第 7 章付録: 2 段階推定量の導出の詳細

最終更新： 2025 年 11 月 3 日

上武康亮・遠山祐太・若森直樹・渡辺安虎
「実証ビジネス・エコノミクス」
第 7 章「価格戦略をダイナミックに考える：
単独エージェント動学モデルの推定［応用編］」
の付録

1　はじめに

この補足資料では、第 7 章で導入した 2 段階推定量に関する導出や各種定理について詳細な説明を行う。

2　行列形式によるインバージョンの導出の詳細

書籍 7.4.1 項「行列形式によるインバージョン」の導出の詳細について説明する。ノーテーションについては書籍を参照されたい。

まず、書籍 (7.2) 式の導出について取り上げよう。(7.2) 式の直前に示した事前の価値関数について、

各状態変数で評価した値を以下のように書くことができる。

$$V(x_1) = \sum_i P(i \mid x_1) \left\{ u(x_1, d) + \beta [g(x_1 \mid x_1, d), \cdots, g(x_{|X|} \mid x_1, d)] \begin{bmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{|X|}) \end{bmatrix} + \psi(x_1, d) \right\}$$

$$\vdots$$

$$V(x_{|X|}) = \sum_i P(i \mid x_{|X|}) \left\{ u(x_{|X|}, d) + \beta [g(1 \mid x_{|X|}, d), \cdots, g(x_{|X|} \mid x_{|X|}, d)] \begin{bmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{|X|}) \end{bmatrix} + \psi(x_{|X|}, d) \right\}$$

この式を上からスタックする (重ね合わせる) ことで、以下の行列形式による (7.2) 式が得られるのである (ノーテーションは書籍参照)。

$$V = \sum_i P(i) \odot [u(i) + \beta G(i) V + \psi(i)]$$

続いて、本式を事前の価値関数のベクトル V について解いていこう。まず、

$$V - \beta \sum_i P(i) \odot [G(i) V] = \sum_i P(i) \odot [u(i) + \psi(i)]$$

この式の左辺の第 2 項についてより細かく展開する。

$$\begin{aligned}
\beta \sum_i P(i) \odot [G(i) V] &= \beta \sum_i \begin{pmatrix} P(i \mid x_1) \\ \vdots \\ P(i \mid x_{|X|}) \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} g(x_1 \mid x_1, d) & \cdots & g(x_{|X|} \mid x_1, d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(1 \mid x_{|X|}, d) & \cdots & g(x_{|X|} \mid x_{|X|}, d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{|X|}) \end{pmatrix} \right] \\
&= \beta \sum_i \begin{pmatrix} P(i \mid x_1) \\ \vdots \\ P(i \mid x_{|X|}) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \sum_{x'} g(x' \mid x_1, i) V(x') \\ \vdots \\ \sum_{x'} g(x' \mid x_{|X|}, i) V(x') \end{pmatrix} \\
&= \beta \sum_i \begin{pmatrix} P(i \mid x_1) g(x_1 \mid x_1, i) & \cdots & P(i \mid x_1) g(x_{|X|} \mid x_1, i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(i \mid x_{|X|}) g(x_1 \mid x_{|X|}, i) & \cdots & P(i \mid x_{|X|}) g(x_{|X|} \mid x_{|X|}, i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{|X|}) \end{pmatrix} \\
&= \beta \sum_i \left[\left(P(i) \mathbf{1}_{(1 \times |X|)} \right) \odot G(i) \right] V
\end{aligned}$$

よって、

$$\left[I_{(|X| \times |X|)} - \beta \sum_i \left(P(i) \mathbf{1}_{(1 \times |X|)} \right) \odot G(i) \right] V = \sum_i P(i) \odot [u(i) + \psi(i)]$$

と書き下すことができ、この式について逆行列を取った計算を行うと、

$$V = \left[I_{(|X|\times|X|)} - \beta \sum_i \left(P(i) \mathbf{1}_{(1\times|X|)} \right) \odot G(i) \right]^{-1} \sum_i P(i) \odot [u(i) + \psi(i)]$$

が得られる。

3　Arcidiacono and Miller (2011) の補題の証明

本節では、書籍 7.4.2 項「有限依存性アプローチ」で用いた

$$V(x) = \psi(x,i) + v(x,i), i = 0, 1$$

について導出を行う。

事前の価値関数 $V(x)$ を以下のように展開する。

$$\begin{aligned} V(x) &= \int \max_d \{v(x,d) + \epsilon(d)\} \, dG(\epsilon) \\ &= \int \max_d \{v(x,d) - v(x,i) + \epsilon(d)\} \, dG(\epsilon) + v(x,i) \end{aligned}$$

ここで選択 i は任意のもので構わない。一般のケースにおいては、

$$\psi(x,i) = \int \max_d \{v(x,d) - v(x,i) + \epsilon(d)\} \, dG(\epsilon)$$

と定義することで、$V(x) = \psi(x,i) + v(x,i)$ と書くことができる。

さて、各選択肢に特有なショック項 $\epsilon(d)$ が独立かつ同一な第 1 種極値分布に従うケースを考えよう。このとき、$\psi(x,i)$ はログサム公式を使うことで以下のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned} \psi(x,i) &= \int \max_d \{v(x,d) - v(x,i) + \epsilon(d)\} \, dG(\epsilon) \\ &= \log \sum_d \exp\left(v(x,d) - v(x,i)\right) + \gamma \end{aligned}$$

ここで γ はオイラー定数である。

さらに、Hotz-Miller のインバージョンより、$v(x,d) - v(x,i) = \log P(d \mid x) - \log P(i \mid x)$ と書くこ

とができる。この式を代入すると、

$$\begin{aligned}\psi(x,i) &= \log \sum_d \exp\log\frac{P(d\mid x)}{P(i\mid x)} + \gamma \\ &= \log \sum_d \frac{P(d\mid x)}{P(i\mid x)} + \gamma \\ &= \log \frac{1}{P(i\mid x)} \sum_d P(d\mid x) + \gamma \\ &= -\log(P(i\mid x)) + \gamma\end{aligned}$$

と得られる。

4 Agguiregabiria and Mira (2002) で用いた等式の証明

本節では書籍 7.4.1 項「行列形式によるインバージョン」の導出で利用した

$$\mathbb{E}[\epsilon(i)\mid i \text{ is optimal}, x] = \gamma - \log P(i\mid x)$$

という性質について導出を行う。

まず、

$$\mathbb{E}[\epsilon(i)\mid i \text{ is optimal}, x] = \mathbb{E}[\epsilon(i)\mid v(x,i)+\epsilon(i)\geq v(x,j)+\epsilon(j), \forall j]$$

として定義される。これは、選択肢 i において最も高い効用が得られることを条件づけしたときの $\epsilon(i)$ に関する期待値である。

以下の導出では状態変数 x については表記を割愛する。(状態変数 x について条件づけした議論を考えてもらえれば良い。) また、選択肢として i と j という 2 つがある状況を考える。[*1] さらに、選択肢のノーテーションとして下付きの文字を使う。

まず、

$$\mathbb{E}[\epsilon_i\mid v_i+\epsilon_i\geq v_j+\epsilon_j, \forall j\neq i] = \frac{1}{P(i)} \underbrace{\int\int \epsilon_i \mathbf{1}\left\{v_i+\epsilon_i\geq v_j+\epsilon_j, \forall j\neq i\right\} dG(\epsilon_i)dG(\epsilon_j)}_{\equiv A} \tag{1}$$

ここで、$G(\epsilon)$ は第 1 種極値分布の分布関数である。後ほど使う密度関数 $g(\epsilon)$ と合わせて以下の記述

[*1] より一般のケースの導出については、StackExchange 'Expectation of the Maximum of iid Gumbel Variables' の記事を参照されたい。https://stats.stackexchange.com/questions/192424/expectation-of-the-maximum-of-iid-gumbel-variables

する。

$$g(\epsilon) = \exp(-\epsilon)\exp\left(-\exp(-\epsilon)\right)$$
$$G(\epsilon) = \exp\left(-\exp(-\epsilon)\right)$$

である。なお、この積分は選択肢特有のショック ϵ_i, ϵ_j に関する多重積分であるが、これらは独立のショックであることに留意されたい。

上記の式の右辺の多重積分の項 A についてさらに展開すると、

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left\{v_i - v_j + \epsilon_i \geq \epsilon_j\right\} dG(\epsilon_j)\right] dG(\epsilon_i)$$

となる。中の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left\{v_i - v_j + \epsilon_i \geq \epsilon_j\right\} dG(\epsilon_j)$ は分布関数で評価することができき、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left\{v_i - v_j + \epsilon_i \geq \epsilon_j\right\} dG(\epsilon_j) &= G\left(v_i - v_j + \epsilon_i\right) \\ &= \exp\left(-\exp(-v_i + v_j - \epsilon_i)\right)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}A &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \exp\left(-\exp(-v_i + v_j - \epsilon_i)\right)\exp(-\epsilon_i)\exp\left(-\exp(-\epsilon_i)\right) d\epsilon_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \exp\left(-\left(1 + \exp(-v_i + v_j)\right)\exp(-\epsilon_i)\right)\exp(-\epsilon_i) d\epsilon_i\end{aligned}$$

この積分を計算するべく、いくつかのノーテーションの定義を行う。まず、$D = 1 + \exp(-v_i + v_j)$ とする。そのうえで、以下の変数 t を用いた置換積分を行う。

$$t = D\exp(-\epsilon_i)$$

ここで、

$$dt = -D\exp(-\epsilon_i) d\epsilon_i$$

である。また、積分の範囲について考えると、$\epsilon_i \to \infty$ のとき、$t \to 0$ であり、$\epsilon_i \to -\infty$ のとき、$t \to \infty$ である。この点を踏まえて積分の計算を進めていくと

$$A = \int_{\infty}^{0} \left(\log(D) - \log(t)\right)\exp\left(-t\right)\left(-\frac{1}{D}\right) dt$$

となる。さらに展開すると、

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{D}\left[\log(D)\int_0^\infty \exp(-t)dt - \int_0^\infty (\log(t)\exp(-t))\,dt\right] \\
&= \frac{\log D}{D}\left(\int_0^\infty \exp(-t)dt\right) - \frac{1}{D}\int_0^\infty (\log(t)\exp(-t))\,dt
\end{aligned}
$$

ここで、$\int_0^\infty \exp(-t)dt = 1$ であり、また $-\int_0^\infty (\log(t)\exp(-t))\,dt = \gamma$ となりこれはオイラー定数となる。したがって、

$$
A = \frac{\log D + \gamma}{D}
$$

となる。

ここで、D について書き直すと、

$$
\begin{aligned}
D &= 1 + \exp(-v_i + v_j) \\
&= \exp(-v_i)\,(\exp(v_i) + \exp(v_j)) \\
&= \frac{\exp(v_i) + \exp(v_j)}{\exp(v_i)} \\
&= \frac{1}{P(i)}
\end{aligned}
$$

となる。なお、今考えている設定では、選択肢 i, j の 2 つであるため、

$$
P(i) = \frac{exp(v_i)}{exp(v_i) + \exp(v_j)}
$$

となることに留意されたい。

よって、元の (1) 式に戻ると、

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\epsilon_i \mid v_i + \epsilon_i \geq v_j + \epsilon_j, \forall j \neq i] &= \frac{1}{P(i)}\frac{\log D + \gamma}{D} \\
&= \log D + \gamma \\
&= \gamma - \log(P(i))
\end{aligned}
$$

として目的のものが得られた。