ロボティクス
（ロボット工学基礎論）

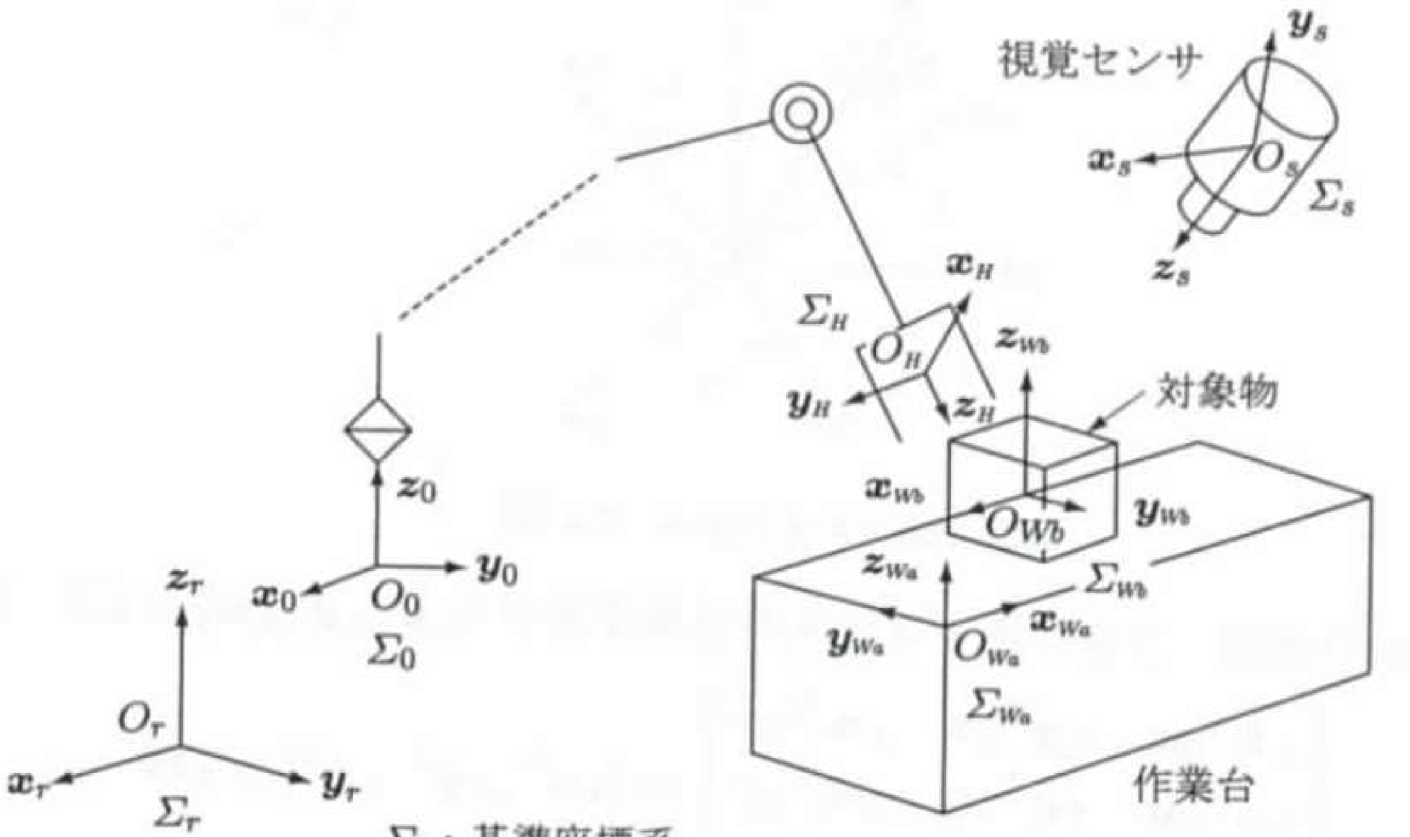
第2回　運動学

李　周浩

4. マニピュレータの運動学　(Kinematics)

4.2 座標変換

座標系



Σ_r : 基準座標系
Σ_0 : ベース座標系　　Σ_s : センサ座標系
Σ_H : 手先(ハンド)座標系　　Σ_{W_i} : 対象物 i の作業座標系

図 4.5 座標系

4.2.1 平行移動

$$ {}^{0}p_{A0} \in R^{3\times 1} $$

座標系　終点　起点

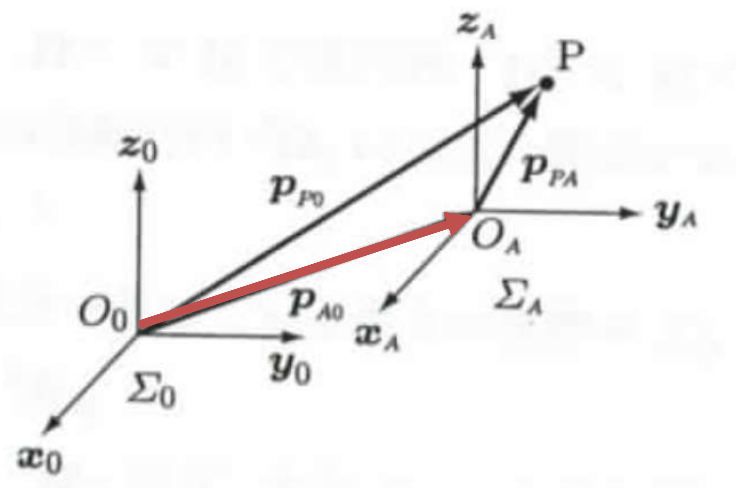


図 4.6　座標の平行移動

${}^{0}p_{A0}$ は,

O_0からO_Aに向かうベクトル　（OBの位置ベクトル）を Σ_0 座標系にて表現したものを表す.

この表記を用いれば，一般に，以下が成立する.

$$ {}^{0}p_{P0} = {}^{0}p_{A0} + {}^{0}p_{PA} $$

4.4.2　回転行列

原点が一致した状態における回転

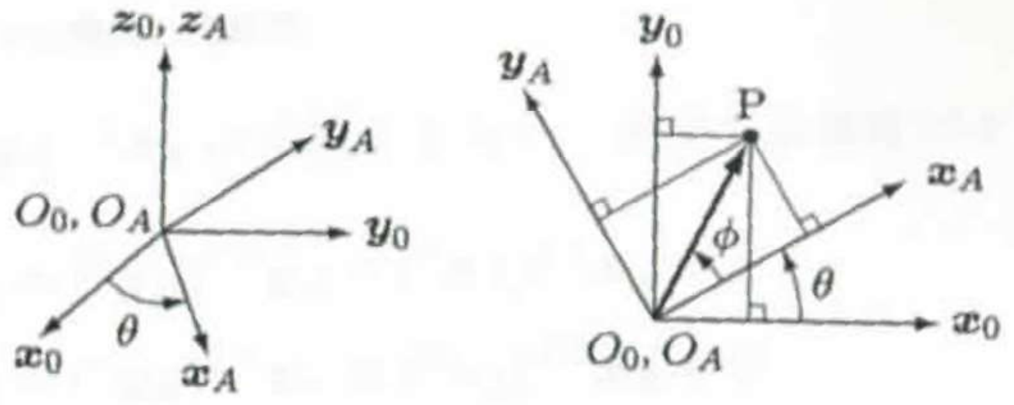
同一のベクトル　p を，
異なる座標系でみた場合の表現

$$ {}^{0}p = {}^{0}R_{A}\,{}^{A}p $$

$$ {}^{0}R_{A} = [\underline{{}^{0}\boldsymbol{x}_{A}\ {}^{0}\boldsymbol{y}_{A}\ {}^{0}\boldsymbol{z}_{A}}] \in R^{3\times 3} $$

X_A, Y_A, Z_A 方向を向いた単位ベクトルをΣ_0座標系で表したベクトル

${}^{0}R_{A}$　：　Σ_A からΣ_0への回転行列とよぶ



（a）z 軸回りの回転　（b）xy 平面で表した z 軸回りの回転

図 4.7　z 軸回りの回転変換

回転行列の性質

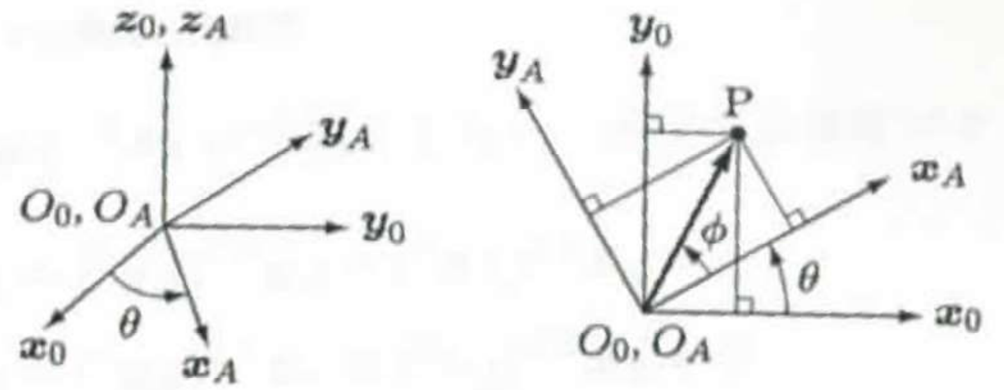
$$ {}^{A}R_{0} = {}^{0}R_{A}^{-1} = ({}^{0}R_{A})^{T} $$

このような性質を満たす行列は，直交行列と呼ばれる

$$ {}^{0}R_{B} = {}^{0}R_{A}\,{}^{A}R_{B} $$

例　　Z軸周りの回転

$$ {}^{0}R_{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



（a） z 軸回りの回転　（b） xy 平面で表した z 軸回りの回転

図 4.7　z 軸回りの回転変換

丸暗記だけでは不足．(他に対応できない)

回転行列の問題点： 要素数 9 個　→　冗長である．
３変数で表現できるはずである．
→　３回の連続回転により姿勢を表現する．
（オイラー角，ロール，ピッチ，ヨー角）

物体位置姿勢

先と，似ているが，違う話をしている点に注意！

Σ_Aからみた物体Bの

位置 $\quad {}^{A}p_{BA}$

姿勢 $\quad \{{}^{A}\boldsymbol{x}_B, {}^{A}\boldsymbol{y}_B, {}^{A}\boldsymbol{z}_B\}$

$\quad {}^{A}R_B$

にて表現可能

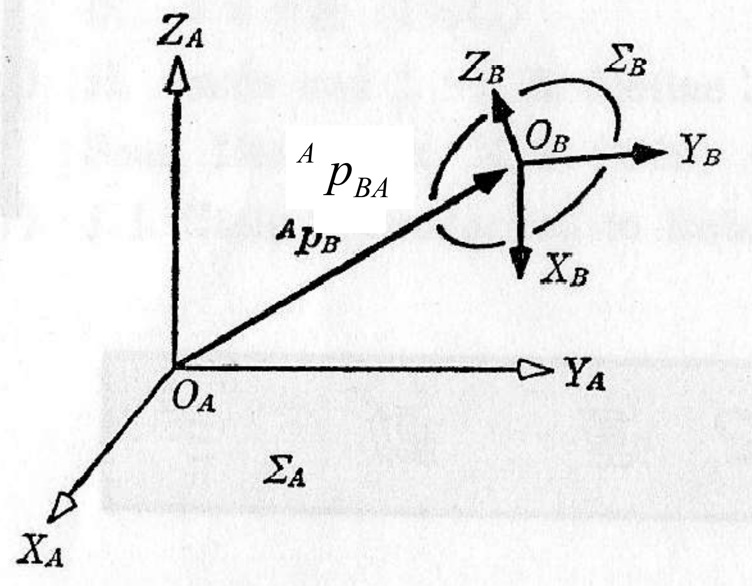


図 2·1　基準座標系と物体座標系

注意：
次ページの「同次変換行列」のみで，
位置と姿勢の表現が可能.

4.2.3　同次変換(並進を含む座標変換手法)

ある座標系で表現した位置ベクトルを，別の座標系からみた位置ベクトルに変換する方法

$$ {}^{0}p_{po} = {}^{0}R_{A}\,{}^{A}p_{PA} + {}^{0}\boldsymbol{p}_{A0} $$

$$ \begin{bmatrix} {}^{0}p_{P0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}R_{A} & {}^{0}\boldsymbol{p}_{A0} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}p_{PA} \\ 1 \end{bmatrix} \quad = {}^{0}T_{A} \begin{bmatrix} {}^{A}p_{PA} \\ 1 \end{bmatrix} $$

☆２つの式が同じものであることを確かめよ

同次変換行列

$$ {}^{0}T_{A} := \begin{bmatrix} {}^{0}R_{A} & {}^{0}\boldsymbol{p}_{A0} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

同次変換行列の性質

$$ {}^{A}T_{C} = {}^{A}T_{B}\,{}^{B}T_{C} $$

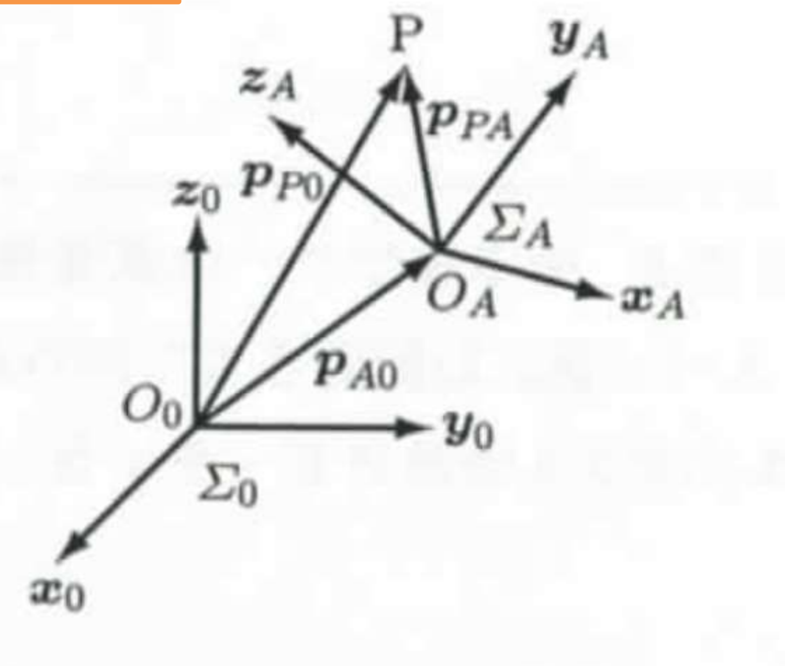


図 4.9　座標の平行移動と回転移動

【例4.1】ハンドの位置姿勢の同次変換行列を求めよ

位置　$^{0}p_{H} = [0,4,0]^{T}$

姿勢

$$^{0}\boldsymbol{x}_{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad ^{0}\boldsymbol{y}_{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad ^{0}\boldsymbol{z}_{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である．これより回転行列は

$$^{0}\boldsymbol{R}_{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

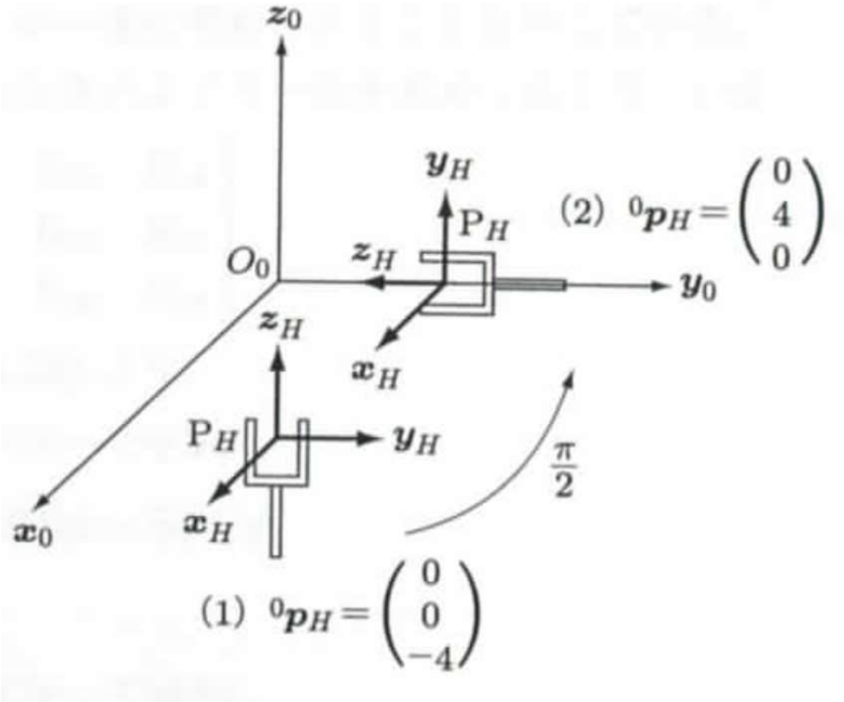


図 4.10　ハンドの変換

基準座標系から$\Sigma 0$からみたハンドの位置姿勢を表す同次変換行列は

$$^{0}T_{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{0}T_{A} := \begin{bmatrix} ^{0}R_{A} & ^{0}\boldsymbol{p}_{A0} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

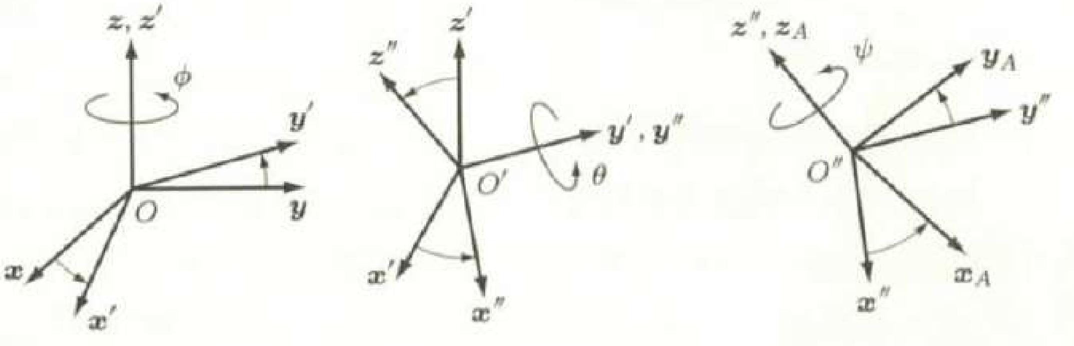
4.2.4 姿勢表現　　（１）オイラー角　(ϕ, θ, ψ)

3回の回転で姿勢を表現
Z軸周り φ →　Y′軸周り θ → Z″軸周り ψ

(注意１）　いくつか種類がある．バラバラ
例1： 吉川のテキストでは,
Z → x′ → Z ′軸まわりである.
例2： あるメーカーのセンサでは，x->y->z

オイラー角の回転行列

$$
{}^{O}R_{A} = {}^{O}R_{O'}\,{}^{O'}R_{O''}\,{}^{O''}R_{A} = R(Z,\phi)R(Y,\theta)R(Z,\psi)
$$



（a） z 軸での回転　（b） y′ 軸での回転　（c） z″ 軸での回転

図 4.11　z-y-z オイラー角

例

$$
{}^{O}R_{O'} = R(z,\phi) = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

オイラー角（φ，θ，ψ）
→　回転行列の計算可能

$$
{}^{O}R_{A} = \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix} \quad (4.32)
$$

オイラー角の求め方
　回転行列の数値が与えられた場合

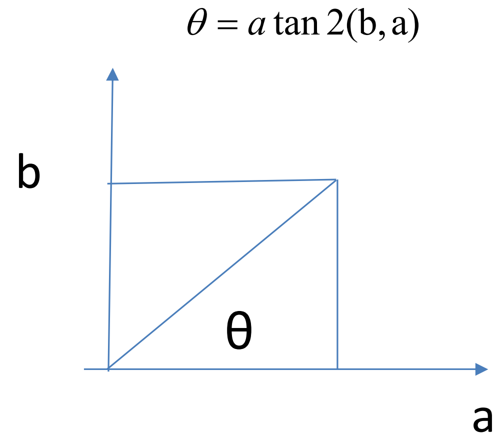
$$
{}^{O}R_{A} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}
\qquad
{}^{O}R_{A} = \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix}
$$

両者を比較して，φ，θ，ψを求める．

$$R_{13}^2 + {R_{2,3}}^2 = {S_\theta}^2$$

$$S_\theta = \pm\sqrt{{R_{13}}^2 + {R_{23}}^2}$$

$$\theta = atan2\,(\pm\sqrt{{R_{13}}^2 + {R_{23}}^2}, R_{33}) \quad (4.38)$$



$\sin\theta \neq 0$　のとき，

R_{13}, R_{23}より，$\phi = atan2(\pm R_{23}, \pm R_{13})$

R_{31}, R_{33}より，$\psi = atan2(\pm R_{32}, \mp R_{31})$

2通り存在

$\sin\theta = 0$　のとき，(1) $cos\theta = 1$のとき，

$$\theta = cos^{-1}(R_{33}) = (1 - R_{33})\pi/2$$

$$\psi = atan2\,(R_{21}, R_{22}) - R_{33}\phi$$

sinθ = 0 のとき，

(1) cosθ=1のとき，

$$
{}^{O}R_{A} = \begin{bmatrix} C_{\phi+\psi} & -S_{\phi+\psi} & 0 \\ S_{\phi+\psi} & C_{\phi+\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

となる．

よって

$$
\theta = 0
$$

$$
\phi + \psi = atan2(\mathrm{R}_{21}, R_{22})
$$

(2) cosθ=-1 のとき，

$$
{}^{O}R_{A} = \begin{bmatrix} C_{\phi-\psi} & -S_{\phi-\psi} & 0 \\ S_{\phi-\psi} & -C_{\phi-\psi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

となる．

よって

$$
\theta = \pm\pi
$$

$$
\phi - \psi = atan2(\mathrm{R}_{21}, -R_{22})
$$

4.2.4 姿勢表現　（２）ロールピッチヨー

3回の回転で姿勢を表現
Z軸周り φ →　Y′軸周り θ → X軸周り ψ

自動車などでよく使う.

注意
　オイラー角，(φ，θ，ψ)
　ロールピッチヨー角(φ，θ，ψ)

→ 和算ができない.