

測度論的確率論 2018 S1S2

Homework 8

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 23, 2018

1 2.2.1

2 2.2.2

3 2.2.3

4 2.2.4

5 2.2.5

$$E \left[\left(\frac{S_n}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} E[X_i X_j]$$

である。コーシーシュワルツの不等式より、 $E[X_i X_j] \leq (E[X_i^2] E[X_j^2])^{\frac{1}{2}} = r(0)$ である。また仮定より、

$$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0 \text{ s.t. } k \geq K \Rightarrow r(k) < \epsilon$$

である。これより、 $|i - j| \leq K$ に対しては $E[X_i X_j] \leq r(0)$ とし、 $|i - j| > K$ に対しては $E[X_i X_j] \leq \epsilon$ で抑えられる。すなわち、

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} E[X_i X_j] \leq \frac{1}{n^2} (n(2K - 1)r(0) + n^2 \epsilon) = \frac{2K + 1}{n} r(0) + \epsilon$$

である。 K は n に依存しないので $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} E[S_n^2] \leq \epsilon$ である。従って 0 に L^2 収束するので 0 に確率収束する。

6 2.2.6

フビニの定理より $E[X]$ は以下のように変形できる。

$$E[X] = E \left[\sum_{n=1}^{\infty} 1(X \geq n) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[1(X \geq n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

また同じくフビニの定理より、

$$E[X^2] = E \left[2 \sum_{n=1}^X n - X \right] = E \left[\sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1) 1(X \geq n) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1) P(X \geq n)$$

を得る。