数学演習2 第7回

2022 11/8

微分積分 練4.3(B)

2.(1) 広義積分 $A_n = \int_0^\infty \frac{(1+x)^n}{e^x}dx$ は収束することを示せ。

解) $\frac{(1+x)^n}{e^x} = \frac{(1+x)^n}{e^{x/2}} \frac{1}{e^{x/2}}$ 　ここで $\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^n}{e^{x/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{x/2}}(x^{-1}+1)^n = \lim_{x\to\infty} \frac{2^n\left(\frac{x}{2}\right)^n}{e^{x/2}}(x^{-1}+1)^n = 0$

よって $[0,\infty)$ での $\frac{(1+x)^n}{e^{x/2}}$ の最大値を M とおくと

$0 < \frac{(1+x)^n}{e^x} \leq M\frac{1}{e^{x/2}}$ 　ここで $\int_0^\infty \frac{1}{e^{x/2}}dx = \left[-2\frac{1}{e^{x/2}}\right]_0^\infty = 2$ で収束するから

A_n は収束する。□

1. 次の広義積分の収束, 発散を判定せよ。

(2) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

解) $\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \infty$ より $(1,\infty)$ での広義積分。

$(1,2]$ では $0 < \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 　ここで $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2 = 2$ で収束する。

よって $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ は収束する。

$[2,\infty)$ では $0 < \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}$ 　ここで $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^\infty = \frac{1}{2}$ で収束する。

よって $\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ は収束する。

故に 与式は収束する。□

線形代数

数ベクトルでないときの1次独立な最大個数

<u>定理</u> ベクトル $v_1, \dots, v_n$ が 1次独立なベクトル $u_1, \dots, u_m$ の1次結合で行列 A ($m\times n$) を用いて $(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_m)A$ と表されているとき次が成立する。

(1) $A = [a_1 \cdots a_n]$ とすると $v_1, \dots, v_n$ と $a_1, \dots, a_n$ は1次関係が同じ

(2) $v_1, \dots, v_n$ が1次独立 $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_n$ が1次独立 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank} A = n$

(3) $m=n$ のとき $v_1, \dots, v_n$ が1次独立 $\Leftrightarrow$ A が正則行列

問4.3 1. 次の各組のベクトルに対して問いに答えよ。

(i) 1次独立な最大個数 r を求めよ。

(ii) r 個の1次独立なベクトルを前の方から順に求めよ

(iii) 他のベクトルを(ii)のベクトルの1次結合で書き表せ。

(4) $f_1 = 1+x-x^2+2x^3+x^4$, $f_2 = 1+x^2+x^3$, $f_3 = 3+5x-7x^2+8x^3+5x^4$

$f_4 = 1-2x+5x^2-x^3-2x^4$, $f_5 = x+2x^2+x^3+x^4$

解) $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (1, x, x^2, x^3, x^4)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 右辺の行列を A とおく。

$1, x, x^2, x^3, x^4$ は1次独立より $f_1, \cdots, f_5$ と A の列ベクトル $a_1, \cdots, a_5$ の1次関係は同じ。

A を簡約化すると

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

簡約化より　a_1, a_2, a_5 は1次独立, $a_3 = 5a_1 - 2a_2$, $a_4 = -2a_1 + 3a_2$

よって(ii) f_1, f_2, f_5 は1次独立 (iii) $f_3 = 5f_1 - 2f_2$, $f_4 = -2f_1 + 3f_2$ (i) $r = 3$ □

ベクトル空間の基と次元

ベクトル空間 V のベクトル $u_1, \cdots, u_n$ が存在して V の任意のベクトルが $u_1, \cdots, u_n$ の1次結合であるとき $u_1, \cdots, u_n$ は V を生成するという。

<u>定義</u> ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ が次の2条件を満たすとき V の基であるという。

(i) $u_1, \cdots, u_n$ は1次独立　(ii) $u_1, \cdots, u_n$ は V を生成する

<u>定理</u> ベクトル空間 V が基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を持つとき基の中に含まれるベクトルの個数 n は基のとり方によらない。この n を V の次元といい $\dim V$ で表す。

また $V = \{0\}$ のとき $\dim V = 0$ と約束する。

例1. $\mathbb{R}^n$ において $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は 1次独立で $\mathbb{R}^n$ を生成するから $\mathbb{R}^n$ の基であり、$\dim \mathbb{R}^n = n$ である。

例2 $\mathbb{R}[x]_n$ において $1, x, \cdots, x^n$ は 1次独立で $\mathbb{R}[x]_n$ を生成するから $\mathbb{R}[x]_n$ の基であり、$\dim \mathbb{R}[x]_n = n+1$ である。

問4.4 1. 次のベクトル空間 W の次元と1組の基を求めよ。

(1) $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} x = 0 \right\}$

(5) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f'(1) = 0 \}$

解) (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} x = 0$ の解は $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ より $x_3 = c_1, x_5 = c_2$ とおくと

$$x = \begin{bmatrix} -c_1 - 2c_2 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

よって $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は W を生成し 1次独立であるから（右辺 $= 0$ とすると $c_1 = c_2 = 0$ となり）W の基であり $\dim W = 2$ である。故に $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は基で $\dim W = 2$ □

(5) $f(x) \in W$, $f(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$ とおくと $f'(x) = 3a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3$

より、$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$ これを解くと $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} a_1 - a_3 - 2a_4 = 0 \\ a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0 \end{cases}$ $a_3 = c_1, a_4 = c_2$ とおくと $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 - 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

よって $f(x) = (c_1 + 2c_2)x^3 + (-2c_1 - 3c_2)x^2 + c_1 x + c_2 = c_1(x^3 - 2x^2 + x) + c_2(2x^3 - 3x^2 + 1)$

$f_1(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ は W を生成し 1次独立であるから（右辺 $= 0$ とおくと $c_1 = c_2 = 0$ となる）W の基であり $\dim W = 2$. 故に $\{x^3 - 2x^2 + x, 2x^3 - 3x^2 + 1\}$ は W の基, $\dim W = 2$ □

定理　$\dim V = n$ であるとき V の n 個のベクトル $v_1, \cdots, v_n$ に対して次の3条件は同値.
(1) $v_1, \cdots, v_n$ は1次独立である。(2) $v_1, \cdots, v_n$ は V を生成する (3) $v_1, \cdots, v_n$ は V の基である。

問4.4　3. $\{u_1, u_2, u_3\}$ がベクトル空間 V の基であるとき 次のベクトルの組 $\{v_1, v_2, v_3\}$ は V の基となるか調べよ。

(2) $v_1 = u_1 - u_2 + u_3$, $v_2 = -u_1 + 3u_2 - u_3$, $v_3 = u_1 + u_3$

解)　$(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　右辺の行列をAとおく。

$\{u_1, u_2, u_3\}$ が基より $\dim V = 3$ であるから, $\{v_1, v_2, v_3\}$ が基 $\Leftrightarrow$ v_1, v_2, v_3 が1次独立
u_1, u_2, u_3 が1次独立より v_1, v_2, v_3 が1次独立 $\Leftrightarrow$ Aが正則
ここで $|A| = 3 + 1 - 3 - 1 = 0$ より Aは正則でない。よって v_1, v_2, v_3 は1次従属であり
V の基でない。□