Lemke-Howson

池上慧

September 7, 2017

発表の流れ

利得行列と多面体

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, B^T x \leq 1 \right\}$$
$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid Ay \leq 1, y \geq 0 \right\}$$

Slack Variable

Slack Variable を用いて先の多面体を書くと、

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, s \geq 0, B^T x + s = 1 \right\}$$
$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid Ay + r = 1, y \geq 0, r \geq 0 \right\}$$

書き下す

P について要素を書き下すと、

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_1 \quad &= 1 \\
2x_1 + 6x_2 + x_3 \quad + s_2 &= 1 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0 \\
s_1 &\geq 0 \\
s_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

用語

- 列に要素が一つしかない変数を basic variable と呼ぶ（ここでは s_1, s_2）
- 列に要素が 1 つ以上存在する変数を non basic variable と呼ぶ（ここでは x_1, x_2, x_3）
- nonbasic variable を全て 0 と置いた時の連立方程式の解を basic solution と呼ぶ（ここでは $x_1 = x_2 = x_3 = 0, s_1 = s_2 = 1$）
- pivot とは元の変数と slack の非負制約を守りながら basic と nonbasic を一つずつ入れ替えていく作業。
- integer pivoting とは、係数が常に整数となるように工夫して pivot していくことを指す。

ラベル

以下のように各制約に番号を振る。

$$x_1 \geq 0 \tag{1}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{2}$$
$$x_3 \geq 0 \tag{3}$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \tag{4}$$
$$2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 1 \tag{5}$$

ラベル

$\mathbb{R}^3$ を考える。この空間上の点 x において先の 5 つの制約のうち等式で成立するものがある場合、等式で成立した制約の番号をその点のラベルとして与える。いずれの制約も等式で成立しない場合、その点は 1 つのラベルもつかないとする。例えば $x = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ はラベル 1,4

ラベル

slack variable も含めて、変数が 0 になるということは、いずれかの制約不等式が等式で成立することに対応している。例えば $s_1 = 0$ はラベル 4 に対応する。すなわち、nonbasic variable にはいることは、対応する不等式が等式で成立するようになること、そして対応するラベルを獲得することを意味する。

Q について

Q についても P と同様に考える。Q の制約についても同じように番号をつけて $\mathbb{R}^2$ 上の点 y についてのラベルとして利用するが、その際に (x, y) が completely labeled の時に混合戦略ナッシュ均衡とあるようにするため、以下のように番号を振る。

$$
\begin{align}
3y_1 + 3y_2 \leq 1 \tag{1}\\
2y_1 + 3y_2 \leq 1 \tag{2}\\
6y_2 \leq 1 \tag{3}\\
y_1 \geq 0 \tag{4}\\
y_2 \geq 0 \tag{5}
\end{align}
$$

アルゴリズム概要

- P,Q それぞれの原点から動かしていく。
- P の原点から適当にラベルを外すことで出発する。ここでは 2 を外す。
- 2 を外して pivot により basic を入れ替えると、Q でのラベルの中にも今得られたラベル 5 があることがわかる。
- そのダブったラベル 5 を今度は Q で外して点を動かす。
- 以上を繰り返して、再びラベル 2 がゲットできたらそこで点を動かすことやめる。

Lemke-Howson

ホワイトボードで解が見つかるまで LH をやってみます。

なんで completely labeled を探すの？

- 現在位置している混合戦略の組 (x, y) にラベル 2 が欠けてるとする。
- この時 P 側、player1 の立場では、戦略 2 が正の確率で取られることを意味する。すなわち現在 player1 がとっている混合戦略のサポートに戦略 2 が入っている。
- 一方で Q 側、player2 の立場では、player 1 の戦略 2 に対する期待利得が 1 より小さいことを意味する。これは相手のサポートに入っている戦略に対しては等しく期待利得の最大化がなされている、という Best Response Condition に反する。
- よってこれは NE ではない。
- 以上より NE なら completely labeled。
- また、completely labeled なら各純戦略が best response かサポートに入っていないということなので NE。

NE の数は？

- missing label を k で固定した時、原点から辿り着く NE は一つである。
- たどり着いた NE から同じ k を missing label として LH を行うと原点に戻る。
- LH はどの NE からでも始められるので、原点も含めて path の終点は偶数個である。
- 原点は NE ではないので、nondegenerate game では奇数個の NE が存在することがわかる。

Degenerate Game

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

これは degenerate game である。

Degenerate Game

slack 変数を用いて中身を書き下すと

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_1 \quad &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 \quad + s_2 &= 1 \end{aligned}$$

Degenerate Game

missing label を 1 として一回 pivot する

$$\begin{aligned} -4x_2 + 2x_3 + s_1 - s_2 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 \qquad + s_2 &= 1 \end{aligned}$$

ここで basic solution で $s_1 = 0, x_1 = \frac{1}{3}$ となっており、basic variable が 0 の値をとるようになっている。これは 4 つの不等式が等式で成り立つことを意味し、4 つのラベルを持っていることを意味する。これが degenerate である。

Purturing

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_1 \qquad &= 1 + \epsilon_1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 \qquad + s_2 &= 1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

上のように微小な値 ϵ で右辺を purturb すれば、pivot しても右辺が 0 にならないのでラベルの数を 3 つに保つことができ、LH を動かせる。