測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 9

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 30, 2018

1　2.3.11

まず $X_n \xrightarrow{p} 0 \iff p_n \to 0$ を示す。右側を仮定する。この時、任意に $\epsilon, \delta > 0$ を取ると、

$$\exists N \text{ s.t. } n \geq N \implies P\left(|X_n| > \delta\right) = P(X_n = 1) = p_n < \epsilon$$

であるので確率収束の定義より確かに $X_n \xrightarrow{p} 0$ である。逆に左側を仮定すると、任意の $\epsilon, \delta > 0$ に対して

$$\exists N \text{ s.t. } n \geq N \implies p_n = P(X_n = 1) = P(|X_n| > \delta) < \epsilon$$

であるので収束の定義より確かに $p_n \to 0$ である。

次に $X_n \to 0$ a.s. $\iff \sum_n p_n < \infty$ を示す。右側を仮定する。この時、$A_n = \{|X_n| > \epsilon\}$ とすると、

$$\sum_n p_n = \sum_n P(A_n) < \infty$$

なので Borel-Cantelli より $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$ であり、$P(A_n \text{ i.o.}) = 0 \iff X_n \to 0$ a.s. より確かに日代理側が成立する。次に逆向きを示す。A_n が独立な事象であることから Theorem 2.3.7 より、

$$\sum_n p_n = \sum P(A_n) = \infty \implies P(A_n \text{ i.o.}) = 1$$

である。この対偶は、

$$P(A_n \text{ i.o.}) < 1 \implies \sum_n p_n < \infty$$

であり、今仮定より $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$ なので上の結果より確かに右側が成立する。

2　2.3.13

3　2.3.14

4　2.5.9

5　2.5.10

6　2.5.11