問題 4.1 (Lv.2)

次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = 2x^3 - x + 1$　(2) $f(x) = e^x \cos x$　(3) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(4) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$　(5) $f(x) = x^2 \log x$　(6) $f(x) = \sin^3 x$

問題 4.2 (Lv.2)

次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = \sin^{-1} \dfrac{x}{3}$　(2) $f(x) = x \cos^{-1} x$　(3) $f(x) = \tan^{-1} \sqrt{x}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\sinh x}$　(5) $f(x) = \cosh^2 x$　(6) $f(x) = \tanh \dfrac{1}{x}$

問題 4.3 (Lv.3)

次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^{2x} \sin 3x$　(2) $f(x) = \log |\tan \sqrt{x}\,|$

(3) $f(x) = \sin^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$　(4) $f(x) = x^{\sin x}\ \ (x > 0)$

問題 4.4 (Lv.3)

次の関数 $f(x)$ が原点 $x = 0$ で微分可能かどうか調べよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　(2) $f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \geqq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases}$

問題 4.5 (Lv.3)

(1) 微分の定義の式から, 微分公式 $(e^x)' = e^x$ を示せ.

(2) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を用いて, 微分公式 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$ を示せ.

(3) 微分公式 $(\sinh x)' = \cosh x,\ (\cosh x)' = \sinh x$ を示せ.

問題 4.6 (Lv.5)

(1) $f(x), g(x)$ が微分可能なとき, $\bigl(f(x) + g(x)\bigr)' = f'(x) + g'(x)$ を示せ.

(2) $y = f(x)$ は微分可能とし, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在するとする.
$f'(x)$ の値が 0 でないとき, $\{f^{-1}(y)\}' = \dfrac{1}{f'\bigl(f^{-1}(y)\bigr)}$ $\left(\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)$ を示せ.

問題 4.1 (解答)

(1) 微分の線形性より, $(2x^3-x+1)'=2(x^3)'-x'+1'=2{\cdot}3x^2-1+0=6x^2-1$

(2) 積の微分より, $(e^x\cos x)'=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'$ だから,
$(e^x\cos x)'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

(3) $(\sqrt{x}\,)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ だから, 合成関数の微分 $\left(\sqrt{\square}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\square}}\cdot\square'$ より,
$\left(\sqrt{x^2+1}\,\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) 商の微分より, $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)'=\dfrac{(\tan x)'\,x-(\tan x)\,x'}{x^2}$ だから,
$\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)'=\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}\,x-(\tan x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{x-\tan x\,\cos^2 x}{x^2\cos^2 x}\ \left(=\dfrac{x-\sin x\,\cos x}{x^2\cos^2 x}\right)$

(5) 積の微分より, $(x^2\log x)'=(x^2)'\log x+x^2\,(\log x)'$ だから,
$(x^2\log x)'=2x\log x+x^2\,\dfrac{1}{x}=2x\log x+x$

(6) $(x^3)'=3x^2$ だから, 合成関数の微分 $(\square^3)'=3\,\square^2\cdot\square'$ より,
$(\sin^3 x)'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=3\sin^2 x\,\cos x\quad\left(\sin^3 x=(\sin x)^3\right)$

問題 4.2 (解答)

(1) $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だから, 合成関数の微分 $\left(\sin^{-1}\square\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\square^2}}\cdot\square'$ より,
$\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{x}{3}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{9-x^2}{9}}}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}\quad(-3<x<3)$

(2) 積の微分より, $(x\cos^{-1}x)'=x'\cos^{-1}x+x\,(\cos^{-1}x)'$ だから,
$(x\cos^{-1}x)'=1\cdot\cos^{-1}x+x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\cos^{-1}x-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$

(3) $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ だから, 合成関数の微分 $\left(\tan^{-1}\square\right)'=\dfrac{1}{1+\square^2}\cdot\square'$ より,
$\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{1+(\sqrt{x}\,)^2}\cdot(\sqrt{x}\,)'=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}\quad(x>0)$

(4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ だから, 合成関数の微分 $\left(\dfrac{1}{\square}\right)'=-\dfrac{1}{\square^2}\cdot\square'$ より, (商の微分でも可)
$\left(\dfrac{1}{\sinh x}\right)'=-\dfrac{1}{(\sinh x)^2}\cdot(\sinh x)'=-\dfrac{1}{\sinh^2 x}\cdot\cosh x=-\dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x}$

(5) $(x^2)'=2x$ だから, 合成関数の微分 $(\square^2)'=2\,\square\cdot\square'$ より, $\left(\cosh^2 x=(\cosh x)^2\right)$
$(\cosh^2 x)'=2\cosh x\cdot(\cosh x)'=2\cosh x\,\sinh x\ \left(=\sinh 2x\right)$

(6) $(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ だから, 合成関数の微分 $(\tanh\square)'=\dfrac{1}{\cosh^2\square}\cdot\square'$ より,
$\left(\tanh\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{\cosh^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{\cosh^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2\cosh^2\frac{1}{x}}$

問題 4.3 (解答)

(1) 積の微分より, $(e^{2x}\sin 3x)' = (e^{2x})'\sin 3x + e^{2x}(\sin 3x)'$ だから,
合成関数の微分 $\left(e^{\square}\right)' = e^{\square}\cdot \square'$, $(\sin\square)' = (\cos\square)\cdot\square'$ を用いて,
$(e^{2x}\sin 3x)' = (e^{2x}\cdot 2)\sin 3x + e^{2x}\big((\cos 3x)\cdot 3\big) = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$

(2) 合成関数の微分 $(\log|\square|)' = \dfrac{1}{\square}\cdot\square'$ の後に $(\tan\triangle)' = \dfrac{1}{\cos^2\triangle}\cdot\triangle'$ を用いて,
$(\log|\tan\sqrt{x}\,|)' = \dfrac{1}{\tan\sqrt{x}}\cdot(\tan\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{\tan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}\,)'$
$= \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\sin 2\sqrt{x}}$

(3) 商の微分より. $\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x\cdot(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$
合成関数の微分 $\left(\sin^{-1}\square\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\square^2}}\cdot\square'$ の後に上記を用いて,
$\left(\sin^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$
$= \dfrac{1+x^2}{2|x|}\cdot\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)}\ \left(x>0\Rightarrow\dfrac{-2}{1+x^2},\ x<0\Rightarrow\dfrac{2}{1+x^2}\right)$

(4) $f(x) = g(x)^{h(x)}$ の形なので, 対数微分法を使う. $\big(x>0$ のとき, $x^{\sin x}>0\big)$
$\log|f(x)| = \log|x^{\sin x}| = \log x^{\sin x} = (\sin x)(\log x)$ の両辺を微分すると,
左辺は合成関数の微分 $(\log|\square|)' = \dfrac{1}{\square}\cdot\square'$, 右辺は積の微分を用いて,
$\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = (\cos x)(\log x) + (\sin x)\dfrac{1}{x} = \cos x\ \log x + \dfrac{\sin x}{x}$ だから,
$f'(x) = f(x)\left(\cos x\ \log x + \dfrac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x\ \log x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

問題 4.4 (解答)

(1) $x=0$ で $f(x)$ の値は 0 $\big(f(0)=0\big)$, $x\neq 0$ では $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$
$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\sin\dfrac{1}{h}$
$h\to 0$ のとき, $\dfrac{1}{h}\to\infty$ となり, $\sin\dfrac{1}{h}$ は収束しない (振動).
$f'(0)$ の値が存在しないので, $f(x)$ は原点 $x=0$ で微分可能でない.

(2) $x\geqq 0$ では $f(x)=\sin x$, 特に $f(0)=0$, $x<0$ では $f(x) = x^2+x$
$f'_+(0) = \lim\limits_{h\to +0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to +0}\dfrac{\sin h - 0}{h} = \lim\limits_{h\to +0}\dfrac{\sin h}{h} = 1$
$f'_-(0) = \lim\limits_{h\to -0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to -0}\dfrac{(h^2+h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to -0}(h+1) = 1$
ゆえに, 右側微分係数 $f'_+(0)$ と左側微分係数 $f'_-(0)$ は同じ値 1 になる.
よって, $f'(0)=1$ となり, $f(x)$ は原点 $x=0$ で微分可能になる.

問題 4.5 (解答)

(1) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ より, $(e^x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h}\, e^x$

$k = e^h - 1$ とおくと, $e^h = 1+k$ から $h = \log(1+k)$, また, $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$

$\dfrac{e^h-1}{h} = \dfrac{k}{\log(1+k)} = \dfrac{1}{\frac{1}{k}\log(1+k)} = \dfrac{1}{\log(1+k)^{\frac{1}{k}}}$ だから,

$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h}\, e^x = \lim_{k\to 0} \dfrac{1}{\log(1+k)^{\frac{1}{k}}}\, e^x = \dfrac{1}{\log e}\, e^x = e^x$

[対数関数の微分公式, 逆関数の微分法を既知とすれば,

$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$ より, $(e^x)' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$]

(2) 底の変換公式より, $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a} = \dfrac{1}{\log a}\log x$ だから, 微分の線形性を使うと,

$(\log_a x)' = \left(\dfrac{1}{\log a}\log x\right)' = \dfrac{1}{\log a}(\log x)' = \dfrac{1}{\log a}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\log a}$ $\left(\dfrac{1}{\log a}\ \text{は定数}\right)$

(3) $(\sinh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$(\cosh x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

問題 4.6 (解答)

(1) 仮定より, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $g'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ が存在する.

極限値が存在する場合は, 極限操作と四則演算 (和) を交換できるので,

$$\begin{aligned}\big(f(x)+g(x)\big)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h)+g(x+h)\big) - \big(f(x)+g(x)\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

(2) $f(x)$ が微分可能より, $f(x)$ は連続で $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在する.

$y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在するので, 点 x と y は 1 対 1 に対応する.

ゆえに, 連続関数 f は (点 x を含む区間上で) 狭義単調増加または減少になる.

よって, 逆関数 f^{-1} も (対応する区間上で) 連続関数になる. (問題 3.6 を参照)

$h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$ とすると, $f^{-1}(y+k) = f^{-1}(y) + h = x + h$ より,

$y + k = f(x+h)$ だから, $k = f(x+h) - y = f(x+h) - f(x)$ となり,

$\dfrac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k} = \dfrac{h}{f(x+h)-f(x)} = \dfrac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ $\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}\right)$

f と f^{-1} が連続な 1 対 1 対応より, $k\,(\neq 0) \to 0 \Leftrightarrow h\,(\neq 0) \to 0$ となる.

仮定より, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \neq 0$ だから, 極限と商は交換できるので,

$\{f^{-1}(y)\}' = \lim_{k\to 0} \dfrac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$