測度論的確率論 2018 S1S2
Homework 4

経済学研究科現代経済コース修士 1 年 / 池上　慧 (29186009) / sybaster.x@gmail.com

May 12, 2018

1 Ex4.2

$D = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ である。lemma3.5 より $E_n \equiv \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ は可測集合の要素であるので、sigma fiels が可算個の和集合について閉じていることから D も可測集合に入る。したがって $\mu(D)$ は定義されている。さらに、E_n が単調増大な集合なので、lemma1.3 より

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

である。ここでチェビシェフの不等式から、任意の $n \geq 1$ について

$$\mu(E_n) \leq n \int_{E_n} f \mathrm{d}\mu$$

を得る。さらに $f > 0$ であることから、

$$\int_{E_n} f \mathrm{d}\mu < \int f \mathrm{d}\mu = 0$$

これより、$0 \leq \mu(E_n) \leq 0 \ \Rightarrow \ \mu(E_n) = 0$ を得る。したがって、$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ であるので、$\mu(D) = 0$ である。これは f が 0 でないような X の部分集合のの測度が 0 であることを意味するので、$f = 0$ a.e. である。

2 Ex4.3

3 Ex4.4

4 Ex4.8

5 Ex4.10

6 Ex4.11

7 Ex4.16

8 Ex4.17