数学演習2第9回

2022 11/22

線形代数

線形写像 $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とする。

定義1. $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 U,V に対し、U から V への写像 $T: U\to V$ が次の2条件を満たすとき U から V への線形写像という。

(1) $T(u+v)=T(u)+T(v)$, $(u,v\in U)$

(2) $T(cu)=cT(u)$, $(u\in U, c\in\mathbb{K})$

例1. $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m\times n$ 行列を $m\times n$ $\mathbb{K}$ 行列という。$m\times n$ $\mathbb{K}$ 行列 A に対し、$\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への写像 $T=T_A$ を $T_A(x)=Ax$ で定義すると T_A は $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線形写像。

逆に $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線形写像 $T:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ に対し $m\times n$ $\mathbb{K}$ 行列 A が唯1つ存在して $T(x)=Ax$ と表される。A は $A=[T(e_1)\cdots T(e_n)]$ で与えられる。

線形写像の像と核

定義2.(1) U から V への線形写像 $T:U\to V$ に対し T の像 $\mathrm{Im}\,T$ を

$$\mathrm{Im}\,T=\{v\in V \mid \text{ある } u\in U \text{ に対し } v=T(u)\}$$

によって定義する。$\mathrm{Im}\,T$ は V の部分空間である。

(2) 上の T に対し T の核 $\mathrm{Ker}\,T$ を

$$\mathrm{Ker}\,T=\{u\in U \mid T(u)=0\}$$

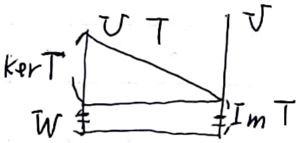
によって定義する。$\mathrm{Ker}\,T$ は U の部分空間である。

以下 U,V は有限次元ベクトル空間とする。

線形写像の階数と退化次数

定義3. 線形写像 $T:U\to V$ に対し T の階数 $\mathrm{rank}\,T$ を $\mathrm{rank}\,T=\dim(\mathrm{Im}\,T)$ によって定義する。また T の退化次数 $\mathrm{null}\,T$ を $\mathrm{null}\,T=\dim(\mathrm{Ker}\,T)$ によって定義する。

定理1. 線形写像 $T: U \to V$ に対し $\mathrm{rank}\,T + \mathrm{null}\,T = \dim U$ が成立つ。



Ker T の基 $u_1, \cdots, u_k$, Im T の基 $v_1, \cdots, v_l$ をとり ($k = \mathrm{null}\,T$, $l = \mathrm{rank}\,T$) $u_{k+1}, \cdots, u_{k+l} \in U$ を $T(u_{k+1}) = v_1, \cdots, T(u_{k+l}) = v_l$ ととると $u_1, \cdots, u_{k+l}$ は U の基。上の図式で W は $u_{k+1}, \cdots, u_{k+l}$ で張られる U の部分空間。

例2. $A = [a_1 \cdots a_n]$ が $m \times n$ $\mathbb{K}$行列のとき $T_A(x) = Ax : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ に対し、

$$\mathrm{Im}\,T_A = \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}\}$$
$= A$の列ベクトルで生成される $\mathbb{K}^m$ の部分空間

また $\mathrm{rank}\,T_A = \dim(\mathrm{Im}\,T_A)$ より

$\mathrm{rank}\,T_A =$ Aの列ベクトルの1次独立な最大個数
$= \mathrm{rank}\,A$

また $\mathrm{Ker}\,T_A = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$
$=$「$Ax = 0$」の解空間

$\mathrm{null}\,T_A = \dim(\mathrm{Ker}\,T_A)$ より

$$\mathrm{null}\,T_A = n - \mathrm{rank}\,A$$

問題5.1

2. 次の写像は線形写像かどうか調べよ。

(1) $T(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 5x_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(2) $T(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

解) (1) $T(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} x$ と 2×2行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて表されるから $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像である。□

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ とおくと $T(x) = Ax + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ……

このとき $T(x+y) = A(x+y) + \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = Ax + Ay + \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = T(x) + T(y) - \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \neq T(x)+T(y)$

よって T は線形写像でない。□

3. 次の線形写像 T について(i),(ii)を求めよ。

(i) null T と Ker T の1組の基 (ii) rank T と Im T の1組の基

(3) $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} x : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$

解)(i) $\mathrm{Ker}\,T = \{ x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0 \}$ ここで A は与えられた行列

$Ax = 0$ を解く。 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $x_1 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$

$x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$

$x_3 = c_1,\ x_4 = c_2,\ x_5 = c_3$ とおくと

$$x = \begin{bmatrix} -3c_1 + c_2 + 2c_3 \\ -c_1 - c_2 - 3c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって null $T = 3$, Ker T の基として $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ □

(ii) Im T は A の列ベクトルで生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間 より $\dim(\mathrm{Im}\,T) = \mathrm{rank}\,A = 2$

よって rank $T = 2$。$\therefore$ A の2個の1次独立な列ベクトルは Im T の基であるから

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ は Im T の基. □

線形写像の表現行列

線形写像 $T: U \to V$ に対し U の基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$, V の基 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ をとると

$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$, $(j = 1, \cdots, n)$ と一意的に表せるから $m \times n$ K行列 $A = [a_{ij}]$ が唯1つ存在して

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (v_1, \cdots, v_m) A$$

が成立つ。 A を上の基に関する T の表現行列という。

例3. Aを$m\times n$ $\mathbb{K}$行列，$T_A(x)=Ax:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ に対し
$\mathbb{K}^n$の標準基$\left\{e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots, e_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，$\mathbb{K}^m$の標準基$\left\{e_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots, e_m'=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$
に関するT_Aの表現行列はAである。
実際　$T_A(e_j)=a_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^m a_{ij}e_i'$　$(j=1,\cdots,n)$ より $(T_A(e_1),\cdots,T_A(e_n))=(e_1',\cdots,e_m')A$
ここで $A=[a_1\cdots a_n]$ □

基の変換行列

Uの2組の基 $\{u_1,\cdots,u_n\}$，$\{u_1',\cdots,u_n'\}$ に対し，$u_j'=\sum_{i=1}^n p_{ij}u_i$　$(j=1,\cdots,n)$
と一意的に表せるから n次正方行列 $P=[p_{ij}]$ が唯1つ存在して
$$(u_1',\cdots,u_n')=(u_1,\cdots,u_n)P$$
ここで $u_1',\cdots,u_n'$ および $u_1,\cdots,u_n$ が1次独立より Pは正則である。
また $(u_1,\cdots,u_n)=(u_1',\cdots,u_n')P'$ とおくと $P'=P^{-1}$である。
Pを基の変換行列という。

定理2. 線形写像$T:U\to V$ に対し U,Vの2組の基を
Uの基：$\{u_1,\cdots,u_n\}$，$\{u_1',\cdots,u_n'\}$，Vの基：$\{v_1,\cdots,v_m\}$，$\{v_1',\cdots,v_m'\}$
とおくときそれぞれについて変換行列を
$$(u_1',\cdots,u_n')=(u_1,\cdots,u_n)P,\ (v_1',\cdots,v_m')=(v_1,\cdots,v_m)Q$$
とすると　Tの　$\{u_1,\cdots,u_n\}$，$\{v_1,\cdots,v_m\}$に関する表現行列A
$\{u_1',\cdots,u_n'\}$，$\{v_1',\cdots,v_m'\}$に関する表現行列B
に対し　$B=Q^{-1}AP$　が成立つ。

線形変換の表現行列

UからUへの線形写像をUの線形変換という。
Uの線形変換$T:U\to U$に対し Uの基$\{u_1,\cdots,u_n\}$をとるとき
$$(T(u_1),\cdots,T(u_n))=(u_1,\cdots,u_n)A$$
を満たすn次正方行列Aが唯1つ存在する。この行列Aを線形変換Tの上の基に関する表現行列という。

定理3. $T: U \to U$ を U の線形変換とし、U の2組の基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$, $\{u_1', \cdots, u_n'\}$ に対し基の変換行列を $(u_1', \cdots, u_n') = (u_1, \cdots, u_n)P$ とおくとき、T の $\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する表現行列 A、$\{u_1', \cdots, u_n'\}$ に関する表現行列 B に対して $B = P^{-1}AP$ が成立つ。

問5.2 1. 次の線形写像 T の与えられた基に関する表現行列を求めよ。

(2) $T(x) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^4$ の基 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{R}^3$ の基 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

解) 求める行列を B、与えられた行列を A、与えられた基を $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $\{q_1, q_2, q_3\}$ とおくと

$$(T(p_1), \cdots, T(p_4)) = (Ap_1, \cdots, Ap_4) = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = (q_1, q_2, q_3)B$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 8 & 10 & -1 & 9 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} B$$

ここで $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対し $|Q| = -1$, $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ より $Q^{-1} = \frac{1}{|Q|}\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore B = Q^{-1} \begin{bmatrix} 8 & 10 & -1 & 9 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ -6 & -7 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad \square$$

2. 次の線形変換の与えられた基に関する表現行列を求めよ。

(2) $T(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ の基 $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

解) $\mathbb{R}^3$ の標準基 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する T の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

与えられた基に基をとりかえると 変換行列は $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) P$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

求める行列 B は $B = P^{-1}AP$

ここで P^{-1} は $|P| = 2 - 1 = 1$, $\tilde{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ より $P^{-1} = \tilde{P}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore B = P^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \square$$