

測度論的確率論 2018 S1S2

Homework 4

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 12, 2018

1 Ex4.2

$D = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$ である。lemma3.5 より $E_n \equiv \{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$ は可測集合の要素であるので、sigma fields が可算個の和集合について閉じていることから D も可測集合に入る。したがって $\mu(D)$ は定義されている。さらに、 E_n が単調増大な集合なので、lemma1.3 より

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

である。ここでチェビシエフの不等式から、任意の $n \geq 1$ について

$$\mu(E_n) \leq n \int_{E_n} f d\mu$$

を得る。さらに $f > 0$ であることから、

$$\int_{E_n} f d\mu < \int f d\mu = 0$$

これより、 $0 \leq \mu(E_n) \leq 0 \Rightarrow \mu(E_n) = 0$ を得る。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$ であるので、 $\mu(D) = 0$ である。これは f が 0 でないような X の部分集合の測度が 0 であることを意味するので、 $f = 0$ a.e. である。

2 Ex4.3

可積分であるので、 r を正の実数、 θ を実数として、積分を以下のような極形式で表現できる。

$$\int f d\mu = \int (\operatorname{Re} f) d\mu + i \int (\operatorname{Im} f) d\mu = r e^{i\theta} \quad (1)$$

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ であり、 $r > 0$ だから、

$$\left\| \int f d\mu \right\| = \|r e^{i\theta}\| = r \|e^{i\theta}\| = r$$

である。ここで (1) より以下を得る。

$$r = e^{-i\theta} \int f d\mu$$

また、「可積分な関数 f は、 $c \in \mathbb{C}$ に対して、 $\int c f d\mu = c \int f d\mu$ (主張 1)」を所与とすれば、

$$r = \int e^{-i\theta} f d\mu$$

である。 $r \in \mathbb{R}$ より $\int e^{-i\theta} f d\mu$ は実数である。よって、定義より以下を得る。

$$\int e^{-i\theta} f d\mu = \operatorname{Re} \left(\int e^{-i\theta} f d\mu \right) = \int \operatorname{Re} (e^{-i\theta} f) d\mu$$

さらに、複素数の絶対値の定義より、

$$\|e^{-i\theta}f\| = \sqrt{\operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)^2 + \operatorname{Im}(e^{-i\theta}f)^2} \geq \operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)$$

である。よって example 4.2 より、

$$\int \operatorname{Re}(e^{-i\theta}f) d\mu \leq \int \|e^{-i\theta}f\| d\mu$$

であり、 $\|e^{-i\theta}\| = 1$ が恒等的に成立するので、

$$\left\| \int f d\mu \right\| = r = \int e^{-i\theta} f d\mu = \int \operatorname{Re}(e^{-i\theta}f) d\mu \leq \int \|e^{-i\theta}f\| d\mu = \int \|f\| d\mu$$

となり題意は示された。

2.1 主張 1 の証明

3 Ex4.4

$E = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ の測度が 0 であることを示す。

$$E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{\{x \in X \mid f(x) > q\} \cap \{x \in X \mid q > g(x)\}\} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{\{x \in X \mid f(x) < q\} \cap \{x \in X \mid q < g(x)\}\}$$

である。前半を E_1 、後半を E_2 とする。lemma 3.5 より $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ である。仮定より、

$$\int_{E_1} f d\mu = \int_{E_1} g d\mu$$

であるはずだが、仮に $\mu(E_1) > 0$ だとすると、 E_1 においては $f > g$ なので、example 4.2 より $\int_{E_1} f d\mu > \int_{E_1} g d\mu$ となる。これは仮定に反するので、 $\mu(E_1) = 0$ である。同様に $\mu(E_2) = 0$ であり、 $\mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0$ より題意は示された。

4 Ex4.8

4.1 a.e. に等しい関数を同一視することで $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ がノルム空間となることの証明

ノルムの非負値性、三角不等式、同次性の三つを確認すれば良い。

4.1.1 非負値性

ここでは $\forall f \in L^\infty \ \|f\|_\infty \geq 0$ と $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.e. の二つを確認する。前半はノルムの定義より明らかである。後半は以下のように示される。

まず $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ a.e. を示す。左辺の意味するところは、

$$\forall n \geq 1, \exists a \text{ s.t. } \frac{1}{n} > a > 0, \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$$

この時、任意の $n \geq 1$ に対して $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\}) \leq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$ とできることから、

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

であることがわかる。これはすなわち $f = 0$ a.e. であることを意味する。ただし、上の式変形には exercise 4.2 と同じ式変形を用いている。

次に $f = 0$ a.e. $\Rightarrow \|f\|_\infty = 0$ を確認する。仮定より任意に小さな非負実数 a について $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0$ があるので、 \inf の定義より $\|f\|_\infty = 0$ である。以上で非負値性が示された。

4.1.2 三角不等式

$\forall f, g \in L^\infty$, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \|f + g\|_\infty$ を示す。通常の絶対値に対する三角不等式から、 $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ である。従って、任意の非負実数 c について、

$$\{x \in X \mid |f(x) + g(x)| > c\} \subset \{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}$$

である。これより、

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x) + g(x)| > c\}) \leq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\})$$

である。なので、 $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0$ ならば必ず $\mu(\{x \in X \mid |f(x) + g(x)| > c\}) = 0$ である。これより、

$$\{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\} \subset \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x) + g(x)| > c\}) = 0\}$$

である。より広い範囲について \inf をとった時に \inf が元の集合に対するものよりも大きくなることはあり得ないので、

$$\inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\} \geq \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x) + g(x)| > c\}) = 0\} \quad (2)$$

ここで、仮に

$$\begin{aligned} & \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\} \\ & > \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\} \end{aligned}$$

であるとする、左辺よりも小さく右辺よりも大きい正の実数 a が必ず存在する。このような a に対して

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\}) > 0$$

である。 $|f(x)| + |g(x)| > a$ であるためには、一般性を失うことなく $|f(x)|$ が $\inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\}$ を上回っている必要がある。すなわち、

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\}\}) \geq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\})$$

であり、定義より左辺は 0 である、これより

$$0 \geq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > a\}) > 0$$

であり矛盾をきたす。従って

$$\begin{aligned} & \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| + |g(x)| > c\}) = 0\} \\ & \leq \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\} \end{aligned}$$

であることが示され、(2) と合わせて以下の三角不等式が成立することが確認できた。

$$\begin{aligned} & \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x) + g(x)| > c\}) = 0\} \\ & \leq \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > c\}) = 0\} + \inf \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |g(x)| > c\}) = 0\} \end{aligned}$$

4.1.3 同次性

$\forall r \in \mathbb{R}$ に対して $\|rf\|_\infty = |r|\|f\|_\infty$ を示す。左辺を定義に従って書き下すと、

$$\begin{aligned} \|rf\|_\infty &= \inf \{a \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |rf(x)| > a\}) = 0\} \\ &= \inf \left\{ a \geq 0 \mid \mu \left(\left\{ x \in X \mid |f(x)| > \frac{a}{|r|} \right\} \right) = 0 \right\} \\ &= |r| \inf \{a \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0\} \\ &= |r|\|f\|_\infty \end{aligned}$$

以上より同次性が示された。

4.2 $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \Leftrightarrow \exists E \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(E^c) = 0, \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ の証明

まず $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \exists E \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(E^c) = 0, \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ を示す。 E として以下の集合を考える。

$$E \equiv \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right\}$$

この E に対して、まず $\mu(E^c) = 0$ を確認する。 exercise 4.2 と同様の式変形より、

$$\begin{aligned} \mu(E^c) &= \mu \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m} \right\} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m} \right\} \right) \end{aligned}$$

であるので、任意の m について $\mu \left(\left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m} \right\} \right) = 0$ であることを確認すれば良い。 仮定より、

$$\forall m \geq 1, \exists N_m \text{ s.t. } n \geq N_m \Rightarrow \mu \left(\left\{ x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m} \right\} \right)$$

であるので、先の要件は確認された。

次に $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ を確認する。 まず、 E が以下のように変形できることに注意する。

$$\begin{aligned} E &= \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right\} \\ &= \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \right\} \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\} \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \forall n \geq j \right\} \end{aligned}$$

すなわち、 $x \in E$ の時、以下が必ず成立する。

$$\forall m \exists j \text{ s.t. } n \geq j \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

従って、 \sup の定義より以下が成立する。

$$\forall m \exists j \text{ s.t. } n \geq j \Rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}$$

これは収束の定義より $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ を意味するので題意は示された。

逆向きの関係を示す。 任意に $\epsilon > 0$ を取ると、 仮定より、

$$\exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

である。 同じ ϵ, N に対して、 $a \geq \epsilon$ のように実数 a を用意すると、 $n \geq N$ である n について、 \sup の定義より以下が成立する。

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\} \subset E^c$$

この時仮定より、 $\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) \leq \mu(E^c) = 0$ なので $\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) = 0$ であることがわかる。 以上の議論は以下のことを述べている。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n \geq N, a \geq \epsilon \Rightarrow a \in \{c \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > c\}) = 0\}$$

5 Ex4.10

6 Ex4.11

7 Ex4.16

8 Ex4.17