測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 8

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 23, 2018

1 2.2.1

2 2.2.2

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{1\geq i,j\geq n} E\left[X_i X_j\right]$$

である。コーシーシュワルツの不等式より、$E\left[X_i X_j\right] \leq \left(E\left[X_i^2\right] E\left[X_j^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} = r(0)$ である。また仮定より、

$$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0 \text{ s.t. } k \geq K \;\Rightarrow\; r(k) < \epsilon$$

である。これより、$|i-j| \leq K$ に対しては $E[X_i X_j] \leq r(0)$ とし、$|i-j| > K$ に対しては $E[X_i X_j] \leq \epsilon$ で抑えられる。すなわち、

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1\geq i,j\geq n} E\left[X_i X_j\right] \leq \frac{1}{n^2}\left(n(2K-1)r(0) + n^2\epsilon\right) = \frac{2K+1}{n} r(0) + \epsilon$$

である。K は n に依存しないので $\lim \frac{1}{n^2}E[S_n^2] \leq \epsilon$ である。従って 0 に L^2 収束するので 0 に確率収束する。

3 2.2.3

4 2.2.4

5 2.2.5

6 2.2.6

フビニの定理より $E[X]$ は以下のように変形できる。

$$E\left[X\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1(X \geq n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1(X \geq n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

また同じくフビニの定理より、

$$E[X^2] = E\left[2\sum_{n=1}^{X} n - X\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)1(X \geq n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)P(X \geq n)$$

を得る。