測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 4

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 12, 2018

1 Ex4.2

$D = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ である。lemma3.5 より $E_n \equiv \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ は可測集合の要素であるので、sigma fiels が可算個の和集合について閉じていることから D も可測集合に入る。したがって $\mu(D)$ は定義されている。さらに、E_n が単調増大な集合なので、lemma1.3 より

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

である。ここでチェビシェフの不等式から、任意の $n \geq 1$ について

$$\mu(E_n) \leq n \int_{E_n} f \mathrm{d}\mu$$

を得る。さらに $f > 0$ であることから、

$$\int_{E_n} f\mathrm{d}\mu < \int f\mathrm{d}\mu = 0$$

これより、$0 \leq \mu(E_n) \leq 0 \ \Rightarrow \ \mu(E_n) = 0$ を得る。したがって、$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$ であるので、$\mu(D) = 0$ である。これは f が 0 でないような X の部分集合のの測度が 0 であることを意味するので、$f = 0$ a.e. である。

2 Ex4.3

可積分であるので、r を正の実数、θ を実数として、積分を以下のような極形式で表現できる。

$$\int f\mathrm{d}\mu = \int (Ref)\mathrm{d}\mu + \int (Imf)\mathrm{d}\mu = re^{i\theta} \tag{1}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であり、$r > 0$ だから、

$$\| \int f\mathrm{d}\mu \| = \|re^{i\theta}\| = r\|e^{i\theta}\| = r$$

である。ここで (1) より以下を得る。

$$r = e^{-i\theta}\int f\mathrm{d}\mu$$

また、「可積分な関数 f は、$c \in \mathbb{C}$ に対して、$\int cf\mathrm{d}\mu = c\int f\mathrm{d}\mu$（主張 1）」を所与とすれば、

$$r = \int e^{-i\theta} f\mathrm{d}\mu$$

である。$r \in \mathbb{R}$ より $\int e^{-i\theta} f\mathrm{d}\mu$ は実数である。よって、定義より以下を得る。

$$\int e^{-i\theta} f\mathrm{d}\mu = Re\left(\int e^{-i\theta} f\mathrm{d}\mu\right) = \int Re\left(e^{-i\theta} f\right)\mathrm{d}\mu$$

さらに、複素数の絶対値の定義より、

$$\|e^{-i\theta} f\| = \sqrt{Re\left(e^{-i\theta} f\right)^2 + Im\left(e^{-i\theta} f\right)^2} \geq Re\left(e^{-i\theta} f\right)$$

である。よって example 4.2 より、

$$\int Re\left(e^{-i\theta} f\right) \mathrm{d}\mu \leq \int \|e^{-i\theta} f\| \mathrm{d}\mu$$

であり、$\|e^{-i\theta}\| = 1$ が恒等的に成立するので、

$$\|\int f \mathrm{d}\mu\| = r = \int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu = \int Re\left(e^{-i\theta} f\right) \mathrm{d}\mu \leq \int \|e^{-i\theta} f\| \mathrm{d}\mu = \int \|f\| \mathrm{d}\mu$$

となり題意は示された。

2.1 主張 1 の証明

3 Ex4.4

$E = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ の測度が 0 であることを示す。

$$E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{\{x \in X \mid f(x) > q\} \cap \{x \in X \mid q > g(x)\}\} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{\{x \in X \mid f(x) < q\} \cap \{x \in X \mid q < g(x)\}\}$$

である。前半を E_1、後半を E_2 とする。lemma 3.5 より $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ である。仮定より、

$$\int_{E_1} f \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} g \mathrm{d}\mu$$

であるはずだが、仮に $\mu(E_1) > 0$ だとすると、E_1 においては $f > g$ なので、example 4.2 より $\int_{E_1} f \mathrm{d}\mu > \int_{E_1} g \mathrm{d}\mu$ となる。これは仮定に反するので、$\mu(E_1) = 0$ である。同様に $\mu(E_2) = 0$ であり、$\mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0$ より題意は示された。

4 Ex4.8

4.1 a.e. に等しい関数を同一視することで $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ がノルム空間となることの証明

ノルムの非負値性、三角不等式、同次性の三つを確認すれば良い。

4.1.1 非負値性

ここでは $\forall f \in L^\infty$ $\|f\|_\infty \geq 0$ と $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.e. の二つを確認する。前半はノルムの定義より明らかである。後半は以下のように示される。

　まず $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ a.e. を示す。左辺の意味するところは、

$$\forall n \geq 1,\ \exists a \text{ s.t. } \frac{1}{n} > a > 0,\ \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$$

この時、任意の $n \geq 1$ に対して $\mu(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}) \leq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$ とできることから、

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = \lim_{n \to \infty} \mu(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}) = 0$$

であることがわかる。これはすなわち $f = 0$ a.e. であることを意味する。ただし、上の式変形には exercise 4.2 と同じ式変形を用いている。

　次に $f = 0$ a.e. $\Rightarrow \|f\|_\infty = 0$ を確認する。仮定より任意に小さな非負実数 a について $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$ であるので、inf の定義より $\|f\|_\infty = 0$ である。以上で非負値性が示された。

4.1.2　三角不等式

$\forall f, g \in L^\infty,\ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \|f+g\|_\infty$ を示す。通常の絶対値に対する三角不等式から、$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ である。従って、任意の非負実数 c について、

$$\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\} \subset \{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}$$

である。これより、

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) \leq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\})$$

である。なので、$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0$ ならば必ず $\mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) = 0$ である。これより、

$$\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\} \subset \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) = 0\}$$

である。より広い範囲について inf をとった時に inf が元の集合に対するものよりも大きくなることはあり得ないので、

$$\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\} = 0)\} \geq \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) = 0\} \tag{2}$$

ここで、仮に

$$\begin{aligned}
&\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\} \\
>&\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\}
\end{aligned}$$

であるとすると、左辺よりも小さく右辺よりも大きい正の実数 a が必ず存在する。このような a に対して

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\}) > 0$$

である。$|f(x)| + |g(x)| > a$ であるためには、一般性を失うことなく $|f(x)|$ が $\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\}$ を上回っている必要がある。すなわち、

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\}\}) \geq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\})$$

であり、定義より左辺は 0 である、これより

$$0 \geq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\}) > 0$$

であり矛盾をきたす。従って

$$\begin{aligned}
&\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\} \\
\leq&\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\}
\end{aligned}$$

であることが示され、(2) と合わせて以下の三角不等式が成立することが確認できた。

$$\begin{aligned}
&\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) = 0\} \\
\leq&\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\}
\end{aligned}$$

4.1.3　同次性

$\forall r \in \mathbb{R}$ に対して $\|rf\|_\infty = |r|\|f\|_\infty$ を示す。左辺を定義に従って書き下すと、

$$\begin{aligned}
\|rf\|_\infty &= \inf\{a \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |rf(x)| > a\}) = 0\} \\
&= \inf\left\{a \geq 0 \mid \mu\left(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{a}{|r|}\right\}\right) = 0\right\} \\
&= |r| \inf\{a \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0\} \\
&= |r|\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

以上より同次性が示された。

4.2 $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \ \Leftrightarrow\ \exists E \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(E^c) = 0,\ \sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \to 0$ の証明

まず $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \ \Rightarrow\ \exists E \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(E^c) = 0,\ \sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \to 0$ を示す。E として以下の集合を考える。

$$E \equiv \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}$$

この E に対して、まず $\mu(E^c) = 0$ を確認する。exercise 4.2 と同様の式変形より、

$$\begin{aligned}\mu(E^c) &= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\mu\left(\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right)\end{aligned}$$

であるので、任意の m について $\mu\left(\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$ であることを確認すれば良い。仮定より、

$$\forall m \geq 1,\ \exists N_m \text{ s.t. } n \geq N_m \Rightarrow \mu\left(\left\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right)$$

であるので、先の要件は確認された。

次に $\sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \to 0$ を確認する。まず、E が以下のように変形できることに注意する。

$$\begin{aligned}E &= \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}\\ &= \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| = 0\right\}\\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}\\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\left\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\ \forall n \geq j\right\}\end{aligned}$$

すなわち、$x \in E$ の時、以下が必ず成立する。

$$\forall m\ \exists j \text{ s.t. } n \geq j \Rightarrow |fn(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

従って、sup の定義より以下が成立する。

$$\forall m\ \exists j \text{ s.t. } n \geq j \Rightarrow \sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}$$

これは収束の定義より $\sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \to 0$ を意味するので題意は示された。

逆向きの関係を示す。任意に $\epsilon > 0$ を取ると、仮定より、

$$\exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

である。同じ ϵ, N に対して、$a \geq \epsilon$ のように実数 a を用意すると、$n \geq N$ である n について、sup の定義より以下が成立する。

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\} \subset E^c$$

この時仮定より、$\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) \leq \mu(E^c) = 0$ なので $\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) = 0$ であることがわかる。以上の議論は以下のことを述べている。

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n \geq N,\ a \geq \epsilon \Rightarrow a \in \{c \geq 0 \mid \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > c\}\right)\}$$

この最後の集合を $\star$ と表記する。この時、

$$\inf \star \leq \epsilon$$

である。なぜなら、仮定より $\star$ は空集合ではなく、$\inf \star > \epsilon$ であったとすると $\inf \star > a > \epsilon$ を満たす実数 a が必ず存在し、その a が必ず $\star$ に入ることに矛盾するからである。従って、以下が成立する。

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \inf\{c \geq 0 \mid \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > c\}\right)\} \leq \epsilon$$

収束の定義よりこれは $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ を意味する。

5 Ex4.10

5.1 (a)

ヘルダーの不等式を使って証明する。任意に $f \in L^q$ を取ってくるとき、

$$\int |f|^p \mathrm{d}\mu = \int |f|^p 1 \mathrm{d}\mu \leq \left(\int \left(|f|^p \right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int \mathrm{d}\mu \right)^{1-\frac{p}{q}} = \left(\int |f|^q \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p}{q}} \mu \left(X \right)^{1-\frac{p}{q}}$$

とできる。仮定より $\mu(X) < \infty$ であることを考慮すると、右辺は有限である。従って $f \in L^p$ であることがわかる。

5.2 (b)

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{p}} & \text{when } x \in [1, \infty) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。この時、

$$\int |x^{-\frac{1}{p}}|^p \mathrm{d}\mu = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \mathrm{d}\mu$$

である。2 以上の任意の整数 n について $g_n(x) = g 1_{[1,n)}$ とすると、g が積分区間において連続関数なので可測関数、$1_{[1,n)}$ は可測関数であることから lemma 3.7 より $g_n(x)$ は常に可測関数であり、明らかに $g_n \uparrow g$ であるので単調収束定理から

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} 1_{[1,\infty)} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} frac1x 1_{[1,\infty)} = \lim_{n\to\infty} \log n = \infty$$

であるので先の積分は発散してしまう。そのため $g \notin L^p$ である。

一方で、q に関しては、対応するリーマン積分を考えると $p - q < 0$ より、

$$\int_1^\infty x^{-\frac{q}{p}} \mathrm{d}x = -\left(\frac{p}{p-q} \right) = \frac{p}{q-p} < \infty$$

である。リーマン積分が存在したので theorem 4.8 よりルベーグ積分もこの値をとる。すなわち、

$$\int_{\mathbb{R}} |x^{-\frac{1}{p}}|^q \mathrm{d}\mu = \int_1^\infty x^{-\frac{q}{p}} \mathrm{d}x < \infty$$

であるので $g \in L^q$ であることがわかる。

6 Ex4.11

7 Ex4.16

8 Ex4.17