測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 5

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 19, 2018

1 Ex 4.12

1.1 (a)

$\{A_n\} \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \cdots$ を排反にとってくる。この時、

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \mathrm{d}\mu = \int f\left(1_{A_1} + 1_{A_2} + \cdots\right) \mathrm{d}\mu = \int \lim_{N\to\infty} f \sum_{n=1}^{N} 1_{A_n} \mathrm{d}\mu$$

f が可測関数であり、指示関数も可測関数であることから Corollary 4.1 より

$$\int \lim_{N\to\infty} f \sum_{n=1}^{N} 1_{A_n} \mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f 1_{A_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

であるので確かに ν は測度となる。(ϕ については後で書く。)

1.2 (b)

簡単な関数から順番に示す。まず、$g = 1_B$ のような指示関数の場合は、

$$\int g \mathrm{d}\nu = \int 1_B \mathrm{d}\nu = \nu(B)$$

は必ず定義できる。この時、ν の定義より以下が成立し、確かに値は同じになる。

$$\int g f \mathrm{d}\mu = \int 1_B f \mathrm{d}\mu = \int_B f \mathrm{d}\mu = \nu(B)$$

次に $g = \sum_{i=1}^{m} g_i 1_{B_i}, g_i \geq 0, \{B_1, \cdots, B_m\} \in \mathcal{A}$ で排反とかける simple function の場合を考える。この時、

$$\int g \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} g_i \int 1_{B_i} \mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^{m} g_i \int 1_{B_i} f \mathrm{d}\mu = \int \left(\sum_{i=1}^{m} g_i 1_{B_i}\right) f \mathrm{d}\mu = \int g f \mathrm{d}\mu$$

が成立する。ただし二つ目の等号は指示関数のケースの結果より得られる。さらに非負関数 g について考えると、lemma 4.2 より $g_n \uparrow g$ となる非負単関数の列が必ず存在するので、

$$\int g \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int g_n f \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n f \mathrm{d}\mu = \int g f \mathrm{d}\mu$$

が成立する。ここで一つ目と三つ目の等号は MCT より成立し、二つ目の等号は非負単関数のケースの結果より得られる。最後に一般の可測関数 $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ について題意を示す。非負関数のケースより、以下の等号が成立する。

$$\int g \mathrm{d}\nu \equiv \int g^{+} \mathrm{d}\nu - \int g^{-} \mathrm{d}\nu = \int g^{+} f \mathrm{d}\mu - \int g^{-} f \mathrm{d}\mu \equiv \int g f \mathrm{d}\mu$$

どちらかの項が有限の時、上の積分は定義できる。確かにどちらかの積分が定義できればもう片方もそれに対応する項が有限となるのでもう片方の積分も定義できていることが確認された。

2 Ex 4.13

$x \in [0, n]$ で $e^{-x} \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ を示す。どちらも正なので対数をとって、$-x \geq n\log\left(1 - \frac{x}{n}\right)$ を示す。

$$n\log\left(1 - \frac{x}{n}\right) = n\left\{-\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{n^3} - \cdots\right\} = -x - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{n^3} + \cdots\right)$$

であり、最終項は $x \in [0, n]$ で正なので確かに $e^{-x} \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ である。これより、$\left|\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n 1_{[0,n]}\right| \leq e^{-x}$ である。また、指数関数の定義より $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n 1_{[0,n]} = e^{-x}$ であるので、優収束定理より以下が成立する。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n 1_{[0,n]}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n 1_{[0,n]}\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

3 Ex 4.14

以下のような関数列を考える。

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}1_{[1,\infty)} & n = 1 \\ \frac{1}{nx}1_{[1,n)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

この時、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{nx}1_{[1,n]}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$$

であり、また任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して十分大きな N が存在して、$n \geq N$ であれば任意の $\epsilon > 0$ よりも $\frac{1}{nx}$ を小さくできるので 0 に各点収束することもわかる。しかし、全ての n について上の関数列の絶対値を抑えるためには $[1, \infty)]$ の範囲で $\frac{1}{x}$ よりも大きくないといけない。ここで $\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\log n = \infty$ であるため、そのような関数の積分は必ず無限に発散するため L^1 に入らないことが確認できた。

4 Ex 4.15

任意の n について、$|f_n| \leq g_n \ \Rightarrow -g_n \leq f_n \leq g_n \ \Rightarrow f_n + g_n \geq 0,\ g_n - f_n \geq 0$ が成立する。この時 Fatou の補題より、

$$\int \liminf_{n\to\infty}(f_n + g_n)\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int f_n + g_n\mathrm{d}\mu\right) \tag{1}$$

$$\int \liminf_{n\to\infty}(g_n - f_n)\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int g_n - f_n\mathrm{d}\mu\right) \tag{2}$$

が成立する。上の左辺について、

$$\int \liminf_{n\to\infty}(f_n + g_n)\mathrm{d}\mu = \int (f + g)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu$$

である。ただし二つ目の等号は、$|f| \leq g$ であることから f が可積分であることより得られる。右辺については、全ての n について f_n, g_n が可積分であることと、「b_n が b に収束する数列の時、$\liminf(a_n + b_n) = \liminf a_n + b$（主張 1）」を使うと、

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\int f_n + g_n\mathrm{d}\mu\right) = \liminf_{n\to\infty}\left(\int f_n\mathrm{d}\mu + \int g_n\mathrm{d}\mu\right) = \liminf_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu$$

以上より、

$$\int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu \ \Rightarrow \int f\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu$$

を得る。同様にして (1) の下の不等式から、

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu \leq \int f\mathrm{d}\mu$$

が得られる。以上より、$\liminf_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu$ であることから、$\lim_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu$ であることが示された。

4.1 主張1の証明

5 Ex 4.21

Billingsley を見てから書いた方が安心かも

6 Ex 4.22

f が階段関数の時にこの補題が成立することをまず確認する。$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{J-1} < x_J = b$ として、$[a, b]$ 上の階段関数 s を以下のように定義する。

$$s(x) = c_j \text{ when } x_{j-1} \leq x < x_j$$

この時、

$$\left| \int s(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \right| = \left| \sum_{j=1}^{J} \int_{x_{j-1}}^{x_j} c_j \cos(nx)\mathrm{d}x \right| = \left| \sum_{j=1}^{J} c_j \frac{\sin(nx_j) - \sin(nx_{j-1})}{n} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{J} c_j \frac{2}{n} \right|$$

であり、$n \to \infty$ で 0 に収束する。今、コンパクトな台 $[a, b]$ を持つ関数 f についてのみ考えると、階段関数 $s(x)$ を使って、三角不等式より以下が得られる。

$$\left| \int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b (f(x) - s(x))\cos(nx) + s(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_a^b (f(x) - s(x))\cos(nx)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b s(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \right|$$

Ex 4.21 より任意の $\epsilon > 0$ について、最後の第 1 項を $\frac{\epsilon}{2}$ で抑えるような階段関数 $s(x)$ が必ず存在する。また、階段関数 $s(x)$ については先の議論よりリーマンルベーグの補題がすでに示されているので、ある大きな N で、$n \geq N$ であれば第 2 項を $\frac{\epsilon}{2}$ で抑えることができるようなものが存在する。この時、同じ N について、

$$n \geq N \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

とできるので、コンパクトな台を持つ関数 f については題意を示すことができた。ここで、$|f(x)\cos(nx)| \leq |f|$ であり、仮定より $\int |f|\mathrm{d}\mu < \infty$ であるので、DCT が使えて以下が成立する。

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x &= \int \lim_{n\to\infty} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} f(x)\cos(nx) \right) 1_{[-m,m]}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

さらに、$\left|\lim_{n\to\infty} f(x)\cos(nx)1_{[-m,m]}\right| < |f|$ であるので、同様に DCT を適用でき、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} f(x)\cos(nx) \right) 1_{[-m,m]}\mathrm{d}x &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f(x)\cos(nx)1_{[-m,m]}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{-m}^{m} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

である。ここで任意の m について $[-m, m]$ はコンパクトな台で、そのような関数に対してはリーマンルベーグの補題が示されているので、上は 0 となり、一般の可測関数 f について題意が示された。

7 Ex 5.3

8 Ex 5.4

9 Ex 5.5

10 Ex 5.6