

# 測度論的確率論 2018 S1S2

## Homework 3

経済学研究科現代経済コース修士1年 / 池上 慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 5, 2018

### 1 Ex2.3

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

#### 1.1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$ を示す。

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$  である。なぜなら、

$$\forall (x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \quad a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \Rightarrow \exists n_1, n_2 \text{ s.t. } x \leq b_1 - \frac{1}{n_1}, y \leq b_2 - \frac{1}{n_2}$$

なので、 $N = \max(n_1, n_2)$  とおけば、 $\forall n \geq N \quad (x, y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$  となるので、 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$  である。

逆向きの包含関係も、任意に  $(x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 - \frac{1}{n}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{n}]$  をとると、ある  $N$  については必ず  $(x, y) \in (a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}]$  であるので、 $(a_1, b_1 - \frac{1}{N}] \times (a_2, b_2 - \frac{1}{N}] \subset (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$  であることから示される。

すなわち、 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$  は  $\mathcal{B}^2$  を生成する半開区間の可算和で表現できることがわかった。したがって、Borel sigma field の定義より  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in (\mathcal{B}^2)^2$  である。

ここで、「 $\mathbb{R}^2$  の任意の開集合は  $\mathbb{R}^2$  の開区間の可算和でかける (主張1)」とすると、sigma field の性質から  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$  の可算和で表現される任意の集合は  $(\mathcal{B}^2)^2$  に含まれているので、 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}^2$  が示された。

よって以下では (主張1) を証明する。to be written

#### 1.2 $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を示す。

まず、 $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$  を示す。左辺が右辺に含まれることは以下のように確認できる。任意に  $(x, y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$  をとると、

$$\forall n \geq 1 \quad \begin{cases} a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \\ a_2 < y < b_2 + \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad (x, y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n}) \Rightarrow (x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$$

である。

逆向きの包含関係は以下のように確認できる。任意に  $(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$  をとると、 $\forall n \geq 1 \quad (x, y) \in (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{n})$  である。この時、

$$a_1 < x < b_1 + \frac{1}{n} \Rightarrow a_1 < x \leq \inf \left( b_1 + \frac{1}{n} \right) \Rightarrow a_1 < x \leq b_1$$

である。 $y$  についても同様にできるので、 $(x, y) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$  であることがわかる。

これより、 $\mathcal{B}^2$  を生成する集合の要素は  $\mathbb{R}^2$  上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることがわかる。これはつまり、 $\mathcal{B}^2$  が  $\mathbb{R}^2$  上の開区間全体を含む最小の sigma field に含まれることを意味する。また、 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  を生成する開集合全体には明らかに  $\mathbb{R}^2$  上の開区間全体が含まれているため、 $\mathbb{R}^2$  上の開区間全体を含む最小の sigma field は  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  に含まれる。したがって  $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  である。

### 2 Ex2.5

両方向の包含関係が成立することを以下で示す。

## 2.1 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$

開集合  $A \subset X$  を任意にとる。まず、 $A \times Y$  が  $X \times Y$  の開集合であることを示す。

まず、直積空間  $X \times Y$  上に以下のように距離  $(d)$  が定義できる。

$$\text{let } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), \text{ where } x_1, y_1 \in X, x_2, y_2 \in Y \text{ then } d(x, y) \equiv d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

すなわち  $(X \times Y, d)$  は距離空間とできる。以下ではこの距離  $d$  について  $A \times Y$  が開集合であることを確認する。全体集合  $Y$  が開かつ閉集合であることより、 $(p, q) \in A \times Y$  について以下の二つが成立する。

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } \{x \in X \mid d_1(x, p) < \epsilon\} \subset A$$

$$\exists \eta > 0 \text{ s.t. } \{y \in Y \mid d_2(y, q) < \eta\} \subset Y$$

ここで、上の集合に含まれる  $(x, y)$  について、

$$d((x, y), (p, q)) = d_1(x, p) + d_2(y, q) < \epsilon + \eta$$

が成立する。従って、 $(p, q)$  を任意にとっても、 $\{(x, y) \in X \times Y \mid d((x, y), (p, q)) < \delta\}$  なる集合が  $\delta$  を十分小さくすることによって  $A \times Y$  に含まれることがわかる。これより  $A \times Y$  は開集合である。

これより Borel sigma field の定義から、 $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$  である。ここで、 $\mathcal{C} = \{A \subset X \mid A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)\}$  とする。先の議論より任意の開集合  $A \subset X$  について  $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$  であるので、 $\{X \text{ の開集合全体}\} \subset \mathcal{C}$  である。

また、 $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$  をとる。明らかに  $\bigcup_{i=1}^{\infty} c_i \times Y$  が開集合であり、 $\mathcal{B}(X \times Y)$  に含まれることから、 $\mathcal{C}$  は sigma field、それも  $X$  の開集合全体を含む sigma field である。Borel sigma field の定義より  $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$  である。

これより、 $A \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{C}$  なので、任意の  $A \in \mathcal{B}(X)$  について  $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$  である。 $Y$  上の開集合  $B$  についても同様の議論が適用できて、任意の  $B \in \mathcal{B}(Y)$  について  $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$  である。

従って、以下が成立する。

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), B \in \mathcal{B}(Y) \ A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$$

すなわち  $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$  である。

## 2.2 $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$

「 $X, Y$  が可分ならば  $X \times Y$  も可分（主張 2）」を所与とすると、以下のように証明できる。

任意に開集合  $A \times B \subset X \times Y$  をとる。開集合の定義より、任意の  $(x, y) \in A \times B$  について、距離  $d$  を用いた  $\epsilon$ -ball を  $B_{\epsilon}((x, y))$  と書くと以下が成立する。

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B_{\epsilon}((x, y)) \subset A \times B$$

ここで  $X \times Y$  について稠密な可算集合を  $D$  と書く。この時、任意の  $(x, y) \in A \times B$  について

$$(s, t)_{(x, y)} \in B_{\frac{\epsilon}{3}}((x, y)) \cap D \subset A \times B$$

が必ず取れる。ここで  $\epsilon_{(x, y)} = \frac{\epsilon}{2}$  とすると、

$$(x, y) \in B_{\epsilon_{(x, y)}}((s, t)_{(x, y)})$$

が必ず成立する。

つまり、 $A \times B$  の任意の要素は、 $D \cap (A \times B)$  の要素を中心として、それ自身も  $A \times B$  に含まれるような  $\epsilon$ -ball に入れることができる。今、 $\bigcup_{(s, t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$  を考える。ただしここで  $B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$  はそれ自身が  $A \times B$  に含まれるように取られている。先の議論より、 $A \times B \subset \bigcup_{(s, t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$  である。逆向きの包含関係については、 $\exists (s, t) \text{ s.t. } (x, y) \in B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$  の時、 $B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$  がもともと  $A \times B$  に含まれるように取られているので当然  $(x, y) \in A \times B$  であることから確認できる。

従って  $A \times B = \bigcup_{(s, t) \in D \cap (A \times B)} B_{\epsilon_{(s, t)}}((s, t))$  である。ここで、左辺は open ball の可算個の和集合となっている。 $X \times Y$  の任意の開集合は  $X \times Y$  上の open ball の可算個の和集合で表現できる。これは、

$$\mathcal{B}(X \times Y) \subset X \times Y \text{ の open ball が生成する最小の sigma field}$$

を意味する。

さらに、 $X \times Y$  の open ball 全体は、明らかに  $\{A' \times B' \mid A' \in \mathcal{B}(X), B' \in \mathcal{B}(Y)\}$  に含まれているので、

$$\mathcal{B}(X \times Y) \subset \sigma\left(\{A' \times B' \mid A' \in \mathcal{B}(X), B' \in \mathcal{B}(Y)\}\right) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$$

が成立する。

### 3 Ex2.6

前問後半と同様の議論により、開集合  $A \subset X$  に対して以下が成立する。

$$A = \bigcup_{s \in A \cap D} B_{\epsilon_s}(s)$$

これより、 $\mathcal{B}(X) \subset \sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\})$  である。open ball は必ず開集合なので、明らかに  $\sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}) \subset \mathcal{B}(X)$  であるので、 $\mathcal{B}(X) = \sigma(\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\})$  である。ここで、 $D$  が可算集合なので、 $\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\}$  は可算集合。また、明らかに  $\{B_{\epsilon_s}(s) \mid s \in D\} \subset \mathcal{B}(X)$  であるので、 $\mathcal{B}(X)$  は countably generated である。

### 4 Ex3.3

### 5 Ex3.4

### 6 Ex3.6

### 7 Ex3.15

### 8 Ex3.16