測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 4

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 12, 2018

1 Ex4.2

$D = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ である。lemma3.5 より $E_n \equiv \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ は可測集合の要素であるので、sigma fiels が可算個の和集合について閉じていることから D も可測集合に入る。したがって $\mu(D)$ は定義されている。さらに、E_n が単調増大な集合なので、lemma1.3 より

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

である。ここでチェビシェフの不等式から、任意の $n \geq 1$ について

$$\mu(E_n) \leq n \int_{E_n} f \mathrm{d}\mu$$

を得る。さらに $f > 0$ であることから、

$$\int_{E_n} f \mathrm{d}\mu < \int f \mathrm{d}\mu = 0$$

これより、$0 \leq \mu(E_n) \leq 0 \ \Rightarrow \ \mu(E_n) = 0$ を得る。したがって、$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ であるので、$\mu(D) = 0$ である。これは f が 0 でないような X の部分集合のの測度が 0 であることを意味するので、$f = 0$ a.e. である。

2 Ex4.3

可積分であるので、r を正の実数、θ を実数として、積分を以下のような極形式で表現できる。

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int (Ref) \mathrm{d}\mu + \int (Imf) \mathrm{d}\mu = re^{i\theta} \tag{1}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ であり、$r > 0$ だから、

$$\| \int f \mathrm{d}\mu \| = \|re^{i\theta}\| = r\|e^{i\theta}\| = r$$

である。ここで (1) より以下を得る。

$$r = e^{-i\theta} \int f \mathrm{d}\mu$$

また、「可積分な関数 f は、$c \in \mathbb{C}$ に対して、$\int cf \mathrm{d}\mu = c \int f \mathrm{d}\mu$（主張 1）」を所与とすれば、

$$r = \int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu$$

である。$r \in \mathbb{R}$ より $\int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu$ は実数である。よって、定義より以下を得る。

$$\int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu = Re\left(\int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu\right) = \int Re\left(e^{-i\theta} f\right) \mathrm{d}\mu$$

さらに、複素数の絶対値の定義より、

$$\|e^{-i\theta}f\| = \sqrt{Re\left(e^{-i\theta}f\right)^2 + Im\left(e^{-i\theta}f\right)^2} \geq Re\left(e^{-i\theta}f\right)$$

である。よって example 4.2 より、

$$\int Re\left(e^{-i\theta}f\right) \mathrm{d}\mu \leq \int \|e^{-i\theta}f\| \mathrm{d}\mu$$

であり、$\|e^{-i\theta}\| = 1$ が恒等的に成立するので、

$$\|\int f\mathrm{d}\mu\| = r = \int e^{-i\theta}f\mathrm{d}\mu = \int Re\left(e^{-i\theta}f\right) \mathrm{d}\mu \leq \int \|e^{-i\theta}f\|\mathrm{d}\mu = \int \|f\|\mathrm{d}\mu$$

となり題意は示された。

2.1 主張 1 の証明

3 Ex4.4

$E = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ の測度が 0 であることを示す。

$$E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{\{x \in X \mid f(x) > q\} \cap \{x \in X \mid q > g(x)\}\} \cup \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{\{x \in X \mid f(x) < q\} \cap \{x \in X \mid q < g(x)\}\}$$

である。前半を E_1、後半を E_2 とする。lemma 3.5 より $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ である。仮定より、

$$\int_{E_1} f\mathrm{d}\mu = \int_{E_1} g\mathrm{d}\mu$$

であるはずだが、仮に $\mu(E_1) > 0$ だとすると、E_1 においては $f > g$ なので、example 4.2 より $\int_{E_1} f\mathrm{d}\mu > \int_{E_1} g\mathrm{d}\mu$ となる。これは仮定に反するので、$\mu(E_1) = 0$ である。同様に $\mu(E_2) = 0$ であり、$\mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0$ より題意は示された。

4 Ex4.8

5 Ex4.10

6 Ex4.11

7 Ex4.16

8 Ex4.17