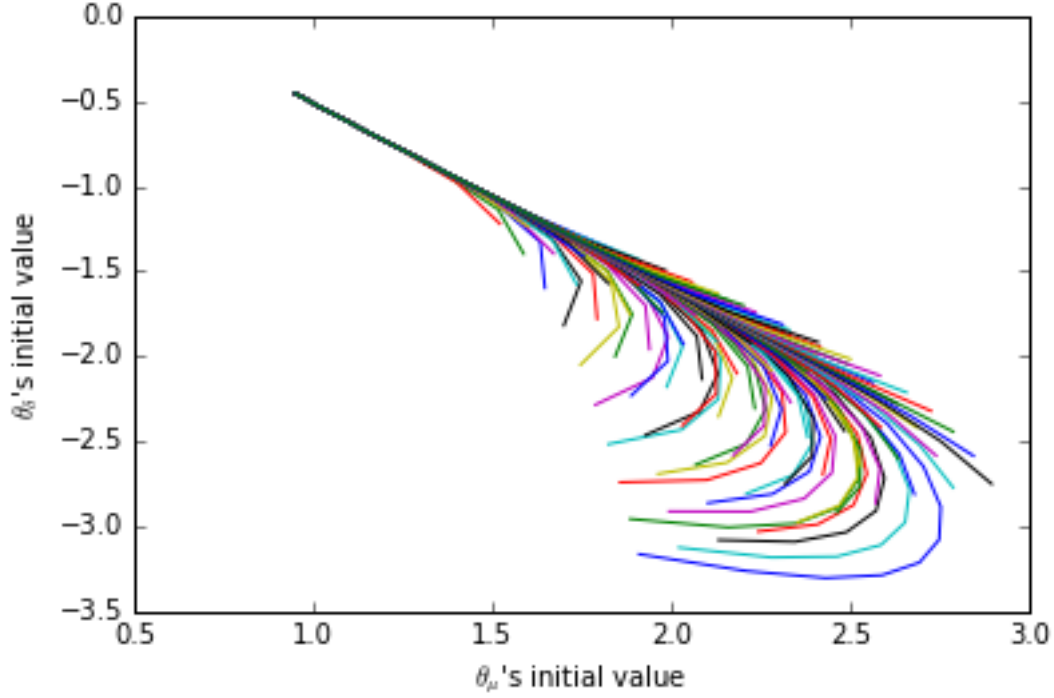


図1 収束の様子

$\star_m$  において混合戦略がプレイされているとした時に、 $t_2^m$  と  $t_0^m$  の中でどれだけが混合戦略の結果として実現したものであるかを求める。

ベイズの定理より以下が成立する。ただし二つ目の等式は SOR の仮定より成立する。

$$\Pr((1,1) \text{ is NE} \mid (1,1) \text{ is played})$$

$$= \frac{\Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is NE}) \Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is NE}) \Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is not NE}) \Pr((1,1) \text{ is not NE})}$$

$$= \frac{\Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is not NE}) \Pr((1,1) \text{ is not NE})}$$

$$= \frac{\Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \wedge \star_m)}$$

1 社も参入しない場合についても同様の計算ができる。ここで修正項は以下のように計算できる。

$$\begin{cases} c_2^m = \Pr((1,1) \text{ is played} \wedge \star_m) = \Pi_{i=1}^2 \left\{ \frac{\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i}{\delta_i} \left( \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \right) + \frac{1}{\delta_i} \left( \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \right) \right\} \\ c_0^m = \Pr((0,0) \text{ is played} \wedge \star_m) = \Pi_{i=1}^2 \left\{ \frac{\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i}{\delta_i} \left( \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \right) + \frac{1}{\delta_i} \left( \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \right) \right\} \end{cases}$$

以上より

$$f_2^m(\theta) = \frac{q_1^1 q_2^1}{q_1^1 q_2^1 + c_2} \quad f_0^m(\theta) = \frac{q_1^0 q_2^0}{q_1^0 q_2^0 + c_0}$$

とすれば以下のように対数尤度を構成できる。

$$\sum_{m=1}^M h(D^m | \theta)$$

$$\text{where } h(D^m | \theta) = t_2^m f_2^m(\theta) \log(q_1^1 q_2^1) + t_0^m f_0^m(\theta) \log(q_1^0 q_2^0) + (T - t_2^m f_2^m - t_0^m f_0^m) \log(1 - q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

Toy model において AMN のサンプルデータを用いてこの推定を試す。 $(\theta_\mu, \theta_\delta) = (1, -0.5)$  を真の値とするときの収束の様子は図 1 のようであり、正しく収束することがわかる。またこれによって得た推定量を  $\theta^M$  で表記する。

### 4.3 Robust 推定量

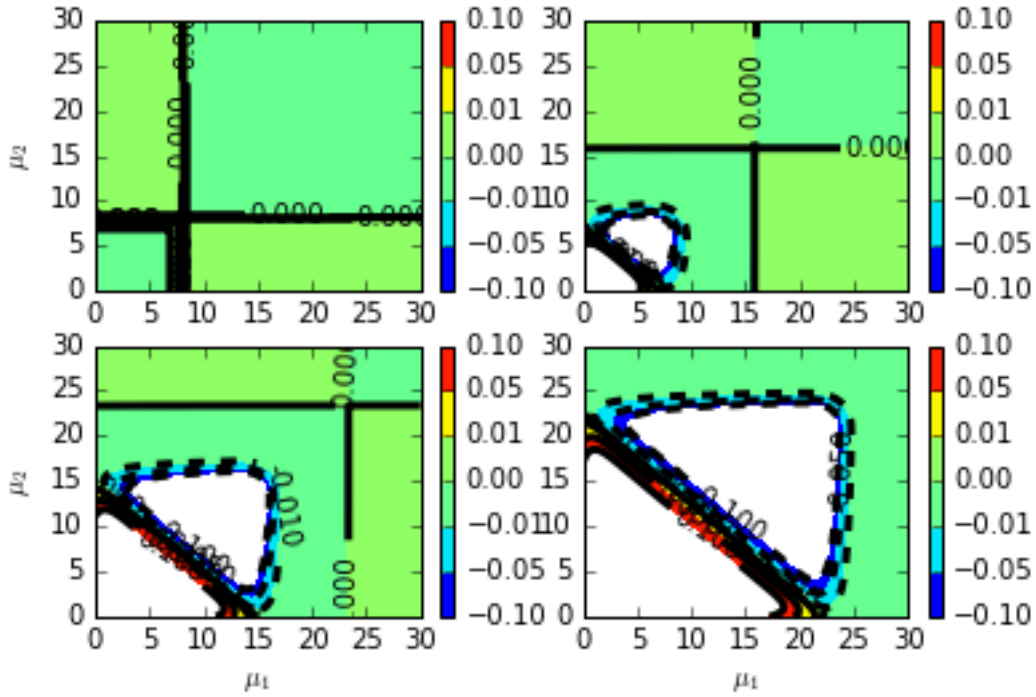


図 2 頑健性 左上から順に  $\delta = -0.01, \delta = -7.4, \delta = -15, \delta = -22.5$  の時の等高線

$\star_m$  における均衡選択メカニズムとして、 $w \in [0, 1]$  の確率で混合戦略ナッシュ均衡が実現するとする。すなわち先の PN の仮定は  $w = 0$  を、AMN の設定は  $w = 1$  の場合を想定していると解釈できる。またこのメカニズムに以下の仮定を置く。

仮定 1: uniform equilibrium selection mechanism  $w$  は  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  に依存しない。

ここで 1 社も参入しない確率と両者ともに参入する確率との差分を  $\alpha(w)$  と書くと、

$$\alpha(w) = w \left\{ G_1 G_2 \left( 1 + \frac{\mathbf{x}'_{m,1} \beta_1}{\delta_1} + \frac{\mathbf{x}'_{m,2} \beta_2}{\delta_2} \right) + \frac{G_1 g_2}{\delta_2} + \frac{G_2 g_1}{\delta_1} \right\}$$

ただし、

$$\begin{cases} G_i = \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \\ g_i = \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \end{cases}$$

である。

この時以下の二つが成立する。

主張 1  $|\alpha(w)|$  は  $w$  についての増加関数である。

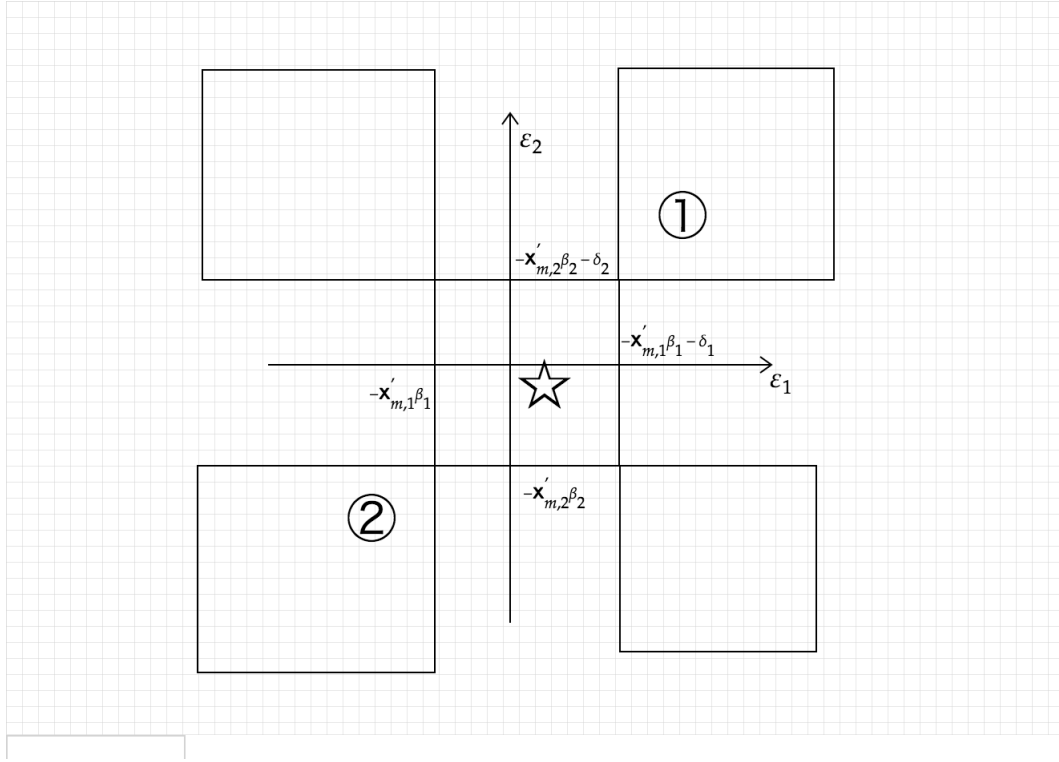


図3 均衡の分布

主張2  $\forall i \in \{1, 2\}$  で  $\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i$  が十分に大きいならば  $\alpha(1)$  を十分 0 に近づけることができる。

主張1 は  $w$  を固定した時、 $|\alpha(w)| = w|c_0 - c_2|$  とかくことができるため明らかである。主張2 については図2 より確認できる。図2 は  $\mu_i = \mathbf{x}'_{m,i}\beta_i$  として、 $\delta = \delta_1 = \delta_2$  という対称性の仮定の下で各  $(\mu_1, \mu_2, \delta)$  に対して  $\alpha(1)$  の値を出力し、 $\delta$  の値ごとに等高線で表示したものである。

図2 からわかるように  $\mu_i + \delta$  が両プレイヤーにとって十分大きい領域では  $\alpha(1)$  が十分小さくなっている。すなわちパラメータにこの性質を満たすという仮定を課せば、PN と AMN のどちらの仮定の下でも 1 社も参入しない確率と両者ともに参入する確率との差分は図3 の②と①の領域の差分に収束することを意味する。また、図示のためにおいた  $\delta_i$  についての対称性の仮定を緩めてもこれは同じように成立する。

さらに主張1 より  $\alpha(1)$  が十分 0 に近い領域のパラメータセットにおいては他のいかなる  $w \in [0, 1]$  においても十分 0 に近いことがわかる。従って「 $\forall i \in \{1, 2\}$  で  $\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i$  が十分に大きい」という仮定の下では、 $\star_m$  においていかなる均衡選択メカニズムが存在しようと、「1 社も参入しない確率と両者ともに参入する確率との差分は図3 の②と①の領域の差分に収束する」というモーメント条件を用いてパラメータの推定を行うことができる。

以上の議論より Robust 推定量  $(\theta^R)$  は以下のように定義される。

$$\theta^R = \arg \min_{\theta} \sum_{m=1}^M r(\hat{p}^m; \theta)^2$$

$$\text{where } r(\hat{p}^m; \theta) = (\hat{p}_2^m - \hat{p}_1^m) - (q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

識別に関しては以下が成立する。

主張3 [3] の除外制約の下で Robust 推定量  $(\theta^R)$  は識別可能である。

証明は Appendix に記す。

## 5 Hypothesis Test

前章で述べた頑健な推定量を用いてハウスマン検定により純粋戦略ナッシュ均衡の仮定に対する仮説検定を行うことを考える。ただし、通常のハウスマン検定では有効推定量を用いるのに対し、[3] で述べられたように PN 推定量は有効推定量ではない。従って非有効推定量どうしを用いたハウスマン検定を考える必要があることに注意する。

パラメータの真の値を  $\theta^0$  で表記すると先の 3 つの推定量について漸近分布は以下で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sqrt{M}(\theta^P - \theta^0) \\ \sqrt{M}(\theta^M - \theta^0) \\ \sqrt{M}(\theta^R - \theta^0) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \right)$$

ここで  $r(\theta) = \frac{1}{M} \sum_m r(p^m; \theta)$  として  $R(\theta) = \frac{dr}{d\theta'}$  とする。このとき、以下の二つの行列を用いることで漸近分散を  $ASA'$  と表すことができる。

$$S = Var \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_m \nabla_{\theta} g(D^m | \theta^0) \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_m \nabla_{\theta} h(D^m | \theta^0) \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_m r(p^m | \theta^0) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -E[\nabla_{\theta\theta'} g(D^m | \theta^0)]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -E[\nabla_{\theta\theta'} h(D^m | \theta^0)]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -(R(\theta^0)' R(\theta^0))^{-1} R(\theta^0)' \end{pmatrix}$$

ここで純粋戦略ナッシュ均衡に対するハウスマン検定統計量  $H_1$  は  $q_1 = \sqrt{M}(\theta^P - \theta^R)$  と置いたとき以下で定義される。

$$H_1 = q_1' (Avar \hat{q}_1)^{-1} q_1$$

ただし  $Avar \hat{q}_1$  は  $q_1$  の分散共分散行列の推定値であり、デルタメソッドから以下で求められる。

$$Avar \hat{q}_1 = \hat{A}_{11} - \hat{A}_{13} - \hat{A}_{31} + \hat{A}_{33}$$

ここで  $(\hat{A}_{11}, \hat{A}_{13}, \hat{A}_{31}, \hat{A}_{33})$  は各要素のサンプルからの推定値である。

## 6 Discussion

## 7 Conclusion

## 8 References

### 参考文献

- [1] Bresnahan/寡占
- [2] Bresnahan and Reiss
- [3] Tamer 2003
- [4] Seim 2006
- [5] Brock and Durlauf
- [6] Pakes and McGuire
- [7] Collard and Wexler 2013
- [8] Ryan 2012
- [9] BBI 2007
- [10] AM 2007
- [11] Ostring et al 2011
- [12] Haile 2008

[13] Levitt サッカー

[14] Eric van Damme 1998