測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 3

経済学研究科現代経済コース修士１年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 5, 2018

1 Ex2.3

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

1.1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ を示す。

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。なぜなら、

$$\forall (x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \;\; a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \text{ s.t. } x \leq b_1 - \frac{1}{n_1},\; y \leq b_2 - \frac{1}{n_2}$$

なので、$N = \max(n_1, n_2)$ とおけば、$\forall n \geq N \; (x, y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ となるので、$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ である。

逆向きの包含関係も、任意に $(x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$ をとると、ある N については必ず $(x, y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}]$ であるので、$(a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}] \subset (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ であることから示される。

すなわち、$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ は $\mathcal{B}^2$ を生成する半開区間の可算和で表現できることがわかった。したがって、Borel sigma field の定義より $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in (B)^2$ である。

ここで、「$\mathbb{R}^2$ の任意の開集合は $\mathbb{R}^2$ の開区間の可算和でかける（主張 1）」とすると、sigma field の性質から $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ の可算和で表現される任意の集合は $(B)^2$ に含まれているので、$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) \subset \mathcal{B}^2$ が示された。

よって以下では（主張 1）を証明する。to be written

1.2 $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を示す。

まず、$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ を示す。左辺が右辺に含まれることは以下のように確認できる。　　任意に $(x, y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ をとると、

$$\forall n \geq 1 \; \begin{cases} a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \\ a_2 < x < b_2 + \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \forall n \geq 1 \; (x, y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \Rightarrow (x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$$

である。

逆向きの包含関係は以下のように確認できる。任意に $(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ をとると、$\forall n \geq 1 \; (x, y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$ である。この時、

$$a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; a_1 < x \leq \inf\left(b_1 + \frac{1}{n}\right) \;\Rightarrow\; a_1 < x \leq b_1$$

である。y についても同様にできるので、$(x, y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ であることがわかる。

これより、$\mathcal{B}^2$ を生成する集合の要素は $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることがわかる。これはつまり、$\mathcal{B}^2$ が $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることを意味する。また、$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ を生成する開集合全体には明らかに $\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体が含まれているため、$\mathbb{R}^2$ 上の開区間全体を含む最小の sigma field は $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ に含まれる。したがって $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ である。

2 Ex2.5

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

2.1 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$

開集合 $A \subset X$ を任意にとる。まず、$A \times Y$ が $X \times Y$ の開集合であることを示す。

まず、直積空間 $X \times Y$ 上に以下のように距離 (d) が定義できる。

$$\text{let } x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),\ \text{where } x_1, y_1 \in X,\ x_2, y_2 \in Y \text{ then } d(x,y) \equiv\ d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

すなわち $(X \times Y, d)$ は距離空間とできる。以下ではこの距離 d について $A \times Y$ が開集合であることを確認する。

全体集合 Y が開かつ閉集合であることより、$(p,q) \in A \times Y$ について以下の二つが成立する。

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } \{x \in X \mid d_1(x,p) < \epsilon\} \subset A$$
$$\exists \eta > 0 \text{ s.t. } \{y \in Y \mid d_2(y,q) < \eta\} \subset Y$$

ここで、上の集合に含まれる (x,y) について、

$$d((x,y),(p,q)) = d_1(x,p) + d_2(y,q) < \epsilon + \eta$$

が成立する。従って、(p,q) を任意にとっても、$\{(x,y) \in X \times Y \mid d((x,y),(p,q)) < \delta\}$ なる集合が δ を十分小さくすることによって $A \times Y$ に含まれることがわかる。これより $A \times Y$ は開集合である。

これより Borel sigma field の定義から、$A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。ここで、$\mathcal{C} = \{A \subset X \mid A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)\}$ とする。先の議論より任意の開集合 $A \subset X$ について $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ であるので、$\{X$ の開集合全体 $\} \subset \mathcal{C}$ である。

また、$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ をとる。明らかに $\bigcup_{i=1}^{\infty} c_i\ \times Y$ が開集合であり、$\mathcal{B}(X \times Y)$ に含まれることから、$\mathcal{C}$ は sigma field、それも X の開集合全体を含む sigma field である。Borel sigma field の定義より $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$ である。

これより、$A \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$ なので、任意の $A \in \mathcal{B}(X)$ について $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。Y 上の開集合 B についても同様の議論が適用できて、任意の $B \in \mathcal{B}(Y)$ について $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ である。

従って、以下が成立する。

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), B \in \mathcal{B}(Y)\ A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$$

すなわち $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ である。

3 Ex2.6

4 Ex3.3

5 Ex3.4

6 Ex3.6

7 Ex3.15

8 Ex3.16