測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 11

経済学研究科現代経済コース修士１年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

July 20, 2018

1 Ex11.6

確率変数列 $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ に対して $\{\mathcal{L}(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ が一様にタイトであることを仮定する。この時、任意に $\epsilon > 0$ と $c_n \to 0$ を取ると、

$$P\left(|c_n X_n| \geq \epsilon\right) = P\left(|X_n| \geq \frac{\epsilon}{|c_n|}\right)$$

であるので、任意の $\delta > 0$ に対してある $N \geq 0$ が存在して以下を満たす。

$$n \geq N \;\Rightarrow\; P\left(|c_n X_n| \geq \epsilon\right) \leq P\left(|X_n| \geq \frac{\epsilon}{\delta}\right) = 1 - \mathcal{L}(X_n)\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right) + \mathcal{L}(X_n)\left(-\frac{\epsilon}{\delta}\right)$$

つまり、

$$\forall \epsilon, M > 0, \exists N \text{ s.t. } n \geq N \;\Rightarrow\; P\left(|c_n X_n| \geq \epsilon\right) \leq 1 - \mathcal{L}(X_n)(M) + \mathcal{L}(X_n)(-M)$$

である。一葉タイト性の仮定より、任意の n について上式の右辺を任意に小さい η で上から抑えることのできる M が必ず存在するので、

$$\forall \epsilon, \eta > 0,\; \exists N \text{ s.t. } n \geq N \;\Rightarrow\; P\left(|c_n X_n| \geq \epsilon\right) \leq \eta$$

が成立し、これは確率収束の定義から $c_n X_n \xrightarrow{p} 0$ を意味する。
次に逆向きを示す。すなわち任意の $c_n \to 0$ に対して $c_n X_n \xrightarrow{p} 0$ が成立することを仮定する。これは以下を意味する。

$$\forall \epsilon, \delta > 0,\; \exists N \text{ s.t. } n \geq N \;\Rightarrow\; 1 - \mathcal{L}(X_n)\left(\frac{\epsilon}{|c_n|}\right) + \mathcal{L}(X_n)\left(-\frac{\epsilon}{|c_n|}\right) \leq \delta$$

2 Ex12.2

3 Ex12.3

4 Ex12.4

5 Ex12.6