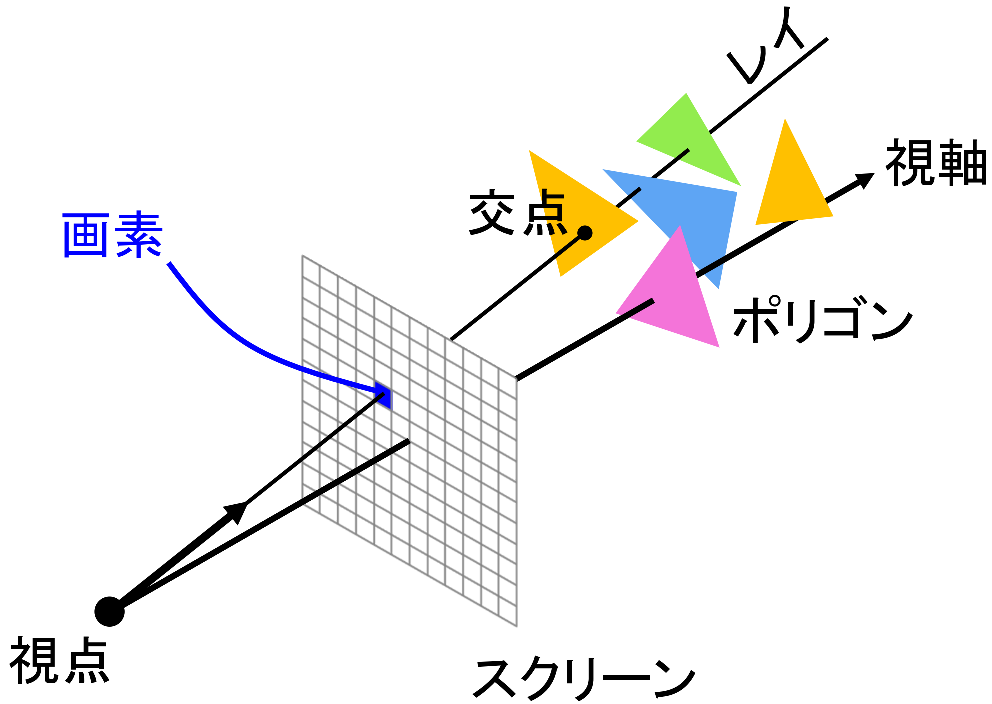
コンピュータグラフィックス(R)

第10回：レイトレーシング法

レイトレーシング法概要

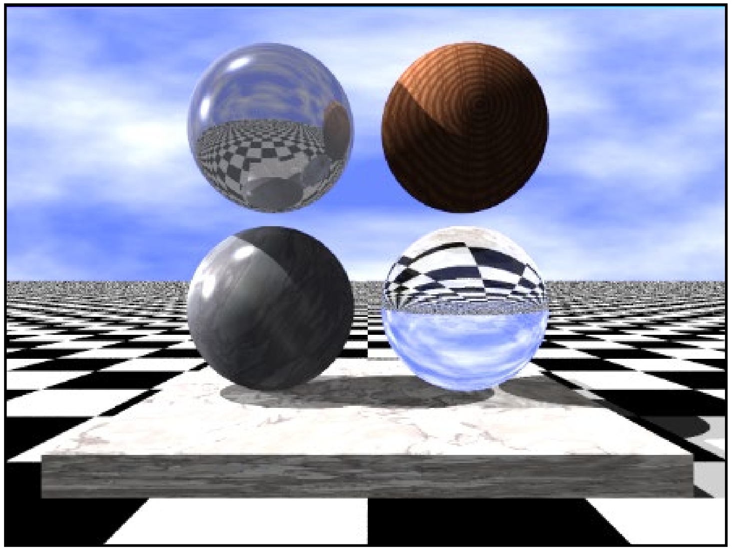
レイトレーシング法（ray tracing algorithm, 光線追跡法） p.135

- 画素ごとに独立に交点を探索
- 視点からスクリーンの画素に向かう「レイ」上の最も近い交点を求める.



レイトレーシング法概要

- 高品質CGのための標準的な方法
- 反射，屈折，透過の効果
- 視点と各画素を結ぶ「レイ」(ray, 光線)を考え，レイ上にあるレイと平面／曲面との交点のうち最も視点に近いものの色を画素の色とする.
  - レイを単位とする隠面処理が行なわれる
- 計算のほとんどは交点の計算に費やされる

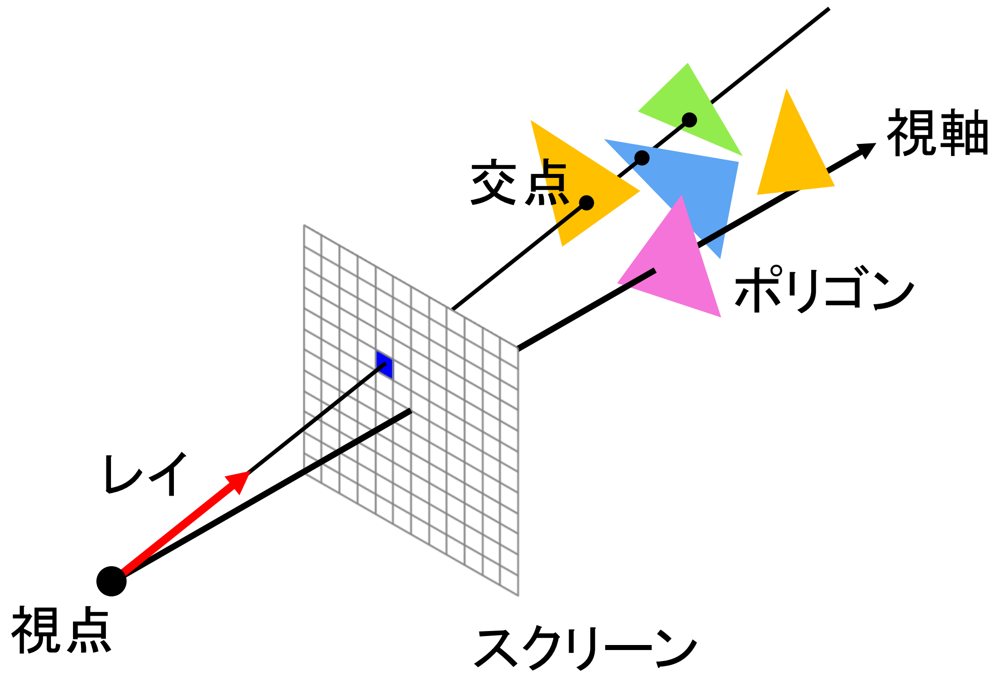


レイトレーシング法のアルゴリズム概要

スクリーンの各画素において，

1. 視点から画素に向かう直線(レイ，視線)とポリゴンの交点を求める.

2. レイ(視線)と最初に交差するポリゴンを求め，そのポリゴンの色で画素を塗る.



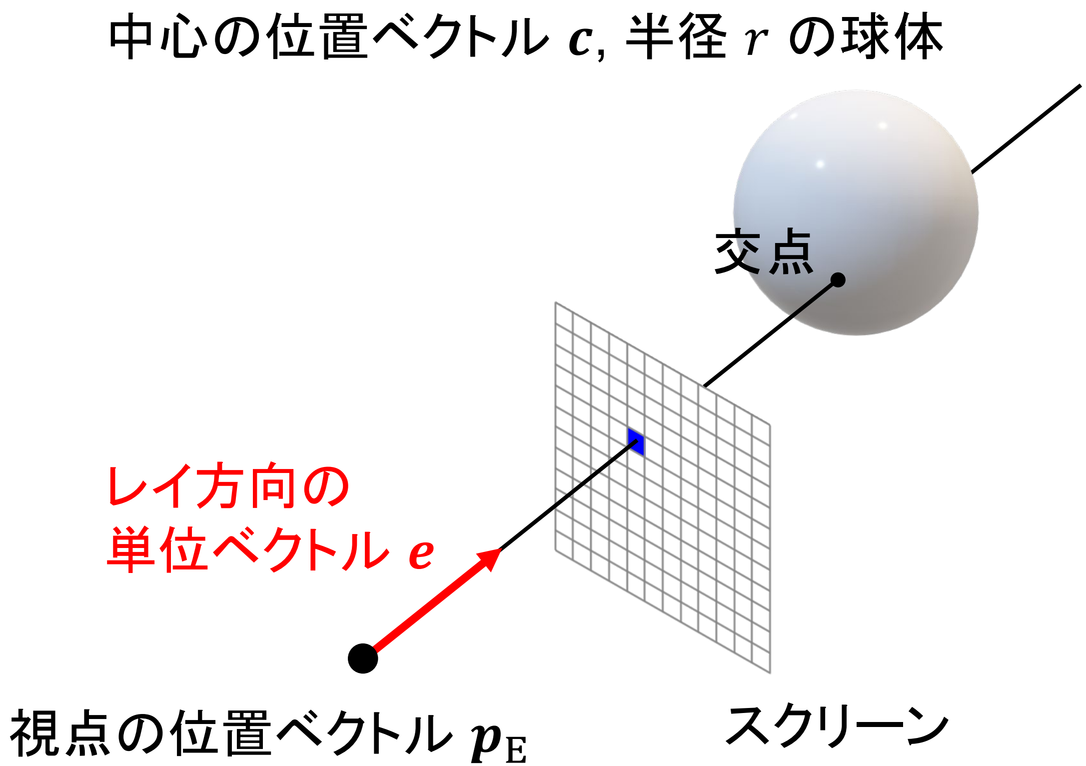
レイトレーシング法のアルゴリズム

```
foreach (スクリーン上の画素 (i, j)) {
    視点から画素 (i, j) に向かうレイ(の方程式)を決定する;
    レイと全ての物体の交差判定を行う;

    if (レイと交差する物体がひとつ以上存在) {
        全ての交点の中で最も視点に近いもの(可視点)を求める;
        可視点の物体の色を画素 (i, j) の色とする;
    }
    else {
        画素(i, j) の色を背景色とする;
    }
}
```

例題

問　視点の位置ベクトルが $\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}}$, レイ方向の単位ベクトルが $\boldsymbol{e}$ のとき, レイと球体（中心の位置ベクトル $\boldsymbol{c}$, 半径 r）の交点を求めよ.



例題

答 レイ上の点 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + t\boldsymbol{e} \quad (1)$$

と書ける.

球面上の点 $\boldsymbol{p}$ は

$$|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}|^2 = r^2 \quad (2)$$

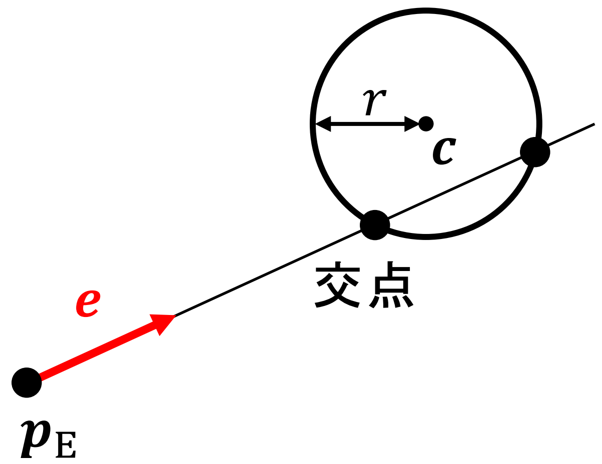
と書ける.

交点はこの2つを同時に満たすから, (1) を (2) に代入して,

$$|\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + t\boldsymbol{e} - \boldsymbol{c}|^2 = r^2$$

である.

(つづく)



例題

答（つづき）

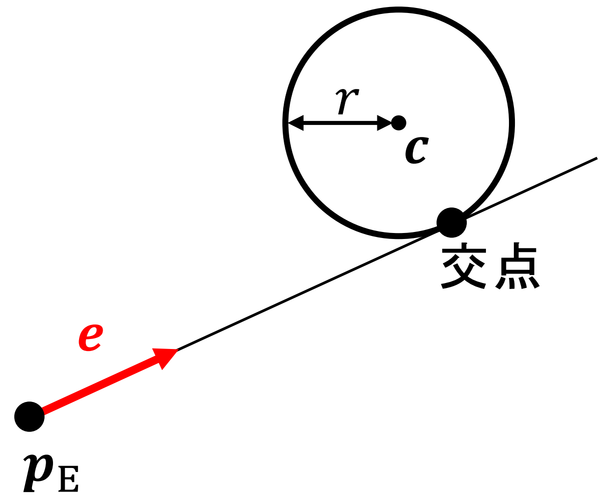
$$|t\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c})|^2 = r^2$$
$$\big(t\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c})\big) \cdot \big(t\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c})\big) - r^2 = 0$$
$$t^2 \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} + 2t\boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c}) - r^2 = 0$$
$$t^2 + 2t\boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c}) + |\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c}|^2 - r^2 = 0$$
$$t^2 + 2bt + c = 0 \quad (b = \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c}), c = |\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{c}|^2 - r^2)$$

1. 判別式 $D = b^2 - c > 0$ のとき
   交点は
   $$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + \left(-b + \sqrt{b^2 - c}\right)\boldsymbol{e} \quad (3)$$
   と
   $$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + \left(-b - \sqrt{b^2 - c}\right)\boldsymbol{e} \quad (4)$$
   の2つあり，視点に近い (4) が可視点である.

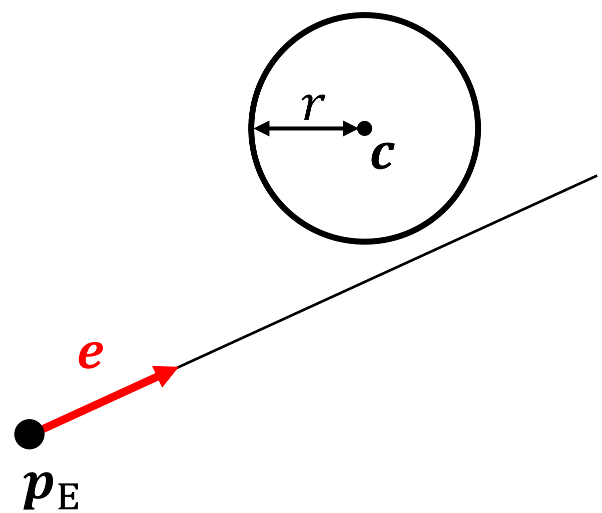
例題

答（つづき）

2. 判別式 $D = b^2 - c = 0$ のとき
   交点（接点）は
   $$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} - b\boldsymbol{e}$$
   の一つだけであり，これが可視点である.



3. 判別式 $D = b^2 - c = 0$ のとき
   レイと球は交わらない.



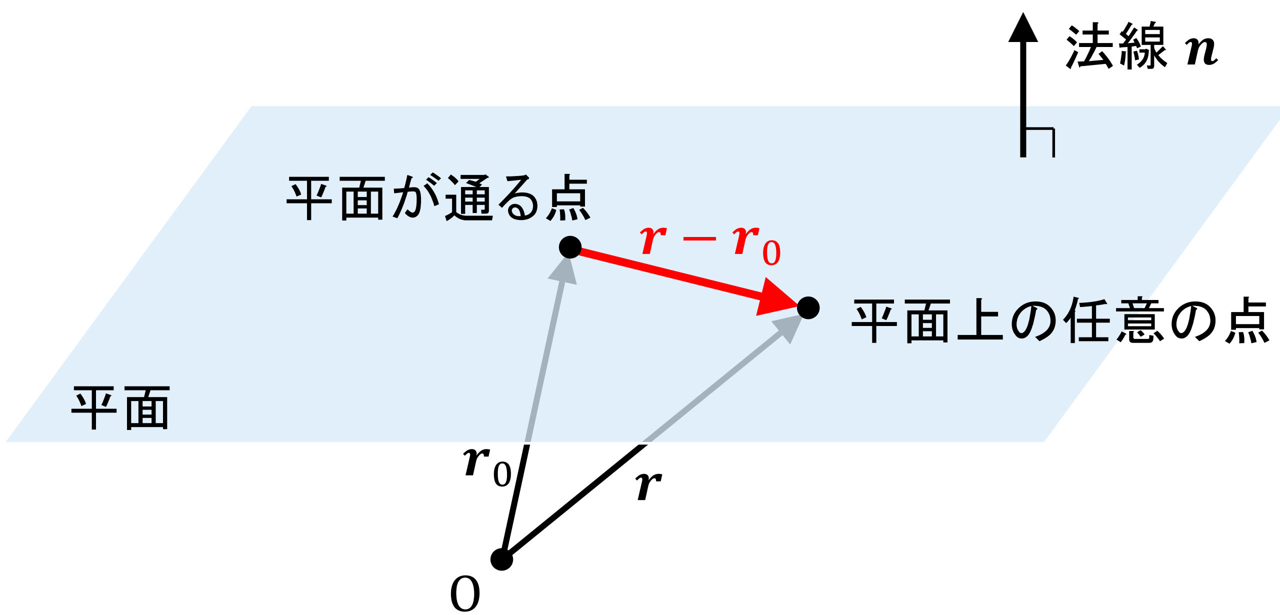
復習：平面の方程式

平面の方程式（ベクトル表示）

位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ の点を通り，法線が $\boldsymbol{n}$ である平面の方程式は

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$$

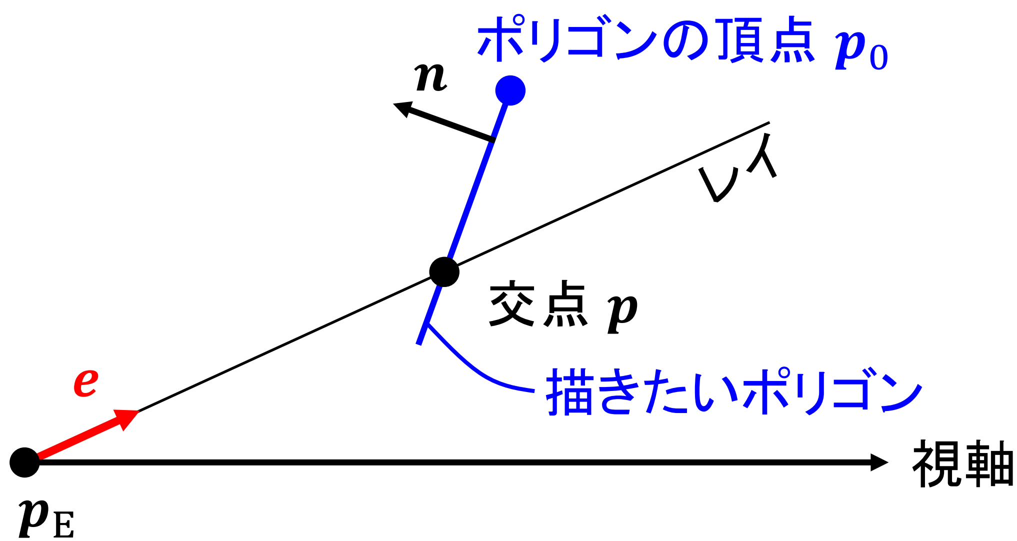
である.



レイとポリゴンの交差判定

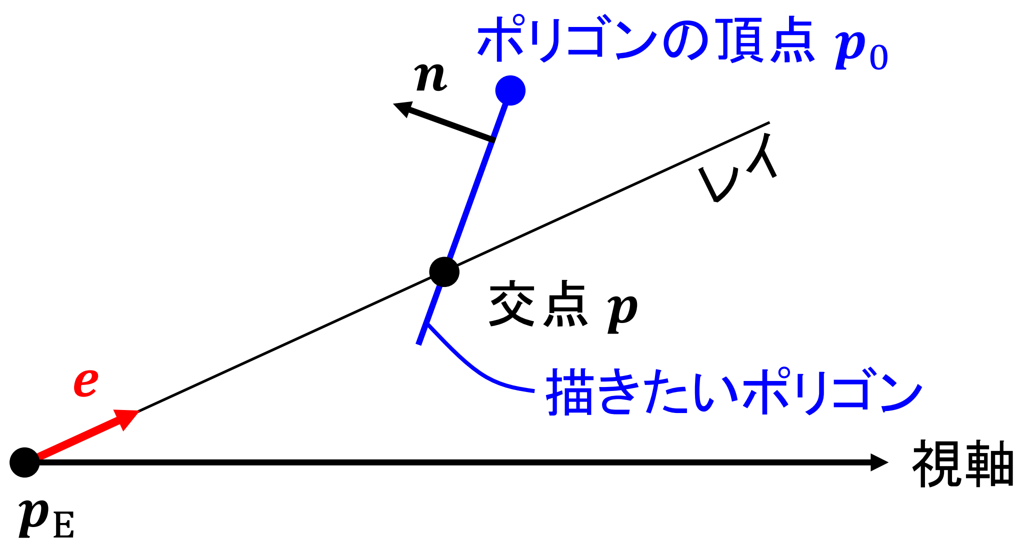
レイとポリゴンを含む平面の交点

- 交点の位置ベクトル: $\boldsymbol{p}$
- 視点の位置ベクトル: $\boldsymbol{p}_{\mathrm{E}}$
- レイ方向の単位ベクトル: $\boldsymbol{e}$
- ポリゴンの一つの頂点の位置ベクトル: $\boldsymbol{p}_0$
- ポリゴンの単位法線ベクトル: $\boldsymbol{n}$



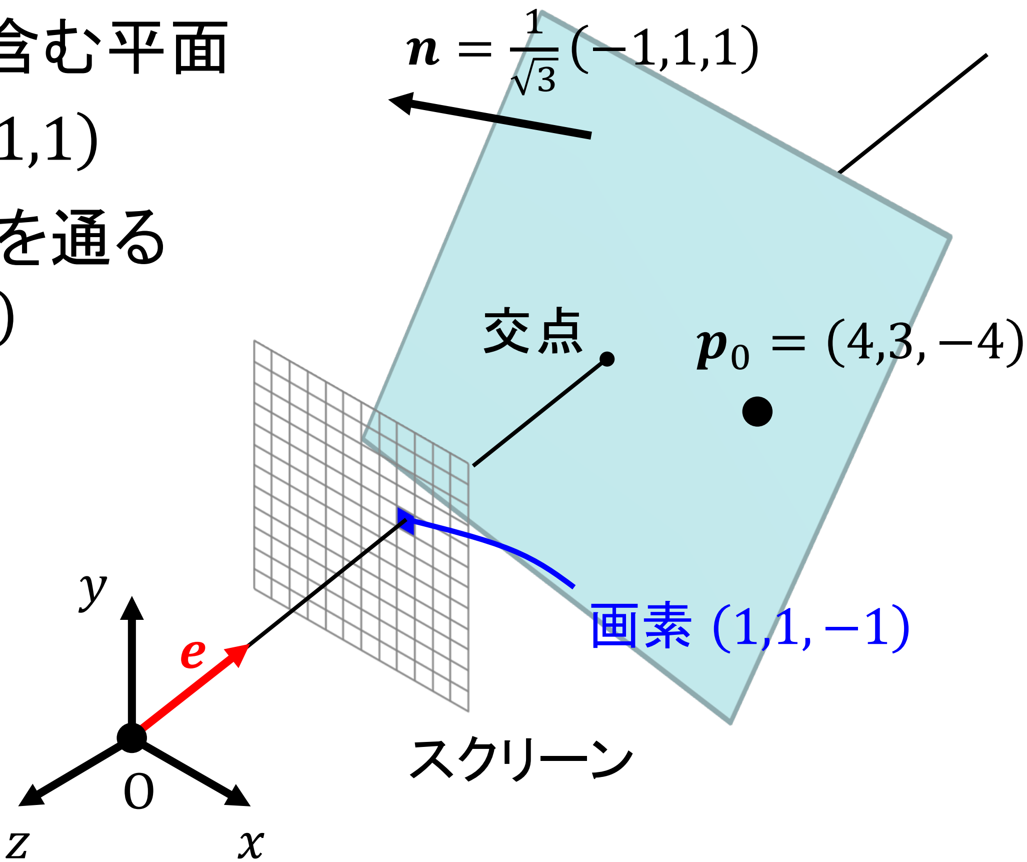
レイとポリゴンの交差判定

- レイ上の点は $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + t\boldsymbol{e}$ (1) である.
- ポリゴンを含む平面上の点は $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) = 0$ (2) を満たす.
- (1) を (2) に代入すると, $t = \frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}}$ である.
- したがって交点は $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + t\boldsymbol{e}$ $\left(\text{ただし } t = \frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}}\right)$ である.
- この時点では交点がポリゴンの内部にあるかはわからない.



考えてみよう

問　以下の状況を考える. レイと平面の交点を求めよ.
視点 : 原点
スクリーン: $z = -1$
描画したいポリゴンを含む平面
　法線: $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$
　点 $\boldsymbol{p}_0 = (4,3,-4)$ を通る
画素の座標: $(1,1,-1)$



考えてみよう

答　レイ方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ である.

交点は $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + t\boldsymbol{e}$ $\left(ただし\ t = \frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}}\right)$ であるから，t を求めよう.

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \cdot \big((4,3,-4) - (0,0,0)\big) = -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore t = \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right) \Big/ \left(-\frac{1}{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

この t をレイの式 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + t\boldsymbol{e} = \frac{t}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ に代入して,

$$\boldsymbol{p} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = (5,5,-5)$$

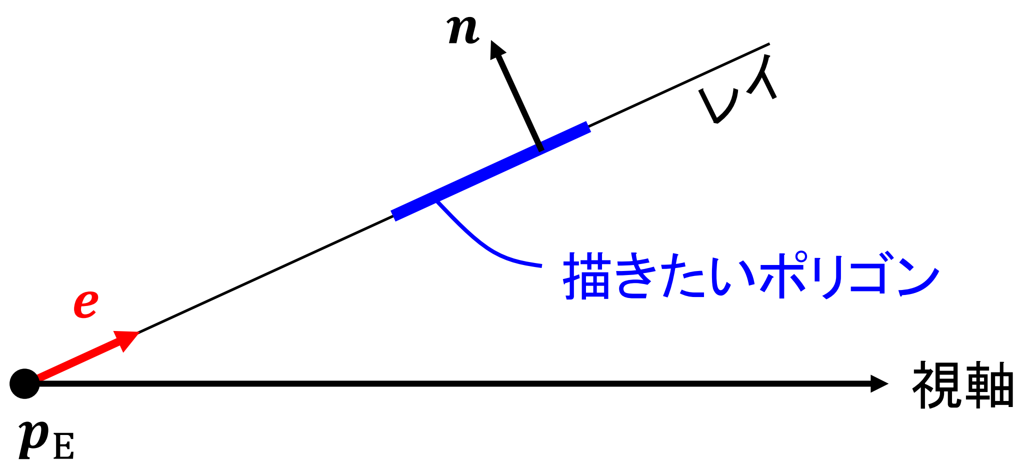
これが交点座標である.

考えてみよう

問　交点の計算において，$t=\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}_\mathrm{E})}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}}$ の分母がゼロだったらどうする？

考えてみよう

答　分母 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}$ がゼロということは，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{e}$ が垂直であることを意味する．つまり，視点からそのポリゴンは見えないと判断してよい．
⇒ 描画しなくてよい．

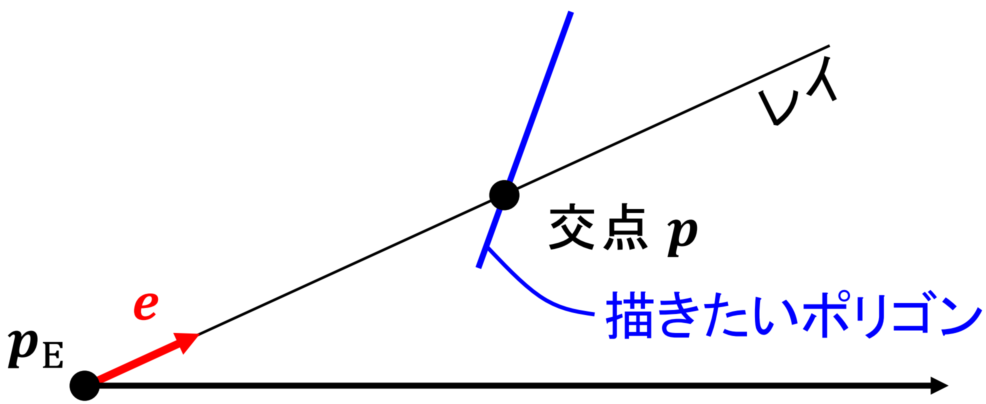


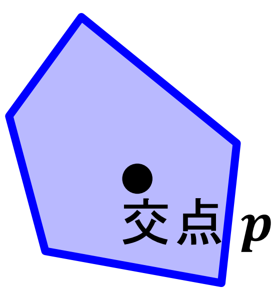
レイとポリゴンの交差判定

- レイとポリゴンを含む平面の交点

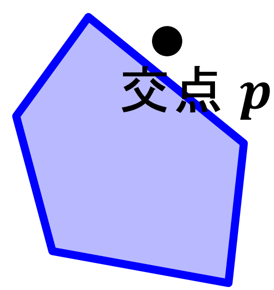
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}} + t\boldsymbol{e} \quad \left(ただし\ t = \frac{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_{\mathrm{E}})}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}} \right)$$

  はポリゴンの内部にあるだろうか？





交点がポリゴンの内部にあれば，レイとポリゴンは交差する．

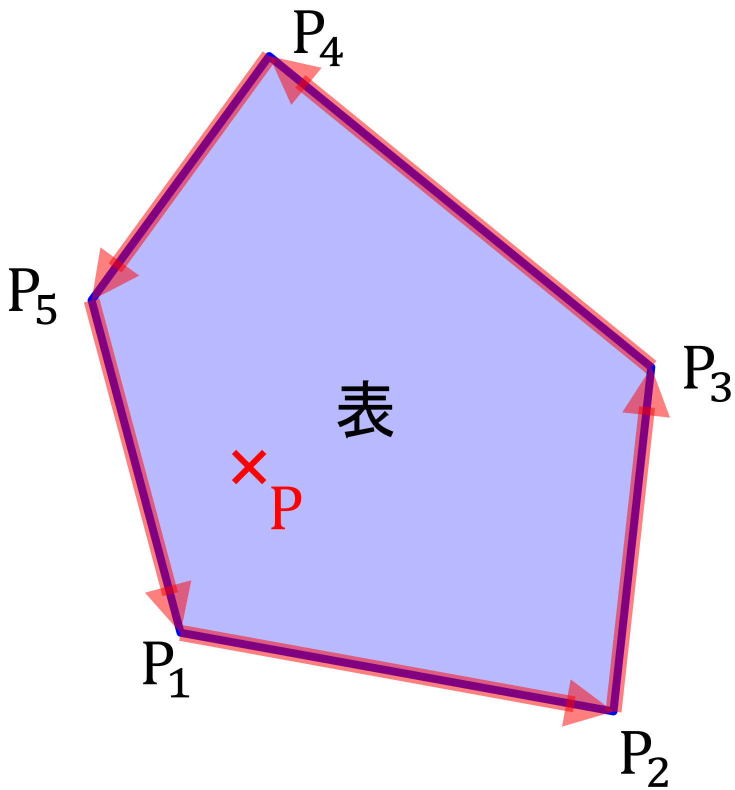


交点がポリゴンの外部にあれば，レイとポリゴンは交差しない．

レイとポリゴンの交差判定

凸ポリゴンで成立する性質：内部の点

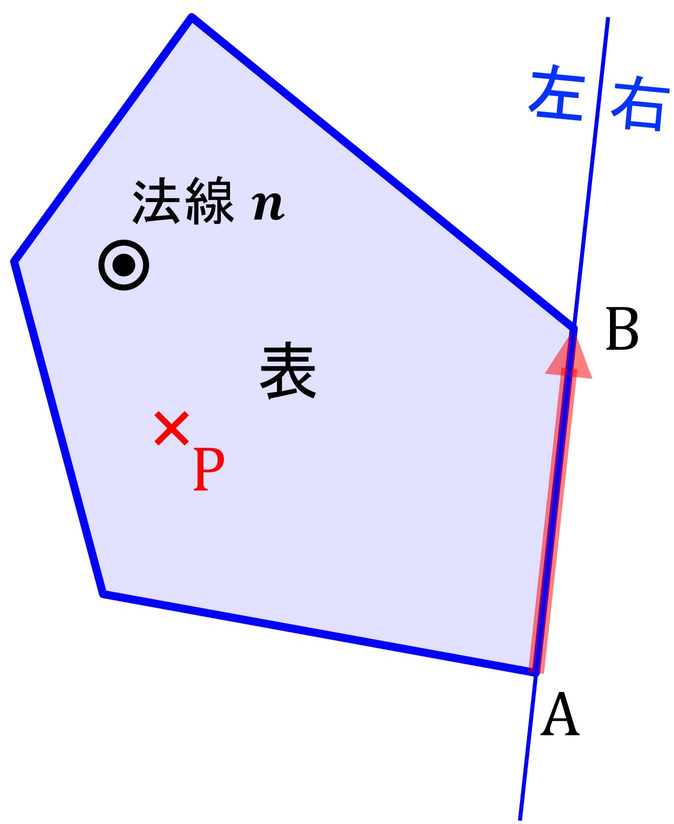
- 頂点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_1$ を順にたどるとき，内部にある点 P は常に左側に見える.



（頂点が，表から見て反時計回りに並んでいるとする）

レイとポリゴンの交差判定

問　法線が $\boldsymbol{n}$ の凸ポリゴンの1辺 AB と，この平面上の点 P を考える．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から見て，点 P が右側にあるか左側にあるかを判定するにはどうすればよいか．



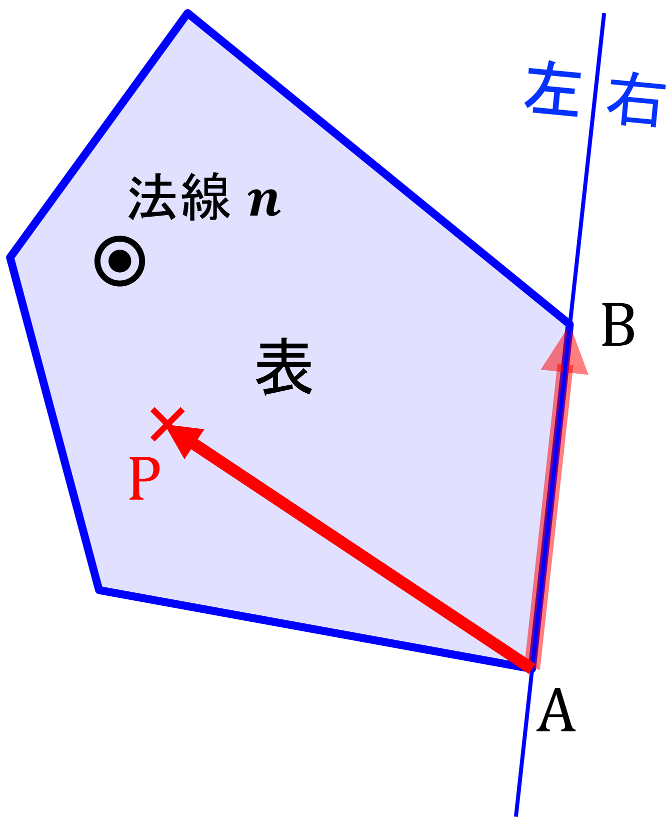
（頂点が，表から見て反時計回りに並んでいるとする）

レイとポリゴンの交差判定

答　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と，法線 $\boldsymbol{n}$ の向きが等しければ左側にあり，向きが逆であれば右側にある．つまり，

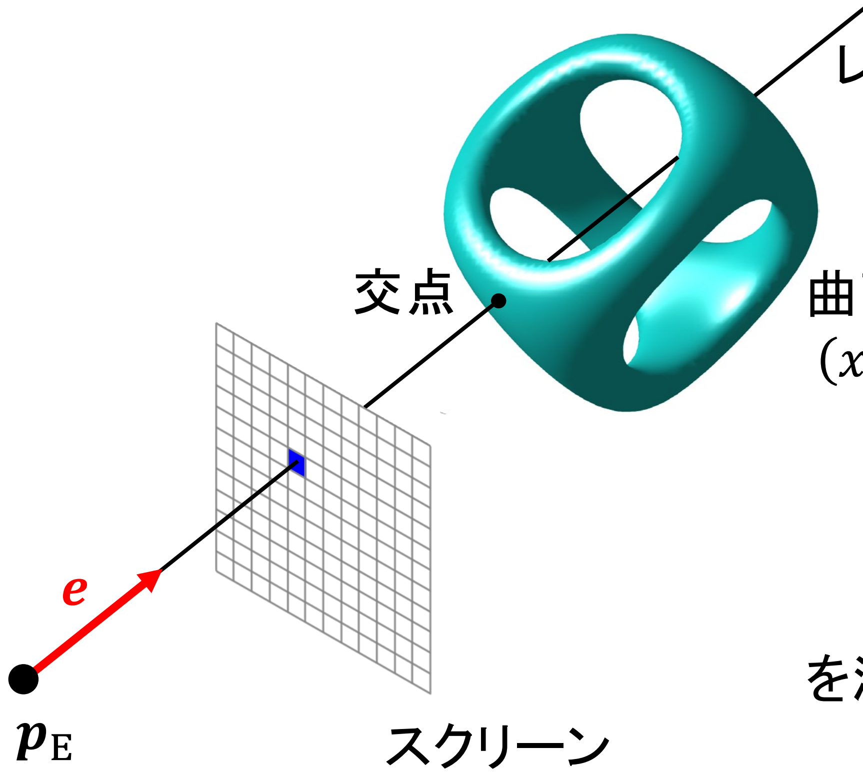
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) \cdot \boldsymbol{n} > 0 \text{ ならば，点 P は左側}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) \cdot \boldsymbol{n} < 0 \text{ ならば，点 P は右側}$$



考えてみよう

問　交点を解析的な計算で求められないような複雑曲面では，レイトレーシング法における交点計算はどのように行えば良いだろうか？



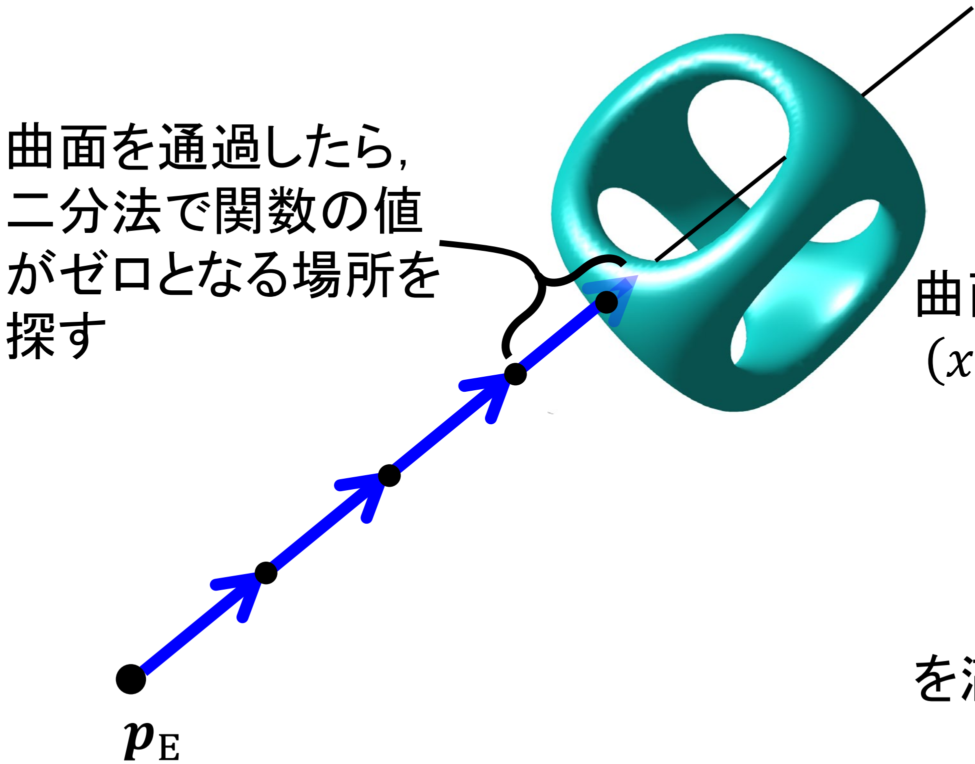
曲面上の点 (x, y, z) は方程式

$$
\begin{gathered}
(x-2)^2(x+2)^2 + (y-2)^2(y+2)^2 \\
+(z-2)^2(z+2)^2 \\
+3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) \\
+6xyz - 10(x^2 + y^2 + z^2) \\
+17 = 0
\end{gathered}
$$

を満たす．

考えてみよう

答　視点からレイの方向に少しずつ伸ばし，曲面の裏側に出たことを検知したら，二分法などの数値解法を用いて交点を求める．

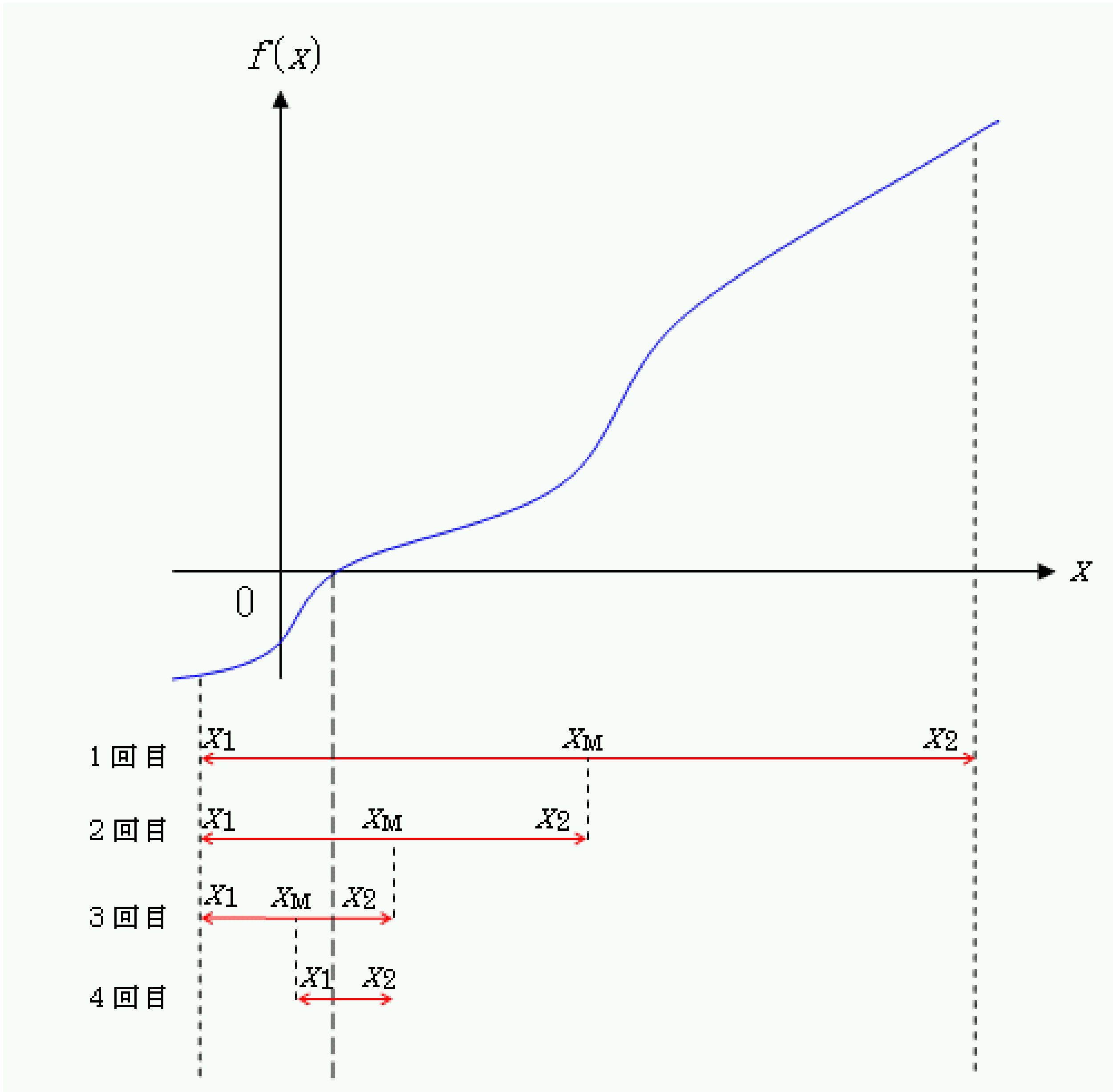


曲面上の点 (x, y, z) は方程式

$$
\begin{gathered}
(x-2)^2(x+2)^2+(y-2)^2(y+2)^2 \\
+(z-2)^2(z+2)^2 \\
+3(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2) \\
+6xyz-10(x^2+y^2+z^2) \\
+17=0
\end{gathered}
$$

を満たす．

二分法による方程式 $f(x) = 0$ の解法



例題

問　以下の説明のうち，適切なものをすべて選べ.

A) レイトレーシング法で必要なレイの数は，スクリーンの画素数と同じである.
B) 各画素のレイにおいて，ポリゴンとの交点は必ず存在する.
C) レイとポリゴンの交点が複数存在する場合，スクリーンから最も遠い交点が必要である.
D) レイトレーシング法の計算時間は，スクリーンの画素数に大きく依存する.
E) レイトレーシング法の計算時間は，カメラとスクリーンの距離に大きく依存する.
F) レイトレーシング法は鏡の表現に用いられる.
G) レイトレーシング法はガラスの屈折を含むシーンの表現に用いられる.

例題

答 A, D, F, G