測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 7

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 15, 2018

1　Theorem 7.2

まず $P(\epsilon_i = 0) = P(\epsilon_i = 1) = \frac{1}{2}$ を示す。$\epsilon_i \in \{0, 1\}$ なので、1 となる確率のみ求めれば良い。$i = 1$ の時は、

$$P(\epsilon_1 = 1) = P\left(\omega \mid \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)\right) = \frac{1}{2}$$

より確かに成り立つ。$i > 1$ の時は、

$$P(\epsilon_i = 1) = 2^{i-1} \times \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$$

ここで 2^{i-1} は $\{\epsilon_j\}_1^{i-1}$ が取りうる場合の数であり、$\frac{1}{2^i}$ は実現した $\{\epsilon_j\}_1^{i-1}$ に対して $\{\epsilon_j\}_i^{\infty}$ を使って表現できる ω の集合の測度、すなわち $P\left(\omega \mid \omega \in \left[0, \frac{1}{2^i}\right)\right)$ である。よって確かに任意の i について $P(\epsilon_i = 0) = P(\epsilon_i = 1) = \frac{1}{2}$ が確かめられた。

次に独立性を示す。$D_i \in \{0, 1\}$ として、任意の $\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ に対して以下が成立することを示す。

$$P\left(\epsilon_{i_1} = D_1, \cdots, \epsilon_{i_m} = D_m\right) = P\left(\epsilon_{i_1} = D_1\right) \times \cdots \times P\left(\epsilon_{i_m} = D_,\right)$$

先の結果より、右辺は $\frac{1}{2^m}$ なので、左辺もこの値を取ることを示せばよい。先と同じように考えて以下をえる。

$$P\left(\epsilon_{i_1} = D_1, \cdots, \epsilon_{i_m} = D_m\right) = 2^{i_m - m} \times \frac{1}{2^{i_m}} = \frac{1}{2^m}$$

ここで $2^{i_m - m}$ は少数第 i_m 位までに自由に動かせる桁を組み合わせた時の場合の数であり、$\frac{1}{2^{i_m}}$ は各組み合わせに対して動かせる幅の測度である。よって題意は示された。

2　Ex 7.1

レクチャーノートより $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が独立であることは以下と同値である。

$$\forall \{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \subset \mathbb{N},\ L\left(X_{i_1}, \cdots, X_{i_m}\right) = L\left(X_{i_1}\right) \times \cdots \times L\left(X_{i_m}\right)$$

従って $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が独立の時、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} L\left(X_1, \cdots, X_n\right) \times L(X_{n+1}) &= L\left(X_1\right) \times \cdots \times L\left(X_n\right) \times L\left(X_{n+1}\right) \\ &= L\left(X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}\right) \\ &= L\left(\left(X_1, \cdots, X_n\right), X_{n+1}\right) \end{aligned}$$

なので確かに $(X_1, \cdots, X_n)$ と X_{n+1} は独立である。また逆に、任意の n について $(X_1, \cdots, X_n)$ と X_{n+1} が独立の時、

$$\begin{aligned} L\left(\left(X_1, \cdots, X_n\right), X_{n+1}\right) &= L\left(X_1, \cdots, X_n\right) \times L(X_{n+1}) \\ &= L\left(\left(X_1, \cdots, X_{n-1}\right), X_n\right) \times L(X_{n+1}) \\ &= L\left(\left(X_1, \cdots, X_{n-1}\right)\right) \times L(X_n) times L(X_{n+1}) \\ &\vdots \\ &= L\left(X_1\right) \times \cdots \times L\left(X_{n+1}\right) \end{aligned}$$

が成立する。任意に $\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ をとった時、上記の議論より $(X_1, \cdots, X_{i_m})$ が独立なので、そのサブセットによって構成される $(X_{i_1}, \cdots, X_{i_m})$ も独立となる。

3 Ex 7.3

X と同じ確率変数をもう一つ用意し Y とする。この時分布を $\mu(x), \mu(y)$ と書いて以下の積分を考える。

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y)) (g(x) - g(y)) \, \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y)$$

f, g はどちらも非減少関数であるので、$x \geq y$ の時は $f(x) - f(y), g(x) - g(y) \geq 0$ であり、$x < y$ の時は $f(x) - f(y), g(x) - g(y) \leq 0$ である。これより被積分関数は常に非負であることがわかる。従って上記の積分は非負である。x, y は同一視できるので、積分の線型性より以下を得る。

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y)) (g(x) - g(y)) \, \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y) = 2E\left[f(x)g(x)\right] - 2E\left[f(x)\right] E\left[g(y)\right]$$

これより、

$$2E\left[f(x)g(x)\right] - 2E\left[f(x)\right] E\left[g(x)\right] \geq 0 \;\Leftrightarrow\; E\left[f(x)g(x)\right] \geq E\left[f(x)\right] E\left[g(x)\right]$$

また、g が非増加関数の時、$-g$ が非減少関数であり、上記が適用できる。

$$E\left[-f(x)g(x)\right] \geq E\left[f(x)\right] E\left[-g(x)\right] \;\Leftrightarrow\; E\left[f(x)g(x)\right] \leq E\left[f(x)\right] E\left[g(x)\right]$$

4 Ex 7.8

5 Durrett 2.1.10

6 Durrett 2.1.11