実証研究で広く用いられる完備情報参入ゲームを用いて純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされているかを統計的に検定する手法を提案する。これは不安定な混合戦略ナッシュ均衡は長期的にはプレイされないとするゲーム理論の予測についての検証であると同時に、戦略的状況の実証分析が依拠する均衡への仮定を検証する一つの枠組みでもある。本手法は、先行研究で扱われてきたスポーツやゲーム、経済実験と違い利得構造が確定的でない状況においても用いることができるため、より強い意味での理論の検証を可能にしたと言える。

目次

0.1 Introduction

データの拡充と推定手法の開発、そしてそれを可能にする計算環境の実現に伴い戦略的状況を扱った実証分析は近年大きく進展してきた。例えば[?]で行われた寡占市場の分析や[?],[?],[?]の参入の分析、[?]による社会的相互作用用モデルを用いたpeer effectの分析などが静学ゲームの実証研究として行われており、また動学ゲームにおいても、[?]で開発された参入退出ゲームと[?]や[?]で開発された推定手法を用いて[?]や[?]などで動学的な要素を考慮した戦略的意思決定の実証が行われている。

こういった戦略的状況の分析は、現実のデータがある種の均衡状態から生み出されたものであるという仮定を基盤とする。静学ゲームでは完備情報下ではナッシュ均衡、不完備情報下であればベイジアンナッシュ均衡がプレイされているとしてモデルのパラメータを推定する。動学ゲームにおいても同様にマルコフ完全均衡がプレイされているという仮定の下でモデルのパラメータを推定する。

しかし現実にはモデルの示唆する均衡が必ずしもプレイされるわけではないということが実験を通して明らかにされてきた。ナッシュ均衡の各種精緻化概念も現実をよりよく説明するために生み出されてきたものであり、また[?]が提案した認知階層モデルなどの限定合理性モデルも既存の均衡では予測できない実験データを説明するために作られたモデルである。従来、こういったモデルの正当性は実験データをどれだけ説明できるかという基準で検証されるが、[?]が指摘したようにデータへのフィットという観点でモデルの妥当性を図ることには正当性がない場合も存在する。

モデルや均衡概念の特定化の検証を現実のデータを用いて行った研究はわずかであり、それも極めて限定的な状況を利用するものが多い。[?]はサッカーのペナルティキックにおける混合戦略ナッシュ均衡の実証を行い、[?]はスウェーデンで実際に行われたゲームを用いて実験的状況下にないデータから均衡概念のチェックを行っている。こういった研究において扱われる事象は極めて限定的かつ特殊なものであり、社会で広く観察される現象に対する均衡概念の検証はほとんど行われていない。この困難は研究者には観測できない変数の存在や異質性の問題、そしてそもそも利得が観測できずそれ自体が推定する対象であるパラメータであるという事実などによる。

本研究では広く観察される市場参入という現象に対して、純粋戦略ナッシュ均衡のプレイを仮説検定によって検証する手法を提案する。モデルは[?]で提案された完備情報参入ゲームを用いる。本論は以下のように進む。2章では関連する研究として[?]と[?]をレビューし、均衡に対する検証がなぜ困難かを整理する。3章ではモデルを説明して均衡を計算する。4章では主要な結果であるパラメータの推定手法と検定方法を提案する。5章では結語としてより包括的な枠組みの可能性を述べる。

0.2 Literatures

[?]はゲーム理論を実験環境外のデータを用いて検証した稀有な研究である。具体的にはサッカーのプロリーグにおけるペナルティキックでキッカーとキーパーのとった行動データを用いて、同時手番としてプレイされているかの検証と混合戦略がプレイされているかの検証を行った。手番の検証は自身の行動を相手の行動に回帰した時の係数の有意性により判断し、混合戦略に関しては実際の得失点を特定の行動に回帰した時の係数の有意性により判断している。結果としては同時手番という仮説は棄却されず、混合戦略をプレイしているという仮説も棄却されなかったため、実験環境外の戦略的状況下で混合戦略ナッシュ均衡がプレイされるということの証拠となった。しかしペナルティキックという限定的な事象に対する実証であることや、ナッシュ均衡が混合戦略でただ一つ存在する単純なゼロサムゲームについての分析であるということから、現実に観察される多様な経済現象を分析できる枠組みではないという弱みを持つ。本論文で扱う参入ゲームは幅広い産業分野で実証が重ねられてきた領域であり、利得構造もゼロサムではないより広範な利得構造を表現できるという点で[?]から先に進んだものであると言える。

[?]はスウェーデンで実際に行われたゲームでの行動データからナッシュ均衡や限定合理性モデルの予測能力を検証したものである。実施されたのはLUPIと呼ばれるゲームであり、参加者は1から99999の間から好きな整数を選び、ただ1人にのみ選ばれた数字のうちで最も小さい数字を選んだプレイヤーが勝利者となり賞金を受け取るというゲームであった。筆者はこれを[?],[?]に従ってポワソンゲームとして定式化し、ポワソンゲームのナッシュ均衡では実際の行動データが説明できないこと、そして限定合理性のモデルの代表例である認知階層モデルでは実データの分散をよく説明できることを示した。しかし先にも述べたようにデータへのフィットの良さを裏付けとしてナッシュ均衡をはじめとしたモデルや構造を正当化することには懸念がある。ポワソンゲームにおける均衡は計算で求めることができるため、ナッシュ均衡とのフィットは一定の妥当性を持つことが想定されるが、認知階層モデルやlevel-kといったモデルはその予測がデータと良くフィットするように、パラメータの値や階層の分布、level-0の割合などが様々に特定化されている。これらを考慮した時、ある種のフィットの良さ以外にモデルや特定化のテストをする枠組みがゲームの構造に対しても必要であると考える。

[?]で引用されているRobert Aumannの言葉にある通り、戦略的な状況を記述し分析するためにはそのゲームが厳格なルールを持っている必要がある。特に均衡概念の特定化を検証するという目的のためにはこれが重要であり、コントロールされた利得を用いて均衡での挙動を計算できる[?]のようなゲーム的状況や[?]で扱われたスポーツ、データの集積も盛んで厳密なルールが参加者にも徹底されるオークションなどの限定的な状況しか検証に用いることができなかった。

しかし一般に実証研究の対象となる経済事象はそのような理想的な状況ではなく、情報構造や利得の構造、さらに手番に関しても研究者にとっては不確実なものである。以下で扱う参入ゲームもその例外では

なく、実証に用いられるモデルは様々に特定化されている。その特定化の1つとして純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされているという仮定をここでは取り上げる。これは実現した結果についてプレイヤーが両者ともに別の行動をとればよかったと後悔することがないということを意味するが、支配戦略が存在しない場合においては現実には強すぎる仮定である。通常のゲーム理論の文脈では参入ゲームにおける混合戦略ナッシュ均衡は安定でない均衡であるために予測としては用いられないが、実データにおいても不安定な均衡が排除されているかを検証するという意味においても、純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされるという仮定を検証する枠組みを提示することには意義があると言える。

また、[**?**]や[**?**]で提案された部分識別による推定量は混合戦略がプレイされることに対しても頑健な推定を行うことができるが、混合戦略を許すことによりその推定幅が拡大する。この時、帰無仮説を純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされるとした仮説検定を行うことができ、また帰無仮説が棄却されなければ混合戦略を許さない場合の推定によって識別集合の幅を小さくすることができる。この意味でも本研究で提案される検定は有用であると言える。

0.3 Model and Equilibrium

0.3.1 Toy Model

以下の利得表を持つ参入ゲームを考える。ここで、θ_μは1社のみが参入した時に得られる観測できる利得

表1 Toy model 利得表

		Player 2	
		参入しない	参入する
Player 1	参入しない	$(0,0)$	$(0,\theta_\mu+\epsilon_2)$
	参入する	$(\theta_\mu+\epsilon_1,0)$	$(\theta_\mu+\theta_\delta+\epsilon_1,\theta_\mu+\theta_\delta+\epsilon_2)$

であり、θ_δは2社が参入してしまった時の利得減少分を表すパラメータである。θ_δは以下で競争効果と呼ぶ。(ϵ_1,ϵ_2)はプレイヤー同士では観測可能だが研究者には観測できない利得であり、独立に標準正規分布に従うとする。この確率変数は各市場ごとに毎期生成される、つまりデータとして得られる市場ではそれぞれプレイヤーは異なる利得表のゲームをプレイしていることに注意する。以下「参入しない」を0、「参入する」を1で表記する。

プレイヤーにはSecond Order Rationality（SOR）を仮定する。すなわち、支配戦略がある時はその戦略をとることができるとする。例えばプレイヤー1については、

$$\begin{cases} \Pr(\text{player 1 takes 0})=1 & \text{if } \epsilon_1<-\theta_\mu \\ \Pr(\text{player 1 takes 1})=1 & \text{if } \epsilon_1>-\theta_\mu-\theta_\delta \end{cases}$$

である。

また、支配戦略を用いて行動の逐次削除もできるとする。すなわち、相手にとって支配戦略が存在する時はその事実を用いて自身の行動について被支配戦略を削除することで行動を確定させることができる。例えばプレイヤー1について$-\theta_\mu<\epsilon_1<-\theta_\mu-\theta_\delta$の時以下のようになる。

$$\begin{cases} \Pr(\text{player 1 takes 0})=1 & \text{if } \epsilon_2>-\theta_\mu-\theta_\delta \\ \Pr(\text{player 1 takes 1})=1 & \text{if } \epsilon_2<-\theta_\mu \end{cases}$$

SORの下でプレイヤーの行動が確定しないのは$\{(\epsilon_1,\epsilon_2)\mid -\theta_\mu<\epsilon_1<-\theta_\mu-\theta_\delta \ \wedge\ -\theta_\mu<\epsilon_2<-\theta_\mu-\theta_\delta\}$のみである。この領域（以下☆、市場$m$に注目する時は$☆_m$と表記する）における純粋戦略ナッシュ均衡は$(0,1)$, $(1,0)$の2つである。

☆においてはxをプレイヤー1の参入しない確率、yをプレイヤー2の参入しない確率とした時に$(x,y)=\left(\frac{\theta_\mu+\theta_\delta+\nu_2}{\theta_\delta},\frac{\theta_\mu+\theta_\delta+\nu_1}{\theta_\delta}\right)$が混合戦略ナッシュ均衡として存在する。☆において混合戦略がプレイされることは$(\epsilon_1,\epsilon_2)\in$ ☆でも一定の確率で$(1,1)$, $(0,0)$が実現してしまうことを意味する。よって推定の際にはこの$(1,1)$, $(0,0)$が実現する割合の歪みを適切に処理することが必要である。

0.3.2 General Model

上記の単純なモデルを[**?**]のようにプレイヤーとマーケットの性質によって利得が変化し、競争効果もプレイヤーによって異なる一般のモデルへと拡張する。データはM市場についてT期分得られているとする。市場$m \in \{1, \cdots, M\}$におけるプレイヤー$i \in \{1, 2\}$の利得に関わるK個の変数をまとめて$\mathbf{x}_{m,i}$の確率ベクトルで表記する。これを用いてプレイヤーiの利得(u_i)は以下のように欠ける。

$$u_i = \mathbf{x}_{m,i}^{'}\beta_i + \delta_i \mathbf{1}[y_{-i} = 1] + \epsilon_i$$

ここで$\mathbf{1}[y_{-i} = 1]$は相手プレイヤーが参入することの指示関数であり、δ_iはプレイヤーiの競争効果、ϵ_iは標準正規分布に従う研究者には観測不可能な確率的な効用である。これを用いて市場mにおける利得表は以下のように書くことができる。

表2　general model 利得表

		Player 2	
		参入しない	参入する
Player 1	参入しない	$(0, 0)$	$(0, \mathbf{x}_{m,2}^{'}\beta_2 + \epsilon_2)$
	参入する	$(\mathbf{x}_{m,1}^{'}\beta_1 + \epsilon_1, 0)$	$(\mathbf{x}_{m,1}^{'}\beta_1 + \delta_1 + \epsilon_1,\ \mathbf{x}_{m,2}^{'}\beta_2 + \delta_2 + \epsilon_2)$

toy modelと同様にSORの仮定を置くと、市場mごとの$☆_m$で$(x, y) = \left(\frac{(\mathbf{x}_{m,1}^{'}\beta_1 + \delta_1 + \epsilon_2}{\delta_1}, \frac{\mathbf{x}_{m,2}^{'}\beta_2 + \delta_2 + \epsilon_1}{\delta_2}\right)$を混合戦略ナッシュ均衡として持つ。

0.4 Inference and Hypothesis Test

一般のモデルにおけるパラメータの推定量として以下の2種類を与える。1つ目は純粋戦略ナッシュ均衡の仮定（以下pure strategy Nash equilibriumを略してPNと呼称する）の下で一致性を持つ推定量である。すなわち$☆_m$においては必ず$(0,1),(1,0)$のどちらかが実現するという仮定の下での推定量であり、ここでは[?]において考案された複数均衡に対して頑健な参入企業数を結果変数として用いた最尤推定を紹介する。この推定量を以下PN推定量と呼ぶ。2つ目に$☆_m$において純粋戦略ナッシュ均衡と混合戦略ナッシュ均衡がどのような割合で実現していてもパラメータを一致推定できる頑健な推定量を与える。これを以下ではRobust推定量と呼ぶ。

それぞれの推定量についてデータの種類に応じて2つの推定方法を与える。まず想定するデータセットは、M市場に関してT期分の2社についての参入結果がデータとして得られている理想的な状況を想定したものである。しかし、[?]で扱われるような企業参入に関するデータはM市場について1回の参入結果がデータとして得られている場合が多い。また、仮にM市場についてそれぞれ複数回の参入結果が得られたとしても、研究者には観測不可能な効用が各回で独立に発生するケースは想定しにくい。同じ市場について複数回の参入結果が得られているのであればその結果は系列相関を持つはずであり、ここで想定するように同じ市場について参入企業数の十分な分散を保証してくれる可能性は低い。そこで2つ目のデータセットとしてM市場について1回だけ参入結果が得られている状況を想定する。

0.4.1 PN推定量

純粋戦略を仮定した時、$☆_m$においては複数の均衡が存在するので単純にプレイヤーの参入結果を結果変数に用いると、すべての事象の実現確率を足すと1を超えてしまうため適切な尤度を構成できない。しかし、$☆_m$において2つある純粋戦略ナッシュ均衡の結果がどちらも1社のみ参入するという結果であることを利用して、参入した企業の数を結果変数としたBivariate Probitを行うことでパラメータが推定できる。

M市場T期データ

市場mに着目する。t_2^mを2社がどちらも参入した回数、t_0^mをどちらも参入しなかった回数とする。企業iについて参入することが支配戦略となる確率と参入しないことが支配戦略となる確率とを(q_i^1,q_i^0)で表記する。$\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$をそれぞれ標準正規分布の確率密度関数、確率分布関数とした時これは以下のように書ける。

$$\begin{cases} q_i^1 = \int_{-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i-\delta_i}^{\infty} \phi(\epsilon_i)\mathrm{d}\epsilon_i = \Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i+\delta_i) \\ q_i^0 = \int_{-\infty}^{-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i} \phi(\epsilon_i)\mathrm{d}\epsilon_i = \Phi(-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) \end{cases}$$

従って市場mにおけるデータをD^m、パラメータの組をθで表記すると対数尤度は以下のようである。ま

たこれによって得た推定量をθ^Pで表記する。

$$\sum_{m=1}^{M} g(D^m \mid \theta)$$

$$\text{where} \quad g(D^m \mid \theta) = t_2^m \ \log(q_1^1 q_2^1) + t_0^m \ \log(q_1^0 q_2^0) + (T - t_2^m - t_0^m) \ \log(1 - q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

M市場データ

市場mに着目する。実現した参入企業数を$n_m \in \{0,1,2\}$で表記すると、尤度は以下のように書ける。

$$\sum_{m=1}^{M} h(D^m \mid \theta)$$

$$\text{where} \quad h(D^m \mid \theta) = \mathbf{1}[n_m = 2] \ \log(q_1^1 q_2^1) + \mathbf{1}[n_m = 0] \ \log(q_1^0 q_2^0) + \mathbf{1}[n_m = 1] \ \log(1 - q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

これよりパラメータの最尤推定量を得る。この推定量を以下θ_r^Pと表記する。

0.4.2 Robust推定量

Robust推定量の構成には、一定の条件の下で各市場において企業が2社ともに参入する確率と企業が1社も参入しない確率との差が$☆_m$における均衡選択の仮定によらず一定であることを利用する。

M市場T期データ

$☆_m$における均衡選択メカニズムとして、$w \in [0,1]$の確率で混合戦略ナッシュ均衡が実現するとする。例えば先のPNの仮定は$w = 0$の場合であると言える。またこのメカニズムに以下の仮定を置く。

仮定1:uniform equilibrium selection mechanism　wは(ϵ_1, ϵ_2)に依存しない。

ここで1社も参入しない確率と両者ともに参入する確率との差分を$\alpha(w)$と書くと、

$$\alpha(w) = w \ \left\{ G_1 G_2 \left(1 + \frac{\mathbf{x}_{m,1}' \beta_1}{\delta_1} + \frac{\mathbf{x}_{m,2}' \beta_2}{\delta_2} \right) + \frac{G_1 g_2}{\delta_2} + \frac{G_2 g_1}{\delta_1} \right\}$$

ただし、

$$\begin{cases} G_i = \Phi(\mathbf{x}_{m,i}' \beta_i) - \Phi(\mathbf{x}_{m,i}' \beta_i + \delta_i) \\ g_i = \phi(\mathbf{x}_{m,i}' \beta_i) - \phi(\mathbf{x}_{m,i}' \beta_i + \delta_i) \end{cases}$$

である。証明はAppendix7.1に載せる。

この時以下の2つが成立する。

主張1　$|\alpha(w)|$はwについての増加関数である。

主張2　$\forall i \in \{1,2\}$で$\mathbf{x}_{m,i}' \beta_i + \delta_i$が十分に大きいならば$\alpha(1)$を十分0に近づけることができる。

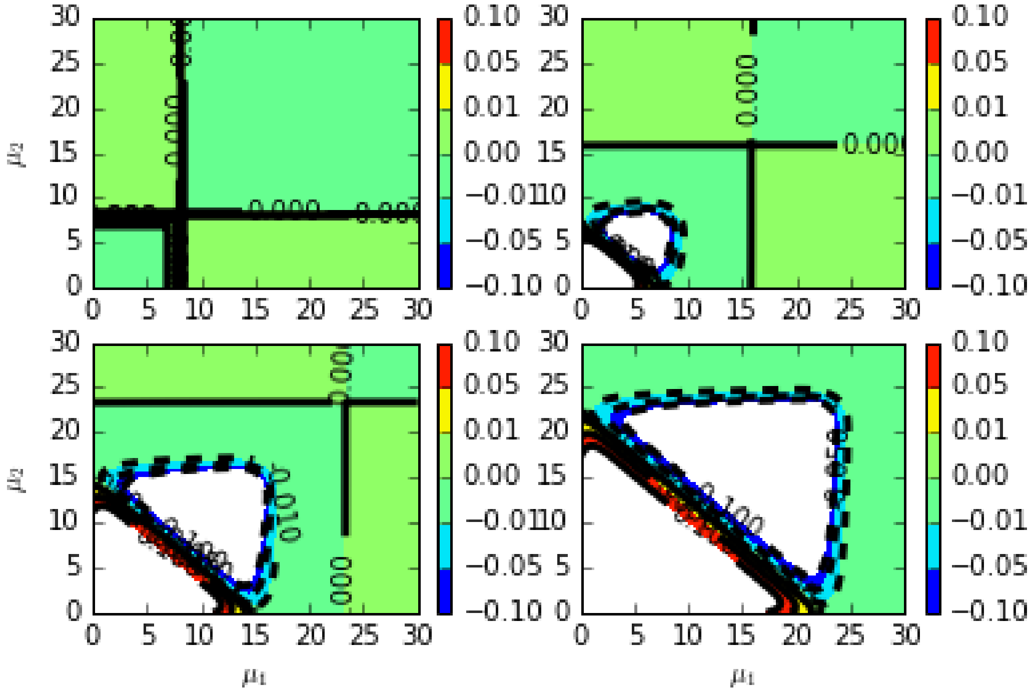

図1　頑健性　左上から順に$\delta = -0.01$, $\delta = -7.4$, $\delta = -15$, $\delta = -22.5$の時の等高線

主張1は明らかである。主張2については図1より確認できる。

図1は$\mu_i = \mathbf{x}'_{m,i}\beta_i$として、$\delta = \delta_1 = \delta_2$という対称性の仮定の下で各$(\mu_1, \mu_2, \delta)$に対して$\alpha(1)$の値を出力し、$\delta$の値ごとに等高線で表示したものである。図1からわかるように$\mu_i + \delta$が両プレイヤーにとって十分大きい領域では$\alpha(1)$が十分小さくなっている。すなわちパラメータとサンプルにこの性質を満たすという仮定を置くと、$\alpha(1)$は図2の②と①の領域の差分と等しいことを意味する。またδ_iについての対称性の仮定を緩めてもこれは同じように成立する。

さらに主張1より$\alpha(1)$が十分0に近い領域のパラメータセットにおいては他のいかなる$w \in [0,1]$においても十分0に近いことがわかる。従って「$\forall i \in \{1,2\}$で$\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i$が十分に大きい」という仮定の下では、$\star_m$においていかなる均衡選択メカニズムが存在しようと、「1社も参入しない確率と両者ともに参入する確率との差分は図2の②と①の領域の差分と等しい」というモーメント条件を用いてパラメータの推定を行うことができる。

以上の議論よりRobust推定量(θ^R)は以下のように定義される。ただし、p_2^mは市場mにおいて2社が共に参入する確率であり、$\hat{p_2^m}$はT期のデータからその確率を推定したものである。すなわちn_m^tを市場mのt期目

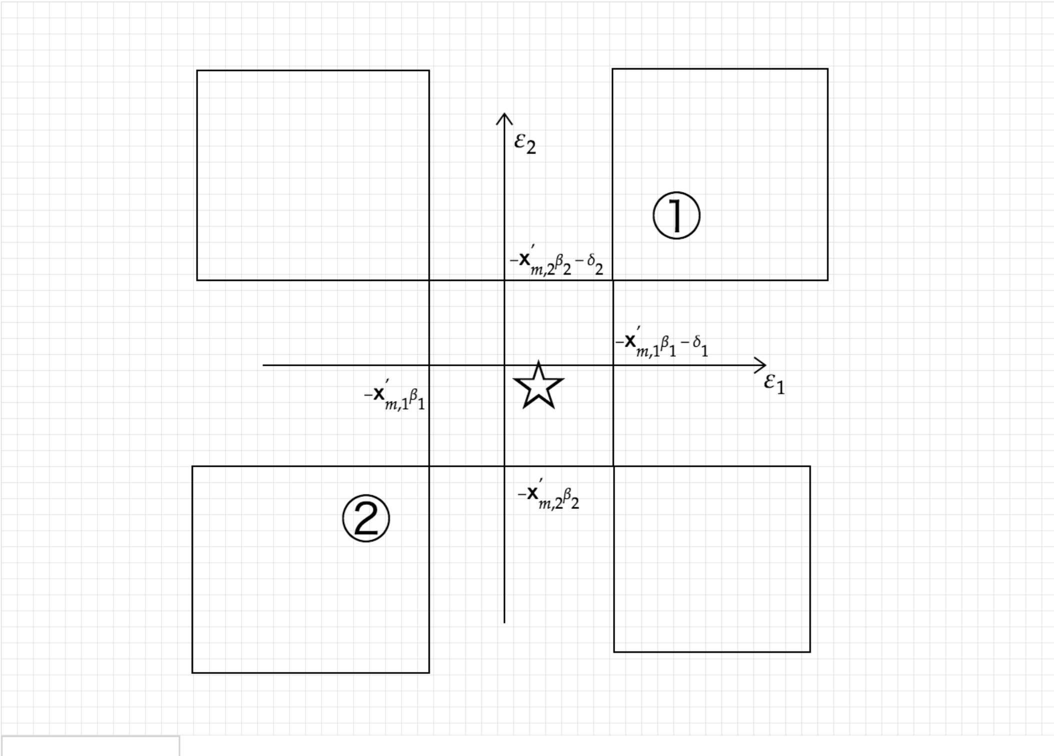

図2　均衡の分布

で参入した企業数として$p_2^{\hat{m}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{1}\left[n_m^t = 2\right]$である。$p_0^m$と$p_0^{\hat{m}}$についても同様に定義される。

$$\theta^R = \arg\min_{\theta} \sum_{m=1}^{M} r(p^{\hat{m}};\theta)^2$$

$$\text{where } r(p^{\hat{m}};\theta) = (p_2^{\hat{m}} - p_1^{\hat{m}}) - (q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

識別に関しては以下が成立する。

主張3　[?]の除外制約の下でRobust推定量(θ^R)は識別可能である。

証明はAppendix7.2に記す。

M市場データ

市場mに関して1回分のデータしか得られていない状況を考える。Robust推定量の構成に必要なのは各市場ごとのp_2^m, p_0^mである。p_2^m, p_0^mは説明変数の値に依存する関数であることから、多項ロジットで当該関数を推定し、それによって得られるp_2^m, p_0^mの予測値を利用することで先と同様の非線形最小二乗推定量を得ることができる。以下これをθ_r^Rと表記する。

多項ロジットによって得たp_2^m, p_0^mの推定値を$p_2^{\tilde{m}}, p_1^{\tilde{m}}$と表記する。図3はサンプルデータを用いて実際に推定した$p_0^{\tilde{m}} - p_2^{\tilde{m}}$を縦軸に、横軸には同じデータセットから推定した$p_2^{\hat{m}} - p_1^{\hat{m}}$をとった散布図である。多項ロジットによって差分がよく推定されていることがわかる。

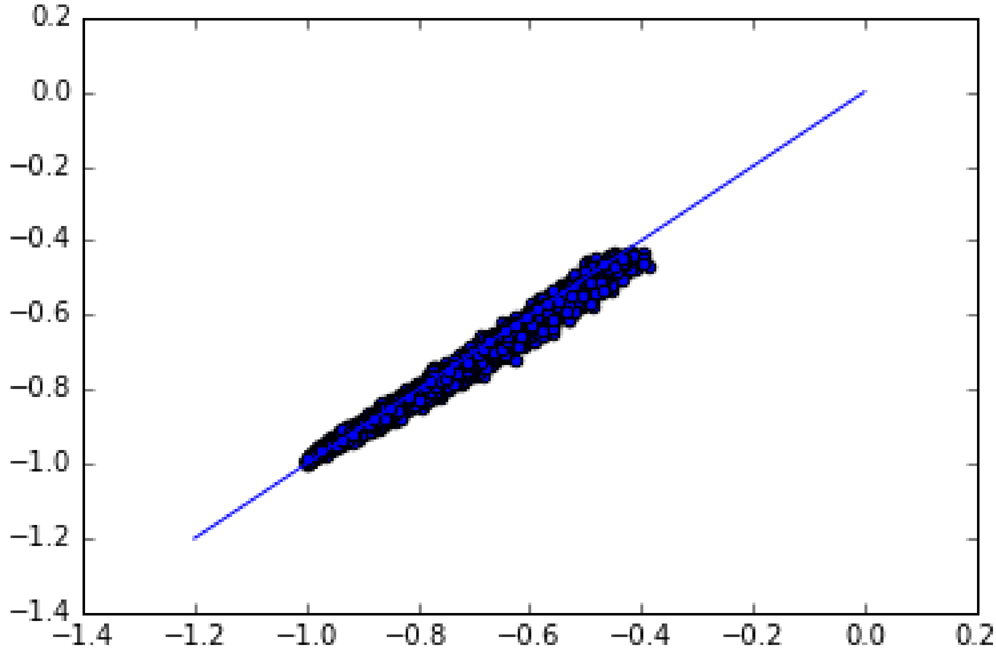

図3　多項ロジットによる差分の予測　直線は$p_0^{\tilde{m}} - p_2^{\tilde{m}} = p_2^{\hat{m}} - p_1^{\hat{m}}$

0.4.3 Hypothesis Test

前章で述べた頑健な推定量を用いてハウスマン検定により純粋戦略ナッシュ均衡の仮定に対する仮説検定を行うことを考える。ただし、通常のハウスマン検定では有効推定量を用いるのに対し、[?]で述べられたようにPN推定量は有効推定量ではない。従って非有効推定量同士を用いたハウスマン検定を考える必要があることに注意する。

まずM市場T期のデータがある状況に対するハウスマン検定統計量を与える。パラメータの真の値をθ^0で表記すると先の2つの推定量について漸近分布は以下で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sqrt{M}(\theta^P - \theta^0) \\ \sqrt{M}(\theta^R - \theta^0) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right)$$

ここで$r(\theta) = \frac{1}{M}\sum_m r(p^{\hat{m}}; \theta)$として$R(\theta) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta'}$と置く。このとき、以下の2つの行列を用いることで漸近分散をASA'と表すことができる。

$$S = Var\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_m \nabla_\theta g(D^m \mid \theta^0) \\ \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_m \; r(p^m \mid \theta^0) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -E\left[\nabla_{\theta\theta'} g(D^m \mid \theta^0)\right]^{-1} & 0 \\ 0 & -\left(R(\theta^0)' R(\theta^0)\right)^{-1} R(\theta^0)' \end{pmatrix}$$

ここでハウスマン検定統計量Hは$q=\sqrt{M}(\theta^P-\theta^R)$と置くと以下で定義される。

$$H=q^{'}\left(Av\hat{ar}\left(q\right)\right)^{-1}q$$

ただし$Av\hat{ar}\left(q\right)$はqの分散共分散行列の推定値であり、デルタメソッドより以下のように求められる。

$$Av\hat{ar}\left(q\right)=\hat{A_{11}}-\hat{A_{12}}-\hat{A_{21}}+\hat{A_{22}}$$

ここで$\left(\hat{A_{11}},\ \hat{A_{12}},\ \hat{A_{21}},\ \hat{A_{22}}\right)$は各要素のサンプルからの推定値である。帰無仮説は「$\star_m$で純粋戦略ナッシュ均衡が常に実現する」であり、帰無仮説の下でHは自由度$2K+2$のχ^2分布に従う。これを利用し有意水準5%の仮説検定を行うことができる。

次にM市場について1回分の参入結果しかない場合のハウスマン検定統計量を与える。上で述べた理想的なデータセットにおける尤度関数gをhに変え、さらにRobust推定量における$p_2^{\hat{m}}-p_1^{\hat{m}}$を$p_0^{\tilde{m}}-p_2^{\tilde{m}}$に置き換える。また各パラメータの推定値に$M$市場データから得られた$\theta_r^P,\ \theta_r^R$を用いることで得られるため詳細は省略する。

表3　推定結果とハウスマン検定統計量

	(1)	(2)	(3)	(4)
β_1	0.755	0.828	0.737	0.840
β_2	-0.450	-0.509	-0.443	-0.519
δ	-0.160	-0.287	-0.092	-0.268
H	1.676e+12		1.345e+10	

[a] (1)はM市場T期のデータを用いたPN推定量、(2)はM市場T期のデータを用いたRobust推定量、(3)はM市場のデータを用いたPN推定量、(4)はM市場のデータを用いたRobust推定量である。
[b] Hはハウスマン検定統計量であり、帰無仮説の下で自由度2のχ^2分布に従う。
[c] サンプルはRobust推定量の仮定を満たすものを用いた。

0.5　Monte Carlo Simulation

サンプルデータを用いて上記の推定を行い、ハウスマン検定統計量を計算する。サンプルデータは説明変数として市場ごとの人口、企業ごとの利益を左右する変数として工場からの距離をそれぞれの企業について用意した。すなわち$\mathbf{x}'_{m,i} = (pop_m, dist_{m,i})$である。3つの変数は独立な標準正規分布からのサンプルである。単純化のために企業間で係数は等しいとして、$\beta = (\beta_1, \beta_2)'$とする。

真のパラメータの値を$\theta^{0'} = (\beta^{0'}, \delta) = (0.8, -0.5, -0.25)$とし、$w = 1$の時のサンプルデータを30000市場について1000期作成した。M市場のみのデータセットに関しては各市場の経験分布から実現した参入企業数を得た。このサンプルデータを用いて上記の推定を行い各データセットにおいてハウスマン検定統計量を計算した結果が表3である。

どちらのデータセットにおいてもRobust推定量は真の値に収束している一方で、PN推定量は誤った推定結果を出力していることが見て取れる。またハウスマン検定統計量を見てもどちらのデータセットにおいても純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされるという帰無仮説は正しく棄却されている。

0.6 Conclusion

本論文では広く用いられる完備情報参入ゲームのモデルを用いて実験環境外のデータにおいて純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされているかを統計的に検定できる簡便な手法を提案した。先行研究ではスポーツやゲームなどの限定的な状況でのみ均衡に関する実証研究が行われていたが、参入ゲームというより広く観察でき、複雑な利得構造を持つ現象についてもプレイされる均衡を統計的にテストできる枠組みを提示したことが本論文の主要な貢献である。これはまた、ゲーム理論の文脈では不安定な均衡として排除される混合戦略ナッシュ均衡の存在を実データを用いて検証することができるため、均衡の精緻化という観点でも有益な示唆を与える。

0.6.1 Further Research

まず、[?]のように実際に完備情報ゲームとして寡占市場を分析した文献ではプレイヤーが2社以上のケースが扱われることに注意が必要である。[?]ではアメリカにおける航空輸送産業が例として扱われているが、日本においてもコンビニエンスストアや低価格飲食チェーン店などの商業立地においては2社による競争よりも複数企業間での競争が多く観察され、またそれにより企業ごとに異なる競争効果を細かく分析することは当該産業における立地などの規制に関する政策評価を行う際に重要な要素となる。従ってプレイヤーが2社以上存在する市場に対しても適用できるように拡張する必要がある。

本論文においてはナッシュ均衡という構造を前提とし、さらに情報構造についても完備情報であるという仮定の下で、均衡の種類の特定化についての検定を提示した。混合戦略が現実にプレイされているかというゲーム理論の実証研究という観点でこれは重要なものであるが、実証産業組織論においてより有益な分析を行っていくためには、より基幹となる仮定であるナッシュ均衡という構造自体や情報構造についての検証を行っていくことも重要である。実際、[?]や[?]などでは実際のスーパーマーケットの立地データを用いて情報構造についての検定が行われており、より柔軟な情報構造に頑健な均衡概念を用いた分析も行われている。また、ナッシュ均衡という構造自体に対して仮定を緩めることを試みる研究も存在する。例えば[?]では完備情報ゲームにおいて合理性の仮定を緩めた際の識別集合を様々なモデルについて報告している。さらに[?],[?]では様々な均衡概念を実データを用いて検定する手法が開発されている。これらの均衡概念の検証も未だ静学ゲームが主であり、動学参入退出のモデルや価格付けのモデルなど広いクラスの問題を扱うことのできる検定手法の開発が今後望まれる研究の方向性である。

.1 Appendix

.1.1 $\alpha(w)$の計算

以下を示せば十分である。

$$\alpha(1) = G_1 G_2 \left(1 + \frac{\mathbf{x}'_{m,1}\beta_1}{\delta_1} + \frac{\mathbf{x}'_{m,2}\beta_2}{\delta_2} \right) + \frac{G_1 g_2}{\delta_2} + \frac{G_2 g_1}{\delta_1}$$

$$\begin{cases} G_i = \Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i) \\ g_i = \phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i) \end{cases}$$

$☆_m$において混合戦略がプレイされているとした時に、t_2^mとt_0^mの中でどれだけの割合が混合戦略の結果として偶発的に実現したものかを求める。ベイズの定理より以下が成立する。ただし2つ目の等式はSORの仮定より成立する。

Pr((1,1) is NE ∣ (1,1) is played)

$$= \frac{\Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is NE}) \Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is NE}) \Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is not NE}) \Pr((1,1) \text{ is not NE})}$$

$$= \frac{\Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is not NE}) \Pr((1,1) \text{ is not NE})}$$

$$= \frac{\Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \wedge ☆_m)}$$

1社も参入しない場合についても同様の計算ができる。ここで修正項は以下のように計算できる。

$$\begin{cases} c_2^m = \Pr((1,1) \text{ is played} \wedge ☆_m) = \Pi_{i=1}^2 \left\{ \frac{\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i}{\delta_i} \left(\Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i) \right) + \frac{1}{\delta_i} \left(\phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i) \right) \right\} \\ c_0^m = \Pr((0,0) \text{ is played} \wedge ☆_m) = \Pi_{i=1}^2 \left\{ \frac{\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i}{\delta_i} \left(\Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i) \right) + \frac{1}{\delta_i} \left(\phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i) \right) \right\} \end{cases}$$

$\alpha(1) = c_0^m - c_2^m$であることより以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= c_0 - c_2 \\ &= \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \left\{ \delta_1 \delta_2 G_1 G_2 + \delta_1 G_1 \left(\mathbf{x}'_{m,2}\beta_2 G_2 + g_2 \right) + \delta_2 G_2 \left(\mathbf{x}'_{m,1}\beta_1 G_1 + g_1 \right) \right\} \\ &= G_1 G_2 \left(1 + \frac{\mathbf{x}'_{m,1}\beta_1}{\delta_1} + \frac{\mathbf{x}'_{m,2}\beta_2}{\delta_2} \right) + \frac{G_1 g_2}{\delta_2} + \frac{G_2 g_1}{\delta_1} \end{aligned}$$

.1.2 主張3の証明

$$\theta^R = \arg\min_{\theta} \sum_{m=1}^{M} r(\hat{p^m}; \theta)^2$$

$$\text{where } r(\hat{p^m}; \theta) = (\hat{p_2^m} - \hat{p_1^m}) - (q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

について[**?**]と同様の除外制約の下で点識別可能であることを示す。

プレイヤー2の利得のみ動かす変数が存在する時、$\mathbf{x}_{m,2}^{'}\beta_2 \ \to \infty$となる領域が存在する。この時$-\mathbf{x}_{m,2}^{'}\beta_2 \ \to -\infty$であることから以下が成立する。

$$\begin{cases} q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0 \ \to \Phi(\mathbf{x}_{m,1}^{'}\beta_1 + \delta_1) \text{ where } \mathbf{x}_{m,2}^{'}\beta_2 \ \to \infty \\ q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0 \ \to -\Phi(\mathbf{x}_{m,1}^{'}\beta_1) \text{ where } \mathbf{x}_{m,2}^{'}\beta_2 \ \to -\infty \end{cases}$$

これはプレイヤー2の行動がプレイヤー1の行動によらずに定るケースであり、プレイヤー1についても同様に考えることができるので、$E\left[\mathbf{x}_{m,i}\mathbf{x}_{m,i}^{'}\right]$が$i = \{1, 2\}$についてどちらも逆行列が存在するならば$\theta$は識別可能である。