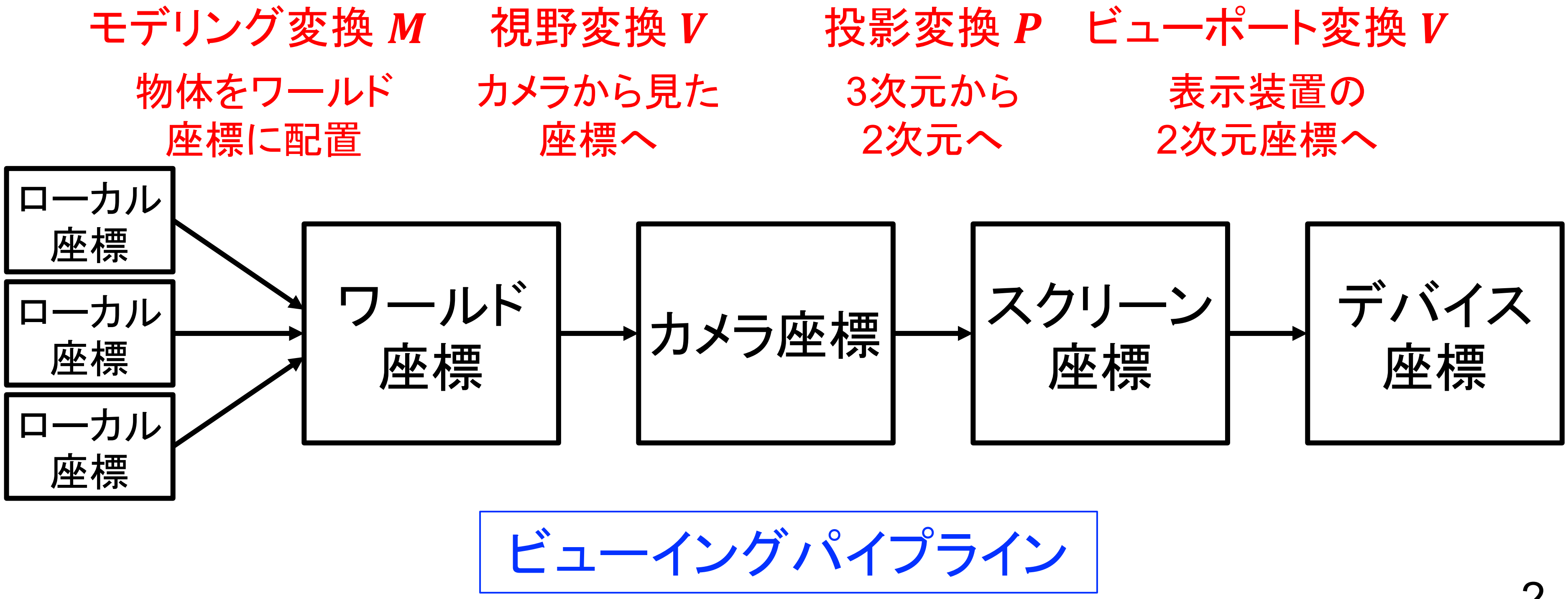
コンピュータグラフィックス(R)

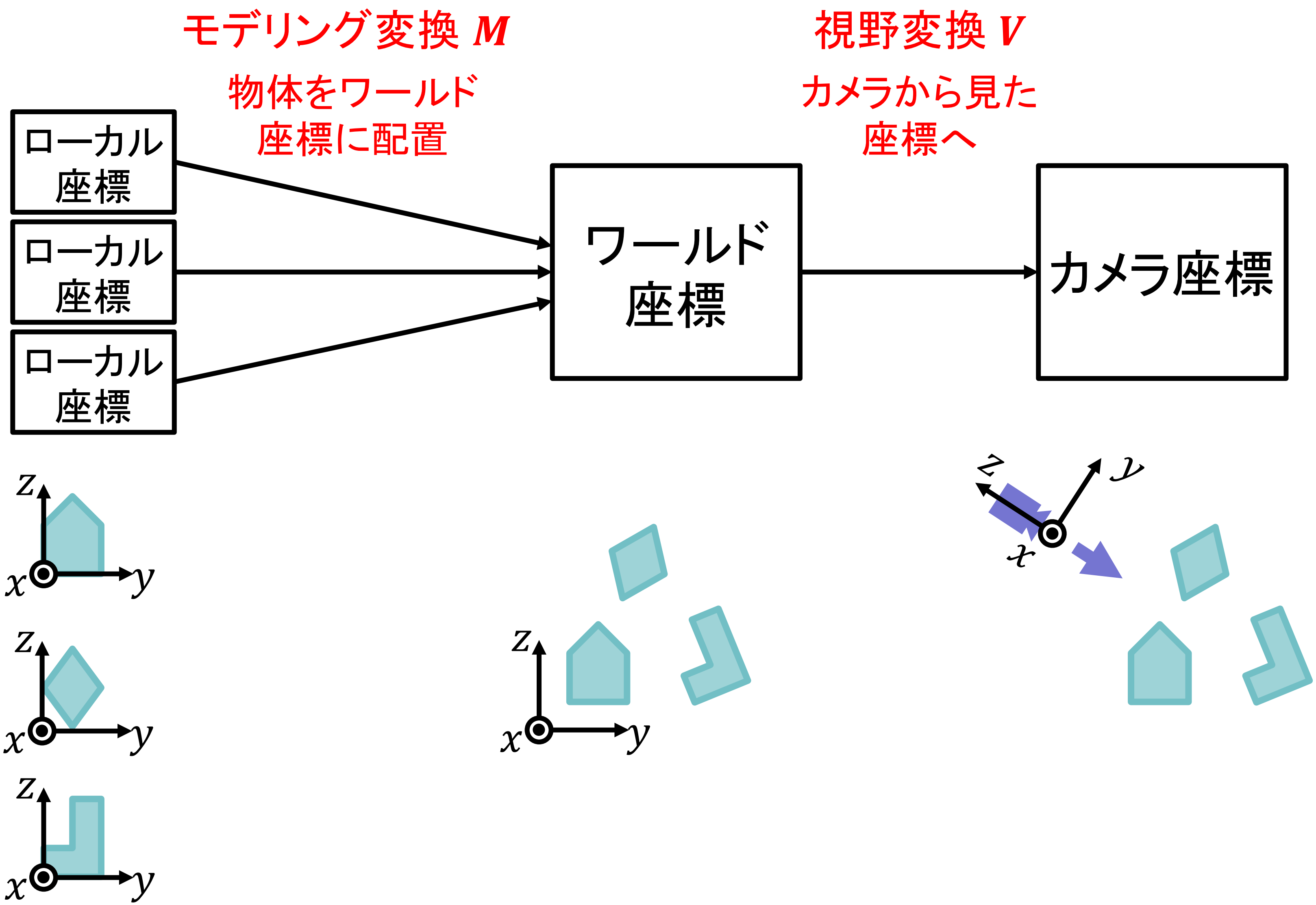
第４回：投影と画像生成

3次元CGにおける画像生成の流れ（再掲） (p.49)

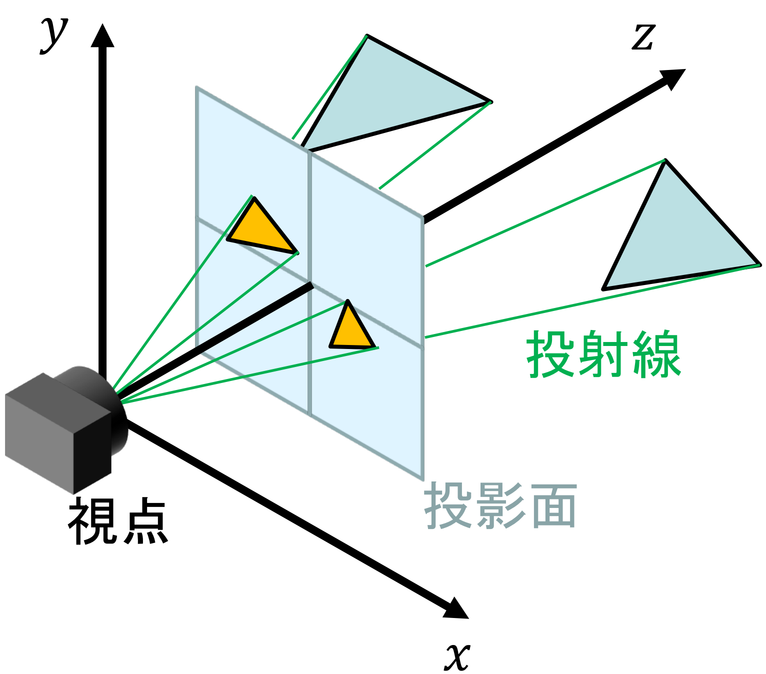
- 物体の形状を定義し，ワールド座標に配置する.
- カメラを設置し，カメラから見た座標に変換する.
- 3次元座標を，スクリーンから見た2次元座標に変換する.
- 表示装置（デバイス）の座標に変換し，表示する



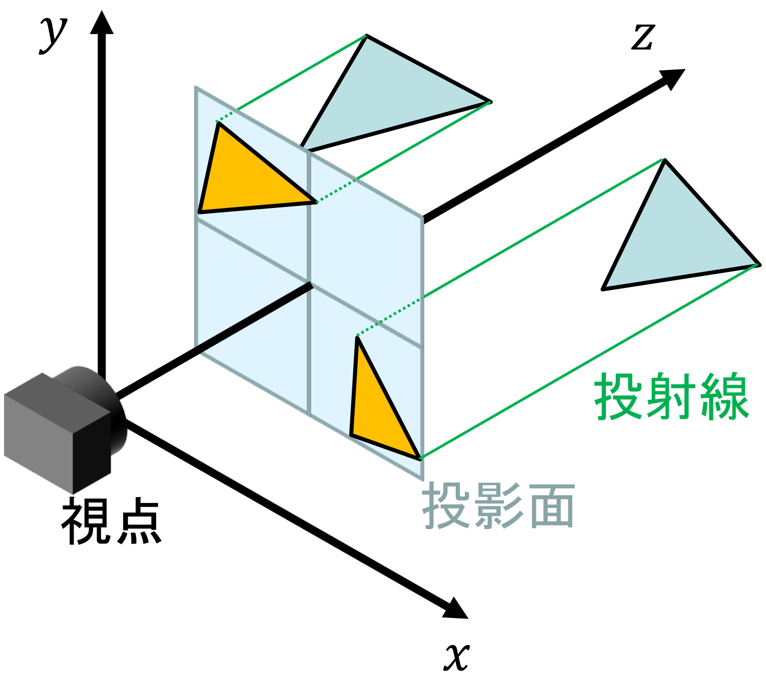
3次元CGにおける画像生成の流れ（再掲） (p.49)



透視投影と平行投影 (p.40)



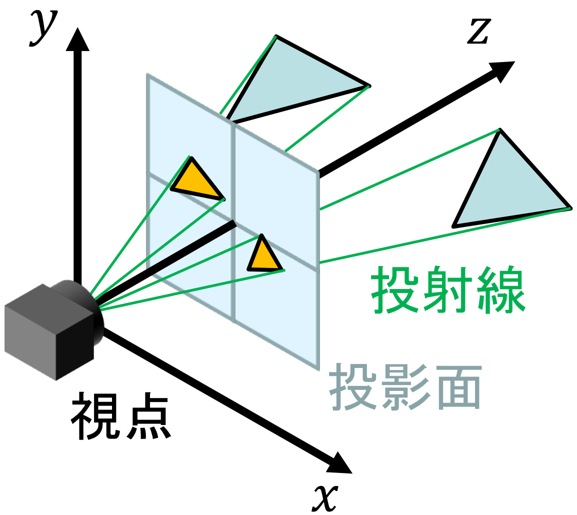
透視投影
各点から視点に向かう線と投影面の交点

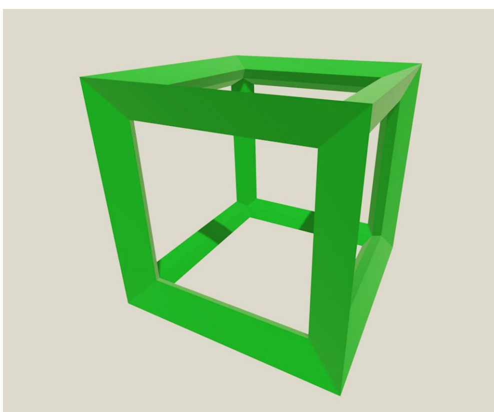


平行投影
各から投影面に垂線を下ろす

注:ここでの z 軸はカメラ座標系と逆向き！左手系！
投影の際には視点から離れるほど z の値が大きくなるように左手系を用いることがある.

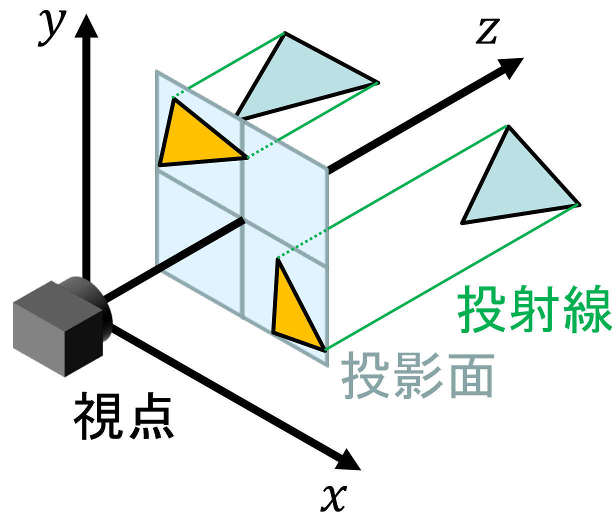
透視投影と平行投影 (p.40)

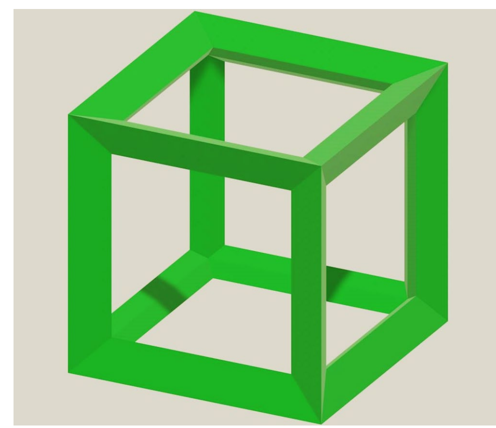




透視投影

近くのものが大きく，遠くのものが小さい

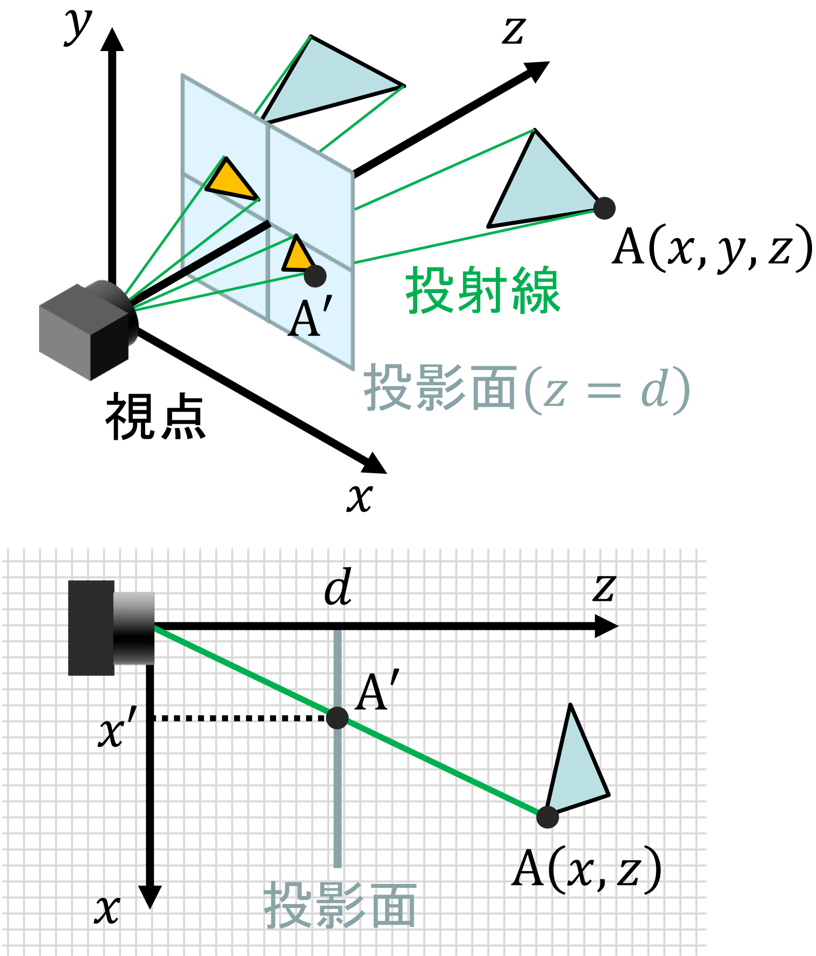




平行投影

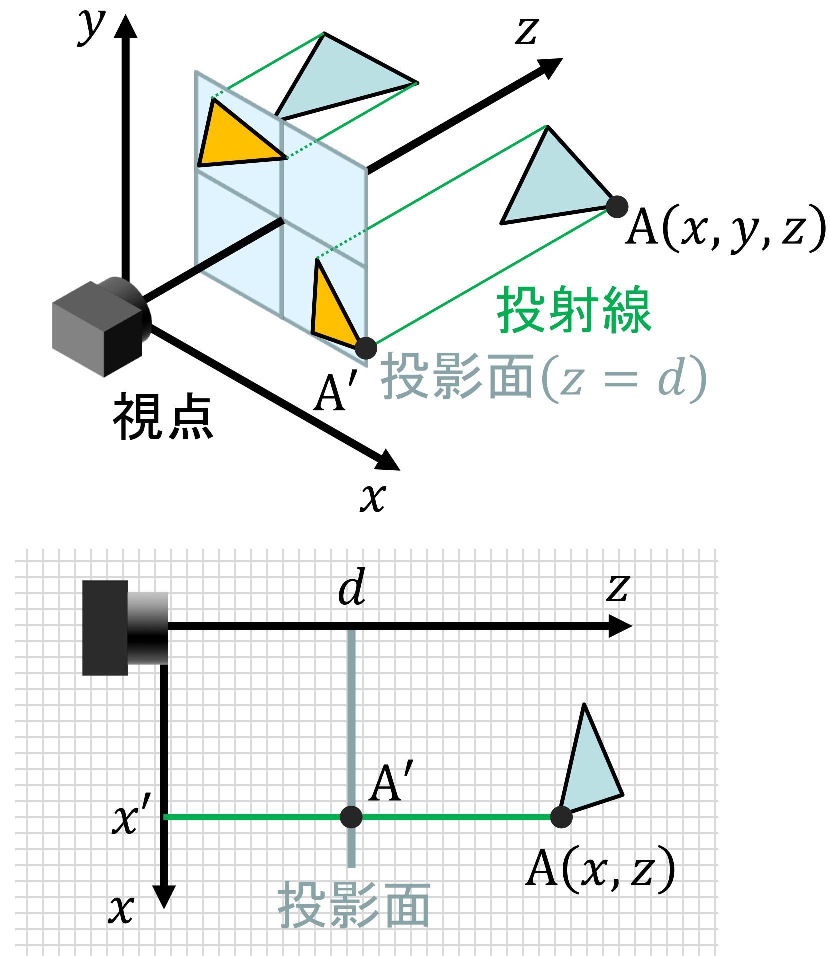
遠くのものと近くのものが同じ大きさ

透視投影と平行投影 (p.40)



透視投影

$$x' = \frac{dx}{z}, \quad y' = \frac{dy}{z}$$



平行投影

$$x' = x, \quad y' = y$$

透視投影と平行投影 (p.40)

透視投影と平行投影まとめ

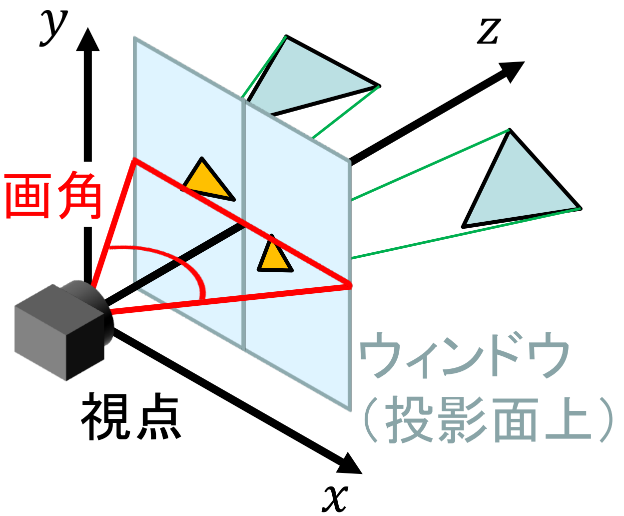
透視投影

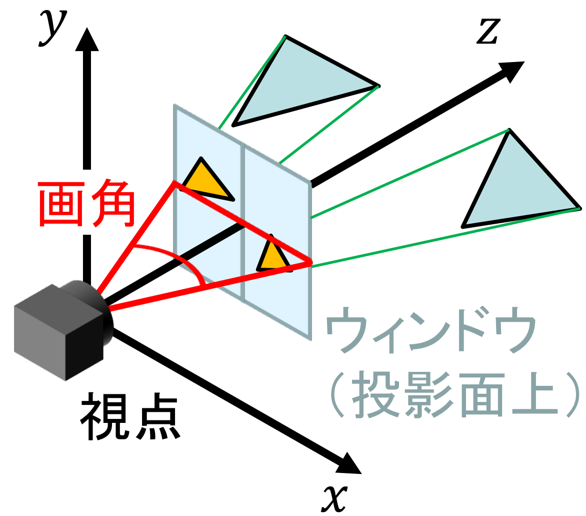
- 投影線は各点から視点に向かう直線
- 点 $\mathrm{A}(x, y, z)$ は投影面の座標 $\mathrm{A}'\left(\frac{dx}{z}, \frac{dy}{z}, d\right)$ に投影される.
- 近くのものは大きく，遠くのものは小さく描かれる.
  - 写実的な映像
  - 映画
  - ゲーム

平行投影

- 投影線は各点から投影面に垂直に下りる直線
- 点 $\mathrm{A}(x, y, z)$ は投影面の座標 $\mathrm{A}'(x, y, d)$ に投影される.
- 遠くのものと近くのものが同じ大きさで描かれる.
  - 形の正確な把握
  - 設計製図
  - グラフの描画

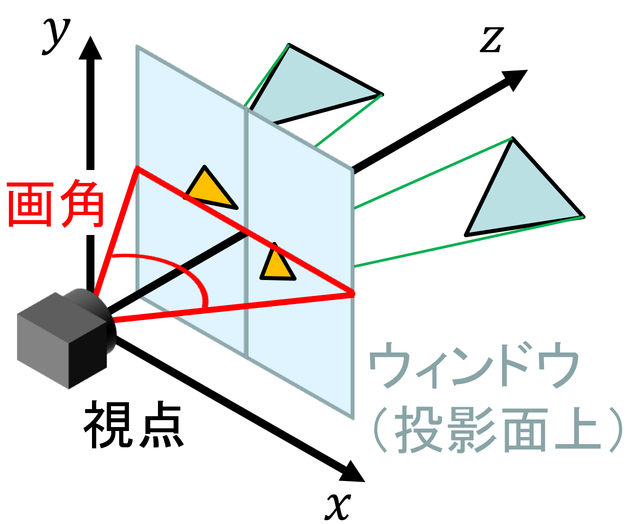
ウィンドウと画角 (p.41~)

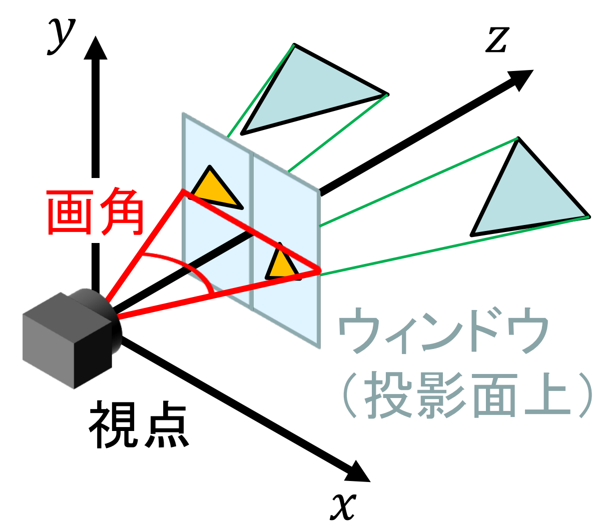


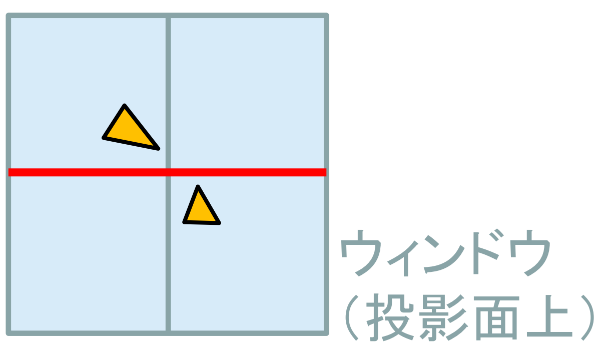


- ウィンドウ：投影面上の描画範囲に相当する長方形
- ウィンドウの大きさは画角で決まる
- 画角が広い ⇒ 物体はウィンドウの大きさに対して小さく写る（広角レンズの効果）
- 画角が狭い ⇒ 物体はウィンドウの大きさに対して大きく映る（望遠レンズの効果）

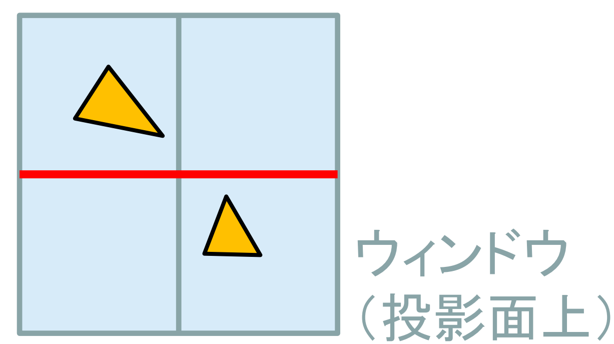
ウィンドウと画角 (p.41~)





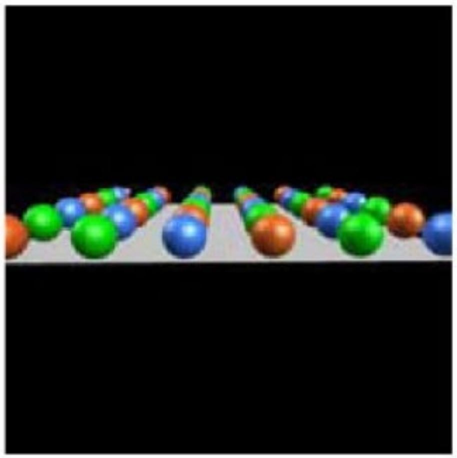


画角が広い
⇒ 物体は小さく写る
（広角レンズの効果）

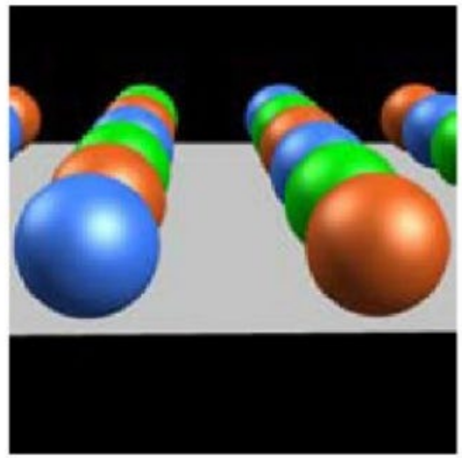


画角が狭い
⇒ 物体は大きく写る
（望遠レンズの効果）

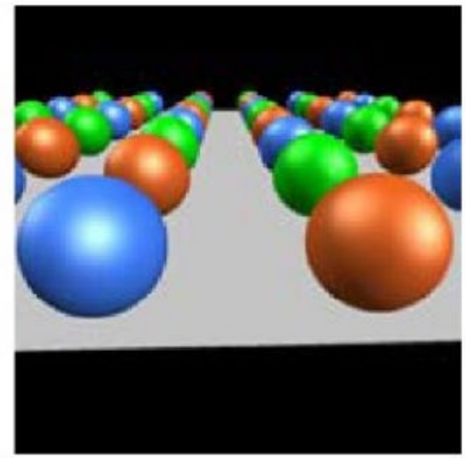
ウィンドウと画角 (p.41~)



[a] 広い画角（広角レンズの効果）



[b] 狭い画角（望遠レンズの効果）

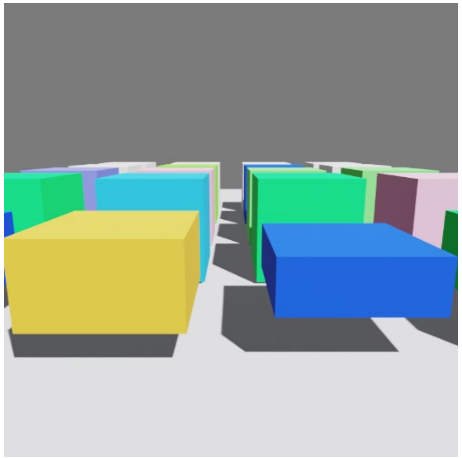


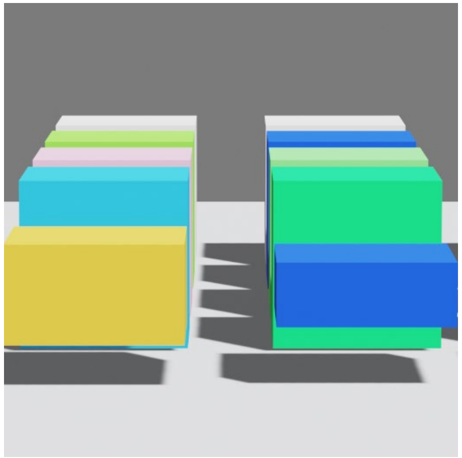
[c] [b]の構図を広い画角で描画した例（遠近感）

- [a] は画角が広いので広い範囲が描かれる.
- [a] の画角を狭くすると, [b] のように狭い範囲が描かれる.
- [a] の画角を維持したまま視点を近づけると, [c] のように遠近感が強調された画像となる.

ウィンドウと画角 (p.41~)

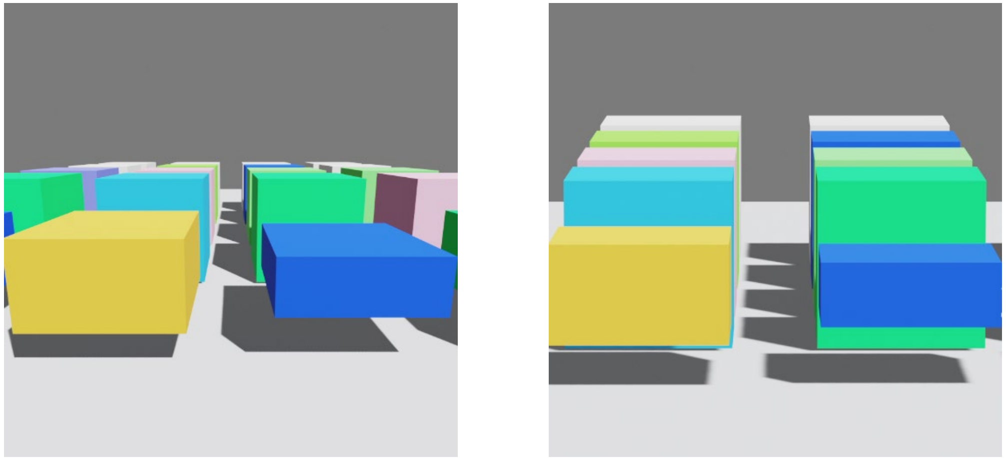
問 左の映像を右の映像のように変更するには，画角と視点をどのように変更すればよいか．





ウィンドウと画角 (p.41~)

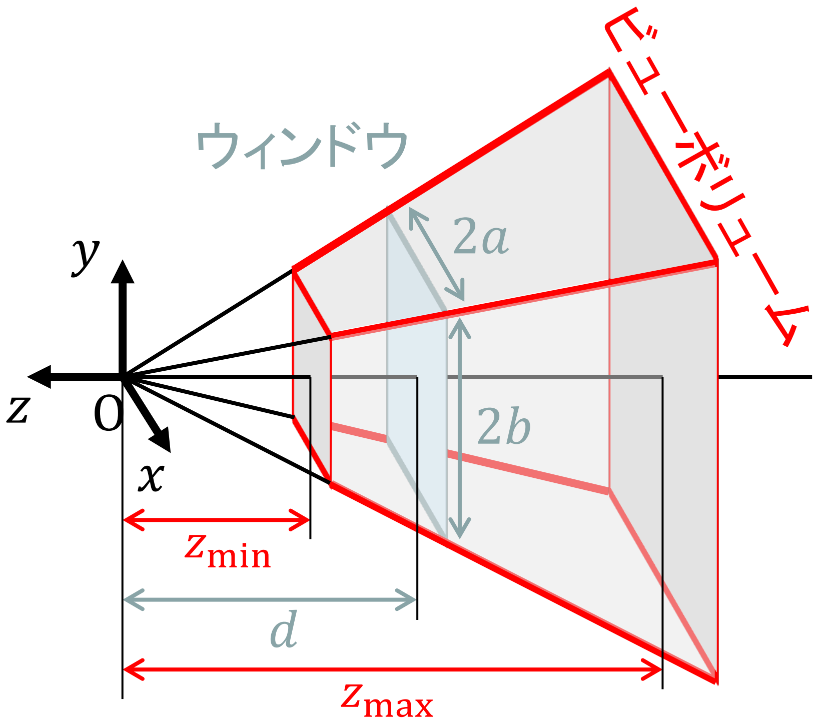
問　左の映像を右の映像のように変更するには，画角と視点をどのように変更すればよいか.



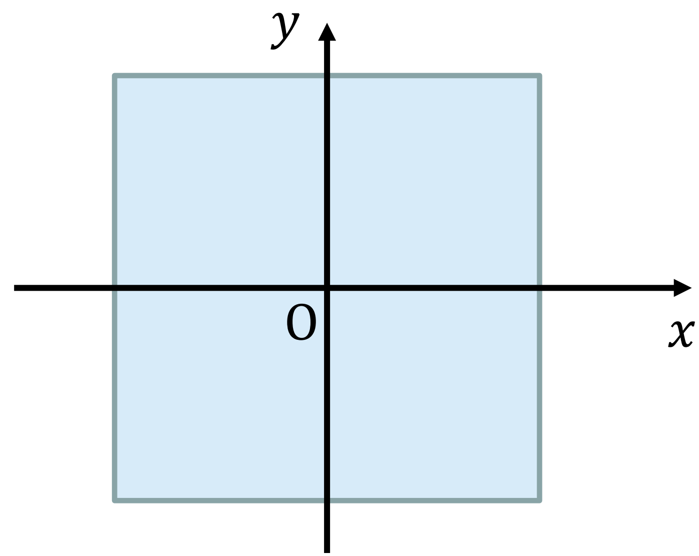
答　画角を狭くして，視点を物体から離す.

- 画角を狭くすることで望遠レンズの効果が生まれ，遠近感が弱められる.
- 視点を物体から離すことで被写体全体を写すことができる.

透視投影の計算方法 (p.43~)



カメラ座標系



スクリーン座標系
（投影座標系）

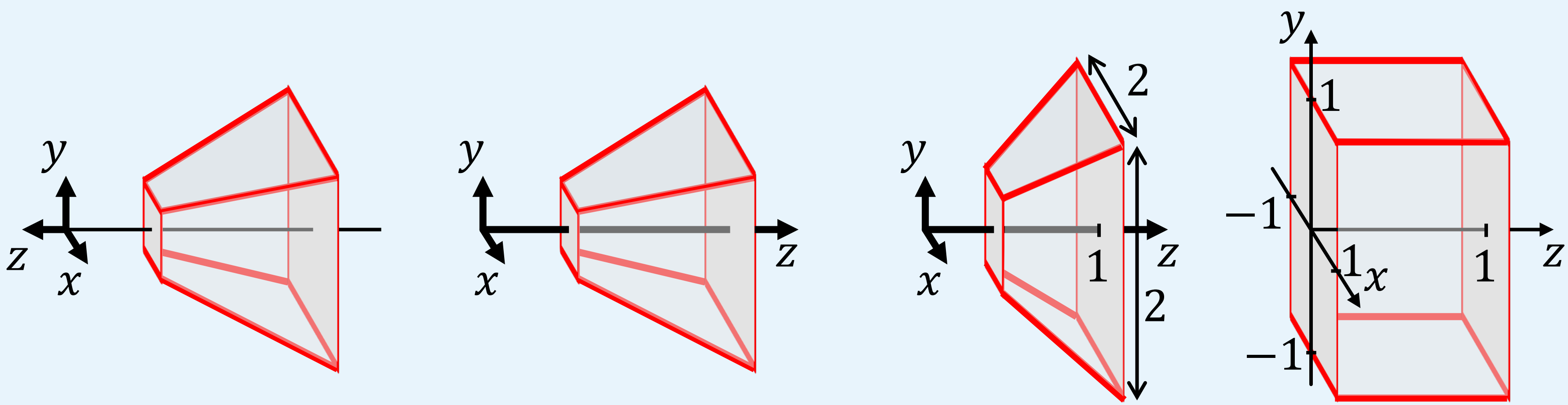
カメラ座標系の点をスクリーン座標に変換する方法を考える.

z_{min}:前方クリッピング面，z_{max}:後方クリッピング面

注 : カメラ座標系は右手系！z 軸はカメラ後方を向いている！

透視投影の計算方法 (p.43~)

透視投影の計算過程



カメラ座標系
(x, y, z)

z 軸が奥行き

正規化ビュー
ボリューム

投影座標系
(x', y', z')

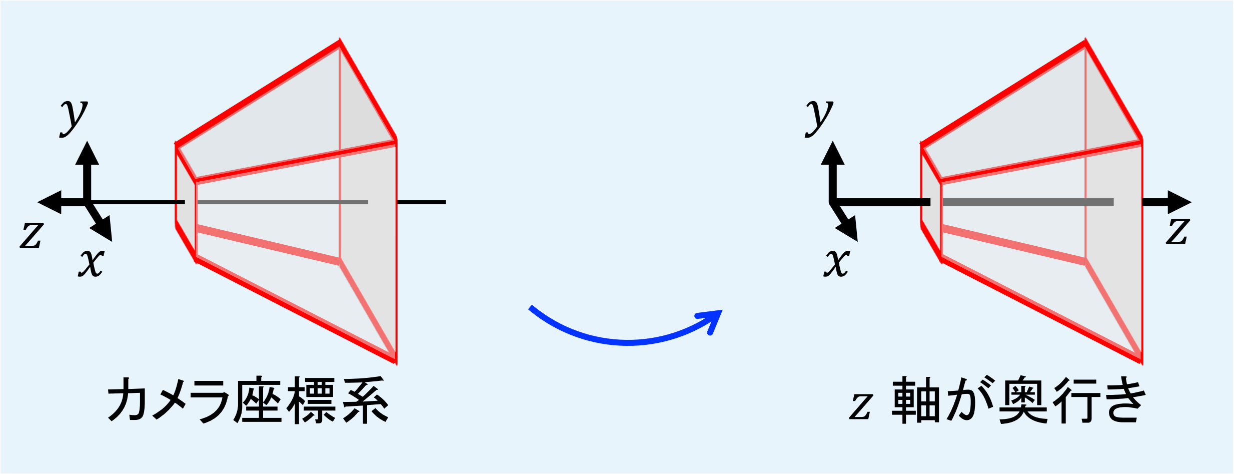
① 右手系を
左手系に

② ビューボ
リューム
を正規化

③ 正規化
ビューボ
リューム
を投影

透視投影の計算方法 (p.43~)

① 右手系を左手系に



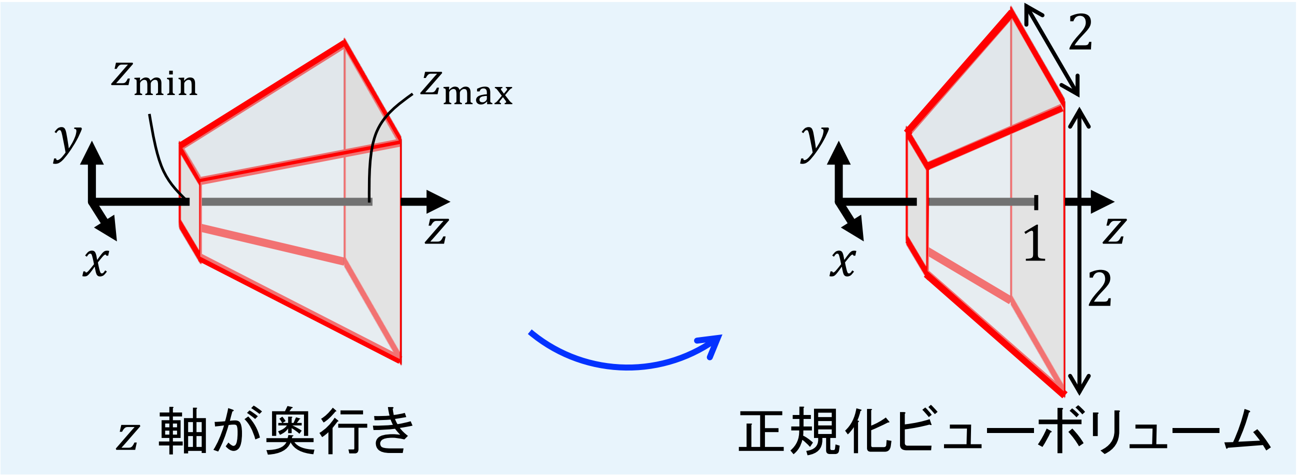
z 成分の正負を反転すればよいので,

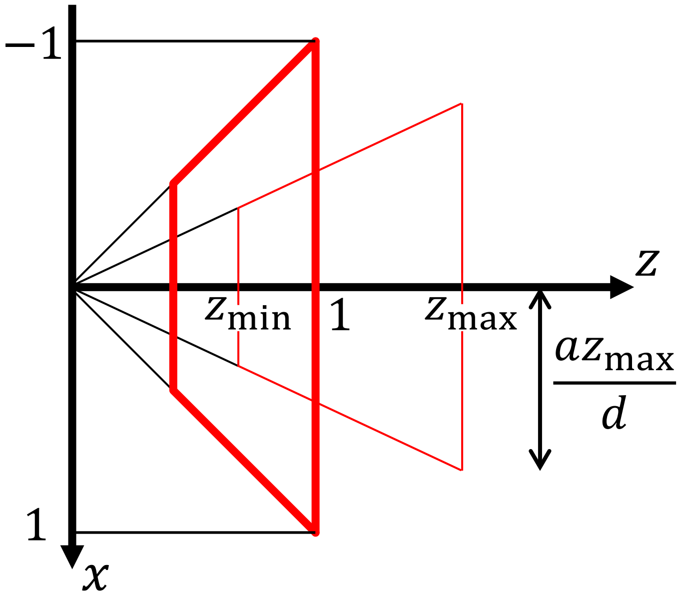
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

である.

透視投影の計算方法 (p.43~)

② ビューボリュームを正規化 (1/2)





x 成分 : $\dfrac{d}{az_{\max}}$ 倍

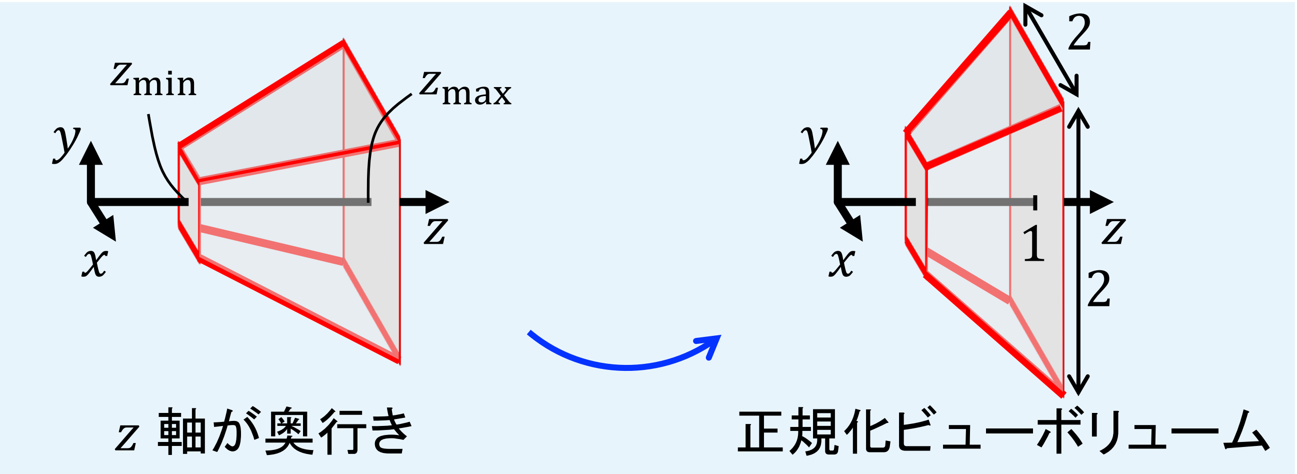
y 成分 : $\dfrac{d}{bz_{\max}}$ 倍

z 成分 : $\dfrac{1}{z_{\max}}$ 倍

とすればよい.

透視投影の計算方法 (p.43~)

② ビューボリュームを正規化 (2/2)



したがって ② の変換は

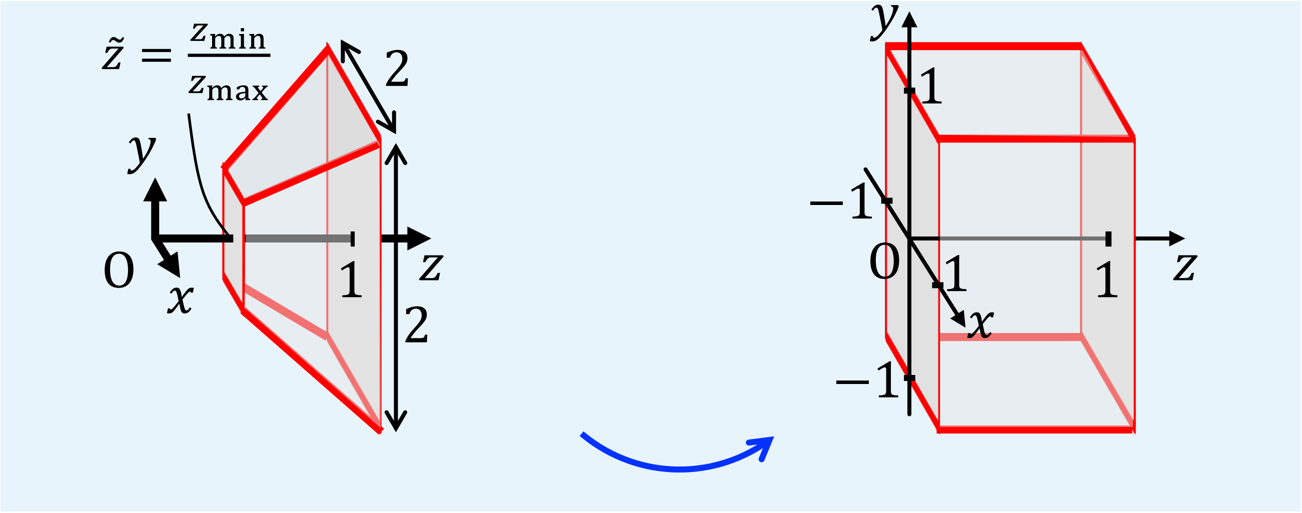
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/(az_{\mathrm{max}}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/(bz_{\mathrm{max}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/z_{\mathrm{max}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

である.

透視投影の計算方法 (p.43~)

（発展）

③ 正規化ビューボリュームを投影 (1/8)



目標

③-1　x 成分を区間 $[-z, z]$ から区間 $[-1,1]$ に拡げる。

③-2　y 成分を区間 $[-z, z]$ から区間 $[-1,1]$ に拡げる。

③-3　z 成分を区間 $[\tilde{z}, 1]$ から区間 $[0,1]$ に拡げる。

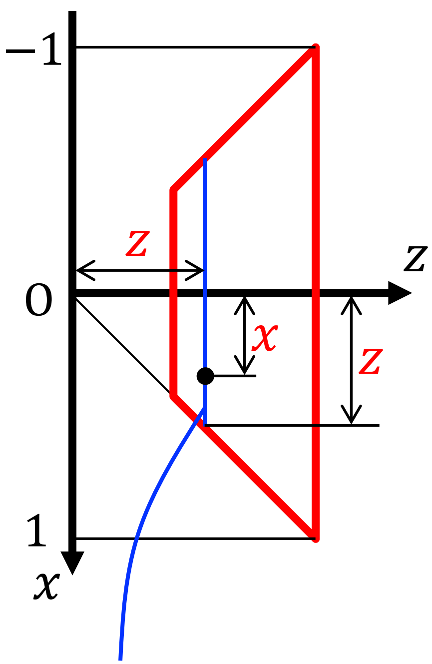
透視投影の計算方法 (p.43~)

（発展）

③ 正規化ビューボリュームを投影 (2/8)

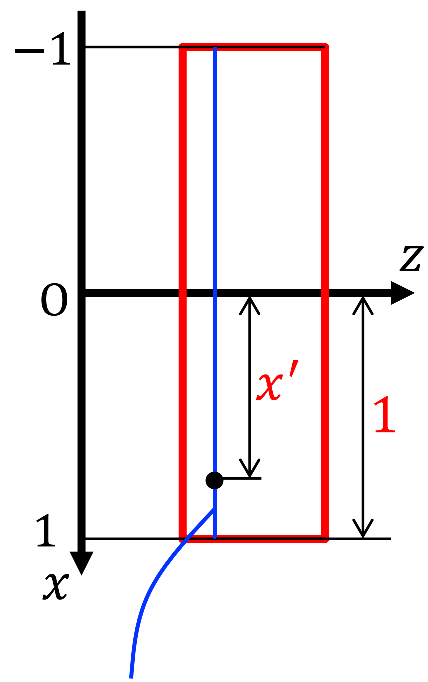
目標③-1　x 成分を区間 $[-z, z]$ から区間 $[-1,1]$ に拡げる。

（真横から見た図）



x 成分を $1/z$ 倍

$$x' = \frac{x}{z}$$



$x = z$ のとき,
x の区間は $[-z, z]$.

$x' = z$ のとき,
x' の区間は $[-1,1]$.

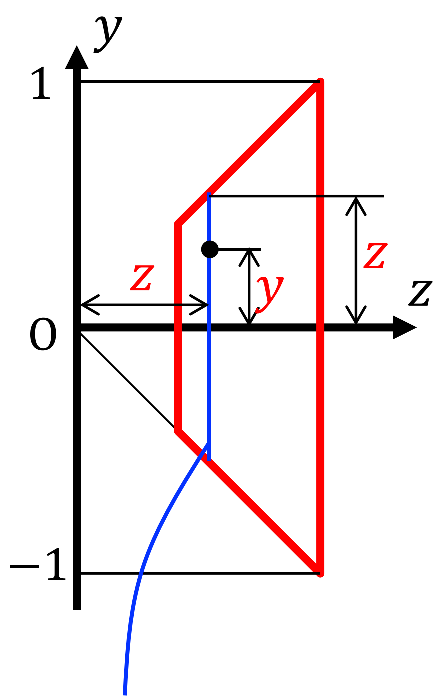
透視投影の計算方法 (p.43~)

（発展）

③ 正規化ビューボリュームを投影 (3/8)

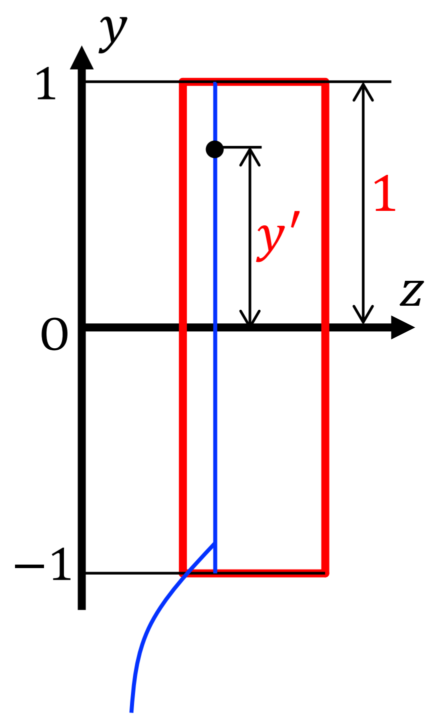
目標③-2 y 成分を区間 $[-z, z]$ から区間 $[-1,1]$ に拡げる。

（真上から見た図）



y 成分を $1/z$ 倍

$$y' = \frac{y}{z}$$



$y = z$ のとき,
y の区間は $[-z, z]$.

$y' = z$ のとき,
y' の区間は $[-1,1]$.

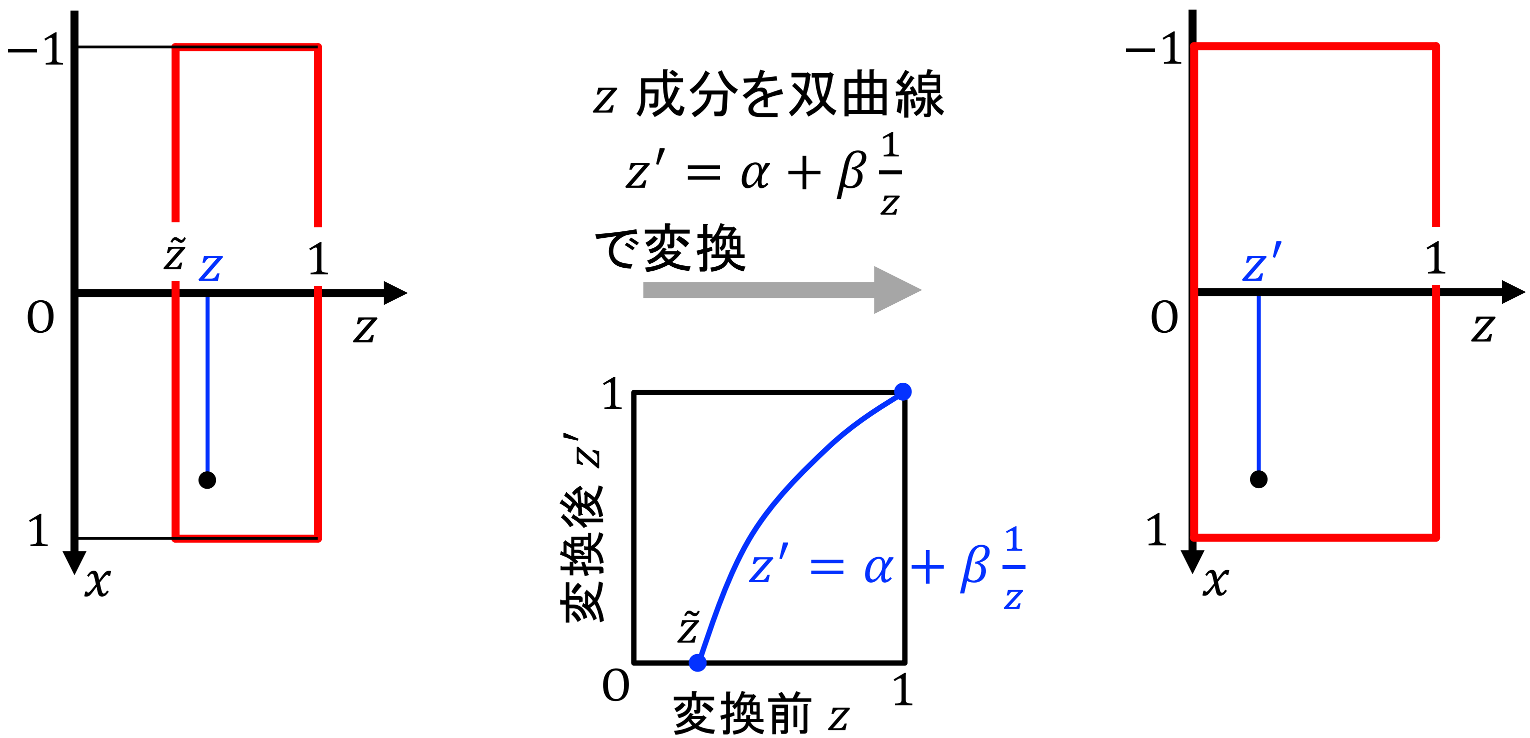
透視投影の計算方法 (p.43~)

（発展）

③ 正規化ビューボリュームを投影 (4/8)

目標③-3 z 成分を区間 $[\tilde{z}, 1]$ から区間 $[0,1]$ に拡げる。

（真横から見た図）



（α と β を求めよう）

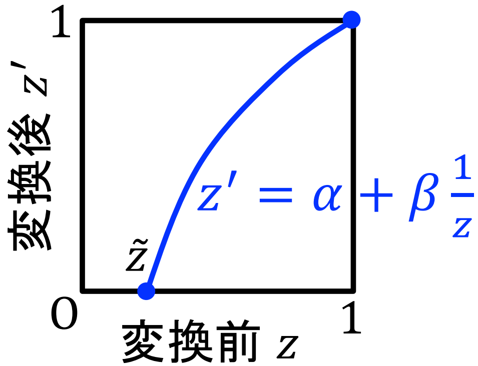
透視投影の計算方法 (p.43~)

（発展）

③ 正規化ビューボリュームを投影 (5/8)

目標③-3 z 成分を区間 $[\tilde{z}, 1]$ から区間 $[0,1]$ に拡げる。

（α と β を求めよう）



$z = \tilde{z}$ が $z' = 0$ に変換される. $\therefore 0 = \alpha + \beta \frac{1}{\tilde{z}}$

$z = 1$ が $z' = 1$ に変換される. $\therefore 1 = \alpha + \beta$

この連立1次方程式を解くと, $\alpha = \frac{1}{1-\tilde{z}}, \beta = -\frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}}$

したがって変換式は $z' = \frac{1}{1-\tilde{z}} - \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}} \cdot \frac{1}{z}$

透視投影の計算方法 (p.43~)

（発展）

③ 正規化ビューボリュームを投影 (6/8)

まとめると,

③-1　x 成分を区間 $[-z, z]$ から区間 $[-1,1]$ に拡げる。

$$\Rightarrow \quad x' = \frac{x}{z}$$

③-2　y 成分を区間 $[-z, z]$ から区間 $[-1,1]$ に拡げる。

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{y}{z}$$

③-3　z 成分を区間 $[\tilde{z}, 1]$ から区間 $[0,1]$ に拡げる。

$$\Rightarrow \quad z' = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\tilde{z}}z - \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}}\right)$$

したがって, ③ の変換後の座標は

$$(x', y', z') = \left(\frac{x}{z}, \quad \frac{y}{z}, \quad \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\tilde{z}}z - \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}}\right)\right)$$

透視投影の計算方法 (p.43~)

（発展）

③ 正規化ビューボリュームを投影 (7/8)

同次座標系の定義 (p.34)
「(x, y, z) と (wx, wy, wz, w) は同じ意味」
より,

$$(x', y', z') = \left(\frac{x}{z}, \quad \frac{y}{z}, \quad \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\tilde{z}}z - \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}}\right)\right)$$

と

$$(X', Y', Z', W') = \left(x, \quad y, \quad \frac{1}{1-\tilde{z}}z - \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}}, \quad z\right)$$

は同じ意味である.

透視投影の計算方法 (p.43~)

（発展）

③ 正規化ビューボリュームを投影 (8/8)

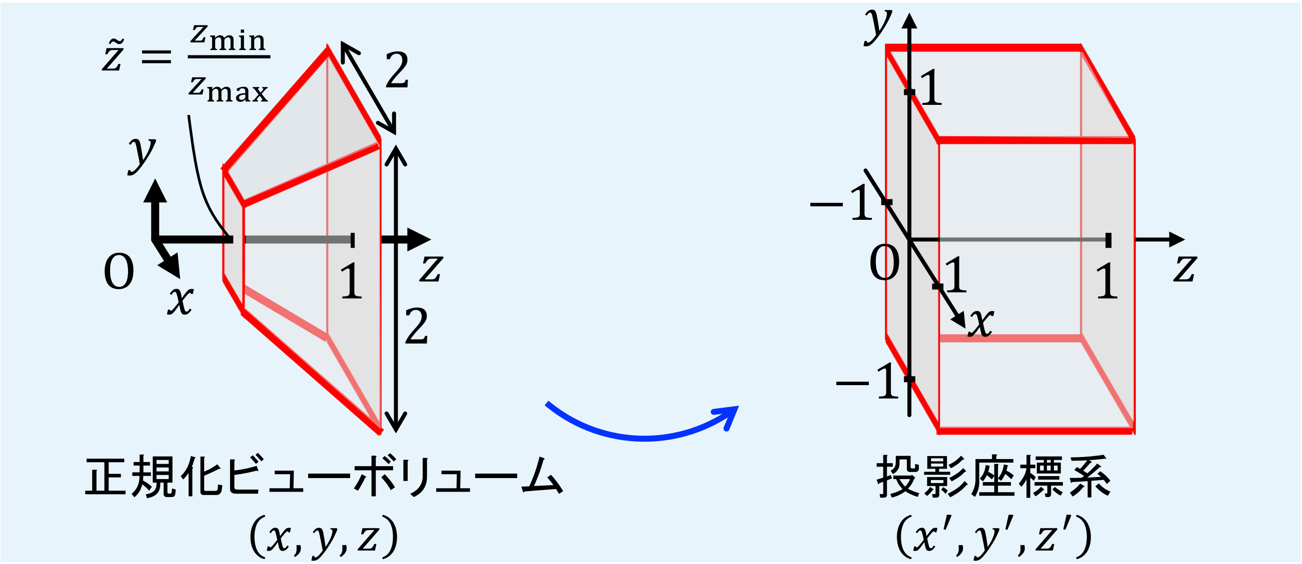
$$(X', Y', Z', W') = \left(x,\quad y,\quad \frac{1}{1-\tilde{z}}z - \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}},\quad z\right)$$

より，③の変換を行列表現すると

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1-\tilde{z}) & -\tilde{z}/(1-\tilde{z}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left((x', y', z') = (X'/W', Y'/W', Z'/W')\right)$$

である.



透視投影の計算方法 (p.43~)

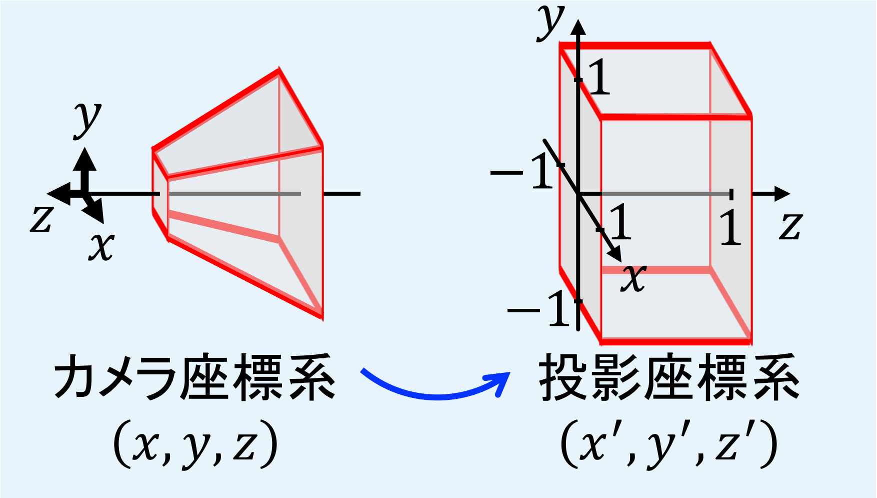
透視投影変換まとめ

① 右手系を左手系に

② ビューボリュームを正規化

③ 正規化ビューボリュームを投影

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W' \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



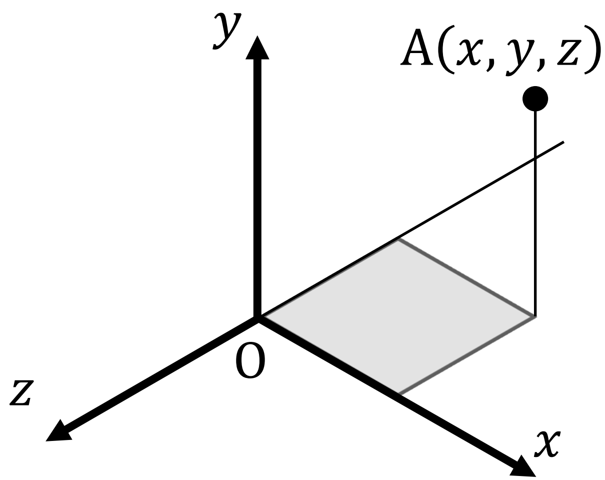
カメラ座標系の点 (x, y, z) は

投影座標系の点 $(x', y', z') = (X'/W', Y'/W', Z'/W')$ に変換される.

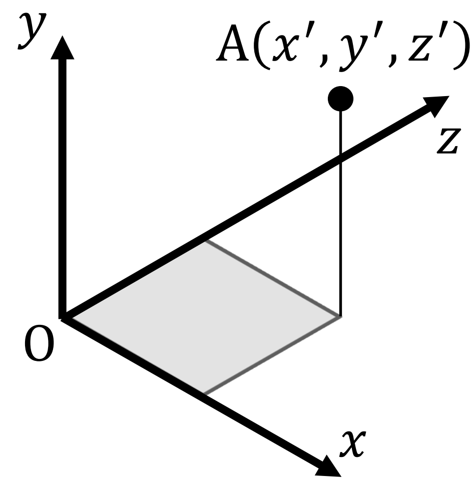
$$\left(\begin{aligned} \boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} d/(az_{\max}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/(bz_{\max}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/z_{\max} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1-\tilde{z}) & -\tilde{z}/(1-\tilde{z}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{z}_{\min} = \frac{z_{\min}}{z_{\max}} \end{aligned} \right)$$

透視投影の計算方法 (p.43~)

問 カメラ座標系で (x, y, z) の位置にある点 A を z が奥行きの座標系に変換する変換行列を求めよ.



カメラ座標系



z が奥行きの座標系

透視投影の計算方法 (p.43~)

答　$X' = x,\ Y' = y,\ Z' = -z$ より,

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

である.

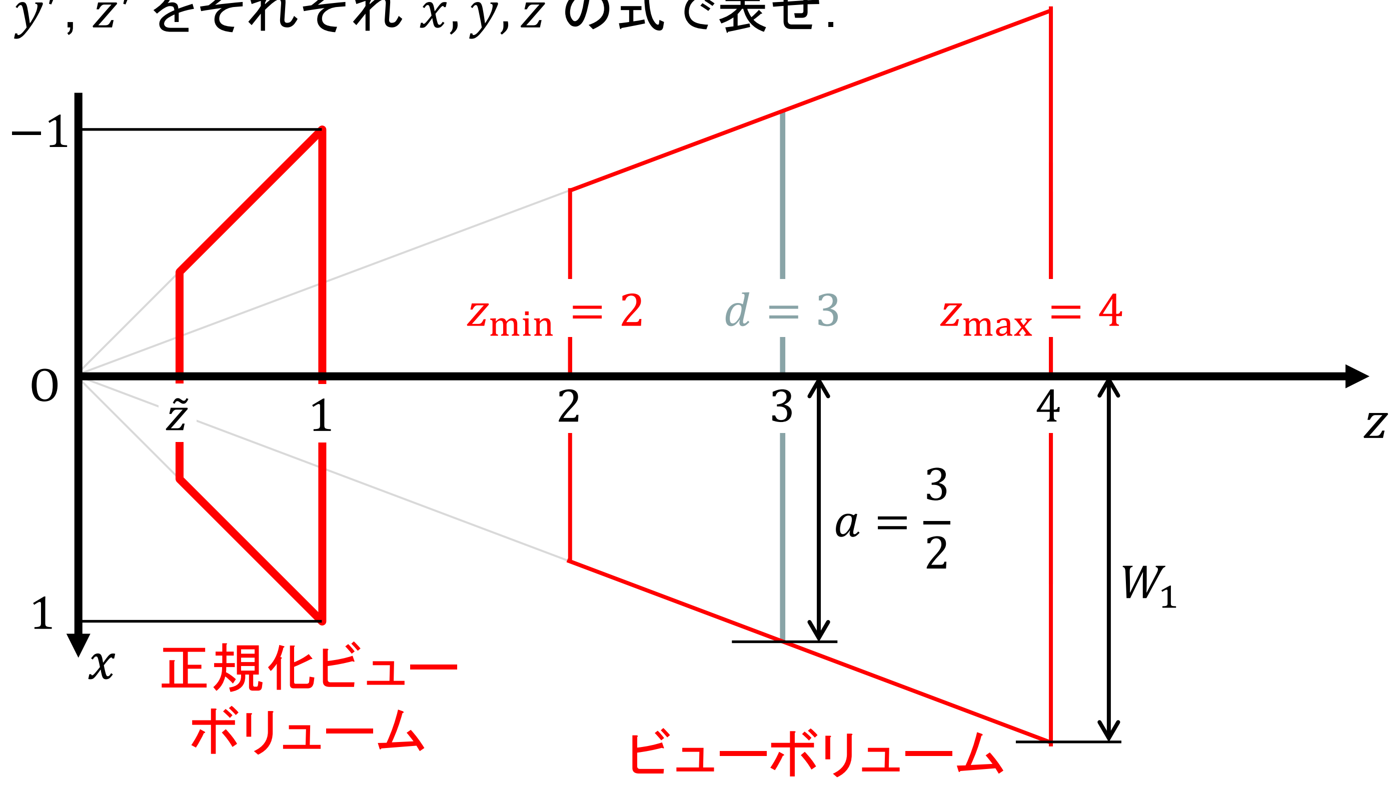
透視投影の計算方法 (p.43~)

問 ビューボリュームの点 (x, y, z) を正規化ビューボリュームの点 (x', y', z') に変換したい. $d = 3$ の位置にあるウィンドウのサイズが横 3 ×縦 3（つまり $a = b = 3/2$）であり，前方クリッピング面と後方クリッピング面がそれぞれ $z_{\min} = 2$, $z_{\max} = 4$ の位置にある.

(1) 後方クリッピング面の幅の半分 W_1 を求めよ.

(2) 正規化ビューボリュームの前方クリッピングプレーンの位置 $\tilde{z}$ を求めよ.

(3) x', y', z' をそれぞれ x, y, z の式で表せ.



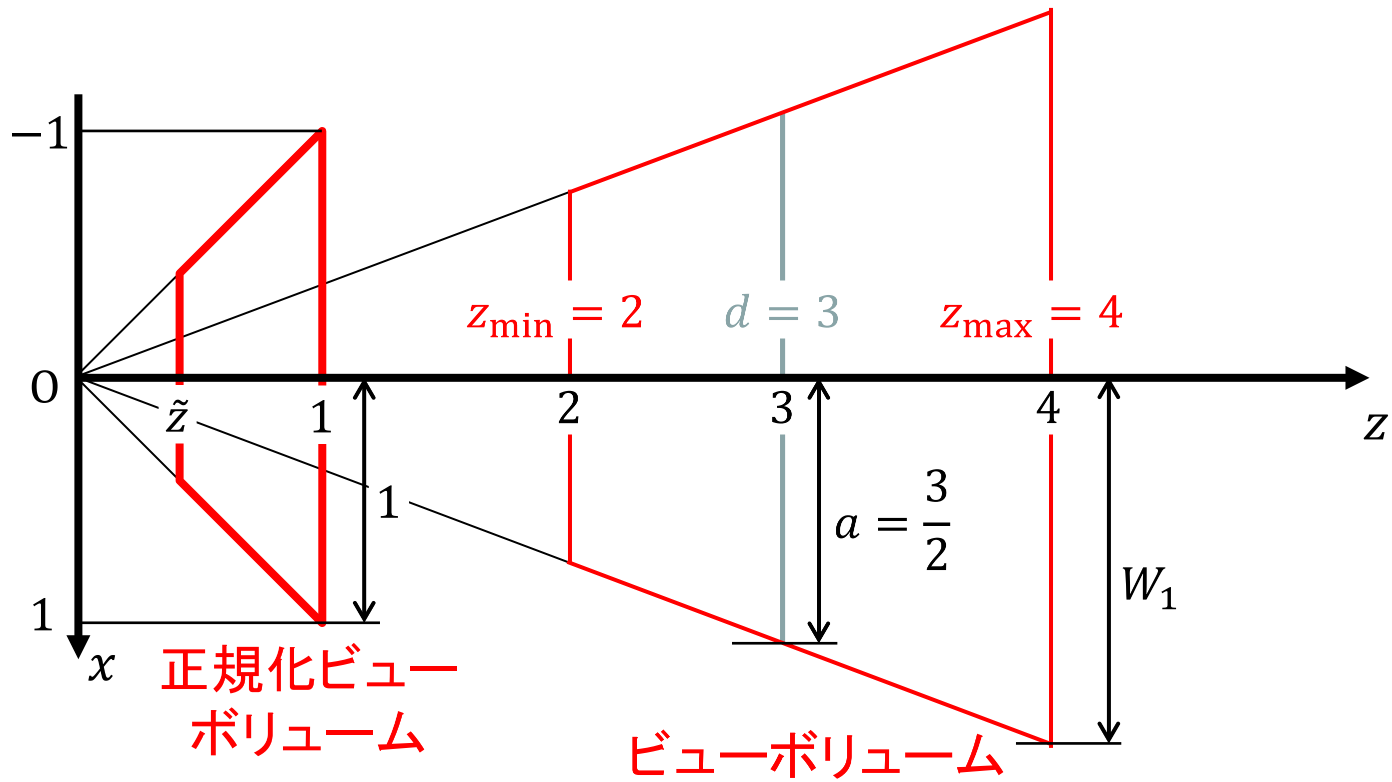
透視投影の計算方法 (p.43~)

答 (1) 三角形の比率 $a\colon W_1 = d\colon z_{\max}$ より，$W_1 = \dfrac{a z_{\max}}{d} = 2$

(2) 比率 $\tilde{z}\colon 1 = z_{\min}\colon z_{\max}$ より，$\tilde{z} = \dfrac{z_{\min}}{z_{\max}} = 0.5$

(3) 後方クリッピングプレーンの幅の半分 W_1 が，変換後に 1 になるので，$W_1\colon 1 = x\colon x'$. したがって，$x' = \dfrac{x}{W_1} = \dfrac{x}{2}$. y' も同様に，$y' = \dfrac{y}{2}$.

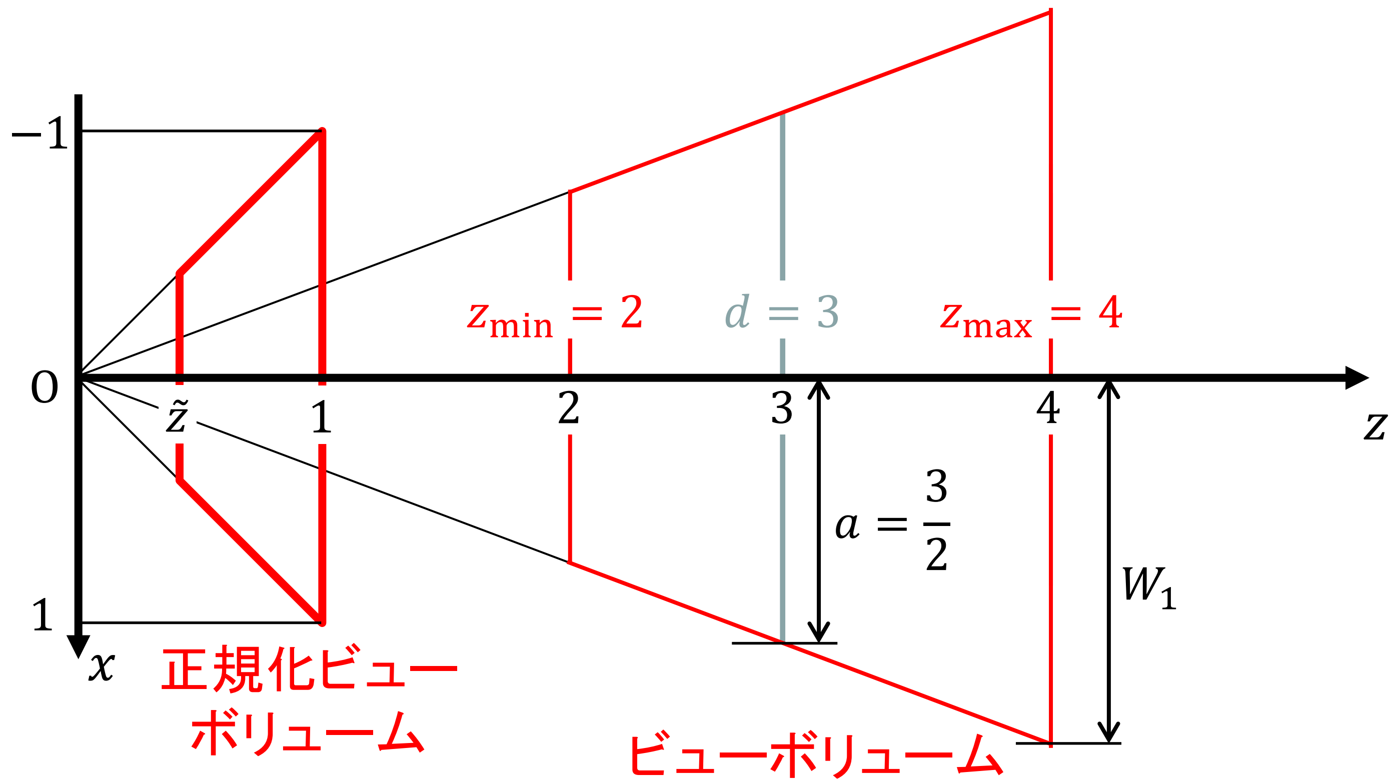
後方クリッピングプレーンが $z_{\max} = 4$ から 1 に変換されるから，$Z' = \dfrac{z}{4}$.



透視投影の計算方法 (p.43~)

問（続き）

(4) 前述の変換を行列で表せ.



透視投影の計算方法 (p.43~)

答（続き）

(4) $X' = \frac{x}{2}$, $Y' = \frac{y}{2}$, $Z' = \frac{z}{4}$ だから,

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$