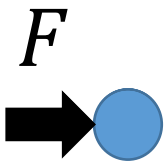
# 剛体の運動

慣性モーメント

*ニュートンの力学の法則*
*第２法則*

$$F = ma$$

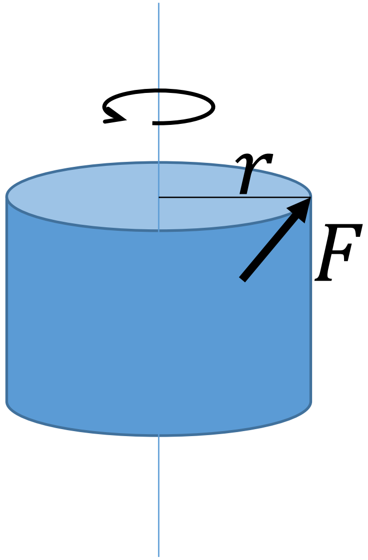
力=質量×加速度




*ニュートンの力学の法則*
*第２法則*

$$T = I\,\dot{\omega}$$

トルク=慣性モーメント
×角加速度

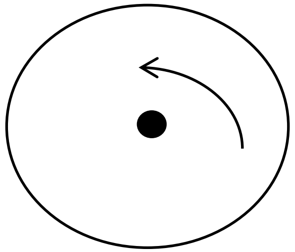



*トルク*
*（外力によるモーメント）*

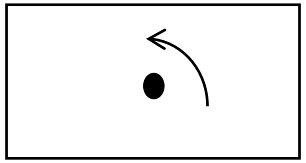
$$T = Fr$$

# 慣性モーメントは物体の質量と形状で定まる

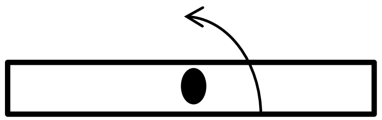
円板　***1/2*** × 質量 ×　半径$^2$



板　***1/12*** × 質量 ×　(長辺$^2$＋短辺$^2$)

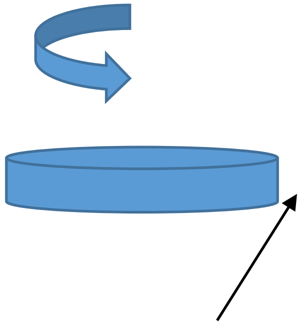


棒　　***1/2*** × 質量 ×　棒の長さ$^2$



質量の単位は**kg**、長さの単位は**m**、慣性モーメントの単位は**kgm$^2$**である。

例題 問1
半径10cm、質量 1kgの円板の中心に一定の回転トルクを加えて、静止状態から2秒後に60 RPMの速度で回転するようにしたい。このとき、必要な回転トルクを求めよ。



0.157 N
= 16 gf

60 rpm = 2π rad/s よって、角加速度は 2π/2 = π (rad/$s^2$)

rpm: １分間の回転数

角速度 (rad/s): 単位時間(1s)あたりの回転角度

各加速度 (rad/$s^2$): 単位時間(1s)あたりの各速度の変化量

円板の慣性モーメントは $I = 1/2 \times 1 \times 0.1^2$ (kg$m^2$)

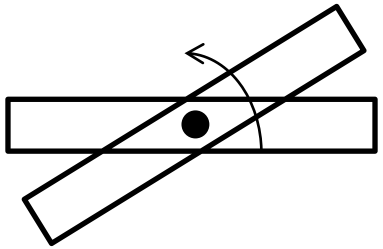
よって、回転トルクは$I \times \pi = \pi/200$ (Nm) = 0.0157 (Nm)

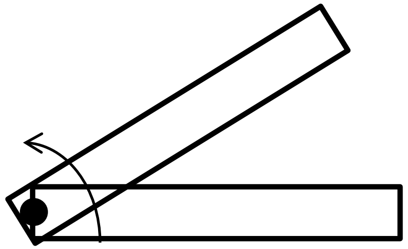
# ロボットアームを動かすために必要な関節トルクは？

**レジュメに記載した慣性モーメントは、重心まわりに回転させる場合であることに注意**

# 慣性モーメントは、回転中心の位置によって異なる

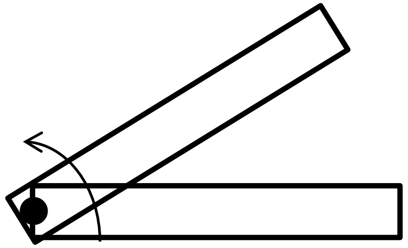
- どちらが回転させやすい？



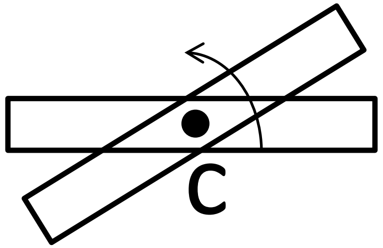


# 平行軸の定理

※質量中心＝重心



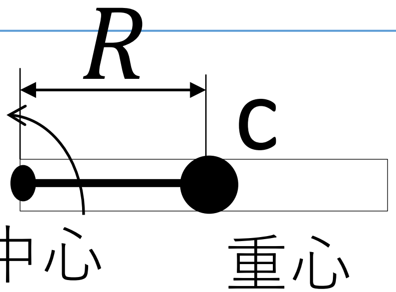
ある固定軸まわりの慣性モーメント$I$は、




$I_c$ ＋ $mR^2$ に等しい。

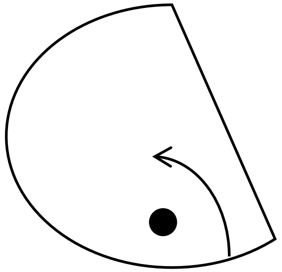
その軸に平行な質量中心Cを通る軸のまわりの慣性モーメント

その剛体の全質量が質量中心Cに集中したと考えたときのその固定軸まわりの慣性モーメント

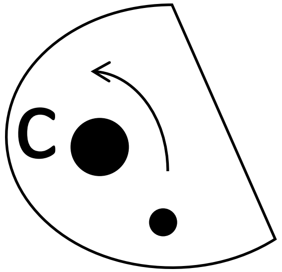



$m$:棒の質量

# 平行軸の定理



ある固定軸まわりの慣性モーメント$I$は、

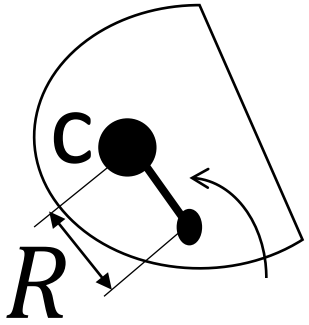



その軸に平行な質量中心Cを通る
軸のまわりの慣性$I_c$

＋

その剛体の全質量が質量中心Cに集中したと考えたときのその固定軸まわりの慣性モーメント

$mR^2$ に等しい。



例題

問１　前頁に掲載している棒の中心まわりのモーメントに平行軸の定理を適用して、棒の端まわりの慣性モーメントを求めよ。

棒の中心まわりの慣性モーメントは　$\dfrac{1}{12}$ × 質量 × 棒の長さ$^2$

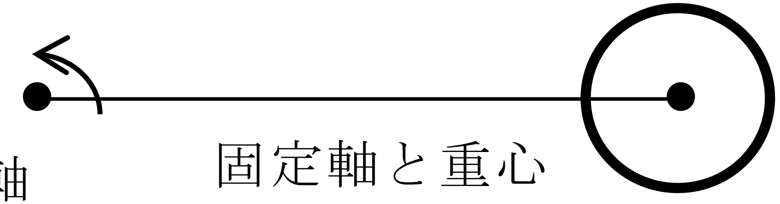
棒の端と棒の中心との距離は　棒の長さ/2 。

よって、棒の端まわりの慣性モーメントは、平行軸の定理より

質量×（棒の長さ/2）$^2$ ＋ $\dfrac{1}{12}$ × 質量 × 棒の長さ$^2$ ＝ $\dfrac{1}{3}$×質量×棒の長さ$^2$

例題

1mの長さの質量のない棒の先に半径10cm、質量 1kgの円板を固定し、図のように一定の回転トルクを加えて、静止状態から2秒後に60 RPMの速度で回転するようにしたい。このとき、必要な回転トルクを求めよ。



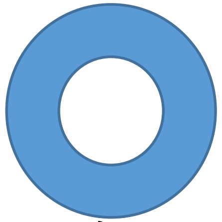

円板の慣性モーメントは Ic = 1/2 × 1 × $0.1^2$ = 0.005 (kgm$^2$)

固定軸周りの慣性モーメントはI = Ic + MR$^2$ = Ic + 1 × $1^2$ = 1.005 (kgm$^2$)

角加速度は 2π/2 = π (rad/s$^2$)

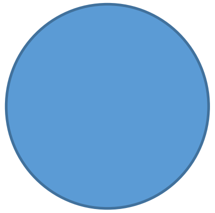
よって、必要回転トルクはI × π = 3.1557 (Nm)

問２　半径Ｒの薄い円板の内部に、半径ｒの円形の穴が空いている。この物体の中心まわりの慣性モーメントを求めよ。この物体の質量はｍとする.



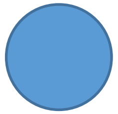
(解)

この穴あき円板の面積は$\pi(R^2-r^2)$なので、穴あき円板と同じ密度、同じ半径で穴が無い円板の質量は、$m\dfrac{R^2}{R^2-r^2}$、慣性モーメントは$\dfrac{1}{2}m\dfrac{R^2}{R^2-r^2}R^2$　①

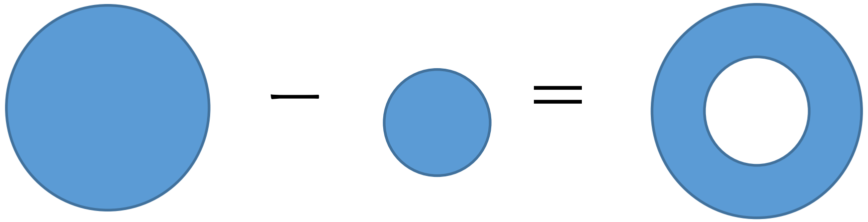


穴と同じ大きさで同じ密度の円板の質量は、$m\dfrac{r^2}{R^2-r^2}$

慣性モーメントは$\dfrac{1}{2}m\dfrac{r^2}{R^2-r^2}r^2$　②



穴あき円板の慣性モーメントは①－②であるので、計算すると答えは$\dfrac{1}{2}m(R^2+r^2)$



**慣性モーメントは、足し算と引き算で計算できる。ただし、回転中心が同じ場所でなければならないことに注意。**

**発展問題**

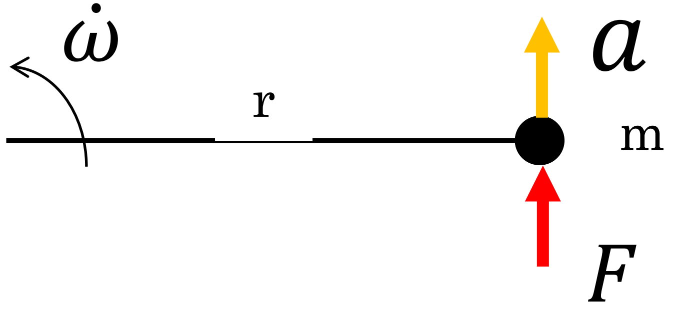
問１　質量の無視できる長さ r の棒の先に質量 m の質点が固定されている。この物体について、質点がついていない側の棒の端まわりの慣性モーメントを求めよ。


$I = Ic + MR^2$

$Ic = 0$ より、　慣性モーメントは　$mr^2$

## 発展問題

問１　質量の無視できる長さ r の棒の先に質量 m の質点が固定されている。この物体について、質点がついていない側の棒の端まわりの慣性モーメントを求めよ。




$$a = r\,\dot{\omega}$$

$$F = ma$$

力 $F$ によって加えられるトルク$T$は、$T = Fr$

慣性モーメントを$I$とすると、

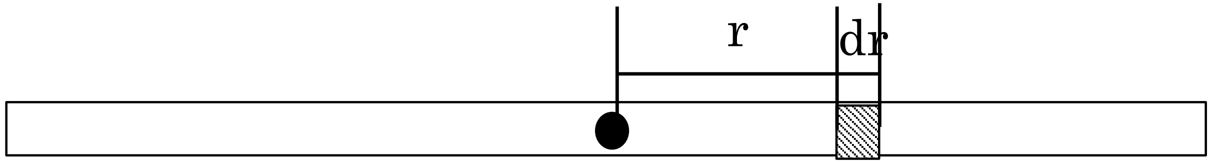
$T = I\dot{\omega}$より、$Fr = I\,\dfrac{a}{r}$

$F$を代入して整理すると、$mar = I\,\dfrac{a}{r}$

$I = mr^2$

問２　棒の中心からの距離が r, 長さ dr, 質量 ρ dr の微小部分の棒の中心まわりの慣性モーメントを求め、棒の中心から先端までを積分することで、棒全体の慣性モーメントを求めよ。棒の長さを L とする。

（ヒント）微小部分の棒の中心まわりの慣性モーメントは ρ $r^2dr$ であるので，中心から棒の端まで積分し，2 倍する。つまり、$2\int_0^{L/2}\rho r^2 dr$を計算する。



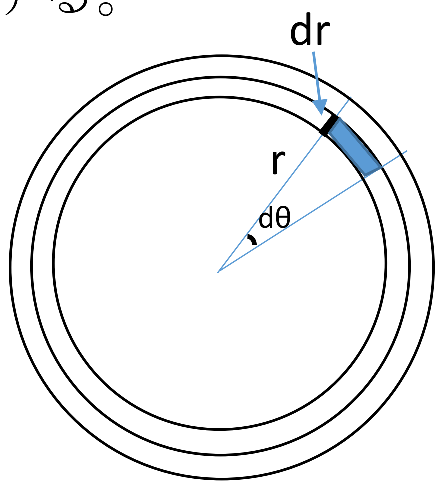

$$2\int_0^{L/2}\rho r^2 dr = 2\rho\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{L/2} = \frac{1}{12}\rho L^3$$

棒の質量を$m$とすると、$m = \rho L$

したがって、慣性モーメントは、$\frac{1}{12}mL^2$となる。

問３　問２を参考に半径 R の円板の中心まわりの慣性モーメントを導出しなさい。

（ヒント）中心からの距離が r, 角度 d θ をなす２本の中心からの放射線に挟まれた微小部分の面積を r dr d θ，質量を ρ r dr d θ とし，この微小部分の慣性モーメントを半径および円周に沿って積分する。




微小部分の面積　　横幅 r dθ　高さ dr の長方形

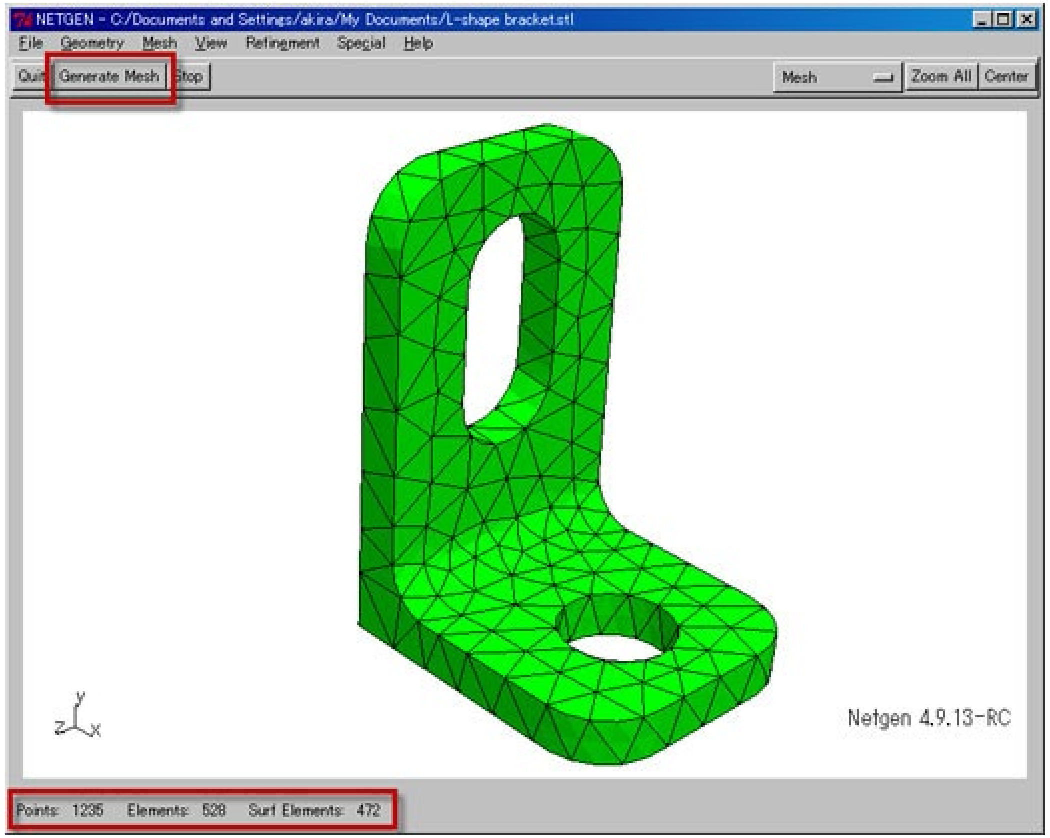
微小部分の質量　　面密度ρ×面積

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\rho r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\rho R^4 d\theta = \left[\frac{1}{4}\rho R^4\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\rho\pi R^4$$

円板の質量を$m$とすると,$m=\rho\pi R^2$より、

慣性モーメントは$\frac{1}{2}mR^2$となる。

複雑な形状の物体の慣性モーメントは、
メッシュモデルなどで数値的に計算できる。



# 3次元物体の場合

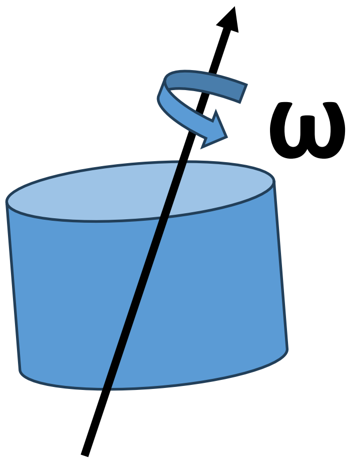
- 角速度、剛体に働く力のモーメントは3x1のベクトルで表す。
- 慣性モーメントは、慣性行列(慣性テンソル)となる。

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

角加速度

剛体に働く力のモーメント

慣性行列



# 演習問題

質量が無視できる半径2 (m)の円板の円周部分に、質量2 (kg)の質点が8個，等間隔に固定されている。この円板の中心まわりの慣性モーメントを求めよ。

# 演習問題

質量が無視できる半径2 (m)の円板の円周部分に、質量2 (kg)の質点が8個，等間隔に固定されている。この円板の中心まわりの慣性モーメントを求めよ。

円板の質量は無視できるので、円板の慣性モーメントは０である。

質点1個の慣性モーメントは、回転中心と質点の距離が2 mであるので、2 kg × 2 m$^2$ = 8 kgm$^2$である。

同じ質点が８個あるので、全体の慣性モーメントは　8 × 8 = 64 kgm$^2$である。