

# Lemke-Howson

池上慧

September 7, 2017

# 発表の流れ

- 1 Lemke-Howson
- 2 その他トピック

# 利得行列と多面体

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, B^T x \leq 1\}$$
$$Q = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid Ay \leq 1, y \geq 0\}$$

# Slack Variable

Slack Variable を用いて先の多面体を書くと、

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, s \geq 0, B^T x + s = 1\}$$

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid Ay + r = 1, y \geq 0, r \geq 0\}$$

# 書き下す

P について要素を書き下すと、

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_1 = 1$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 + s_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0$$

$$s_2 \geq 0$$

# 用語

- 列に要素が一つしかない変数を basic variable と呼ぶ（ここでは  $s_1, s_2$ ）
- 列に要素が 1 つ以上存在する変数を non basic variable と呼ぶ（ここでは  $x_1, x_2, x_3$ ）
- nonbasic variable を全て 0 と置いた時の連立方程式の解を basic solution と呼ぶ（ここでは  $x_1 = x_2 = x_3 = 0, s_1 = s_2 = 1$ ）
- pivot とは元の変数と slack の非負制約を守りながら basic と nonbasic を一つずつ入れ替えていく作業。
- integer pivoting とは、係数が常に整数となるように工夫して pivot していくことを指す。

# ラベル

以下のように各制約に番号を振る。

$$x_1 \geq 0 \quad (1)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (2)$$

$$x_3 \geq 0 \quad (3)$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \quad (4)$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 1 \quad (5)$$

# ラベル

$\mathbb{R}^3$  を考える。この空間上の点  $x$  において先の 5 つの制約のうち等式で成立するものがある場合、等式で成立した制約の番号をその点のラベルとして与える。いずれの制約も等式で成立しない場合、その点は 1 つのラベルもつかないとする。例えば  $x = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6})$  はラベル 1,4



# Q について

Q についても P と同様に考える。Q の制約についても同じように番号をつけて  $\mathbb{R}^2$  上の点  $y$  についてのラベルとして利用するが、その際に  $(x, y)$  が completely labeled の時に混合戦略ナッシュ均衡とあるようにするため、以下のように番号を振る。

$$3y_1 + 3y_2 \leq 1 \quad (1)$$

$$2y_1 + 3y_2 \leq 1 \quad (2)$$

$$6y_2 \leq 1 \quad (3)$$

$$y_1 \geq 0 \quad (4)$$

$$y_2 \geq 0 \quad (5)$$

# アルゴリズム概要

- P, Q それぞれの原点から動かしていく。
- P の原点から適当にラベルを外すことで出発する。ここでは 2 を外す。
- 2 を外して pivot により basic を入れ替えると、Q でのラベルの中にも今得られたラベル 5 があることがわかる。
- そのダブったラベル 5 を今度は Q で外して点を動かす。
- 以上を繰り返して、再びラベル 2 がゲットできたらそこで点を動かすことやめる。

# Lemke-Howson

ホワイトボードで解が見つかるまで LH をやってみます。

なんで completely labeled なら NE なの？

# NE の数は？

# Degenerate Game