測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 6

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 26, 2018

1 Ex6.3

1.1 (a)

F のサポートを以下で書くことにする。

$$S_F = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \epsilon > 0,\ F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon) > 0\}$$

閉集合の定義より、$\mathbb{R} \setminus S_F$ が開集合であることを示せばよい。任意に $x \in \mathbb{R} \setminus S_F$ を取る時、F が非減少関数であることから、

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon) = 0 \tag{1}$$

である。ここで、必ず $\epsilon > \eta > 0$ であるような η が存在し、そのような η について以下が成立する。

$$\begin{cases} F(x+\epsilon) \geq F(x+\eta) \\ F(x-\eta) \geq F(x-\epsilon) \end{cases}$$

(1) より、$F(x+\eta) - F(x-\eta) = 0$ であるので $(x-\eta, x+\eta) \subset \mathbb{R} \setminus S_F$ である。よって定義より $\mathbb{R} \setminus S_F$ は開集合であることが確認できたので題意は示された。

1.2 (b)

対偶を示す。すなわち以下を仮定して F が左連続でないことを示す。

$$\exists x \in S_F \text{ s.t. } \exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap S_F = \{x\}$$

今、$x - \epsilon = x_0$ として、左から x に収束する数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を任意の n について $x_n < x$ であるようにとる。この時、仮定よりこの数列の要素はどれもサポートに入らないので、

$$\forall n,\ F(x_n) = F(x_{x+1})$$

である。これより、$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = f(x-\epsilon)$ である。また右側から近づく数列についても同様に考えることができ、$f(x) = F(x+\epsilon)$ である。一方で $F(\lim_{n\to\infty} x_n) = F(x)$ である。仮に F が連続だとすると、

$$F(x-\epsilon) = F(x) = F(x+\epsilon)$$

となり、これは x がサポートに入ることに矛盾する。従って題意は示された。

2 Ex6.8

任意に $p \in [0,1]$ を取る。この時、F^{-1} の定義より以下は F が連続でなくても成立する。

$$P\left(F(x) \leq p\right) = P\left(x \leq F^{-1}(p)\right) = F\left(F^{-1}(p)\right)$$

F が連続でないとする。不連続点における左極限を a、右極限を b とすると、$p \in [a,b)$ の時に、

$$F\left(F^{-1}(p)\right) = b$$

であるので、確かに F が連続でない時 $F(X)$ が一様分布に従わないことがわかる。一方で F が連続の時は、右極限と左翼弦が一致するため上のように p を取ることができない。従って、

$$F\left(F^{-1}(p)\right) = p$$

が成立する。よって題意は示された。

3 Ex6.10

3.1 (a)

測度の単調性と、アトムを持たないという仮定より以下が成立する。

$$A_1 \subset A,\ A_1 \in \mathcal{F}\ \Rightarrow P(A) > P(A_1) > 0$$

この論法で A_1 に対しても同様に A_2 s.t. $A_2 \subset A_1,\ A_2 \in \mathcal{F},\ P(A_1) > P(A_2) > 0$ となる A_2 が作れる。これを繰り返して減少列 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ を作る。この時、

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \tag{2}$$

であることを示せば、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある大きな N が存在して、$n \geq N \Rightarrow P(A_n) < \epsilon$ であるので、そのような n のうちで一つの A_n を B とすれば題意は示されている。よって (1) を以下で示す。

減少列であることから、

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_n A_n)$$

である。ここで、$\{A_n\}$ の構成の仕方から $\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$ である。$P\left(\bigcap_n A_n\right) > 0$ とすると、アトムを持たないという仮定より、

$$\exists C \subset \bigcap_n A_n,\ C \in \mathcal{F}\ \Rightarrow\ P\left(\bigcap_n A_n\right) > p(C) > 0$$

である。しかし、そのような C は明らかに $\{A_n\}$ のどこかに含まれるため、$P(C) \geq P\left(\bigcap_n A_n\right)$ であり矛盾する。よって、$P\left(\bigcap_n A_n\right) = 0$ であるので題意は示された。

3.2 (b)

4 Ex6.12

5 Ex6.14

$$E[X] = E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] + E\left[X1_{\{X>\theta E[X]\}}\right]$$

両辺二乗して、第二項にヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$(E[X])^2 \leq E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right]^2 + 2E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right]E\left[X1_{\{X>\theta E[X]\}}\right] + E[X^2]P\left(X > \theta E[X]\right)$$

これを整理して以下を得る。

$$P\left(X > \theta E[X]\right) \geq \frac{\left(E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] - E[X]\right)^2}{E[X^2]}$$

従って、題意を得るためには以下が成立していれば良い。

$$\left(E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] - E[X]\right)^2 \geq (E[X] - \theta E[X])^2$$

上から打ち切って期待値を撮っているため、$E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] < E[X$ であるので、左辺の中身は負である。一方で、$\theta \in [0,1]$ であるので右辺の中身は正である。これより、以下を示せばよい。

$$E[X] - E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] \geq E[X] - \theta E[X]$$

ここで、$\theta E[X]$ よりも小さい値についてしか期待値を取れないので、$E\left[X1_{\{X\leq\theta E[X]\}}\right] \leq \theta E[X]$ であることから上は確かに成立する。よって題意は示された。

6 Ex6.15

6.1 (a)

$p > q > 0$ とする。この時、$f(x) = -x^{\frac{q}{p}}$ は凸関数である。従って Jensen の不等式より、

$$E\left[-\left(|X|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right] \geq -\left(E\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow E[(|X|^p)^{\frac{q}{p}}] \leq (E[|X|^p])^{\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \ (E[|X|^q])^{\frac{1}{q}} \leq (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$$

6.2 (b)

$\frac{r-q}{r-p} + \frac{q-p}{r-p} = 1$ であるので、ヘルダーの不等式を用いて以下を得る。

$$(E[|X|^p])^{\frac{r-q}{r-p}} \left(E[|X|^r]\right)^{\frac{q-p}{r-p}} = \left(E\left[\left(|X|^{p\frac{r-q}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{r-q}}\right]\right)^{\frac{r-q}{r-p}} \left(E\left[\left(|X|^{r\frac{q-p}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{q-p}}\right]\right)^{\frac{q-p}{r-p}} \geq E\left[|X|^{\frac{p(r-q)+r(q-p)}{r-p}}\right] = E[|X|^q]$$

よって題意は示された。