多変量解析

第12回　数量化3類

萩原•篠田
情報理工学部

数量化3類

学生と酒類の特徴づけや分類ができないか？

学生のお酒の好み（○印）

学生	チューハイ	日本酒	ビール
1		○	○
2	○		○
3	○		

↓

相関係数が最大となるように
割り当てた数量（a_i, b_j）を求める

学生	チューハイ b_1	日本酒 b_2	ビール b_3
1 a_1		(a_1, b_2)	(a_1, b_3)
2 a_2	(a_2, b_1)		(a_2, b_3)
3 a_3	(a_3, b_1)		

主成分分析（量的変数） ⟷ 数量化3類（質的変数）

固有値・固有ベクトル →

成分を軸にもつ平面に
酒類（学生）をプロット
↓
類似した酒類（学生）は
近くに分布（＝分類可能）

直感的には並び替え！

学生	チューハイ	ビール	日本酒
1		○	○
2	○	○	
3	○		

keywords
質的変数、主成分分析、相関係数、サンプルスコア、
カテゴリ数量（変数スコア）、固有値、固有ベクトル

数量化3類

各サンプル（被験者）のカテゴリに対する反応を示すデータに基づいて、反応の似たサンプルやカテゴリを分類したり、特性を調べたりする手法

被験者No. ＼ カテゴリ	1	2	3	・・・	j	・・・	m
1		レ			レ		レ
2	レ		レ				
:	:	:	:	:	:	:	:
i					レ		
:	:	:	:	:	:	:	:
n		レ	レ				レ

サンプルに a_i、カテゴリに b_j といった数量を与え、反応の似たサンプルやカテゴリを分類することで特性を調べる

被験者No.	カテゴリ	1	2	3	・・	j	・・	m
		b_1	b_2	b_3		b_j		b_m
1	a_1		1					1
2	a_2	1						
:	:	:	:	:	:	:	:	:
i	a_i					t_{ij}		
:	:	:	:	:	:	:	:	:
n	a_n		1	1				1

a_i：サンプルスコア，b_j：カテゴリ数量

$t_{ij} = 1\ or\ 0$：サンプルiのカテゴリjに対する反応

- $(a_i,\ b_j)$に対する相関係数rが最大になるa_i , b_jを求める
- 得られたa_i , b_jの順にサンプルやカテゴリを並べ替える

（例題）

アンケート調査票

項目1

あなたはチューハイが好きですか

1　はい　　2　いいえ

項目2

あなたは日本酒が好きですか

1　はい　　2　いいえ

項目3

あなたはビールが好きですか

1　はい　　2　いいえ

被験者＼カテゴリ	チューハイ	日本酒	ビール
1		レ	レ
2	レ		レ
3	レ		

被験者＼カテゴリ		1	2	3
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		1	1
2	a_2	1		1
3	a_3	1		

a_i：サンプルスコア, b_j：カテゴリ数量

$t_{ij} = 1\ or\ 0$：サンプルiのカテゴリjに対する反応

- $(a_i,\ b_j)$に対する相関係数rが最大になるa_i , b_jを求める
- 得られたa_i , b_jの順にサンプルやカテゴリを並べ替える

カテゴリ数量とサンプルスコアの求め方

カテゴリ / 被験者		1	2	3
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		1	1
2	a_2	1		1
3	a_3	1		

$N = 5$

（1） 標準化（∵相関係数はデータの標準化に対して不変）

平均値=0

$$\bar{a} = \frac{2a_1 + 2a_2 + a_3}{5} = 0 \qquad \bar{b} = \frac{2b_1 + b_2 + 2b_3}{5} = 0$$

分散=1

$$Var(a) = \frac{2{a_1}^2 + 2{a_2}^2 + {a_3}^2}{5-1} = 1 \qquad Var(b) = \frac{2{b_1}^2 + {b_2}^2 + 2{b_3}^2}{5-1} = 1$$

相関係数=共分散

$$r = Cov(a,b) = \frac{a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_1}{5-1}$$

（2） $Var(a) = 1, Var(b) = 1$の条件のもとで，相関係数 rの最大値を与えるa_i, b_jを求める条件付極値問題　→　ラグランジュの乗数法

$$F = r - \frac{\lambda_a}{2}(Var(a) - 1) - \frac{\lambda_b}{2}(Var(b) - 1)$$

$$= \frac{a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_1}{4} - \frac{\lambda_a}{2}\left(\frac{2{a_1}^2 + 2{a_2}^2 + {a_3}^2}{4} - 1\right) - \frac{\lambda_b}{2}\left(\frac{2{b_1}^2 + {b_2}^2 + 2{b_3}^2}{4} - 1\right)$$

ラグランジュの乗数法（拘束条件が２つ）

$$F=\frac{a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1}{4}-\frac{\lambda_a}{2}\left(\frac{2{a_1}^2+2{a_2}^2+{a_3}^2}{4}-1\right)-\frac{\lambda_b}{2}\left(\frac{2{b_1}^2+{b_2}^2+2{b_3}^2}{4}-1\right)$$

Fの a_i , b_jによる偏微分=0

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=\frac{b_2+b_3-2\lambda_a a_1}{4}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2}=\frac{b_1+b_3-2\lambda_a a_2}{4}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_3}=\frac{b_1-\lambda_a a_3}{4}=0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1}=\frac{a_2+a_3-2\lambda_b b_1}{4}=0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_2}=\frac{a_1-\lambda_b b_2}{4}=0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_3}=\frac{a_1+a_2-2\lambda_b b_3}{4}=0 \quad (6)$$

$(1)\times a_1+(2)\times a_2+(3)\times a_3$として$\lambda_a$でまとめる

$$\frac{a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1}{4}=\lambda_a\left(\frac{2{a_1}^2+2{a_2}^2+{a_3}^2}{4}\right) \quad (7)$$

$(4)\times b_1+(5)\times b_2+(6)\times b_3$として$\lambda_b$でまとめる

$$\frac{a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1}{4}=\lambda_b\left(\frac{2{b_1}^2+{b_2}^2+2{b_3}^2}{4}\right) \quad (8)$$

(7)，(8)より $r=\lambda_a=\lambda_b$

あらためて(1) ～ (6)で $\lambda_a=\lambda_b=\lambda$ とおいて

a_1, a_2, a_3消去

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{b_2+b_3-2\lambda a_1}{4} = 0 \qquad (1) \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = \frac{b_2+b_3}{2\lambda} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = \frac{b_1+b_3-2\lambda a_2}{4} = 0 \qquad (2) \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \frac{b_1+b_3}{2\lambda} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_3} = \frac{b_1-\lambda a_3}{4} = 0 \qquad (3) \qquad \Rightarrow \qquad a_3 = \frac{b_1}{\lambda} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1} = \frac{a_2+a_3-2\lambda b_1}{4} = 0 \qquad (4) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3b_1}{2} + 0b_2 + \frac{b_3}{2} - 2\lambda^2 b_1 = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_2} = \frac{a_1-\lambda b_2}{4} = 0 \qquad (5) \qquad \Rightarrow \qquad 0b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2} - \lambda^2 b_2 = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_3} = \frac{a_1+a_2-2\lambda b_3}{4} = 0 \qquad (6) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{2b_3}{2} - 2\lambda^2 b_3 = 0 \qquad (14)$$

(12), (13), (14)を変形して固有値固有ベクトル問題に

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

固有値は$\lambda^2 = 1$, 0.6545, 0.0955

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6116 \\ -0.7559 \\ -0.2336 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2336 \\ 0.7559 \\ -0.6116 \end{pmatrix}$$

固有値は $\lambda^2 = 1,\ 0.6545,\ 0.0955$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6116 \\ -0.7559 \\ -0.2336 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2336 \\ 0.7559 \\ -0.6116 \end{pmatrix}$

被験者 \ カテゴリ		1	2	3
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		1	1
2	a_2	1		1
3	a_3	1		

固有値 $\lambda^2 = 1$ の固有ベクトルは $b_1 = b_2 = b_3$ で $\bar{b} = 0$ を満たさないため $\lambda^2 = 1$ を除外

(9), (10), (11)よりサンプルスコアを得る

$$a_1 = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{1j} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{1j}}:\ \frac{-0.7559 - 0.2336}{\sqrt{0.6545} \cdot 2} = -0.6116, \qquad \frac{0.7559 - 0.6116}{\sqrt{0.0955} \cdot 2} = 0.2336$$

$$a_2 = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{2j} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{2j}}:\ \frac{0.6116 - 0.2336}{\sqrt{0.6545} \cdot 2} = 0.2336, \qquad \frac{0.2336 - 0.6116}{\sqrt{0.0955} \cdot 2} = -0.6116$$

$$a_3 = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{3j} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{3j}}:\ \frac{0.6116}{\sqrt{0.6545} \cdot 1} = 0.7559, \qquad \frac{0.2336}{\sqrt{0.0955} \cdot 1} = 0.7559$$

		カテゴリ数量1番目	カテゴリ数量2番目
チューハイ	b_1	0.6116	0.2336
日本酒	b_2	-0.7559	0.7559
ビール	b_3	-0.2336	-0.6116

		サンプルスコア1番目	サンプルスコア2番目
1	a_1	-0.6116	0.2336
2	a_2	0.2336	-0.6116
3	a_3	0.7559	0.7559

相関係数，寄与率および累積寄与率

相関係数　$r = Cov(a,b) = \lambda$

寄与率・累積寄与率　寄与率（決定係数）= 相関係数^2

$$\text{成分}m\text{の寄与率} = \frac{{\lambda_m}^2}{\sum_{j=1}^{p} {\lambda_j}^2}$$

$$\text{成分}m\text{までの累積寄与率} = \frac{\sum_{j=1}^{m} {\lambda_j}^2}{\sum_{j=1}^{p} {\lambda_j}^2}$$

（合計 p個の固有値が得られたとして）

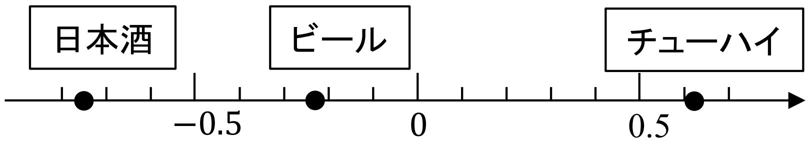
	1番目	2番目
固有値 λ^2	0.6545	0.0955
相関係数 $r = \lambda$	0.8090	0.3090
寄与率	0.8727	0.1273
累積寄与率	0.8727	1.0000

＊1番目の相関係数が0.8090と1に近い

→ b_1 , b_2 , b_3はお酒の好みをよく説明している

＊カテゴリ数量 b_jの大小関係（日本酒＜ビール＜チューハイ）

→ チューハイと日本酒に対する好みが最も離れているとわかる



＊サンプルスコアの大小関係（No.1＜No.2＜No.3）

→ No.1とNo.3が最も離れていることがわかる

		カテゴリ数量 1番目	カテゴリ数量 2番目
チューハイ	b_1	0.6116	0.2336
日本酒	b_2	-0.7559	0.7559
ビール	b_3	-0.2336	-0.6116

		サンプルスコア 1番目	サンプルスコア 2番目
1	a_1	-0.6116	0.2336
2	a_2	0.2336	-0.6116
3	a_3	0.7559	0.7559

カテゴリ数量・サンプルスコアを読む（ a_i , b_j の順に並べ替え）

		サンプルスコア 1番目	サンプルスコア 2番目
1	a_1	-0.6116	0.2336
2	a_2	0.2336	-0.6116
3	a_3	0.7559	0.7559

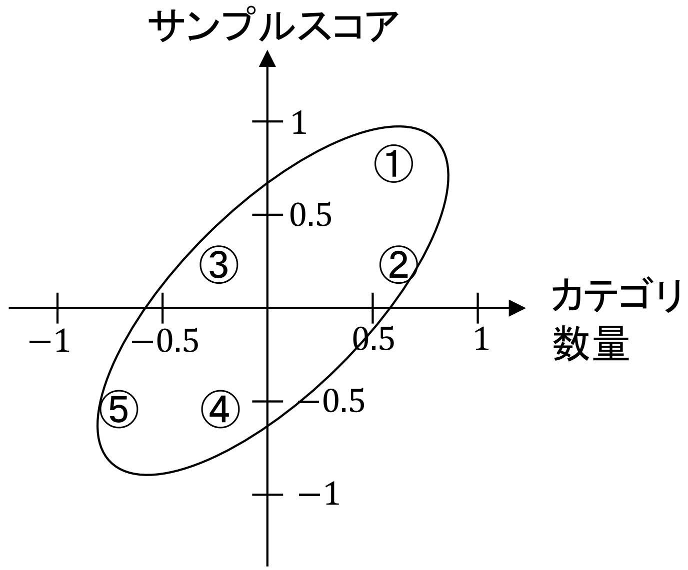
		カテゴリ数量 1番目	カテゴリ数量 2番目
チューハイ	b_1	0.6116	0.2336
日本酒	b_2	-0.7559	0.7559
ビール	b_3	-0.2336	-0.6116

並び替え前

		日本酒	ビール	チューハイ
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		⑤	④
2	a_2	②		③
3	a_3	①		

並び替え後

サンプルスコア ＼ カテゴリ数量		日本酒	ビール	チューハイ
		b_2	b_3	b_1
3	a_3			①
2	a_2		③	②
1	a_1	⑤	④	



数量化3類：反応の似たサンプルスコアとカテゴリ数量の最も良い並べ替え
←→ 相関係数を最大にする

一般解

カテゴリ数量とサンプルスコアの求め方

（1） 標準化（∵相関係数はデータの標準化に対して不変）

平均値=0

（ $N = np$ でも最終結果は同じ）

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij} a_i}{N} = 0 \qquad \bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij} b_j}{N} = 0 \qquad N = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij}$$

分散=1

$$Var(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij} {a_i}^2}{N-1} = 1 \quad Var(b) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij} {b_j}^2}{N-1} = 1$$

相関係数=共分散

$$r = Cov(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij} a_i b_j}{N-1}$$

（2） $Var(a) = 1, Var(b) = 1$ の条件のもとで，相関係数 r の最大値を与える a_i , b_j を求める条件付極値問題 → ラグランジュの乗数法

$$F = r - \frac{\lambda_a}{2}(Var(a) - 1) - \frac{\lambda_b}{2}(Var(b) - 1)$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij} a_i b_j}{N-1} - \frac{\lambda_a}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij} {a_i}^2}{N-1} - 1\right) - \frac{\lambda_b}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij} {b_j}^2}{N-1} - 1\right)$$

一般解

ラグランジュの乗数法（拘束条件が２つ）

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij}a_i b_j}{N-1} - \frac{\lambda_a}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij}{a_i}^2}{N-1} - 1\right) - \frac{\lambda_b}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij}{b_j}^2}{N-1} - 1\right)$$

Fの a_i , b_jによる偏微分=0

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{1j}b_j - \lambda_a a_1 \sum_{j=1}^{p} t_{1j}}{N-1} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{2j}b_j - \lambda_a a_2 \sum_{j=1}^{p} t_{2j}}{N-1} = 0 \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{nj}b_j - \lambda_a a_n \sum_{j=1}^{p} t_{nj}}{N-1} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{i1}a_i - \lambda_b b_1 \sum_{i=1}^{n} t_{i1}}{N-1} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{i2}a_i - \lambda_b b_2 \sum_{i=1}^{n} t_{i2}}{N-1} = 0 \quad (5)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{ip}a_i - \lambda_b b_p \sum_{i=1}^{n} t_{ip}}{N-1} = 0 \quad (6)$$

$(1)\times a_1 + (2)\times a_2 + \cdots + (3)\times a_n$として$\lambda_1$でまとめる

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij}a_i b_j}{N-1} - \lambda_a\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij}{a_i}^2}{N-1}\right) = 0 \quad (7)$$

$(4)\times b_1 + (5)\times b_2 + \cdots + (6)\times b_p$として$\lambda_2$でまとめる

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij}a_i b_j}{N-1} - \lambda_b\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} t_{ij}{b_j}^2}{N-1}\right) = 0 \quad (8)$$

(7)，(8)より $r = \lambda_a = \lambda_b$

あらためて(1)～(6)で $\lambda_a = \lambda_b = \lambda$ とおいて

a_1, a_2, a_3消去

一般解

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{1j} b_j - \lambda a_1 \sum_{j=1}^{p} t_{1j}}{N-1} = 0 \quad (1) \Rightarrow a_1 = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{1j} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{1j}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{2j} b_j - \lambda a_2 \sum_{j=1}^{p} t_{2j}}{N-1} = 0 \quad (2) \Rightarrow a_2 = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{2j} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{2j}} \quad (10)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{nj} b_j - \lambda a_n \sum_{j=1}^{p} t_{nj}}{N-1} = 0 \quad (3) \Rightarrow a_n = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{nj} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{nj}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{i1} a_i - \lambda b_1 \sum_{i=1}^{n} t_{i1}}{N-1} = 0 \quad (4) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{i1} \sum_{k=1}^{p} t_{ik} b_k}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) - \lambda^2 b_1 \sum_{i=1}^{n} t_{i1} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{i2} a_i - \lambda b_2 \sum_{i=1}^{n} t_{i2}}{N-1} = 0 \quad (5) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{i2} \sum_{k=1}^{p} t_{ik} b_k}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) - \lambda^2 b_2 \sum_{i=1}^{n} t_{i2} = 0 \quad (13)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{ip} a_i - \lambda p \sum_{i=1}^{n} t_{ip}}{N-1} = 0 \quad (6) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{ip} \sum_{k=1}^{p} t_{ik} b_k}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) - \lambda^2 b_p \sum_{i=1}^{n} t_{ip} = 0 \quad (14)$$

(12), (13), (14)を変形して $p \times p$ の固有値固有ベクトル問題に

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{{t_{i1}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{i1} t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{i1} t_{ip}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_p = \lambda^2 b_1 \sum_{i=1}^{n} t_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{i2} t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{{t_{i2}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{i2} t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_2 = \lambda^2 b_2 \sum_{i=1}^{n} t_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{ip} t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_{ip} t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{{t_{ip}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}} \right) b_p = \lambda^2 b_p \sum_{i=1}^{n} t_{ip} \end{cases}$$

例題は3×3の固有値固有ベクトル問題

一般解

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{t_{i1}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}t_{i3}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_3 = \lambda^2 b_1 \sum_{i=1}^{n} t_{i1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{t_{i2}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}t_{i3}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_3 = \lambda^2 b_2 \sum_{i=1}^{n} t_{i2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{t_{i3}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right) b_3 = \lambda^2 b_3 \sum_{i=1}^{n} t_{i3}$$

被験者 ＼ カテゴリ		1	2	3
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		1	1
2	a_2	1		1
3	a_3	1		

$$\begin{cases} \frac{3}{2}b_1 + 0b_2 + \frac{1}{2}b_3 = \lambda^2 b_1 2 \\ 0b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 = \lambda^2 b_2 1 \\ \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{2}{2}b_3 = \lambda^2 b_3 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

固有値は$\lambda^2 = 1$, 0.6545, 0.0955

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6116 \\ -0.7559 \\ -0.2336 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2336 \\ 0.7559 \\ -0.6116 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda^2 = 1$ の固有ベクトルは $b_1 = b_2 = b_3$ で $\bar{b} = 0$ を満たさないため $\lambda^2 = 1$ を除外

		カテゴリ数量1番目	カテゴリ数量2番目
チューハイ	b_1	0.6116	0.2336
日本酒	b_2	-0.7559	0.7559
ビール	b_3	-0.2336	-0.6116

		サンプルスコア1番目	サンプルスコア2番目
1	a_1	-0.6116	0.2336
2	a_2	0.2336	-0.6116
3	a_3	0.7559	0.7559

(9), (10), (11)よりサンプルスコアを得る

$$a_1 = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{1j} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{1j}}:\ \frac{-0.7559 - 0.2336}{\sqrt{0.6545}\cdot 2} = -0.6116, \frac{0.7559 - 0.6116}{\sqrt{0.0955}\cdot 2} = 0.2336$$

$$a_2 = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{2j} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{2j}}:\ \frac{0.6116 - 0.2336}{\sqrt{0.6545}\cdot 2} = 0.2336, \frac{0.2336 - 0.6116}{\sqrt{0.0955}\cdot 2} = -0.6116$$

$$a_3 = \frac{\sum_{j=1}^{p} t_{3j} b_j}{\lambda \sum_{j=1}^{p} t_{3j}}:\ \frac{0.6116}{\sqrt{0.6545}\cdot 1} = 0.7559, \frac{0.2336}{\sqrt{0.0955}\cdot 1} = 0.7559$$

例題は3×3の固有値固有ベクトル問題

一般解

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}{}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}t_{i3}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_1\sum_{i=1}^{n} t_{i1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}{}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}t_{i3}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_2\sum_{i=1}^{n} t_{i2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}{}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_3\sum_{i=1}^{n} t_{i3}$$

被験者 ＼ カテゴリ		1	2	3
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		1	1
2	a_2	1		1
3	a_3	1		

$$\begin{cases}\frac{3}{2}b_1+0b_2+\frac{1}{2}b_3=\lambda^2 b_1 2\\ 0b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{2}b_3=\lambda^2 b_2 1\\ \frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{2}{2}b_3=\lambda^2 b_3 2\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\lambda^2\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

固有値は$\lambda^2=1$, 0.6545, 0.0955

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5774\\ 0.5774\\ 0.5774\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.6116\\ -0.7559\\ -0.2336\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.2336\\ 0.7559\\ -0.6116\end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda^2=1$ の固有ベクトルは $b_1=b_2=b_3$ で $\bar{b}=0$ を満たさないため $\lambda^2=1$ を除外

		カテゴリ数量 1番目	カテゴリ数量 2番目
チューハイ	b_1	0.6116	0.2336
日本酒	b_2	-0.7559	0.7559
ビール	b_3	-0.2336	-0.6116

		サンプルスコア 1番目	サンプルスコア 2番目
1	a_1	-0.6116	0.2336
2	a_2	0.2336	-0.6116
3	a_3	0.7559	0.7559

(9), (10), (11)よりサンプルスコアを得る

$$a_1=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{1j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{1j}}:\ \frac{-0.7559-0.2336}{\sqrt{0.6545}\cdot 2}=-0.6116,\frac{0.7559-0.6116}{\sqrt{0.0955}\cdot 2}=0.2336$$

$$a_2=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{2j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{2j}}:\ \frac{0.6116-0.2336}{\sqrt{0.6545}\cdot 2}=0.2336,\frac{0.2336-0.6116}{\sqrt{0.0955}\cdot 2}=-0.6116$$

$$a_3=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{3j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{3j}}:\ \frac{0.6116}{\sqrt{0.6545}\cdot 1}=0.7559,\frac{0.2336}{\sqrt{0.0955}\cdot 1}=0.7559$$

例題は3×3の固有値固有ベクトル問題

一般解

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{t_{i1}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}t_{i3}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_1\sum_{i=1}^{n} t_{i1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{t_{i2}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}t_{i3}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_2\sum_{i=1}^{n} t_{i2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{t_{i3}}^2}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_3\sum_{i=1}^{n} t_{i3}$$

カテゴリ / 被験者		1	2	3
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		1	1
2	a_2	1		1
3	a_3	1		

$$\begin{cases}\frac{3}{2}b_1+0b_2+\frac{1}{2}b_3=\lambda^2 b_1 2\\ 0b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{2}b_3=\lambda^2 b_2 1\\ \frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{2}{2}b_3=\lambda^2 b_3 2\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\lambda^2\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

固有値は$\lambda^2=1$, 0.6545, 0.0955

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5774\\ 0.5774\\ 0.5774\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.6116\\ -0.7559\\ -0.2336\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.2336\\ 0.7559\\ -0.6116\end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda^2=1$ の固有ベクトルは $b_1=b_2=b_3$ で $\bar{b}=0$ を満たさないため $\lambda^2=1$ を除外

		カテゴリ数量 1番目	カテゴリ数量 2番目
チューハイ	b_1	0.6116	0.2336
日本酒	b_2	-0.7559	0.7559
ビール	b_3	-0.2336	-0.6116

		サンプルスコア 1番目	サンプルスコア 2番目
1	a_1	-0.6116	0.2336
2	a_2	0.2336	-0.6116
3	a_3	0.7559	0.7559

(9), (10), (11)よりサンプルスコアを得る

$$a_1=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{1j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{1j}}:\ \frac{-0.7559-0.2336}{\sqrt{0.6545}\cdot 2}=-0.6116,\frac{0.7559-0.6116}{\sqrt{0.0955}\cdot 2}=0.2336$$

$$a_2=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{2j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{2j}}:\ \frac{0.6116-0.2336}{\sqrt{0.6545}\cdot 2}=0.2336,\frac{0.2336-0.6116}{\sqrt{0.0955}\cdot 2}=-0.6116$$

$$a_3=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{3j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{3j}}:\ \frac{0.6116}{\sqrt{0.6545}\cdot 1}=0.7559,\frac{0.2336}{\sqrt{0.0955}\cdot 1}=0.7559$$

例題は3×3の固有値固有ベクトル問題

一般解

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}{}^{2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i1}t_{i3}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_1\sum_{i=1}^{n} t_{i1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}{}^{2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i2}t_{i3}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_2\sum_{i=1}^{n} t_{i2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}t_{i1}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}t_{i2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{i3}{}^{2}}{\sum_{k=1}^{p} t_{ik}}\right)b_3=\lambda^2 b_3\sum_{i=1}^{n} t_{i3}$$

被験者 \ カテゴリ		1	2	3
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		1	1
2	a_2	1		1
3	a_3	1		

$$\begin{cases} \frac{3}{2}b_1+0b_2+\frac{1}{2}b_3=\lambda^2 b_1 \mathbf{2} \\ 0b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{2}b_3=\lambda^2 b_2 1 \\ \frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{2}{2}b_3=\lambda^2 b_3 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\lambda^2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

固有値は$\lambda^2=1,\ 0.6545,\ 0.0955$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0.6116 \\ -0.7559 \\ -0.2336 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0.2336 \\ 0.7559 \\ -0.6116 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda^2=1$ の固有ベクトルは $b_1=b_2=b_3$ で $\bar{b}=0$ を満たさないため $\lambda^2=1$ を除外

		カテゴリ数量 1番目	カテゴリ数量 2番目
チューハイ	b_1	0.6116	0.2336
日本酒	b_2	-0.7559	0.7559
ビール	b_3	-0.2336	-0.6116

		サンプルスコア 1番目	サンプルスコア 2番目
1	a_1	-0.6116	0.2336
2	a_2	0.2336	-0.6116
3	a_3	0.7559	0.7559

(9), (10), (11)よりサンプルスコアを得る

$$a_1=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{1j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{1j}}:\ \frac{-0.7559-0.2336}{\sqrt{0.6545}\cdot 2}=-0.6116,\frac{0.7559-0.6116}{\sqrt{0.0955}\cdot 2}=0.2336$$

$$a_2=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{2j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{2j}}:\ \frac{0.6116-0.2336}{\sqrt{0.6545}\cdot 2}=0.2336,\frac{0.2336-0.6116}{\sqrt{0.0955}\cdot 2}=-0.6116$$

$$a_3=\frac{\sum_{j=1}^{p} t_{3j}b_j}{\lambda\sum_{j=1}^{p} t_{3j}}:\ \frac{0.6116}{\sqrt{0.6545}\cdot 1}=0.7559,\frac{0.2336}{\sqrt{0.0955}\cdot 1}=0.7559$$

数量化3類

① 数量化3類とは何か

② 被験者に a_i(サンプルスコア)、カテゴリに b_j (カテゴリ数量)という数量を与え、反応の似た被験者やカテゴリを分類したり、特性を調べたりするとき、数量化3類ではどのような考え方の下で a_i , b_jを求めるのか述べよ

③ アンケート調査で下記のデータを得た
カテゴリ数量とサンプルスコアの求め方を述べよ

アンケート調査票

項目1
あなたはチューハイが好きですか
　1　はい　　2　いいえ

項目2
あなたは日本酒が好きですか
　1　はい　　2　いいえ

項目3
あなたはビールが好きですか
　1　はい　　2　いいえ

被験者No. ＼ カテゴリ	チューハイ	日本酒	ビール
1		レ	レ
2	レ		レ
3	レ		

被験者No. ＼ カテゴリ		1	2	3
		b_1	b_2	b_3
1	a_1		1	1
2	a_2	1		1
3	a_3	1		