電気電子回路
第１０回：正弦波交流回路（２）
sinusoidal alternating current circuit (2)

今週の内容

- まず準備として、以下のことを学びます
  - 複素数
  - オイラーの公式
- 正弦波交流回路を解析する強力な手段として以下のことを学びます
  - フェーザ

〔復習〕虚数解

- 以下の方程式を解け

(1) $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$ より $x = 3, -1$

(2) $x^2 - 2x + 2 = 0$

解の公式を用いて

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

- 上のように数学では虚数単位 $\sqrt{-1}$ を $\boldsymbol{i}$ で表す

虚数単位 j

- 数学では虚数単位 $\sqrt{-1}$ を i で表すが、この授業では電気回路の伝統に従い、「 j 」で表す
  - 文字「 i 」は「電流の瞬時値」を表す変数として使う
- この表記に慣れて下さい

$$j^2 = \boxed{-1}$$

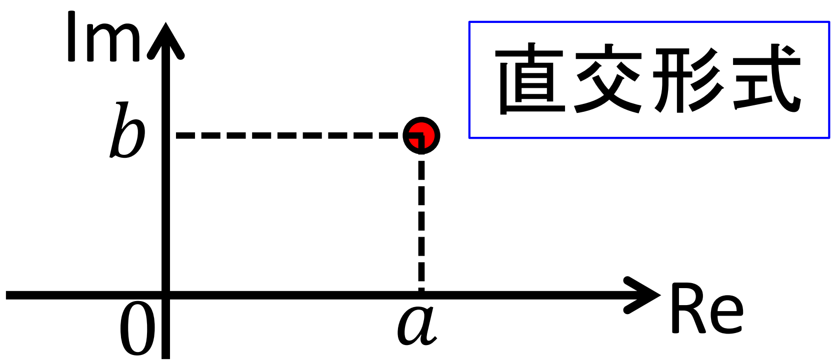
$$j^3 = \boxed{-j}$$

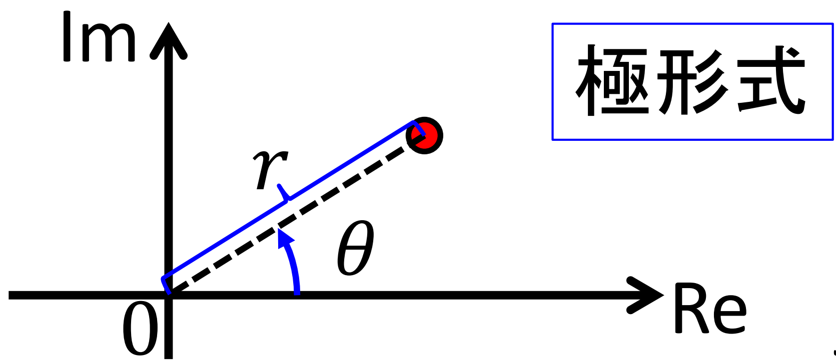
$$j^4 = \boxed{1}$$

$$\frac{1}{j} = \boxed{-j}$$

複素数

- a, b を実数とするとき、複素数は $a + bj$ と書ける
  - このaを 実部 、b を 虚部 と呼ぶ
  - 複素数 C の実部を $\mathrm{Re}\{C\}$ 、虚部を $\mathrm{Im}\{C\}$ と表す
- 複素数を $a + bj$ という形式(直交形式)で表す代わりに、$r\angle\theta$ という形式(極形式)で表すこともある
  - この r を 絶対値 、θ を 偏角 と呼ぶ
  - 複素数 C の絶対値を $|C|$ 、偏角を $\angle C$ (あるいは $\arg C$)と表す





直交形式と極形式

自分でやってみよう！

- 直交形式 $a+bj$ と極形式 $r\angle\theta$ は下の関係がある

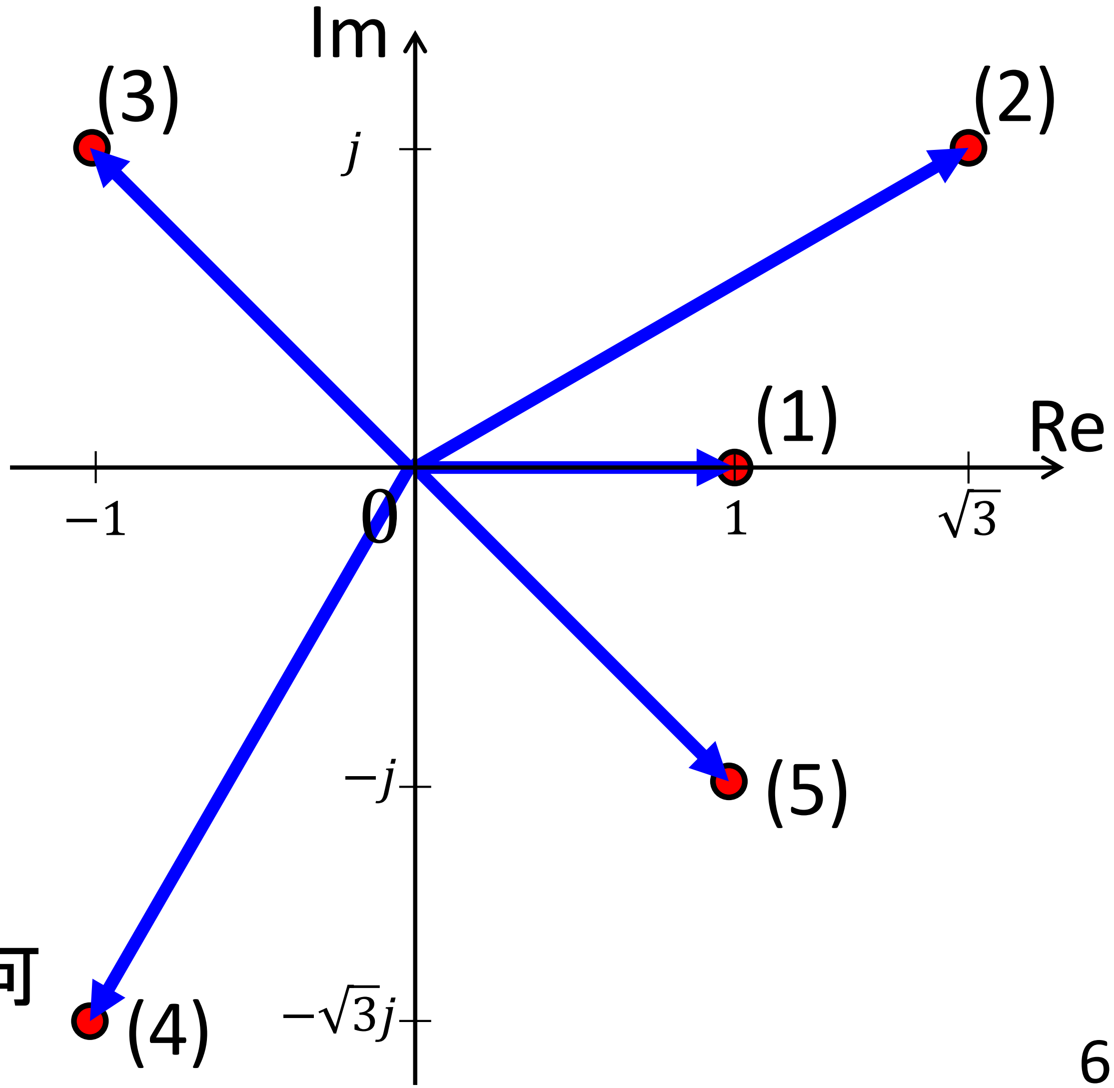
$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

- 例: 以下の直交形式を極形式に変換せよ

(1)	1	$1\angle 0$
(2)	$\sqrt{3}+j$	$2\angle\frac{\pi}{6}$
(3)	$-1+j$	$\sqrt{2}\angle\frac{3}{4}\pi$
(4)	$-1-\sqrt{3}j$	$2\angle\frac{4}{3}\pi$
(5)	$1-j$	$\sqrt{2}\angle\frac{7}{4}\pi$

例えば(5)は $\boxed{\sqrt{2}\angle-\frac{1}{4}\pi}$ も可



90°の回転

- 複素数 $c_1 = a + bj = r\angle\theta$ に対し、$c_2 = r\angle\theta + \frac{\pi}{2}$ の直交形式を求めよ

  図より $c_2 = -b + aj$

  よって $c_2 = jc_1$

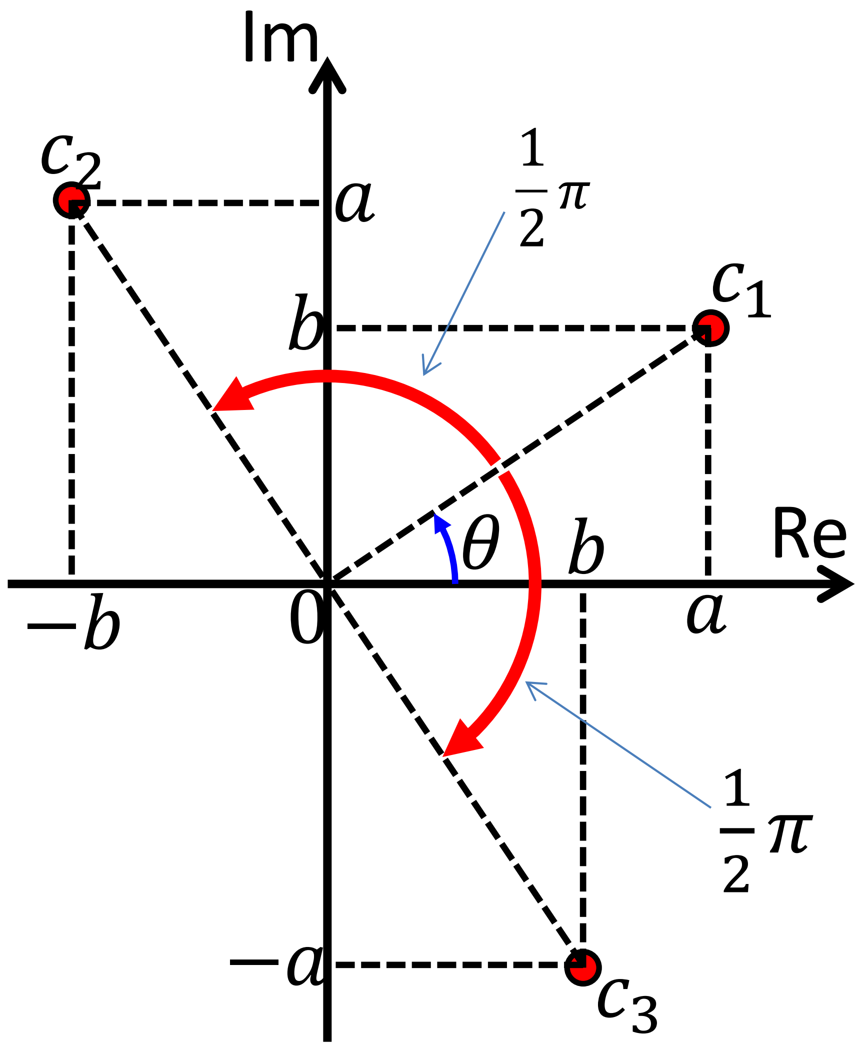
  $\boxed{j\text{ 倍すると90°進む}}$

- 複素数 $c_1 = a + bj = r\angle\theta$ に対し、$c_3 = r\angle\theta - \frac{\pi}{2}$ の直交形式を求めよ

  図より $c_3 = b - aj$

  よって、$c_3 = -jc_1$

  $\boxed{-j\text{ 倍すると90°遅れる}}$



オイラーの公式

- 以下の公式がある

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

【略証】

テイラー展開より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (1)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \qquad (2)$$

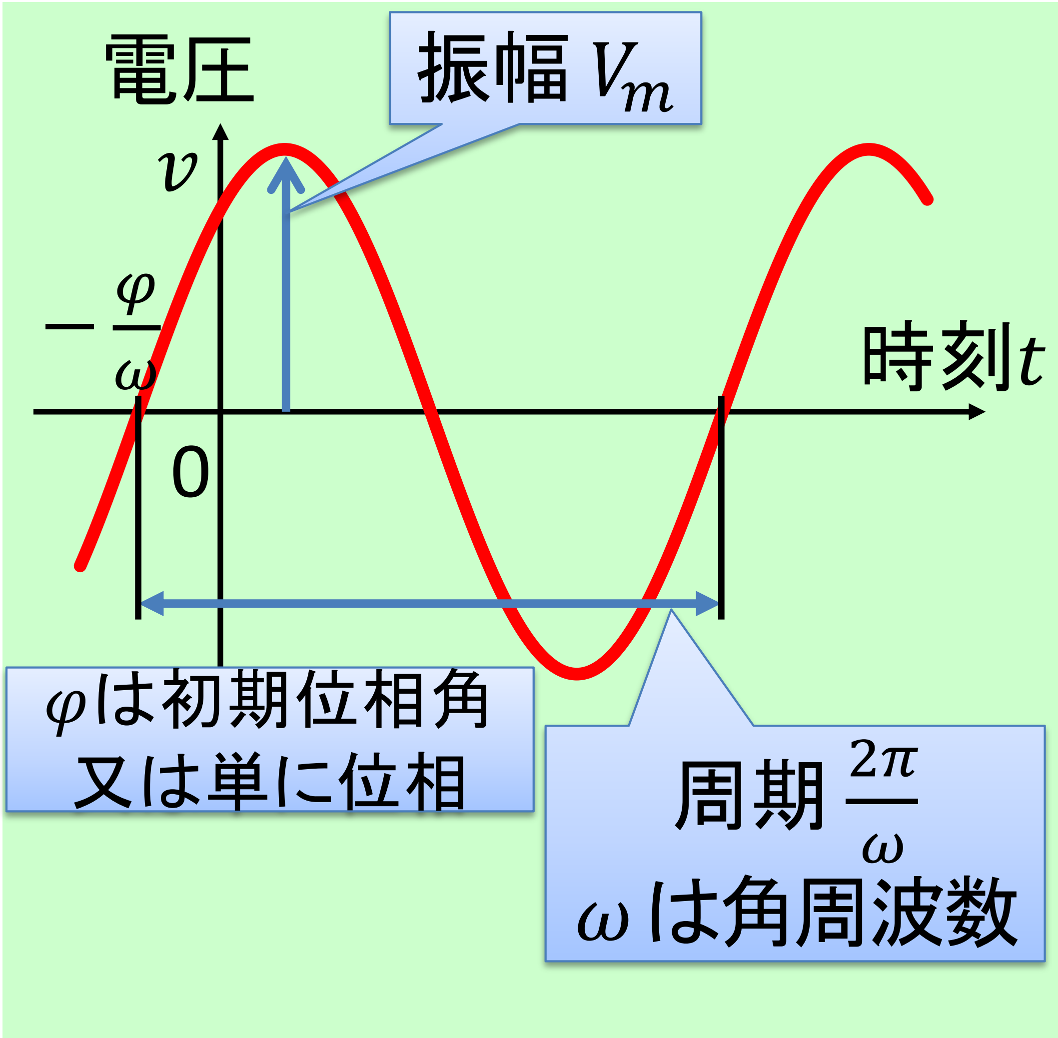
$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \qquad (3)$$

(1)に $x = j\theta$ を代入したものは、(3)の j 倍に(2)を加えたものに一致する

正弦波交流とフェーザ表示

〔復習〕正弦波交流の瞬時値

- 正弦波交流の瞬時値は下のように表す
  $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$
  V_m : 振幅
  ω : 角周波数 [rad/s]
  φ: 位相
- つまり、$\boldsymbol{V_m}$ と $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{\varphi}$ がわかれば任意の時刻t の瞬時値 v が確定する



オイラーの公式に $\theta = \omega t + \varphi$を代入し、$V_m = \sqrt{2} V_e$倍する

- オイラーの公式より、

$$V_m e^{j(\omega t + \varphi)} = V_m \cos(\omega t + \varphi) + j \boldsymbol{V_m \sin(\omega t + \varphi)}$$

- よって交流電圧の瞬時値を以下のように表現できる

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\left\{ V_m e^{j(\omega t + \varphi)} \right\}$$

$$\therefore v = V_m \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\{ \sqrt{2}\, \underbrace{\boldsymbol{V_e}}_{\text{実効値を表す実数}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{e^{j\varphi}}}_{\text{位相を表す複素数}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\omega t\text{ を含む項}} \}$$

- 実効値と位相を$V = V_e \cdot e^{j\varphi} = V_e(\cos\varphi + j \sin\varphi)$で定義される複素数で表すことを $\boxed{\text{フェーザ表示}}$ と呼ぶ

瞬時値とフェーザ表示

- 瞬時値
  - 正弦波交流を時刻 t の関数として表したもの

  例：振幅 14.1[V]、位相 $\frac{\pi}{3}$、周波数 60[Hz] の交流電圧 $v = 14.1\sin(120\pi t + \frac{\pi}{3})$ [V]

- フェーザ表示
  - 周波数（あるいは角周波数）は暗黙の了解として、実効値と位相を一つの複素数（フェーザ）で表したもの

  例：振幅14.1[V]（つまり実効値10.0[V]）、位相$\frac{\pi}{3}$のフェーザ表示

  $V = 10.0\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = 5 + 5\sqrt{3}j$ [V]

  - 必要なら瞬時表現に戻すことができる

  $v = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}V \cdot e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\{(7.07 + 12.2j)e^{j\cdot 120\pi t}\}$ [V]

抵抗の電流のフェーザ表示

- $v=\sqrt{2}V_e\sin(\omega t+\varphi)$の交流電圧を抵抗 R にかけた時の電流は、$i=\frac{1}{R}v=\frac{1}{R}\sqrt{2}\,V_e\sin(\omega t+\varphi)$
- このvのフェーザ表示は$V=V_e e^{j\varphi}$
- 一方、i のフェーザ表示は $I=\frac{1}{R}\cdot V_e e^{j\varphi}$
- よって $\boldsymbol{I=\frac{1}{R}V}$
  - 抵抗の場合はフェーザ表示でもオームの法則と同じ形の式になる

コンデンサの電流のフェーザ表示

- $v = \sqrt{2}V_e \sin(\omega t + \varphi)$の交流電圧をコンデンサ C にかけた時の電流は、$i = C\dfrac{dv}{dt} = \sqrt{2}V_e \omega C \cos(\omega t + \varphi)$

  $\therefore i = \sqrt{2}V_e \omega C \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$
- このvのフェーザ表示は $V = V_e \cdot e^{j\varphi}$
- 一方、i のフェーザ表示は $I = V_e \omega C \cdot e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = V_e \omega C \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\varphi} = V_e j\omega C \cdot e^{j\varphi}$
- よって $\boldsymbol{I = \boxed{j\omega C V}}$

  ・ j は位相差を表す（電流位相は電圧位相より90°早い）

コイルの電流のフェーザ表示

- $v = \sqrt{2}V_e \sin(\omega t + \varphi)$の交流電圧をコイル L にかけた時の電流は、$i = \frac{1}{L}\int v dt = -\frac{\sqrt{2}V_e}{\omega L}\cos(\omega t + \varphi)$

$$\therefore i = \frac{\sqrt{2}V_e}{\omega L}\sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

- このvのフェーザ表示は$V = V_e \cdot e^{j\varphi}$
- 一方、i のフェーザ表示は

$$I = \frac{V_e}{\omega L} \cdot e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{V_e}{\omega L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\varphi} = \frac{V_e}{j\omega L} \cdot e^{j\varphi}$$

- よって $\boldsymbol{I = \boxed{\frac{1}{j\omega L}V}}$
  - $\frac{1}{j}$ は位相差を表す（電流位相は電圧位相より90°遅い）

複素インピーダンス

- フェーザ表示を使うと、抵抗もコンデンサもコイルも同じ形の式で表現できる
  - 抵抗: $I = \frac{1}{R}V$ 　 $\boldsymbol{Z_R = R}$ 　 とおくと $V = IZ_R$
  - コンデンサ: $I = j\omega CV$ 　 $\boldsymbol{Z_C = \frac{1}{j\omega C}}$ 　 とおくと $V = IZ_C$
  - コイル: $I = \frac{1}{j\omega L}V$ 　 $\boldsymbol{Z_L = j\omega L}$ 　 とおくと $V = IZ_L$
- 上のように電圧のフェーザと電流のフェーザの関係を与える Z_R や Z_C や Z_L のような複素数のことを 複素インピーダンス と呼ぶ
- Zの実部を 抵抗分 、虚部を リアクタンス分 という

$$Z = R + jX$$

- リアクタンスは$X > 0$なら 誘導性、$X < 0$なら 容量性 という

複素インピーダンスの例

- 周波数 $f = 440$ [Hz] のとき、$C = 22$ [μF]のコンデンサの複素インピーダンスは

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi f C} = -16.4j \ [\Omega]$$

- 周波数 $f = 440$ [Hz] のとき、$L = 4$ [mH]のコイルの複素インピーダンスは

$$Z_L = j\omega L = j2\pi f L = 11.1j \ [\Omega]$$

瞬時値と瞬時値の和

- ２つの素子が並列につながっており、それぞれを流れる電流が下のように瞬時値で与えられていた

$$i_1 = \sqrt{2} I_{e_1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = \sqrt{2} I_{e_2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

このとき、全体を流れる電流は？

- このように、位相も振幅も任意である複数の三角関数の和を求めるのは（たとえ角周波数ωが共通でも）かなり煩雑になる

フェーザとフェーザの和

- 2つの素子が並列につながっており、それぞれを流れる電流が下のようにフェーザ I_1 および I_2 で与えられていたらどうか？

$$i_1 = \mathrm{Im}\{\sqrt{2} I_1 e^{j\omega t}\}$$
$$i_2 = \mathrm{Im}\{\sqrt{2} I_2 e^{j\omega t}\}$$

- 複素数の足し算は、実部同士、虚部同士を足すだけなので、

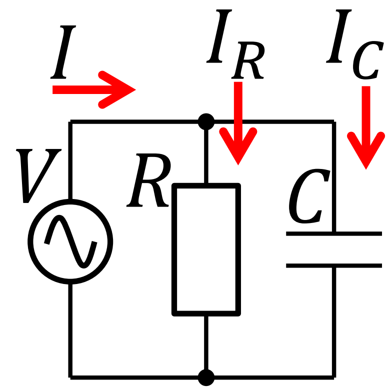
$$\boldsymbol{i_1 + i_2} = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2} I_1 e^{j\omega t}\right\} + \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2} I_2 e^{j\omega t}\right\}$$
$$= \mathrm{Im}\{\sqrt{2}(\boldsymbol{I_1 + I_2}) e^{j\omega t}\}$$

電流の和

フェーザの和

- つまり、**電流の和のフェーザは、各電流のフェーザの和を計算すれば求められる（電圧も同様）**

CとRの並列回路



- 複素インピダンス $Z_R = R$ の抵抗と、複素インピダンス $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ のコンデンサが交流電圧源 V に並列接続されているとき、全体の電流のフェーザ I を求めよ

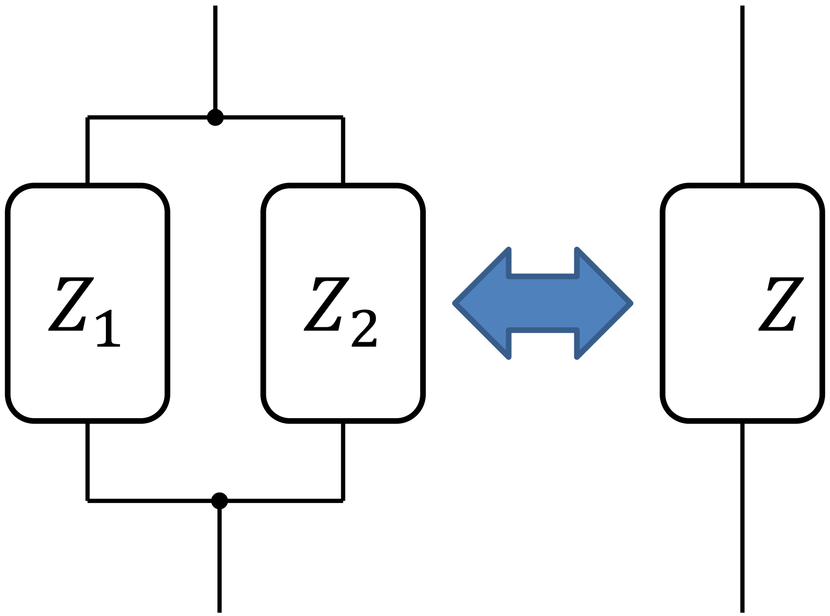
- キルヒホッフの法則より、電流の瞬時値に関して $i = i_R + i_C$ である
- 前のスライドより、$i = i_R + i_C$ のときフェーザも $I = I_R + I_C$ となる
- よって、$\boldsymbol{I = I_R + I_C = \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C}\right) V} = \boxed{\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} V$

並列インピダンスの合成

- 一般に、複素インピダンス $Z_1 = R_1 + jX_1$ の素子と複素インピダンス $Z_2 = R_2 + jX_2$ の素子を並列接続した時の全体の複素インピダンス $Z = R + jX$ に関して、以下が成立する

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



$$= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

複素数の計算練習

自分でやってみよう！

- $Z_1 = 2 + 5j$ と $Z_2 = 3 + 7j$ が並列接続された時の全体の複素インピーダンスを求めよ

$j^2 = -1$ に注意

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(2+5j)(3+7j)}{(2+5j)+(3+7j)}$$

分子 $= \boxed{\begin{aligned} &2 \cdot 3 + 2 \cdot 7j + 5j \cdot 3 + 5j \cdot 7j \\ &= 6 + 14j + 15j - 35 = -29 + 29j \end{aligned}}$

分母 $= \boxed{2 + 5j + 3 + 7j = 5 + 12j}$

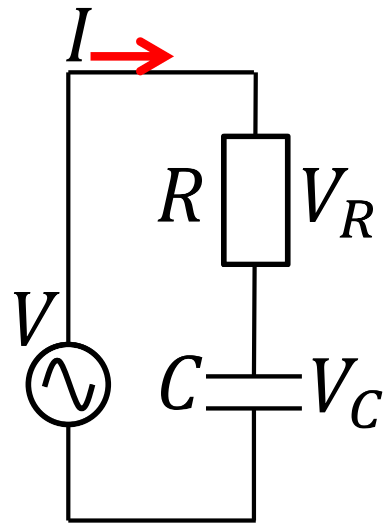
分母を実数化する

$$\therefore Z = \frac{-29+29j}{5+12j} = \frac{29(-1+j)(5-12j)}{(5+12j)(5-12j)}$$

$$= \frac{29(-5+12j+5j+12)}{25+144} = \frac{29}{169}(7 + 17j) = \boxed{1.20} + \boxed{2.92}\, j$$

CとRの直列回路

- 複素インピダンス $Z_R = R$ の抵抗と、複素インピダンス $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ のコンデンサが交流電圧源 V に直列接続されているとき、全体の電流のフェーザ I を求めよ



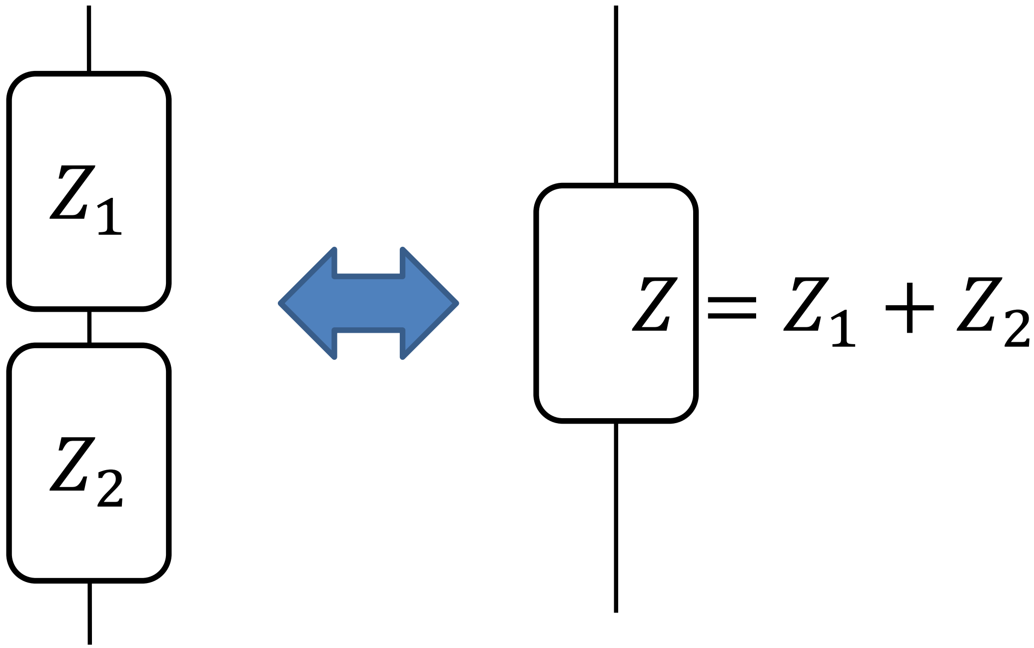
- キルヒホッフの法則より、電圧の瞬時値に関して
  $v = v_R + v_C$ である
- 電流同様に電圧も、$v = v_R + v_C$ のときフェーザも
  $V = V_R + V_C$ となる
- よって、$\boldsymbol{V = V_R + V_C = I(Z_R + Z_C)}$ であり、

$$I = \frac{V}{Z_R + Z_C} = \frac{V}{\boxed{R + \frac{1}{j\omega C}}}$$

直列インピダンスの合成

- 一般に、複素インピダンス $Z_1 = R_1 + jX_1$ の素子と複素インピダンス $Z_2 = R_2 + jX_2$ の素子を直列接続した時の全体の複素インピダンス $Z = R + jX$ に関して、以下が成立する

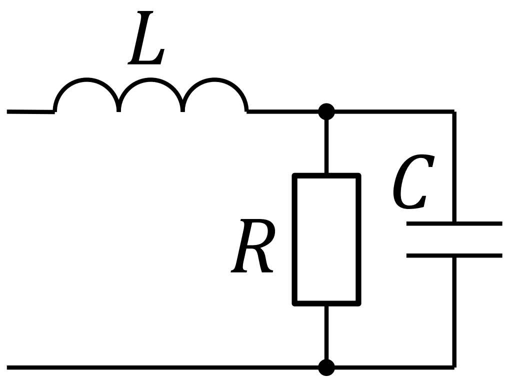
$$Z = Z_1 + Z_2$$



例題：教科書図2.7

自分でやってみよう！

- 右図の回路の全体の複素インピーダンス Z を求めよ（角周波数はω）



$$Z_{RC}=\frac{Z_C Z_R}{Z_C+Z_R}=\boxed{\frac{\frac{1}{j\omega C}\cdot R}{\frac{1}{j\omega C}+R}=\frac{R}{1+j\omega CR}}$$

$$Z=Z_L+Z_{RC}=\boxed{j\omega L+\frac{R}{1+j\omega CR}}$$

素朴な式

$$=\boxed{j\omega L+\frac{R-j\omega CR^2}{1+(\omega CR)^2}}$$

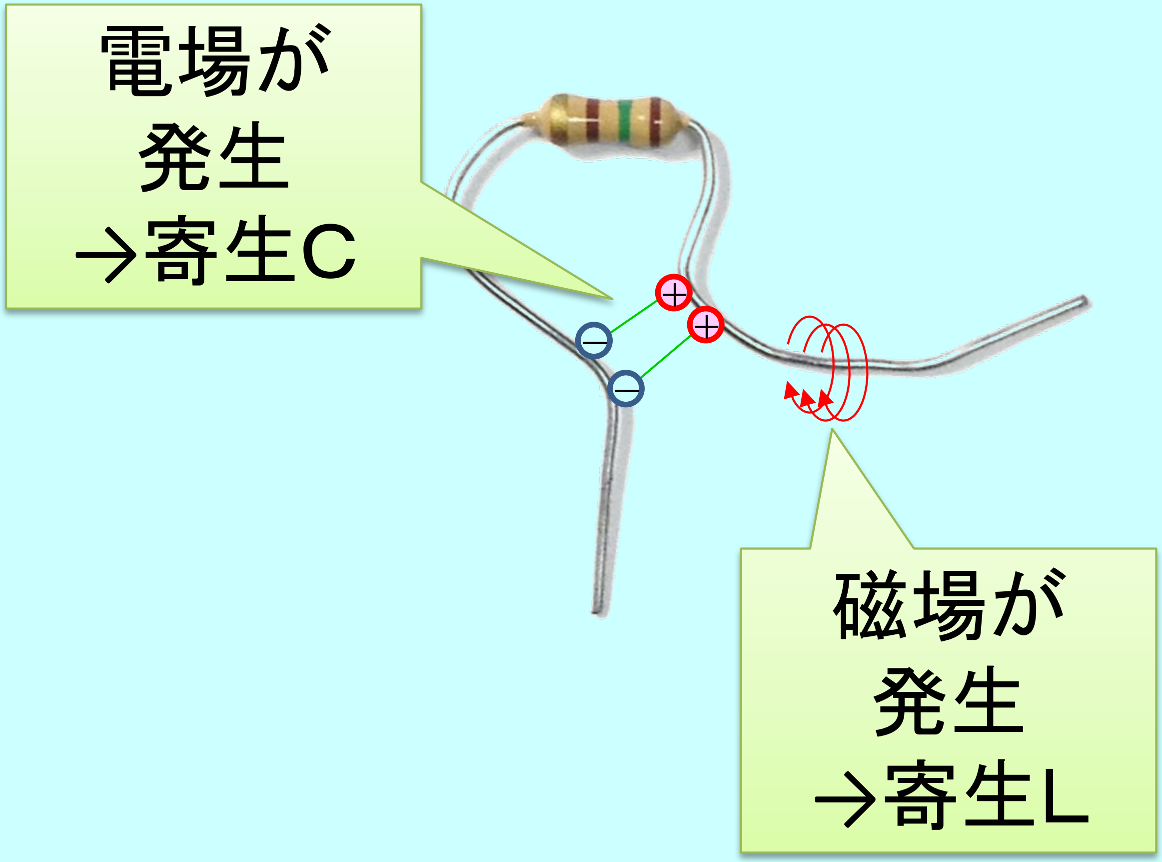
分母を実数化した式

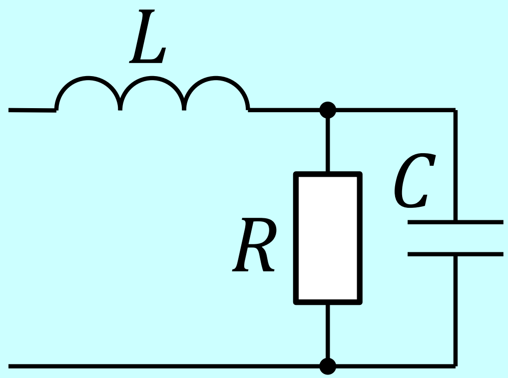
$$=\boxed{\frac{R}{1+(\omega CR)^2}}+j\left(\boxed{\omega L-\frac{\omega CR^2}{1+(\omega CR)^2}}\right)$$

抵抗分とリアクタンス分に分けた式

【参考】現実の抵抗器には寄生素子がある

- 以下の寄生素子をモデル化したのが図2.7
  - 抵抗器の両端の配線間に電場が発生→寄生容量
  - 抵抗器の配線に磁場が発生→寄生インダクタンス





数値計算例

- $R = 100[\Omega]$、$C = 1[\mathrm{pF}]$、$L = 10[\mathrm{nH}]$ の場合、$f = 1.59[\mathrm{GHz}]$ のとき、以下のような値になる

$$\omega L = 2\pi \cdot 1.59[\mathrm{GHz}] \cdot 10[\mathrm{nH}] = 100[\Omega]$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1.59[\mathrm{GHz}] \cdot 1[\mathrm{pF}]} = 100[\Omega]$$

$$\therefore\ Z = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} = 100j + \frac{100}{1+j} = 50 + 50j[\Omega]$$

- 周波数を変えると以下のようになり、$f \ll 1.59[\mathrm{GHz}]$ ならば $100[\Omega]$の純抵抗とみなせる

f[Hz]	0	159[MHz]	1.59[GHz]	15.9[GHz]	∞
$\omega L[\Omega]$	0	10	100	1000	∞
$\frac{1}{\omega C}[\Omega]$	∞	1000	100	10	0
$Z[\Omega]$	100	$99 + 10j$	$50 + 50j$	$0.99 + 990j$	∞j

例題：教科書2-3（改）

- 抵抗 $R = 100[\Omega]$ とインダクタンス $L = 459[\mathrm{mH}]$ の直列回路に実効値 $V_e = 100[\mathrm{V}]$、周波数 $f = 60[\mathrm{Hz}]$ の正弦波交流電圧を与えた時の電流の瞬時値 i を求めよ（但し電圧の位相を0とせよ）

コイルのインピダンスは $\boxed{j\omega L} = \boxed{j \cdot 2\pi f L} = \boxed{173j}\ [\Omega]$

フェーザ表示で $V = V_e$ であり、また $V = \boxed{I(R + j\omega L)}$ である

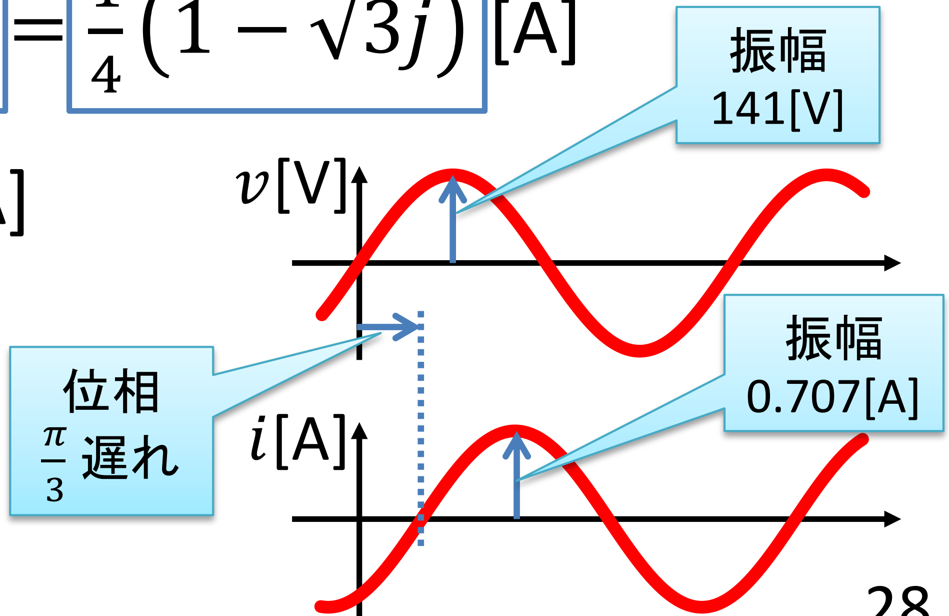
$$\therefore I = \boxed{\frac{V_e}{R+j\omega L}} = \boxed{\frac{100}{100+173j}} = \boxed{\frac{1}{1+\sqrt{3}j}} = \boxed{\frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{3}j\right)}\ [\mathrm{A}]$$

$$I_m = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1+3}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{0.707}\ [\mathrm{A}]$$

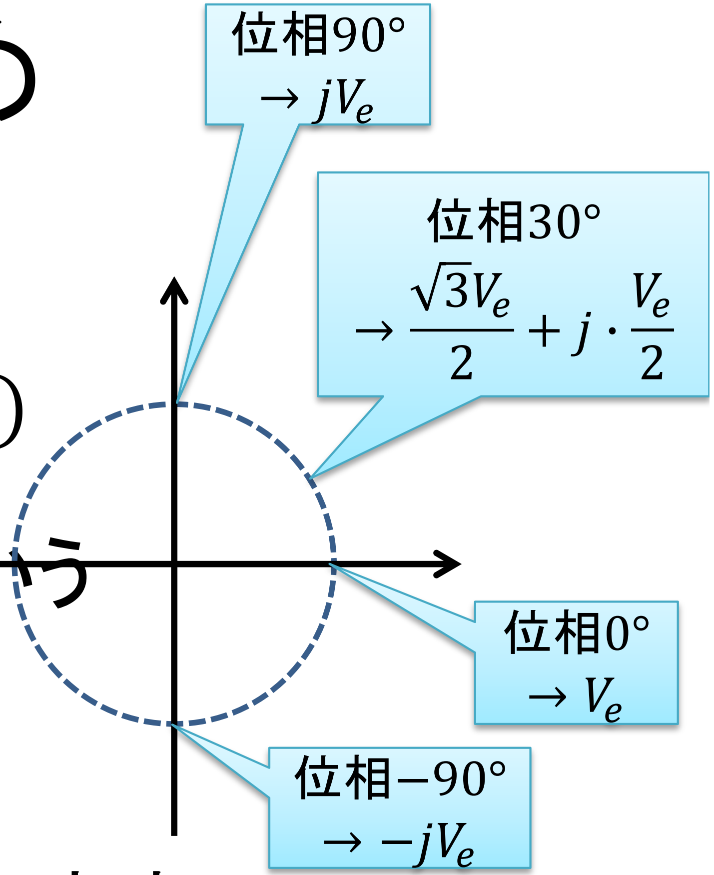
$$\tan\varphi = \boxed{-\sqrt{3}}\ \text{より}\ \varphi = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$$

$$\therefore i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \boxed{0.707}\sin\left(\boxed{120\pi t - \frac{\pi}{3}}\right)$$



今週のまとめ



- フェーザ表示
  - 瞬時電圧が $v = \sqrt{2}\boldsymbol{V_e}\sin(\omega t + \boldsymbol{\varphi})$ の正弦波の**振幅**と**位相**をまとめて $\boldsymbol{V_e \cos\varphi + jV_e \sin\varphi}$ というひとつの複素数で表す
- 複素インピダンス
  - コンデンサやコイルの $\frac{V}{I}$ を複素数で表す
    - $Z_C = \boldsymbol{\frac{1}{j\omega C}}$、$Z_L = \boldsymbol{j\omega L}$
  - 複素インピダンス Z は、抵抗同様に直列合成、並列合成の公式が使える
    - 直列 : $\boldsymbol{Z = Z_1 + Z_2}$、並列 : $\boldsymbol{\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$

フェーザ表示の目的

- 以下の条件を満たす回路の解析を簡便に扱う
  - **抵抗**、**コンデンサ**、**コイル**、並びに**交流電圧源**だけからなる回路であること
    - 特性が線形な素子でないとフェーザは使えない
  - 交流電圧源は複数存在しても良いが、**全て同じ角周波数$\boldsymbol{\omega}$**の正弦波の交流電圧源であること
    - 回路全体の電圧や電流が全て同じ角周波数ωの交流でないとフェーザは使えない
  - 解析の対象は**定常状態**
    - 交流電圧源が一定の周波数や振幅になってから十分長い時間経過したあとを想定する
    - つまり、電源投入直後などの過渡現象は考えない

来週の内容

- せっかくフェーザという強力な道具を手に入れたのだが、その威力をまだ十分に使いこなしていない
- そこで来週は、以下のようなものを例に取り上げ、回路の周波数特性を解析してみる
  - RC回路（ローパスフィルタ）
  - CR回路（ハイパスフィルタ）
  - LC共振回路
- 併せて、dB（デシベル）、両対数グラフの使い方、フェーザ軌跡等、電気回路の常識をいくつか学ぶ
- また、交流における電力（実効電力、力率等）も学ぶ

電気電子回路（第10回）講義は
これで終わりです

質問：support_eecra@sl.is.ritsumei.ac.jp

直接返信する場合と、まとめてmanaba+に掲示する場合があります。ご了承ください。