測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 3

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 5, 2018

1 Ex2.3

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

1.1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ を示す。

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。なぜなら、

$$\forall (x,y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \;\; a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \text{ s.t. } x \le b_1 - \frac{1}{n_1},\; y \le b_2 - \frac{1}{n_2}$$

なので、$N = \max(n_1, n_2)$ とおけば、$\forall n \ge N\ (x,y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ となるので、$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。

逆向きの包含関係も、任意に $(x,y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ をとると、ある N については必ず $(x,y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}]$ であるので、$(a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}] \subset (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ であることから示される。

すなわち、$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ は $\mathcal{B}^2$ を生成する半開区間の可算和で表現できることがわかった。したがって、Borel sigma field の定義より $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in (B)^2$ である。

ここで、「$\mathbb{R}^2$ の任意の開集合は $\mathbb{R}^2$ の開区間の可算和でかける（主張 1）」とすると、sigma field の性質から $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ の可算和で表現される任意の集合は $(B)^2$ に含まれているので、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ が示された。

よって以下では（主張 1）を証明する。to be written

1.2 $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を示す。

まず、$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ を示す。左辺が右辺に含まれることは以下のように確認できる。　任意に $(x,y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ をとると、

$$\forall n \ge 1 \begin{cases} a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \\ a_2 < x < b_2 + \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \forall n \ge 1\ (x,y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \Rightarrow (x,y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$$

である。

逆向きの包含関係は以下のように確認できる。任意に $(x,y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ をとると、$\forall n \ge 1\ (x,y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ である。この時、

$$a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; a_1 < x \le \inf\left(b_1 + \frac{1}{n}\right) \;\Rightarrow\; a_1 < x \le b_1$$

である。y についても同様にできるので、$(x,y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ であることがわかる。

これより、$\mathcal{B}^2$ を生成する集合の要素は $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることがわかる。これはつまり、$\mathcal{B}^2$ が $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることを意味する。また、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を生成する開集合全体には明らかに $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体が含まれているため、$\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に含まれる。したがって $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である。

2 Ex2.5

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

2.1 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$

開集合 $A \subset X$ を任意にとる。まず、$A \times Y$ が $X \times Y$ の開集合であることを示す。

まず、直積空間 $X \times Y$ 上に以下のように距離 (d) が定義できる。

$$\text{let } x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),\ \text{where } x_1, y_1 \in X,\ x_2, y_2 \in Y \text{ then } d(x,y) \equiv\ d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

すなわち $(X \times Y, d)$ は距離空間とできる。以下ではこの距離 d について $A \times Y$ が開集合であることを確認する。

全体集合 Y が開かつ閉集合であることより、$(p,q) \in A \times Y$ について以下の二つが成立する。

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } \{x \in X \mid d_1(x,p) < \epsilon\} \subset A$$
$$\exists \eta > 0 \text{ s.t. } \{y \in Y \mid d_2(y,q) < \eta\} \subset Y$$

ここで、上の集合に含まれる (x,y) について、

$$d((x,y),(p,q)) = d_1(x,p) + d_2(y,q) < \epsilon + \eta$$

が成立する。従って、(p,q) を任意にとっても、$\{(x,y) \in X \times Y \mid d((x,y),(p,q)) < \delta\}$ なる集合が δ を十分小さくすることによって $A \times Y$ に含まれることがわかる。これより $A \times Y$ は開集合である。

これより Borel sigma field の定義から、$A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。ここで、$\mathcal{C} = \{A \subset X \mid A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)\}$ とする。先の議論より任意の開集合 $A \subset X$ について $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ であるので、$\{X \text{ の開集合全体}\} \subset \mathcal{C}$ である。

また、$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ をとる。明らかに $\bigcup_{i=1}^{\infty} c_i\ \times Y$ が開集合であり、$\mathcal{B}(X \times Y)$ に含まれることから、$\mathcal{C}$ は sigma field、それも X の開集合全体を含む sigma field である。Borel sigma field の定義より $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$ である。

これより、$A \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$ なので、任意の $A \in \mathcal{B}(X)$ について $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。Y 上の開集合 B についても同様の議論が適用できて、任意の $B \in \mathcal{B}(Y)$ について $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。

従って、以下が成立する。

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), B \in \mathcal{B}(Y)\ A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$$

すなわち $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ である。

2.2 $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$

「X, Y が可分ならば $X \times Y$ も可分（主張 2)」を所与とすると、以下のように証明できる。

任意に開集合 $A \times B \subset X \times Y$ をとる。開集合の定義より、任意の $(x,y) \in A \times B$ について、距離 d を用いた ϵ-ball を $B_\epsilon((x,y))$ と書くと以下が成立する。

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B_\epsilon((x,y)) \subset A \times B$$

ここで $X \times Y$ について稠密な可算集合を D と書く。この時、任意の $(x,y) \in A \times B$ について

$$(s,t)_{(x,y)} \in B_{\frac{\epsilon}{3}}((x,y)) \cap D \subset A \times B$$

が必ず取れる。ここで $\epsilon_{(x,y)} = \frac{\epsilon}{2}$ とすると、

$$(x,y) \in B_{\epsilon_{(x,y)}}((s,t)_{(x,y)})$$

が必ず成立する。

つまり、$A \times B$ の任意の要素は、$D \cap (A \times B)$ の要素を中心として、それ自身も $A \times B$ に含まれるような ϵ-ball に入れることができる。今、$\bigcup_{(s,t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ を考える。ただしここで $B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ はそれ自身が $A \times B$ に含まれるように取られている。先の議論より、$A \times B \subset \bigcup_{(s,t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ である。逆向きの包含関係については、$\exists (s,t)$ s.t. $(x,y) \in B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ の時、$B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ がもともと $A \times B$ に含まれるように取られているので当然 $(x,y) \in A \times B$ であることから確認できる。

従って $A \times B = \bigcup_{(s,t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ である。ここで、左辺は open ball の可算個の和集合となっている。$X \times Y$ の任意の開集合は $X \times Y$ 上の open ball の可算個の和集合で表現できる。これは、

$$\mathcal{B}(X \times Y) \subset X \times Y \text{ の open ball が生成する最小の sigma field}$$

を意味する。

さらに、$X \times Y$ の open ball 全体は、明らかに $\left\{A' \times B' \mid A' \in \mathcal{B}(X),\ B' \in \mathcal{B}(Y)\right\}$ に含まれているので、

$$\mathcal{B}(X \times Y) \subset \sigma\left(\left\{A' \times B' \mid A' \in \mathcal{B}(X),\ B' \in \mathcal{B}(Y)\right\}\right) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$$

が成立する。

3 Ex2.6

前問後半と同様の議論により、開集合 $A \subset X$ に対して以下が成立する。

$$A = \bigcup_{s \in A \cap D} B_{\epsilon_s}(s)$$

これより、$\mathcal{B}(X) \subset \sigma\left(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}\right)$ である。open ball は必ず開集合なので、明らかに $\sigma\left(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}\right) \subset \mathcal{B}(X)$ であるので、$\mathcal{B}(X) = \sigma\left(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}\right)$ である。ここで、D が可算集合なので、$\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}$ は可算集合。また、明らかに $\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\} \subset \mathcal{B}(X)$ であるので、$\mathcal{B}(X)$ は countably generated である。

4 Ex3.3

$\mathcal{B}^*$ を拡張実数 $\bar{\mathbb{R}}$ に入っている sigma field であるとする。この時、任意に $B \in \mathcal{B}^*$ を取ってくると、

$$h^{-1}(B) = \left\{\left\{f^{-1}(B)\right\} \cap A\right\} \cup \left\{\left\{g^{-1}(B)\right\} \cap A^c\right\}$$

であり、f, g が可測関数であることから、$f^{-1}(b), g^{-1}(B)$ は $\mathcal{A}$ に入っており、仮定より $A, A^c \in \mathcal{A}$ であるので、$h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ である。よって定義より $h(x) : X \to \bar{\mathbb{R}}$ は可測関数である。

5 Ex3.4

1. $f : X \to \mathbb{R}$ が $\sigma\left(\{A_1, \cdots, A_m\}\right)$ 可測
2. $\exists b_1, \cdots, b_m \ \in \mathbb{R}$ s.t. $f = \sum_{i=1}^m b_i \cdot 1_{A_i}$

が同値であることを示す。

5.1 $1 \Rightarrow 2$ を示す。

$\{A_1, \cdots, A_m\}$ が排反であることから、$\sigma\left(\{A_1, \cdots, A_m\}\right)$ の要素は全て $\{A_1, \cdots, A_m\}$ の要素を組み合わせて得られる和集合、または ϕ である。　lemma3.5 より、任意の $a \in \mathbb{R}$ について $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \in \sigma\left(\{A_1, \cdots, A_m\}\right)$ であるので、$\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ が $\{A_1, \cdots, A_m\}$ の要素を組み合わせて得られる和集合、または ϕ でないといけない。

　仮に、$\exists i \in \{1, \cdots, m\}$ s.t. $\sup_{x \in A_i} f(x) > \inf_{x \in A_i} f(x)$ とすると、このような i を i^* とすると、$\inf_{x \in A_{i^*}} f(x) < a < \sup_{x \in A_{i^*}} f(x)$ となるように $a \in \mathbb{R}$ をとったときに、

$$\{x \in A_{i^*} \mid f(x) \leq a\} \neq A_{i^*} \ \{x \in A_{i^*} \mid f(x) \leq a\} \subset A_{i^*}$$

であるので、$\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ は $\{A_1, \cdots, A_m\}$ の要素の和集合では表すことができないため、$f : X \to \mathbb{R}$ は $\sigma\left(\{A_1, \cdots, A_m\}\right)$ 可測でなくなる。

　従って、1 を仮定した時、

$$\forall i \in \{1, \cdots, m\} \ \forall x \in A_i \ f(x) \text{ is constant}$$

を得る。これはすなわち 2 を意味する。

5.2 $2 \Rightarrow 1$ を示す。

任意に $a \in \mathbb{R}$ をとる。この時、

$$\{x \in X \mid f(x) \leq a\} = \left\{x \in X \mid \sum_{i=1}^m b_i \cdot 1_{A_i}(x) \leq a\right\} = \bigcup_{i : b_i < a} \{A_i\} \in \sigma\left(\{A_1, \cdots, A_m\}\right)$$

なので、lemma3.5 より $f : X \to \mathbb{R}$ は $\sigma\left(\{A_1, \cdots, A_m\}\right)$ 可測である。

6 Ex3.6

これは解析数理のノートを参照すること。

7 Ex3.15

1. $\forall p \in X \ \ \liminf_{x\to p} f(x) \geq f(p)$
2. $\forall a \in \mathbb{R} \ \ \{x \mid f(x) > a\}$

以上の二つが同値であることを示す。

7.1 $1 \Rightarrow 2$

対偶を示す。すなわち「$\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\{x \mid f(x) > a\}$ is not open」を仮定する。この時、

$$\begin{aligned}
&\exists a \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \{x \mid f(x) > a\} \quad \text{is not open} \\
\Leftrightarrow &\exists a \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \{x \mid f(x) \leq a\} \quad \text{is not closed} \\
\Rightarrow &\exists a \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{x \mid f(x) \leq a\} \text{ s.t. } x_n \to p \text{ and } p \in \{x \mid f(x) > a\}
\end{aligned}$$

である。従って、このような a と点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について考えると $\liminf_{x\to p} f(x) \leq a < f(p)$ であるので、対偶が示された。

7.2 $2 \Rightarrow 1$

$f(p) = -\infty$ の時は明らカニ成立するので、そうでないときを考える。このとき、任意の $p \in X$ について $a < f(p)$ となるように a を任意にとることができる。仮定より $\{x \mid f(x) > a\}$ は開集合で、かつ $p \in \{x \mid f(x) > a\}$ である。

開集合の定義より以下が成立する。

$$\exists r > 0 \text{ s.t. } B_r(p) \subset \{x \mid f(x) > a\}$$

これを使って、$\liminf_{x\to p} f(x) = \lim_{r\to 0} \inf_{x\in B_r(p)} f(x)$ と書くことができることから $\liminf_{x\to p} f(x) \geq a$ であることがわかる。

ここで、a は $f(p)$ よりも小さい任意の実数で良いことに注意する。仮に、$\liminf_{x\to p} f(x) < f(p)$ とすると、$\liminf_{x\to p} f(x) < b < f(p)$ を満たす実数 b が必ず存在して、b については上の条件を満たすことができなくなる。従って、$\liminf_{x\to p} f(x) \geq f(p)$ である。

8 Ex3.16

「$f^{\delta}(x) = \sup\{f(y) \mid d(x,y) < \delta\}$、$f_{\delta}(x) = \inf\{f(y) \mid d(x,y) < \delta\}$ と置くと、任意の $\delta > 0$ について $f^{\delta}(x), f_{\delta}(x)$ はそれぞれ下半連続、上半連続（主張 3）」と「$D_f = \left\{x \mid f^0(x) \neq f_0(x)\right\}$（主張 4）」を所与とすると、

$$\begin{aligned}
D_f &= \left\{x \mid f^0(x) \neq f_0(x)\right\} \\
&= \bigcap_{n\geq 1} \left\{x \mid f^{\frac{1}{n}}(x) > f_{\frac{1}{n}}(x)\right\} \\
&= \bigcap_{n\geq 1} \left\{x \mid f^{\frac{1}{n}}(x) > a\right\} \cap \left\{x \mid a > f_{\frac{1}{n}}(x)\right\} \text{ for some } a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

であり、主張 3 と Ex3.15 の結果から任意の $n \geq 1$ について $\left\{x \mid f^{\frac{1}{n}}(x) > a\right\}$ と $\left\{x \mid a > f_{\frac{1}{n}}(x)\right\}$ は開集合である。従って、不連続点の集合は開集合の可算回の積集合として表現されるため、$D_f \subset \mathcal{B}(X)$ である。

主張 4 は定義より明らかであるので、主張 3 を証明する。

8.1 主張 3 の証明

任意に $\delta > 0$ を取り、$f^{\delta}(x)$ が下半連続であることを示す。Ex3.15 の結果を利用して、任意の実数 a について、

$$\left\{x \mid a \geq f^{\delta}(x)\right\} \quad \text{is closed}$$

を示す。

$\{x_n\} \in \left\{x \mid a \geq f^{\delta}(x)\right\}$ なる収束する点列を取り、収束先を $x^* \in X$ と表記する。このとき、閉集合の定義より、$x^* \in \left\{x \mid a \geq f^{\delta}(x)\right\}$ を示せば題意を示したことになる。

上限の定義より、x^* における上限が a よりも大きいと仮定すると、

$$\sup\{f(y) \mid d(x^*,y)<\delta\} > a \;\Rightarrow\; \exists b \in (a, \sup\{f(y) \mid d(x^*,y)<\delta\}) \text{ s.t. } \exists y \in \{y \mid d(x^*,y)<\delta\} \text{ s.t. } f(y) > b > a$$

でる。しかし、$x_n \to x^*$ より、$\{y \mid d(x^*,y)<\delta\} \subset \bigcup_n \{y \mid d(x_n,y)<\delta\}$ である。全ての n について

$$a \geq \sup\{f(y) \mid d(x_n,y)<\delta\}$$

であることから、先ほどの x^* における上限が a よりも大きいという仮定から導かれた、

$$\exists b \in (a, \sup\{f(y) \mid d(x^*,y)<\delta\}) \text{ s.t. } \exists y \in \{y \mid d(x^*,y)<\delta\} \text{ s.t. } f(y) > b > a$$

はと矛盾する。

従って、

$$a \geq \sup\{f(y) \mid d(x^*,y)<\delta\}$$

である。つまり、$x^* \in \left\{x \mid a \geq f^\delta(x)\right\}$ なので、$f^\delta(x)$ は下半連続である。

$f_\delta(x)$ についても同様に上半連続であることが示される。