Lemke Howson と PPAD

池上慧

2017 年 8 月 18 日

1 Lemke Howson

2 人ゲームを想定する。(A, B) がそれぞれプレイヤー 1 とプレイヤー 2 の利得に対応する行列とする。symmetric game とは $B = A^T$ が成立するゲームを指すものであり、symmetric Nash equilibrium とは両者が同じ混合戦略を用いてそれがナッシュ均衡となるその混合戦略を指す。

一般の 2 人ゲーム (A, B) について

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

なる利得行列を構成することを考える。この利得行列で表現される symmetric game に対して symmetric equilibrium (x, y) が得られたとする。この時 (x, y) はそれぞれ A に対応する部分の確率ベクトルと B に対応する部分の確率ベクトルである。

この (x, y) は (A, B) で表現される元の一般的な 2 人ゲームにおいて混合戦略を構成するプレイや-1 の混合戦略とプレイヤー 2 の混合戦略であると解釈できるので（例で書き下すと分かりやすい）、symmetric game が efficient に解ければ一般的なゲームにおけるナッシュ均衡も efficient に求めることができる、ということになる。この事実を指して本文中では”There is a polynomial reduction from Nash to SYMMETRIC Nash”と言っている。

でも、(x, y) って全体で混合戦略だから x や y ごとには足して 1 じゃないし各プレイヤーの混合戦略ということはできなくね？

以上より「n× n の要素が全て正な利得行列 A で表現される 2 人対称ゲーム」におけるナッシュ均衡を求めることに集中すれば良いことがわかった。これを解くアルゴリズムとして Lemke-Howson Algorithm を与える。

長さ n のベクトル z を用いて、以下の $2n$ 個の不等式を満たす多面体 P を定義する。

$$Az \leq 1 \tag{2}$$

$$z \geq 0 \tag{3}$$

この多面体は nondegenerate である、すなわちこの多面体の頂点は全てが n 個の制約が等式で成立する点として表されていることを仮定する。また、これは全ての頂点が n 個の隣接する頂点を持つことを担保するものである。

この多面体の頂点を z で書く。ここで「戦略 i が頂点 z で表現されている」ことを以下で定義する。

$$z_i = 0 \quad \text{or} \quad A_i z = 1 \tag{4}$$

ただし A_i は A の i 列目を指すとする。

これより、「全ての戦略が頂点 z で表現されている」とは

1. $z_i = 0$ for any i
2. $z_i = 0$ for some i and $A_i z = 1$ for other i

のいずれかである。このうちの 2 番目のケースで $x_i = \frac{z_i}{\sum_i z_i}$ とすれば、これによってられる x は確率ベクトルを構成し、「サポート内の全ての戦略が最適反応になっている」というナッシュ均衡の特徴づけを満たすことになる。

多面体の頂点でもある原点は上の 1 番目のケースに対応している。この原点からスタートして、2 番目の性質を満たす多面体の頂点までの軌跡を描くアルゴリズムが Lemke-Howson Algorithm である。具体的には以下の手順で進行する。

1. 原点から出発
2. 現在の頂点で binding な制約のうち一つを外して別の binding でない制約を（2）か（3）から取ってきて binding にする。これは隣接する頂点への移動に対応している。
3. その頂点が全ての戦略を表現していたらアルゴリズムを終える。
4. もしそうでないなら、その頂点は何らかの戦略について doubly binding である。すなわち、ある i について $z_i = 0$ かつ $A_i z = 1$ 都なっている。この時は二つのうちどちらかを外して別の制約を課し、別の頂点へと移動する。

doubly binding な制約を外すことでいける頂点は必ず 2 つ存在し、元いたものとは別の頂点へと進めばいいので、以上のアルゴリズムがループしてしまうことはない。すなわち混合戦略ナッシュ均衡は必ず存在する。ただしこのアルゴリズムは多面体の頂点が指数的に大きくなるという点で効率的なアルゴリズムでないことに注意。

2　PPAD

PPAD は、Polynomial Parity Argument on Directed Graphs の略。会の存在が保障されている問題に対してその回をグラフ上で探索する一連の問題群を指し、具体的には以下の性質を満たす問題のクラスを指すものである。

1. 指数的に大きな有限この頂点上に有向グラフを描く
2. 描かれた有向グラフ上の頂点の indegree も outdegree も最大で 1
3. 1 つの頂点がそのグラフ上に存在するかは容易に判断できる
4. 1 つの頂点に対して隣接する頂点が容易に得られる（simplex pivoting）
5. グラフの方向が容易に判定できる
6. incoming edges が存在しない頂点が存在する（これを standard source と呼ぶ）
7. outgoing edges が存在しない頂点と standard source 以外の source が問題の解である

PPAD の定義としては以下も採用される。

Def Any problem A is in PPAD if there is a polynomial time reduction from A to the End-of-Line problem, i.e. $A \leq_q B$, where $B \equiv\ End-of-LineProblem$

ここで"End-of-Line Problem"とは以下のような問題である。

G is a (possibly exponentially large) directed graph with no isolated vertices, and with every vertex having at most one predecessor and one successor. G is specified by giving a polynomial-time computable function $f(v)$ (polynomial in the size of v) that returns the predecessor and successor (if they exist) of the vertex v. Given a vertex s in G with no predecessor, find a vertex $t \neq s$ with no predecessor or no successor. (The input to the problem is the source vertex s and the function $f(v)$). In other words, we want any source or sink of the directed graph other than s.

Lemke-Howson よりナッシュ均衡を求める問題はこの PPAD というクラスに属することはイメージできるが、より正確にはナッシュ均衡を求める問題から Brouwer's fixed point theorem を介して、PPAD に属することが明らかな Sperner's Lemma と呼ばれる問題への polynomial reduction が存在することからこの事実が判明する。