測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 2

経済学研究科現代経済コース修士１年 / 池上　慧 (2918009) / sybaster.x@gmail.com

April 19, 2018

1 Ex 1.5

まず「$A_n \downarrow \phi,\ A_n \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$」⇒「$\mu$ が $\sigma(\mathcal{A})$ 上に拡張できる」を示す。Caratheodory の拡張定理を用いるために、以下の二点が成立することを確認すれば良い。

1. $A_n \in \mathcal{A}$ が $n = 1, 2, 3, \ldots$ で排反に取られていて、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ であるなら、$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ が成立する。

2. $\mu(\phi) = 0$

１番目を確認する。仮定されている有限加法性から以下が成立する。

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) + \mu\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right)$$

ただし、2 つ目の統合は、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ かつ任意の n について $A_n \in \mathcal{A}$ であることから、field の性質より $\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ となり、μ の定義域に入るため成立することに注意する。この処理は繰り返し用いることができるので、$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ が成立することがわかる。

2 番目を確認する。今、$B_n = A_1 \backslash A_n$ とすると、仮定より $B_n \uparrow A_1 \backslash \phi$ である。さらに $C_n = B_n \backslash B_{n+1}$ とすると、$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調な列であることから $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ は排反である。有限加法性より、

$$\mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} C_m\right) = \sum_{m=1}^{n} \mu(C_m)$$

である。$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1) - \mu(B_n)$ なので、$\mu(A_n)$ の極限を考えるには $\mu(B_n)$ の極限を考えれば良い。上の式と 1 の性質より、

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(C_m) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_1 \backslash \phi)$$

である。以上より、

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - (\mu(A_1) - \mu(\phi)) = \mu(\phi)$$

であり、仮定より $\mu(\phi) = 0$ を得た。

次に「μ が $\sigma(\mathcal{A})$ 上に拡張できる」⇒「$A_n \downarrow \phi,\ A_n \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$」を示す。レクチャーノートの lemma1.3 を用いる。$\mu(A_1) < \infty$ であることを示せば、lemma1.3 より $A_n \downarrow \phi,\ A_n \in \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$ のように取れば、測度の定義より空集合の測度は 0 なので、$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\phi) = 0$ となり題意を示せる。従って $\mu(A_1) < \infty$ を確認すれば良い。拡張した測度においても $\mathcal{A}$ 上では元の関数 μ と同じ値をとり、元の μ の値域は $\mathbb{R}_+$ であり、$A_1 \in \mathcal{A}$ である。これより $\mu(A_1) < \infty$ は明らかである。以上で必要十分条件であることが確認された。

2 Ex 2.1

3 Ex 2.9

4 Ex 3.1

5 Ex 3.2