測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 3

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 5, 2018

1 Ex2.3

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

1.1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ を示す。

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。なぜなら、

$$\forall(x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \;\; a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \text{ s.t. } x \leq b_1 - \frac{1}{n_1},\; y \leq b_2 - \frac{1}{n_2}$$

なので、$N = \max(n_1, n_2)$ とおけば、$\forall n \geq N\ (x, y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ となるので、$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。

逆向きの包含関係も、任意に $(x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ をとると、ある N については必ず $(x, y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}]$ であるので、$(a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}] \subset (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ であることから示される。

すなわち、$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ は $\mathcal{B}^2$ を生成する半開区間の可算和で表現できることがわかった。したがって、Borel sigma field の定義より $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in (B)^2$ である。

ここで、「$\mathbb{R}^2$ の任意の開集合は $\mathbb{R}^2$ の開区間の可算和でかける（主張 1）」とすると、sigma field の性質から $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ の可算和で表現される任意の集合は $(B)^2$ に含まれているので、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ が示された。

よって以下では（主張 1）を証明する。to be written

1.2 $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を示す。

まず、$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ を示す。左辺が右辺に含まれることは以下のように確認できる。　　任意に $(x, y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ をとると、

$$\forall n \geq 1 \begin{cases} a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \\ a_2 < x < b_2 + \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \forall n \geq 1\ (x, y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \Rightarrow (x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$$

である。

逆向きの包含関係は以下のように確認できる。任意に $(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ をとると、$\forall n \geq 1\ (x, y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ である。この時、

$$a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; a_1 < x \leq \inf\left(b_1 + \frac{1}{n}\right) \;\Rightarrow\; a_1 < x \leq b_1$$

である。y についても同様にできるので、$(x, y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ であることがわかる。

これより、$\mathcal{B}^2$ を生成する集合の要素は $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることがわかる。これはつまり、$\mathcal{B}^2$ が $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることを意味する。また、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を生成する開集合全体には明らかに $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体が含まれているため、$\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に含まれる。したがって $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である。

2 Ex2.5

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

2.1 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)\subset\mathcal{B}(X\times Y)$

開集合 $A\subset X$ を任意にとる。まず、$A\times Y$ が $X\times Y$ の開集合であることを示す。

まず、直積空間 $X\times Y$ 上に以下のように距離 (d) が定義できる。

$$\text{let } x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ \text{where } x_1,y_1\in X,\ x_2,y_2\in Y \text{ then } d(x,y)\equiv\ d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$$

すなわち $(X\times Y,d)$ は距離空間とできる。以下ではこの距離 d について $A\times Y$ が開集合であることを確認する。

全体集合 Y が開かつ閉集合であることより、$(p,q)\in A\times Y$ について以下の二つが成立する。

$$\exists\epsilon>0 \text{ s.t. } \{x\in X\mid d_1(x,p)<\epsilon\}\subset A$$
$$\exists\eta>0 \text{ s.t. } \{y\in Y\mid d_2(y,q)<\eta\}\subset Y$$

ここで、上の集合に含まれる (x,y) について、

$$d((x,y),(p,q))=d_1(x,p)+d_2(y,q)<\epsilon+\eta$$

が成立する。従って、(p,q) を任意にとっても、$\{(x,y)\in X\times Y\mid d((x,y),(p,q))<\delta\}$ なる集合が δ を十分小さくすることによって $A\times Y$ に含まれることがわかる。これより $A\times Y$ は開集合である。

これより Borel sigma field の定義から、$A\times Y\in\mathcal{B}(X\times Y)$ である。ここで、$\mathcal{C}=\{A\subset X\mid A\times Y\in\mathcal{B}(X\times Y)\}$ とする。先の議論より任意の開集合 $A\subset X$ について $A\times Y\in\mathcal{B}(X\times Y)$ であるので、$\{X\text{ の開集合全体 }\}\subset\mathcal{C}$ である。

また、$\{c_i\}_{i=1}^{\infty}\in\mathcal{C}$ をとる。明らかに $\bigcup_{i=1}^{\infty}c_i\ \times Y$ が開集合であり、$\mathcal{B}(X\times Y)$ に含まれることから、$\mathcal{C}$ は sigma field、それも X の開集合全体を含む sigma field である。Borel sigma field の定義より $\mathcal{B}(X)\subset\mathcal{C}$ である。

これより、$A\in\mathcal{B}(X)\subset\mathcal{C}$ なので、任意の $A\in\mathcal{B}(X)$ について $A\times Y\in\mathcal{B}(X\times Y)$ である。Y 上の開集合 B についても同様の議論が適用できて、任意の $B\in\mathcal{B}(Y)$ について $X\times B\in\mathcal{B}(X\times Y)$ である。

従って、以下が成立する。

$$\forall A\in\mathcal{B}(X),B\in\mathcal{B}(Y)\ A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)\subset\mathcal{B}(X\times Y)$$

すなわち $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)\subset\mathcal{B}(X\times Y)$ である。

2.2 $\mathcal{B}(X\times Y)\subset\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$

「X,Y が可分ならば $X\times Y$ も可分（主張 2)」を所与とすると、以下のように証明できる。

任意に開集合 $A\times B\subset X\times Y$ をとる。開集合の定義より、任意の $(x,y)\in A\times B$ について、距離 d を用いた ϵ-ball を $B_\epsilon((x,y))$ と書くと以下が成立する。

$$\exists\epsilon>0 \text{ s.t. } B_\epsilon((x,y))\subset A\times B$$

ここで $X\times Y$ について稠密な可算集合を D と書く。この時、任意の $(x,y)\in A\times B$ について

$$(s,t)_{(x,y)}\in B_{\frac{\epsilon}{3}}((x,y))\cap D\subset A\times B$$

が必ず取れる。ここで $\epsilon_{(x,y)}=\frac{\epsilon}{2}$ とすると、

$$(x,y)\in B_{\epsilon_{(x,y)}}((s,t)_{(x,y)})$$

が必ず成立する。

つまり、$A\times B$ の任意の要素は、$D\cap(A\times B)$ の要素を中心として、それ自身も $A\times B$ に含まれるような ϵ-ball に入れることができる。今、$\bigcup_{(s,t)\in D\cap(A\times B)}B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ を考える。ただしここで $B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ はそれ自身が $A\times B$ に含まれるように取られている。先の議論より、$A\times B\subset\bigcup_{(s,t)\in D\cap(A\times B)}B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ である。逆向きの包含関係については、$\exists(s,t)$ s.t. $(x,y)\in B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ の時、$B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ がもともと $A\times B$ に含まれるように取られているので当然 $(x,y)\in A\times B$ であることから確認できる。

従って $A\times B=\bigcup_{(s,t)\in D\cap(A\times B)}B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ である。ここで、左辺は open ball の可算個の和集合となっている。$X\times Y$ の任意の開集合は $X\times Y$ 上の open ball の可算個の和集合で表現できる。これは、

$$\mathcal{B}(X\times Y)\subset X\times Y \text{ の open ball が生成する最小の sigma field}$$

を意味する。

さらに、$X\times Y$ の open ball 全体は、明らかに $\left\{A^{'}\times B^{'}\mid A^{'}\in\mathcal{B}(X),\ B^{'}\in\mathcal{B}(Y)\right\}$ に含まれているので、

$$\mathcal{B}(X\times Y)\subset\sigma\left(\left\{A^{'}\times B^{'}\mid A^{'}\in\mathcal{B}(X),\ B^{'}\in\mathcal{B}(Y)\right\}\right)=\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$$

が成立する。

3 Ex2.6

前問後半と同様の議論により、開集合 $A \subset X$ に対して以下が成立する。

$$A = \bigcup_{s \in A \cap D} B_{\epsilon_s}(s)$$

これより、$\mathcal{B}(X) \subset \sigma\left(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}\right)$ である。open ball は必ず開集合なので、明らかに $\sigma\left(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}\right) \subset \mathcal{B}(X)$ であるので、$\mathcal{B}(X) = \sigma\left(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}\right)$ である。ここで、D が可算集合なので、$\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}$ は可算集合。また、明らかに $\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\} \subset \mathcal{B}(X)$ であるので、$\mathcal{B}(X)$ は countably generated である。

4 Ex3.3

$\mathcal{B}^*$ を拡張実数 $\bar{\mathbb{R}}$ に入っている sigma field であるとする。この時、任意に $B \in \mathcal{B}^*$ を取ってくると、

$$h^{-1}(B) = \left\{\left\{f^{-1}(B)\right\} \cap A\right\} \cup \left\{\left\{g^{-1}(B)\right\} \cap A^c\right\}$$

であり、f, g が可測関数であることから、$f^{-1}(b), g^{-1}(B)$ は $\mathcal{A}$ に入っており、仮定より $A, A^c \in \mathcal{A}$ であるので、$h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ である。よって定義より $h(x) : X \to \bar{\mathbb{R}}$ は可測関数である。

5 Ex3.4

1. $f : X \to \mathbb{R}$ が $\sigma\left(\{A_1, \cdots, A_m\}\right)$ 可測
2. $\exists b_1, \cdots, b_m \ \in \mathbb{R}$ s.t. $f = \sum_{i=1}^m b_i \cdot 1_{A_i}$

が同値であることを示す。

5.1 $1 \Rightarrow 2$ を示す。

5.2 $2 \Rightarrow 1$ を示す。

6 Ex3.6

7 Ex3.15

8 Ex3.16