

コンピュータグラフィックス(R)

第2回：物体をシーンに配置する

コンピュータグラフィックス

- 到達目標
 - コンピュータグラフィックスの技術体系を理解
 - 背景的な数学的知識も習得する
- 事前に履修しておくことが望まれる科目
 - 数学3・4(ベクトルの内積と外積, 行列と一次変換)
- 毎回出席をとる
- 教科書
 - コンピュータグラフィックス, CG-ARTS協会

—成績評価方法—

- 平常点評価 100%
 - テストを予定(詳細は後日アナウンス)
- 開催日時
 - 復習テスト(1): 50%
 - **第8回講義**
 - 復習テスト(2): 50%
 - **第15回講義**
 - 両日とも, 再試験の予定はありません.
- 毎回, 出席をとります.(成績評価に反映させることもありうる.)

講義資料

- 毎回の授業の直前までに、講義スライドのPDF版をmanaba+Rにアップロードします.

出席



<https://ctat.ritsumei.ac.jp>

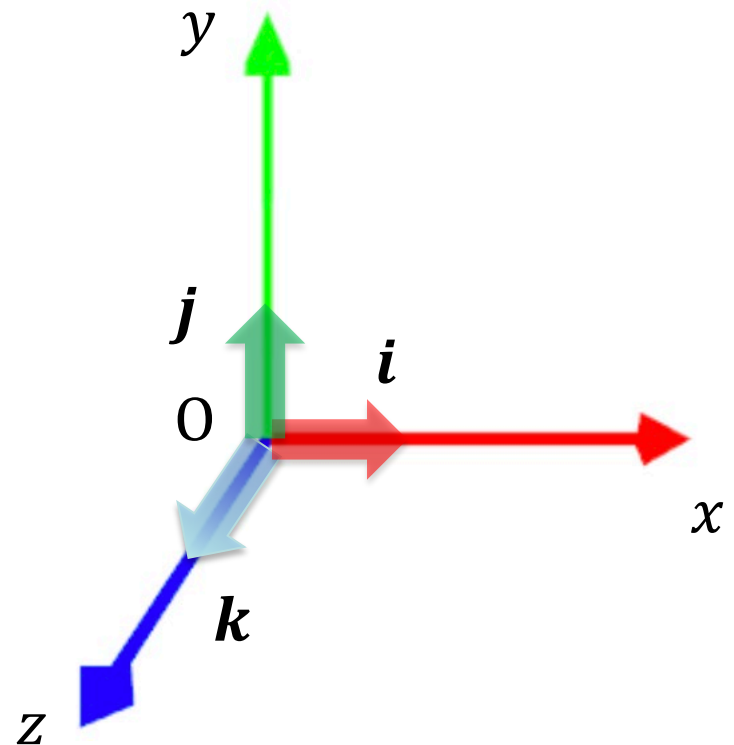
受付番号は授業中にアナウンスします.

シーンとは

問:「座標系」を一つ定義するために必要な情報は何だろうか？

答

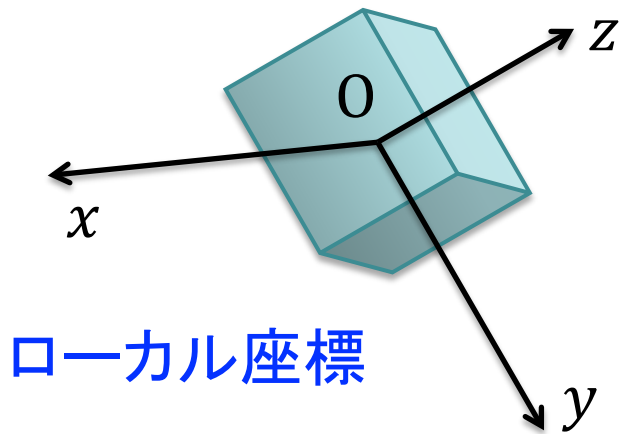
- 原点 0 の位置
- 3つの座標軸 x, y, z の方向
基本ベクトル(基底ベクトル) i, j, k を与える
($|i| = |j| = |k| = 1$)



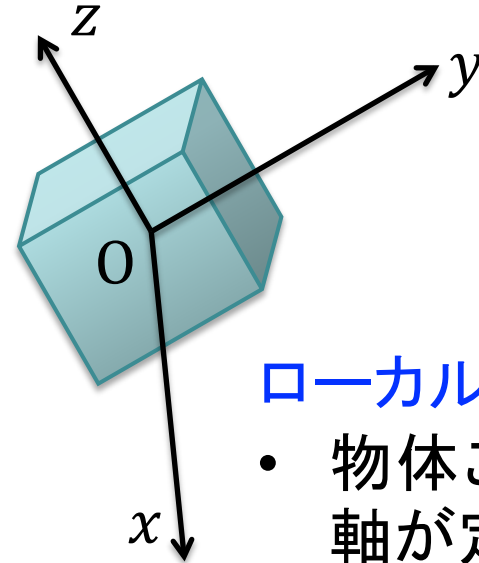
シーンとは

- 「シーン」とはCGで描かれる形状群を配置した空間のことである.
- 演劇の「シーン」が、役者、大道具、小道具などが配置された舞台上の空間であるのと同様である.
- シーンに置かれる形状群は、フラットに置かれるのではなく、階層構造を持つこともある
- シーンに形状を配置する
＝形状を記述する「ローカル座標」を「ワールド座標」に変換する

シーンとは

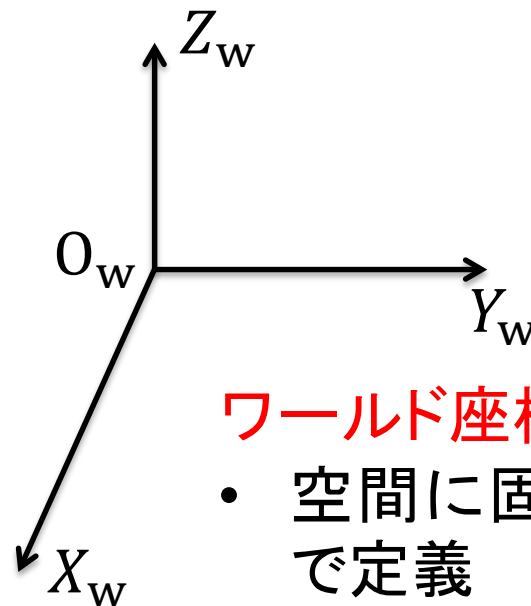


ローカル座標



ローカル座標

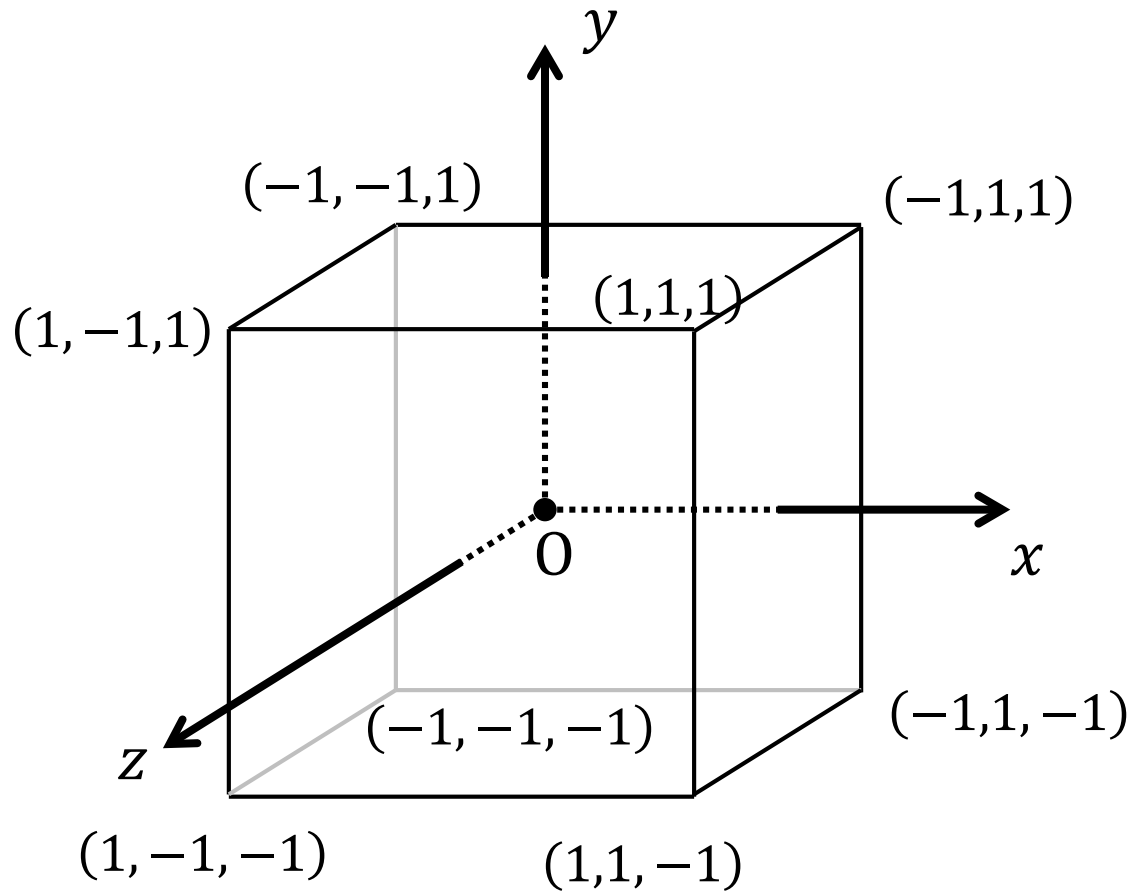
- 物体ごとに座標軸が定義される
- シーン内に物体の数だけ存在



ワールド座標

- 空間に固定された原点と座標軸で定義
- シーン内に1つだけ

ローカル座標による形状定義



物体に定義されたローカル座標による立方体の定義

ワールド座標とローカル座標(まとめ)

- 空間(シーン)の中に固定的に設置された座標系を「**ワールド座標**」という.
 - 通常は一つのシーンに一つだけ
 - 図形の描画は, 最終的にこの座標系で行われる
- シーン内に配置される個々の形状に貼り付けられた座標系を「**ローカル座標**」(オブジェクト座標, 局所座標)という
 - 配置される形状ごとに一つずつ存在する.

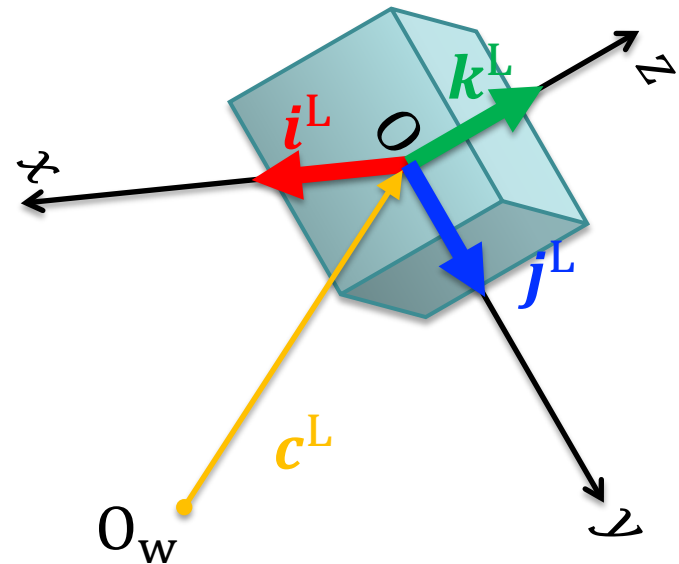
シーン内への形状の「配置」

- シーン内に配置される個々の形状は、「**形状情報**」と「**配置情報**」を持つ
 - (1) まず、記述に便利なローカル座標で定義される(形状情報の設定)
 - (2) 次に、シーン内に適当な「位置」と「向き」で配置される(配置情報の決定)
- 配置とは、数学的には、**ローカル座標** ⇒ **ワールド座標** という**座標変換**のことである

ローカル座標 ⇒ ワールド座標

- 点 P がローカル座標の成分表示で $(x^L, y^L, z^L)_{\text{local}}$ と表されているとする.
⇒ 点 P のワールド座標での成分を求めたい.
 - 最終的な描画はワールド座標でなされる
- ローカル座標の「基本ベクトル」と「原点」が, ワールド座標の成分表示で以下であるとする:

$$\begin{aligned} i^L &= (i_x^L, i_y^L, i_z^L)_{\text{world}} \\ j^L &= (j_x^L, j_y^L, j_z^L)_{\text{world}} \\ k^L &= (k_x^L, k_y^L, k_z^L)_{\text{world}} \\ c^L &= (c_x^L, c_y^L, c_z^L)_{\text{world}} \end{aligned}$$



ローカル座標 \Rightarrow ワールド座標

- 点 P の位置ベクトル r は, ローカル座標の基本ベクトルと原点の位置ベクトルを用いて, 以下のように表現できる:

$$\mathbf{r} = x^L \mathbf{i}^L + y^L \mathbf{j}^L + z^L \mathbf{k}^L + \mathbf{c}^L \quad (*)$$

※ 成分でなくベクトルで表現されているので, 特定の座標系には依存しない表現

- r のワールド座標成分を求めて「配置」したい


$$\mathbf{r} = (x^W, y^W, z^W)_{\text{world}}$$

以下では省略

- 式 (*) において, $\mathbf{i}^L, \mathbf{j}^L, \mathbf{k}^L, \mathbf{c}^L$ をワールド座標で成分表示すればよい.

ローカル座標 \Rightarrow ワールド座標

$$\mathbf{r} = x^L \mathbf{i}^L + y^L \mathbf{j}^L + z^L \mathbf{k}^L + \mathbf{c}^L \quad (*)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{i}^L &= (i_x^L, i_y^L, i_z^L)_{\text{world}} & \mathbf{j}^L &= (j_x^L, j_y^L, j_z^L)_{\text{world}} \\ \mathbf{k}^L &= (k_x^L, k_y^L, k_z^L)_{\text{world}} & \mathbf{c}^L &= (c_x^L, c_y^L, c_z^L)_{\text{world}} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x^W \\ y^W \\ z^W \end{bmatrix} = x^L \begin{bmatrix} i_x^L \\ i_y^L \\ i_z^L \end{bmatrix} + y^L \begin{bmatrix} j_x^L \\ j_y^L \\ j_z^L \end{bmatrix} + z^L \begin{bmatrix} k_x^L \\ k_y^L \\ k_z^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x^L \\ c_y^L \\ c_z^L \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x^W \\ y^W \\ z^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x^L & j_x^L & k_x^L \\ i_y^L & j_y^L & k_y^L \\ i_z^L & j_z^L & k_z^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^L \\ y^L \\ z^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x^L \\ c_y^L \\ c_z^L \end{bmatrix}$$

ローカル座標からワールド座標への変換は、基本ベクトルを並べた 3×3 行列と原点の位置ベクトルを用いて行える。

ローカル座標 \Rightarrow ワールド座標

- 同次座標

- ベクトル: 第4成分に1を加えて4次元化

$$(x, y, z) \Rightarrow (x, y, z, 1)$$

- 行列: 座標変換には第4行が $(0,0,0,1)$ の 4×4 行列を用いる.
- 4×4 行列と4次元ベクトルで座標変換を計算し, 最後に3次元に戻す.
- 回転や平行移動を行列とベクトルの積で表現できる.

$$\begin{bmatrix} a & d & g & j \\ b & e & h & k \\ c & f & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ローカル座標 \Rightarrow ワールド座標

$$\mathbf{r} = x^L \mathbf{i}^L + y^L \mathbf{j}^L + z^L \mathbf{k}^L + \mathbf{c}^L \quad (*)$$

$$\begin{bmatrix} x^W \\ y^W \\ z^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x^L & j_x^L & k_x^L \\ i_y^L & j_y^L & k_y^L \\ i_z^L & j_z^L & k_z^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^L \\ y^L \\ z^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x^L \\ c_y^L \\ c_z^L \end{bmatrix}$$

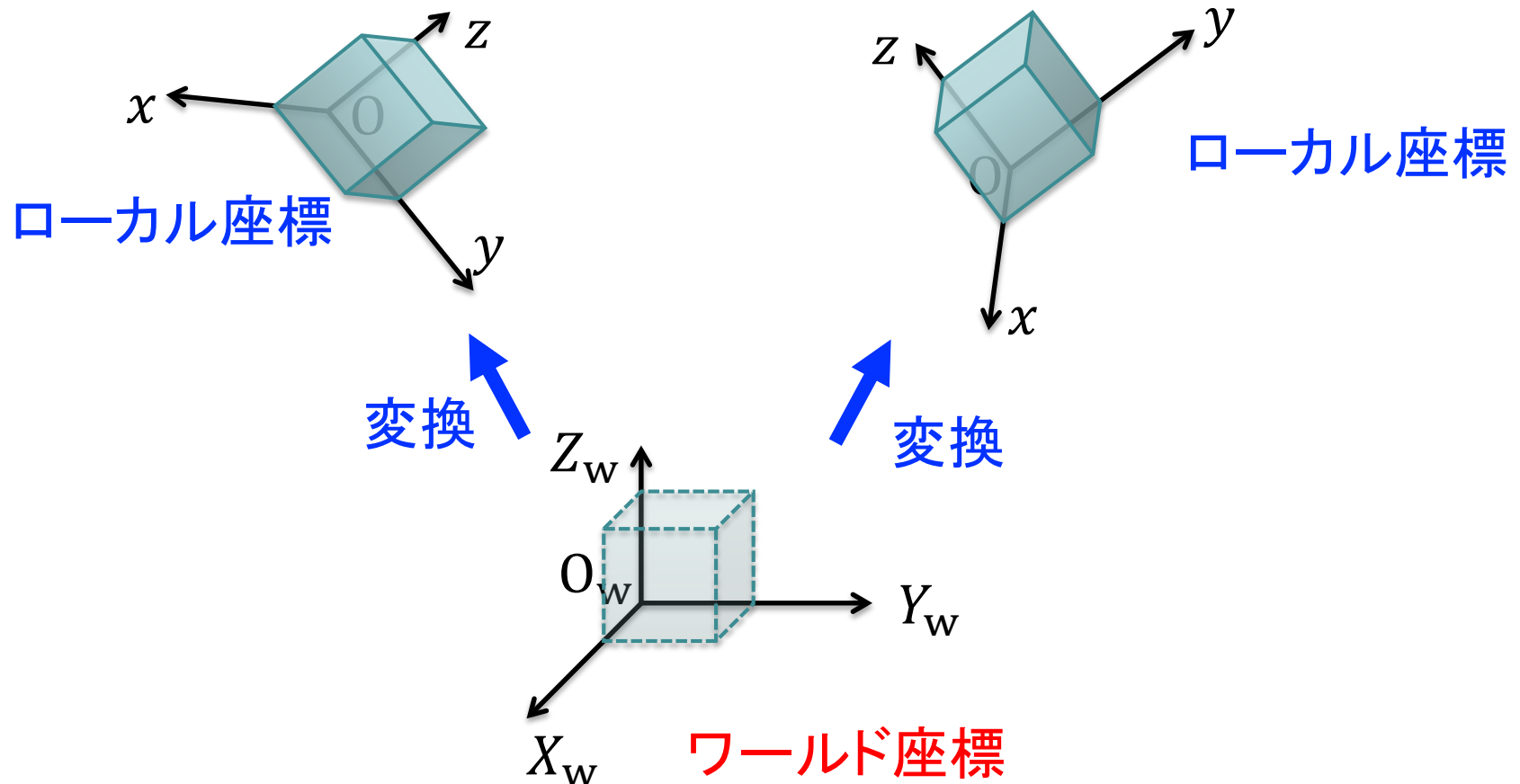


$$\begin{bmatrix} x^W \\ y^W \\ z^W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x^L & j_x^L & k_x^L & c_x^L \\ i_y^L & j_y^L & k_y^L & c_y^L \\ i_z^L & j_z^L & k_z^L & c_z^L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^L \\ y^L \\ z^L \\ 1 \end{bmatrix}$$

ローカル座標からワールド座標への変換は、基本ベクトルと原点の位置ベクトルを並べた 4×4 行列で表される**アフィン変換 (affine transform)** となる。

ローカル座標 \Rightarrow ワールド座標 (まとめ)

- 形状をワールド座標に配置するには？
 - 全ての頂点に対してアフィン変換を実行
 - 得られた頂点を変換前と同様に接続



ローカル座標 \Rightarrow ワールド座標 (直観的理解)

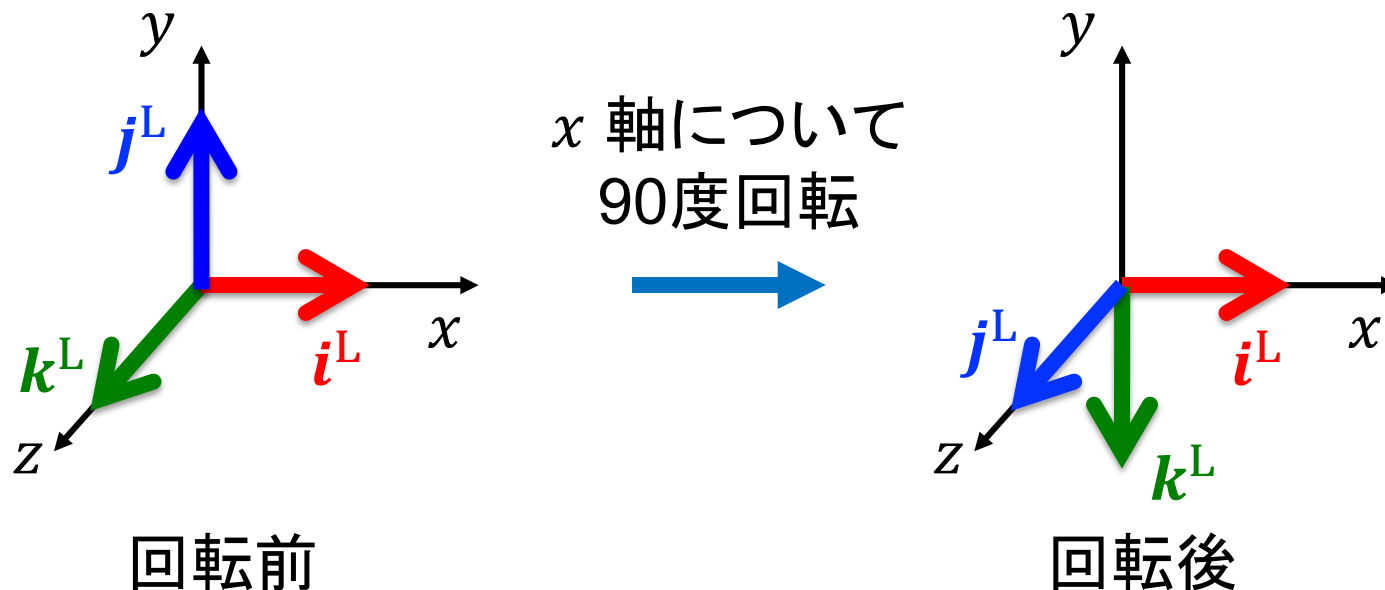
- シーン構築の直感的イメージ
 1. はじめは, ローカル座標とワールド座標が一致
 - 座標軸が重なっているというイメージ
 - この状態で形状を作る (設計する)
 2. 平行移動, 回転などのアフィン変換によって, ローカル座標の座標軸が, ユーザの望む場所と向きで配置される
 - 座標軸と一緒に形状も配置される

考えてみよう(1): 回転

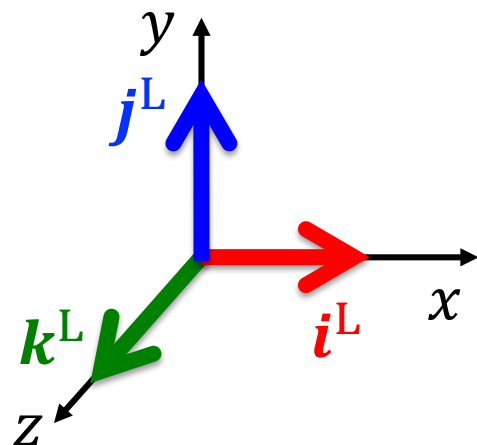
問: ローカル座標で定義された形状を, x 軸のまわりに90度回転して配置する変換行列を同時座標系を用いて表そう.

「考えてみよう(1)：回転」の答え

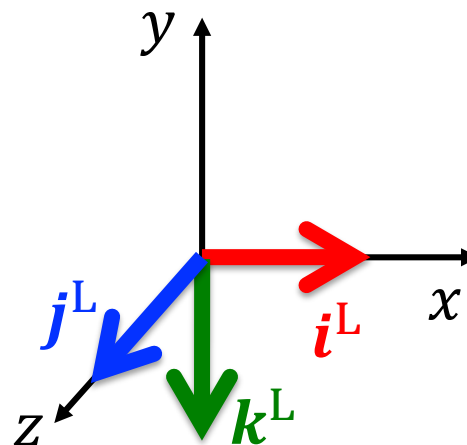
- ローカル座標を定義する3つの基本ベクトルが、回転によってどのように変換されるかを考える.



「考えてみよう(1)：回転」の答え



x 軸について
90度回転

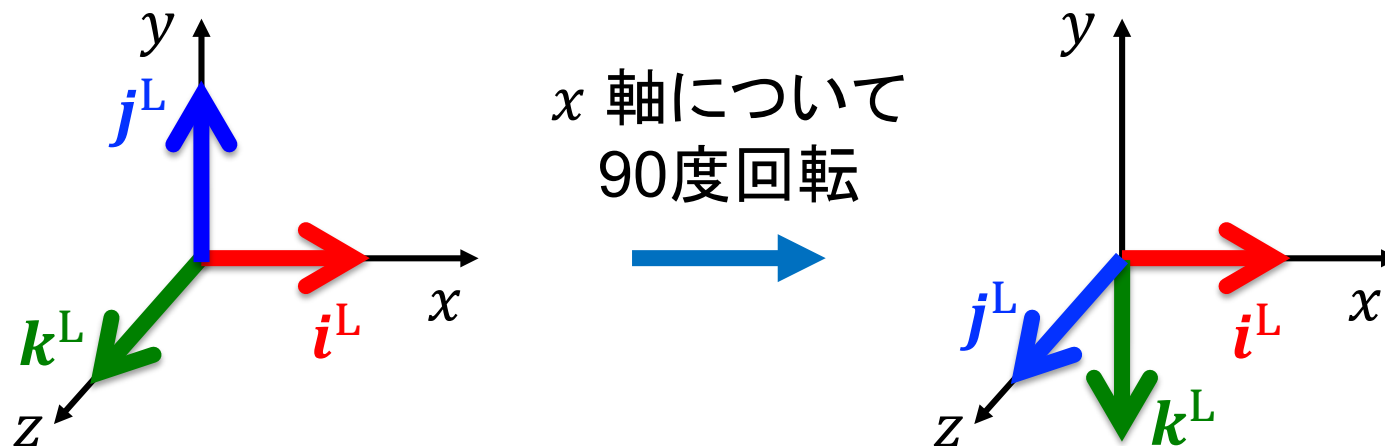


$$i^L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$i^L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k^L = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} i_x^L & j_x^L & k_x^L & c_x^L \\ i_y^L & j_y^L & k_y^L & c_y^L \\ i_z^L & j_z^L & k_z^L & c_z^L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

「考えてみよう(1)：回転」の答え



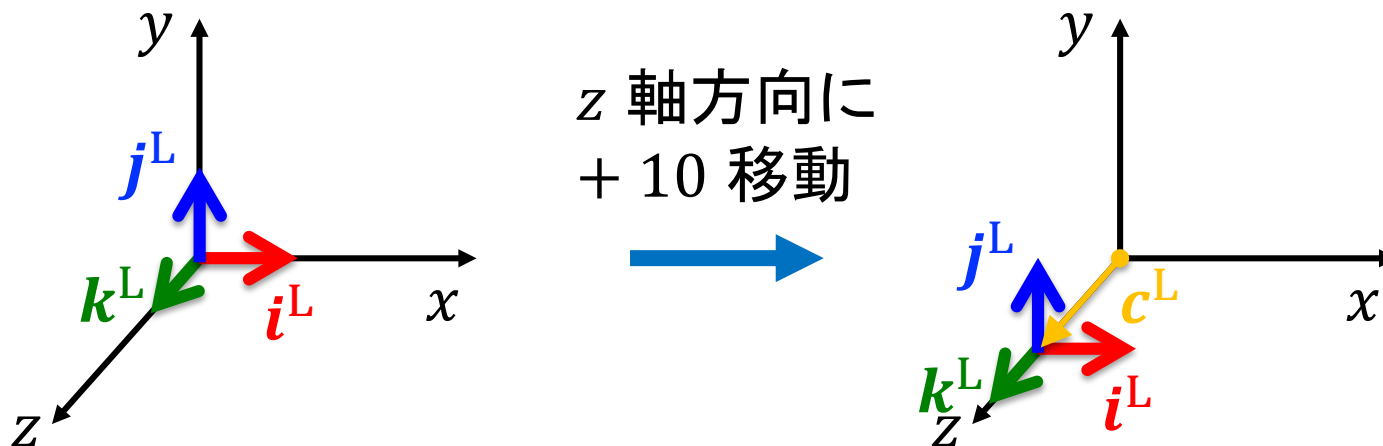
座標変換の例

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

考えてみよう(2): 平行移動

問: ローカル座標で定義された点 (x, y, z) を z 軸の方向に $+10$ だけ平行移動して配置した場合のワールド座標は $(x, y, z + 10)$ である. この変換を同時座標系を用いて表そう.

「考えてみよう(2): 平行移動」の答え



$$i^L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i^L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

「考えてみよう(2): 平行移動」の答え

$$\therefore \begin{bmatrix} i_x^L & j_x^L & k_x^L & c_x^L \\ i_y^L & j_y^L & k_y^L & c_y^L \\ i_z^L & j_z^L & k_z^L & c_z^L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

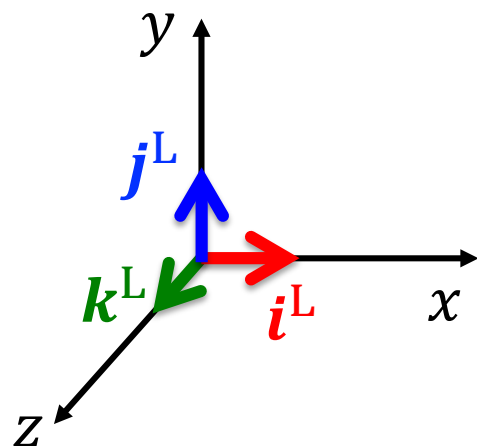
座標変換の例

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c + 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

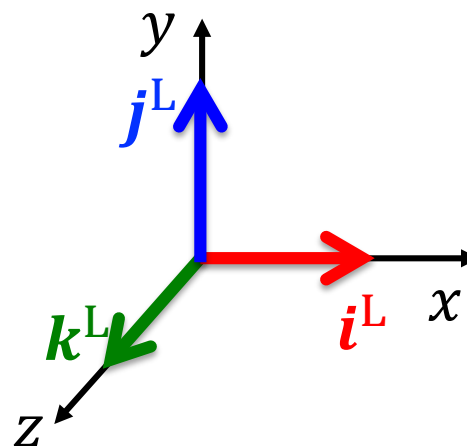
考えてみよう(3): スケール変換

問: ローカル座標で定義された形状を, 原点を中心に2倍に拡大して配置する. この変換行列を同次座標系で表せ.

「考えてみよう(3): スケール変換」の答え



原点中心
2倍に拡大

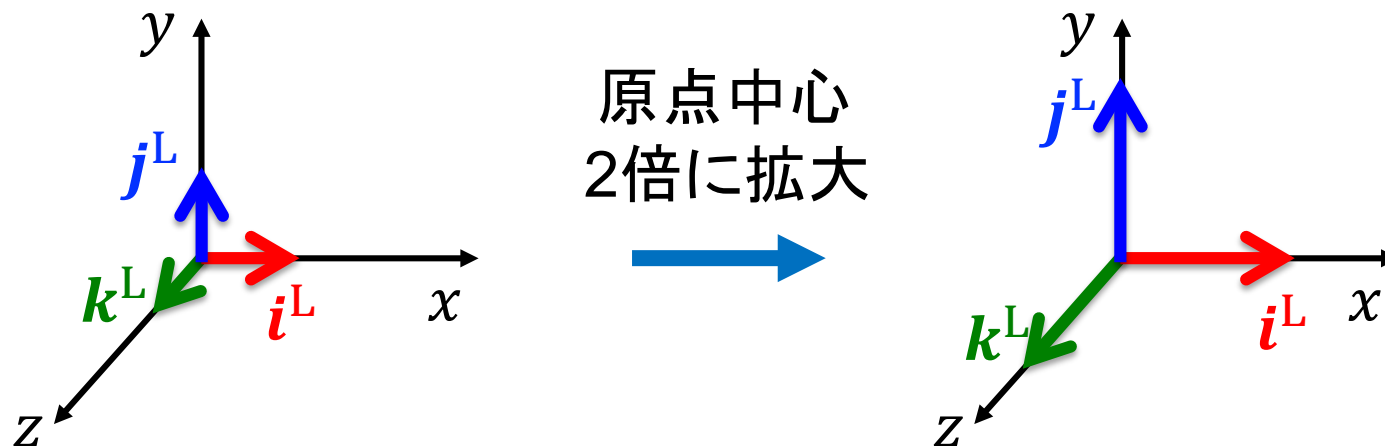


$$i^L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$i^L = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} i_x^L & j_x^L & k_x^L & c_x^L \\ i_y^L & j_y^L & k_y^L & c_y^L \\ i_z^L & j_z^L & k_z^L & c_z^L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

「考えてみよう(3): スケール変換」の答え

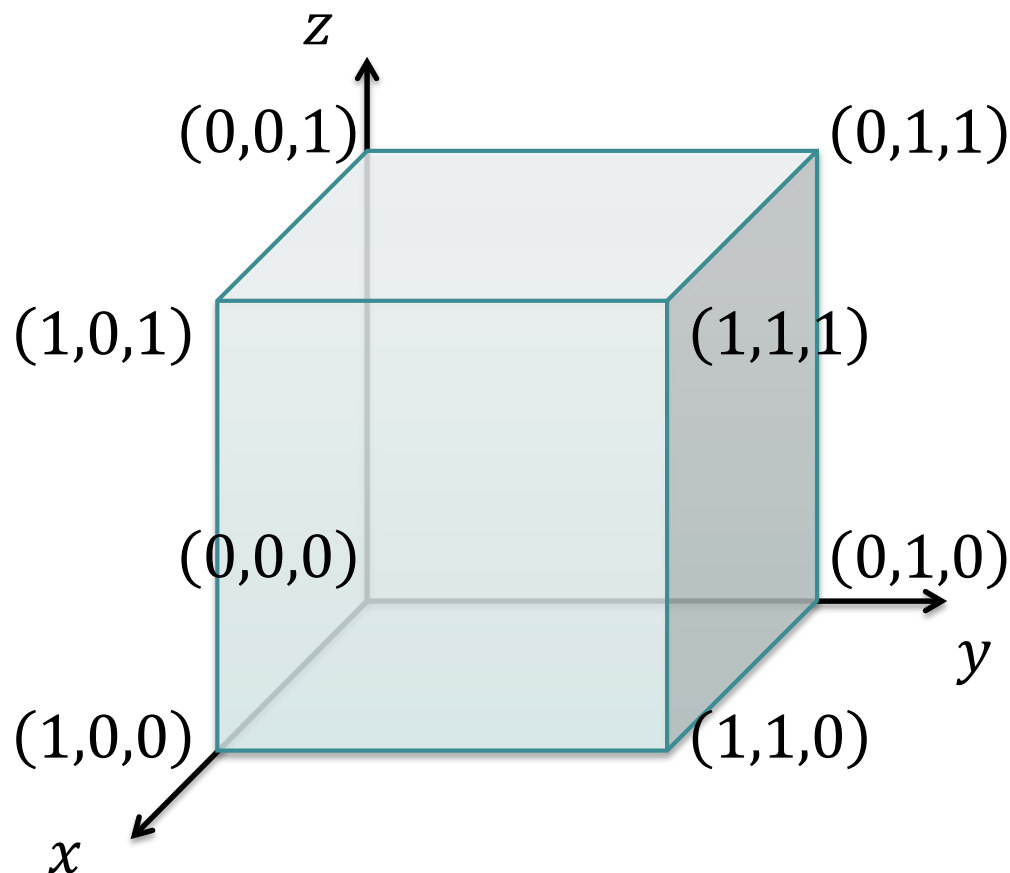


座標変換の例

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

考えてみよう(4): 合成変換1

問: ローカル座標で定義された以下の立方体を,
(1) 原点を中心に2倍の大きさに拡大したあと,
(2) z 軸方向に $+10$ 平行移動せよ.



「考えてみよう(4): 合成変換1」の答え

(1) 原点を中心に2倍の大きさに拡大 (2) z 軸方向に +10 平行移動

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

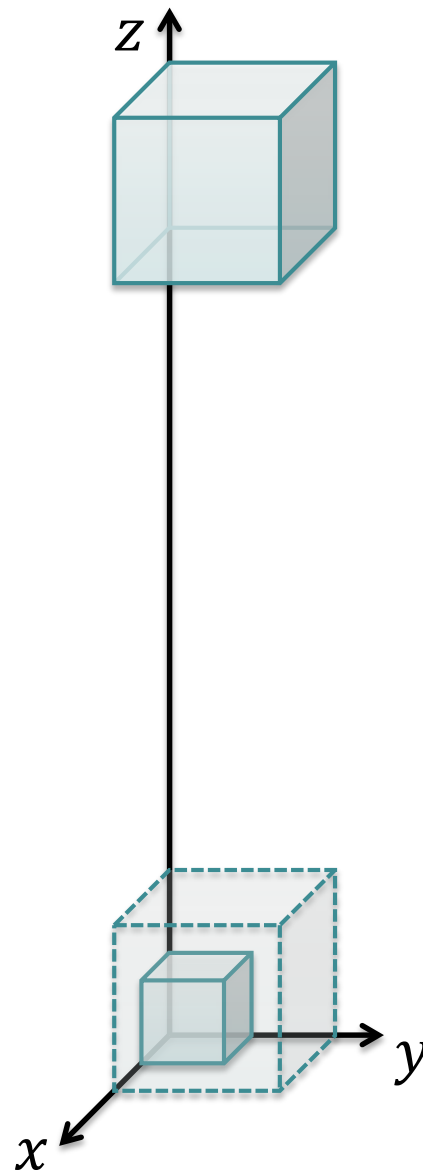
$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

「考えてみよう(4): 合成変換1」の答え

座標変換の例

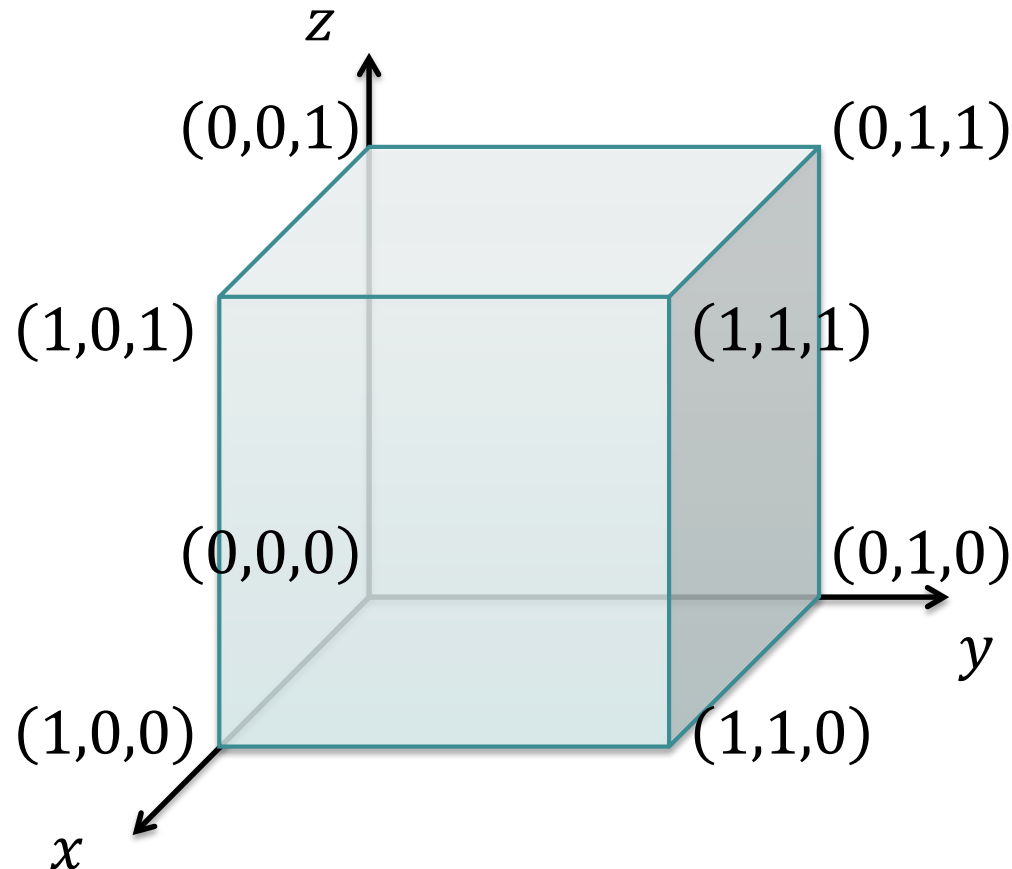
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$



考えてみよう(5): 合成変換2

問: ローカル座標で定義された以下の立方体を,
(1) z 軸方向に $+10$ 平行移動したあと,
(2) 原点を中心に2倍の大きさに拡大せよ.



「考えてみよう(5): 合成変換2」の答え

(1) z 軸方向に +10 平行移動 (2) 原点を中心に2倍の大きさに拡大

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

「考えてみよう(5): 合成変換2」の答え

座標変換の例

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 22 \\ 1 \end{bmatrix}$$

