ロボティクス
第6回
動力学
便利なLagrange 運動方程式

李　周浩

例題

【問題】　重心周りの慣性モーメントI_G，質量Mの１リンク回転ロボットがあり，回転軸が重力方向に垂直に置かれているとする．
このロボットアームの運動方程式を求めよ．ただし，水平軸から計測したアームの角度をθ，回転軸から重心までの距離をl_g，重力加速度をgとする．また，モータによる関節モーメント（トルク）をτとおけ．

準備　ベクトルの微分

1）列ベクトル　$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$　について，その時間微分を以下で定義する．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} := [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n]^T$$

2）関数　$f : R^n \to R$　　$y = f(x), \mathrm{y} \in R, \boldsymbol{x} \in R^n$
について，

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} := \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right] \in R^{1\times n}$$

3）偏微分　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})]^T, \mathrm{y} \in R^m, x \in R^n$
関数　$\boldsymbol{f}: R^n \to R^m$

について，

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} := \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n \end{bmatrix} \in R^{m\times n}$$

ヤコビ行列

Lagrangeの運動方程式 (p79)

Lagrange関数から運動方程式を導く

Lagrange 関数 （Lagrangian） $L := K - P$

K:= システム全体の運動エネルギーの総和
P:= システム全体のポテンシャルエネルギーの総和

システムの 一般化座標 q_i ← システムの運動を記述するために必要な最低限の座標

q_i に対応する一般化力 τ_i

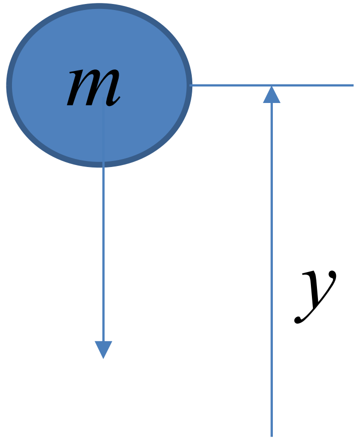
とすると，システムの運動方程式は，次式で与えられる．

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \qquad (5.2)$$

Lagrangeの運動方程式 （例１）

自由落下する質点の運動方程式を，Lagrange法で求めよ.

一般化座標　y [m]
一般化力　　質点にかかる力 f=0 [N]



運動エネルギー　$K = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$

ポテンシャルエネルギー　$P = mgy$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) - (-mg) = 0$$

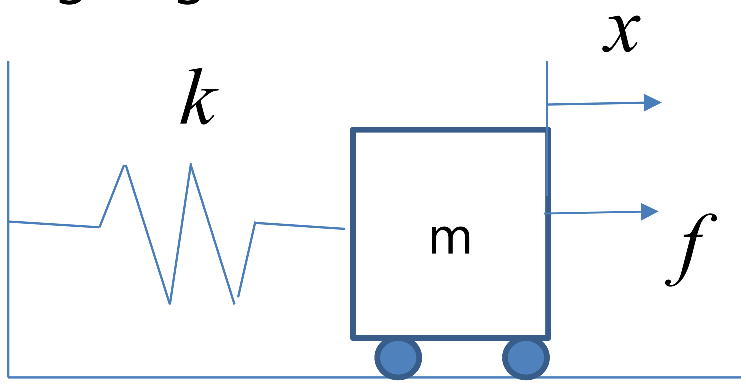
$$m\ddot{y} + mg = 0$$

（もし上方向にFの力があれば

$F = m\ddot{y} + mg$ となる）

Lagrangeの運動方程式 （例２）

図のようなMass-spring系の運動方程式をLagrange法で導出せよ．
ただし，
m: 質量
K：ばね定数
X ：バネの自然長を基準とした
　　バネの変位
f: 台車にかかる力
とする．



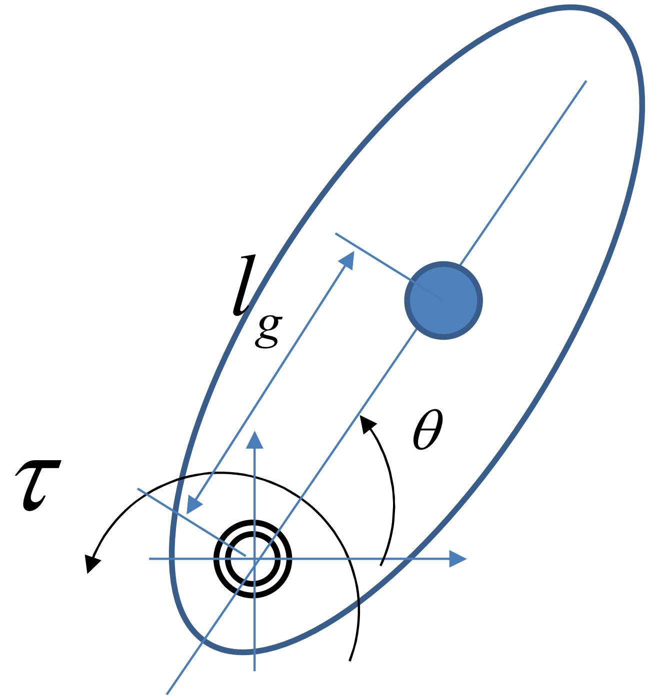
運動エネルギー

ポテンシャルエネルギー

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]-\frac{\partial L}{\partial x}=f$$

Lagrangeの運動方程式 （例３）

図のような１リンクロボットの運動方程式を導出せよ．ただし回転軸まわりの慣性モーメントをI, 回転軸から重心までの距離をl_g，水平を基準としたリンクの施政角をθとする．また，重力加速度をg，関節トルクをτとして答えよ．



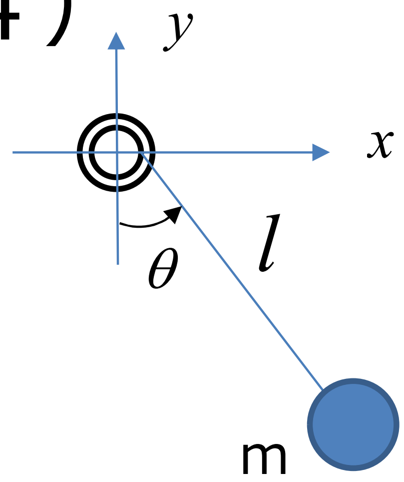
運動エネルギー

ポテンシャルエネルギー

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right]-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\tau$$

Lagrangeの運動方程式　（例４）

図のような振り子の運動方程式を求めよ．ただし，おもりの質量をm，回転軸からおもりまでの距離をl，鉛直下向きから反時計回りに測った角度をθとする．重力加速度をgとせよ．



運動エネルギー

ポテンシャルエネルギー

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right]-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

Lagrangeの運動方程式 （例5.1）

2リンクロボットの例

m_{i}：リンクiの質量
L_{i}： リンクi の長さ
L_{gi}：Σ_{i} 座標系原点からリンクiの質量中心（重心）までの距離
$\hat{I}_i$ ：質量中心まわりのリンクiの慣性モーメント
g=(0, -g, 0)ᵀ ：重力ベクトル
s_i: リンクiの重心位置を示す位置ベクトル

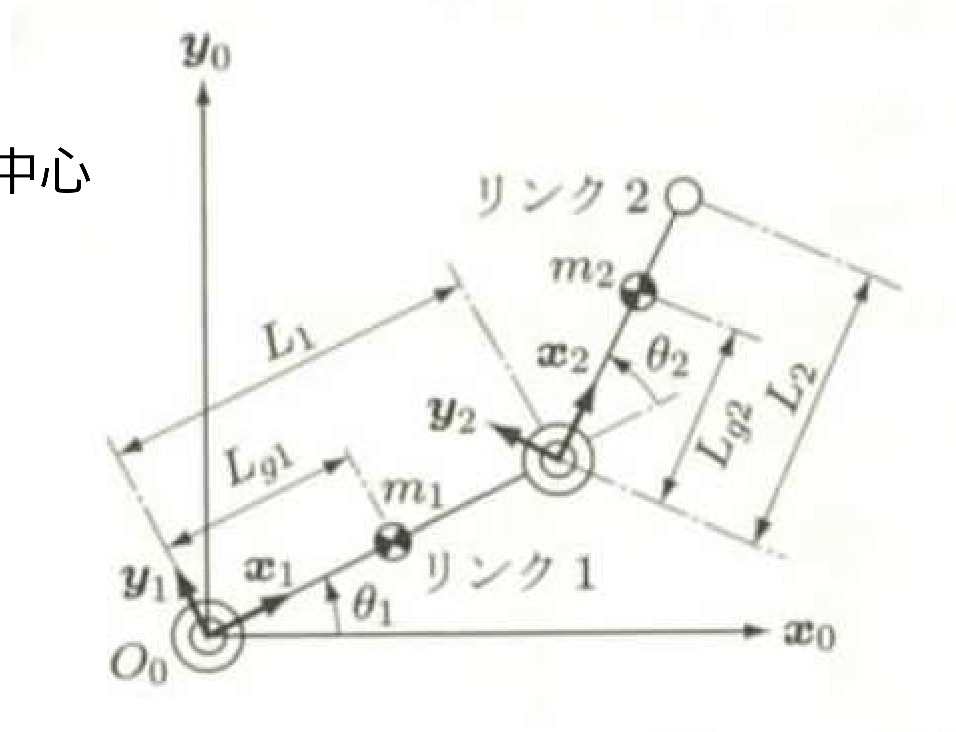


図 5.2 2 関節

運動エネルギー

第1リンク $$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}_1{}^2 + \frac{1}{2} \hat{I}_1 \dot{\theta}_1{}^2$$

第2リンク $$K_2 = \underbrace{\frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2{}^2}_{\text{重心の並進}} + \underbrace{\frac{1}{2} \hat{I}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2}_{\text{重心周りの回転運動}}$$

Lagrangeの運動方程式 （例5.1）

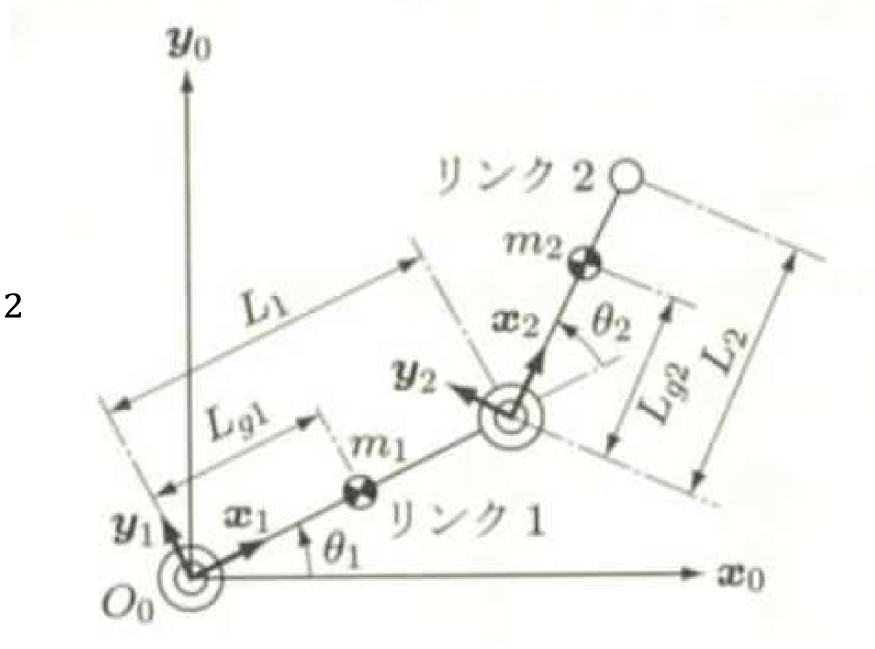
運動エネルギー
第1リンク

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}_1{}^2 + \frac{1}{2} \hat{I}_1 \dot{\theta}_1^2$$

第2リンク

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2{}^2 + \frac{1}{2} \hat{I}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

s_i :リンクiの重心位置を示す
位置ベクトル



$$s_1 \coloneqq \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g1} \cos\theta_1 \\ L_{g1} \sin\theta_1 \end{bmatrix} \qquad \dot{s}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{g1} \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ L_{g1} \cos\theta_1 \, \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

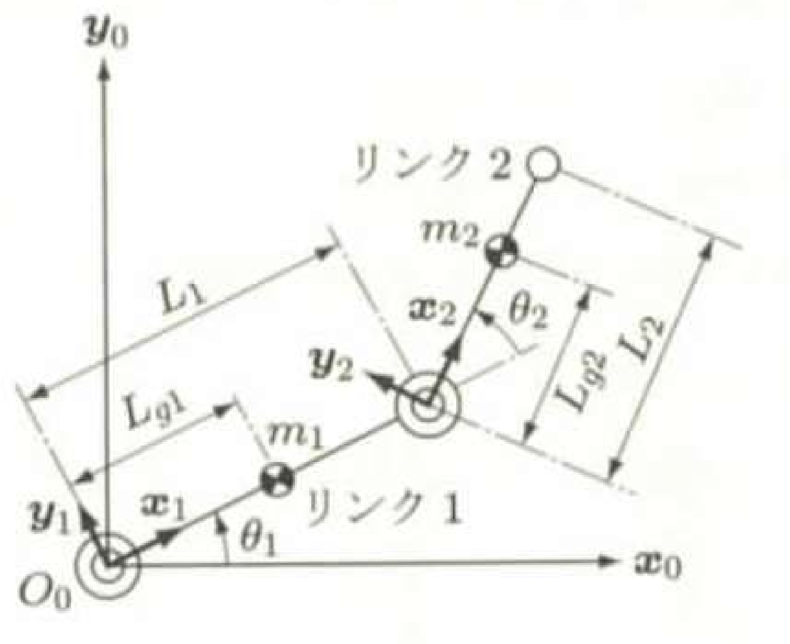
$$K_1 = \frac{1}{2}\left(m_1 L_{g1}{}^2 + \hat{I}_1\right) \dot{\theta}_1{}^2$$

運動エネルギー
第1リンク

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}_1{}^2 + \frac{1}{2} \hat{I}_1 \dot{\theta}_1{}^2$$

第2リンク

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2{}^2 + \frac{1}{2} \hat{I}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$



$$s_2 := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos\theta_1 + L_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin\theta_1 + L_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{s}_2 := \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \Big(m_2 ((L_1{}^2 + L_{g2}{}^2 + 2 L_1 L_{g2} \cos\theta_2) \dot{\theta}_1{}^2 + L_{g2}{}^2 \, \dot{\theta}_2{}^2$$
$$+ 2(L_{g2}{}^2 + L_1 L_{g2} \cos\theta_2) \, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + \hat{I}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \Big)$$

ポテンシャルエネルギ

m_i：リンクiの質量
L_i： リンクi の長さ
L_{gi}：Σ_i 座標系原点からリンクiの質量中心（重心）までの距離
$\hat{I}_i$ ：質量中心まわりのリンクiの慣性モーメント
g=(0, -g, 0)^T ：重力ベクトル

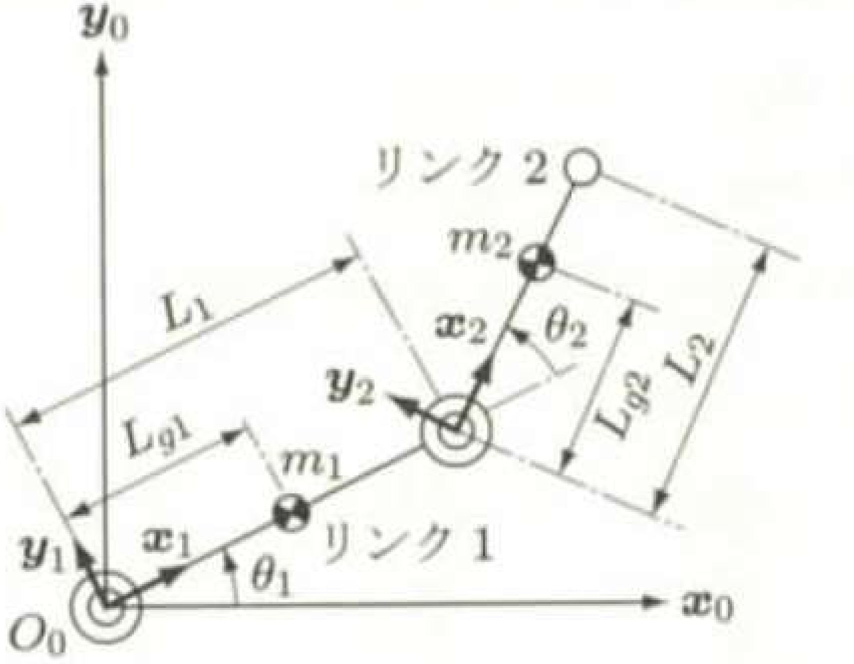


図 5.2 2 関節

ポテンシャルエネルギー
第1リンク

$$P_1 = m_1 g L_{g1} \sin\theta_1$$

第2リンク

$$P_2 = m_2 g\,(\mathrm{L}_1 \sin\theta_1 + L_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

上記のK_i, P_iを用いて，Lagrangeの運動方程式として，
2リンクロボットのダイナミクスが得られる．（教科書 p.81~83)

多リンクロボットの運動方程式（参考）　（例5.1）

2リンクロボットの例

m_{i}：リンクiの質量

L_{i}： リンクi の長さ

L_{gi}：Σ_{i} 座標系原点からリンクiの質量中心（重心）までの距離

$\hat{I}_i$：質量中心まわりのリンクiの慣性モーメント

$g=(0, -g, 0)^{\mathrm{T}}$ ：重力ベクトル

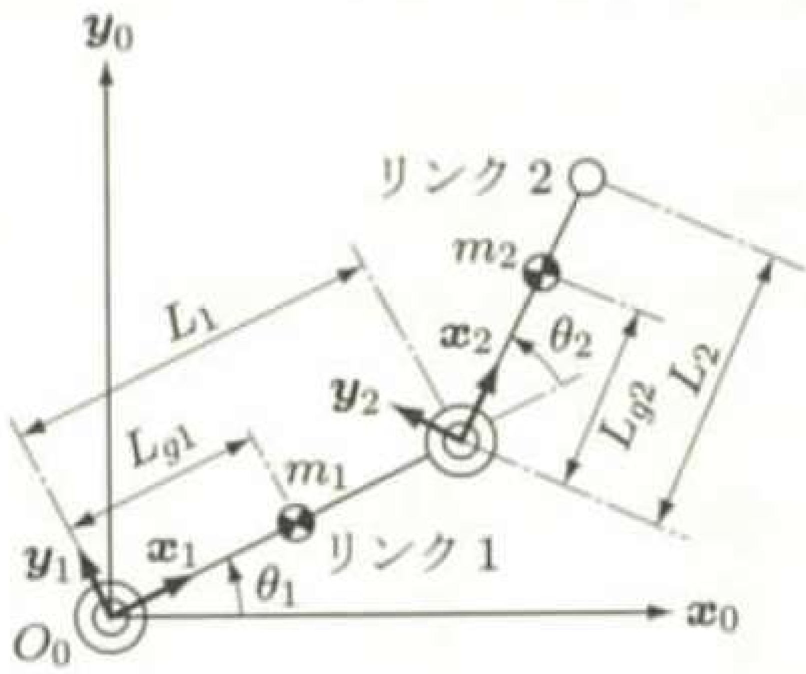


図 5.2　2 関節

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\tau_i$$

同様の力学解析により，多リンクロボットの運動方程式も導出可能

2リンクロボットのダイナミクス（参考）

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} I_1 + I_2 + 2m_2L_1L_{g2}\cos\theta_2 + m_2{L_1}^2 & I_2 + m_2L_1L_{g2}\cos\theta_2 \\ I_2 + m_2L_1L_{g2}\cos\theta_2 & I_2 \end{bmatrix}}_{\text{慣性行列}}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}}_{\text{慣性項}}$$

$$+\begin{bmatrix} -m_2L_1L_{g2}\sin\theta_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + {\dot{\theta}_2}^2) \\ m_2L_1L_{g2}\sin\theta_2\,{\dot{\theta}_1}^2 \end{bmatrix}$$

遠心力・コリオリ力の項
（非線形項）

$$+\begin{bmatrix} (m_1L_{g1} + m_2L_1)\cos\theta_1 + m_2L_{g2}\cos(\theta_1+\theta_2) \\ m_2L_{g2}\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}\mathrm{g}$$

重力項

多リンクロボットのダイナミクス（一般形）

慣性項　　遠心・コリオリ力の項
（非線形項）

重力項

関節トルク

別の表記（有本流）

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\underline{\frac{1}{2}\dot{M}(\boldsymbol{q})+S(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{\tau}$$

上記の $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ と全く同じ

（参考）　１リンクロボットのダイナミクス

$$I\ddot{\theta}+mgl_g\cos\theta=\tau$$