測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 8

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

June 24, 2018

1　2.2.1

$E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{S_n}{n} = v_n$ であることより

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right] = Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)\right)$$

を得る。ただし、最後の等式は各確率変数が無相関であることによる。$n \to \infty$ での挙動を考える。仮定より $\forall \epsilon > 0\ \exists I$ s.t. $i \geq I \Rightarrow \frac{Var(X_i)}{i} < \epsilon$ であるので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{n^2}\frac{Var(X_i)}{i} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{I-1} \frac{i}{n^2}\frac{Var(X_i)}{i} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=I}^{n} \frac{i}{n^2}\frac{Var(X_i)}{i} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{I-1} \frac{i}{n^2}\frac{Var(X_i)}{i} + \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon}{n^2} \sum_{i=I}^{n} i \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

従って任意の $\epsilon > 0$ で上から押さえることができるので $\frac{S_n}{n} - v_n \to 0$ in L^2 である。チェビシェフの不等式より任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - v_n\right| > \epsilon\right) \leq \frac{E\left[\left(\frac{S_n}{n} - v_n\right)^2\right]}{\epsilon^2} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

であるので確かに確率収束もする。

2　2.2.2

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \geq i,j \geq n} E\left[X_i X_j\right]$$

である。コーシーシュワルツの不等式より、$E\left[X_i X_j\right] \leq \left(E\left[X_i^2\right] E\left[X_j^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} = r(0)$ である。また仮定より、

$$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0 \text{ s.t. } k \geq K \ \Rightarrow\ r(k) < \epsilon$$

である。これより、$|i - j| \leq K$ に対しては $E[X_i X_j] \leq r(0)$ とし、$|i - j| > K$ に対しては $E[X_i X_j] \leq \epsilon$ で抑えられる。すなわち、

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \geq i,j \geq n} E\left[X_i X_j\right] \leq \frac{1}{n^2}\left(n(2K - 1)r(0) + n^2\epsilon\right) = \frac{2K + 1}{n} r(0) + \epsilon$$

である。K は n に依存しないので $\lim \frac{1}{n^2} E[S_n^2] \leq \epsilon$ である。従って 0 に L^2 収束するので 0 に確率収束する。

3 2.2.3

Th2.2.14 の条件を満たすことを確認する。U_i が一様分布に従うことより以下が成立。

$$E\left[I_n\right]=E\left[f(U_i)\right]=\int f(x)\mathrm{d}x$$

さらに、B を $\mathbb{R}$ 上の可測集合とすると、f が可測関数であることより以下が成立する。

$$P\left(\omega\in U_1^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right)\times\cdots\times P\left(\omega\in U_n^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right)=P\left(\omega\in\left(f\circ U_1\right)^{-1}(B)\right)\times\cdots\times P\left(\omega\in\left(f\circ U_n\right)^{-1}(B)\right)$$

また、

$$P\left(\omega\in U_1^{-1}\left(f^{-1}(B)\right),\cdots,\omega\in U_n^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)\right)=P\left(\omega\in\left(f\circ U_1\right)^{-1}(B),\cdots,\omega\in\left(f\circ U_n\right)^{-1}(B)\right)$$

である。$\{U_i\}$ は独立であることより上二つの左辺は等しい。従って右辺も等しくなり、$\{f(U_i)\}$ も独立な確率変数である。以上で Th2.2.14 の条件が成立することが確認されたので、$I_n \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ である。

次に $P\left(|I_n-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)$ を推定するために一様分布の実現値 $\{u_i\}_{i=1}^n$ を M セット発生させる。この時得られた I_n を I_n^m と記し、$\bar{I_n}=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^M I_n^m$ とする。

$$P\left(|I_n-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)=E\left[1\left(|I_n^m-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

であるので、右辺のサンプル表記である $\frac{1}{M}\sum_{m=1}^M 1\left(|I_n^m-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)$ が題意の推定をうまく行えることを以下で示す。

$$\begin{aligned}
E\left[1\left(|I_n^m-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]&=P\left(|(I_n^m-I)+(I-\bar{I_n})|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\\
&\le P\left(|I_n^m-I|+|I-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\\
&\le P\left(|I_n^m-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)+P\left(|I-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

M 個のサンプルは独立に生成され、上より可積分なので WLLN より、

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^M 1\left(|I_n^m-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow{p}E\left[1\left(|I_n^m-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

である。さらに、チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}
\|E\left[1\left(|I_n^m-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]-P\left(|I_n^m-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\|&\le P\left(|I-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\\
&\le\frac{n}{a^2}E\left[\left(\bar{I_n}-I\right)^2\right]\\
&=\frac{n}{Ma^2}Var\left(I_n^m\right)\\
&=\frac{1}{a^2M}Var\left(f(U_i)\right)
\end{aligned}$$

を得る。従って $M\to\infty$ で $E\left[1\left(|I_n^m-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right]\to P\left(|I_n^m-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)$ である。ここで「$a_n\xrightarrow{p}b_n\to b\Rightarrow a_n\xrightarrow{p}b$（主張 1)」であることより

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^M 1\left(|I_n^m-\bar{I_n}|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow{p}P\left(|I_n^m-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)=P\left(|I_n-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)$$

であるので推定できる。

3.1 主張 1 の証明

$a_n \xrightarrow{p} b_n \to b \Rightarrow a_n \xrightarrow{p} b$ を示す。任意の $\epsilon, \delta > 0$ に対して、

$$\exists N \text{ s.t. } n > N \;\Rightarrow\; P(\|a_n - b_n\| > \epsilon) \le \delta$$

である。また、

$$\exists M \text{ s.t. } m > M \;\Rightarrow\; \|b_m - b\| < \epsilon$$

である。ここで三角不等式より、

$$n > \max(N, M) \;\Rightarrow\; P\left(\|a_n - b\| > \epsilon\right) \le P\left(\|a_n - b_n\| > \epsilon\right) + P\left(\|b_n - b\| > \epsilon\right) \le \delta$$

が成立するため、題意は示された。

4 2.2.4

まず絶対値の期待値が発散することを確認する。

$$E\left[|X_i|\right] = \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{C}{k^2 \log k} = C \lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k \log k}$$

$k \ge 2$ において $\frac{1}{k \log k}$ が単調減少であることより積分判定法が使える。

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} \mathrm{d}x = \int_2^{\infty} \frac{(\log x)'}{\log x} \mathrm{d}x > \lim_{x\to\infty} \log\log x = \infty$$

これより確かに先の期待値は発散する。一方で、$kP\left(|X_i| > k\right) \to 0$ as $k \to \infty$ は成立することが以下のようにして確認できる。

$$\begin{aligned} kP\left(|X_i| > k\right) &= k \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{C}{l^2 \log l} \le Ck \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2 \log x} \mathrm{d}x \\ &= Ck \int_{\log k}^{\infty} \frac{\exp(-z)}{z} \mathrm{d}z \le C \frac{k}{\log k} \int_{\log k}^{\infty} \exp(-z) \mathrm{d}z = C \frac{1}{\log k} \to 0 \text{ as } k \to \infty \end{aligned}$$

従って Th2.2.12 が適用できて、

$$\mu_n = E\left[X_i 1\left(|X_i| \le n\right)\right] = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{C}{k \log k}$$

とおくと、$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$ である。さらに「交項級数は各項の絶対値が単調減少で 0 に収束するなら収束する（主張 2）」ので、μ_n がこの性質を満たす（すなわち $\frac{C}{k \log k}$ が $k \ge 2$ において単調に 0 に収束する）ことから、$\mu_n \to \mu$ なる μ が存在する。よって先の主張 1 より $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{p} 0$ である。

4.1 主張 2 の証明

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ と置く。ただし $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は非負の単調減少な数列で 0 に収束するとする。この時、

$$\begin{cases} S_{2k+1} = S_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) > S_{2k-1} \\ S_{2k} = S_{2k-2} - (a_{2k-1} - a_{2k}) < S_{2k-2} \end{cases}$$

が任意の k について成立する。また、$2m+1 > 2n$ について

$$S_{2m+1} = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) - \cdots - (a_{2m-1} - a_{2m}) - a_{2m+1}$$

であり、右辺で引かれる各項は $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が単調減少であることから非負であるので $S_{2n} > S_{2m+1}$ である。すなわち $\{S_{2k+1}\}$ は偶数項で上から抑えられた単調増加な数列であるため収束先（L_1）を持つ。同様に $\{S_{2k}\}$ は奇数項で下から抑えられた単調減少な数列なので収束先（L_2）を持つ。さらに、

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} - S_{2m-1}) = L_2 - L_1$$

であり、仮定より $\lim_{m\to\infty} a_{2m} = 0$ であることから $L_2 = L_1$ である。従って題意は示された。

5 2.2.5

まず絶対値の期待値が発散することを示す。Lemma2.2.13 より

$$E\left[|X_i|\right] = \int_e^\infty \frac{e}{x\log x}\mathrm{d}x = e\left[\log\log x\right]_e^\infty = \infty$$

であるので確かに期待値は発散する。しかし

$$xP\left(|X_i| > x\right) = x\frac{e}{x\log x} = \frac{e}{\log x} \to 0 \text{ as } x \to \infty$$

であるので Theorem2.2.12 が適用でき、

$$\mu_n = E\left[X_i 1\left(|X_i| \le n\right)\right]$$

とおくと $\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{p} 0$ である。

6 2.2.6

フビニの定理より $E[X]$ は以下のように変形できる。

$$E\left[X\right] = E\left[\sum_{n=1}^\infty 1(X \ge n)\right] = \sum_{n=1}^\infty E[1(X \ge n)] = \sum_{n=1}^\infty P(X \ge n)$$

また同じくフビニの定理より、

$$E[X^2] = E\left[2\sum_{n=1}^X n - X\right] = E\left[\sum_{n=1}^\infty (2n-1)1(X \ge n)\right] = \sum_{n=1}^\infty (2n-1)P(X \ge n)$$

を得る。