

測度論的確率論 2018 S1S2

Homework 6

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 25, 2018

1 Ex6.3

2 Ex6.8

3 Ex6.10

4 Ex6.12

5 Ex6.14

$$E[X] = E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] + E[X1_{\{X > \theta E[X]\}}]$$

両辺二乗して、第二項にヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$(E[X])^2 \leq E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}]^2 + 2E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}]E[X1_{\{X > \theta E[X]\}}] + E[X^2]P(X > \theta E[X])$$

これを整理して以下を得る。

$$P(X > \theta E[X]) \geq \frac{(E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] - E[X])^2}{E[X^2]}$$

従って、題意を得るためには以下が成立していれば良い。

$$(E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] - E[X])^2 \geq (E[X] - \theta E[X])^2$$

上から打ち切って期待値を撮っているため、 $E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] < E[X]$ であるので、左辺の中身は負である。一方で、 $\theta \in [0, 1]$ であるので右辺の中身は正である。これより、以下を示せばよい。

$$E[X] - E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] \geq E[X] - \theta E[X]$$

ここで、 $\theta E[X]$ よりも小さい値についてしか期待値を取れないので、 $E[X1_{\{X \leq \theta E[X]\}}] \leq \theta E[X]$ であることから上は確かに成立する。よって題意は示された。

6 Ex6.15

6.1 (a)

$p > q > 0$ とする。この時、 $f(x) = -x^{\frac{q}{p}}$ は凸関数である。従って Jensen の不等式より、

$$E\left[-(|X|^p)^{\frac{q}{p}}\right] \geq -(E[|X|^p])^{\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow E[(|X|^p)^{\frac{q}{p}}] \leq (E[|X|^p])^{\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow (E[|X|^q])^{\frac{1}{q}} \leq (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$$