

Understanding Financial Crises

Ch3 : Intermediation and Crises 前半

Kei Ikegami

October 31, 2017

発表の流れ

1 introduction

2 Agents

- Market equilibrium
- Efficient solution

3 Banks

なにをするの？

- 3 章前半は 2 章でも用いたアイデアに基づいて銀行のモデル化をする。
- Bryant (1980), Diamond and Dybvig (1983) に依拠する。

問題の所在：覆水盆に返らず

- 自分が早く消費したい人なのか、まだ消費したくない人なのかかわからないうちにポートフォリオを決定しなくてはならない
- 早めに消費したくなった時のための投資分は、後から見ればより収益の大きな長期の資産に投じていればよかったなあって思う
- この時に人がどう動くかを見るよ

基本モデル

- $t = 0, 1, 2$ の 3 期間
- liquid asset (short) は今の財 1 単位を次期の財 1 単位に変換
- illiquid asset (long) は今の財 1 単位を 2 期後の財 R 単位に変換 ($R > 1$)
- agent は $t = 0$ で所与の財 1 単位から上記二つの asset からポートフォリオ (y, x) を構成
- agent のタイプは early($t = 1$ で消費) と late($t = 2$ で消費) の二つで、 $t = 1$ に判明する
- early と late は割合 $(\lambda, 1 - \lambda)$ で、これは個人が各タイプになる確率と等しい

Autarky : 覆水盆に返らない

- Ch2 で扱った状況
- $(c_1, c_2) = (y, y + R(1 - y))$, where $0 \leq y \leq 1$

Market equilibrium : 覆水盆に戻る

- $t = 0$ で t 余分を買ってしまった long や short を売買できる市場が $t = 1$ に開かれているケース
- 完全市場を想定（価格 p でいくらでも売買できる）
- $c_1 = y + px$
- $c_2 = (x + \frac{y}{p})R$
- 均衡では $p = 1$ なので $(c_1, c_2) = (1, R)$ を得る。

なんで $p = 1$?

- $p > 1$ $t = 0$ で short 買うよりも long を買って $t = 1$ で売る方が儲かる。ゆえに誰も short を買わず、 $t = 1$ の市場では誰も long を欲しがらないため $p = 0$ となり矛盾
- $p < 1$ $t = 0$ で short 買って $t = 1$ で市場を通して long を得た方が $t = 0$ で long 買うよりもいい。なので $t = 0$ で誰も long を買わず、 $t = 1$ の市場で long の供給が行われない。 $p = R$ ならばグロスのリターンが 1 となり売買が起こるが $R > 1$ なので矛盾

Autarky \prec Market, しかし...

- Fig 3.1. より、Market が存在する時の消費計画は Autarky の時よりも期待効用を大きくする（右上にあるので）
- しかし Market equilibrium は"inefficient"
- ここで"inefficient" は、「各人の type も含め全ての情報を持つ社会計画者によって達成される期待効用の水準以下の水準しか達成できない」ことを意味

Social planner : 覆水しそうなやつは水少なめにしといたから

- 今までとはモデルの解釈が違うので注意
- こいつにとってポートフォリオ (x, y) は社会全体で購入される long と short の総量
- 1 期の消費は c_1 ずつ割合 λ 人が消費するので、消費総量は λc_1
- 2 期の消費は c_2 ずつ割合 $1 - \lambda$ 人が消費するので、消費総量は $(1 - \lambda)c_2$
- 各期で消費量が財の供給量を上まらわないように
$$\lambda c_1 \leq y, (1 - \lambda)c_2 \leq Rx + (y - \lambda c_1)$$

Social planner : 覆水しそうなやつは水少なめにしといたから

目的関数は社会全体の期待効用の最大化（結果的に個人についての最適化と同じになる）。先の制約を合わせて社会計画者は以下の問題を解く。

社会計画者の問題

$$\begin{aligned} & \max_{c_1, c_2} \lambda U(c_1) + (1 - \lambda) U(c_2) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda c_1 \leq y \\ \lambda c_1 + (1 - \lambda) c_2 \leq Rx + y \end{cases} \end{aligned}$$

Social planner : 覆水しそうなやつは水少なめにしといたから

- $\lambda c_1 < y$ では効用最大化できないことを考えると、解は $(c_1, c_2) = (\frac{y}{\lambda}, \frac{R(1-y)}{1-\lambda})$
- お絵描きすると特殊な場合を除いて market equilibrium がこの問題の解とならないことがわかる（板書）

Social planner : 覆水しそうなやつは水少なめにしといたから

- $c_1 > 1$ となる状況を liquidity insurance と呼ぶ
- これは消費量の少ない early になるのが嫌すぎて、たとえ early になってもちょっと多めに消費を行えるように late になった時の消費量を犠牲にすることを意味
- liquidity insurance が発生する必要十分条件は $U'(1) > RU'(R)$
- 十分条件は $\eta(c) = -\frac{cU''(c)}{U'(c)} > 1 \quad \forall c$

Contingent market : 器さえ持てればあとで調整するわ

- 社会計画者が存在する時の効率的な資源配分は、 $t = 1$ で判明したタイプごとに各期の消費量を保証してくれる権利を売買する市場が $t = 0$ に存在すれば放任して市場に任せても実現できる

Contingent market : 器さえ持てればあとで調整するわ

- $t = 0$ における予算制約を与えるために以下を考える
- 確率 λ で 1 期に c_1 だけ欲しがる
- ということは 1 期に欲しがる期待消費は λc_1
- 1 期に 1 単位の消費を保証する権利の $t = 0$ における市場での価格は q_1
- 以上より c_1 の $t = 0$ における現在価値は $q_1 \lambda c_1$

Contingent market : 器さえ持てればあとで調整するわ

- 確率 $(1 - \lambda)$ で 2 期に c_2 を欲しが
- ということは 2 期に欲しが
- $t = 1$ の市場では long を価格 P で買える。これが 2 期には R となるので、1 期から 2 期にかけてのグロスのリターンは $\frac{R}{P}$
- よって、 $t = 1$ における価値は $\frac{(1-\lambda)c_2}{\frac{R}{P}} = \frac{P}{R}(1 - \lambda)c_2 = s(1 - \lambda)c_2$
- 2 期に 1 単位の消費を保証する権利の $t = 0$ における市場での価格は q_2
- 以上より c_2 の $t = 0$ における現在価値は $q_2s(1 - \lambda)c_2$

Contingent market : 器さえ持てればあとで調整するわ

- $t = 0$ においては所与の財 1 単位しか持っていない
- 以上より権利市場での買い物は $q_1 \lambda c_1 + q_2 s(1 - \lambda) c_2 \leq 1$ を満たす

Contingent market : 器さえ持てればあとで調整するわ

目的関数は個人の期待効用。先の制約の中で効用最大化を行うので、agent の問題は以下のようにかける。

Contingent market における agent の問題

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2} & \lambda U(c_1) + (1 - \lambda)U(c_2) \\ \text{s.t.} & q_1 \lambda c_1 + q_2 s(1 - \lambda)c_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Contingent market : 器さえ持てればあとで調整するわ

- FOC は $\frac{U'(c_1)}{U'(c_2)} = \frac{q_1}{q_2 s}$
- $t = 0$ で asset に投資したほうが儲かる、または contingent claim をしたほうが儲かるという状況が起こらないような条件 (no-arbitrage condition) を考えると、 $q_1 = 1, q_2 s = \frac{1}{R}$
- したがって FOC は $U'(c_1) = R U'(c_2)$ と書き直せる
- これは社会計画者のいる時と同じリスクシェアリングが起こることを意味

銀行の行動

- 銀行が存在した時にも同じく効率的な資源配分が達成できることを示す
- $t = 0$ に銀行は agent に対して以下の契約をオファーする

銀行のオファー

財 1 単位を俺に預けてくれ。そしたらお前に $t = 1$ で c_1 、 $t = 2$ で c_2 のどちらか一回だけ引き出せる権利をくれてやる。

銀行の行動

- depositor の期待利得を最大化する銀行が全ての顧客を獲得する
- 銀行が完全な競争状態にあれば全銀行は顧客の期待効用最大化の結果でオファーを決める
- 銀行が直面する制約は社会計画者と同じく、 $x + y \leq 1$, $\lambda c_1 \leq y$, $(1 - \lambda)c_2 \leq Rx$ の3つ
- よって銀行は社会計画者と同じ問題を解く
- 違いは銀行が agent のタイプまでを考慮に入れてオファーができないという点 (type は private information)

Incentive compativity

- early が early としての行動 ($t = 1$ に c_1 を引き出す) を取り、late が late としての行動 ($t = 2$ に c_2 を引き出す) を取るような消費計画 (c_1, c_2) を誘引両立性を持つという
- 社会計画者の問題における FOC は $U'(c_1) = RU'(c_2)$
- $R > 1$, $U''(\cdot) < 0$ より解として得られる消費計画のオフアーは $c_1 \leq c_2$ を満たす

Incentive compativity

- early が late であると嘘をつくメリットは明らかにない
- late が early であると嘘をつきたいのは、 $t = 1$ で c_1 を引き出して short で運用し $t = 2$ に消費する方が $t = 2$ で c_2 を引き出して消費するよりもたくさん消費できる時
- $c_1 \leq c_2$ よりこれは起こりえない
- よって銀行がオファーする deposit 計画は誘引両立性を持つ
- 銀行は社会計画者が達成できる効率的な資源配分を達成できる