

# 測度論的確率論 2018 S1S2

## Homework 8

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 25, 2018

### 1 2.2.1

$E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{E[S_n]}{n} = v_n$  であることより

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right] = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} (\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \cdots + \text{Var}(X_n))$$

を得る。ただし、最後の等式は各確率変数が無相関であることによる。仮定より  $\forall \epsilon > 0 \exists I \text{ s.t. } i \geq I \Rightarrow \frac{\text{Var}(X_i)}{i} < \epsilon$  であるので、 $n > I$  であれば、

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{n^2} \frac{\text{Var}(X_i)}{i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{I-1} \frac{i}{n^2} \frac{\text{Var}(X_i)}{i} + \sum_{i=I}^n \frac{i}{n^2} \frac{\text{Var}(X_i)}{i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{I-1} \frac{i}{n^2} \frac{\text{Var}(X_i)}{i} + \frac{\epsilon}{n^2} \sum_{i=I}^n i \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{I-1} \text{Var}(X_i) + \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{I^2}{n^2} + \frac{I}{n^2}\right) \end{aligned}$$

を得る。 $n \rightarrow \infty$  での挙動を考えると、 $I$  が  $n$  によらず決定され、 $\text{Var}(X_i) \rightarrow \infty$  であっても  $\forall i \text{ Var}(X_i) < \infty$  であるとき最終行の第一項は0に、第二項は  $\frac{\epsilon}{2}$  に収束する。従って任意の  $\epsilon > 0$  で上から押さえることができるので  $\frac{S_n}{n} - v_n \rightarrow 0$  in  $L^2$  である。チェビシェフの不等式より任意の  $\epsilon > 0$  に対して、

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - v_n\right| > \epsilon\right) \leq \frac{E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right]}{\epsilon^2} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

であるので確かに確率収束もする。

### 2 2.2.2

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} E[X_i X_j]$$

である。コーシーシュワルツの不等式より、 $E[X_i X_j] \leq (E[X_i^2] E[X_j^2])^{\frac{1}{2}} = r(0)$  である。また仮定より、

$$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0 \text{ s.t. } k \geq K \Rightarrow r(k) < \epsilon$$

である。これより、 $|i - j| \leq K$  に対しては  $E[X_i X_j] \leq r(0)$  で、 $|i - j| > K$  に対しては  $E[X_i X_j] \leq \epsilon$  で抑えられる。すなわち、

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} E[X_i X_j] \leq \frac{1}{n^2} (n(2K - 1)r(0) + n^2 \epsilon) = \frac{2K + 1}{n} r(0) + \epsilon$$

である。 $K$  は  $n$  に依存しないので  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} E[S_n^2] \leq \epsilon$  である。従って0に  $L^2$  収束するので WLLN より0に確率収束する。

### 3 2.2.3

Th2.2.14 の条件を満たすことを確認する。 $U_i$  が一様分布に従うことより以下が成立。

$$E[I_n] = E[f(U_i)] = \int_0^1 f(x)dx$$

さらに、 $B$  を  $\mathbb{R}$  上の可測集合とすると、 $f$  が可測関数であることより以下が成立する。

$$P(\omega \in U_1^{-1}(f^{-1}(B))) \times \cdots \times P(\omega \in U_n^{-1}(f^{-1}(B))) = P(\omega \in (f \circ U_1)^{-1}(B)) \times \cdots \times P(\omega \in (f \circ U_n)^{-1}(B))$$

また、

$$P(\omega \in U_1^{-1}(f^{-1}(B)), \dots, \omega \in U_n^{-1}(f^{-1}(B))) = P(\omega \in (f \circ U_1)^{-1}(B), \dots, \omega \in (f \circ U_n)^{-1}(B))$$

である。 $\{U_i\}$  は独立であることより上二つの左辺は等しい。従って右辺も等しくなり、 $\{f(U_i)\}$  も独立な確率変数であることがわかる。以上で Th2.2.14 の条件が成立することが確認されたので、 $I_n \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x)dx$  である。

次に  $P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$  を推定するために一様分布の実現値  $\{u_i\}_{i=1}^n$  を  $M$  セット発生させる。この時得られた  $I_n$  を  $\{I_n^m\}_{m=1}^M$  と記し、 $\bar{I}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_n^m$  とする。

$$P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = E\left[1\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

である。ここで  $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)$  が題意の推定をうまく行えることを以下で示す。三角不等式より、

$$\begin{aligned} E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right] &= P\left(|(I_n^m - I) + (I - \bar{I}_n)| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right) \\ &\leq P\left(|I_n^m - I| + |I - \bar{I}_n| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right) \\ &\leq P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) + P\left(|I - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

$M$  個のサンプルは独立に生成され、上より可積分なので WLLN より、

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{p} E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right] \text{ s.t. } M \rightarrow \infty$$

である。さらに、チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned} \left|E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right] - P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right| &\leq P\left(|I - \bar{I}_n| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \\ &\leq \frac{n}{a^2} E\left[(\bar{I}_n - I)^2\right] \\ &= \frac{n}{Ma^2} \text{Var}(I_n^m) \\ &= \frac{1}{a^2 M} \text{Var}(f(U_i)) \end{aligned}$$

を得る。従って  $M \rightarrow \infty$  で  $E\left[1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right] \rightarrow P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$  である。ここで「 $a_n \xrightarrow{p} b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n \xrightarrow{p} b$  (主張 1)」であることより

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1\left(|I_n^m - \bar{I}_n| > \frac{2a}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{p} P\left(|I_n^m - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = P\left(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right)$$

であるので確かに推定できる。

### 3.1 主張1の証明

$a_n \xrightarrow{p} b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n \xrightarrow{p} b$ を示す。任意の  $\epsilon, \delta > 0$  に対して、

$$\exists N \text{ s.t. } n > N \Rightarrow P(\|a_n - b_n\| > \epsilon) \leq \delta$$

である。また、

$$\exists M \text{ s.t. } m > M \Rightarrow \|b_m - b\| < \epsilon$$

である。ここで三角不等式より、

$$n > \max(N, M) \Rightarrow P(\|a_n - b\| > \epsilon) \leq P(\|a_n - b_n\| > \epsilon) + P(\|b_n - b\| > \epsilon) \leq \delta$$

が成立するため、題意は示された。

## 4 2.2.4

まず絶対値の期待値が発散することを確認する。

$$E[|X_i|] = \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{C}{k^2 \log k} = C \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \log k}$$

$k \geq 2$  において  $\frac{1}{k \log k}$  が単調減少であることより積分判定法が使える。

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx = \int_2^{\infty} \frac{(\log x)'}{\log x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} (\log \log x - \log \log 2) = \infty$$

これより確かに先の期待値は発散する。一方で、 $kP(|X_i| > k) \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$  は成立することが以下のようにして確認できる。

$$\begin{aligned} kP(|X_i| > k) &= k \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{C}{l^2 \log l} \leq Ck \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx \\ &= Ck \int_{\log k}^{\infty} \frac{\exp(-z)}{z} dz \leq C \frac{k}{\log k} \int_{\log k}^{\infty} \exp(-z) dz = C \frac{1}{\log k} \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

従って Th2.2.12 が適用できて、

$$\mu_n = E[X_i 1(|X_i| \leq n)] = \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{C}{k \log k}$$

とおくと、 $\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$  である。さらに「交項級数は各項の絶対値が単調減少で0に収束するなら収束する（主張2）」ので、 $\mu_n$  がこの性質を満たす（すなわち  $\frac{C}{k \log k}$  が  $k \geq 2$  において単調に0に収束する）ことから、 $\mu_n \rightarrow \mu$  なる  $\mu$  が存在する。よって先の主張1より  $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{p} 0$  である。

### 4.1 主張2の証明

$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$  と置く。ただし  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  は非負の単調減少な数列で0に収束するとする。この時、

$$\begin{cases} S_{2k+1} = S_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) > S_{2k-1} \\ S_{2k} = S_{2k-2} - (a_{2k-1} - a_{2k}) < S_{2k-2} \end{cases}$$

が任意の  $k$  について成立する。また、 $2m+1 > 2n$  について

$$S_{2m+1} = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) - \cdots - (a_{2m-1} - a_{2m}) - a_{2m+1}$$

であり、右辺で引かれる各項は  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  が単調減少であることから非負であるので  $S_{2n} > S_{2m+1}$  である。すなわち  $\{S_{2k+1}\}$  は偶数項で上から抑えられた単調増加な数列であるため収束先  $(L_1)$  を持つ。同様に  $\{S_{2k}\}$  は奇数項で下から抑えられた単調減少な数列なので収束先  $(L_2)$  を持つ。さらに、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} - S_{2m-1}) = L_2 - L_1$$

であり、仮定より  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = 0$  であることから  $L_2 = L_1$  である。従って題意は示された。

## 5 2.2.5

まず絶対値の期待値が発散することを示す。Lemma2.2.13 より

$$E[|X_i|] = \int_e^\infty \frac{e}{x \log x} dx = e [\log \log x]_e^\infty = \infty$$

であるので確かに期待値は発散する。しかし

$$xP(|X_i| > x) = x \frac{e}{x \log x} = \frac{e}{\log x} \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow \infty$$

であるので Theorem2.2.12 が適用でき、

$$\mu_n = E[X_i 1(|X_i| \leq n)]$$

とおくと  $\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$  である。

## 6 2.2.6

フビニの定理より  $E[X]$  は以下のように変形できる。

$$E[X] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1(X \geq n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1(X \geq n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

また同じくフビニの定理より、

$$E[X^2] = E\left[2 \sum_{n=1}^X n - X\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) 1(X \geq n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) P(X \geq n)$$

を得る。