測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 4

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 13, 2018

1 Ex4.2

$D = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ である。lemma3.5 より $E_n \equiv \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ は可測集合の要素であるので、sigma fiels が可算個の和集合について閉じていることから D も可測集合に入る。したがって $\mu(D)$ は定義されている。さらに、E_n が単調増大な集合なので、lemma1.3 より

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

である。ここでチェビシェフの不等式から、任意の $n \geq 1$ について

$$\mu(E_n) \leq n \int_{E_n} f \mathrm{d}\mu$$

を得る。さらに $f > 0$ であることから、

$$\int_{E_n} f \mathrm{d}\mu < \int f \mathrm{d}\mu = 0$$

これより、$0 \leq \mu(E_n) \leq 0 \ \Rightarrow \ \mu(E_n) = 0$ を得る。したがって、$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ であるので、$\mu(D) = 0$ である。これは f が 0 でないような X の部分集合のの測度が 0 であることを意味するので、$f = 0$ a.e. である。

2 Ex4.3

可積分であるので、r を正の実数、θ を実数として、積分を以下のような極形式で表現できる。

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int (Ref) \mathrm{d}\mu + \int (Imf) \mathrm{d}\mu = re^{i\theta} \tag{1}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ であり、$r > 0$ だから、

$$\| \int f \mathrm{d}\mu \| = \|re^{i\theta}\| = r\|e^{i\theta}\| = r$$

である。ここで (1) より以下を得る。

$$r = e^{-i\theta} \int f \mathrm{d}\mu$$

また、「可積分な関数 f は、$c \in \mathbb{C}$ に対して、$\int cf \mathrm{d}\mu = c \int f \mathrm{d}\mu$（主張 1）」を所与とすれば、

$$r = \int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu$$

である。$r \in \mathbb{R}$ より $\int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu$ は実数である。よって、定義より以下を得る。

$$\int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu = Re\left(\int e^{-i\theta} f \mathrm{d}\mu\right) = \int Re\left(e^{-i\theta} f\right) \mathrm{d}\mu$$

さらに、複素数の絶対値の定義より、

$$\|e^{-i\theta}f\| = \sqrt{Re\left(e^{-i\theta}f\right)^2 + Im\left(e^{-i\theta}f\right)^2} \geq Re\left(e^{-i\theta}f\right)$$

である。よって example 4.2 より、

$$\int Re\left(e^{-i\theta}f\right)\mathrm{d}\mu \leq \int \|e^{-i\theta}f\|\mathrm{d}\mu$$

であり、$\|e^{-i\theta}\| = 1$ が恒等的に成立するので、

$$\|\int f\mathrm{d}\mu\| = r = \int e^{-i\theta}f\mathrm{d}\mu = \int Re\left(e^{-i\theta}f\right)\mathrm{d}\mu \leq \int \|e^{-i\theta}f\|\mathrm{d}\mu = \int \|f\|\mathrm{d}\mu$$

となり題意は示された。

2.1　主張 1 の証明

可積分な関数 f は、$c \in \mathbb{C}$ に対して、$\int cf\mathrm{d}\mu = c\int f\mathrm{d}\mu$ であることを示す。$c = a + bi$ で、$f = g + hi$ であるとする。この時、

$$\int cf\mathrm{d}\mu = \int (ag - bh) + i(ah + bg)\mathrm{d}\mu = \int (ag - bh)\mathrm{d}\mu + i\int (ah + bg)\mathrm{d}\mu$$

$$= a\int g\mathrm{d}\mu - b\int h\mathrm{d}\mu + i\left(a\int h\mathrm{d}\mu + b\int g\mathrm{d}\mu\right)$$

$$= (a + bi)\int g\mathrm{d}\mu + (-b + ai)\int h\mathrm{d}\mu$$

$$= (a + bi)\int g\mathrm{d}\mu + i(a + bi)\int h\mathrm{d}\mu$$

$$= (a + bi)\left(\int g\mathrm{d}\mu + i\int h\mathrm{d}\mu\right) = (a + bi)\int f\mathrm{d}\mu$$

なので題意は示された。

3　Ex4.4

$E = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ の測度が 0 であることを示す。

$$E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{\{x \in X \mid f(x) > q\} \cap \{x \in X \mid q > g(x)\}\} \cup \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{\{x \in X \mid f(x) < q\} \cap \{x \in X \mid q < g(x)\}\}$$

である。前半を E_1、後半を E_2 とする。lemma 3.5 より $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ である。仮定より、

$$\int_{E_1} f\mathrm{d}\mu = \int_{E_1} g\mathrm{d}\mu$$

であるはずだが、仮に $\mu(E_1) > 0$ だとすると、E_1 においては $f > g$ なので、example 4.2 より $\int_{E_1} f\mathrm{d}\mu > \int_{E_1} g\mathrm{d}\mu$ となる。これは仮定に反するので、$\mu(E_1) = 0$ である。同様に $\mu(E_2) = 0$ であり、$\mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0$ より題意は示された。

4　Ex4.8

4.1　a.e. に等しい関数を同一視することで $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ がノルム空間となることの証明

ノルムの非負値性、三角不等式、同次性の三つを確認すれば良い。

4.1.1 非負値性

ここでは $\forall f \in L^\infty$ $\|f\|_\infty \geq 0$ と $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.e. の二つを確認する。前半はノルムの定義より明らかである。後半は以下のように示される。

まず $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ a.e. を示す。左辺の意味するところは、

$$\forall n \geq 1,\ \exists a \text{ s.t. } \frac{1}{n} > a > 0,\ \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$$

この時、任意の $n \geq 1$ に対して $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\}) \leq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$ とできることから、

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}) = 0$$

であることがわかる。これはすなわち $f = 0$ a.e. であることを意味する。ただし、上の式変形には exercise 4.2 と同じ式変形を用いている。

次に $f = 0$ a.e. $\Rightarrow \|f\|_\infty = 0$ を確認する。仮定より任意に小さな非負実数 a について $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$ であるので、inf の定義より $\|f\|_\infty = 0$ である。以上で非負値性が示された。

4.1.2 三角不等式

$\forall f, g \in L^\infty,\ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \|f+g\|_\infty$ を示す。通常の絶対値に対する三角不等式から、$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ である。従って、任意の非負実数 c について、

$$\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\} \subset \{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}$$

である。これより、

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) \leq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\})$$

である。なので、$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0$ ならば必ず $\mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) = 0$ である。これより、

$$\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\} \subset \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) = 0\}$$

である。より広い範囲について inf をとった時に inf が元の集合に対するものよりも大きくなることはあり得ないので、

$$\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\} = 0)\} \geq \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) = 0\} \tag{2}$$

ここで、仮に

$$\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\}$$

$$> \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\}$$

であるとすると、左辺よりも小さく右辺よりも大きい正の実数 a が必ず存在する。このような a に対して

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\}) > 0$$

である。$|f(x)| + |g(x)| > a$ であるためには、一般性を失うことなく $|f(x)|$ が $\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\}$ を上回っている必要がある。すなわち、

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\}\}) \geq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\})$$

であり、定義より左辺は 0 である、これより

$$0 \geq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\}) > 0$$

であり矛盾をきたす。従って

$$\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\}$$

$$\leq \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\}$$

であることが示され、(2) と合わせて以下の三角不等式が成立することが確認できた。

$$\begin{aligned}&\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)+g(x)| > c\}) = 0\}\\ \leq &\inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\}\end{aligned}$$

4.1.3　同次性

$\forall r \in \mathbb{R}$ に対して $\|rf\|_\infty = |r|\|f\|_\infty$ を示す。左辺を定義に従って書き下すと、

$$\begin{aligned}\|rf\|_\infty &= \inf\{a \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |rf(x)| > a\}) = 0\}\\ &= \inf\left\{a \geq 0 \mid \mu\left(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{a}{|r|}\right\}\right) = 0\right\}\\ &= |r|\inf\{a \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0\}\\ &= |r|\|f\|_\infty\end{aligned}$$

以上より同次性が示された。

4.2　$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \;\Leftrightarrow\; \exists E \in \mathcal{A}$ **s.t.** $\mu(E^c) = 0,\ \sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \to 0$ の証明

まず $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \;\Rightarrow\; \exists E \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(E^c) = 0,\ \sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \to 0$ を示す。E として以下の集合を考える。

$$E \equiv \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}$$

この E に対して、まず $\mu(E^c) = 0$ を確認する。exercise 4.2 と同様の式変形より、

$$\begin{aligned}\mu(E^c) &= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\mu\left(\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right)\end{aligned}$$

であるので、任意の m について $\mu\left(\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$ であることを確認すれば良い。仮定より、

$$\forall m \geq 1,\ \exists N_m \text{ s.t. } n \geq N_m \Rightarrow \mu\left(\left\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right)$$

であるので、先の要件は確認された。

次に $\sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \to 0$ を確認する。まず、E が以下のように変形できることに注意する。

$$\begin{aligned}E &= \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}\\ &= \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| = 0\right\}\\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}\\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\left\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\ \forall n \geq j\right\}\end{aligned}$$

すなわち、$x \in E$ の時、以下が必ず成立する。

$$\forall m\ \exists j \text{ s.t. } n \geq j \Rightarrow |fn(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

従って、sup の定義より以下が成立する。

$$\forall m\ \exists j \text{ s.t. } n \geq j \Rightarrow \sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}$$

これは収束の定義より $\sup_{x\in E}|fn(x) - f(x)| \to 0$ を意味するので題意は示された。

逆向きの関係を示す。任意に $\epsilon > 0$ を取ると、仮定より、

$$\exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

である。同じ ϵ, N に対して、$a \geq \epsilon$ のように実数 a を用意すると、$n \geq N$ である n について、sup の定義より以下が成立する。

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\} \subset E^c$$

この時仮定より、$\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) \leq \mu(E^c) = 0$ なので $\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) = 0$ であることがわかる。以上の議論は以下のことを述べている。

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n \geq N,\ a \geq \epsilon \Rightarrow a \in \{c \geq 0 \mid \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > c\}\right)\}$$

この最後の集合を $\star$ と表記する。この時、

$$\inf \star \leq \epsilon$$

である。なぜなら、仮定より $\star$ は空集合ではなく、$\inf \star > \epsilon$ であったとすると $\inf \star > a > \epsilon$ を満たす実数 a が必ず存在し、その a が必ず $\star$ に入ることに矛盾するからである。従って、以下が成立する。

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \inf\{c \geq 0 \mid \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > c\}\right)\} \leq \epsilon$$

収束の定義よりこれは $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ を意味する。

5 Ex4.10

5.1 (a)

ヘルダーの不等式を使って証明する。任意に $f \in L^q$ を取ってくるとき、

$$\int |f|^p \mathrm{d}\mu = \int |f|^p 1 \mathrm{d}\mu \leq \left(\int \left(|f|^p\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int \mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{p}{q}} = \left(\int |f|^q \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p}{q}} \mu\left(X\right)^{1-\frac{p}{q}}$$

とできる。仮定より $\mu(X) < \infty$ であることを考慮すると、右辺は有限である。従って $f \in L^p$ であることがわかる。

5.2 (b)

まず下の関数 $g(x)$ が $g \notin L^p$ だが、$g \in L^q$ であることを示す。

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{p}} & \text{when } x \in [1, \infty) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この時、

$$\int |x^{-\frac{1}{p}}|^p \mathrm{d}\mu = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \mathrm{d}\mu$$

である。2 以上の任意の整数 n について $g_n(x) = g1_{[1,n)}$ とすると、g が積分区間において連続関数なので可測関数、$1_{[1,n)}$ は可測関数であることから lemma 3.7 より $g_n(x)$ は常に可測関数であり、明らかに $g_n \uparrow g$ であるので単調収束定理から

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} 1_{[1,\infty)} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} frac1x 1_{[1,\infty)} = \lim_{n\to\infty} \log n = \infty$$

であるので先の積分は発散してしまう。そのため $g \notin L^p$ である。

一方で、q に関しては、対応するリーマン積分を考えると $p - q < 0$ より、

$$\int_1^\infty x^{-\frac{q}{p}} \mathrm{d}x = -\left(\frac{p}{p-q}\right) = \frac{p}{q-p} < \infty$$

である。リーマン積分が存在したので theorem 4.8 よりルベーグ積分もこの値をとる。すなわち、

$$\int_{\mathbb{R}} |x^{-\frac{1}{p}}|^q \mathrm{d}\mu = \int_1^\infty x^{-\frac{q}{p}} \mathrm{d}x < \infty$$

であるので $g \in L^q$ であることがわかる。

次に下の関数 $f(x)$ が $f \in L^p$ だが $f \notin L^q$ となることを示す。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} \mathrm{log} x} & \text{where } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

上の関数を $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ の範囲で積分する。

$$\int_{[0,\frac{1}{2}]} \left| \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} \mathrm{log} x} \right|^p \mathrm{d}\mu = \int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} \mathrm{log} x} \right|^p \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \frac{1}{(\mathrm{log} x)^p} \mathrm{d}x$$

被積分関数は $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ の範囲で通常の積分はできないので広義積分をする。$p > 1$ とすると、

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_\epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \frac{1}{(\mathrm{log} x)^p} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} \lim_{\epsilon \to +0} \left[(\mathrm{log} x)^{1-p} \right]_\epsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-p} \left(-\mathrm{log} 2 \right)^{1-p} < \infty$$

であるので $f \in L^p$ である。

一方で、$q = p(1+\epsilon)$ と置いて L^p に含まれるかを確認する。

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} \mathrm{log} x} \right|^{p(1+\epsilon)} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{1+\epsilon} (\mathrm{log} x)^{q(1+\epsilon)}} \mathrm{d}x$$

ここで $x = e^{-t}$ の変数変換をする。

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{1+\epsilon} (\mathrm{log} x)^{q(1+\epsilon)}} \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{log} 2}^\infty \frac{e^{\epsilon t}}{t^{q(1+\epsilon)}} \mathrm{d}t$$

さらに、十分大きな T について $t > T \Rightarrow e^{\frac{\epsilon}{q} t} > t^{q(1+\epsilon)}$ であるので、そのような t について

$$\frac{e^{\epsilon t}}{t^{q(1+\epsilon)}} > e^{\epsilon t \left(1 - \frac{1}{q}\right)}$$

であるので、

$$\int_{\mathrm{log} 2}^\infty \frac{e^{\epsilon t}}{t^{q(1+\epsilon)}} \mathrm{d}t \geq \int_{\mathrm{log} 2}^T \frac{e^{\epsilon t}}{t^{q(1+\epsilon)}} \mathrm{d}t + \int_T^\infty e^{\epsilon t \left(1 - \frac{1}{q}\right)}$$

である。この右辺第 2 項は無限大に発散するので元の積分も発散することがわかる。すなわち $f \notin L^p$ である。

6 Ex4.11

任意に $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^p$ をとる。この時、実数列 $\left\{ \sum_{n=1}^N |x_n|^p \right\}_{N=1}^\infty$ を考えると、l^p の定義よりこの字数列は収束列である。コーシーの判定条件より以下を満たす十分大きな N^* が存在する。

$$N > N^* + 1 \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^N |x_n|^p - \sum_{n=1}^{N-1} |x_n|^p \right| = |x_N|^p < 1$$

また、$q - p > 0$ であることより、

$$|x_N|^p < 1 \ \Leftrightarrow \ |x_N| < 1 \ \Leftrightarrow \ |x_N|^{q-p} < 1$$

である。この時、上のような N^* について、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty |x_n|^q &= \sum_{n=1}^{N^*} |x_n|^q + \sum_{n=N^*+1}^\infty |x_n|^p |x_N|^{q-p} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N^*} |x_n|^q + \sum_{n=N^*+1}^\infty |x_n|^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{N^*} |x_n|^q + \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \end{aligned}$$

である。最終行は仮定より有限の値で抑えられるので $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$ であることが示された。

また、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$ だが $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ ではないものが存在することをそのような例を作ることで証明する。以下のような数列を考える。

$$\left\{ \frac{1}{n}^{\frac{1}{p}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

このような数列に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}^{\frac{1}{p}} \right)^x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{x}{p}} \tag{3}$$

ここで、「$\frac{x}{p} > 1$ ならば (3) が収束し、$\frac{x}{p} = 1$ で発散する（主張 2）」を所与とすると、$x = p$ の時収束せず $x = q$ の時収束するので確かに上の数列は L^q には含まれていて L^p には含まれない。

6.1 主張 2 の証明

まず $s > 1$ の時に $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ が収束することを示す。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1^s} = \frac{1}{1^{s-1}} \\
&\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} < \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{s-1}} \\
&\frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{7^s} < 4 * \frac{1}{4^s} = \frac{1}{4^{s-1}}
\end{aligned}$$

が成立する。これより、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ の部分級数は収束する級数である $\frac{1}{1^{s-1}} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}$ で抑えられている。従ってこの級数は収束する。

次に $s = 1$ の時に発散することを示す。$e^x > 1 + \frac{1}{x}$ であるので以下が成立する。

$$\exp\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = e^1 e^{\frac{1}{2}} \cdots e^{\frac{1}{n}} \geq (1+1)(1+\frac{1}{2}) \cdots (1+\frac{1}{n}) = n+1$$

よって、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1)$ である。右辺が無限に発散するのでこの級数も発散する。

7 Ex4.16

$D_m = \left\{ A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) < \frac{1}{m} \right\}$ とする。以下で対偶を示す。すなわち

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } \forall m > 0\ \exists A_m \in D_m \text{ s.t. } \epsilon \leq \int_{A_m} |f| \mathrm{d}\mu \ \Rightarrow\ f \notin L^1$$

を示す。

D_m が減少列であることから、左辺は以下を満たす $A_\infty \in \mathcal{A}$ が存在することを意味している。

$$\begin{cases} \mu(A_\infty) < \frac{1}{m}\ \forall m > 0 \\ \epsilon \leq \int_{A_\infty} |f| \mathrm{d}\mu \end{cases}$$

$f \in L^1$ であるとすると、$\int_{A_\infty} |f| \mathrm{d}\mu < \int |f| \mathrm{d}\mu < \infty$ であるので、以下を満たす実数 $c < \infty$ が存在する。

$$\epsilon \leq \int_{A_\infty} |f| \mathrm{d}\mu = c\mu(A_\infty)$$

ここで $0 < \epsilon \leq \int_{A_\infty} |f| \mathrm{d}\mu$ より $\mu(A_\infty) > 0$ であるので、

$$\frac{\epsilon}{\mu(A_\infty)} \leq c$$

であるが、A_∞ の性質 1 よりこの左辺は $m \to \infty$ で ∞ に発散し、そのような c は存在できない。これで矛盾をきたしたので仮定した $f \in L^1$ は誤りである。従って $f \notin L^1$ である。

8 Ex4.17

対称性より $[0,\infty)$ についてのみ考え、その範囲に置いて $\int f\mathrm{d}\mu = \int f^+\mathrm{d}\mu - \int f^-\mathrm{d}\mu$ が $\infty - \infty$ になってしまい定義できないことを確認する。どちらの項も同様の議論で ∞ になることを示せるので、ここでは前半の $\int f^+\mathrm{d}\mu$ についてのみ ∞ となることを確認する。

まず、$\int_{[0,\infty)} f^+\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty f^+\mathrm{d}x$ であることを確認する。任意の $n > 0$ について $f^+1_{[0,n]}$ なる関数を考えると、これはコンパクトな台を持つ有界関数である。この時リーマン積分を定義することができ、

$$\int_0^\infty f^+1_{[0,n]}\mathrm{d}x = \int_0^n f^+\mathrm{d}x$$

である。f^+ は連続関数であるので、上記はリーマン可積分である。theorem 4.8 よりこれはルベーグ積分と同じ値である。従って、

$$\int_0^n f^+\mathrm{d}x = \int_0^\infty f^+1_{[0.n]}\mathrm{d}x = \int_{[0,\infty)} f^+1_{[0,n]}\mathrm{d}\mu \tag{4}$$

を得る。$f^+1_{[0,n]} \uparrow f^+$ であり、$f^+1_{[0,n]}$ は f^+ が連続であることから可測関数、$1_{[0,n]}$ が可測関数であることから lemma 3.7 より可測関数の列となる。従って単調収束定理が適用でき、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} f^+1_{[0,n]}\mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f^+1_{[0,n]}\mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} f^+\mathrm{d}\mu$$

また (4) より、

$$\int_{[0,\infty)} f^+\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_0^n f^+\mathrm{d}x$$

である。

従ってこの左辺が ∞ に発散することを示せば良い。$f^* = \max\left(\frac{\sin x}{x}, 0\right)$ であることより、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^n f^+\mathrm{d}x &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^\pi \frac{\sin y}{y+2n\pi}\mathrm{d}y \\
&\geq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)\pi}\int_0^\pi \sin y\mathrm{d}y \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{2}{(2n+1)\pi} = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

ここで、「最後の級数は収束せず発散する (主張 3)」ので $\int_{[0,\infty)} f^+\mathrm{d}\mu = \infty$ であることがわかった。同様の議論により $\int_{[0,\infty)} f^-\mathrm{d}\mu = \infty$ でもあるので、$\infty - \infty$ が定義できないことから、$\frac{\sin x}{x}$ の $\mathbb{R}$ 上のルベーグ積分は定義できないことがわかった。

8.1 主張 3 の証明

$2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1} > \sum_{n=0}^{2N+2}\frac{1}{n}$ である。左辺の無限級数は主張 2 より発散するのでここで考えている級数も発散することがわかる。