数学演習2 第5回

2022 10/25

微分積分

練4.2(A)

2. (4) $\int_0^\pi \sin^4 x\,dx$

解) $\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \int_0^\pi \sin^3 x(-\cos x)'dx = \left[\sin^3 x(-\cos x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi 3\sin^2 x\cos^2 x\,dx$

$= 3\int_0^\pi \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,dx$

$\therefore \int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{3}{8}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi$

$= \frac{3}{8}\pi$ □

4. (2) $\int_1^3 \frac{1}{x(2x-1)}\,dx$

解) $\int_1^3 \frac{1}{x(2x-1)}\,dx = \int_1^3 -\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x-1}\right)dx = -\left[\log x - \log(2x-1)\right]_1^3$

$= -(\log 3 - \log 5) = \log\frac{5}{3}$ □

線形代数

1次結合の記法

ベクトル $u_1, \cdots, u_m$ と $m\times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対し $(u_1,\cdots,u_m)A$ を

$(u_1,\cdots,u_m)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} = (a_{11}u_1+\cdots+a_{m1}u_m, \cdots, a_{1n}u_1+\cdots+a_{mn}u_m)$

によって定義する。

例えば $(a,b)\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} = (a+2b, 2a+b)$

問4.2

2. 次のベクトル $v_1,\cdots,v_n$ を行列を用いて $u_1,\cdots,u_m$ の1次結合で表せ。

(3) $v_1 = u_1+u_2-u_3-2u_5,\ v_2 = 2u_1-u_2+u_3-u_4+u_5$

$v_3 = 2u_1-u_3+u_4-3u_5,\ v_4 = u_1+u_2-3u_4-2u_5$

解) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

3. 問2において $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が1次独立のとき $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は1次独立か1次従属か調べよ。

(3)

解) $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$ とすると

$$\mathbf{0} = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_4)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_5)A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_5$ が1次独立より $A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

これを解くと、

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

故に自明な解に限るから1次独立。□

1次独立な最大個数

ベクトルの集合 X に対し、自然数 r が存在して X の中から r 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ を1次独立にとれるが、$r+1$ 個の X のベクトルは1次従属であるとき X のベクトルの1次独立な最大個数は r であるという。このとき

r = X から選び出せる1次独立なベクトルの最大個数

また $X = \{\mathbf{0}\}$ であるとき、$r = 0$ でこの用語を用いる。

<u>定理</u> $r \geq 1$ のとき $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の1次独立な最大個数が r であることは $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ から r 個の1次独立なベクトルをとって他のベクトルをそれら r 個のベクトルの1次結合で表せることと同値である。

問4.3 1. 次の各組のベクトルに対して問いに答えよ。

(i) 1次独立な最大個数 r を求めよ。

(ii) r 個の1次独立なベクトルを前の方から順に求めよ。

(iii) 他のベクトルを(ii)のベクトルの1次結合で表せ。

(2) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

注) (ii)は仮に $a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}$ を(ii)の答として a_{i_1} は $\neq 0$ な最初のベクトルで、任意の $1 \leq k < r$ に対して $a_{i_{k+1}}$ は $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ の1次結合で表せない $a_j, (j > i_k)$ の中の最初のベクトルになっていること。

解) $A = [a_1 \cdots a_5]$ とおくと $Ax = x_1 a_1 + \cdots + x_5 a_5$, $x = {}^t[x_1, \cdots, x_5]$ より

$x_1 a_1 + \cdots + x_5 a_5 = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$

$B = [b_1 \cdots b_5]$ を A の簡約化とすると $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$ より

$x_1 a_1 + \cdots + x_5 a_5 = 0 \Leftrightarrow x_1 b_1 + \cdots + x_5 b_5 = 0$

これより $a_1, \cdots, a_5$ の1次関係と $b_1, \cdots, b_5$ の1次関係は同じ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

これより b_1, b_2, b_3 は1次独立, $b_4 = 3b_1 - b_2 + b_3$, $b_5 = b_1 + 2b_2 - 2b_3$

よって a_1, a_2, a_3 は1次独立, $a_4 = 3a_1 - a_2 + a_3$, $a_5 = a_1 + 2a_2 - 2a_3$, $r = 3$ □