測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 1

池上　慧 (2918009)

April 12, 2018

1　問1

まず $\mathcal{A}$ が field であることを示す。そのためには以下の三つの確認をすれば良い。

1. $X^c = \phi$ であり、空集合はの要素数は 0 で有限なのでこれは有限集合。よって $X = \mathbb{N} \in \mathcal{A}$ である。

2. $A, B \in \mathcal{A}$ を任意に取ってくる。この和集合が $\mathcal{A}$ に入っていることを確かめる。A, B 共に有限集合の時はその和集合も当然有限集合であり、$\mathcal{A}$ に入る。片方がその補集合が有限集合である時は、一般性を失わずに A^c が有限集合であるとすると、$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ であり、これは有限集合である A^c の部分集合であるので有限集合である。従ってこの場合も和集合が $\mathcal{A}$ に入る。最後にどちらも補集合が有限集合である場合を考える。この時は $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ であり、有限集合の部分集合となっているので、和集合は $\mathcal{A}$ に入る。以上より、$\mathcal{A}$ からどのような二つの要素を取ってきてもその和集合は $\mathcal{A}$ に入っている。

3. $A \in \mathcal{A}$ を任意にとる。A^c が有限集合のケースは定義より $A^c \in \mathcal{A}$ である。A が有限集合のケースは、$(A^c)^c = A$ なので、A^c の補集合が有限集合であるので $A^c \in \mathcal{A}$ である。従って $\mathcal{A}$ の要素の補集合は必ず $\mathcal{A}$ に入っている。

次に $\mathcal{A}$ が σ-field でないことを示す。このためには可算無限個の和集合について $\mathcal{A}$ が閉じていないことを確認すれば良い。$i = 1, 2 \ldots$ について $A_i = \{2i - 1\}$ を X の部分集合として取ってくることを考える。これは全ての i について要素が一つの有限集合なので $\mathcal{A}$ に入っている。

今、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{2i - 1 \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$ であり、これは奇数全体を表す。この集合は有限集合デアはなく、またその補集合である偶数全体も有限集合ではない。従って $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \notin \mathcal{A}$ である。ゆえに可算無限個の和集合について閉じていないので $\mathcal{A}$ は σ-field ではない。

2　問2

m, n を逆にすれば同じ議論が成り立つので、$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = sup \left\{ \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{n,m} \mid M, N \in \mathbb{N} \right\}$ のみを示す。左を p、右を q と記す。まず、上限の定義より、任意の $M, N \in \mathbb{N}$ で $\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{n,m} \leq q$ が成立している。大小関係は極限において保存されるので、左辺で M, N を順番に $+\infty$ まで飛ばしても大小関係は保たれる。従って $p \leq q$ が得られる。

さらに逆向きの不等号も成立することを示すことで題意を示す。$a_{m,n} \geq 0$ であるので、任意の $M, N \in \mathbb{N}$ について $\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{n,m} \leq p$ が成立する。この時 M, N について左辺の上限を取った時に、p を上回ったとすると、上限の定義より p よりも大きく上限よりも小さい値をとる M, N の組みが存在することになる。しかし先の不等号は任意の M, N について成立しているのでこれはあり得ない。従って左辺の上限を取っても大小関係は保存される。よって $q \leq p$ であり、逆むきの不等号も示された。以上より $p = q$ である。