測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 8

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 25, 2018

1　2.2.1

$E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{E[S_n]}{n} = v_n$ であることより

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right] = Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)\right)$$

を得る。ただし、最後の等式は各確率変数が無相関であることによる。仮定より $\forall\epsilon > 0\ \exists I \text{ s.t. } i \geq I \Rightarrow \frac{Var(X_i)}{i} < \epsilon$ であるので、$n > I$ であれば、

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{n^2}\frac{Var(X_i)}{i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{I-1} \frac{i}{n^2}\frac{Var(X_i)}{i} + \sum_{i=I}^{n} \frac{i}{n^2}\frac{Var(X_i)}{i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{I-1} \frac{i}{n^2}\frac{Var(X_i)}{i} + \frac{\epsilon}{n^2}\sum_{i=I}^{n} i \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{I-1} Var(X_i) + \frac{\epsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{I^2}{n^2} + \frac{I}{n^2}\right) \end{aligned}$$

を得る。$n \to \infty$ での挙動を考えるとき、I が n によらず決定され、$Var(X_i) \to \infty$ であっても $\forall i\ Var(X_i) < \infty$ であるとき最終行の第一項は 0 に、第二項は $\frac{\epsilon}{2}$ に収束する。従って任意の $\epsilon > 0$ で上から押さえることができるので $\frac{S_n}{n} - v_n \to 0$ in L^2 である。チェビシェフの不等式より任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - v_n\right| > \epsilon\right) \leq \frac{E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right]}{\epsilon^2} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

であるので確かに確率収束もする。

2　2.2.2

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{1 \leq i,j \leq n} E\left[X_i X_j\right]$$

である。コーシーシュワルツの不等式より、$E\left[X_i X_j\right] \leq \left(E\left[X_i^2\right] E\left[X_j^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} = r(0)$ である。また仮定より、

$$\forall\epsilon > 0, \exists K > 0 \text{ s.t. } k \geq K \ \Rightarrow\ r(k) < \epsilon$$

である。これより、$|i-j| \leq K$ に対しては $E[X_i X_j] \leq r(0)$ で、$|i-j| > K$ に対しては $E[X_i X_j] \leq \epsilon$ で抑えられる。すなわち、

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1 \geq i,j \geq n} E\left[X_i X_j\right] \leq \frac{1}{n^2}\left(n(2K-1)r(0) + n^2\epsilon\right) = \frac{2K+1}{n}r(0) + \epsilon$$

である。K は n に依存しないので $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}E[S_n^2] \leq \epsilon$ である。従って 0 に L^2 収束するので WLLN より 0 に確率収束する。

3　2.2.3

まず Th2.2.14 の条件を満たすことを確認する。U_i が一様分布に従うことより以下が成立。

$$E\left[I_n\right] = E\left[f(U_i)\right] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

さらに、B を $\mathbb{R}$ 上の可測集合とすると、f が可測関数であることより以下が成立する。

$$P\left(\omega \in U_1^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right) \times \cdots \times P\left(\omega \in U_n^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right) = P\left(\omega \in \left(f \circ U_1\right)^{-1}(B)\right) \times \cdots \times P\left(\omega \in \left(f \circ U_n\right)^{-1}(B)\right)$$

また、

$$P\left(\omega \in U_1^{-1}\left(f^{-1}(B)\right), \cdots, \omega \in U_n^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right) = P\left(\omega \in \left(f \circ U_1\right)^{-1}(B), \cdots, \omega \in \left(f \circ U_n\right)^{-1}(B)\right)$$

である。$\{U_i\}$ は独立であることより上二つの左辺は等しい。従って右辺も等しくなり、$\{f(U_i)\}$ も独立な確率変数であることがわかる。以上で Th2.2.14 の条件が成立することが確認されたので、$I_n \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ である。

以下問題の意図がよくわからないので二つ解答を書きます。関係ない方は無視してください。

3.1　解答 1

チェビシェフの不等式より

$$P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{nVar(I_n)}{a^2} = \frac{n}{a^2}\frac{1}{n^2}nVar\left(f(X_1)\right) = \frac{Var\left(f(X_1)\right)}{a^2}$$

である。ここで最後の $Var\left(f(X_1)\right) = \int_0^1 f(x)^2\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$ であり、f^2 も可積分関数であるので

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)^2 \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x)^2\mathrm{d}x$$

が先の結果より得られる。また、Continuous mapping theorem より

$$I_n^2 \xrightarrow{p} \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

も成立する。従って $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)^2 - I_n^2$ で $Var\left(f(X_1)\right)$ を推定することができることがわかり、これでバウンドを推定することができた。

3.2　解答 2

次に $P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$ を推定するために一様分布の実現値 $\{u_i\}_{i=1}^n$ を M セット発生させる。この時得られた I_n を $\{I_n^m\}_{m=1}^M$ と記し、$\bar{I_n} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} I_n^m$ とする。

$$P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = E\left[1\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

である。ここで $\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 1\left(|I_n^m - \bar{I_n}| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)$ が題意の推定をうまく行えることを以下で示す。三角不等式より、

$$\begin{aligned}
E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I_n}| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right] &= P\left(|(I_n^m - I) + (I - \bar{I_n})| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq P\left(|I_n^m - I| + |I - \bar{I_n}| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) + P\left(|I - \bar{I_n}| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

M 個のサンプルは独立に生成され、上より可積分なので WLLN より、

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 1\left(|I_n^m - \bar{I_n}| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{p} E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I_n}| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right] \text{ s.t. } M \to \infty$$

である。さらに、チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}
\left|E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I_n}| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right] - P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right| &\leq P\left(|I - \bar{I_n}| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq \frac{n}{a^2}E\left[\left(\bar{I_n} - I\right)^2\right] \\
&= \frac{n}{Ma^2}Var\left(I_n^m\right) \\
&= \frac{1}{a^2M}Var\left(f(U_i)\right)
\end{aligned}$$

を得る。従って $M \to \infty$ で $E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I_n}| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right] \to P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$ である。ここで「$a_n \xrightarrow{p} b_n \to b \Rightarrow a_n \xrightarrow{p} b$（主張 1）」であることより

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 1\left(|I_n^m - \bar{I_n}| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{p} P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$$

であるので確かに推定できる。

3.2.1 主張 1 の証明

$a_n \xrightarrow{p} b_n \to b \Rightarrow a_n \xrightarrow{p} b$ を示す。任意の $\epsilon, \delta > 0$ に対して、

$$\exists N \text{ s.t. } n > N \;\Rightarrow\; P(\|a_n - b_n\| > \epsilon) \leq \delta$$

である。また、

$$\exists M \text{ s.t. } m > M \;\Rightarrow\; \|b_m - b\| < \epsilon$$

である。ここで三角不等式より、

$$n > \max(N, M) \;\Rightarrow\; P\left(\|a_n - b\| > \epsilon\right) \leq P\left(\|a_n - b_n\| > \epsilon\right) + P\left(\|b_n - b\| > \epsilon\right) \leq \delta$$

が成立するため、題意は示された。

4 2.2.4

まず絶対値の期待値が発散することを確認する。

$$E\left[|X_i|\right] = \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{C}{k^2\log k} = C\lim_{N\to\infty}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k\log k}$$

$k \geq 2$ において $\frac{1}{k\log k}$ が単調減少であることより積分判定法が使える。

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\log x}\mathrm{d}x = \int_2^{\infty}\frac{(\log x)'}{\log x}\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty}\left(\log\log x - \log\log 2\right) = \infty$$

これより確かに先の期待値は発散する。一方で、$kP\left(|X_i| > k\right) \to 0$ as $k \to \infty$ は成立することが以下のようにして確認できる。

$$\begin{aligned}
kP\left(|X_i| > k\right) &= k\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{C}{l^2\log l} \leq Ck\int_k^{\infty}\frac{1}{x^2\log x}\mathrm{d}x \\
&= Ck\int_{\log k}^{\infty}\frac{\exp(-z)}{z}\mathrm{d}z \leq C\frac{k}{\log k}\int_{\log k}^{\infty}\exp(-z)\mathrm{d}z = C\frac{1}{\log k} \to 0 \text{ as } k \to \infty
\end{aligned}$$

従って Th2.2.12 が適用できて、

$$\mu_n = E\left[X_i 1\left(|X_i| \le n\right)\right] = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{C}{k \log k}$$

とおくと、$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$ である。さらに「交項級数は各項の絶対値が単調減少で 0 に収束するなら収束する（主張 2)」ので、μ_n がこの性質を満たす（すなわち $\frac{C}{k \log k}$ が $k \ge 2$ において単調に 0 に収束する）ことから、$\mu_n \to \mu$ なる μ が存在する。よって先の主張 1 より $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{p} 0$ である。

4.1　主張 2 の証明

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ と置く。ただし $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は非負の単調減少な数列で 0 に収束するとする。この時、

$$\begin{cases} S_{2k+1} = S_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) > S_{2k-1} \\ S_{2k} = S_{2k-2} - (a_{2k-1} - a_{2k}) < S_{2k-2} \end{cases}$$

が任意の k について成立する。また、$2m+1 > 2n$ について

$$S_{2m+1} = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) - \cdots - (a_{2m-1} - a_{2m}) - a_{2m+1}$$

であり、右辺で引かれる各項は $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が単調減少であることから非負であるので $S_{2n} > S_{2m+1}$ である。すなわち $\{S_{2k+1}\}$ は偶数項で上から抑えられた単調増加な数列であるため収束先（L_1）を持つ。同様に $\{S_{2k}\}$ は奇数項で下から抑えられた単調減少な数列なので収束先（L_2）を持つ。さらに、

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} - S_{2m-1}) = L_2 - L_1$$

であり、仮定より $\lim_{m\to\infty} a_{2m} = 0$ であることから $L_2 = L_1$ である。従って題意は示された。

5　2.2.5

まず絶対値の期待値が発散することを示す。Lemma2.2.13 より

$$E\left[|X_i|\right] = \int_e^{\infty} \frac{e}{x \log x} \mathrm{d}x = e\left[\log\log x\right]_e^{\infty} = \infty$$

であるので確かに期待値は発散する。しかし

$$xP\left(|X_i| > x\right) = x\frac{e}{x\log x} = \frac{e}{\log x} \to 0 \text{ as } x \to \infty$$

であるので Theorem2.2.12 が適用でき、

$$\mu_n = E\left[X_i 1\left(|X_i| \le n\right)\right]$$

とおくと $\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$ である。

6　2.2.6

フビニの定理より $E[X]$ は以下のように変形できる。

$$E\left[X\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1(X \ge n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1(X \ge n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \ge n)$$

また同じくフビニの定理より、

$$E[X^2] = E\left[2\sum_{n=1}^{X} n - X\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) 1(X \ge n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) P(X \ge n)$$

を得る。