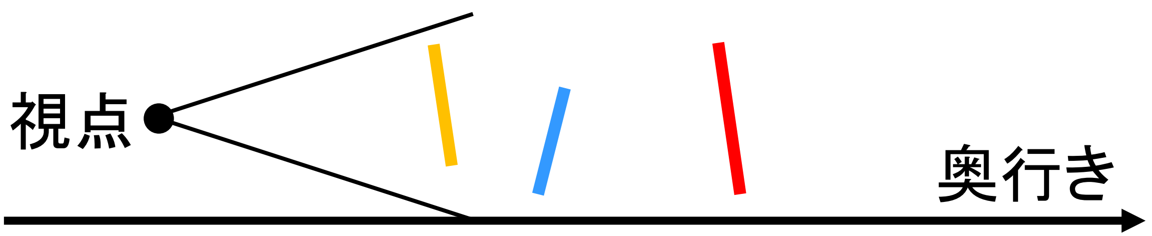
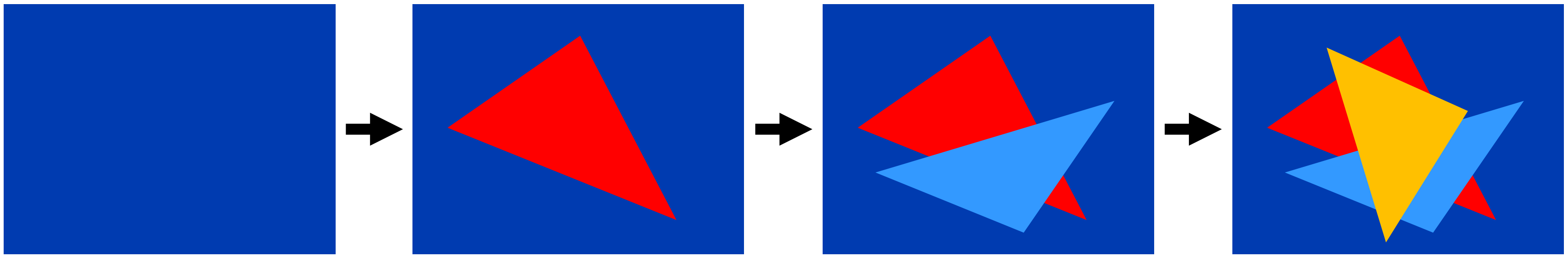
コンピュータグラフィックス(R)

第9回：Zバッファ法

復習：奥行きソート法

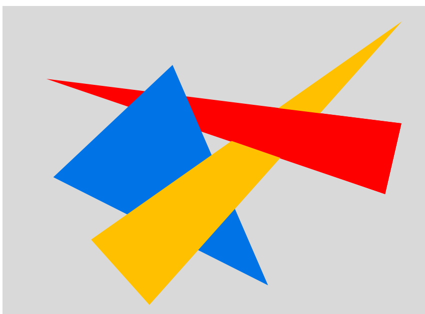
- 優先順位アルゴリズム
  1. すべてのポリゴンについて，それぞれ重心を求める．
     $$\boldsymbol{g} = \frac{1}{n}(\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_{n-1})$$
  2. すべてのポリゴンを，視点からの奥行き（z値）で並べ替える．
  3. 奥のポリゴンから順に重ね描きする．





復習：奥行きソート法

奥行きソート法は隠面消去に失敗する場合がある．この問題の本質はどこにあるか．



三すくみの場合

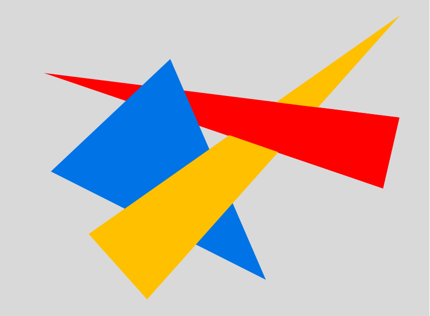
貫通している場合

凹ポリゴンの場合

答　ポリゴンには「大きさ」があるから，重心だけではポリゴンの前後関係が定まらない．
つまり，ポリゴンの単位で前後関係を決めるのではなく，ポリゴンより細かい単位で前後関係を決める必要がある．

考えてみよう

問　奥行きソート法の問題を解決するには？



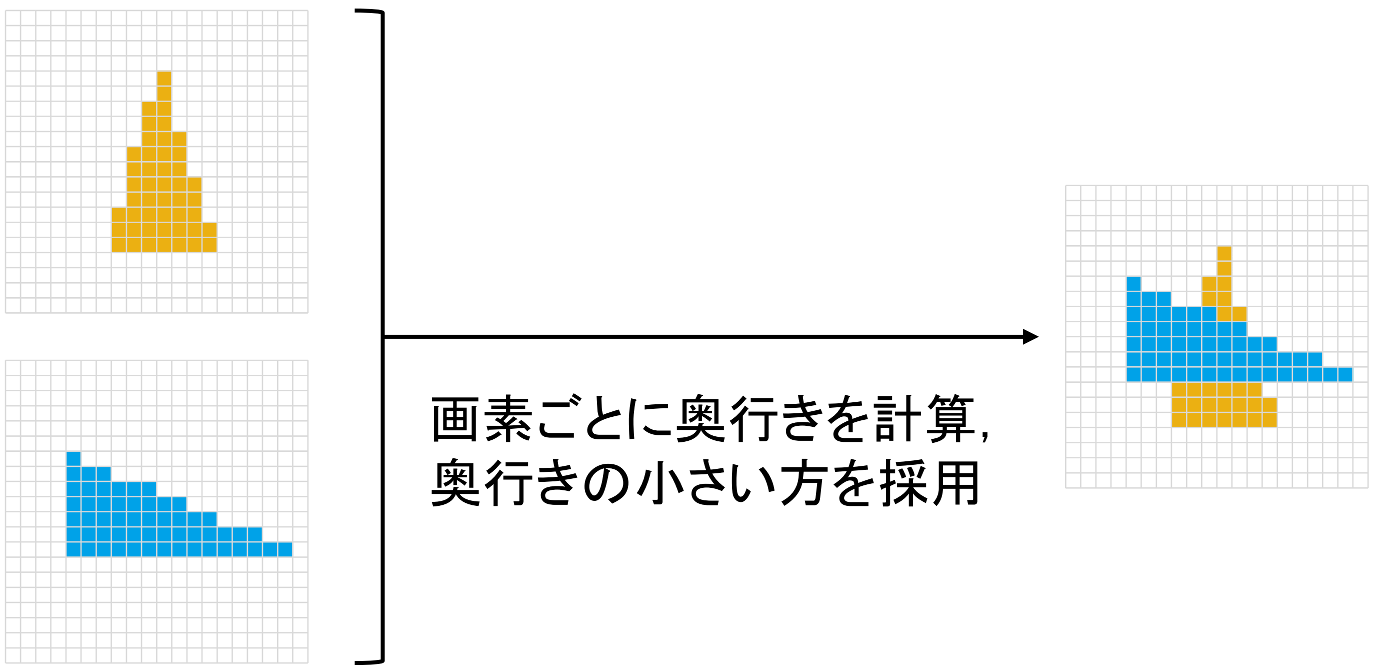
三すくみの場合

貫通している場合

凹ポリゴンの場合

考えてみよう

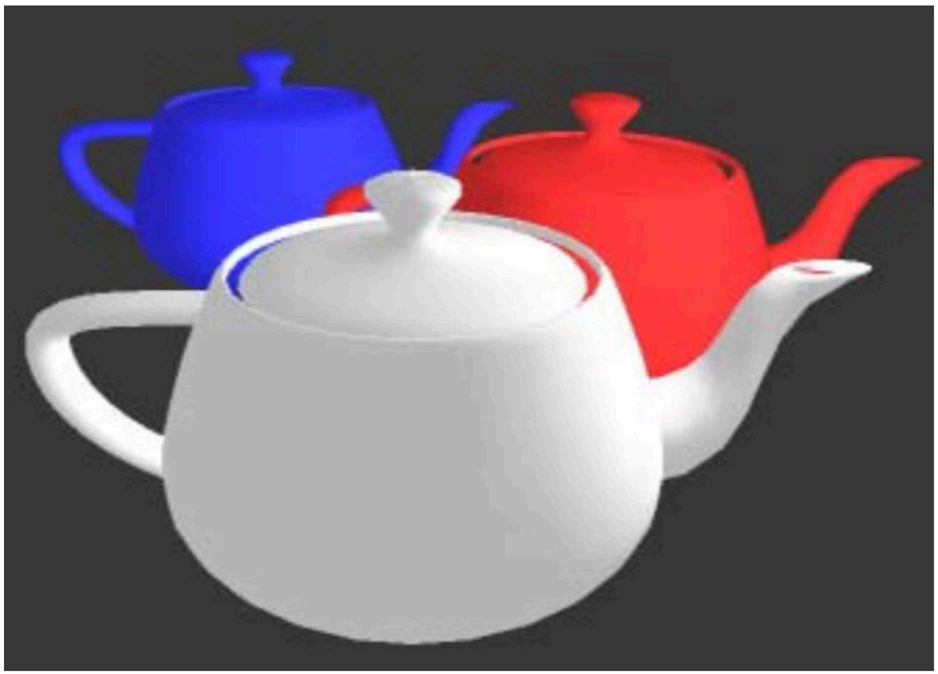
答　ポリゴンの単位で前後関係を決めるのではなく，**ポリゴンより細かい単位**で前後関係を決める必要がある.
→ 画素単位で前後関係を決めてはどうか？



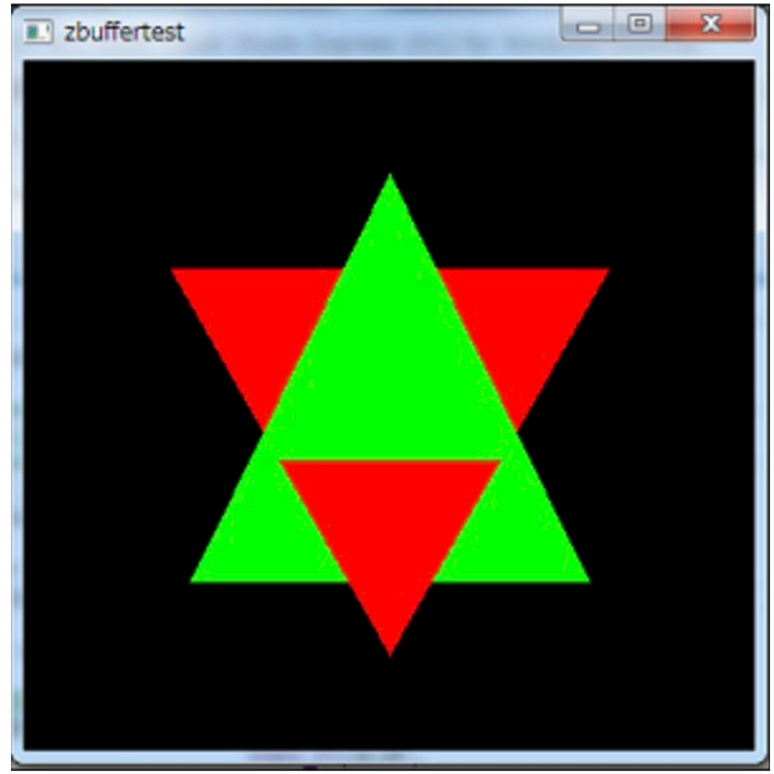
Zバッファ法の概要 (p.133)

- Zバッファ法は，現在，最もよく使われている隠面消去アルゴリズムである
- アルゴリズムが単純かつ高速
- 奥行きソート法の問題を解決
- 事前に並べ替える必要はない（順序は任意）
- 画像サイズに比例するメモリを使用する
  - 以前は，「メモリを多く使用するのが欠点」と言われた
  - 現在での計算機では問題無し

Zバッファ法の概要 (p.133)



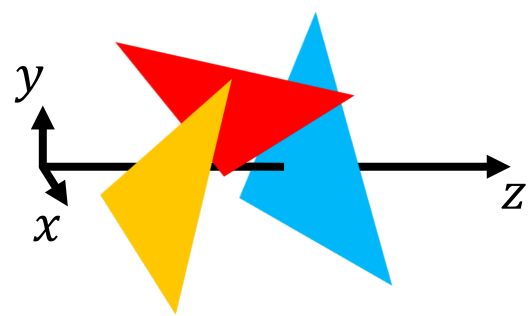
隠面消去OK



ポリゴン同士の重なり OK

Z値（デプス，depth）(p.133)

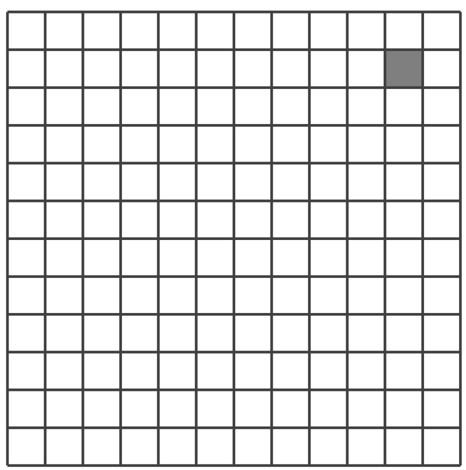
- 視点からの奥行きを「Z 値」あるいは「デプス(depth)」という
- カメラの向きを z 軸としたときの z 成分が奥行き



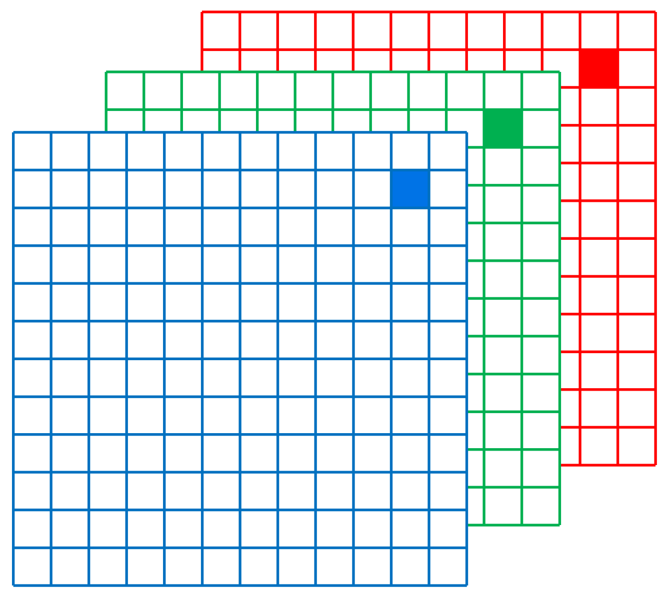
z 軸が奥行き

Zバッファとフレームバッファ (p.133)

- Zバッファ (Z-buffer): 画素ごとにZ値を格納する.
- フレームバッファ (frame buffer): 画素ごとに画素値を格納する.
- 解像度は共通.



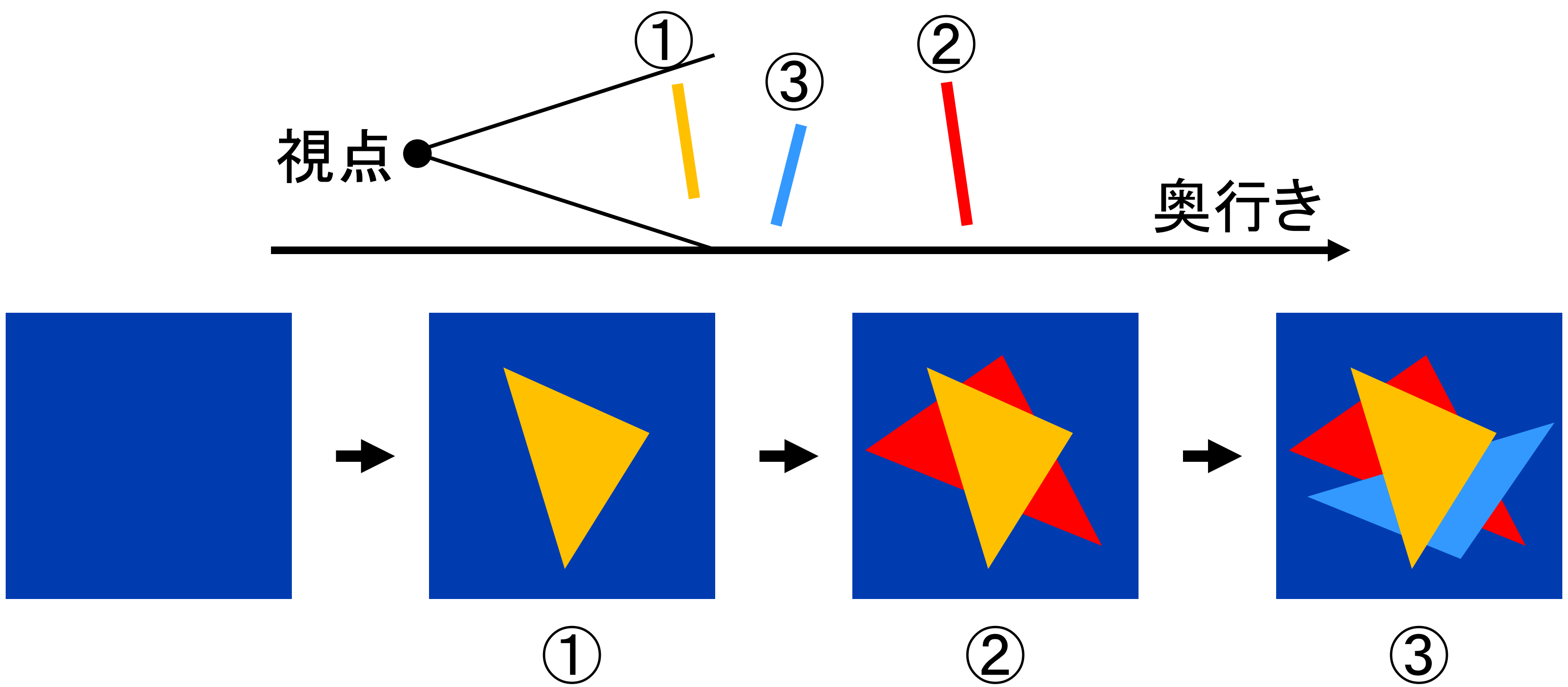
Zバッファ
（画素ごとにZ値を格納）



フレームバッファ
（画素ごとに色（RGB値）を格納）

Zバッファとフレームバッファ (p.133)

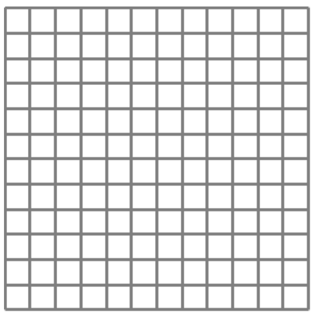
Zバッファ法による隠面消去処理の例



①，②，③の順に描画するとき，Zバッファ法の処理は？

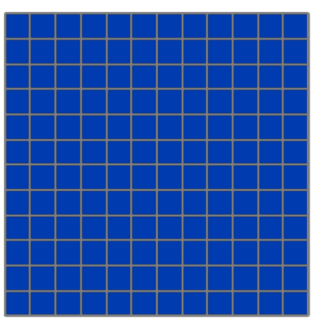
Zバッファとフレームバッファ (p.133)

初期化



Zバッファ

全画素の値を，無限遠の距離に相当する値で初期化する.

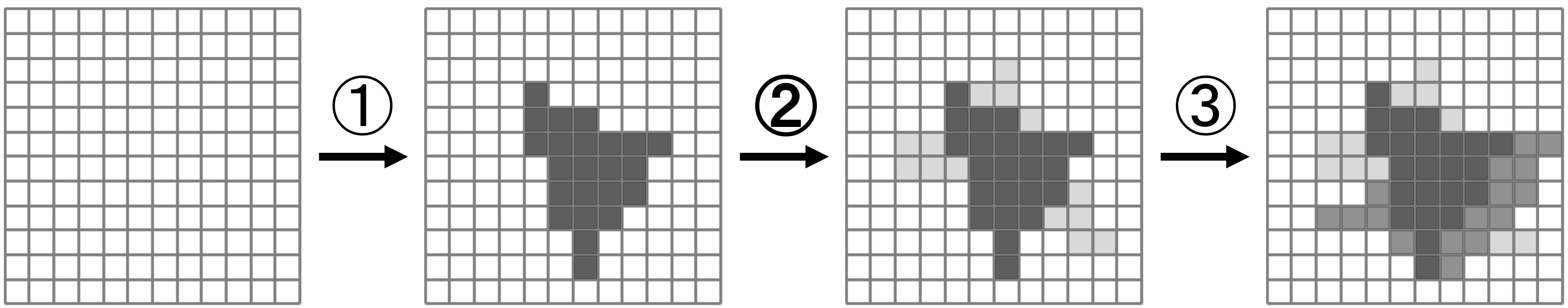


フレームバッファ

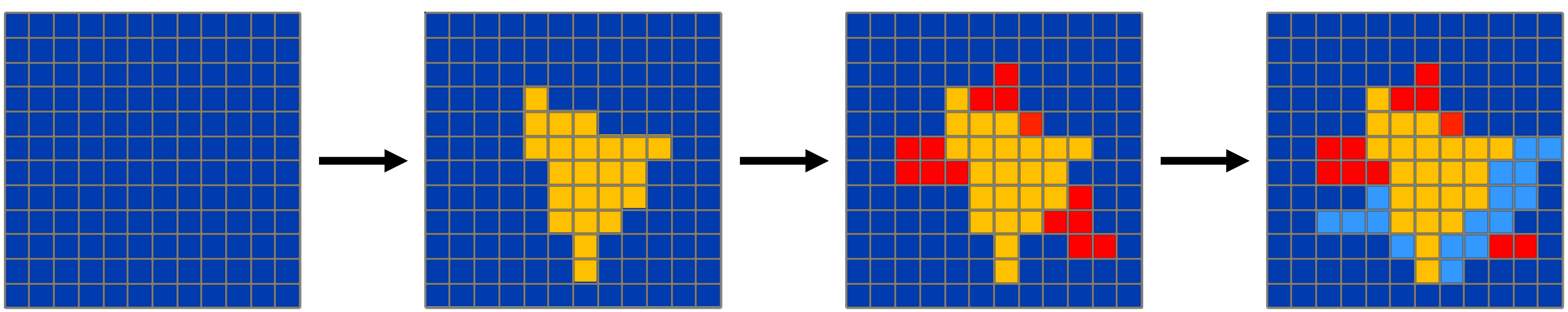
全画素の値を，背景色で初期化する.

Zバッファとフレームバッファ (p.133)

ポリゴン①②③の処理



Zバッファ



フレームバッファ

Zバッファ法のアルゴリズム (p.133)

アルゴリズム（Zバッファ法）

- 前処理
  - フレームバッファ F(i,j) のすべての画素を背景色で初期化する.
  - Zバッファ Z(i,j) のすべての画素を最遠点（無限大）で初期化する.
- それぞれのポリゴンについて(*1)
  - ポリゴンを透視投影する.
  - ポリゴンを走査変換する(*2).
  - ポリゴン内部の各画素 (i,j) について,
    - 画素 (i,j) に対応する点でのポリゴンの奥行き（Z値）を求める.
    - ポリゴンのZ値が Z(i,j) より小さいならば, {

      ポリゴンの色を F(i,j) に格納する.

      Z(i,j) の値をポリゴンのZ値で更新する.

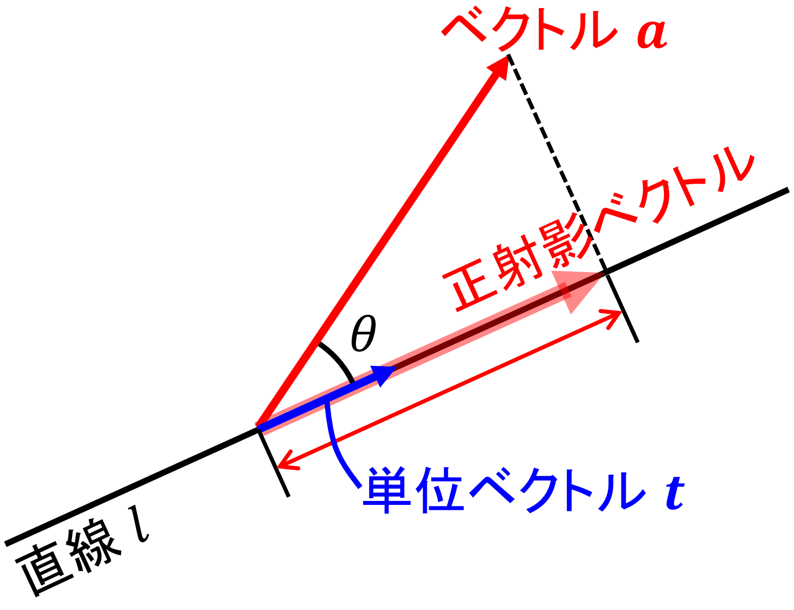
      }

(*1) *順番は任意. 奥行きソート法のような並び替えはしない.*

(*2) *ポリゴン内部の画素を特定する走査. 三角形の3頂点の投影後の座標から導出できる. p.131「ポリゴンの走査変換」を参照.*

Z値の計算方法の準備

ベクトルから直線への正射影



ベクトル $\boldsymbol{a}$ を直線 l へ正射影する.

正射影ベクトルの大きさは

$$|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}$$

（ベクトル $\boldsymbol{a}$ から単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ に垂直に影を落としたときの影の長さ）

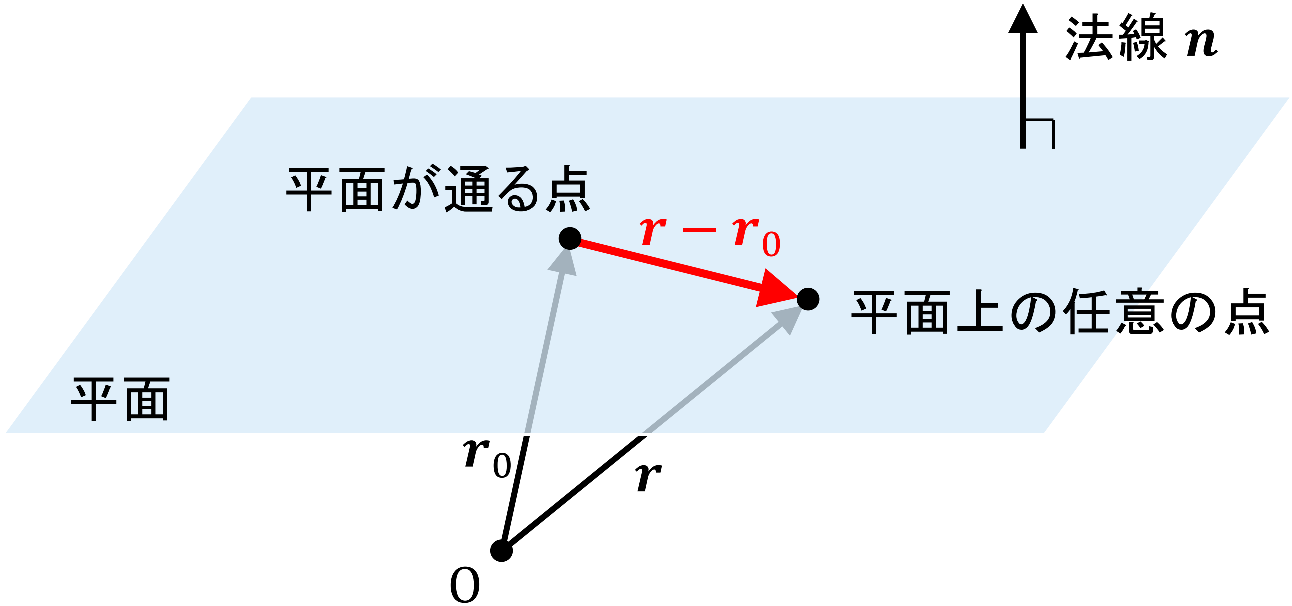
Z値の計算方法の準備

平面の方程式（ベクトル表示）

位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ の点を通り，法線が $\boldsymbol{n}$ である平面の方程式は

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$$

である.



Z値の計算方法の準備

平面の方程式(ベクトル表示から成分表示へ)

平面のベクトル方程式

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

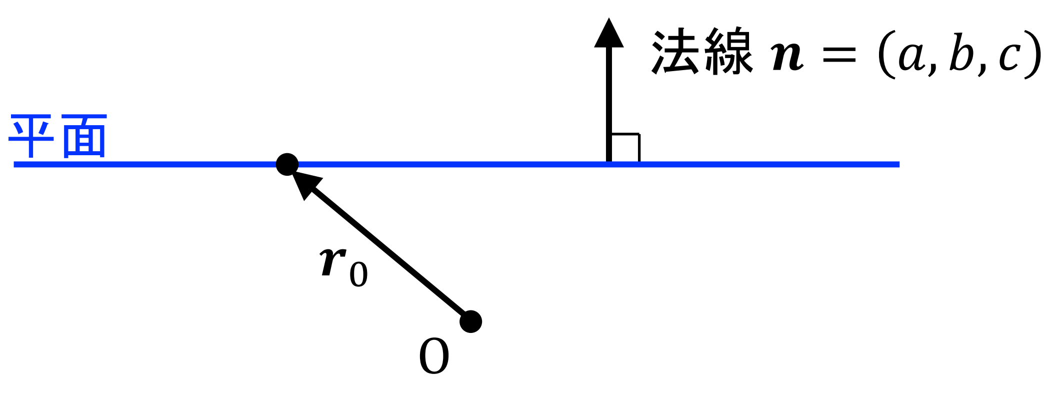
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0$$

ここで，$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$, $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0=d$ とおくと，

$$(a,b,c)\cdot(x,y,z)=d$$

$$ax+by+cz=d$$

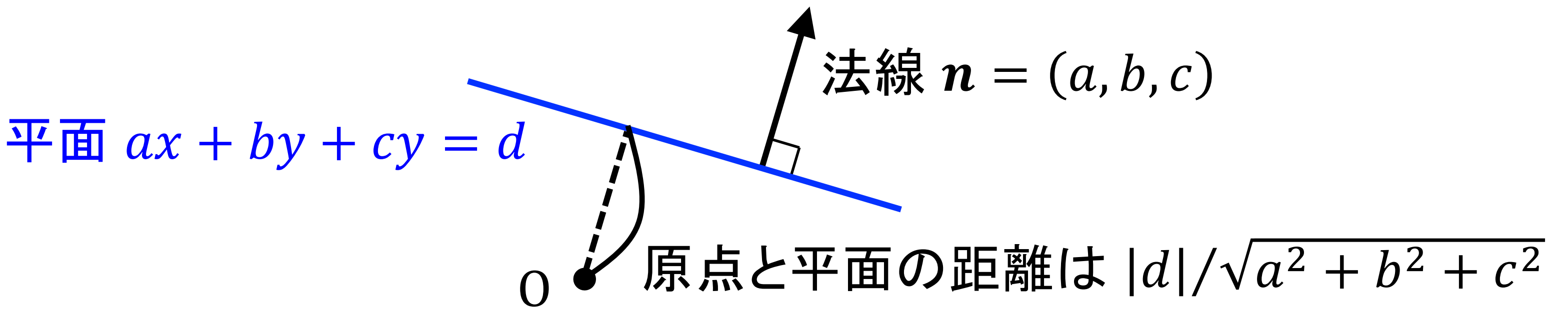
平面の1次方程式が得られた．



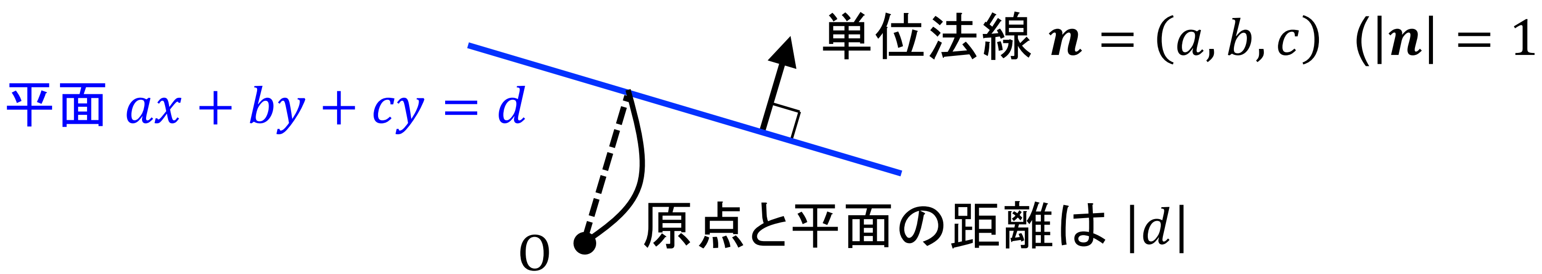
Z値の計算方法の準備

平面の方程式（原点と平面の距離）

一般的な法線 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ の場合

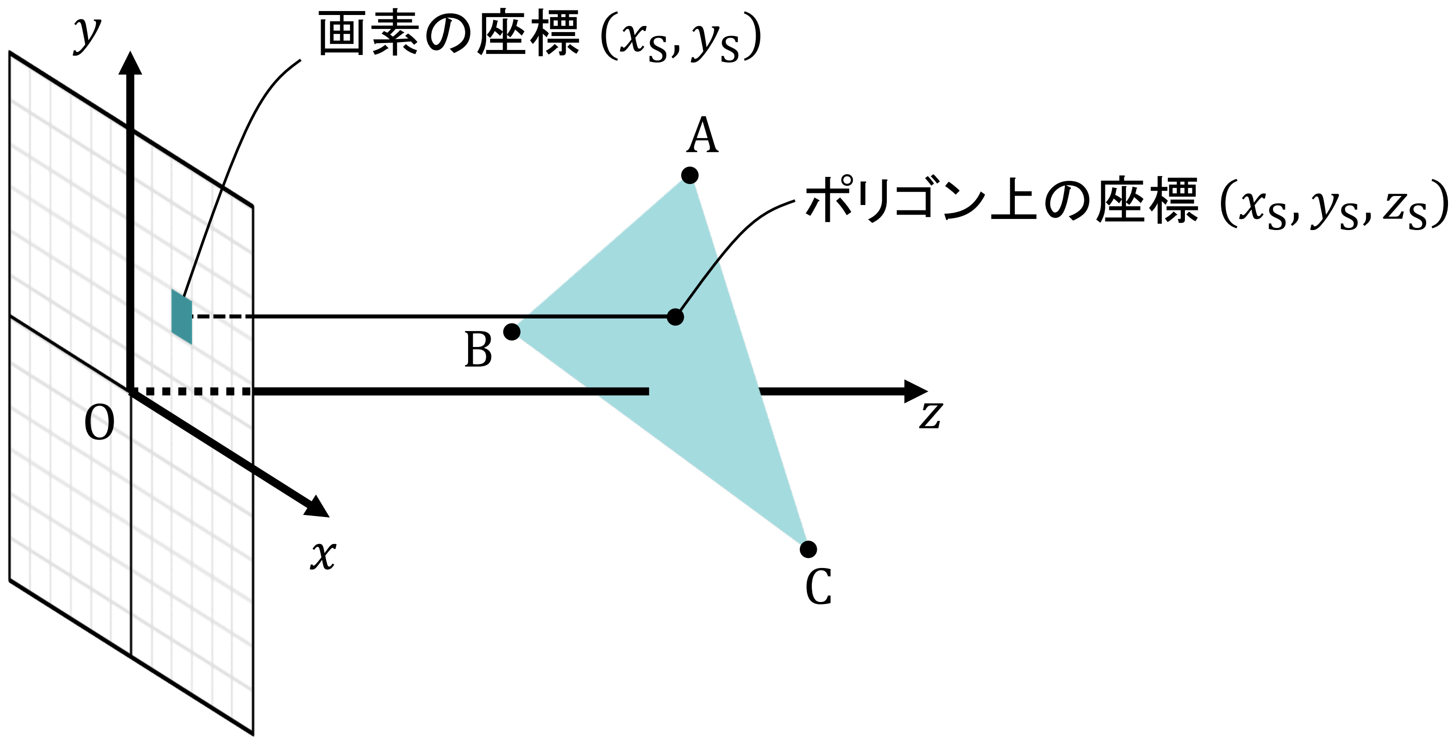


単位法線 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ $(|\boldsymbol{n}| = 1)$ の場合



ポリゴン内の奥行き(Z値)の計算 (p.134)

ポリゴン内の各画素(座標は (x_S, y_S))でのZ値を求めることを考える.



注:投影座標系は左手系!法線計算の外積の順序に注意!

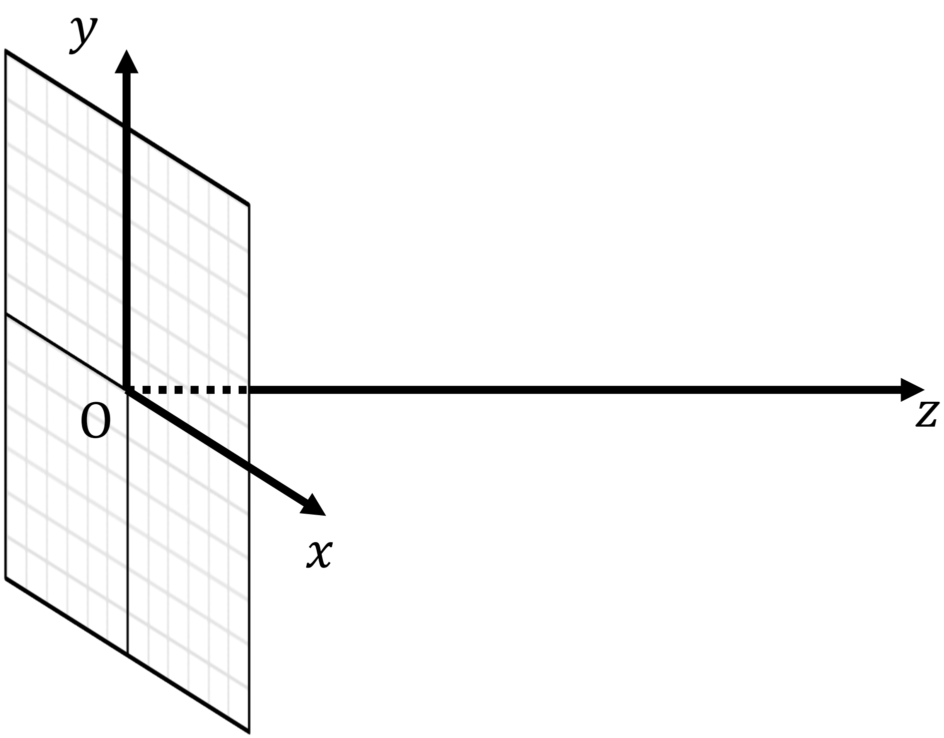
ポリゴン内の奥行き（Z値）の計算 (p.134)

画素 $(x_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{S}})$ のZ値を求める方針

1. 三角形の単位法線 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ を求める.
2. 三角形を含む平面の方程式を求める.
3. 平面の方程式に画素の座標 $(x_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{S}})$ を代入して z_{S} を得る.
   ※この時点で目的のZ値 z_{S} が得られる！

考えてみよう

問　投影座標系の点 A(0,0,6), B(3,0,9), C(0,3,9) を頂点とする三角形 ABC の単位法線 $\boldsymbol{n}$ を求めよ.



投影座標系

考えてみよう

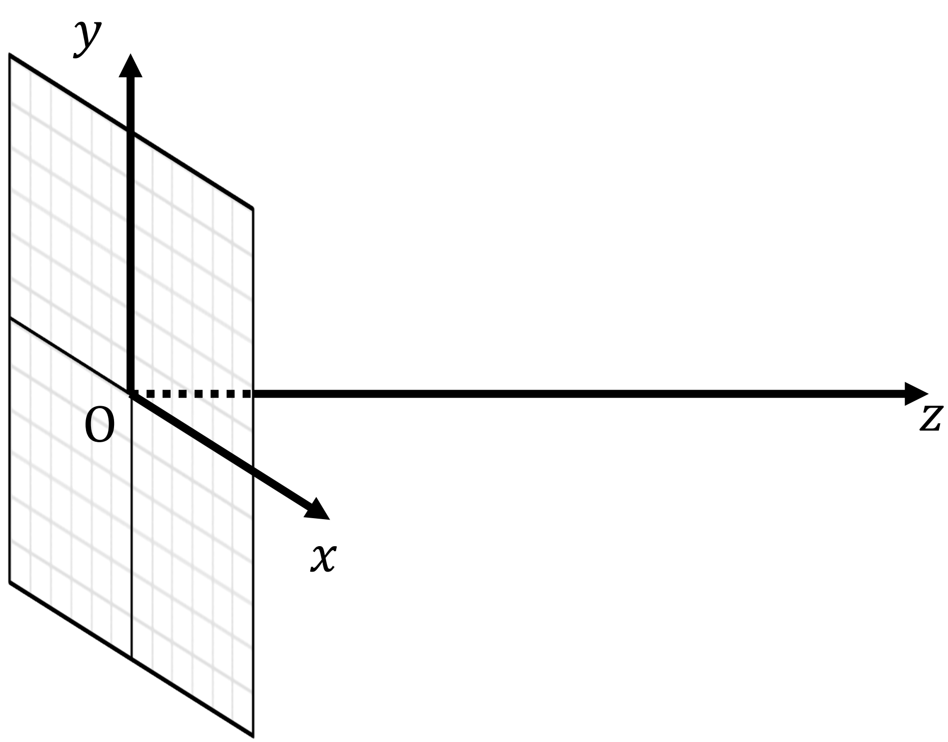
答 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,3,3) \times (3,0,3) = (9,9,-9)$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 9\sqrt{3}$$

$$\therefore \boldsymbol{n} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

考えてみよう

問　3点 $\mathrm{A}(0,0,6)$, $\mathrm{B}(3,0,9)$, $\mathrm{C}(0,3,9)$ を頂点とする三角形 ABC を含む平面の方程式を求めよ.



投影座標系

考えてみよう

答　点 A を通り，法線が $\boldsymbol{n}$ である平面の方程式は

$$\boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{p} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0$$

と書ける.

$\boldsymbol{p} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0,0,6)$ を代入すると，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (x, y, z - 6) = 0.$$

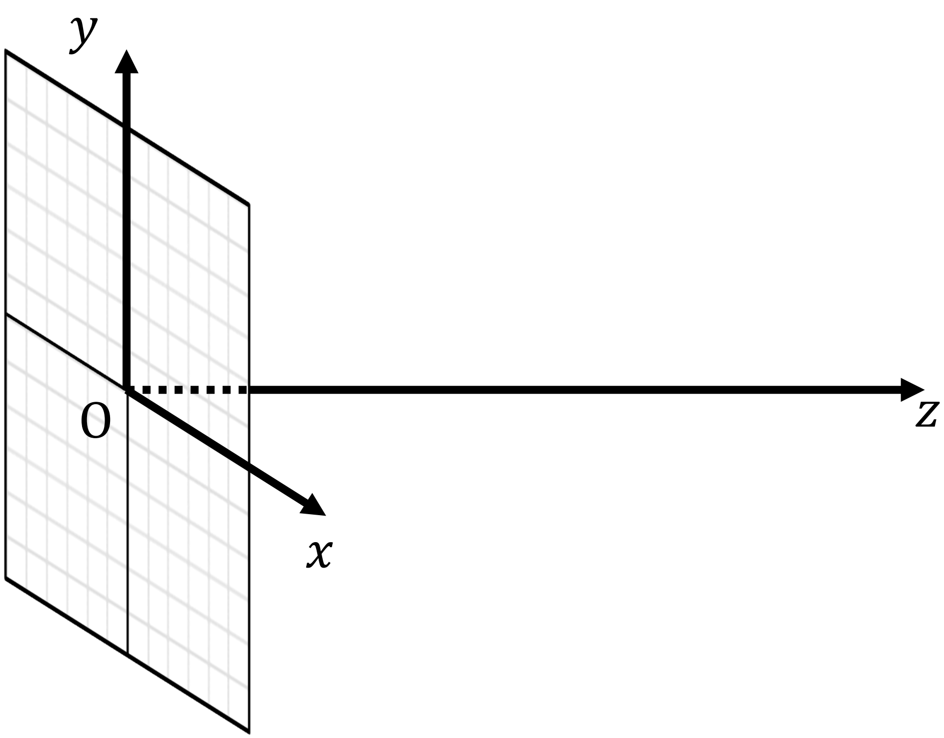
これを整理して，平面の方程式

$$x + y - z = -6$$

が得られる.

考えてみよう

問　スクリーン上の座標 $(1,1)$ にある画素のZ値を求めよ.



投影座標系

考えてみよう

答　三角形 ABC を含む平面の方程式は

$$x + y - z = -6$$

である．画素の座標 $(1,1)$ を代入すると，

$$1 + 1 - z = -6$$

$$\therefore z = 8$$

したがって，画素 $(1,1)$ のZ値は 8 である．

Zバッファ法の特徴 (p.134)

- 処理が比較的簡単でハードウェア化しやすい.
- 3次元グラフィックス描画装置（GPU: Graphics Processing Unit）では通常，Zバッファ法が採用される.
- GPUを用いれば，多くのポリゴンを含むシーンでも隠面消去を含むリアルタイムレンダリングが可能.
- 2つの面が互いに交差しているような場合でも，面を分割することなく，そのまま処理することができる.