

# Empirical Test on Pure Strategy Nash Equilibrium : Entry Game Case

池上 慧

2017 年 12 月 29 日

## 概要

実証研究で広く用いられる完備情報参入ゲームを用いて、実験環境外のデータから現実の企業の意思決定において混合戦略ナッシュ均衡がプレイされているかを統計的に検定する手法を提案する。これは Battle of Sexes における混合戦略のように不安定な均衡はプレイされないというゲーム理論の予測について検証する手法であると同時に、多くの場合純粋戦略ナッシュ均衡のプレイを仮定し分析を進める実証産業組織論の基幹部分についてのテストでもある。提案された手法は、スポーツやゲームといった限定的な状況に限らず、利得構造についても統計的に推定しなくてはならない場合においても簡単な特定化のテストでゲーム理論に関する実証研究を行うことができるという点で有益なものである。

## 1 Introduction

データの拡充と推定手法の開発、そしてそれを可能にする計算環境の実現に伴い戦略的状況を扱った実証分析は近年大きく進展している分野である。静学ゲームでは例えば [4] で行われた寡占市場の分析や [5],[21],[20] の参入の分析、[6] による社会的相互作用モデルを用いた peer effect の分析などが戦略的状況を扱った代表的な研究である。また動学ゲームにおいても、[18] で開発された参入退出ゲームと [1] や [3] で開発された推定手法を用いて [9] や [19] など動学的な要素を考慮した戦略的意思決定の実証が行われている。

こういった戦略的な状況の分析の基盤は現実のデータがある種の均衡状態から生み出されたものであるという構造を仮定することにある。静学ゲームでは完備情報下では純粋戦略ナッシュ均衡、不完備情報下であれば純粋戦略ベイジアンナッシュ均衡がプレイされているとしてモデルのパラメータを推定する。動学ゲームにおいても同様にマルコフ完全均衡がプレイされているという仮定の下でモデルのパラメータを推定する。

しかし現実にはモデルの予測するある種の均衡が必ずしもプレイされるわけではないということが実験を通して明らかにされてきた。そもそもナッシュ均衡の各種精緻化概念も現実をよりよく説明するために生み出されてきたものであるが、ホニャやホゲが提案した認知階層モデルや level-k モデルなどの限定合理性モデルも既存の均衡では予測できない実験データを説明するために作られたモデルである。こういったモデルの正当性は実験データをどれだけ説明できるかという基準で検証されるが、それはそのモデル自体の正当性ではなく、他のモデルと比しての妥当性に過ぎない。また、[11] が指摘したようにデータへのフィットという観点でモデルの妥当性を図ることは正当性がない場合も存在する。

このようにモデルや均衡概念自体への検証というトピックは実験データを用いた場合にすら厳密な蓄積が少ないが、現実のデータを用いる場合にはほとんど研究の蓄積がない。[7] はサッカーのペナルティキックにおける混合戦略ナッシュ均衡の実証を行い、[17] はスウェーデンで実際に行われたゲームを用いて実験的状況下でないデータから均衡概念のチェックを行っている。こういった研究においても扱われる事象は極めて限定的かつ特殊なものであり、社会で広く観察される現象に対する均衡概念の検証はほとんど行われていない。この困難は研究者には観測できない変数の存在や異質性の問題、そしてそもそも利得が観測できずそれ自体が推定する対象であるパラメータであるという事実などによると考えられる。

本研究では広く観察される市場参入という現象に対して、戦略的状況の分析で一般に仮定される純粋戦略ナッシュ均衡を仮説検定によって検証する手法を提案する。モデルは [5] で提案された完備情報参入ゲームを用いる。本論は以下のように進む。2 章では関連する研究として [17] と [7] をレビューし、均衡に対する検証がなぜ困難かを整理する。3 章では主要な結果を述べる。その際にモデルの説明、純粋戦略がとられていない場合の推定手法、純粋戦略ナッシュ均衡への検定という順番で進む。4 章では結語としてより包括的な枠組みの可能性を述べる。

## 2 Literatures

[7] はゲーム理論の予測の統計的な検証を実験環境外のデータを用いて行った稀有な研究である。具体的にはサッカーのプロリーグにおけるペナルティキックでキッカーとキーパーのとった行動のデータを用いて、同時手番としてプレイされているかの検証と混合戦略がプレイされているかの検証を行っている。手番の検証は自身の行動を相手の行動に回帰した時の係数の有意性により判断し、混合戦略に関しては実際の得失点を特定の行動に回帰した時の係数の有意性により判断している。結果としては同時手番という仮説は棄却されず、混合戦略をプレイしているという仮説も棄却されなかったため、実験環境外の戦略的状況下で混合戦略ナッシュ均衡がプレイされるということの証拠となった。しかしペナルティキックという限定的な事象に対する実証であることや、ナッシュ均衡が混合戦略でただ一つ存在する単純なゼロサムゲームについての分析であるということから、現実を観察される多様な経済現象を分析できる手法ではない。本論文で扱う参入ゲームは幅広い産業分野実証が重ねられてきた領域であり、利得構造もゼロサムではないより広範な利得構造を表現できる。

[17] はスウェーデンで実際に行われたくじを用いるゲームでの行動データからナッシュ均衡やその他の限定合理的なモデルの予測能力を検証したものである。実施されたのは LUPI と呼ばれるゲームであり、参加者は 1 から 99999 の間から好きな整数を選び、ただ一人にのみ選ばれた数字のうちで最も小さい数字を選んだプレイヤーが勝利者となり賞金を受け取るというゲームであった。筆者はこれを [15],[16] にしたがってポワソンゲームとして定式化し、ポワソンゲームのナッシュ均衡では実際の行動データが説明できないこと、そして限定合理性のモデルである認知階層モデルでは実データの分散をよく説明できることを示した。しかし先にも述べたようにデータへのフィットの良さを裏付けとしてナッシュ均衡をはじめとしたモデルや構造を正当化することには懸念がある。ポワソンゲームにおける均衡は計算で求めることができるため、ナッシュ均衡とのフィットは一定の妥当性を持つことが想定されるが、認知階層モデルや level-k といったモデルはその予測がデータと良くフィットするように、パラメータの値や階層の分布、level-0 の割合などが様々に特定化されている。これらを考慮した時、ある種のフィットの良さ以外にモデルや特定化のテストをする枠組みがゲームの構造に対しても必要であると考ええる。

[17] で引用されている Robert Aumann の言葉にある通り、戦略的な状況を記述し分析するためにはそのゲームが厳格なルールを持っている必要がある。特に均衡概念を検証するという目的のためにはこれが重要であり、そのため利得がコントロールされ、均衡での挙動を計算できる [17] のようなゲーム的状況や [7] で扱われたスポーツ、データの集積も盛んで厳密なルールが参加者にも徹底されるオークションなどの限定的な状況しか検証に用いることができない。しかし一般に実証研究の対象となる経済事象はそのような理想的な状況ではなく、情報構造や利得の構造、さらに手番に関しても研究者にとっては不確実なものである。以下で扱う参入ゲームもその例外ではなく、実証に用いられるモデルは様々に特定化されている。

その特定化の一つとして純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされているという仮定が置かれる。これは実現した結果についてプレイヤーが両者ともに別の行動をとればよかったと後悔することがないということを意味するが、支配戦略が存在しない場合においては強すぎる仮定である。通常のゲーム理論の文脈では参入ゲームにおける混合戦略ナッシュ均衡は安定でない均衡であるために予測としては用いられないが、実データにおいても何らかの理由で不安定な均衡が排除されているかを検証するという意味においても、純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされるという仮定を検証する枠組みを提示することには意義がある。

## 3 Model and Equilibrium

### 3.1 Toy Model

以下の利得表を持つ参入ゲームを考える。ここで、 $\theta_\mu$  は一社のみ参入することができた時に得られ利得であり、 $\theta_\delta$  は二社が参入してしまった時の利得減少分を表すパラメータである。 $\theta_\delta$  は以下で競争効果と呼ぶ。 $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  はプレイヤー同士では観測可能だが研究者には観測できない利得であり、標準正規分布に従うとする。この確率変数は各市場ごとに每期生成される、つまりデータとして得られる市場ではそれぞれプレイヤーは異なる利得表のゲームをプレイしていることに注意する。以下「参入しない」を 0、「参入する」を 1 で表記する。

表 1 Toy model 利得表

		Player 2	
		参加しない	参加する
Player 1	参加しない	$(0, 0)$	$(0, \theta_\mu + \epsilon_2)$
	参加する	$(\theta_\mu + \epsilon_1, 0)$	$(\theta_\mu + \theta_\delta + \epsilon_1, \theta_\mu + \theta_\delta + \epsilon_2)$

プレイヤーは合理的であるとし、支配戦略がある時はその戦略をとることができるとする。例えばプレイヤー 1 については、

$$\begin{cases} \Pr(\text{player 1 takes 0}) = 1 & \text{if } \epsilon_1 < -\theta_\mu \\ \Pr(\text{player 1 takes 1}) = 1 & \text{if } \epsilon_1 > -\theta_\mu - \theta_\delta \end{cases}$$

である。

また、支配戦略を用いて行動の逐次削除もできるとする。すなわち、相手にとって支配戦略が存在する時はその事実を用いて自身の行動について被支配戦略を削除することで行動を確定させることができる。例えばプレイヤー 1 について  $-\theta_\mu < \epsilon_1 < -\theta_\mu - \theta_\delta$  の時、

$$\begin{cases} \Pr(\text{player 1 takes 0}) = 1 & \text{if } \epsilon_2 > -\theta_\mu - \theta_\delta \\ \Pr(\text{player 1 takes 1}) = 1 & \text{if } \epsilon_2 < -\theta_\mu \end{cases}$$

以上の仮定は Second Order Rationality と呼ばれる仮定であり、以降 SOR と呼称する。SOR の下でプレイヤーの行動が確定しないのは  $\{(\epsilon_1, \epsilon_2) \mid -\theta_\mu < \epsilon_1 < -\theta_\mu - \theta_\delta \wedge -\theta_\mu < \epsilon_2 < -\theta_\mu - \theta_\delta\}$  のみである。この領域（以下 ☆）における純粋戦略ナッシュ均衡は  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  の二つである。

☆ においては  $x$  をプレイヤー 1 の参加しない確率、 $y$  をプレイヤー 2 の参加しない確率とした時に  $(x, y) = \left(\frac{\theta_\mu + \theta_\delta + \nu_2}{\theta_\delta}, \frac{\theta_\mu + \theta_\delta + \nu_1}{\theta_\delta}\right)$  が混合戦略ナッシュ均衡として存在する。☆ において混合戦略がプレイされることは  $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \star$  でも一定の確率で  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$  が実現してしまうことを意味する。よって推定の際にはこの  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$  が実現する割合の歪みを適切に処理することが必要である。

### 3.2 General Model

上記の単純なモデルを [21] のようにプレイヤーとマーケットの性質によって利得が変化し、競争効果もプレイヤーによって異なる一般のモデルへと拡張する。データは  $M$  市場について  $T$  期分得られているとする。市場  $m \in \{1, \dots, M\}$  におけるプレイヤー  $i \in \{1, 2\}$  の利得に関わる  $K$  個の変数をまとめて  $\mathbf{x}_{m,i}$  の確率ベクトルで表記する。これを用いてプレイヤー  $i$  の利得  $(u_i)$  は以下のように欠ける。

$$u_i = \mathbf{x}_{m,i}' \beta_i + \delta_i \mathbf{1}[y_{-i} = 1] + \epsilon_i$$

ここで  $\mathbf{1}[y_{-i} = 1]$  は相手プレイヤーが参加することの指示関数であり、 $\delta_i$  はプレイヤー  $i$  の競争効果、 $\epsilon_i$  は標準正規分布に従う研究者には観測不可能な確率的な効用である。これを用いて市場  $m$  における利得表は以下のように書くことができる。

表 2 general model 利得表

		Player 2	
		参加しない	参加する
Player 1	参加しない	$(0, 0)$	$(0, \mathbf{x}_{m,2}' \beta_2 + \epsilon_2)$
	参加する	$(\mathbf{x}_{m,1}' \beta_1 + \epsilon_1, 0)$	$(\mathbf{x}_{m,1}' \beta_1 + \delta_1 + \epsilon_1, \mathbf{x}_{m,2}' \beta_2 + \delta_2 + \epsilon_2)$

toy model と同様に SOR の仮定を置くと、市場  $m$  ごとの ☆ <sub>$m$</sub>  で  $(x, y) = \left(\frac{(\mathbf{x}_{m,1}' \beta_1 + \delta_1 + \epsilon_2)}{\delta_1}, \frac{(\mathbf{x}_{m,2}' \beta_2 + \delta_2 + \epsilon_1)}{\delta_2}\right)$  を混合戦略ナッシュ均衡として持つ。

## 4 Inference and Hypothesis Test

一般のモデルにおけるパラメータの推定量として以下の2種類を与える。一つ目は純粋戦略ナッシュ均衡の仮定（以下 pure strategy Nash equilibrium を略して PN と呼称する）の下で一致性を持つ推定量である。すなわち  $\star_m$  においては必ず  $(0, 1), (1, 0)$  のどちらかが実現するという仮定の下での推定量であり、ここでは [5] において考案された複数均衡に対して頑健な参入企業数を結果変数として用いた最尤推定量を紹介する。この推定量を以下 PN 推定量と呼ぶ。二つ目は  $\star_m$  において純粋戦略ナッシュ均衡と混合戦略ナッシュ均衡がどのような割合で実現していてもパラメータを一致推定できる頑健な推定量を与える。これを以下では Robust 推定量と呼ぶ。

それぞれの推定量についてデータの種類のに応じて二つの推定方法を与える。まず想定するデータセットは、 $M$  市場に関して  $T$  期分の2社についての参入結果がデータとして得られている理想的な状況を想定したものである。しかし、[8] で扱われるような企業参入に関するデータは  $M$  市場について1回の参入結果がデータとして得られている場合が多い。また、仮に  $M$  市場についてそれぞれ複数期の参入結果が得られたとしても、研究者には観測不可能な効用が各回で独立に発生するケースは想定しにくい。同じ市場について複数回の参入結果が得られているのであればその結果は系列相関を持つはずであり、ここで想定するように同じ市場について参入企業数の十分な分散を保証してくれる可能性は低い。そこで二つ目のデータセットとして  $M$  市場について一回だけ参入結果が得られている状況を想定する。

### 4.1 PN 推定量

純粋戦略を仮定した時、 $\star_m$  においては複数の均衡が存在するので単純にプレイヤーの参入結果を結果変数に用いると、すべての事象の実現確率を足すと1を超えてしまうため適切な尤度を構成できない。しかし、 $\star_m$  において二つある純粋戦略ナッシュ均衡の結果がどちらも1社のみ参入するという結果であることを利用して、参入した企業数を結果変数とした Bivariate Probit を行うことでパラメータが推定できる。

#### 4.1.1 M 市場 T 期データ

市場  $m$  に着目する。 $t_2^m$  を2社がどちらも参入した回数、 $t_0^m$  をどちらも参入しなかった回数とする。企業  $i$  について参入することが支配戦略となる確率と参入しないことが支配戦略となる確率とをそれぞれ  $(q_i^1, q_i^0)$  で表記する。これは  $\phi(\cdot)$ ,  $\Phi(\cdot)$  をそれぞれ標準正規分布の確率密度関数、確率分布関数とした時以下のように書ける。

$$\begin{cases} q_i^1 = \int_{-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i - \delta_i}^{\infty} \phi(\epsilon_i) d\epsilon_i = \Phi(\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i) \\ q_i^0 = \int_{-\infty}^{-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i} \phi(\epsilon_i) d\epsilon_i = \Phi(-\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i) \end{cases}$$

従って市場  $m$  におけるデータを  $D^m$ 、パラメータの組を  $\theta$  で表記すると対数尤度は以下のようなものである。またこれによって得た推定量を  $\theta^P$  で表記する。

$$\sum_{m=1}^M g(D^m | \theta)$$

$$\text{where } g(D^m | \theta) = t_2^m \log(q_1^1 q_2^1) + t_0^m \log(q_1^0 q_2^0) + (T - t_2^m - t_0^m) \log(1 - q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

#### 4.1.2 M 市場データ

市場  $m$  に着目する。実現した参入企業数を  $n_m \in \{0, 1, 2\}$  で表記すると、尤度は以下のように書ける。

$$\sum_{m=1}^M h(D^m | \theta)$$

$$\text{where } h(D^m | \theta) = \mathbf{1}[n_m = 2] \log(q_1^1 q_2^1) + \mathbf{1}[n_m = 0] \log(q_1^0 q_2^0) + \mathbf{1}[n_m = 1] \log(1 - q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

これよりパラメータの最尤推定量を得る。この推定量を以下  $\theta_r^P$  と表記する。

## 4.2 Robust 推定量

Robust 推定量の構成には、一定の条件の下で各市場において企業が2社ともに参入する確率と企業が1社も参入しない確率との差が  $\star_m$  における均衡選択の仮定によらず一定であることを利用する。

### 4.2.1 M 市場 T 期データ

$\star_m$  における均衡選択メカニズムとして、 $w \in [0, 1]$  の確率で混合戦略ナッシュ均衡が実現するとする。例えば先のPNの仮定は  $w = 0$  の場合であると言える。またこのメカニズムに以下の仮定を置く。

仮定 1: uniform equilibrium selection mechanism  $w$  は  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  に依存しない。

ここで1社も参入しない確率と両者ともに参入する確率との差を  $\alpha(w)$  と書くと、

$$\alpha(w) = w \left\{ G_1 G_2 \left( 1 + \frac{\mathbf{x}'_{m,1} \beta_1}{\delta_1} + \frac{\mathbf{x}'_{m,2} \beta_2}{\delta_2} \right) + \frac{G_1 g_2}{\delta_2} + \frac{G_2 g_1}{\delta_1} \right\}$$

ただし、

$$\begin{cases} G_i = \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \\ g_i = \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \end{cases}$$

である。証明は Appendix に載せる。

この時以下の二つが成立する。

主張 1  $|\alpha(w)|$  は  $w$  についての増加関数である。

主張 2  $\forall i \in \{1, 2\}$  で  $\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i$  が十分に大きいならば  $\alpha(1)$  を十分 0 に近づけることができる。

主張 1 は明らかである。主張 2 については以下の図 1 より確認できる。

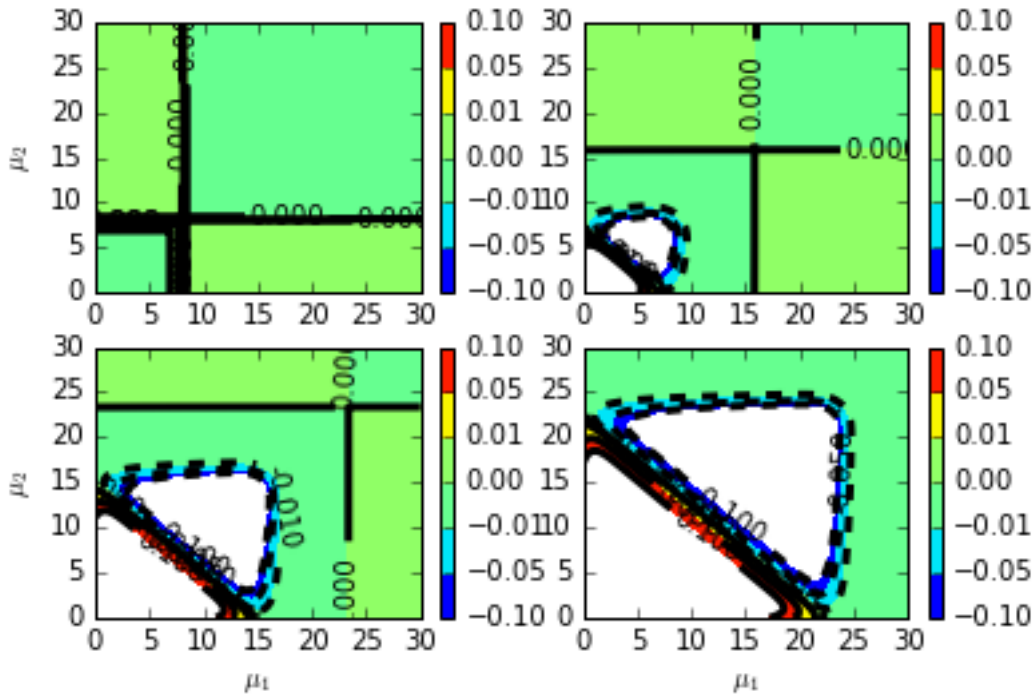


図 1 頑健性 左上から順に  $\delta = -0.01, \delta = -7.4, \delta = -15, \delta = -22.5$  の時の等高線

図 1 は  $\mu_i = \mathbf{x}'_{m,i} \beta_i$  として、 $\delta = \delta_1 = \delta_2$  という対称性の仮定の下で各  $(\mu_1, \mu_2, \delta)$  に対して  $\alpha(1)$  の値を出力し、 $\delta$  の値ごとに等高線で表示したものである。図 1 からわかるように  $\mu_i + \delta$  が両プレイヤーにとって十分大きい領域では  $\alpha(1)$

が十分小さくなっている。すなわちパラメータとサンプルにこの性質を満たすという仮定を置くと、 $\alpha(1)$  は図 2 の②と①の領域の差分と等しいことを意味する。また  $\delta_i$  についての対称性の仮定を緩めてもこれは同じように成立する。

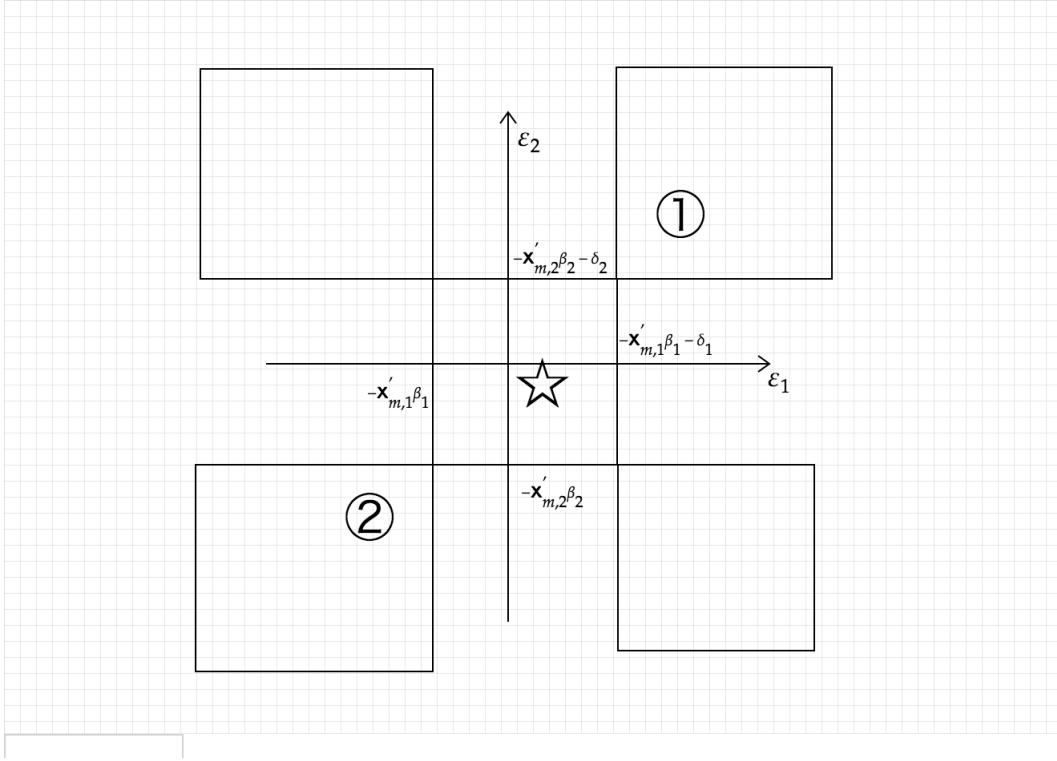


図 2 均衡の分布

さらに主張 1 より  $\alpha(1)$  が十分 0 に近い領域のパラメータセットにおいては他のいかなる  $w \in [0, 1]$  においても十分 0 に近いことがわかる。従って「 $\forall i \in \{1, 2\}$  で  $\mathbf{x}'_{m,i}\beta_i + \delta_i$  が十分に大きい」という仮定の下では、 $\star_m$  においていかなる均衡選択メカニズムが存在しようと、「1 社も参入しない確率と両者ともに参入する確率との差分は図 3 の②と①の領域の差分と等しい」というモーメント条件を用いてパラメータの推定を行うことができる。

以上の議論より Robust 推定量 ( $\theta^R$ ) は以下のように定義される。ただし、 $p_2^m$  は市場  $m$  において 2 社が共に参入する確率であり、 $\hat{p}_2^m$  は  $T$  期のデータからその確率を推定したものである。すなわち  $n_m^t$  を市場  $m$  の  $t$  期目で参入した企業数として  $\hat{p}_2^m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}[n_m^t = 2]$  である。 $p_0^m$  と  $\hat{p}_0^m$  についても同様に定義される。

$$\theta^R = \arg \min_{\theta} \sum_{m=1}^M r(\hat{p}^m; \theta)^2$$

$$\text{where } r(\hat{p}^m; \theta) = (\hat{p}_2^m - \hat{p}_1^m) - (q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

識別に関しては以下が成立する。

**主張 3** [21] の除外制約の下で Robust 推定量 ( $\theta^R$ ) は識別可能である。

証明は Appendix に記す。

#### 4.2.2 M 市場データ

市場  $m$  に関して一回分のデータしか得られていない状況を考える。Robust 推定量の構成に必要なのは各市場ごとの  $p_2^m, p_0^m$  である。 $p_2^m, p_0^m$  は説明変数の値に依存する関数であることから、多項ロジットで当該関数を推定し、それによって得られる  $\hat{p}_2^m, \hat{p}_0^m$  の予測値を利用することで先と同様の非線形最小二乗推定量を得ることができる。以下これを  $\theta_r^R$  と表記する。

多項ロジットによって得た  $p_2^m, p_0^m$  の推定値を  $\tilde{p}_2^m, \tilde{p}_1^m$  と表記する。図 3 はサンプルデータを用いて実際に推定した  $\tilde{p}_0^m - \tilde{p}_2^m$  を縦軸に、横軸には同じデータセットから推定した  $\hat{p}_2^m - \hat{p}_1^m$  をとった散布図である。多項ロジットによって差

分がよく推定されていることがわかる。

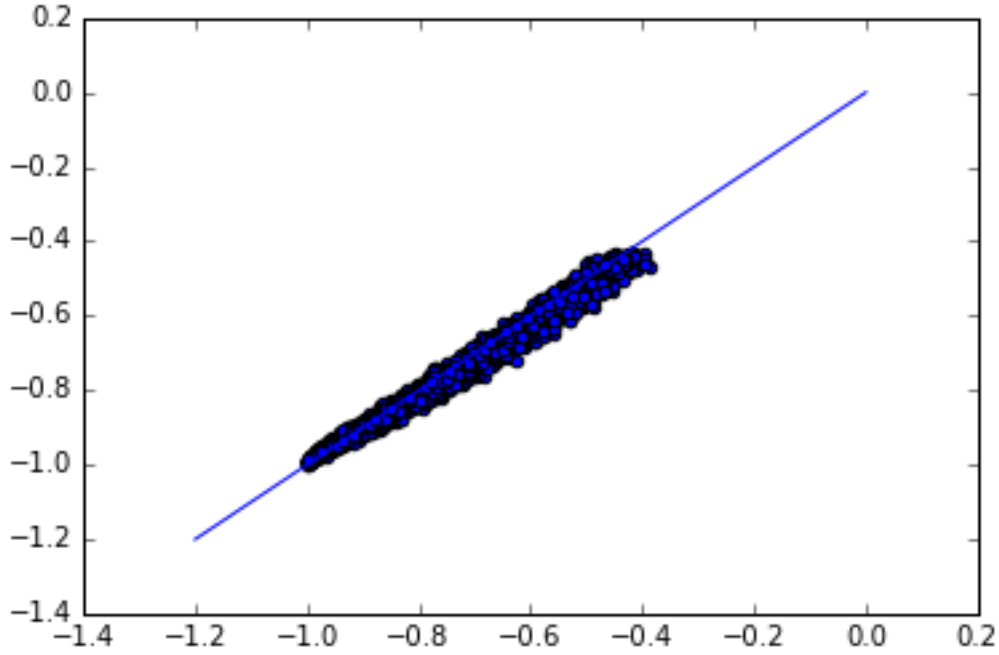


図3 多項ロジットによる差分の予測 直線は  $\tilde{p}_0^m - \tilde{p}_2^m = \hat{p}_2^m - \hat{p}_1^m$

### 4.3 Hypothesis Test

前章で述べた頑健な推定量を用いてハウスマン検定により純粋戦略ナッシュ均衡の仮定に対する仮説検定を行うことを考える。ただし、通常のハウスマン検定では有効推定量を用いるのに対し、[21] で述べられたように PN 推定量は有効推定量ではない。従って非有効推定量同士を用いたハウスマン検定を考える必要があることに注意する。

まず  $M$  市場  $T$  期のデータがある状況に対するハウスマン検定統計量を与える。パラメータの真の値を  $\theta^0$  で表記すると先の2つの推定量について漸近分布は以下で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sqrt{M}(\theta^P - \theta^0) \\ \sqrt{M}(\theta^R - \theta^0) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right)$$

ここで  $r(\theta) = \frac{1}{M} \sum_m r(p^m; \theta)$  として  $R(\theta) = \frac{dr}{d\theta'}$  と置く。このとき、以下の二つの行列を用いることで漸近分散を  $ASA'$  と表すことができる。

$$S = \text{Var} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_m \nabla_{\theta} g(D^m | \theta^0) \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_m r(p^m | \theta^0) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -E[\nabla_{\theta\theta'} g(D^m | \theta^0)]^{-1} & 0 \\ 0 & -(R(\theta^0)' R(\theta^0))^{-1} R(\theta^0)' \end{pmatrix}$$

ここで純粋戦略ナッシュ均衡に対するハウスマン検定統計量  $H$  は  $q = \sqrt{M}(\theta^P - \theta^R)$  と置いたとき以下で定義される。

$$H = q' \left( \text{Avar}(\hat{q}) \right)^{-1} q$$

ただし  $\text{Avar}(\hat{q})$  は  $q$  の分散共分散行列の推定値であり、デルタメソッドより以下のように求められる。

$$\text{Avar}(\hat{q}) = \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} - \hat{A}_{21} + \hat{A}_{22}$$

表 3 推定結果とハウスマン検定統計量

	(1)	(2)	(3)	(4)
$\beta_1$	0.755	0.828	0.737	0.840
$\beta_2$	-0.450	-0.509	-0.443	-0.519
$\delta$	-0.160	-0.287	-0.092	-0.268
H	1.67554251e+12	1.34516286e+10		

<sup>a</sup> (1) は  $M$  市場  $T$  期のデータを用いた PN 推定量、(2) は  $M$  市場  $T$  期のデータを用いた Robust 推定量、(3) は  $M$  市場のデータを用いた PN 推定量、(4) は  $M$  市場のデータを用いた Robust 推定量である。

<sup>b</sup>  $H$  はハウスマン検定統計量であり、帰無仮説の下で自由度 2 の  $\chi^2$  分布に従う。

<sup>c</sup> サンプルは Robust 推定量の仮定を満たすものを用いた。

ここで  $(\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}, \hat{A}_{21}, \hat{A}_{22})$  は各要素のサンプルからの推定値である。帰無仮説は「 $\star_m$  で純粋戦略ナッシュ均衡が常に実現する」であり、帰無仮説の下で  $H$  は自由度  $2K+2$  の  $\chi^2$  分布に従う。これを利用し有意水準 5% の仮説検定を行うことができる。

次に  $M$  市場について 1 回分の参入結果しかない場合のハウスマン検定統計量を与える。上で述べた理想的なデータセットにおける尤度関数  $g$  を  $h$  に変え、さらに Robust 推定量における  $p_2^m - p_1^m$  を  $p_0^m - p_2^m$  に置き換えることで得られるため詳細は省略する。

## 5 Monte Carlo Simulation

サンプルデータを用いて上記の推定を行い、ハウスマン検定統計量を計算する。サンプルデータは説明変数として市場ごとの人口、企業ごとの利益を左右する変数として工場からの距離をそれぞれの企業について用意した。すなわち  $\mathbf{x}'_{m,i} = (pop_m, dist_{m,i})$  である。3 つの変数は独立な標準正規分布からのサンプルである。単純化のために企業間で係数は等しいとして、 $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$  とする。

真のパラメータの値を  $\theta^{0'} = (\beta^{0'}, \delta) = (0.8, -0.5, -0.25)$  とし、 $w = 1$  の時のサンプルデータを 30000 市場について 1000 期作成した。 $M$  市場のみのデータセットに関しては各市場の経験分布から実現した参入企業数を得た。このサンプルデータを用いて上記の推定を行い各データセットにおいてハウスマン検定統計量を計算した結果が表 3 である。

どちらのデータセットにおいても Robust 推定量は真の値に収束している一方で、PN 推定量は誤った推定結果を出力していることが見て取れる。またハウスマン検定統計量を見てもどちらのデータセットにおいても純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされるという帰無仮説は正しく棄却されている。

## 6 Conclusion

本論文では広く用いられる完備情報参入ゲームのモデルを用い、実データにおいて純粋戦略ナッシュ均衡がプレイされているかを統計的に検定できる簡便な手法を提案した。先行研究ではスポーツやゲームなどの限定的な状況でのみ均衡に関する実証研究が行われていたが、参入ゲームというより広く観察でき、複雑な利得構造を持つ現象についてもプレイされる均衡を統計的にテストできる枠組みを提示したことが本論文の主要な貢献である。これはまた、ゲーム理論の文脈では不安定な均衡として排除される混合戦略ナッシュ均衡の存在を実データを用いて検証することができるため、均衡の精緻化という観点でも有益な示唆を与える。

### 6.1 Further Research

まず、[8] のように実際に完備情報ゲームとして寡占市場を分析した文献ではプレイヤーが 2 人ではないケースが扱われることに注意が必要である。[8] ではアメリカにおける航空輸送産業が例として扱われているが、日本においてもコン



ビニエンスストアや低価格飲食チェーン店などの商業立地においては2社による競争よりも複数企業間での競争が多く観察され、またそれにより企業ごとに異なる競争効果を細かく分析することは当該産業における立地などの規制に関する政策評価を行う際に重要な要素となる。従ってプレイヤーが2社以上存在する市場に対しても適用できるように拡張する必要がある。

本論文においてはナッシュ均衡という構造を前提とし、さらに情報構造についても完備情報であるという仮定の下で、均衡の種類の特化についての検定を提示した。混合戦略が現実にはプレイされているかというゲーム理論の実証研究という観点でこれは重要なものであるが、実証産業組織論においてより有益な分析を行っていくためには、より基幹となる仮定であるナッシュ均衡という構造自体や情報構造についての検証を行っていくことも同様に肝心である。実際、[10]や[14]などでは実際のスーパーマーケットの立地データを用いて情報構造についての検定が行われており、より柔軟な情報構造に頑健な均衡概念を用いた分析も行われている。また、ナッシュ均衡という構造自体に対して仮定を緩めることを試みる研究も存在する。例えば[2]では完備情報ゲームにおいて合理性の仮定を緩めた際の識別集合を様々なモデルについて報告している。さらに[12],[13]では様々な均衡概念を実データを用いて検定する手法が開発されている。これらの均衡概念の検証も未だ静学ゲームが主であり、動学参入退出のモデルや価格付けのモデルなど広いクラスの問題を扱うことのできる検定手法の開発が今後望まれる研究の方向性である。

## 7 Appendix

### 7.1 $\alpha(w)$ の計算

以下を示せば十分である。

$$\alpha(1) = G_1 G_2 \left( 1 + \frac{\mathbf{x}'_{m,1} \beta_1}{\delta_1} + \frac{\mathbf{x}'_{m,2} \beta_2}{\delta_2} \right) + \frac{G_1 g_2}{\delta_2} + \frac{G_2 g_1}{\delta_1}$$

$$\begin{cases} G_i = \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \\ g_i = \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \end{cases}$$

$\star_m$  において混合戦略がプレイされているとした時に、 $t_2^m$  と  $t_0^m$  の中でどれだけの割合が混合戦略の結果として偶発的に実現したものかを求める。ペイズの定理より以下が成立する。ただし二つ目の等式は SOR の仮定より成立する。

$$\begin{aligned} & \Pr((1,1) \text{ is NE} \mid (1,1) \text{ is played}) \\ &= \frac{\Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is NE}) \Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is NE}) \Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is not NE}) \Pr((1,1) \text{ is not NE})} \\ &= \frac{\Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \mid (1,1) \text{ is not NE}) \Pr((1,1) \text{ is not NE})} \\ &= \frac{\Pr((1,1) \text{ is NE})}{\Pr((1,1) \text{ is NE}) + \Pr((1,1) \text{ is played} \wedge \star_m)} \end{aligned}$$

1社も参入しない場合についても同様の計算ができる。ここで修正項は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} c_2^m &= \Pr((1,1) \text{ is played} \wedge \star_m) = \prod_{i=1}^2 \left\{ \frac{\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i}{\delta_i} \left( \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \right) + \frac{1}{\delta_i} \left( \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \right) \right\} \\ c_0^m &= \Pr((0,0) \text{ is played} \wedge \star_m) = \prod_{i=1}^2 \left\{ \frac{\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i}{\delta_i} \left( \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \Phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \right) + \frac{1}{\delta_i} \left( \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i) - \phi(\mathbf{x}'_{m,i} \beta_i + \delta_i) \right) \right\} \\ \alpha(1) &= c_0^m - c_2^m \text{ であることより以下の結果を得る。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= c_0 - c_2 \\ &= \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \left\{ \delta_1 \delta_2 G_1 G_2 + \delta_1 G_1 \left( \mathbf{x}'_{m,2} \beta_2 G_2 + g_2 \right) + \delta_2 G_2 \left( \mathbf{x}'_{m,1} \beta_1 G_1 + g_1 \right) \right\} \\ &= G_1 G_2 \left( 1 + \frac{\mathbf{x}'_{m,1} \beta_1}{\delta_1} + \frac{\mathbf{x}'_{m,2} \beta_2}{\delta_2} \right) + \frac{G_1 g_2}{\delta_2} + \frac{G_2 g_1}{\delta_1} \end{aligned}$$

## 7.2 主張 3 の証明

$$\theta^R = \arg \min_{\theta} \sum_{m=1}^M r(p^{\hat{m}}; \theta)^2$$

$$\text{where } r(p^{\hat{m}}; \theta) = (p_2^{\hat{m}} - p_1^{\hat{m}}) - (q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0)$$

について [21] と同様の除外制約の下で点識別可能であることを示す。

プレイヤー 2 の利得のみ動かす変数が存在する時、 $\mathbf{x}_{m,2}'\beta_2 \rightarrow \infty$  となる領域が存在する。この時  $-\mathbf{x}_{m,2}'\beta_2 \rightarrow -\infty$  であることから以下が成立する。

$$\begin{cases} q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0 \rightarrow \Phi(\mathbf{x}_{m,1}'\beta_1 + \delta_1) & \text{where } \mathbf{x}_{m,2}'\beta_2 \rightarrow \infty \\ q_1^1 q_2^1 - q_1^0 q_2^0 \rightarrow -\Phi(\mathbf{x}_{m,1}'\beta_1) & \text{where } \mathbf{x}_{m,2}'\beta_2 \rightarrow -\infty \end{cases}$$

これはプレイヤー 2 の行動がプレイヤー 1 の行動によらずに定るケースであり、プレイヤー 1 についても同様に考えることができるので、 $E[\mathbf{x}_{m,i}\mathbf{x}_{m,i}']$  が  $i = \{1, 2\}$  についてどちらも逆行列が存在するならば  $\theta$  は識別可能である。

## 参考文献

- [1] Victor Aguirregabiria and Pedro Mira. Sequential Estimation of Dynamic Discrete Games: A Comment. *Econometrica*, 75(1):1–53, 2007.
- [2] Andres Aradillas-Lopez and Elie Tamer. The identification power of equilibrium in simple games. *Journal of Business and Economic Statistics*, 26(3):261–283, 2008.
- [3] Patrick Bajari, Lanier Benkard, and Jonathan Levin. Estimating dynamic models of imperfect competition b. *Econometrica*, 75(5):1331–1370, 2007.
- [4] T Bresnahan. Competition and Collusion in the American Automobile Industry : The 1955 Price War Author ( s ): Timothy F . Bresnahan Source : The Journal of Industrial Economics , Vol . 35 , No . 4 , The Empirical Renaissance in Industrial Economics ( Jun . , 1987 ), pp. *The Journal of Industrial Economics*, 35(4):457–482, 2010.
- [5] T Bresnahan and P Reiss. Empirical models of discrete games. *Journal of Econometrics*, 48(1-2):57–81, 1991.
- [6] William A. Brock and Steven N. Durlauf. Discrete choice with social interactions. *Review of Economics Studies*, 68(2):235–260, 2001.
- [7] P. A. Chiappori, S. Levitt, and T. Groseclose. Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: The case of penalty kicks in soccer. *American Economic Review*, 92(4):1138–1151, 2002.
- [8] Federico Ciliberto and Elie Tamer. Market Structure and Multiple Equilibria in Airline Markets. *Econometrica*, 77(6):1791–1828, 2009.
- [9] Allan Collard-Wexler. Demand Fluctuations in the Ready-Mix Concrete Industry. *Econometrica*, 81(3):1003–1037, 2013.
- [10] Paul L E Grieco. Discrete games with flexible information structures: An application to local grocery markets. *RAND Journal of Economics*, 45(2):303–340, 2014.
- [11] By Philip A Haile, Ali Horta, and Grigory Kosenok. On the Empirical Content of Quantal Response Equilibrium. *The American Economic Review*, 98(1):180–200, 2016.
- [12] Nail Kashaev. Testing for Nash behavior in binary games. 2017.
- [13] Nail Kashaev and Bruno Salcedo. Identification of solution concepts for. pages 1–45, 2016.
- [14] Lorenzo Magnolfi and Camilla Roncoroni. Estimation of Discrete Games with Weak Assumptions on Information . 2015.

- [15] Roger B. Myerson. Population uncertainty and Poisson games. *International Journal of Game Theory*, 27(3):375–392, 1998.
- [16] Roger B. Myerson. Large Poisson Games. *Journal of Economic Theory*, 94(1):7–45, 2000.
- [17] Robert Ostling, Joseph Tao yi Wang, Eileen Y. Chou, and Colin F. Camerer. Testing game theory in the field: Swedish LUPI lottery games. *American Economic Journal: Microeconomics*, 3(3):1–33, 2011.
- [18] Ariel Pakes and Paul McGuire. Computing Markov-Perfect Nash Equilibria : Numerical Implications of a Dynamic Differentiated Product Model Author ( s ): Ariel Pakes and Paul McGuire Source : The RAND Journal of Economics , Vol . 25 , No . 4 ( Winter , 1994 ), pp . 555-589 Published by. *The RAND Journal of Economics*, 25(4):555–589, 1994.
- [19] Stephen P Ryan. The Costs of Environmental Regulation in a Concentrated Industry. *Econometrica*, 80(3):1019–1061, 2012.
- [20] Katja Seim. An empirical model of firm entry with endogenous product-type choices. *The RAND Journal of Economics*, 37(3):619–640, 2006.
- [21] Elie Tamer. Simultaneous Discrete Incomplete Response Model with Multiple Equilibria. *The Review of Economic Studies*, 70(1):147–165, 2003.