測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 3

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 5, 2018

1 Ex2.3

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

1.1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ を示す。

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。なぜなら、

$$\forall (x,y) \in (a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \;\; a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \text{ s.t. } x \le b_1 - \frac{1}{n_1},\; y \le b_2 - \frac{1}{n_2}$$

なので、$N = \max(n_1, n_2)$ とおけば、$\forall n \ge N \;(x,y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ となるので、$(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。

逆向きの包含関係も、任意に $(x,y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ をとると、ある N については必ず $(x,y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}]$ であるので、$(a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}] \subset (a_1,b_1) \times (a_2,b_2)$ であることから示される。

すなわち、$(a_1,b_1) \times (a_2,b_2)$ は $\mathcal{B}^2$ を生成する半開区間の可算和で表現できることがわかった。したがって、Borel sigma field の定義より $(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \in \mathcal{B}^2$ である。

ここで、「$\mathbb{R}^2$ の任意の開集合は $\mathbb{R}^2$ の開区間の可算和でかける（主張 1）」とすると、sigma field の性質から $(a_1,b_1) \times (a_2,b_2)$ の可算和で表現される任意の集合は $\mathcal{B}^2$ に含まれているので、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ が示された。

1.1.1 主張 1 の照明

以下では（主張 1）を証明する。

$U \in \mathbb{R}^2$ を開集合とする。このとき、任意に $c \in U$ をとると、十分小さな $\epsilon_c > 0$ に対して、$B_{\epsilon_c}(c) \subset U$ とできる。ここで、各要素が U に含まれているため、$\bigcup_{c \in U} B_{\epsilon_c}(c) \subset U$ であり、全ての $c_0 \in U$ に対して

$$c_0 \in B_{\epsilon_{c_0}}(c_0) \subset \bigcup_{c \in U} B_{\epsilon_c}(c)$$

であるので、$U \subset \bigcup_{c \in U} B_{\epsilon_c}(c)$ でもある。従って $\bigcup_{c \in U} B_{\epsilon_c}(c) = U$ である。このとき、$\mathbb{R}^2$ 上の ϵ-ball は開区間 $(a_1,b_1) \times (a_2,b_2)$ の形で表現できるため、任意の開集合は開区間の和集合で表現できる。

ここで、Ex2.5 で示すように、可分な距離空間についてはこの和集合の操作が稠密な可算集合の要素についての可算回の操作で済む。$\mathbb{R}$ は可分であり、可分な距離空間の直積で構成される空間も可分なので、$\mathbb{R}^2$ 上の開集合は開区間の可算回の和集合で表現できる。

1.2 $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を示す。

まず、$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ を示す。左辺が右辺に含まれることは以下のように確認できる。　任意に $(x,y) \in (a_1,b_1] \times (a_2,b_2]$ をとると、

$$\forall n \ge 1 \begin{cases} a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \\ a_2 < x < b_2 + \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \forall n \ge 1 \; (x,y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \Rightarrow (x,y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$$

である。

逆向きの包含関係は以下のように確認できる。任意に $(x,y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ をとると、$\forall n \geq 1$ $(x,y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ である。この時、

$$a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \ \Rightarrow \ a_1 < x \leq \inf\left(b_1 + \frac{1}{n}\right) \ \Rightarrow \ a_1 < x \leq b_1$$

である。y についても同様にできるので、$(x,y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ であることがわかる。

これより、$\mathcal{B}^2$ を生成する集合の要素は $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることがわかる。これはつまり、$\mathcal{B}^2$ が $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることを意味する。また、$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ を生成する開集合全体には明らかに $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体が含まれているため、$\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field は $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ に含まれる。したがって $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ である。

2 Ex2.5

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

2.1 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$

開集合 $A \subset X$ を任意にとる。まず、$A \times Y$ が $X \times Y$ の開集合であることを示す。

まず、直積空間 $X \times Y$ 上に以下のように距離 (d) が定義できる。

$$\text{let } x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2), \ \text{where } x_1, y_1 \in X, \ x_2, y_2 \in Y \text{ then } d(x,y) \equiv \ d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

すなわち $(X \times Y, d)$ は距離空間とできる。以下ではこの距離 d について $A \times Y$ が開集合であることを確認する。

全体集合 Y が開かつ閉集合であることより、$(p,q) \in A \times Y$ について以下の二つが成立する。

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } \{x \in X \mid d_1(x,p) < \epsilon\} \subset A$$
$$\exists \eta > 0 \text{ s.t. } \{y \in Y \mid d_2(y,q) < \eta\} \subset Y$$

ここで、上の集合に含まれる (x,y) について、

$$d((x,y),(p,q)) = d_1(x,p) + d_2(y,q) < \epsilon + \eta$$

が成立する。従って、(p,q) を任意にとっても、$\{(x,y) \in X \times Y \mid d((x,y),(p,q)) < \delta\}$ なる集合が δ を十分小さくすることによって $A \times Y$ に含まれることがわかる。これより $A \times Y$ は開集合である。

これより Borel sigma field の定義から、$A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。ここで、$\mathcal{C} = \{A \subset X \mid A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)\}$ とする。先の議論より任意の開集合 $A \subset X$ について $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ であるので、$\{X$ の開集合全体 $\} \subset \mathcal{C}$ である。

また、$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ をとる。明らかに $\bigcup_{i=1}^{\infty} c_i \ \times Y$ が開集合であり、$\mathcal{B}(X \times Y)$ に含まれることから、$\mathcal{C}$ は sigma field、それも X の開集合全体を含む sigma field である。Borel sigma field の定義より $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$ である。

これより、$A \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$ なので、任意の $A \in \mathcal{B}(X)$ について $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。Y 上の開集合 B についても同様の議論が適用できて、任意の $B \in \mathcal{B}(Y)$ について $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。

従って、以下が成立する。

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), B \in \mathcal{B}(Y) \ A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$$

すなわち $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ である。

2.1.1 d が距離の公理を満たすことの確認

d の定義は以下である。

$$\text{let } x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2), \ \text{where } x_1, y_1 \in X, \ x_2, y_2 \in Y \text{ then } d(x,y) \equiv \ d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

非負性 d_1, d_2 がともに非負性を有することより d も非負である。

$x = y$ の時 $d(x,x) = d_1(x_1,x_1) + d_2(x_2,x_2) = 0 + 0$ より正しく 0 となる。

対称性 d_1, d_2 の対称性より、$d(y,x) = d_1(y_1,x_1) + d_2(y_2,x_2) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) = d(x,y)$ である。

三角不等式 d_1, d_2 についての三角不等式より、$x, y, z \in X \times Y$ に対して、$d(x,y) + d(y,z) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) + d_1(y_1,z_1) + d_2(y_2,z_2) \geq d_1(x_1,z_1) + d_2(x_2,z_2) = d(x,z)$ であり、これについても成立する。

2.2 $\mathcal{B}(X\times Y)\subset\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$

「X,Y が可分ならば $X\times Y$ も可分（主張 2)」を所与とすると、以下のように証明できる。

任意に開集合 $A\times B\subset X\times Y$ をとる。開集合の定義より、任意の $(x,y)\in A\times B$ について、距離 d を用いた ϵ-ball を $B_\epsilon((x,y))$ と書くと以下が成立する。

$$\exists\epsilon>0 \text{ s.t. } B_\epsilon((x,y))\subset A\times B$$

ここで $X\times Y$ について稠密な可算集合を D と書く。この時、任意の $(x,y)\in A\times B$ について

$$(s,t)_{(x,y)}\in B_{\frac{\epsilon}{3}}((x,y))\cap D\subset A\times B$$

が必ず取れる。ここで $\epsilon_{(x,y)}=\frac{\epsilon}{2}$ とすると、

$$(x,y)\in B_{\epsilon_{(x,y)}}((s,t)_{(x,y)})$$

が必ず成立する。

つまり、$A\times B$ の任意の要素は、$D\cap(A\times B)$ の要素を中心として、それ自身も $A\times B$ に含まれるような ϵ-ball に入れることができる。今、$\bigcup_{(s,t)\in D\cap(A\times B)}B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ を考える。ただしここで $B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ はそれ自身が $A\times B$ に含まれるように取られている。先の議論より、$A\times B\subset\bigcup_{(s,t)\in D\cap(A\times B)}B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ である。逆向きの包含関係については、$\exists(s,t)$ s.t. $(x,y)\in B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ の時、$B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ がもともと $A\times B$ に含まれるように取られているので当然 $(x,y)\in A\times B$ であることから確認できる。

従って $A\times B=\bigcup_{(s,t)\in D\cap(A\times B)}B_{\epsilon_{(s,t)}}((s,t))$ である。ここで、左辺は open ball の可算個の和集合となっている。$X\times Y$ の任意の開集合は $X\times Y$ 上の open ball の可算個の和集合で表現できる。これは、

$$\mathcal{B}(X\times Y)\subset X\times Y \text{ の open ball が生成する最小の sigma field}$$

を意味する。

さらに、$X\times Y$ の open ball 全体は、明らかに $\left\{A^{'}\times B^{'}\mid A^{'}\in\mathcal{B}(X),\ B^{'}\in\mathcal{B}(Y)\right\}$ に含まれているので、

$$\mathcal{B}(X\times Y)\subset\sigma\left(\left\{A^{'}\times B^{'}\mid A^{'}\in\mathcal{B}(X),\ B^{'}\in\mathcal{B}(Y)\right\}\right)=\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$$

が成立する。

2.2.1 主張 2 の証明

「X,Y が可分ならば $X\times Y$ も可分」を証明する。 $D_1\subset X$ と $D_2\subset Y$ をそれぞれについて稠密な可算集合であるとする。このとき、$D_1\times D_2$ は明らかに可算集合である。従って $D_1\times D_2$ が $X\times Y$ について稠密であることを以下で確認すれば良い。

任意に $(x,y)\in X\times Y$ をとる。このとき、仮定より

$$\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in D_1 \text{ s.t. } x_n\to x$$
$$\exists\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in D_2 \text{ s.t. } y_n\to y$$

である。これより、任意に $\epsilon>0$ をとったときに、ある大きな $N\in\mathbb{Z}$ が存在して、任意の $n\geq N$ について

$$d_1(x,x_n)<\frac{\epsilon}{2}$$
$$d_2(y,y_n)<\frac{\epsilon}{2}$$

が成立している。このとき、数列 $\{x_n,y_n\}$ を考えると、同じ N に対して、N より大きな全ての n について、

$$d((x,y),(x_n,y_n))=d_1(x,x_n)+d_2(y,y_n)<\epsilon$$

とできる。すなわち、数列 $\{x_n,y_n\}$ は (x,y) に収束する。これは $D_1\times D_2$ が $X\times Y$ について稠密であることを示しているので、代位は示された。

3 Ex2.6

前問後半と同様の議論により、開集合 $A \subset X$ に対して以下が成立する。

$$A = \bigcup_{s \in A \cap D} B_{\epsilon_s}(s)$$

これより、$\mathcal{B}(X) \subset \sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\})$ である。open ball は必ず開集合なので、明らかに $\sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}) \subset \mathcal{B}(X)$ であるので、$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\})$ である。ここで、D が可算集合なので、$\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}$ は可算集合。また、明らかに $\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\} \subset \mathcal{B}(X)$ であるので、$\mathcal{B}(X)$ は countably generated である。

4 Ex3.3

$\mathcal{B}^*$ を拡張実数 $\bar{\mathbb{R}}$ に入っている sigma field であるとする。この時、任意に $B \in \mathcal{B}^*$ を取ってくると、

$$h^{-1}(B) = \left\{\left\{f^{-1}(B)\right\} \cap A\right\} \cup \left\{\left\{g^{-1}(B)\right\} \cap A^c\right\}$$

であり、f, g が可測関数であることから、$f^{-1}(b), g^{-1}(B)$ は $\mathcal{A}$ に入っており、仮定より $A, A^c \in \mathcal{A}$ であるので、$h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ である。よって定義より $h(x) : X \to \bar{\mathbb{R}}$ は可測関数である。

5 Ex3.4

1. $f : X \to \mathbb{R}$ が $\sigma(\{A_1, \cdots, A_m\})$ 可測
2. $\exists b_1, \cdots, b_m \ \in \mathbb{R}$ s.t. $f = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot 1_{A_i}$

が同値であることを示す。

5.1 $1 \Rightarrow 2$ を示す。

$\{A_1, \cdots, A_m\}$ が排反であることから、$\sigma(\{A_1, \cdots, A_m\})$ の要素は全て $\{A_1, \cdots, A_m\}$ の要素を組み合わせて得られる和集合、または ϕ である。　lemma3.5 より、任意の $a \in \mathbb{R}$ について $\{x \in X \mid f(x) \le a\} \in \sigma(\{A_1, \cdots, A_m\})$ であるので、$\{x \in X \mid f(x) \le a\}$ が $\{A_1, \cdots, A_m\}$ の要素を組み合わせて得られる和集合、または ϕ でないといけない。

仮に、$\exists i \in \{1, \cdots, m\}$ s.t. $\sup_{x \in A_i} f(x) > \inf_{x \in A_i} f(x)$ とすると、このような i を i^* とすると、$\inf_{x \in A_{i^*}} f(x) < a < \sup_{x \in A_{i^*}} f(x)$ となるように $a \in \mathbb{R}$ をとったときに、

$$\{x \in A_{i^*} \mid f(x) \le a\} \ne A_{i^*} \ \{x \in A_{i^*} \mid f(x) \le a\} \subset A_{i^*}$$

であるので、$\{x \in X \mid f(x) \le a\}$ は $\{A_1, \cdots, A_m\}$ の要素の和集合では表すことができないため、$f : X \to \mathbb{R}$ は $\sigma(\{A_1, \cdots, A_m\})$ 可測でなくなる。

従って、1 を仮定した時、

$$\forall i \in \{1, \cdots, m\} \ \forall x \in A_i \ f(x) \text{ is constant}$$

を得る。これはすなわち 2 を意味する。

5.2 $2 \Rightarrow 1$ を示す。

任意に $a \in \mathbb{R}$ をとる。この時、

$$\{x \in X \mid f(x) \le a\} = \left\{x \in X \mid \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot 1_{A_i}(x) \le a\right\} = \bigcup_{i : b_i < a} \{A_i\} \in \sigma(\{A_1, \cdots, A_m\})$$

なので、lemma3.5 より $f : X \to \mathbb{R}$ は $\sigma(\{A_1, \cdots, A_m\})$ 可測である。

6 Ex3.6

これは解析数理のノートを参照すること。

7 Ex3.15

1. $\forall p \in X \ \ \liminf_{x\to p} f(x) \geq f(p)$
2. $\forall a \in \mathbb{R} \ \ \{x \mid f(x) > a\}$

以上の二つが同値であることを示す。

7.1 $1 \Rightarrow 2$

対偶を示す。すなわち「$\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\{x \mid f(x) > a\}$ is not open」を仮定する。この時、

$$\begin{aligned}
&\exists a \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \{x \mid f(x) > a\} \quad \text{is not open} \\
\Leftrightarrow &\exists a \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \{x \mid f(x) \leq a\} \quad \text{is not closed} \\
\Rightarrow &\exists a \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{x \mid f(x) \leq a\} \text{ s.t. } x_n \to p \text{ and } p \in \{x \mid f(x) > a\}
\end{aligned}$$

である。従って、このような a と点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について考えると $\liminf_{x\to p} f(x) \leq a < f(p)$ であるので、対偶が示された。

7.2 $2 \Rightarrow 1$

$f(p) = -\infty$ の時は明らカニ成立するので、そうでないときを考える。このとき、任意の $p \in X$ について $a < f(p)$ となるように a を任意にとることができる。仮定より $\{x \mid f(x) > a\}$ は開集合で、かつ $p \in \{x \mid f(x) > a\}$ である。

開集合の定義より以下が成立する。

$$\exists r > 0 \text{ s.t. } B_r(p) \subset \{x \mid f(x) > a\}$$

これを使って、$\liminf_{x\to p} f(x) = \lim_{r\to 0} \inf_{x\in B_r(p)} f(x)$ と書くことができることから $\liminf_{x\to p} f(x) \geq a$ であることがわかる。

ここで、a は $f(p)$ よりも小さい任意の実数で良いことに注意する。仮に、$\liminf_{x\to p} f(x) < f(p)$ とすると、$\liminf_{x\to p} f(x) < b < f(p)$ を満たす実数 b が必ず存在して、b については上の条件を満たすことができなくなる。従って、$\liminf_{x\to p} f(x) \geq f(p)$ である。

8 Ex3.16

「$f^{\delta}(x) = \sup\{f(y) \mid d(x,y) < \delta\}$、$f_{\delta}(x) = \inf\{f(y) \mid d(x,y) < \delta\}$ と置くと、任意の $\delta > 0$ について $f^{\delta}(x), f_{\delta}(x)$ はそれぞれ下半連続、上半連続（主張 3）」と「$D_f = \left\{x \mid f^0(x) \neq f_0(x)\right\}$（主張 4）」を所与とすると、

$$\begin{aligned}
D_f &= \left\{x \mid f^0(x) \neq f_0(x)\right\} \\
&= \bigcap_{n\geq 1} \left\{x \mid f^{\frac{1}{n}}(x) > f_{\frac{1}{n}}(x)\right\} \\
&= \bigcap_{n\geq 1} \left\{x \mid f^{\frac{1}{n}}(x) > a\right\} \cap \left\{x \mid a > f_{\frac{1}{n}}(x)\right\} \text{ for some } a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

であり、主張 3 と Ex3.15 の結果から任意の $n \geq 1$ について $\left\{x \mid f^{\frac{1}{n}}(x) > a\right\}$ と $\left\{x \mid a > f_{\frac{1}{n}}(x)\right\}$ は開集合である。従って、不連続点の集合は開集合の可算回の積集合として表現されるため、$D_f \subset \mathcal{B}(X)$ である。

主張 4 は定義より明らかであるので、主張 3 を証明する。

8.1 主張 3 の証明

任意に $\delta > 0$ を取り、$f^{\delta}(x)$ が下半連続であることを示す。Ex3.15 の結果を利用して、任意の実数 a について、

$$\left\{x \mid a \geq f^{\delta}(x)\right\} \quad \text{is closed}$$

を示す。

$\{x_n\} \in \left\{x \mid a \geq f^{\delta}(x)\right\}$ なる収束する点列を取り、収束先を $x^* \in X$ と表記する。このとき、閉集合の定義より、$x^* \in \left\{x \mid a \geq f^{\delta}(x)\right\}$ を示せば題意を示したことになる。

上限の定義より、x^* における上限が a よりも大きいと仮定すると、

$$\sup\{f(y) \mid d(x^*,y)<\delta\} > a \ \Rightarrow\ \exists b \in (a, \sup\{f(y) \mid d(x^*,y)<\delta\}) \text{ s.t. } \exists y \in \{y \mid d(x^*,y)<\delta\} \text{ s.t. } f(y) > b > a$$

でる。しかし、$x_n \to x^*$ より、$\{y \mid d(x^*,y)<\delta\} \subset \bigcup_n \{y \mid d(x_n,y)<\delta\}$ である。全ての n について

$$a \geq \sup\{f(y) \mid d(x_n,y)<\delta\}$$

であることから、先ほどの x^* における上限が a よりも大きいという仮定から導かれた、

$$\exists b \in (a, \sup\{f(y) \mid d(x^*,y)<\delta\}) \text{ s.t. } \exists y \in \{y \mid d(x^*,y)<\delta\} \text{ s.t. } f(y) > b > a$$

はと矛盾する。

従って、

$$a \geq \sup\{f(y) \mid d(x^*,y)<\delta\}$$

である。つまり、$x^* \in \left\{x \mid a \geq f^\delta(x)\right\}$ なので、$f^\delta(x)$ は下半連続である。

$f_\delta(x)$ についても同様に上半連続であることが示される。