

# 測度論的確率論 2018 S1S2

## Homework 6

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 3, 2018

### 1 Ex6.3

#### 1.1 (a)

$F$  のサポートを以下で書くことにする。

$$S_F = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \epsilon > 0, F(x + \epsilon) - F(x - \epsilon) > 0\}$$

閉集合の定義より、 $\mathbb{R} \setminus S_F$  が開集合であることを示せばよい。任意に  $x \in \mathbb{R} \setminus S_F$  を取る時、 $F$  が非減少関数であることから、

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } F(x + \epsilon) - F(x - \epsilon) = 0 \quad (1)$$

である。ここで、必ず  $\epsilon > \eta > 0$  であるような  $\eta$  が存在し、そのような  $\eta$  について以下が成立する。

$$\begin{cases} F(x + \epsilon) \geq F(x + \eta) \\ F(x - \eta) \geq F(x - \epsilon) \end{cases}$$

(1) より、 $F(x + \eta) - F(x - \eta) = 0$  であるので  $(x - \eta, x + \eta) \subset \mathbb{R} \setminus S_F$  である。よって定義より  $\mathbb{R} \setminus S_F$  は開集合であることが確認できたので題意は示された。

#### 1.2 (b)

対偶を示す。すなわち以下を仮定して  $F$  が左連続でないことを示す。

$$\exists x \in S_F \text{ s.t. } \exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap S_F = \{x\}$$

今、 $x - \epsilon = x_0$  として、左から  $x$  に収束する数列  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  を任意の  $n$  について  $x_n < x$  であるようにとる。この時、仮定よりこの数列の要素はどれもサポートに入らないので、

$$\forall n, F(x_n) = F(x_{n+1})$$

である。これより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = f(x - \epsilon)$  である。また右側から近づく数列についても同様に考えることができ、 $f(x) = F(x + \epsilon)$  である。一方で  $F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = F(x)$  である。仮に  $F$  が連続だとすると、

$$F(x - \epsilon) = F(x) = F(x + \epsilon)$$

となり、これは  $x$  がサポートに入ることに矛盾する。従って題意は示された。

### 2 Ex6.8

任意に  $p \in [0, 1]$  を取る。この時、 $F^{-1}$  の定義より以下は  $F$  が連続でなくても成立する。

$$P(F(x) \leq p) = P(x \leq F^{-1}(p)) = F(F^{-1}(p))$$

$F$  が連続でないとする。不連続点における左極限を  $a$ 、右極限を  $b$  とすると、 $p \in [a, b)$  の時に、

$$F(F^{-1}(p)) = b$$

であるので、確かに  $F$  が連続でない時  $F(X)$  が一様分布に従わないことがわかる。一方で  $F$  が連続の時は、右極限と左翼弦が一致するため上のように  $p$  を取ることができない。従って、

$$F(F^{-1}(p)) = p$$

が成立する。よって題意は示された。

### 3 Ex6.10

#### 3.1 (a)

測度の単調性と、アトムを持たないという仮定より以下が成立する。

$$A_1 \subset A, A_1 \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) > P(A_1) > 0$$

この論法で  $A_1$  に対しても同様に  $A_2$  s.t.  $A_2 \subset A_1, A_2 \in \mathcal{F}, P(A_1) > P(A_2) > 0$  となる  $A_2$  が作れる。これを繰り返して減少列  $A_1, A_2, A_3, \dots$  を作る。この時、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0 \quad (2)$$

であることを示せば、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、ある大きな  $N$  が存在して、 $n \geq N \Rightarrow P(A_n) < \epsilon$  であるので、そのような  $n$  のうちで一つの  $A_n$  を  $B$  とすれば題意は示されている。よって (1) を以下で示す。

減少列であることから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_n A_n\right)$$

である。ここで、 $\{A_n\}$  の構成の仕方から  $\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$  である。 $P(\bigcap_n A_n) > 0$  とすると、アトムを持たないという仮定より、

$$\exists C \subset \bigcap_n A_n, C \in \mathcal{F} \Rightarrow P\left(\bigcap_n A_n\right) > P(C) > 0$$

である。しかし、そのような  $C$  は明らかに  $\{A_n\}$  のどこかに含まれるため、 $P(C) \geq P(\bigcap_n A_n)$  であり矛盾する。よって、 $P(\bigcap_n A_n) = 0$  であるので題意は示された。

#### 3.2 (b)

任意の  $n \in \mathbb{N}$  について  $B_n = \{C \mid a - \frac{1}{n} < P(C) < a + \frac{1}{n}, C \subset A, C \in \mathcal{F}\}$  が空集合でないことを示す。これを否定すると、

$$\exists N > 0 \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow P(C) \leq a - \frac{1}{n} \text{ or } a + \frac{1}{n} \leq P(C) \quad \forall C \subset A, C \in \mathcal{F}$$

である。 $P(C) \leq a - \frac{1}{N}$  の時、 $P(A \setminus C) > \frac{1}{N} > 0$  であるので (a) より、 $D \subset A \setminus C$  で任意に小さな  $\epsilon > 0$  に対して  $0 < P(D) < \epsilon$  であるような  $D \in \mathcal{F}$  が存在する。ここで  $C$  と  $D$  はその構成より排反なので、 $P(C \cup D) = P(C) + P(D)$  である。これは  $a - \frac{1}{N} < P(C \cup D) < a + \frac{1}{N}$  とできるような  $D$  が  $k$  ならず存在することを意味する。 $P(C) \geq a + \frac{1}{N}$  のケースについても同様に考えることで  $a - \frac{1}{N} < P(C \setminus D) < a + \frac{1}{N}$  となるような  $D$  を適切にとってくることができる。以上より、先の否定は成立しないので題意は示された。

### 4 Ex6.12

Lecture note より任意の内点  $x \in I$  に対して任意の  $y \in I$  と任意の  $a \in [D_-\phi(x), D_+\phi(x)]$  が取れて

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + a(y - x) \quad (3)$$

である。今、 $S = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  を  $I$  の可算稠密集合とする。これは  $\mathbb{R}$  が可分であることより必ず存在する。ここで (3) より、任意の  $x \in I$  に対して、

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_i) + D_+\phi(x_i)(x - x_i) \quad (4)$$

が任意の  $i$  について成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} a_i &= D_+\phi(x_i) \\ b_i &= \varphi(x_i) - D_+\phi(x_i)x_i \end{aligned}$$

とおいて、

$$\psi(x) = a_i x + b_i$$

と定義する。(4) より  $\varphi(x) \geq \psi(x)$  が成立することが確認できた。

## 5 Ex6.14

$$E[X] = E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] + E[X1_{\{X > \theta E[X]\}}]$$

両辺二乗して、第二項にヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$(E[X])^2 \leq E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}]^2 + 2E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}]E[X1_{\{X > \theta E[X]\}}] + E[X^2]P(X > \theta E[X])$$

これを整理して以下を得る。

$$P(X > \theta E[X]) \geq \frac{(E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] - E[X])^2}{E[X^2]}$$

従って、題意を得るためには以下が成立していれば良い。

$$(E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] - E[X])^2 \geq (E[X] - \theta E[X])^2$$

上から打ち切って期待値を撮っているため、 $E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] < E[X]$  であるので、左辺の中身は負である。一方で、 $\theta \in [0, 1]$  であるので右辺の中身は正である。これより、以下を示せばよい。

$$E[X] - E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] \geq E[X] - \theta E[X]$$

ここで、 $\theta E[X]$  よりも小さい値についてしか期待値を取れないので、 $E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] \leq \theta E[X]$  であることから上は確かに成立する。よって題意は示された。

## 6 Ex6.15

### 6.1 (a)

$p > q > 0$  とする。この時、 $f(x) = -x^{\frac{q}{p}}$  は凸関数である。従って Jensen の不等式より、

$$\begin{aligned} E\left[-(|X|^p)^{\frac{q}{p}}\right] &\geq -(E[|X|^p])^{\frac{q}{p}} \\ \Leftrightarrow E[(|X|^p)^{\frac{q}{p}}] &\leq (E[|X|^p])^{\frac{q}{p}} \\ \Leftrightarrow (E[|X|^q])^{\frac{1}{q}} &\leq (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

### 6.2 (b)

$\frac{r-q}{r-p} + \frac{q-p}{r-p} = 1$  であるので、ヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$(E[|X|^p])^{\frac{r-q}{r-p}} (E[|X|^r])^{\frac{q-p}{r-p}} = \left(E\left[\left(|X|^p\right)^{\frac{r-q}{r-p}}\right]\right)^{\frac{r-q}{r-p}} \left(E\left[\left(|X|^r\right)^{\frac{q-p}{r-p}}\right]\right)^{\frac{q-p}{r-p}} \geq E\left[|X|^{\frac{p(r-q)+r(q-p)}{r-p}}\right] = E[|X|^q]$$

よって題意は示された。