No 1

Date

数学演習2第2回 2022 10/14

線形代数

同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ （Aは$m\times n$行列, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$）
の解全体 $W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ は $\mathbb{R}^n$の部分空間である。

Wを $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の<u>解空間</u>という。

<u>例題4.1.1</u> A: $m\times n$行列とするとき次の$W\subset\mathbb{R}^n$は$\mathbb{R}^n$の部分空間であることを示す。

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

解）次の3条件を確かめればよい。

(1) $\boldsymbol{0}\in W$
(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$ ならば $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$
(3) $c\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}\in W$ ならば $c\boldsymbol{x}\in W$

(1) $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0}\in W$ である。

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$ のとき、$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ より
$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$
故に $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$ である。

(3) $c\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}\in W$ のとき (2)と同様に
$$A(c\boldsymbol{x})=cA\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$
故に $c\boldsymbol{x}\in W$ である。

以上より Wは$\mathbb{R}^n$の部分空間である。□

<u>例題</u> 次の$W\subset\mathbb{R}^3$は$\mathbb{R}^3$の部分空間かどうか調べよ。

(1) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \end{matrix}\right\}$

(2) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+3x_3=2 \end{matrix}\right\}$

(3) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x_1+3x_2-x_3\leq 1 \\ x_1-2x_2+3x_3\leq 2 \end{matrix}\right\}$

解) (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ とおくと W は

$$W = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \}$$

と表されるから同次連立1次方程式の解空間より $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

(2) $\boldsymbol{0} \notin W$ であるから W は部分空間でない。

(3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $x_1 \leq y_1, \cdots, x_n \leq y_n$ のとき $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ と表すとき、A を(1)の行列とすると W は

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

と表される。このとき

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x} \in W$ であるが

$2\boldsymbol{x}$ は $A(2\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ であるから $2\boldsymbol{x} \notin W$

故に W は部分空間でない。□

問題4.1

1. 次の W はベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間かどうか調べよ。

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{matrix} \right\}$

解) $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3$ は $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \neq 1$ より $\boldsymbol{0} \notin W$
よって W は部分空間でない。□

2. 次の W はベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間となるかどうか調べよ。

(1) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(0) = 0, f(1) = 0 \}$

(4) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) \leq 0, f(2) = 0 \}$

解) (1) f_0 を多項式 0 とおくと $\mathbb{R}[x]_3$ の零ベクトルである。このとき次の3条件を示せば W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である。

(1) $f_0 \in W$ (2) $f, g \in W$ ならば $f + g \in W$ (3) $c \in \mathbb{R}, f \in W$ ならば $cf \in W$

Date

(1) $f_0(x) \equiv 0$ であるから $f_0(0)=0,\ f_0(1)=0$ である。よって $f_0 \in W$

(2) $f, g \in W$ のとき $f(0)=0,\ f(1)=0,\ g(0)=0,\ g(1)=0$ より

$(f+g)(0) = f(0)+g(0) = 0,\ (f+g)(1) = f(1)+g(1) = 0$

よって $f+g \in W$

(3) $c \in \mathbb{R},\ f \in W$ のとき 同様に

$(cf)(0) = cf(0) = c0 = 0,\ (cf)(1) = cf(1) = c0 = 0$

故に $cf \in W$

以上より W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である。□

(4) $f(x) = x-2$ とおくと $f(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ で $f(1) = -1 \leqq 0,\ f(2)=0$ より $f \in W$ である。このとき $-f(x)$ は $-f(1) = 1 \neq 0$ より $(-1)f \notin W$ よって W は部分空間でない。□

微分積分 分数式の積分

問題 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x-1)(x+2)^2}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)^2(x^2+3)}dx$

解) (1) $\dfrac{3x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2}$ とおくと

$A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) = 3x+1$

$x=1$ とおくと $9A=4,\ A=\dfrac{4}{9}$ $x=-2$ とおくと $-3C=-5,\ C=\dfrac{5}{3}$

$x=-1$ とおくと $A-2B-2C=-2,\ -2B=\dfrac{8}{9},\ B=-\dfrac{4}{9}$

$\therefore$ 与式 $= \displaystyle\int\left\{\frac{4}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{4}{9}\frac{1}{x+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{(x+2)^2}\right\}dx$

$= \dfrac{4}{9}\log|x-1| - \dfrac{4}{9}\log|x+2| - \dfrac{5}{3}\dfrac{1}{x+2} + C$

$= \dfrac{4}{9}\log\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| - \dfrac{5}{3}\dfrac{1}{x+2} + C$

(2) $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2(x^2+3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+3}$ とおくと

$2x-1 = A(x-1)(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x-1)^2$

$x=1$ として　$4B=1$, $B=\dfrac{1}{4}$　$x=0$ として $-3A+3B+D=-1$

$-3A+D=-7/4$　$x=-1$ として $-8A+4B-4C+4D=-3$

$-2A-C+D=-1$　$x=2$ として $7A+7B+2C+D=3$

$7A+2C+D=\dfrac{5}{4}$

$D=-\dfrac{7}{4}+3A$ より　$A-C=\dfrac{3}{4}$, $10A+2C=3$

$12A=\dfrac{9}{2}$　$A=\dfrac{3}{8}$, $D=\dfrac{-5}{8}$, $C=A-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{3}{8}$

$(A, B, C, D) = \left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{3}{8}, -\dfrac{5}{8}\right)$

$$与式 = \int\left\{\frac{3}{8}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{3}{8}x-\frac{5}{8}}{x^2+3}\right\}dx$$

$$= \frac{3}{8}\log|x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{3}{8}\int\frac{x}{x^2+3}dx - \frac{5}{8}\int\frac{1}{x^2+3}dx$$

$$= \frac{3}{8}\log|x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{3}{16}\log(x^2+3) - \frac{5}{8\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{3}{16}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+3} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{5\sqrt{3}}{24}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + C \quad \square$$