Að halda veislu á tímum samkomubanns

Eða hvernig stærðfræðikennari í fæðingarorlofi ver frítíma sínum

Kristján Einarsson

16. mars 2020

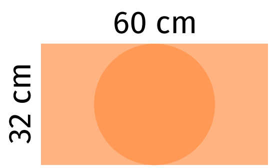
Nú hefur samkomubann tekið gildi og þá er gott að skipuleggja sig vel ef bjóða á til löglegrar veislu.

Verkefni okkar í dag er að halda eins stóra veislu og hægt er með því samt að spara pening með því að hafa salinn sem við bjóðum í sem minnstan.

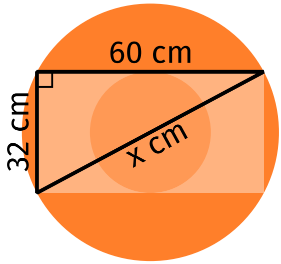
- 100 gestir
- Ekki skal vera minna en 2 metrar á milli tveggja gesta.
- Salurinn skal vera eins lítill og vera skal.

1 Pláss fyrir hvern gest

Reiknum með að meðalgestur sé með 60 cm breiðar herðar og mælist um 32 cm frá kvið að rassi. Þannig getum við táknað hvern gest með rétthyrningi með þessi mál.



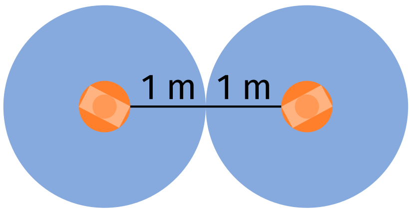
Við skulum leyfa gestinum allavega að snúa sér á staðnum, svo plássið sem við tökum frá fyrir hann er hringurinn sem rétthyrningurinn okkar passar inn í. Þvermál hringsins er þá hornalína rétthyrningsins, táknum það með x.



Samkvæmt reglu Pýþagórasar gildir $x^2 = 60^2 + 32^2 = 3600 + 1024 = 4324$ svo $x = \sqrt{4324} = 68$ cm.

En skemmtilegt að við fengum heiltölu úr ferningsrótinni. Það er reyndar engin tilviljun, ég valdi þessar tölur sérstaklega vegna þessa eiginleika. Þetta er kallað að tölurnar $32, 60$ og 68 mynda Pýþagóríska þrennd.

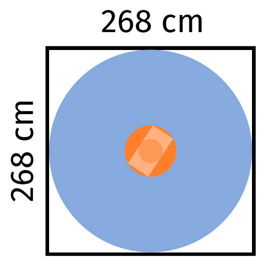
Við viljum tryggja að á milli gesta séu 2 m. Þetta þýðir að ef við gefum hverjum gesti svæði sem nær 1 m frá honum í allar áttir og tryggjum að svæði tveggja gesta skarist ekki þá uppfyllum við þetta skilyrði.



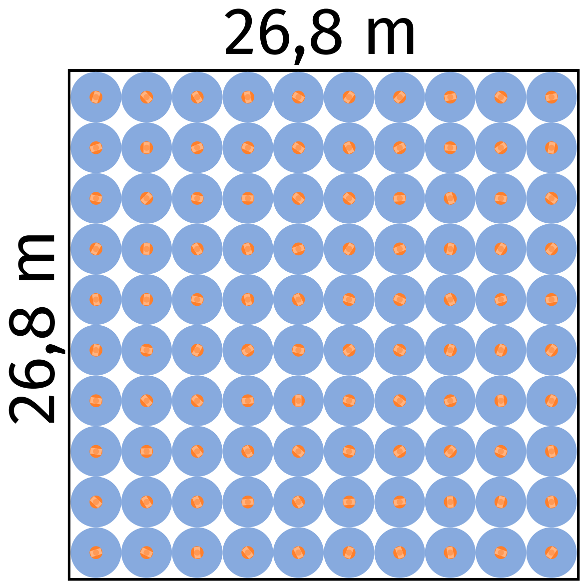
Svæði hvers gests er því hringur með þvermálið 268 cm.

II Ferningar

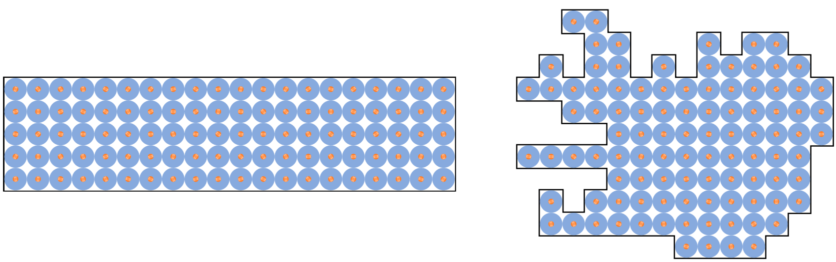
Einfaldast væri að gefa hverjum gesti rétthyrningslaga rými, þá tekur hver gestur $268\,\text{cm} \cdot 268\,\text{cm} = 71\,824\,\text{cm}^2 = 7{,}1824\,\text{m}^2$



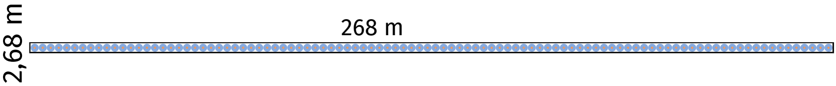
Svo þarf bara að raða 100 slíkum ferningum saman og þannig fáum við stærð salarins.



Það skiptir að sjálfsögðu ekki máli hvernig herbergið er í laginu nákvæmlega, svo fremi sem það er gert úr þessum 100 ferningum. Það gæti verið rétthyrningslaga, eða alls ekki.



Svo má náttúrlega raða öllum gestunum í röð, halda samkomuna á einhverjum gangi.



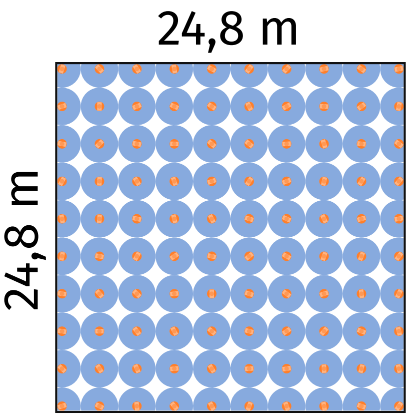
Heildarflatarmálið er það sama hvernig sem er:

$$F_4 = 100 \cdot 7{,}1824\,\mathrm{m}^2 = 718{,}24\,\mathrm{m}^2$$

III Veggirnir

Það fyrsta sem við tökum eftir að má bæta er að á milli gesta þarf að vera ákveðið bil, en það eru engin takmörk sett á hvað gestirnir eru stutt frá veggjunum.

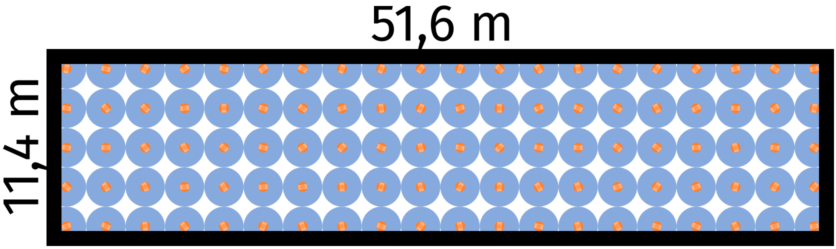
Svo prófum svipaða lausn, nema setjum gestina á jaðrinum upp við vegg. Ef við röðum gestunum í 10 raðir af 10 gestum fáum við þessa niðurstöðu:



Fyrir rétthyrningslaga sal tökum við einfaldlega 1 m sitthvoru megin af lengdinni og breiddinni. Flatarmál ferningslaga salarins er:

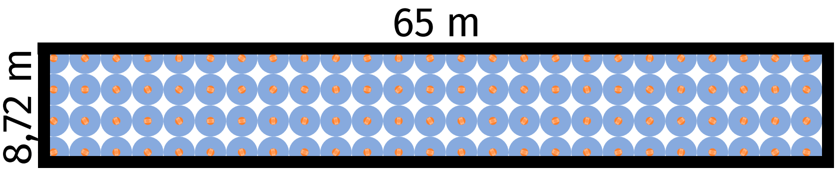
$$24{,}8\,\mathrm{m} \cdot 24{,}8\,\mathrm{m} = 615{,}04\,\mathrm{m}^2$$

En athugum að eftir því sem fleiri gestir standa við vegginn þá getum við minnkað salinn meira. Ferningur er rétthyrningur sem hefur mest flatarmál miðað við ummál, en við viljum auka ummálið, þess vegna viljum við að salurinn verði frekar aflangur.



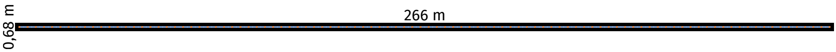
Ef við röðum gestunum 20×5 þarf flatarmál salarins að vera:

$$11{,}4\,\mathrm{m} \cdot 51{,}6\,\mathrm{m} = 588{,}24\,\mathrm{m}^2$$



Ef við röðum gestunum 25×4 þarf flatarmál salarins að vera:

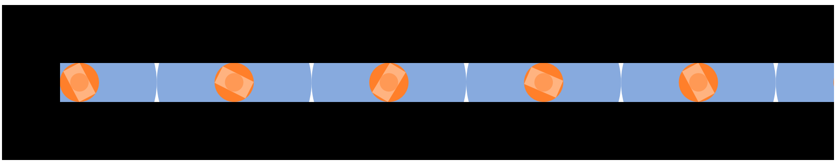
$$8{,}72\,\mathrm{m} \cdot 65\,\mathrm{m} = 566{,}8\,\mathrm{m}^2$$



Ef við röðum gestunum á langan og mjóan gang, 100×1 þarf flatarmál salarins að vera:

$$0{,}68\,\mathrm{m} \cdot 266\,\mathrm{m} = 180{,}88\,\mathrm{m}^2$$

Við erum nú að þrengja frekar mikið að gestunum okkar, sjáum nærmynd:



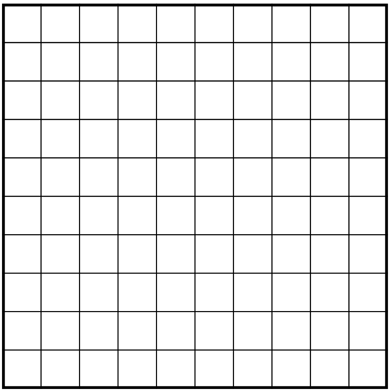
Allra minnsti salurinn sem við getum komið fólkinu fyrir í hlýtur að vera örmjór gangur þannig að gestirnir hafi vegginn bæði við kviðinn og rassinn, og svo eru 2 m á milli gestanna, öxl í öxl.

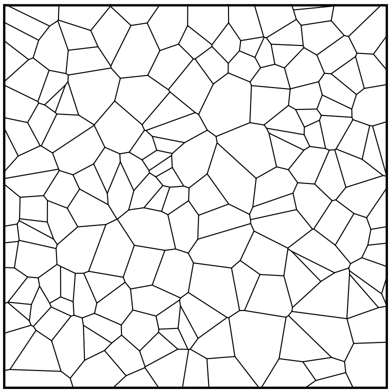
Lengd þessa gangs er þá $100 \cdot 60 + 99 \cdot 200 = 20\,400$ cm og breiddin bara 32 cm og flatarmálið því $20400 \cdot 32 = 652\,800\,\text{cm}^2 = 65{,}28\,\text{m}^2$

Þetta þykir alveg örugglega ekki boðlegt. En er þá boðlegt að setja nokkurn gest út við vegg? Það er matsatriði, en við erum ekki hér til að vega og meta þessháttar, við viljum finna bestu lausnina.
Hér eftir skulum við því aðeins skoða lausnir þar sem gestirnir fá að standa a.m.k. 1 m frá veggjunum líka.

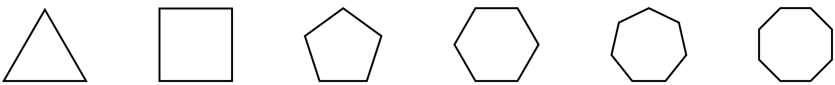
IV Flísalagningar

Við höfum hingað til notað litla ferninga til þess að þekja salinn okkar. Þetta kallast flísalagning, kannski af augljósri ástæðu. En nota má allskonar form til að flísaleggja fleti.

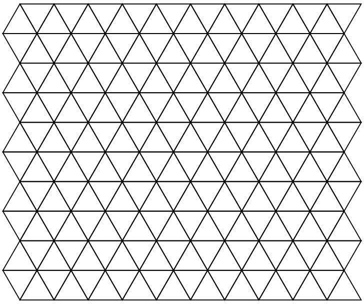


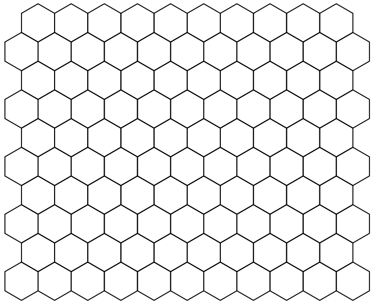


Þar sem við viljum koma hringjum inn í hverja flís, og hringirnir eru allir jafnstórir þá viljum við að flísarnar séu allar eins. Þar sem hringur er óendanlega samhverft form þá viljum við líka að flísarnar okkar séu frekar samhverfar, svo þær skulu vera reglulegir marghyrningar.

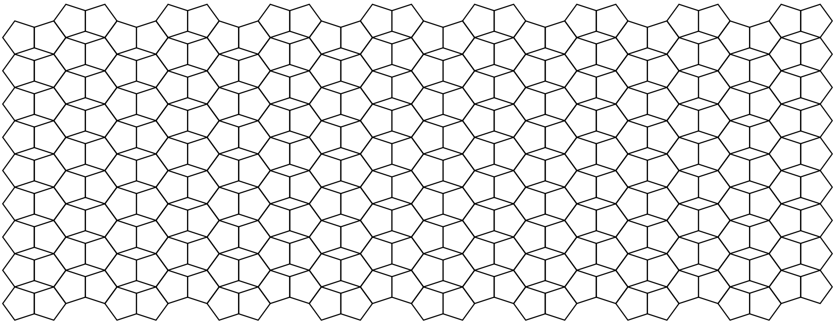


En hvernig gengur að flísaleggja með þessum formum? Við vitum vel að það gengur með ferninginn og í ljós kemur að það geri það einnig með jafnhliða þríhyrninga og reglulegu sexhyrninga.

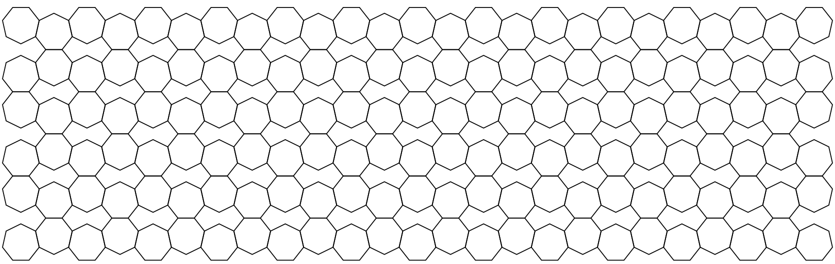




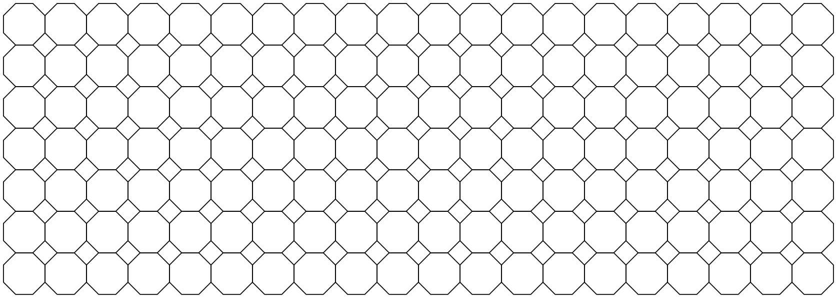
En ekki er hægt að þekja flötinn alveg með öðrum reglulegum marghyrningum.



Fimmhyrningarnir þekja svæðið fyrir utan þessa tígla sem myndast á milli þeirra.



Á milli sjöhyrninganna myndast form sem mætti segja að líkist slaufu..

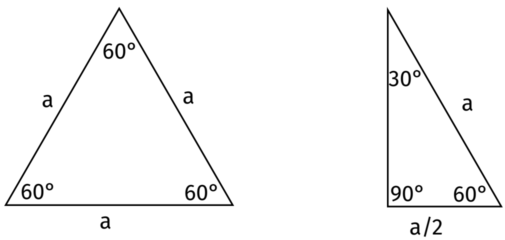


Á milli átthyrninganna myndast ferningslaga svæði.

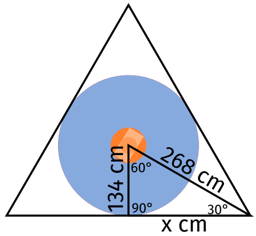
Niðurstaðan er að einu flísalagningarnar með reglulegum marghyrningum sem þekja flötinn alveg nota jafnhliða þríhyrninga, ferninga eða reglulega sexhyrninga.

V Þríhyrningar

Við viljum teikna stærsta mögulega hringinn inn í jafnhliða þríhyrning, þetta kallast að teikna innritaðan hring þríhyrningsins. Hann mun snerta allar þrjár hliðar þríhyrningsins.
Athugum að þríhyrningur með hornastærðirnar 30° - 60° - 90° er hálfur janfhliða þríhyrningur, svo styttri skammhliðin er hálf langhliðin.



Teiknum svæði gests innritað í jafnhliða þríhyrning. Teiknum svo þríhyrning með hornpunkta í miðju hringsins, snertipunkti hans við jafnhliða þríhyrninginn og svo einn hornpunkt hans. Sjá má að þessi nýji þríhyrningur hefur hornastærðirnar 30°, 60° og 90°. Styttri skammhlið hans er radíus hringsins, sem er 134 cm og samkvæmt fyrri niðurstöðu er langhliðin, frá miðju að hornpunkti, tvisvar sinnum sú vegalengd, 268 cm.



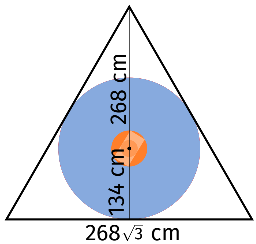
Ef við táknum seinni skammhliðina með x þá gefur regla Pýþagórasar okkur að:

$$x^2 + 134^2 = 268^2$$

svo $$x^2 = 268^2 - 134^2 = 71824 - 17956 = 63868$$

sem gefur $$x = \sqrt{63868} = 134\sqrt{3} \approx 232{,}095\,\text{cm}$$

Þetta gefur að hliðarlengd jafnhliða þríhyrningsins okkar er $2x = 268\sqrt{3}$ og hæð hans er $134 + 268 = 402$ cm.

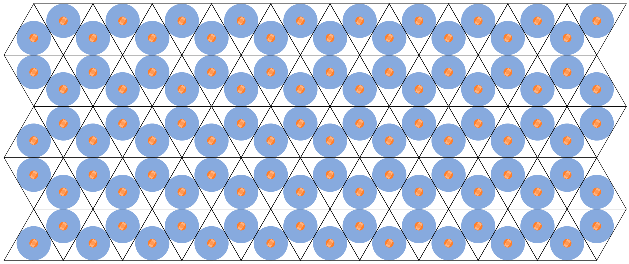


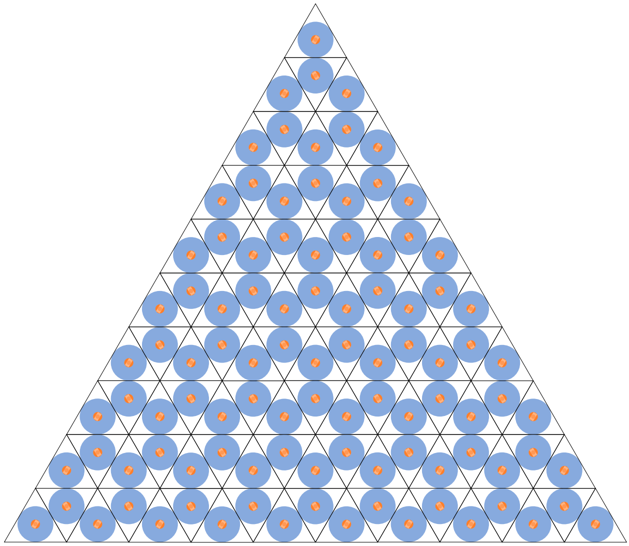
Þetta þýðir að hver þríhyrningur hefur flatarmálið:

$$F_3 = \frac{268\sqrt{3} \cdot 402}{2} = 53686\sqrt{3} \approx 93\,302\,\text{cm}^2$$

Hvernig sem við röðum þessum þríhyningum saman þá munu gestirnir hundrað alltaf taka:

$$100 \cdot 53686\sqrt{3} \approx 933{,}02\,\text{m}^2$$





Sem er mun meira en það sem við fengum með ferningnunum, það var 718,24 m^2.
En athugum að flatarmál hringsins sjálfs, svæðisins fyrir gestinn er:

$$F_g = \pi 134^2 \approx 56\,410\,\text{cm}^2$$

Svo hlutfallið svæðis sem nýtist fyrir gestina er með þríhyrningaflísa-lögninni er:

$$\frac{F_g}{F_3} \approx \frac{56410}{93302} \approx 60{,}46\,\%$$

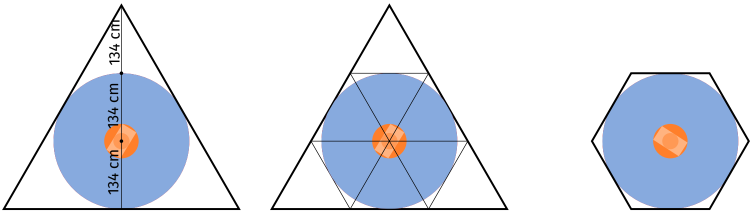
En nýtingin með ferningaflísalögninni er:

$$\frac{F_g}{F_4} \approx \frac{56410}{71824} \approx 78{,}53\,\%$$

Ef til vill sér lesandinn fyrir sér hvað gerist næst. Við munum finna bestu nýtinguna með því að nota reglulega sexhyrninga.

VI Sexhyrningar

Það var niðurstaða okkar þegar við skoðuðum þríhyrningana að hæð jafnhliða þríhyrningsins var þrisvar sinnum radíus innritaða hringsins. Þetta þýðir að við getum skipt jafnhliða þríhyrningnum niður í 9 jafnhliða þríhyrninga sem allir hafa hlið sem er snertill við hringinn. Ef við tökum í burtu þrjá af þeim þá höfum við hringinn innritaðan í sexhyrning.



Flatarmál sexhyrningsins er þá $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ af flatarmáli upphaflega þríhyrningsins. Þ.e.

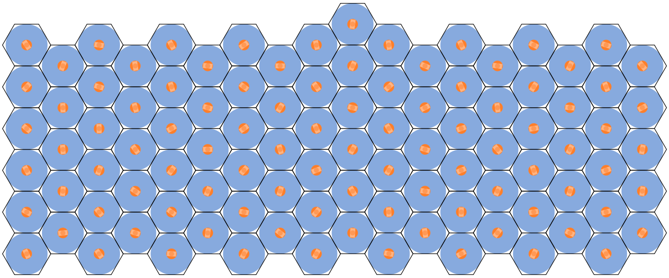
$$F_6 = \frac{2}{3}F_3 = \frac{2}{3} \cdot 53686\sqrt{3} \approx 67\,991 \text{ cm}^2$$

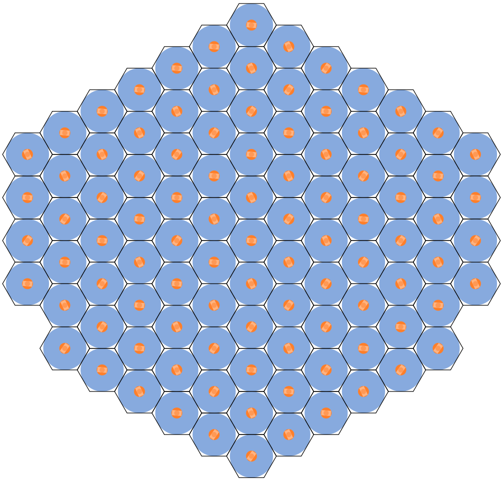
Sem er meira að segja betra en ferningurinn gaf. Nýtingin á plássinu fyrir gestina er:

$$\frac{F_g}{F_6} \approx \frac{56410}{67991} \approx 91\,\%$$

Hvernig sem við röðum þessum hundrað sexhyrningum saman þá taka gestirnir alltaf sama flatarmálið:

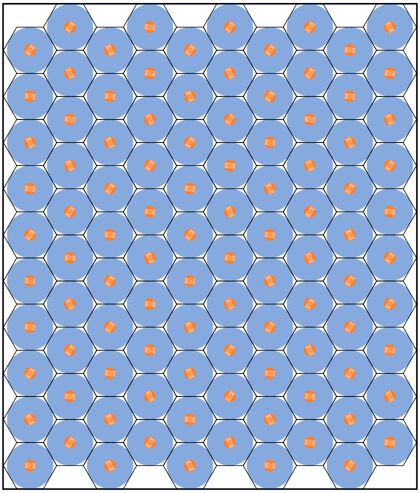
$$100 \cdot F_6 \approx 619{,}91 \text{ m}^2$$





VII Rétthyrningslaga salir

Að lokum skulum við koma gestunum í sal sem er rétthyrningslaga svo við reynum að raða sexhyrningunum til að mynda sem bestan rétthyrning. Athugum að nú skipta hlutföllin á salnum máli því sexhyrningarnir raðast ekki eins saman langsum og þversum.



Það kann að þykja ágæt lausn að raða gestunum þannig að við höfum 10 á breiddina og 10 á hæðina.

Hæð sexhyrningsins, þ.e. fjarlægðin á milli gagnstæðra hliða, er 268 cm. Á lengdina (upp á myndinni) er þá salurinn $10{,}5 \cdot 268 = 2814\,\text{cm} = 28{,}14\,\text{m}$. Margfalda þurfti með 10,5 vegna þess hvernig sexhyrningarnir raðast við endana uppi og niðri á myndinni.

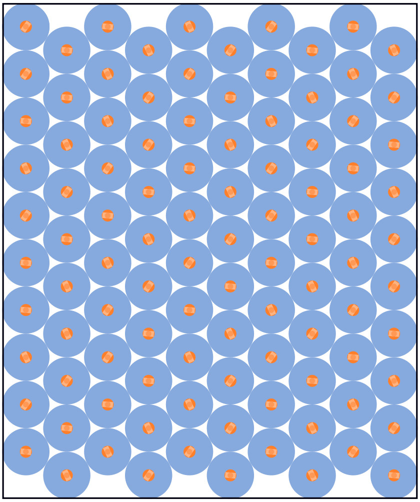
Breidd sexhyrningsins, þ.e. fjarlægðin á milli gagnstæðra hornpunkta er $\frac{2}{3}$ af hliðarlengd upphaflega þríhyrningsins. Þ.e.:

$$\frac{2}{3} \cdot 268\sqrt{3} = \frac{536\sqrt{3}}{3} \approx 309{,}46\,\text{cm}$$

Ef einn sexhyrningur er lagðu við annan eins og við höfum gert þá skarast þeir á breiddina séð sem nemur $\frac{1}{4}$ af breidd þeirra. Svo heildarbreiddin þegar 10 sexhyrningum er raðað saman er:

$$\frac{536\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{4} \cdot 9 \cdot \frac{536\sqrt{3}}{3} = \frac{4154\sqrt{3}}{3} \approx 2398{,}31\,\text{cm}$$

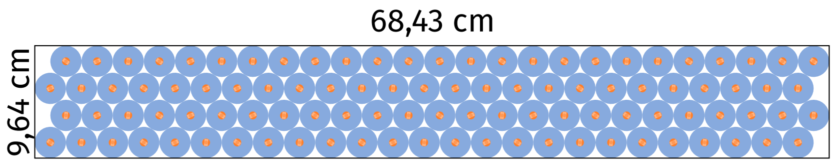
En hey, það má gera aðeins betur, hliðarveggirnir hægra og vinstra megin eru ekki snertlar við hringina. Færum þá örlítið nær.



Við getum hugsað þessa breytingu þannig að í staðin fyrir breydd eins sexhyrnings notuðum við bara þvermál hringsins. Svo breytingin í breidd salarins er $\frac{536\sqrt{3}}{3} - 268 \approx 41{,}46\,\text{cm}$ og heildarbreiddin er því c.a.:

$$2398{,}31 - 41{,}46 = 2356{,}85\,\text{cm} \approx 23{,}57\,\text{m}$$

Flatarmál salarins er því c.a. $28{,}14 \cdot 23{,}57 \approx 663{,}22\,\text{m}^2$.



Ef við aftur röðum gestunum 4 á breiddina og 25 á lengdina (myndini er snúið á hlið miðað við þær fyrri) þá með sömu reikningum fáum við:

Lengdin er $25{,}5 \cdot 268\,\text{cm} = 68{,}34\,\text{m}$

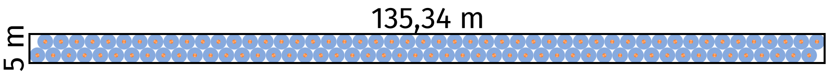
Breiddin er $$\frac{536\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \frac{536\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{536\sqrt{3}}{3} - 268\right) = 402\sqrt{3} + 268$$

$$\approx 964{,}28\,\text{cm} \approx 9{,}64\,\text{m}$$

Svo flatarmál salarins er c.a. $68{,}34 \cdot 9{,}64 \approx 658{,}99\,\mathrm{m}^2$.

Við erum að fá betri lausnir eftir því sem við höfum salinn meira aflangan. En athugum að ef við röðum öllum 100 gestunum á lengdina í einn langan gang, þá erum við að fá sömu útkomu og við höfum reiknað áður, sem var jafngild öll lausnum með ferningsflísalagningu. Það var flatarmálið $718{,}24\,\mathrm{m}^2$, og við höfum þegar fengið mun betri lausnir en það.

Besta lausnin fæst ef til vill með því að raða gestunum samkvæmt sexhyrningaflísalagningunni, 2 gestum á breiddina og 50 gestum á lengdina.



Lengdin er $50{,}5 \cdot 268\,\mathrm{cm} = 135{,}34\,\mathrm{m}$.

$$\text{Breiddin er } \frac{536\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{536\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{536\sqrt{3}}{3} - 268\right) = 134\sqrt{3} + 268.$$
$$\approx 500{,}09\,\mathrm{cm} \approx 5\,\mathrm{m}$$

Svo flatarmál salarins er c.a.

$$135{,}34 \cdot 5 \approx 676{,}83\,\mathrm{m}^2$$

Ó. Svo þetta er meira flatarmál en þegar við röðuðum gestunum 4×25. Innsæið var þá ekki betra en þetta. Svo virðist sem það að láta fleiri sexhyrninga skarast á breiddina hafi hér meiri áhrif en auðu svæðin við endana vinstra megin og hægra megin á þessari mynd.

Nú eigum við bara eftir að kanna eina skiptingu á gestunum í viðbót, svo við skulum bara reikna flatarmálið sem út kemur og ákvarða þá bestu lausnina.

Ef við röðum gestunum 5×20, 5 á breiddina og 20 á lengdina fáum við:

Lengdin er $20{,}5 \cdot 268\,\mathrm{cm} = 54{,}94\,\mathrm{m}$.

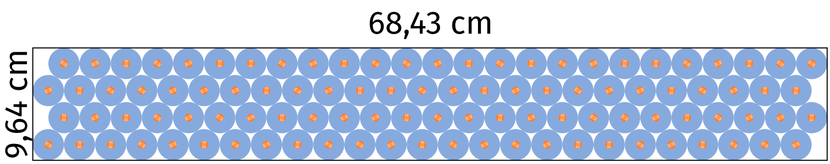
$$\text{Breiddin er } \frac{536\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{536\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{536\sqrt{3}}{3} - 268\right) = \frac{2144\sqrt{3}}{3} + 268.$$
$$\approx 1505{,}84\,\mathrm{cm} \approx 15{,}06\,\mathrm{m}$$

Svo flatarmál salarins er c.a.

$$54{,}94 \cdot 15{,}06 \approx 827{,}31 \text{ m}^2$$

Þetta er meira flatarmál en við fengum með því að raða gestunum 4×25. Svo það gefur bestu mögulegu lausnina og því er minnsti salurinn sem við getum notað í veisluna okkar með flatarmálið:

$$68{,}34 \text{ m} \cdot 9{,}64 \text{ m} \approx 658{,}99 \text{ m}^2$$



Eftir smá athugun hef ég komist að því að enginn 68,34 m langur og 9,64 m breiður salur er til útleigu á landinu. Ég skora því á stjórnvöld að byggja einn slíkan sem allra fyrst.