

測度論的確率論 2018 S1S2

Homework 7

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 15, 2018

1 Theorem 7.2

まず $P(\epsilon_i = 0) = P(\epsilon_i = 1) = \frac{1}{2}$ を示す。 $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ なので、1 となる確率のみ求めれば良い。 $i = 1$ の時は、

$$P(\epsilon_1 = 1) = P\left(\omega \mid \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)\right) = \frac{1}{2}$$

より確かに成り立つ。 $i > 1$ の時は、

$$P(\epsilon_i = 1) = 2^{i-1} \times \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$$

ここで 2^{i-1} は $\{\epsilon_j\}_1^{i-1}$ が取りうる場合の数であり、 $\frac{1}{2^i}$ は実現した $\{\epsilon_j\}_1^{i-1}$ に対して $\{\epsilon_j\}_i^\infty$ を使って表現できる ω の集合の測度、すなわち $P(\omega \mid \omega \in [0, \frac{1}{2^i}))$ である。 よって確かに任意の i について $P(\epsilon_i = 0) = P(\epsilon_i = 1) = \frac{1}{2}$ が確かめられた。

次に独立性を示す。 $D_i \in \{0, 1\}$ として、任意の $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ に対して以下が成立することを示す。

$$P(\epsilon_{i_1} = D_1, \dots, \epsilon_{i_m} = D_m) = P(\epsilon_{i_1} = D_1) \times \dots \times P(\epsilon_{i_m} = D_m)$$

先の結果より、右辺は $\frac{1}{2^m}$ なので、左辺もこの値を取ることを示せばよい。 先と同じように考えて以下をえる。

$$P(\epsilon_{i_1} = D_1, \dots, \epsilon_{i_m} = D_m) = 2^{i_m - m} \times \frac{1}{2^{i_m}} = \frac{1}{2^m}$$

ここで $2^{i_m - m}$ は少数第 i_m 位までに自由に動かせる桁を組み合わせた時の場合の数であり、 $\frac{1}{2^{i_m}}$ は各組み合わせに対して動かせる幅の測度である。 よって題意は示された。

2 Ex 7.1

レクチャーノートより $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が独立であることは以下と同値である。

$$\forall \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N}, L(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}) = L(X_{i_1}) \times \dots \times L(X_{i_m})$$

従って $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が独立の時、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} L(X_1, \dots, X_n) \times L(X_{n+1}) &= L(X_1) \times \dots \times L(X_n) \times L(X_{n+1}) \\ &= L(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \\ &= L((X_1, \dots, X_n), X_{n+1}) \end{aligned}$$

なので確かに (X_1, \dots, X_n) と X_{n+1} は独立である。 また逆に、任意の n について (X_1, \dots, X_n) と X_{n+1} が独立の時、

$$\begin{aligned} L((X_1, \dots, X_n), X_{n+1}) &= L(X_1, \dots, X_n) \times L(X_{n+1}) \\ &= L((X_1, \dots, X_{n-1}), X_n) \times L(X_{n+1}) \\ &= L((X_1, \dots, X_{n-1})) \times L(X_n) \times L(X_{n+1}) \\ &\vdots \\ &= L(X_1) \times \dots \times L(X_{n+1}) \end{aligned}$$

が成立する。 任意に $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ をとった時、上記の議論より (X_1, \dots, X_{i_m}) が独立なので、そのサブセットによって構成される $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ も独立となる。

3 Ex 7.3

X と同じ確率変数をもう一つ用意し Y とする。この時分布を $\mu(x), \mu(y)$ と書いて以下の積分を考える。

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) d\mu(x) d\mu(y)$$

f, g はどちらも非減少関数であるので、 $x \geq y$ の時は $f(x) - f(y), g(x) - g(y) \geq 0$ であり、 $x < y$ の時は $f(x) - f(y), g(x) - g(y) \leq 0$ である。これより被積分関数は常に非負であることがわかる。従って上記の積分は非負である。 x, y は同一視できるので、積分の線型性より以下を得る。

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) d\mu(x) d\mu(y) = 2E[f(x)g(x)] - 2E[f(x)]E[g(y)]$$

これより、

$$2E[f(x)g(x)] - 2E[f(x)]E[g(x)] \geq 0 \Leftrightarrow E[f(x)g(x)] \geq E[f(x)]E[g(x)]$$

また、 g が非増加関数の時、 $-g$ が非減少関数であり、上記が適用できる。

$$E[-f(x)g(x)] \geq E[f(x)]E[-g(x)] \Leftrightarrow E[f(x)g(x)] \leq E[f(x)]E[g(x)]$$

よって題意は示された。

4 Ex 7.8

5 Durrett 2.1.10

積分の線型性より以下を得る。

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= E[1(x + y = n)] = E\left[\sum_m 1(x = m)1(y = n - m)\right] \\ &= \sum_m E[1(x = m)1(y = n - m)] = \sum_m E[1(x = m)]E[1(y = n - m)] = \sum_m P(X = m)p(Y = n - m) \end{aligned}$$

6 Durrett 2.1.11

前問より以下が成立する。

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_m P(X = m)P(Y = n - m) = \sum_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \frac{e^{-\mu}\mu^{(n-m)}}{(n-m)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!} \sum_m \frac{n!}{(\lambda+\mu)^n} \frac{\lambda^m \mu^{(n-m)}}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!} \sum_m \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{(n-m)} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

よって題意は示された。