デジタル信号処理（K3）
第８回 標本化と量子化

2023年5月30日

立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

前回までのまとめ

- 信号 $f(t)$ は，そのフーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ が

$$F(\omega) = 0 \quad (|\omega| \geq W)$$

（ $W > 0$ は定数）

を満たすとき，帯域制限信号と呼ばれる．

- 帯域制限信号 $f(t)$ のフーリエ変換は, $T \leq \dfrac{\pi}{W}$ を満たす間隔 T の標本値 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ から計算できる．すなわち,

$$F(\omega) = \begin{cases} F_d(\omega) & (|\omega| < W) \\ 0 & (|\omega| \geq W) \end{cases}$$

$$F_d(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\, e^{-ikT\omega}$$

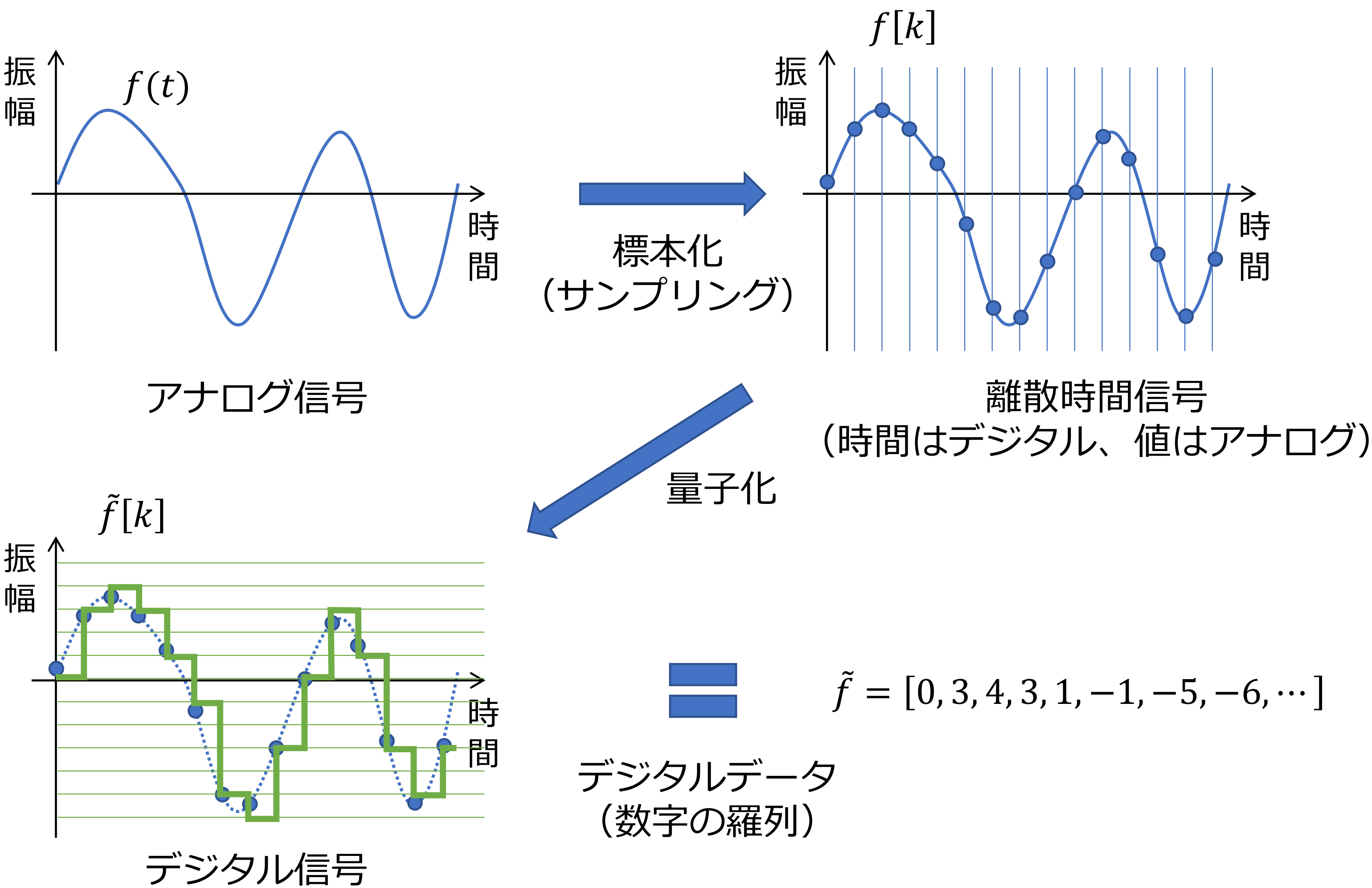
この計算式を離散時間フーリエ変換と呼ぶ

今回の概要

- 帯域制限信号 $f(t)$（アナログ信号）をその標本値 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$（デジタル信号）から復元できることを示します．この結果は標本化定理と呼ばれ，標本化(標本値の取得)によって帯域制限信号の情報が失われないことを示しています．
- 標本値 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は，一般に実数(無限桁の数)なので，桁数が有限のコンピュータで直接処理できません．そのため，$\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$を離散値で近似する量子化と呼ばれる処理が必要です．今回の講義では，量子化についても説明します．

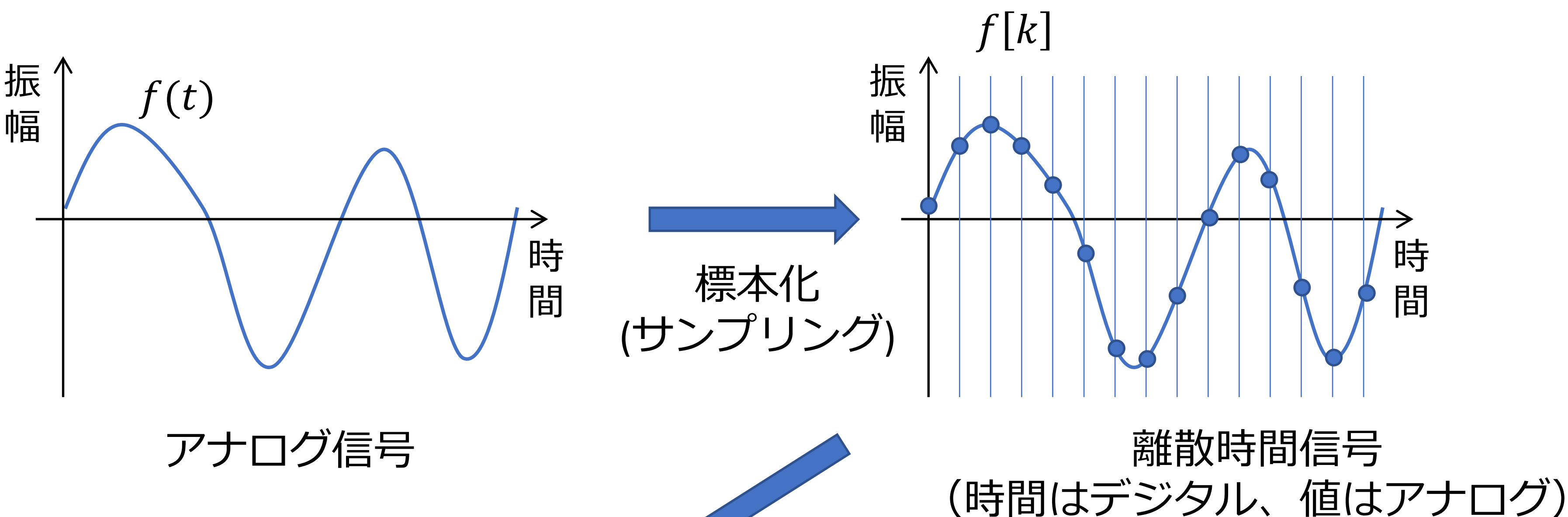
アナログ信号からデジタル信号への変換手順

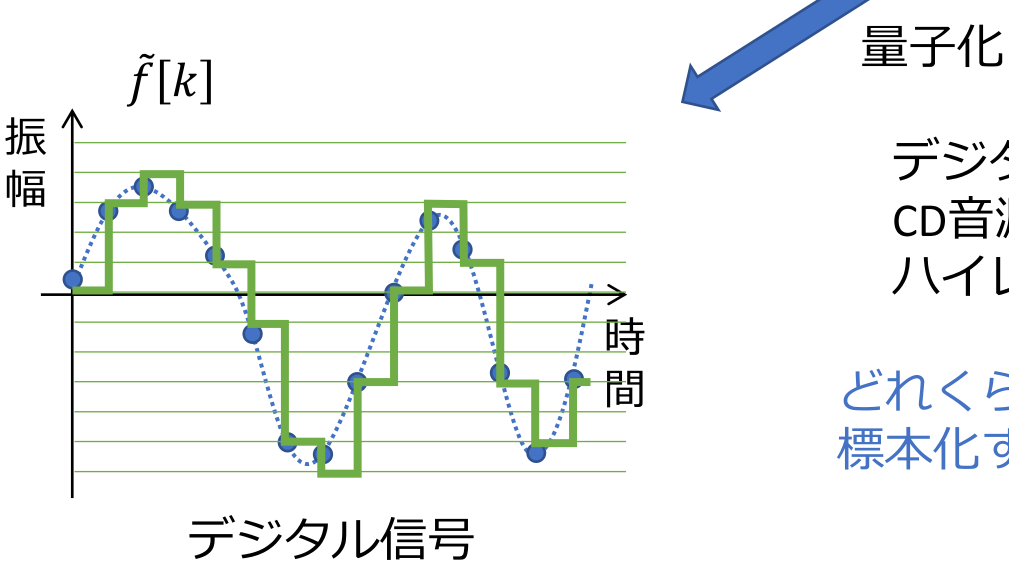
標本化と量子化



$f(t)$
振幅
時間
アナログ信号
標本化
(サンプリング)
$f[k]$
振幅
時間
離散時間信号
(時間はデジタル、値はアナログ)
量子化
$\tilde{f}[k]$
振幅
時間
デジタル信号
デジタルデータ
(数字の羅列)
$\tilde{f} = [0, 3, 4, 3, 1, -1, -5, -6, \cdots]$

標本化と量子化



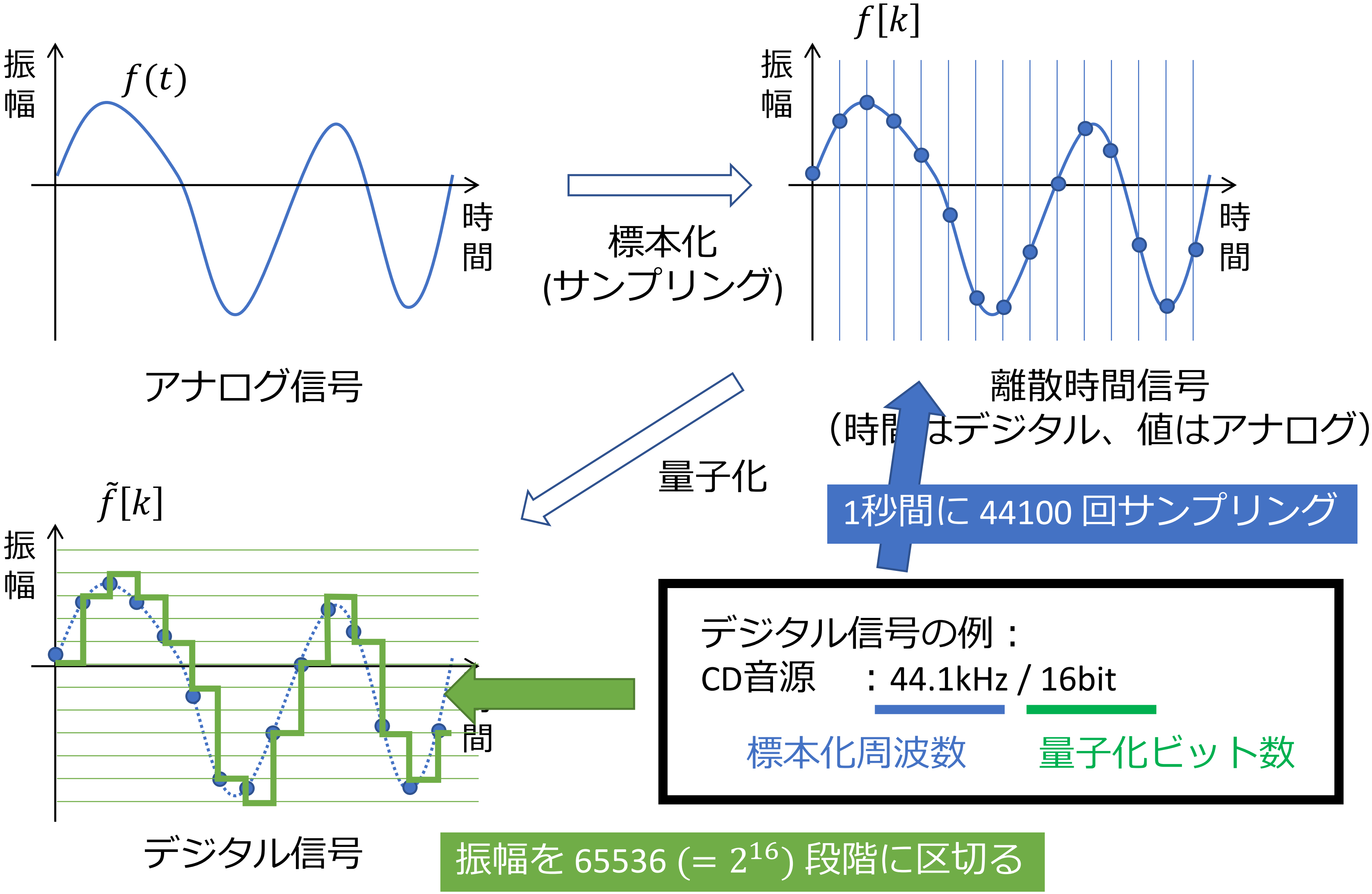


デジタル信号の例：
CD音源　：44.1kHz / 16bit
ハイレゾ：192kHz / 24bit

どれくらいの頻度で標本化するか

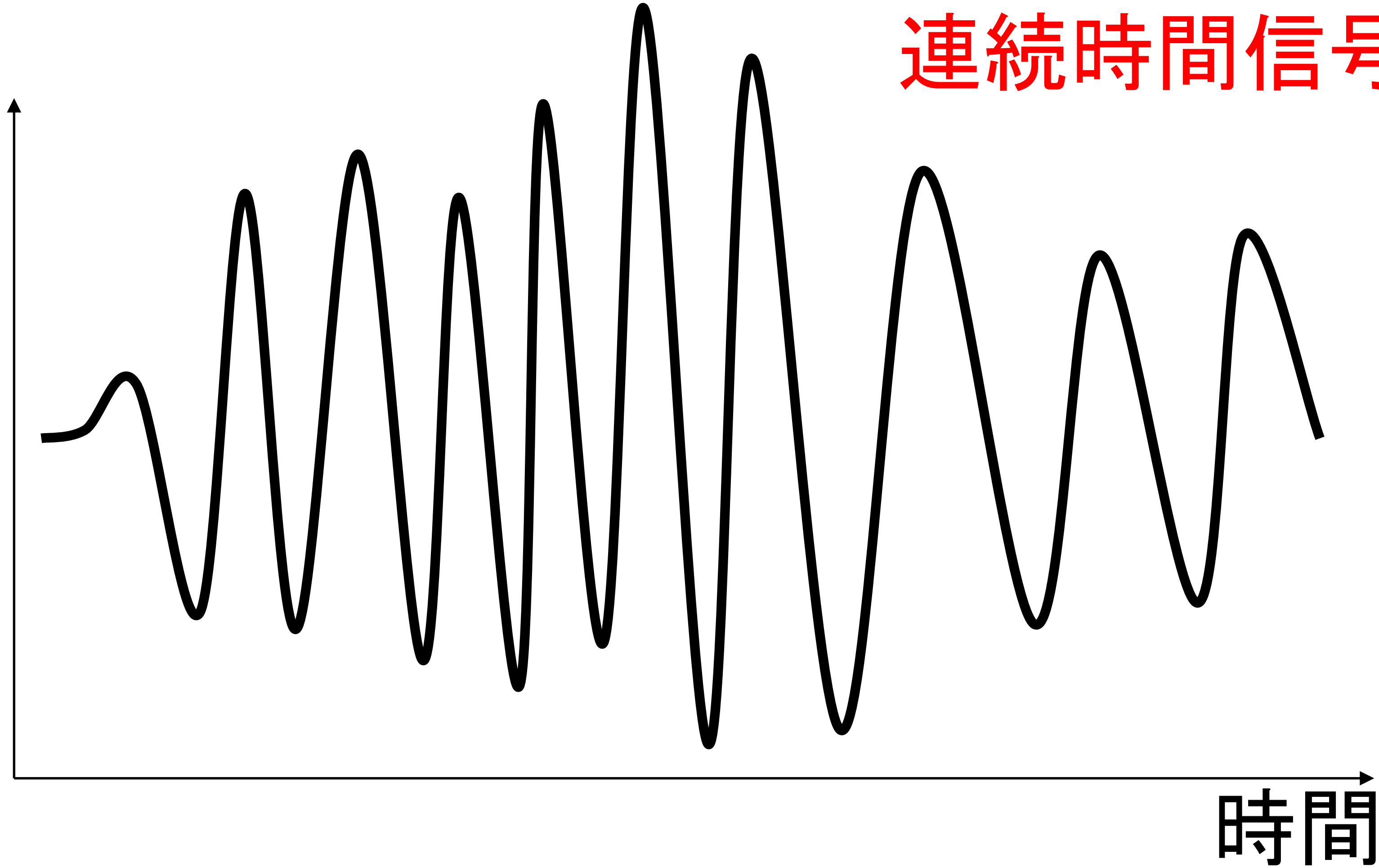
どれくらいの細かさで量子化するか

標本化と量子化

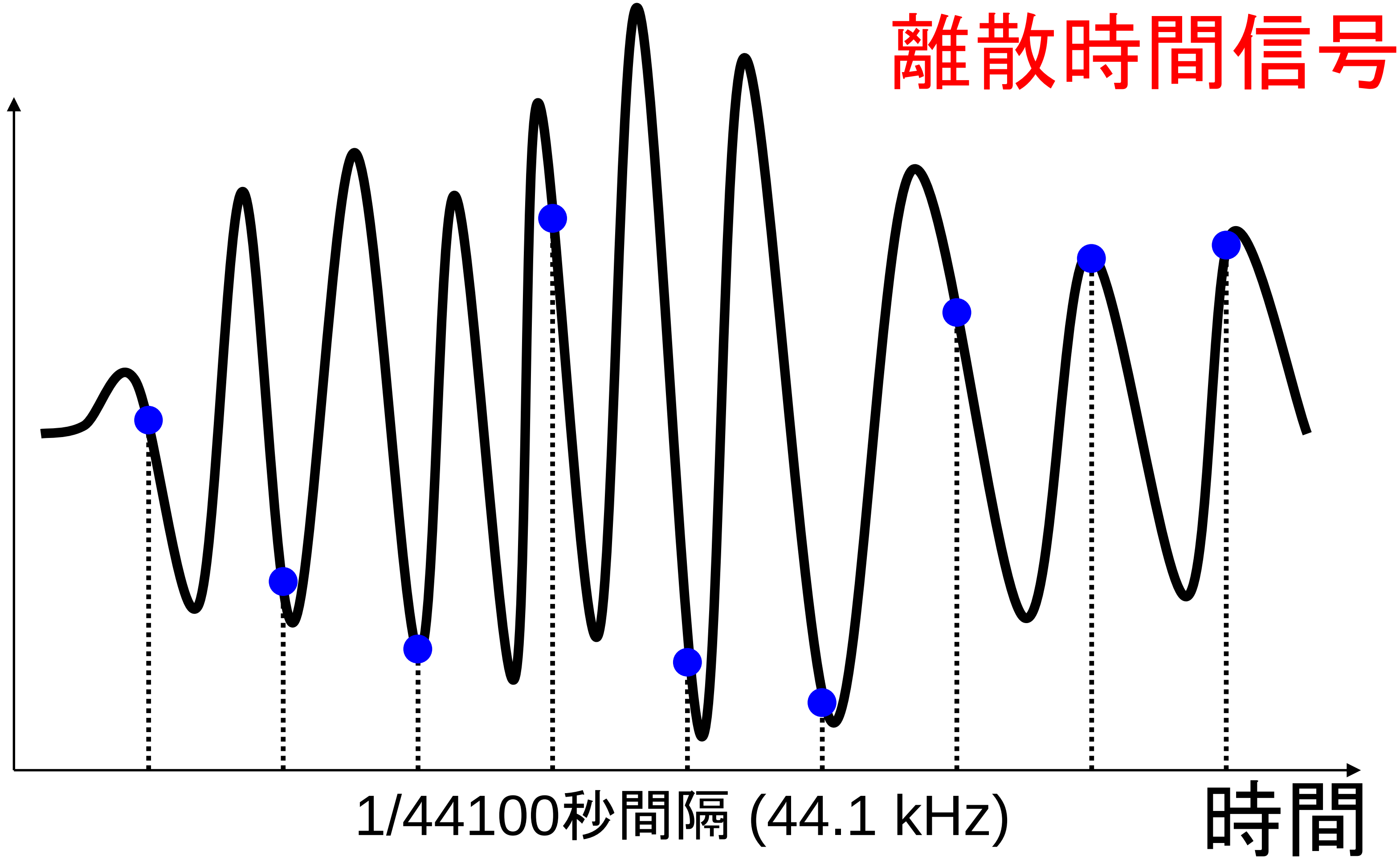


振幅
$f(t)$
時間
アナログ信号
標本化
(サンプリング)
$f[k]$
振幅
時間
離散時間信号
(時間はデジタル、値はアナログ)
量子化
1秒間に 44100 回サンプリング
$\tilde{f}[k]$
振幅
間
デジタル信号
デジタル信号の例：
CD音源　：44.1kHz / 16bit
標本化周波数
量子化ビット数
振幅を 65536 (= 2^{16}) 段階に区切る

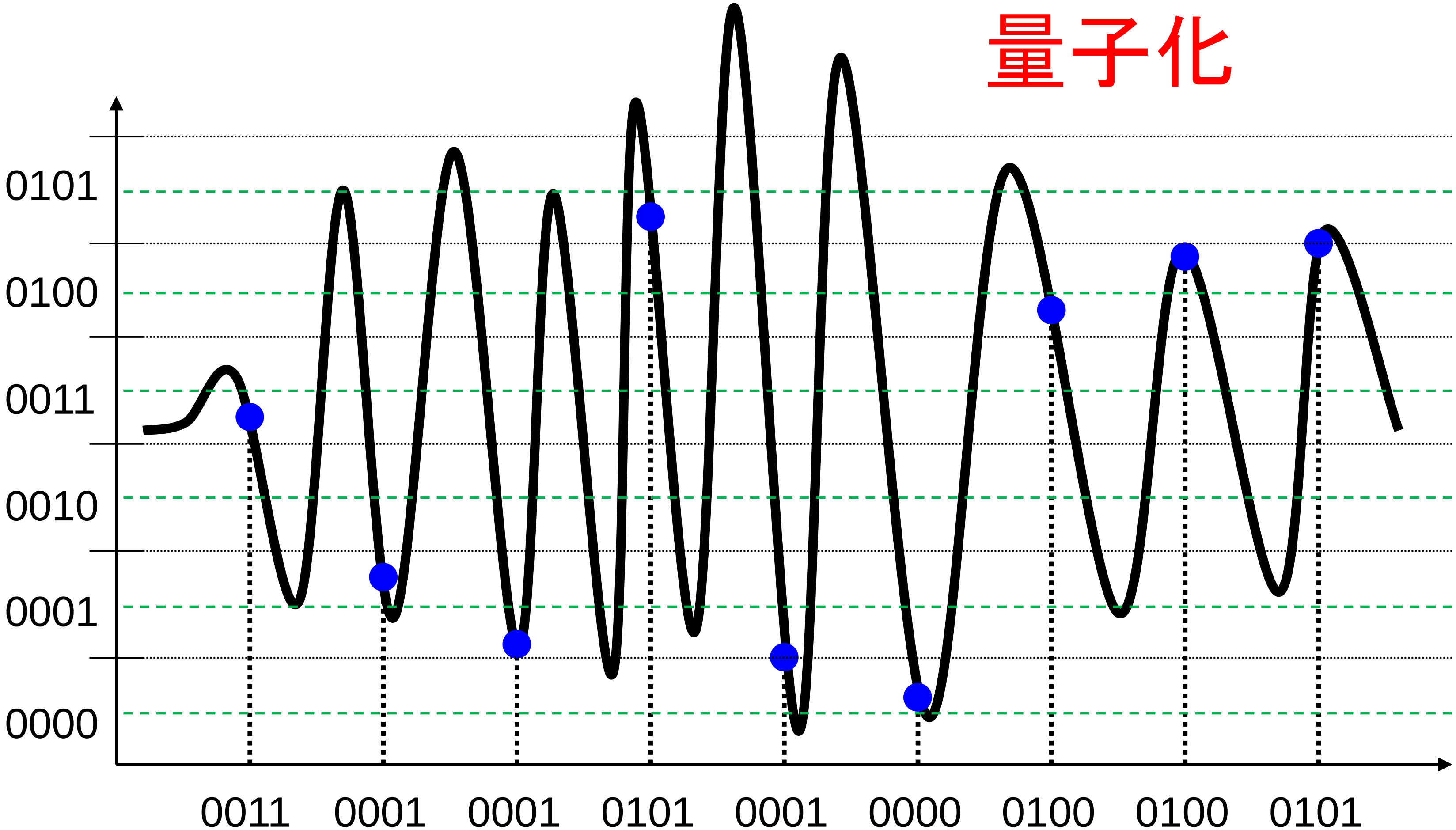
例)アナログ信号のデジタル録音



例)アナログ信号のデジタル録音

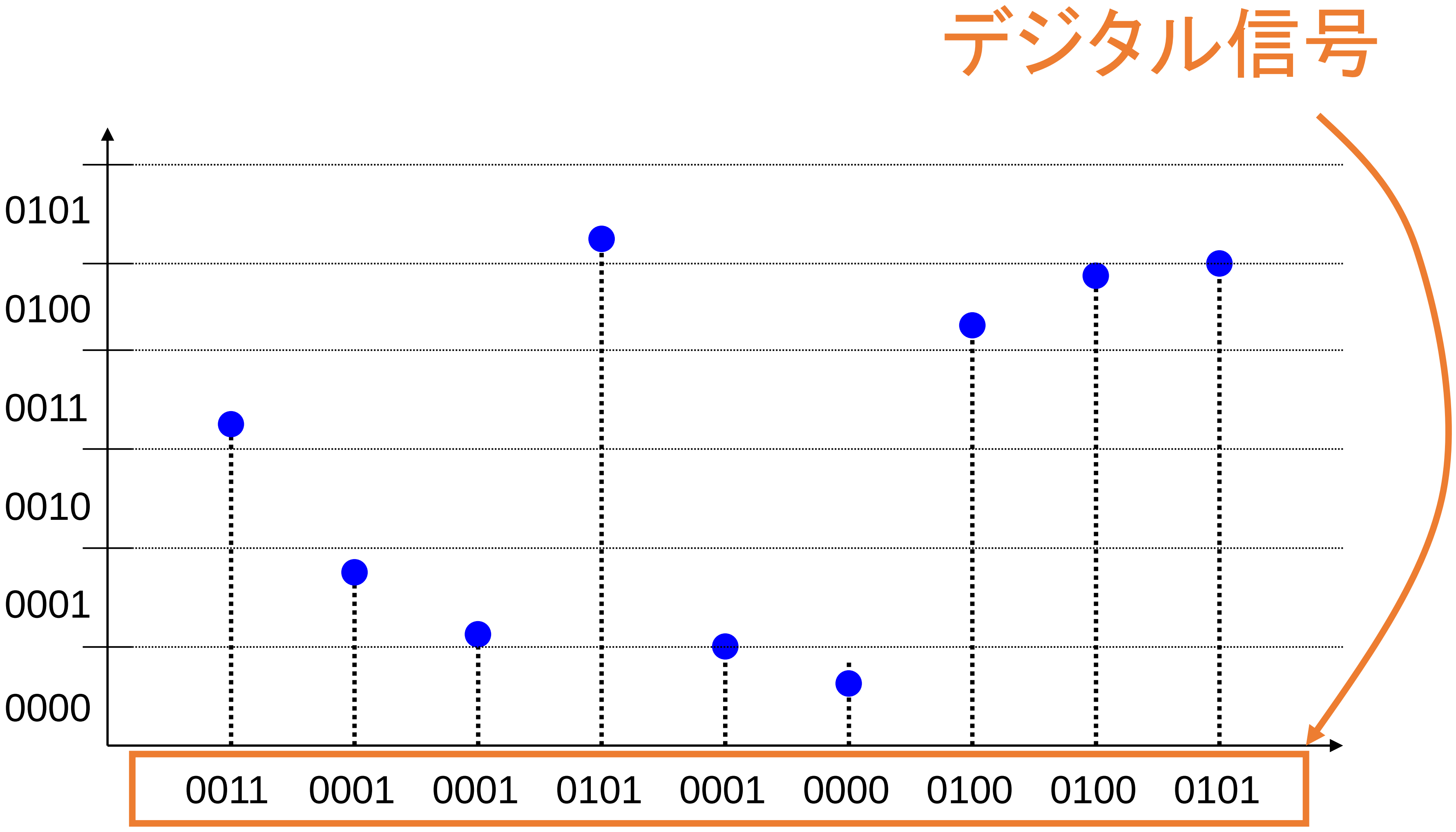


例)アナログ信号のデジタル録音



(量子化した振幅値を2進数で表現)

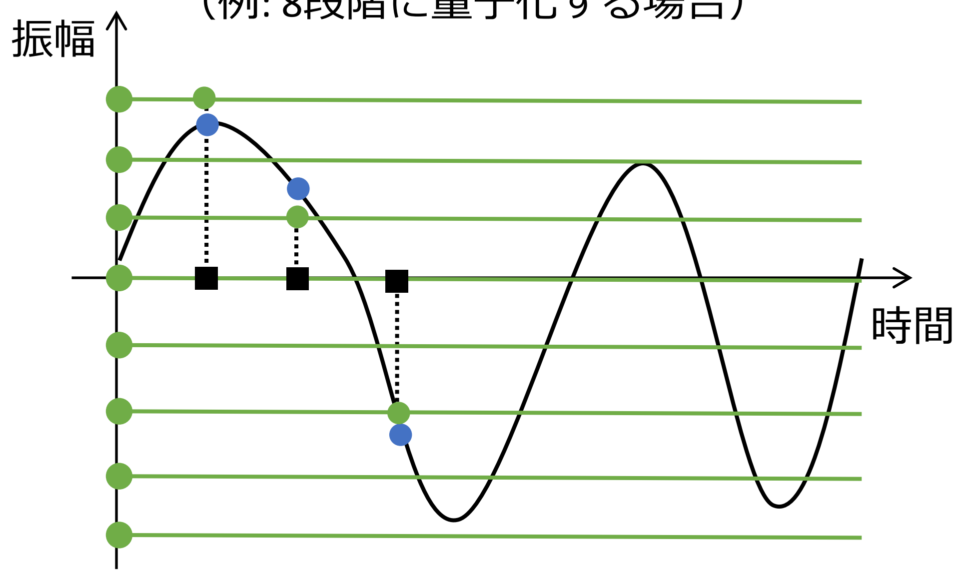
例)アナログ信号のデジタル録音



量子化

- 標本値 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は実数(無限桁の数)なので，桁数が有限のデジタルデバイス(コンピュータ)で処理できない.
- 実数である振幅を離散値に変換する処理を量子化と呼ぶ.
- 量子化は，右図のように，振幅の範囲をいくつかの段階に分け，各標本値を最も近い段階の値に置き換える処理である.

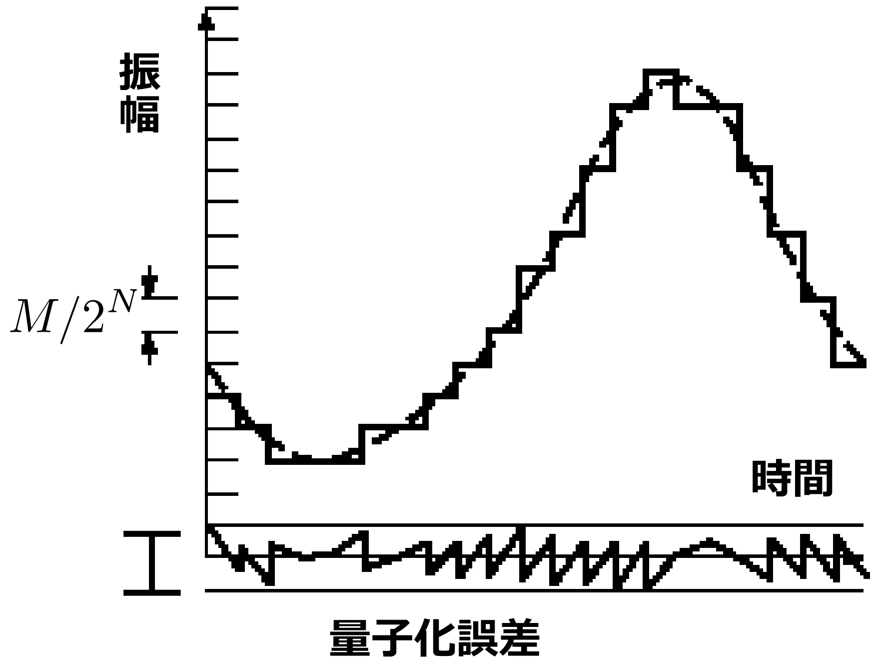
（例: 8段階に量子化する場合）



振幅の範囲を８段階に分けた値（緑色の点）の中で標本値（青い点）に最も近い値を標本点（黒い四角）における値とする.

量子化 2/2

- 量子化により生じる標本値(真値)との差を量子化誤差と呼ぶ.
- コンピュータでは基本的に2進数表現を用いるため，2^N の段階に量子化する.
(${N}$ を量子化ビット数と呼ぶ)

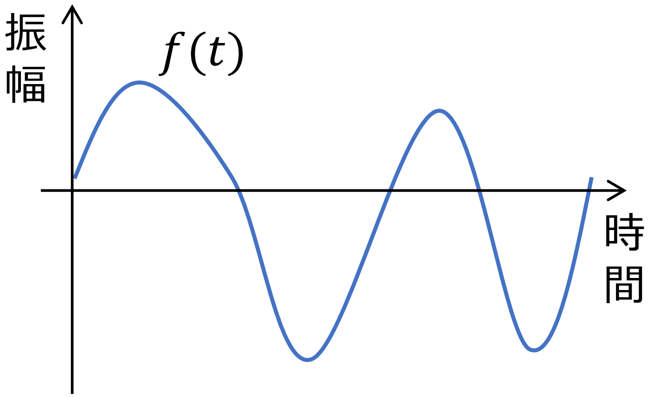


- 標本値の振幅が範囲
$$-M/2 \leq f(kT) \leq M/2$$
にあるとすると，量子化の1段階の幅は $M/2^N$ になるので，量子化誤差は高々 $M/2^{N+1}$ になる.
- よって，量子化ビット数を増やすと量子化誤差が減少する.
ただし，量子化後のデータ量は増加する.

(補足) アナログ信号とデジタル信号

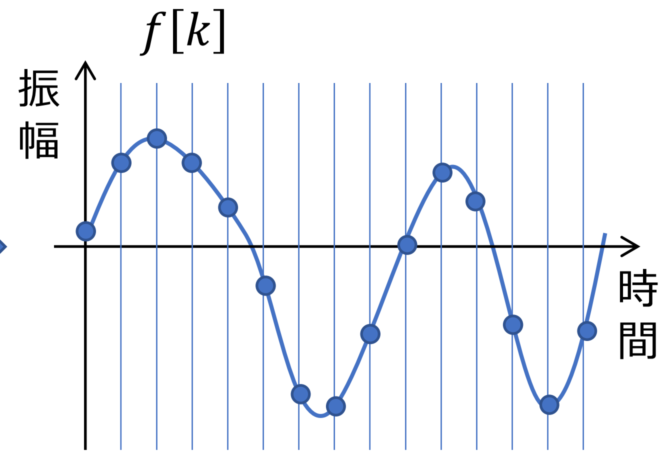
- 標本値 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ と量子化値 $\{\tilde{f}(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を区別するために，$\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を離散時間信号と呼ぶことがある．$f(t)$ はアナログ信号（連続時間信号），$\{\tilde{f}(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は(厳密な意味での)デジタル信号である．
- なお，量子化の影響を正確に考慮することは難しく，また一般に量子化誤差は無視できるほど小さいので，多くの場合，デジタル信号処理のアルゴリズムは離散時間信号 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ に対して導出される．このため，離散時間信号をデジタル信号と呼ぶことも多い．

標本化と量子化



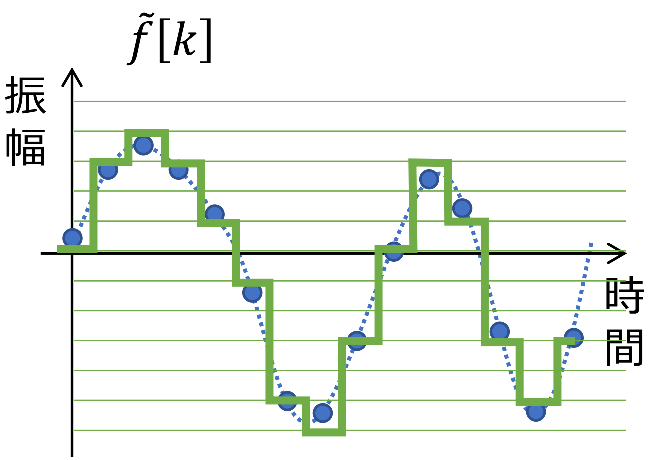
アナログ信号

標本化



離散時間信号
（時間はデジタル、値はアナログ）

量子化



デジタル信号

デジタル信号の例：
CD音源　：44.1kHz / 16bit
ハイレゾ：192kHz / 24bit

どれくらいの頻度で標本化するか

どれくらいの細かさで量子化するか

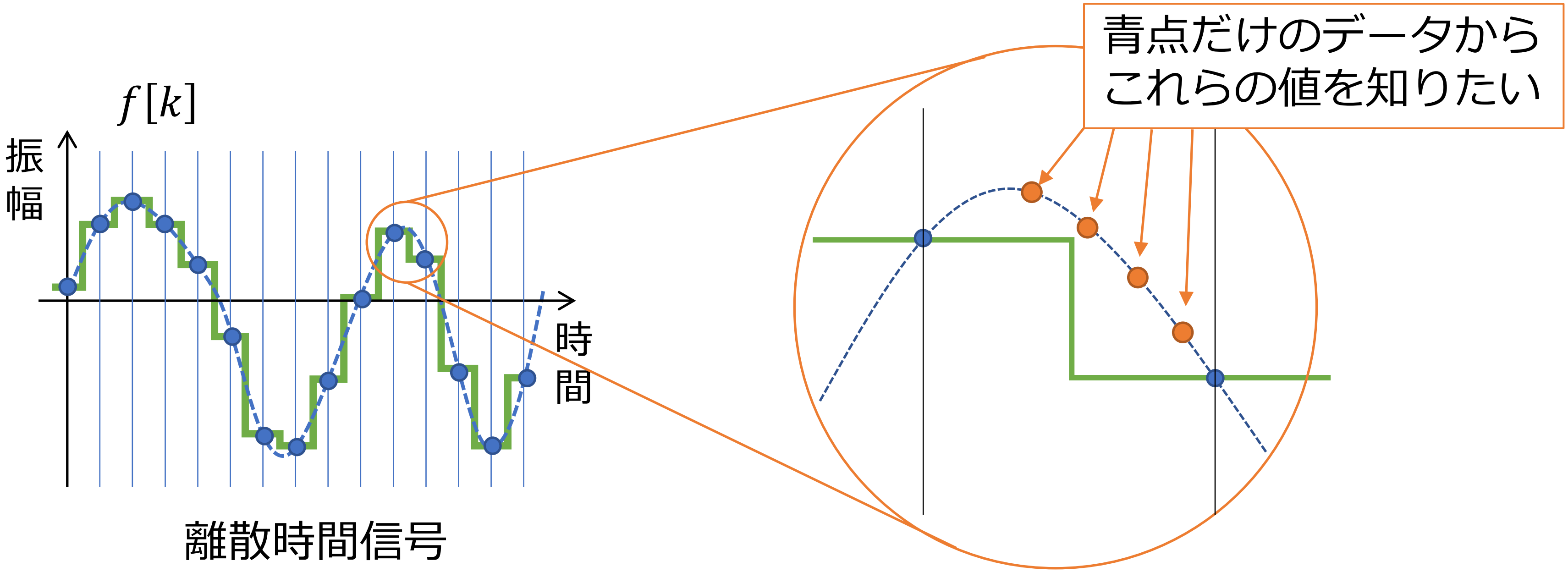
理解度確認その１

manaba +R の小テストで、ここまでの確認をします。

標本化定理

標本化定理

- デジタル信号から、サンプルされていない時刻の値を正確に復元できるか？
  - 復元できる ⇔ 情報を失っていない。
  - どのような場合に復元できるか？



標本化定理

- 信号 $f(t)$ が帯域制限されている，すなわち $F(\omega) = 0 \ \ (|\omega| \geq W)$ のとき, $T \leq \pi/W$ を満たす間隔 T の標本値 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ から

$$f(t) = \frac{WT}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \mathrm{sinc}\left(\frac{W(t-kT)}{\pi}\right)$$

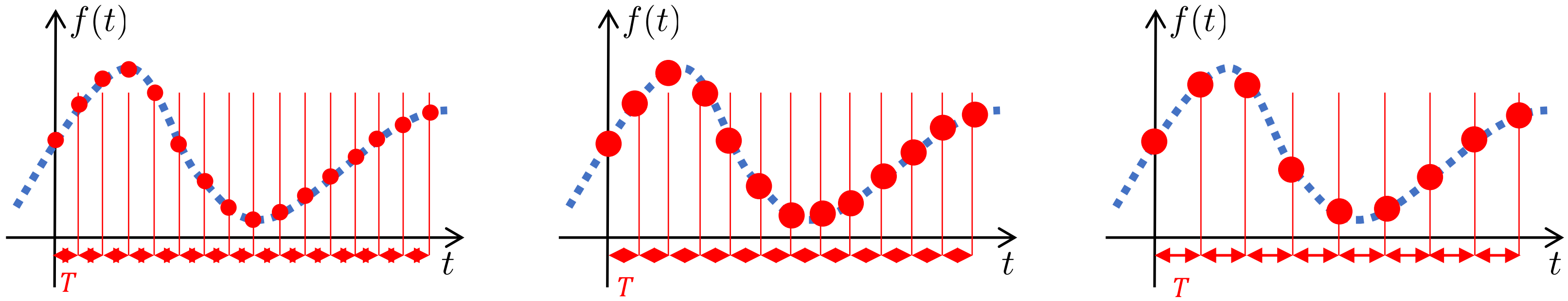
  の計算式により $f(t)$ を復元できる.

- この結果は標本化定理と呼ばれており， Whittaker (1915), Kotelnikov (1933), Shannon (1948), 染谷 (1949) 等によって独立に証明された.

- $T = \pi/W$ の標本化間隔はナイキスト間隔と呼ばれる. ナイキスト間隔の標本化が最も効率が良い.

（注: 実際には無限個の標本値を取得できないので，N を十分大きな整数として, $k = -N, \ldots, N$ の範囲で和を取った近似式を用いる）

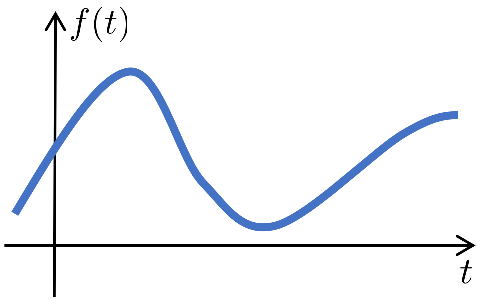
どれくらいの細かさで標本化（サンプリング）するべきか？



直感：
・細かいと元の信号に近いからできる
・細かすぎると、過剰にデータが増えるだけ
・荒いと、必要なデータが欠損して、うまくいかなさそう

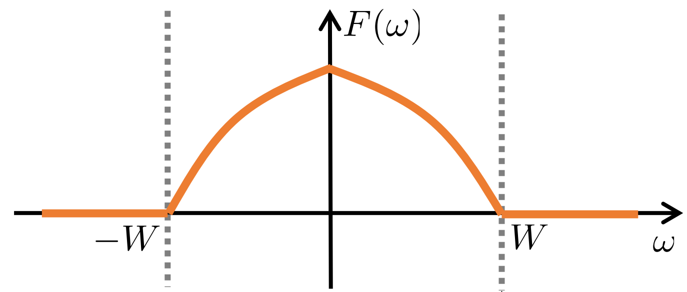
ナイキスト間隔と標本化定理の図解

帯域制限信号（アナログ信号）



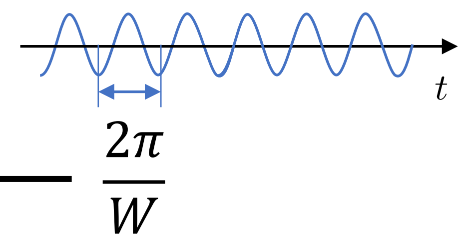
フーリエ変換

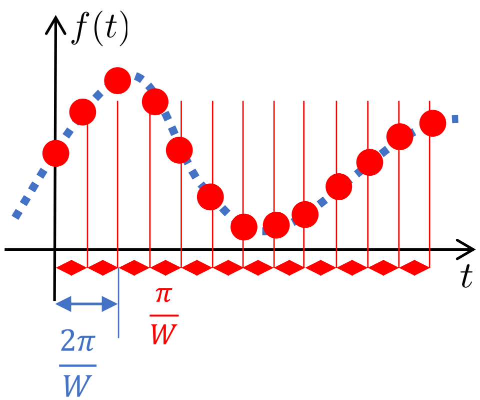
周波数特性（振幅スペクトル）



離散値から連続値が復元可能

信号 $f(t)$ が持っている最も高周波な成分に着目





この周期の半分（ナイキスト間隔: $\frac{\pi}{W}$）でサンプリングすれば最も効率的に情報が保存される。

標本化定理の導出 1/3

- 信号 $f(t)$ は，帯域制限仮定 $F(\omega) = 0 \quad (|\omega| \geq W)$ から，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

と表現することができる．ここで，$T \leq \frac{\pi}{W}$ ならば

$$F(\omega) = F_d(\omega) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,e^{-ikT\omega} \quad (|\omega| < W)$$

であるから，この式を最初の式の最右辺に代入すると，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,e^{-ikT\omega}\right\}e^{i\omega t}d\omega$$

が得られる．

標本化定理の導出 2/3

- 前ページ最後の式をさらに整理する．

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(kT\right)e^{-ikT\omega}\right\}e^{i\omega t}d\omega=\frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\int_{-W}^{W}e^{i\omega(t-kT)}d\omega$$

積分と総和の入替

- 最右辺の式に含まれる積分 $\int_{-W}^{W}e^{i\omega(t-kT)}d\omega$ は，

(i) $t-kT\neq 0$ の場合

$$\int_{-W}^{W}e^{i\omega(t-kT)}d\omega=\left[\frac{e^{i\omega(t-kT)}}{i(t-kT)}\right]_{-W}^{W}=\frac{e^{iW(t-kT)}-e^{-iW(t-kT)}}{i(t-kT)}=\frac{2\sin W(t-kT)}{(t-kT)}$$

$\frac{d}{d\omega}\frac{e^{i\omega(t-kT)}}{i(t-kT)}=e^{i\omega(t-kT)}$ を利用

$e^{iW(t-kT)}-e^{-iW(t-kT)}=2i\sin W(t-kT)$ を利用（オイラーの公式による）

(ii) $t-kT=0$ の場合

$$\int_{-W}^{W}e^{i\omega\cdot 0}d\omega=\int_{-W}^{W}d\omega=[\omega]_{-W}^{W}=2W$$

標本化定理の導出 3/3

- 前ページの計算結果から，

$$\int_{-W}^{W} e^{i\omega(t-kT)} d\omega = \begin{cases} 2\frac{\sin W(t-kT)}{(t-kT)}, & (t-kT \neq 0); \\ 2W, & (t-kT=0). \end{cases}$$

であるが，これはsinc関数 $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & (x \neq 0); \\ 1, & (x=0). \end{cases}$ を使って

$$\int_{-W}^{W} e^{i\omega(t-kT)} d\omega = 2W \mathrm{sinc}\left(\frac{W(t-kT)}{\pi}\right)$$

と表せる．この式を前ページの最初の式に代入すると，

$$f(t) = \frac{WT}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \mathrm{sinc}\left(\frac{W(t-kT)}{\pi}\right)$$

となる．

標本化定理（再掲）

- 信号 $f(t)$ が帯域制限されている，すなわち $F(\omega)=0 \ \ (|\omega|\geq W)$ のとき, $T\leq\pi/W$ を満たす間隔 T の標本値 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ から

$$f(t)=\frac{WT}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\mathrm{sinc}\left(\frac{W(t-kT)}{\pi}\right)$$

の計算式により $f(t)$ を復元できる.

- この結果は標本化定理と呼ばれており， Whittaker (1915), Kotelnikov (1933), Shannon (1948), 染谷 (1949) 等によって独立に証明された.

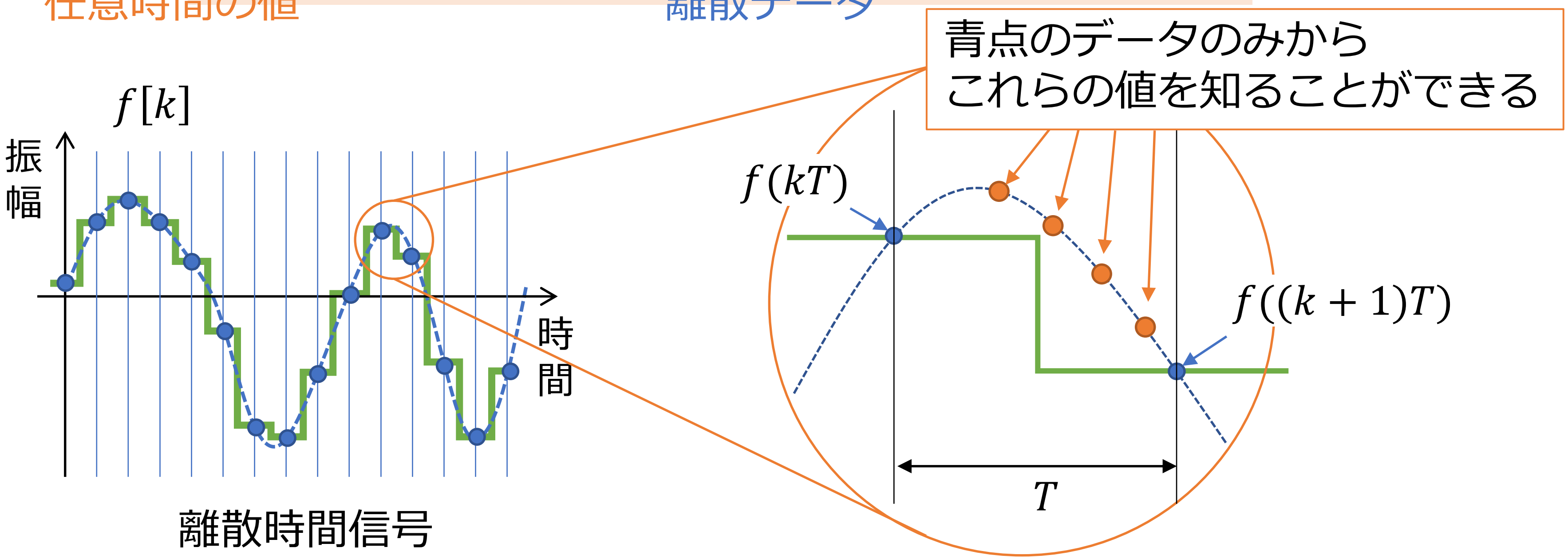
- $T=\pi/W$ の標本化間隔はナイキスト間隔と呼ばれる. ナイキスト間隔の標本化が最も効率が良い.

（注: 実際には無限個の標本値を取得できないので，N を十分大きな整数として, $k=-N,\ldots,N$ の範囲で和を取った近似式を用いる）

標本化定理の図解

- デジタル信号から、サンプルされていない時刻の値を正確に復元できるか？ → できる！

$$\underbrace{f(t)}_{\text{任意時間の値}} = \frac{WT}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{f(kT)}_{\text{離散データ}} \mathrm{sinc}\left(\frac{W(t-kT)}{\pi}\right)$$



標本化周波数 1/2

- 標本化周波数は「1秒あたりの標本値の個数」を指す．
すなわち，標本化間隔が T のとき，標本化周波数 f_s は

$$f_s = 1/T\,[\mathrm{Hz}]$$

と計算される．(例: $T = 0.01\,\mathrm{s}$ のとき $f_s = 100\,\mathrm{Hz}$)

- 標本化定理が成立する標本化間隔の条件は $T \leq \dfrac{\pi}{W}$ だが，
これは $\dfrac{1}{T} \geq \dfrac{W}{\pi}$ と同じだから，

$$f_s \geq \frac{W}{\pi}$$

の標本化周波数に関する条件に書き直すことができる．

標本化周波数 2/2

- $F(\omega) = 0 \ \ (|\omega| \geq W)$ と信号が帯域制限されているとき，
  W は角周波数なので，$B = W/2\pi$ が信号の最大周波数
  に対応する．$W = 2\pi B$ を $f_s \geq W/\pi$ に代入すると，

$$\boxed{f_s \geq 2B}$$

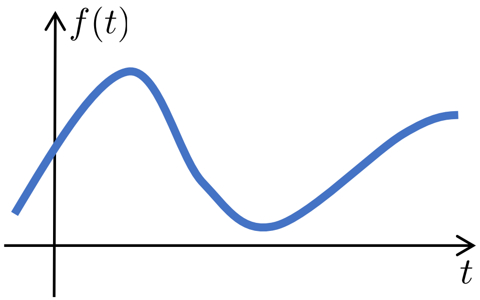
  となる．つまり，「信号の最大周波数の2倍」以上の標本化周波数で標本化すれば，元の信号（アナログ信号）を標本値（デジタル信号）から復元できる．

- 特に，$f_s = 2B$ をナイキスト・レート
  （ナイキスト周波数）と呼ぶ．

ナイキスト・レートの標本化が最も効率が良い．

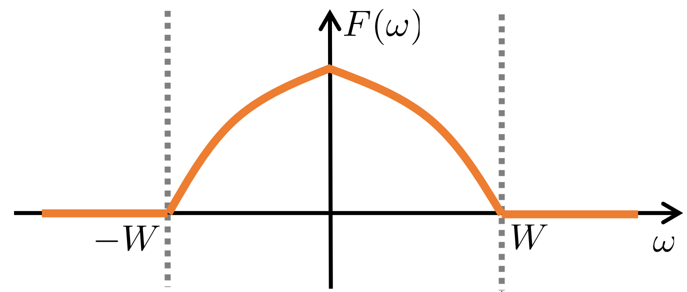
ナイキスト間隔とナイキストレート

帯域制限信号（アナログ信号）

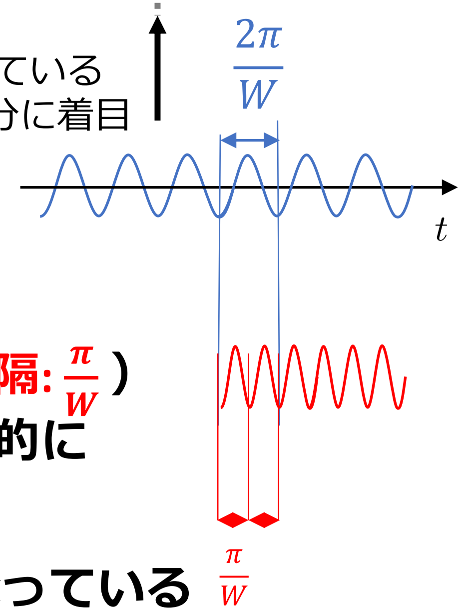


フーリエ変換

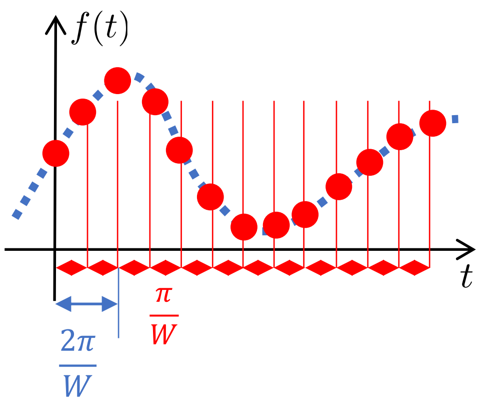
周波数特性（振幅スペクトル）



信号 $f(t)$ が持っている
最も高周波な成分に着目



離散値から連続値
が復元可能



この周期の半分（ナイキスト間隔: $\frac{\pi}{W}$ ）
でサンプリングすれば最も効率的に
情報が保存される。

周波数で見ると、2倍になっている
（ナイキストレート: $2B = W/\pi$ ）

例）CDの標本化周波数

- CDにはアナログ音の標本値(デジタル信号)が書き込まれている．
- 前回の講義で，人間の可聴域音はおよそ 20000 Hz までの音であることを紹介した．このことに基づき，CDに収録する音は22050 Hz=22.05 kHzに帯域制限されている．

  (可聴域の個人差などを考慮して最大周波数を若干大きめにしている)
- ナイキスト・レートは最大周波数の2倍なので，この場合，44100 Hz = 44.1 kHz となる．ナイキスト・レート以上の標本化周波数で標本化すれば，アナログ音が標本値から再現できる．なお，CDの標本化周波数は44.1 kHzである．

補間関数

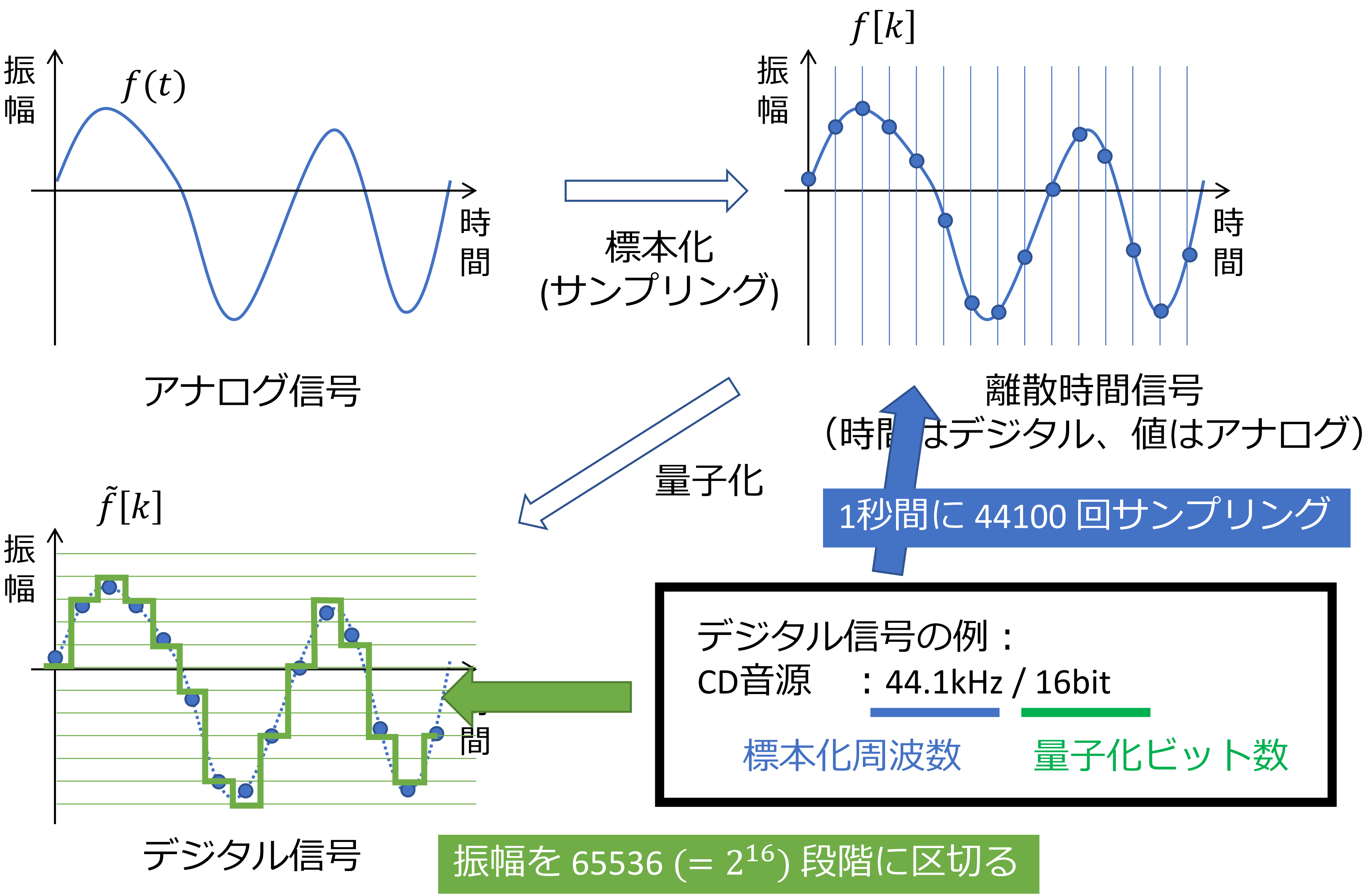
- 標本化定理

$$f(t) = \frac{WT}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\mathrm{sinc}\left(\frac{W(t-kT)}{\pi}\right)$$

で特に重要なのは，標本値のない $t \neq kT \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ における $f(t)$ の値が再現されていることである.

- 一般に，標本値を通る関数を求めることを補間と呼ぶ．上式はsinc関数を平行移動した関数の重み付け和による補間になっているため，sinc関数を補間関数と呼ぶ.

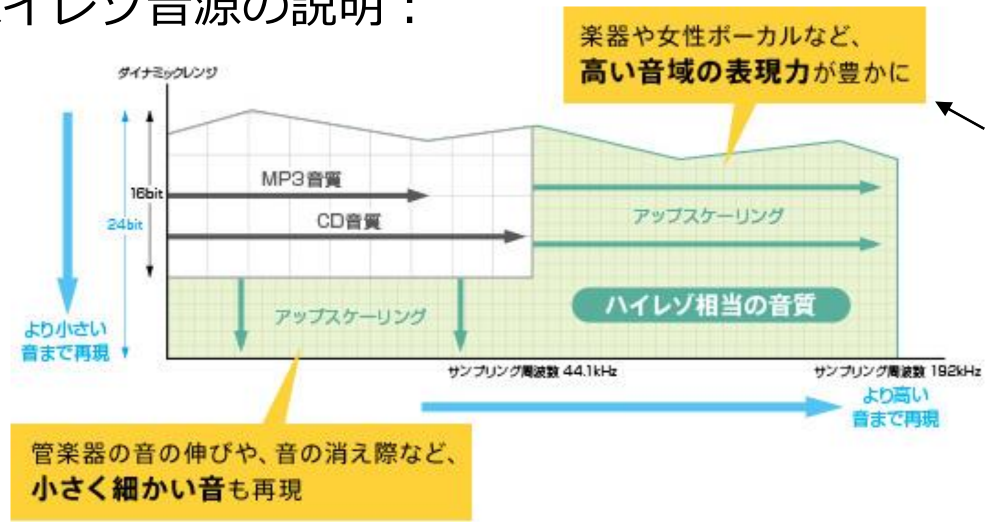
標本化と量子化、まとめ



$f(t)$
振幅
時間
アナログ信号
標本化
(サンプリング)
$f[k]$
離散時間信号
(時間はデジタル、値はアナログ)
量子化
$\tilde{f}[k]$
デジタル信号
1秒間に 44100 回サンプリング
デジタル信号の例：
CD音源　：44.1kHz / 16bit
標本化周波数
量子化ビット数
振幅を 65536 (= 2^{16}) 段階に区切る

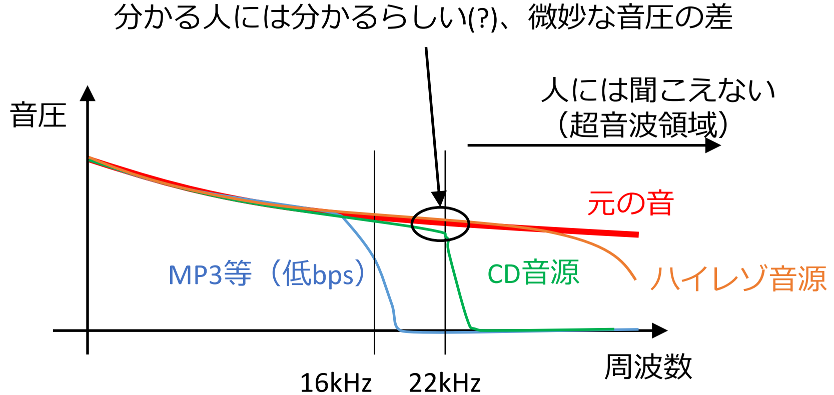
例：標本化定理を使って考えるハイレゾ

某メーカーのハイレゾ音源の説明：



この黄色い吹き出しは
ミスリーディング

実際のところ：



今回のまとめ

- 帯域制限されている場合，信号の最大周波数の2倍以上の標本化周波数で取得した標本値（デジタル信号）から，元の信号（アナログ信号）を復元できることを示した.
- 標本値を離散値で近似する量子化について説明した.

理解度確認その２

manaba +R の小テストで、ここまでの確認をします。

宿題

以下の問題は、電卓やプログラムを用いて計算してよいが、
考え方や計算過程は示すこと。答えだけでは不十分である。

レポートは、PCを用いて作成し、PDF形式で提出せよ。
手書きレポートの写真や、スキャンしたものなどは認めない。

- アナログ信号 $f(t) = 2\cos(2\pi t) + \sin(4\pi t) - \cos(6\pi t)$ がある。
  - この信号の最大周波数は何 Hz か。(t の単位は秒である)
  - $f(0.44)$ の値を求めよ。

- とある信号 $g(t)$ を $t = 0$ 秒から $t = 1$ 秒まで、0.1 秒間隔で記録したデジタル信号がある。

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
信号値	1.000	2.878	2.015	-2.015	-2.878	-1.000	-0.976	-0.839	0.839	0.976

  - このデジタル信号のナイキスト周波数は何 Hz か。
  - **表のデジタルデータを用いて**、元の信号 $g(t)$ の $t = 0.44$ のときの値を推定せよ。
    - ただし、信号は1秒周期で繰り返しているものとせよ。つまり、g(-0.1) = g(0.9)
    - kは適当な値 (10 や 100 など）で打ち切れ。