ロボティクス
（ロボット工学基礎論）

第3回　運動学2

李 周浩

4.3.2 運動学（例）

３リンクロボットの例

手先の位置姿勢ベクトル

$$\boxed{r = [x, y, \theta]^T}$$

関節角ベクトル

$$\boxed{q = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T}$$

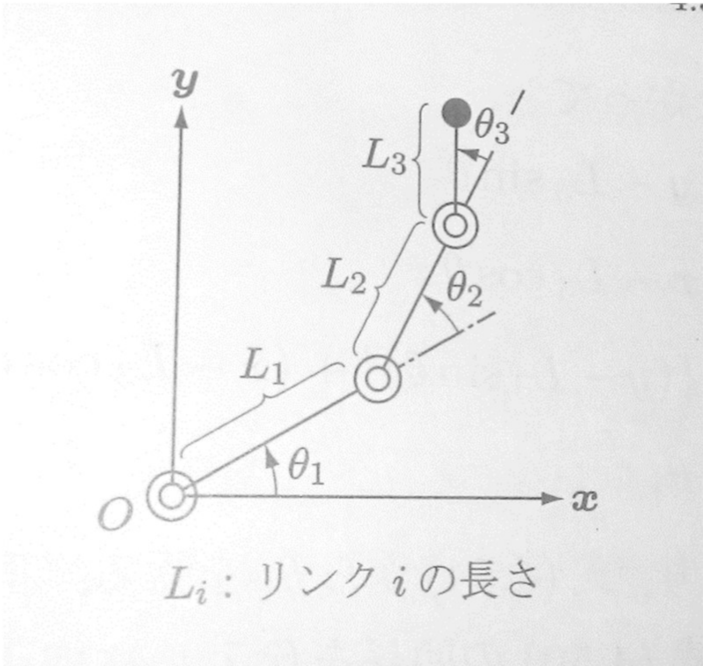


図 4.16　3 関節ロボットアーム

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$$

逆運動学・・・手先位置姿勢を与えて，それを実現する関節角ベクトルを求める．

4.3.2 関節変数と手先位置姿勢の一般的関係Ｐ５６

4.3.2 関節変数と手先位置姿勢の一般的関係 P５６

関節変数ベクトル

$$\boldsymbol{q} = [q_1\, q_2 \cdots q_n]^T \quad (\in R^{n\times 1})$$

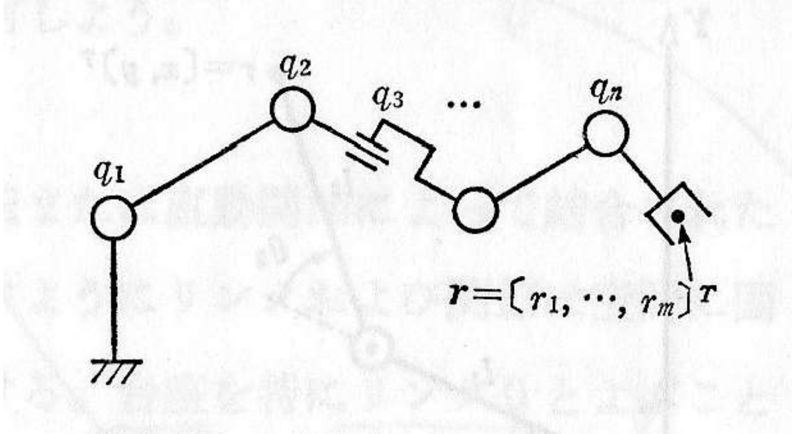


図 2·12　n 自由度マニピュレータ

手先位置姿勢ベクトル

$$\boldsymbol{r} = [r_1\, r_2 \cdots r_m]^T \quad (\in R^{m\times 1})$$

手先の位置姿勢と，関節変数ベクトルの運動学的関係

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$　　順運動学

$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{r})$　　逆運動学（一意とは限らない）

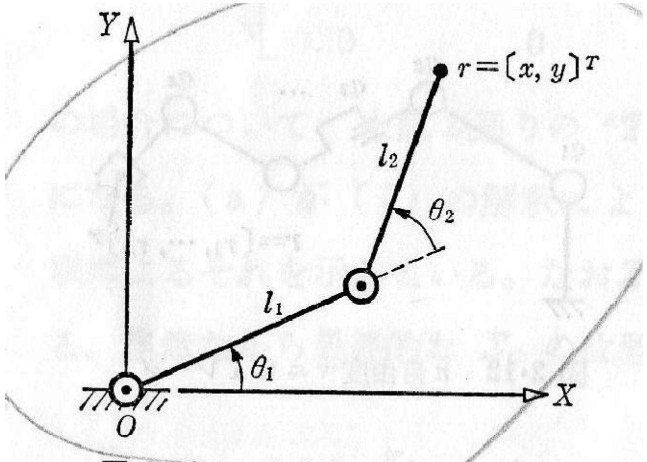
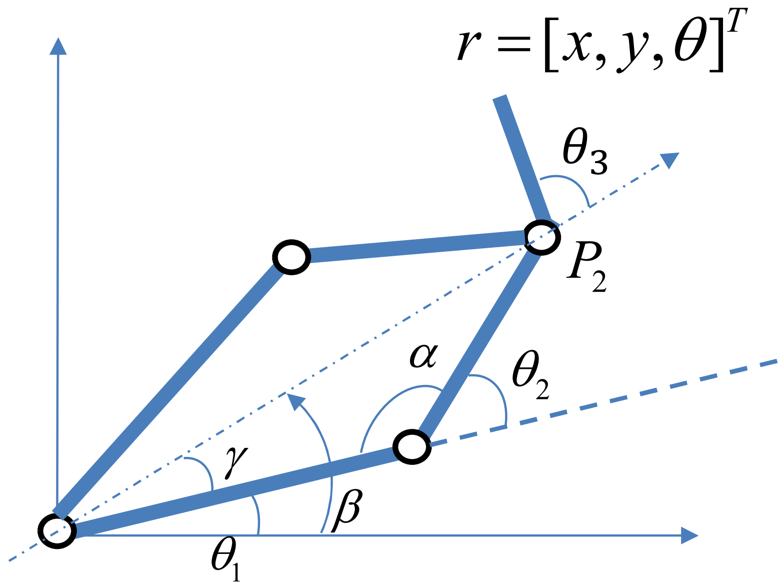


図 2·13　2 自由度マニピュレータ

【例】　2リンクロボットの運動学

平面運動で，手先の「位置」のみが問題となるとき，　　m=2
平面運動で，手先の位置と，回転姿勢が問題となるとき，m=3

逆運動学



目標の手先位置姿勢ベクトル　$r=[x,y,\theta]^T$
を実現する関節角ベクトル　$q=[\theta_1,\theta_2,\theta_3]$
を求める．

第２リンク先端の位置ベクトルP_2は次式で
与えられる．

$$P_2 := \begin{bmatrix} P_2^{\,x} \\ P_2^{\,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - L_3 Cos\theta \\ y - L_3 Sin\theta \end{bmatrix}$$

図中の角度αは次式で求められる．

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{{p_{2x}}^2 + p_{2y}^2 - {L_1}^2 - {L_2}^2}{-2L_1L_2}$$

このαを用いて，角度θ_2は $\theta_2 = \pm(\pi - \alpha)$　で与えられる．
図中の角度γ とβは次式で求められる．

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{{L_2}^2 - {p_{2x}}^2 - {p_{2y}}^2 - L_1^2}{-2\sqrt{{p_{2x}}^2 + {p_{2y}}^2}\cdot L_1}\right) \qquad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{p_{2y}}{p_{2x}}\right)$$

これらを用いて，角度θ_1は　$\theta_1 = \beta \mp \gamma$　（θ1との対応注意）で求められる．
θ_3は，次式で算出される．　$\theta_3 = \theta - \theta_1 - \theta_2$

２リンクロボットのヤコビ行列を求める

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = l_2 \sin\theta_2 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{x} = -l_1 \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$
$$\dot{y} = l_1 \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

4.4 速度の解析

4.4.1 速度の関係

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \qquad \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1,\cdots,q_n) \\ \cdots \\ f_m(q_1,\cdots,q_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dr_1/dt \\ \cdots \\ dr_m/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} df_1(q_1,\cdots,q_n)/dt \\ \cdots \\ df_m(q_1,\cdots,q_n)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial q_1\,\dot{q}_1 + \cdots + \partial f_1/\partial q_n\,\dot{q}_n \\ \cdots \\ \partial f_m/\partial q_1\,\dot{q}_1 + \cdots + \partial f_m/\partial q_n\,\dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial q_1 & \cdots & \partial f_1/\partial q_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f_m/\partial q_1 & \cdots & \partial f_m/\partial q_n \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \cdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = J(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} \qquad J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}$$ ヤコビ行列

4.4.1 手先位置姿勢の速度

- 手先座標系の位置姿勢ベクトル

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_H \\ \boldsymbol{\eta}_H \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{p}_H := [p_x, p_y, p_z]^T$ 手先位置ベクトル

$\boldsymbol{\eta}_H := [\phi, \theta, \psi]^T$ オイラー角

- 速度の表現方法

１）式(1)の時間微分

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_H \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_H \end{bmatrix}$$

２）<u>角速度ベクトル</u>を利用する方法

$\boldsymbol{\omega}_H$：瞬間回転軸方向を向き，回転角速度に等しい大きさを持つベクトル

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_H \\ \boldsymbol{\omega}_H \end{bmatrix}$$

図4.20参照
右ねじの方向が正

注意： $\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_H \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_H \end{bmatrix}$ $\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_H \\ \boldsymbol{\omega}_H \end{bmatrix}$ は，<u>異なる要素を</u>持つベクトル

オイラー角の時間微分←→角速度ベクトルの変換

注意： $\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_H \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_H \end{bmatrix}$ $\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_H \\ \boldsymbol{\omega}_H \end{bmatrix}$ は，<u>異なる要素を</u>持つベクトル

天下り的であるが， $\boldsymbol{\omega}_H = \Pi \dot{\boldsymbol{\eta}}$ という関係が成立するとする.

変換行列 $\prod$ を求める.

オイラー角の微分値それぞれの回転速度を求め，加える.

$$\boldsymbol{\omega}_H = \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{\theta} R(z,\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} R(z,\phi) R(y',\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} -S_\phi \\ C_\phi \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} C_\phi S_\theta \\ S_\phi S_\theta \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix}} \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

4.4.2 与えられた手先速度を実現する関節速度

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = J(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}$$

において，ヤコビ行列 J が正方行列で，かつ正則であれば，

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = J^{-1}(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

が成立する．

関節速度

手先速度

冗長ロボットの場合，J が正則とならず，解が一意に定まらない．（任意性）

冗長ロボットの場合

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = J(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} \qquad J \in R^{m \times n} \qquad m > n\text{のとき}$$

$rank(J) = n$ のとき

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = J^{+}(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + (I - J^{+}J)\boldsymbol{k}$$

$J^{+} := J^{T}(JJ^{T})^{-1}$ ：擬似逆行列(一般化逆行列)

$\boldsymbol{k}$ $(\in R^{n \times 1})$ 任意のベクトル

注意： $rank(J) = n$より

$\det(JJ^{T}) \neq 0$

検算

（範囲外）

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = J^{+}(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + (I - J^{+}J)\boldsymbol{k} \quad ------(1)$$ が

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = J(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} \quad -----(2)$$

の解であることを確認せよ。

$$J^{+} := J^{T}(JJ^{T})^{-1}$$

式(2)の右辺に（１）を代入

$$J(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = JJ^{+}\dot{r} + J(I - J^{+}J)k = JJ^{T}(JJ^{T})^{-1}\dot{r} + (J - JJ^{T}(JJ^{T})^{-1})k$$

$= \dot{r} =$ 式(2)の左辺

ゆえに，式（１）は式（２）の解である.

4.6.1 特異姿勢　　2 リンクの例にする.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = J(\boldsymbol{q})\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}$$

ヤコビ行列がランク落ちした場合

手先速度が出せない方向が存在する.
→　特異姿勢とよぶ　(回避すべき状態)

【2リンクロボットの 特異姿勢】

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{bmatrix} -l_1S_1 - l_2S_{12} & -l_2S_{12} \\ l_1C_1 + l_2C_{12} & l_2C_{12} \end{bmatrix}$$

であるから

$$\det \boldsymbol{J}_r = l_1 l_2 S_2$$

det J_r = 0 となるのは，　θ_2= 0 and 180deg

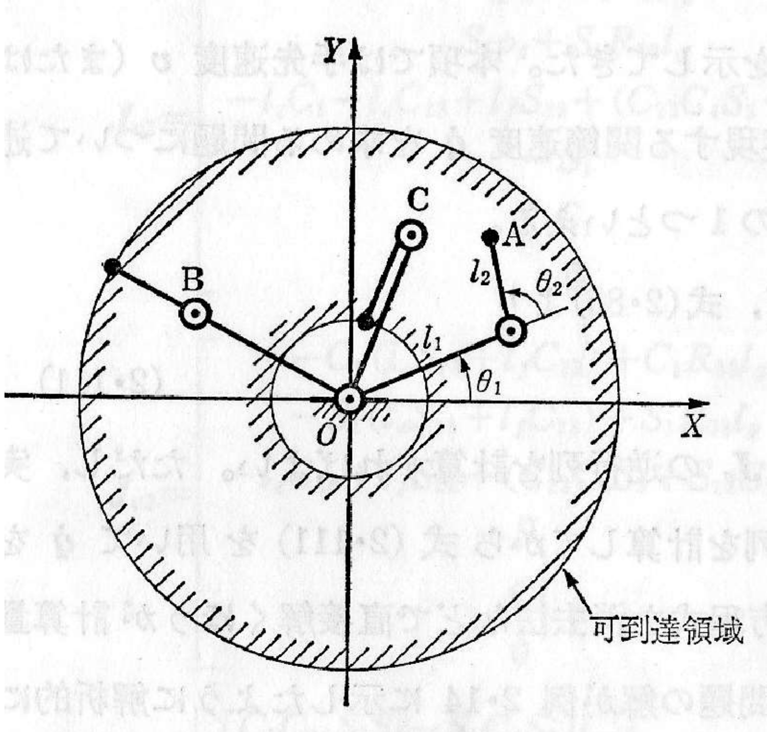


図 2·38　2 自由度アームの特異姿勢