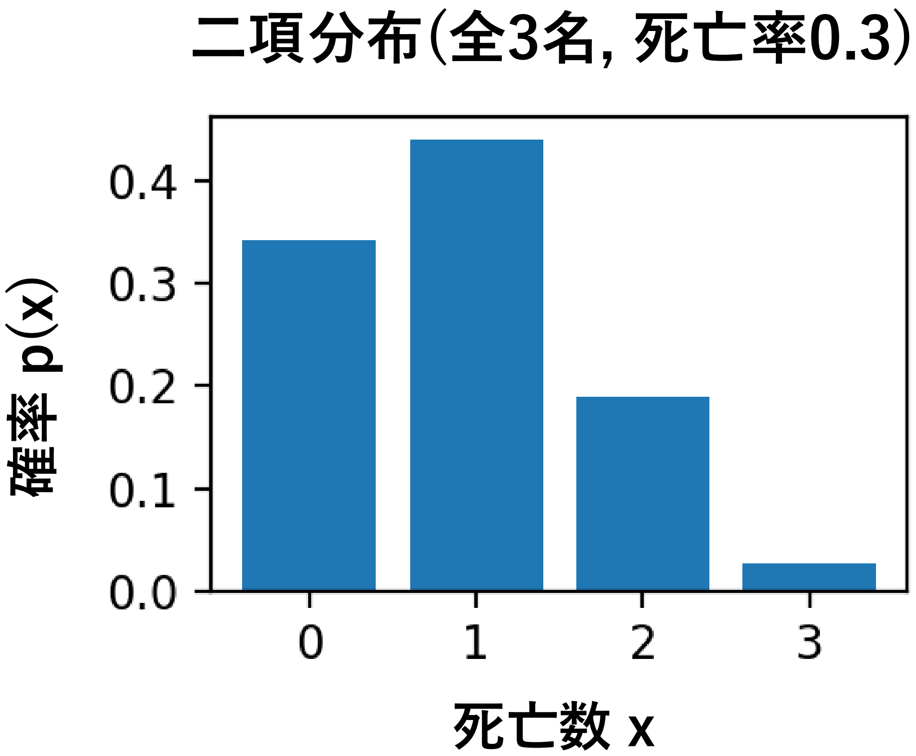
問題：二項分布の期待値と分散を求めよ：10年後の同窓会までに70歳男性仲良し3人組は何人死亡するか？



死亡数 x	0	1	2	3
確率 p	0.343	0.441	0.189	0.027

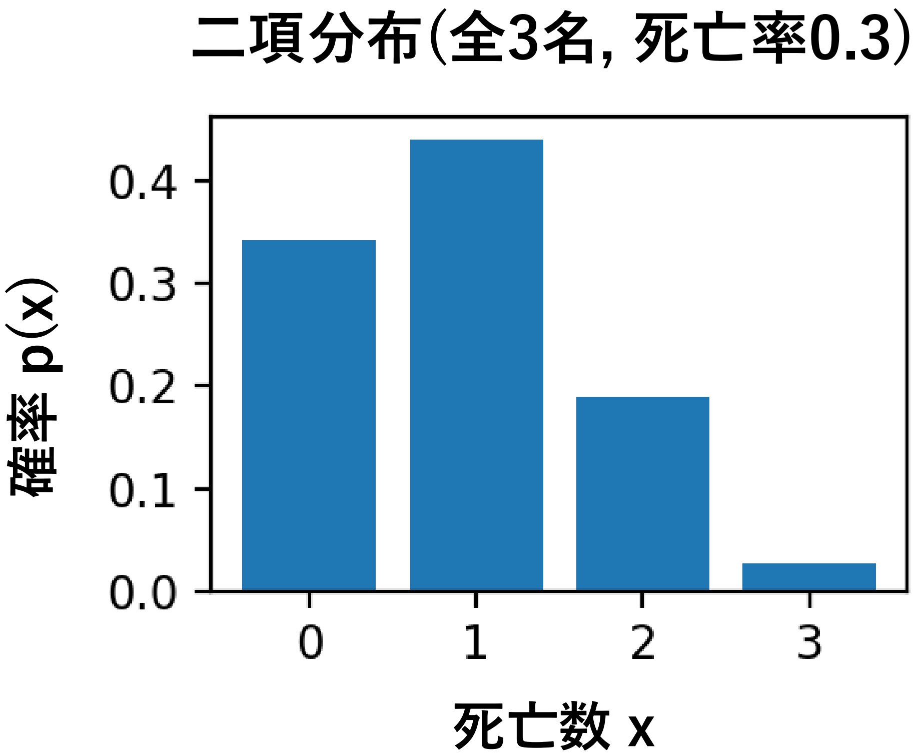
$= {}_3\mathrm{C}_0(0.7)^0(0.3)^3$

[解法1] 表の値を元にして定義通りに計算：

$$\begin{aligned} E[x] &= p(0)\,0 + p(1)\,1 + p(2)\,2 + p(3)\,3 \\ &= (0.343, +0.441, +0.189, +0.027)\cdot(0,1,2,3) \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[x] &= E\left[(x - E[x])^2\right] \\ &= p(0)\,(0-0.9)^2 + p(1)(1-0.9)^2 \\ &\quad + p(2)(2-0.9)^2 + p(3)(3-0.9)^2 \\ &= 0.63 \end{aligned}$$

問題：二項分布の期待値と分散を求めよ：10年後の同窓会までに70歳男性仲良し3人組は何人死亡するか？



死亡数 x	0	1	2	3
確率 p	0.343	0.441	0.189	0.027

[解法2] コイン投げ3回とみなして計算：

$x = y_1 + y_2 + y_3$ （ここでi番目の人が死亡したら$y_i = 1$）

$$
\begin{aligned}
E[x] &= E[y_1 + y_2 + y_3] \\
&= E[y_1] + E[y_2] + E[y_3] \\
&= 3 \times 0.3 \\
&= 0.9
\end{aligned}
$$

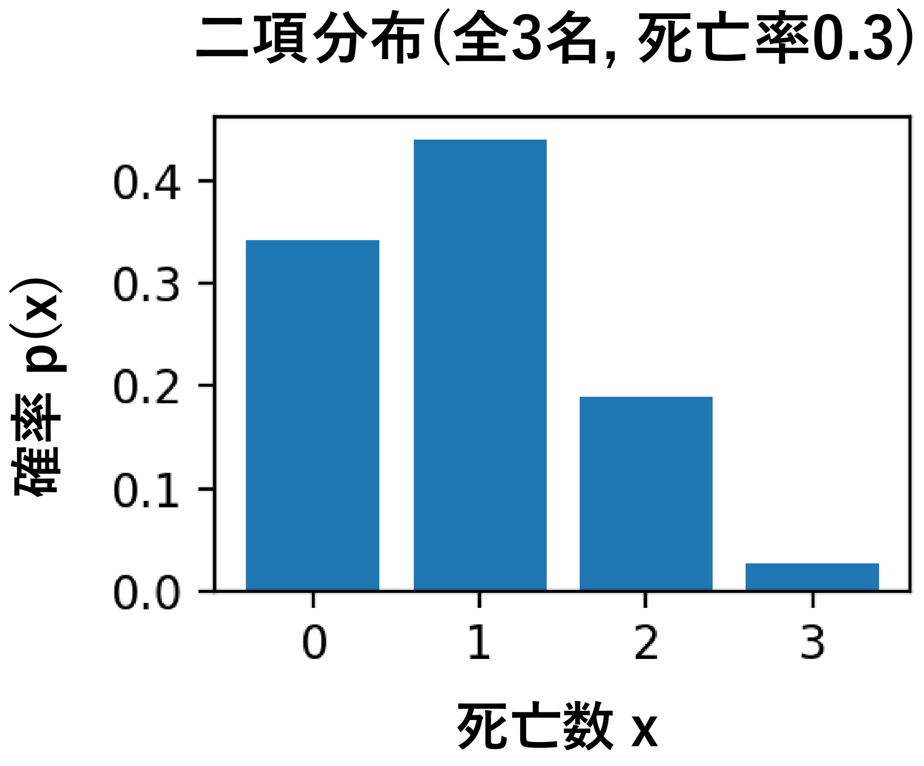
∵内積なので

$$
\begin{aligned}
V[x] &= E\left[(x - E[x])^2\right] \\
&= E\left[(y_1 + y_2 + y_3 - E[y_1 + y_2 + y_3])^2\right] \\
&= E\left[(y_1 - E[y_1] + y_2 - E[y_2] + y_3 - E[y_3])^2\right] \\
&= E\left[(y_1 - E[y_1])^2\right] + E\left[(y_2 - E[y_2])^2\right] \\
&+ E\left[(y_3 - E[y_3])^2\right] + \underbrace{E[2(y_1 - E[y_1])(y_2 - E[y_2])] + \ldots}_{=0} \\
&= V[y_1] + V[y_2] + V[y_3] \text{(公式)} \\
&= 3 \times 0.3 \times (1 - 0.3) \\
&= 0.63
\end{aligned}
$$

=0 ∵ 独立で各々0

$= E[y_1 + y_2 + y_3]$
$= E[y_1] + E[y_2] + E[y_3]$
$= 3 \times 0.3$
$= 0.9$

問題：二項分布の期待値と分散を求めよ：10年後の同窓会までに70歳男性仲良し3人組は何人死亡するか？



死亡数 x	0	1	2	3
確率 p	0.343	0.441	0.189	0.027

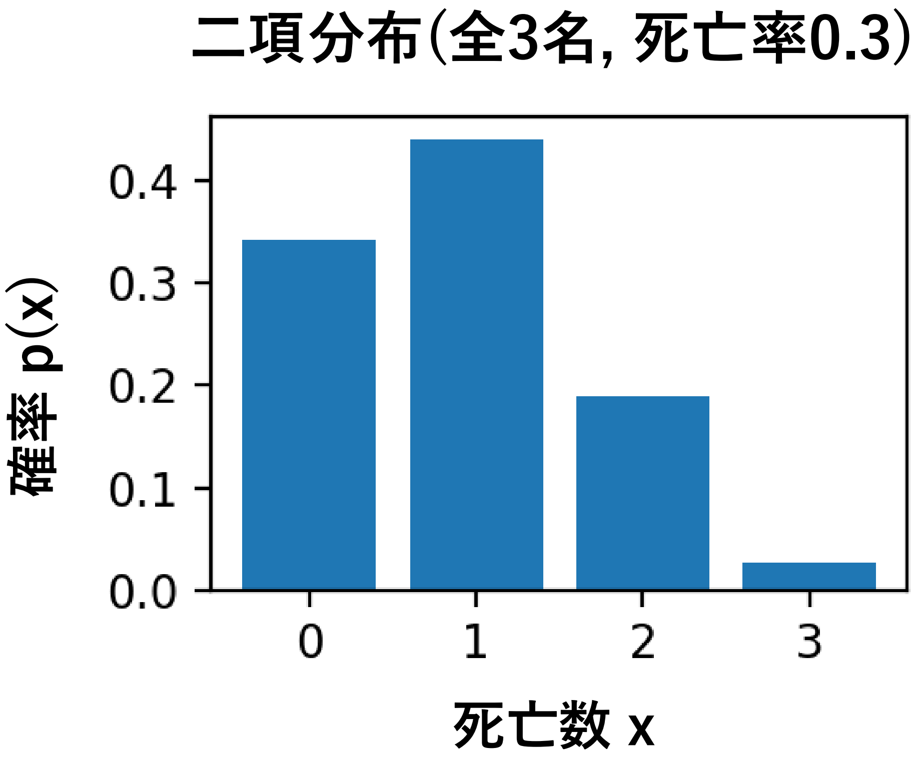
[解法2] 補足：ベルヌーイ分布の期待値と分散

$x = y_1 + y_2 + y_3$ （ここでi番目の人が死亡したら$y_i = 1$）

$$E[y] = 1 \times 0.3 + 0 \times 0.7$$
$$= 0.3$$

$$\begin{aligned}
V[y] &= E\left[(y - E[y])^2\right] \\
&= E\left[y^2 - 2yE[y] + E[y]^2\right] \\
&= E\left[y^2\right] - 2E\left[yE[y]\right] + E\left[E[y]^2\right] \\
&= E\left[y^2\right] - 2E[y]E[y] + E[y]^2 \\
&= E\left[y^2\right] - E[y]^2 \text{（公式）} \\
&= E[y] - E[y]^2 \quad \because \text{二値変数では } y^2 = y \\
&= E[y](1 - E[y]) \\
&= 0.3 \times 0.7
\end{aligned}$$

問題：二項分布の期待値と分散を求めよ：10年後の同窓会までに70歳男性仲良し3人組は何人死亡するか？



死亡数 x	0	1	2	3
確率 p	0.343	0.441	0.189	0.027

[解法3] 次で定義するモーメント母関数$\hat{f}(\xi)$を利用：

$x = y_1 + y_2 + y_3$ （ここでi番目の人が死亡したら$y_i = 1$）

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &:= E\left[e^{i\xi x}\right] \\ &= E\left[e^{i\xi(y_1+y_2+y_3)}\right] \\ &= E\left[e^{i\xi y_1}\right] E\left[e^{i\xi y_2}\right] E\left[e^{i\xi y_3}\right] \\ &= \left(0.7 \times 1 + 0.3 \times e^{i\xi}\right)^3\end{aligned}$$

∵独立なので

$$\begin{aligned}E[x] &= -i \left.\frac{d\hat{f}}{d\xi}\right|_{\xi=0} \\ &= 3\left(0.7 + 0.3e^{i\xi}\right)^2 0.3e^{i\xi}\Big|_{\xi=0} \\ &= 3 \times 0.3\end{aligned}$$

$$E\left[x^2\right] = (-i)^2 \left.\frac{d^2\hat{f}}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} = 3 \times 0.3 + 3 \times 2 \times 0.3^2$$

一般に$n\theta + n(n-1)\theta^2$