測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 8

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 24, 2018

1 2.2.1

ここはちゃんとやるべき

2 2.2.2

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{1\geq i,j\geq n} E\left[X_iX_j\right]$$

である。コーシーシュワルツの不等式より、$E\left[X_iX_j\right] \leq \left(E\left[X_i^2\right]E\left[X_j^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} = r(0)$ である。また仮定より、

$$\forall\epsilon > 0, \exists K > 0 \text{ s.t. } k \geq K \ \Rightarrow \ r(k) < \epsilon$$

である。これより、$|i-j| \leq K$ に対しては $E[X_iX_j] \leq r(0)$ とし、$|i-j| > K$ に対しては $E[X_iX_j] \leq \epsilon$ で抑えられる。すなわち、

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1\geq i,j\geq n} E\left[X_iX_j\right] \leq \frac{1}{n^2}\left(n(2K-1)r(0) + n^2\epsilon\right) = \frac{2K+1}{n}r(0) + \epsilon$$

である。K は n に依存しないので $\lim \frac{1}{n^2}E[S_n^2] \leq \epsilon$ である。従って 0 に L^2 収束するので 0 に確率収束する。

3 2.2.3

Th2.2.14 の条件を満たすことを確認する。U_i が一様分布に従うことより以下が成立。

$$E\left[I_n\right] = E\left[f(U_i)\right] = \int f(x)\mathrm{d}x$$

さらに、B を $\mathbb{R}$ 上の可測集合とすると、f が可測関数であることより以下が成立する。

$$P\left(\omega \in U_1^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right) \times \cdots \times P\left(\omega \in U_n^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right) = P\left(\omega \in \left(f\circ U_1\right)^{-1}(B)\right) \times \cdots \times P\left(\omega \in \left(f\circ U_n\right)^{-1}(B)\right)$$

また、

$$P\left(\omega \in U_1^{-1}\left(f^{-1}(B)\right), \cdots, \omega \in U_n^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right) = P\left(\omega \in \left(f\circ U_1\right)^{-1}(B), \cdots, \omega \in \left(f\circ U_n\right)^{-1}(B)\right)$$

である。$\{U_i\}$ は独立であることより上二つの左辺は等しい。従って右辺も等しくなり、$\{f(U_i)\}$ も独立な確率変数である。以上で Th2.2.14 の条件が成立することが確認されたので、$I_n \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ である。

次に $P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$ を推定するために一様分布の実現値 $\{u_i\}_{i=1}^n$ を M セット発生させる。この時得られた I_n を I_n^m と記し、$\bar{I_n} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^M I_n^m$ とする。

$$P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = E\left[1\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

であるので、右辺のサンプル表記である $\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$ が題意の推定をうまく行えることを以下で示す。

$$\begin{aligned}
E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right] &= P\left(|(I_n^m - I) + (I - \bar{I}_n)| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq P\left(|I_n^m - I| + |I - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) + P\left(|I - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

M 個のサンプルは独立に生成され、上より可積分なので WLLN より、

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{p} E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

である。さらに、チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}
\| E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right] - P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \| &\leq P\left(|I - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq \frac{n}{a^2} E\left[\left(\bar{I}_n - I\right)^2\right] \\
&= \frac{n}{Ma^2} Var\left(I_n^m\right) \\
&= \frac{1}{a^2 M} Var\left(f(U_i)\right)
\end{aligned}$$

を得る。従って $M \to \infty$ で $E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right] \to P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$ である。ここで「$a_n \xrightarrow{p} b_n \to b \Rightarrow a_n \xrightarrow{p} b$」であることより

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{p} P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$$

であるので推定できる。

4 2.2.4

まず絶対値の期待値が発散することを確認する。

$$E\left[|X_i|\right] = \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{C}{k^2 \log k} = C \lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k \log k}$$

$k \geq 2$ において $\frac{1}{k \log k}$ が単調減少であることより積分判定法が使える。

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} \mathrm{d}x = \int_2^{\infty} \frac{(\log x)'}{\log x} \mathrm{d}x > \lim_{x\to\infty} \log\log x = \infty$$

これより確かに先の期待値は発散する。一方で、$kP\left(|X_i| > k\right) \to 0$ as $k \to \infty$ は成立することが以下のようにして確認できる。

$$\begin{aligned}
kP\left(|X_i| > k\right) &= k \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{C}{l^2 \log l} \leq Ck \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2 \log x} \mathrm{d}x \\
&= Ck \int_{\log k}^{\infty} \frac{\exp(-z)}{z} \mathrm{d}z \leq C \frac{k}{\log k} \int_{\log k}^{\infty} \exp(-z) \mathrm{d}z = C \frac{1}{\log k} \to 0 \text{ as } k \to \infty
\end{aligned}$$

従って Th2.2.12 が適用できて、

$$\mu_n = E\left[X_i 1\left(|X_i| \leq n\right)\right] = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{C}{k \log k}$$

とおくと、$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$ である。さらに「交項級数は各項の絶対値が単調減少で 0 に収束するなら収束する」ので、μ_n がこの性質を満たすことから、$\mu_n \to \mu$ なる μ が存在する。以上より $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{p} 0$ である。

5　2.2.5

まず絶対値の期待値が発散することを示す。Lemma2.2.13 より

$$E\left[|X_i|\right] = \int_e^{\infty} \frac{e}{x\log x}\mathrm{d}x = e\left[\log\log x\right]_e^{\infty} = \infty$$

であるので確かに期待値は発散する。しかし

$$xP\left(|X_i| > x\right) = x\frac{e}{x\log x} = \frac{e}{\log x} \to 0 \text{ as } x \to \infty$$

であるので Theorem2.2.12 が適用でき、

$$\mu_n = E\left[X_i 1\left(|X_i| \leq n\right)\right]$$

とおくと $\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$ である。

6　2.2.6

フビニの定理より $E[X]$ は以下のように変形できる。

$$E\left[X\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1(X \geq n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1(X \geq n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

また同じくフビニの定理より、

$$E[X^2] = E\left[2\sum_{n=1}^{X} n - X\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)1(X \geq n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)P(X \geq n)$$

を得る。