測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 6

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 4, 2018

1 Ex6.3

1.1 (a)

F のサポートを以下で書くことにする。

$$S_F = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \epsilon > 0,\ F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon) > 0\}$$

閉集合の定義より、$\mathbb{R} \setminus S_F$ が開集合であることを示せばよい。任意に $x \in \mathbb{R} \setminus S_F$ を取る時、F が非減少関数であることから、

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon) = 0 \tag{1}$$

である。ここで、必ず $\epsilon > \eta > 0$ であるような η が存在し、そのような η について以下が成立する。

$$\begin{cases} F(x+\epsilon) \geq F(x+\eta) \\ F(x-\eta) \geq F(x-\epsilon) \end{cases}$$

(1) より、$F(x+\eta) - F(x-\eta) = 0$ であるので $(x-\eta, x+\eta) \subset \mathbb{R} \setminus S_F$ である。よって定義より $\mathbb{R} \setminus S_F$ は開集合であることが確認できたので題意は示された。

1.2 (b)

対偶を示す。すなわち以下を仮定して F が左連続でないことを示す。

$$\exists x \in S_F \text{ s.t. } \exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap S_F = \{x\}$$

今、$x - \epsilon = x_0$ として、左から x に収束する数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を任意の n について $x_n < x$ であるようにとる。この時、仮定よりこの数列の要素はどれもサポートに入らないので、

$$\forall n,\ F(x_n) = F(x_{x+1})$$

である。これより、$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = f(x-\epsilon)$ である。また右側から近づく数列についても同様に考えることができ、$f(x) = F(x+\epsilon)$ である。一方で $F(\lim_{n\to\infty} x_n) = F(x)$ である。仮に F が連続だとすると、

$$F(x-\epsilon) = F(x) = F(x+\epsilon)$$

となり、これは x がサポートに入ることに矛盾する。従って題意は示された。

2 Ex6.8

任意に $p \in [0,1]$ を取る。この時、F^{-1} の定義より以下は F が連続でなくても成立する。

$$P\left(F(x) \leq p\right) = P\left(x \leq F^{-1}(p)\right) = F\left(F^{-1}(p)\right)$$

F が連続でないとする。不連続点における左極限を a、右極限を b とすると、$p \in [a,b)$ の時に、

$$F\left(F^{-1}(p)\right) = b$$

であるので、確かに F が連続でない時 $F(X)$ が一様分布に従わないことがわかる。一方で F が連続の時は、右極限と左翼弦が一致するため上のように p を取ることができない。従って、

$$F\left(F^{-1}(p)\right) = p$$

が成立する。よって題意は示された。

3 Ex6.10

3.1 (a)

測度の単調性と、アトムを持たないという仮定より以下が成立する。

$$A_1 \subset A,\ A_1 \in \mathcal{F} \ \Rightarrow P(A) > P(A_1) > 0$$

この論法で A_1 に対しても同様に A_2 s.t. $A_2 \subset A_1,\ A_2 \in \mathcal{F},\ P(A_1) > P(A_2) > 0$ となる A_2 が作れる。これを繰り返して減少列 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ を作る。この時、

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right) = 0 \tag{2}$$

であることを示せば、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある大きな N が存在して、$n \geq N \Rightarrow P(A_n) < \epsilon$ であるので、そのような n のうちで一つの A_n を B とすれば題意は示されている。よって (1) を以下で示す。

減少列であることから、

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_n A_n\right)$$

である。ここで、$\{A_n\}$ の構成の仕方から $\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$ である。$P\left(\bigcap_n A_n\right) > 0$ とすると、アトムを持たないという仮定より、

$$\exists C \subset \bigcap_n A_n,\ C \in \mathcal{F} \ \Rightarrow \ P\left(\bigcap_n A_n\right) > p(C) > 0$$

である。しかし、そのような C は明らかに $\{A_n\}$ のどこかに含まれるため、$P(C) \geq P\left(\bigcap_n A_n\right)$ であり矛盾する。よって、$P\left(\bigcap_n A_n\right) = 0$ であるので題意は示された。

3.2 (b)

任意の $n \in \mathbb{N}$ について $B_n = \left\{C \mid a - \frac{1}{n} < P(C) < a + \frac{1}{n}, C \subset A, C \in \mathcal{F}\right\}$ が空集合でないことを示す。これを否定すると、

$$\exists N > 0 \text{ s.t. } n \geq N \ \Rightarrow \ P(C) \leq a - \frac{1}{n} \text{ or } a + \frac{1}{n} \leq P(C)\ \forall C \subset A, C \in \mathcal{F}$$

である。$P(C) \leq a - \frac{1}{N}$ の時、$P(A \setminus C) > \frac{1}{N} > 0$ であるので (a) より、$D \subset A \setminus C$ で任意に小さな $\epsilon > 0$ に対して $0 < P(D) < \epsilon$ であるような $D \in \mathcal{F}$ が存在する。ここで C と D はその構成より排反なので、$P(C \cup D) = P(C) + P(D)$ である。これは $a - \frac{1}{N} < P(C \cup D) < a + \frac{1}{N}$ とできるような D が必ず存在することを意味する。$P(C) \geq a + \frac{1}{N}$ のケースについても同様に考えることで $a - \frac{1}{N} < P(C \setminus D) < a + \frac{1}{N}$ となるような D を適切にとってくることができる。以上より、先の否定は成立しないので題意は示された。

4 Ex6.12

Lecture note より任意の内点 $x \in I$ に対して任意の $y \in I$ と任意の $a \in [D_-\phi(x), D_+\phi(x)]$ が取れて

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + a(y - x) \tag{3}$$

である。今、$S = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ を I の可算稠密集合とする。これは $\mathbb{R}$ が可分であることより必ず存在する。ここで (3) より、任意の $x \in I$ に対して、

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_i) + D_+\varphi(x_i)(x - x_i) \tag{4}$$

が任意の i について成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} a_i &= D_+\varphi(x_i) \\ b_i &= \varphi(x_i) - D_+\varphi(x_i)x_i \end{aligned}$$

とおいて、

$$\psi(x) = \sup_i \{a_i x + b_i\}$$

と定義する。(4) より $\varphi(x) \geq \psi(x)$ が成立することが確認できた。従って逆向きの不等号を証明すれば題意を示したことになる。

(3) より以下が成立する。

$$\varphi(x_i) \geq \varphi(x) + D_+\varphi(x)(x_i - x)$$

これより、

$$\begin{aligned}\psi(x) &\geq \varphi(x_i) + D_+\varphi(x_i)(x - x_i)\\ &\geq \varphi(x) - (x_i - x)(D_+\varphi(x_i) - D_+\varphi(x))\end{aligned}$$

が任意の i について成立する。ここで、「$D_+\varphi(x)$ が右連続である（主張 1)」を所与とすると、$x_i \downarrow x$ の時に右辺第二項が 0 となるので、確かに $\psi(x) \geq \varphi(x)$ が成立する。よって両方の不等号が示されたので、$\psi(x) = \varphi(x)$ が示された。

4.1 主張 1 の証明

$x < z < y$ とする。

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}$$

を考えると、lecture note よりこれは z より大きな $y \in I$ について非減少関数である。従って、そのような y^* について以下が成立する。

$$\lim_{y \downarrow z} \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z} \leq \frac{\varphi(y^*) - \varphi(z)}{y^* - z}$$

この両辺で $z \downarrow x$ をとると、

$$\lim_{z \downarrow x} D_+\varphi(z) \leq \lim_{z \downarrow x} \frac{\varphi(y^*) - \varphi(z)}{y^* - z} = \frac{\varphi(y^*) - \varphi(x)}{y^* - x}$$

となる。ただし、等号は $\varphi(x)$ が内部で連続であることより得られる。ここで、$y^* \downarrow x$ を両辺でとると、左辺は関係ないので変化せず、

$$\lim_{z \downarrow x} D_+\varphi(z) \leq \lim_{y^* \downarrow x} \frac{\varphi(y^*) - \varphi(x)}{y^* - x} = D_+\varphi(x)$$

を得る。

あとは逆向きの不等号も示せば題意が示されたことになる。つまり、$x < z$ で常に $D_+\varphi(x) \leq D_+\varphi(z)$ が成立することを示せば良い。ここで、$x < y < z < w$ が内点としてとれる時、凸関数の性質から、

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(w) - \varphi(z)}{w - z}$$

である。この両端に注目すると、確かに $D_+\varphi(x) \leq D_+\varphi(z)$ であることがわかる。これより逆向きの不等号も示されたので、$D_+\varphi(x) = \lim_{z \downarrow x} D_+\varphi(z)$ である。これは $D_+\varphi(z)$ が右連続であることを示している。

5 Ex6.14

$$E[X] = E\left[X 1_{\{X \leq \theta E[X]\}}\right] + E\left[X 1_{\{X > \theta E[X]\}}\right]$$

両辺二乗して、第二項にヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$(E[X])^2 \leq E\left[X 1_{\{X \leq \theta E[X]\}}\right]^2 + 2E\left[X 1_{\{X \leq \theta E[X]\}}\right] E\left[X 1_{\{X > \theta E[X]\}}\right] + E[X^2] P\left(X > \theta E[X]\right)$$

これを整理して以下を得る。

$$P\left(X > \theta E[X]\right) \geq \frac{\left(E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] - E[X]\right)^2}{E[X^2]}$$

従って、題意を得るためには以下が成立していれば良い。

$$\left(E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] - E[X]\right)^2 \geq \left(E[X] - \theta E[X]\right)^2$$

上から打ち切って期待値をとっているため、$E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] < E[X]$ であるので、左辺の中身は負である。一方で、$\theta \in [0,1]$ であるので右辺の中身は正である。これより、以下を示せばよい。

$$E[X] - E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] \geq E[X] - \theta E[X]$$

ここで、$\theta E[X]$ よりも小さい値についてしか期待値を取れないので、$E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] \leq \theta E[X]$ であることから上は確かに成立する。よって題意は示された。

6 Ex6.15

6.1 (a)

$p > q > 0$ とする。この時、$f(x) = -x^{\frac{q}{p}}$ は凸関数である。従って Jensen の不等式より、

$$E\left[-\left(|X|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right] \geq -\left(E\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow E[(|X|^p)^{\frac{q}{p}}] \leq (E[|X|^p])^{\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \ (E[|X|^q])^{\frac{1}{q}} \leq (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$$

6.2 (b)

$\frac{r-q}{r-p} + \frac{q-p}{r-p} = 1$ であるので、ヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$\left(E[|X|^p]\right)^{\frac{r-q}{r-p}}\left(E[|X|^r]\right)^{\frac{q-p}{r-p}} = \left(E\left[\left(|X|^{p\frac{r-q}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{r-q}}\right]\right)^{\frac{r-q}{r-p}}\left(E\left[\left(|X|^{r\frac{q-p}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{q-p}}\right]\right)^{\frac{q-p}{r-p}} \geq E\left[|X|^{\frac{p(r-q)+r(q-p)}{r-p}}\right] = E[|X|^q]$$

よって題意は示された。