デジタル信号処理（K3）第4回 フーリエ変換1

2022年5月2日

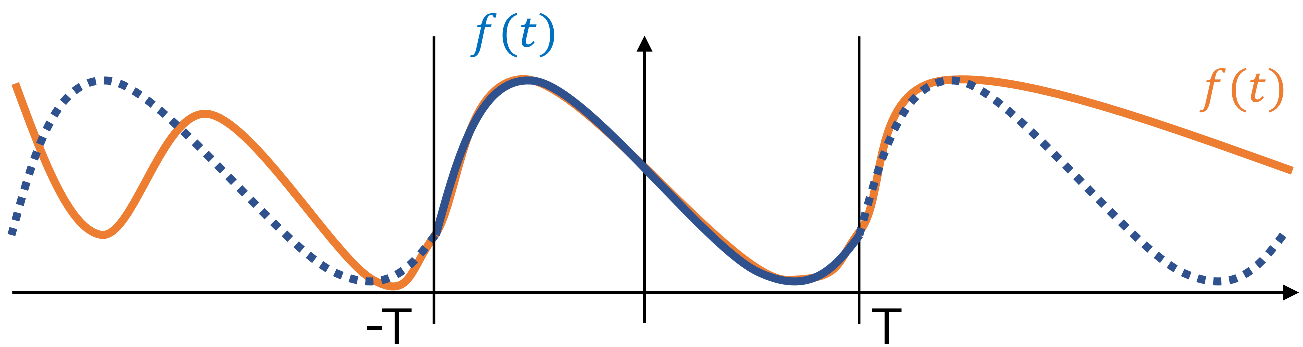
立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

フーリエ級数からフーリエ変換へ

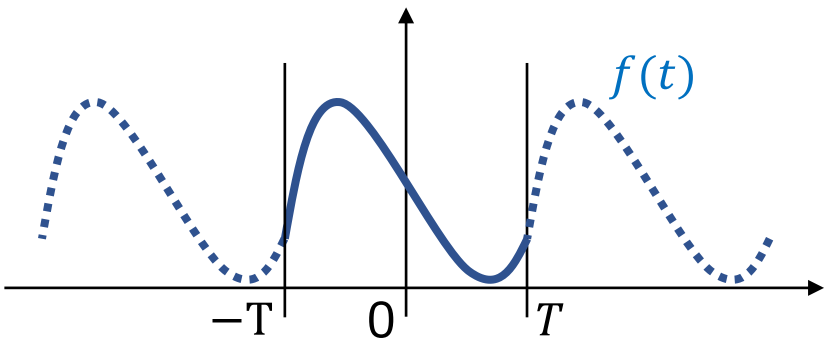
- フーリエ級数展開は周期関数に対する解析手段として利用できる
- 一方，画像・音などの信号を周期関数としてモデル化することは必ずしも適切でない



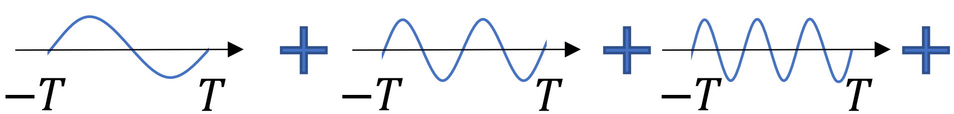
- フーリエ変換は非周期関数に対する解析手段であり，非周期関数を周期が無限大の関数と見なすことで導出される

周期関数と非周期関数

前回まで考えてきた周期信号



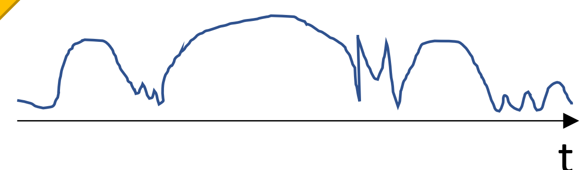
周期的な三角関数の足し合わせ
（フーリエ級数展開）



$T \to \infty$

現実世界の（音・画像などの）信号

明るさを
プロット



※画像の場合、画像内の軸 x や y は空間軸だが、
伝統的に、**時間軸と呼ぶ**

周波数解析
（フーリエ変換）

（復習）フーリエ級数展開

- 周期 $2T$ の関数 $f(t)$ の(複素)フーリエ級数展開は直交関数系 $\left\{e^{i\frac{k\pi}{T}t}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ による展開であり，

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{T}t}$$

と表される.

ここで，フーリエ係数 c_k は以下の式で計算される：

$$c_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\tau)e^{-i\frac{k\pi}{T}\tau}d\tau \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

（注: 次ページの式展開のために，積分変数を τ に変更した）

フーリエ級数展開からフーリエ積分へ 1/2

- 周期を無限大にする，すなわち $T \to \infty$ とするときにフーリエ級数展開がどうなるかを考える
- まず，フーリエ係数を級数展開の式に代入して整理する.

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^{T} f(\tau) e^{-i\frac{k\pi}{T}\tau} d\tau \right\} e^{i\frac{k\pi}{T}t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{T} \left\{ \int_{-T}^{T} f(\tau) e^{-ik\frac{\pi}{T}\tau} d\tau \right\} e^{ik\frac{\pi}{T}t}$$

$\Delta\omega = \dfrac{\pi}{T}$ と置く

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \left\{ \int_{-T}^{T} f(\tau) e^{-ik\Delta\omega\tau} d\tau \right\} e^{ik\Delta\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{T}^{T} f(\tau) e^{-ik\Delta\omega} d\tau \right\} e^{-ik\Delta\omega} \Delta\omega$$

フーリエ級数展開からフーリエ積分へ 2/2

- 前ページ最後の式で，$T \to \infty$ のとき $\Delta\omega = \pi/T \to 0$ であることに注意すると，定積分の定義から，

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{T}^{T} f(\tau) e^{-ik\Delta\omega} d\tau \right\} e^{-ik\Delta\omega} \Delta\omega \qquad (\Delta\omega \to 0)$$

$$\to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} e^{i\omega t} d\omega \qquad (T \to \infty)$$

この式は**フーリエ(重)積分**と呼ばれる

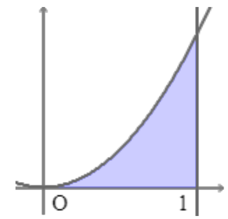
(注: $k\Delta\omega$ がω に, $\Delta\omega$ が $d\omega$ に置き換わっている)

- なお，この導出はやや直観的な議論であり，フーリエ積分が収束するかどうか，また，元の関数 $f(t)$ と一致するかどうかについては別途検証する必要があるが、ここでは省略する

補足：区分求積（定積分の基礎）

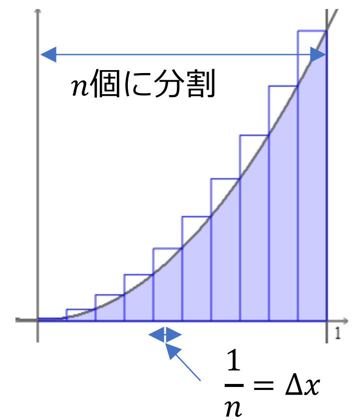
- 定積分（面積）を求めることを考える。

$$S = \int_0^1 f(x)dx$$



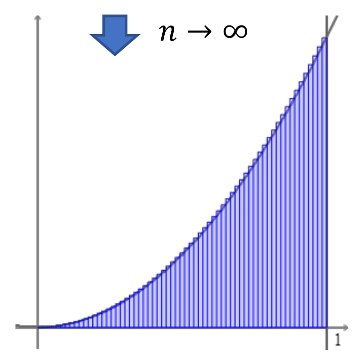
- まず、n個の区間に区切って、その長方形の和を求める（区分求積）

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}}_{k\text{番目の長方形の面積}}$$



  - 分割数を無限 ($n \to \infty$) にすると、

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$$



  - $\Delta x = \frac{1}{n}$ としても同様の式となる。

$$S = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^1 f(x)dx$$

フーリエ積分公式とフーリエ変換

- フーリエ級数展開の周期を無限大にすることで，

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right\}} e^{i\omega t}d\omega$$

が得られた．この式はフーリエ積分公式と呼ばれる．

- フーリエ積分に含まれる青下線部分を取り出した，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

（注: 積分変数を t に変更している）

を $f(t)$ のフーリエ変換と呼ぶ．（この式のように，フーリエ変換後の関数を元の関数の大文字で表すことが多い）

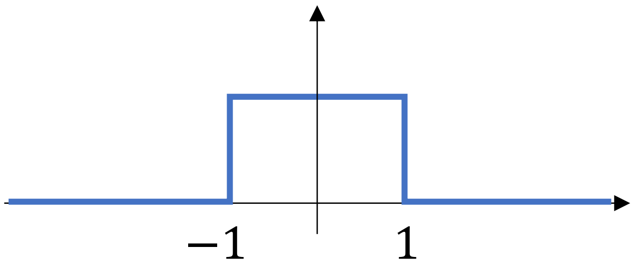
- $F(\omega)$ を用いると，フーリエ積分公式は

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

と書ける

例題を解いてみよう！

- 関数 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$ のフーリエ変換を求めよ.



フーリエ級数展開とフーリエ積分公式の比較

- フーリエ級数展開 $f(t) \sim \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{T}t}$ は,

  離散的に存在する関数系 $\left\{e^{i\frac{k\pi}{T}t}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を

  c_k で重み付けした和で周期関数が近似できることを意味

- 一方，フーリエ積分公式 $f(t) \sim \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ は,

  連続的に存在する関数系 $\left\{e^{i\omega t} \,\middle|\, -\infty < \omega < \infty\right\}$ を

  $\dfrac{1}{2\pi}F(\omega)$ で重み付けした積分(≈和)で非周期関数を含む

  一般の関数が近似できることを意味

フーリエ変換 $F(\omega)$ はフーリエ係数 c_k に対応

フーリエの積分定理

- 関数 $f(t)$ が以下の2条件を満たすとする.

  条件1: $f(t)$ が $-\infty < t < \infty$ で絶対可積分: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

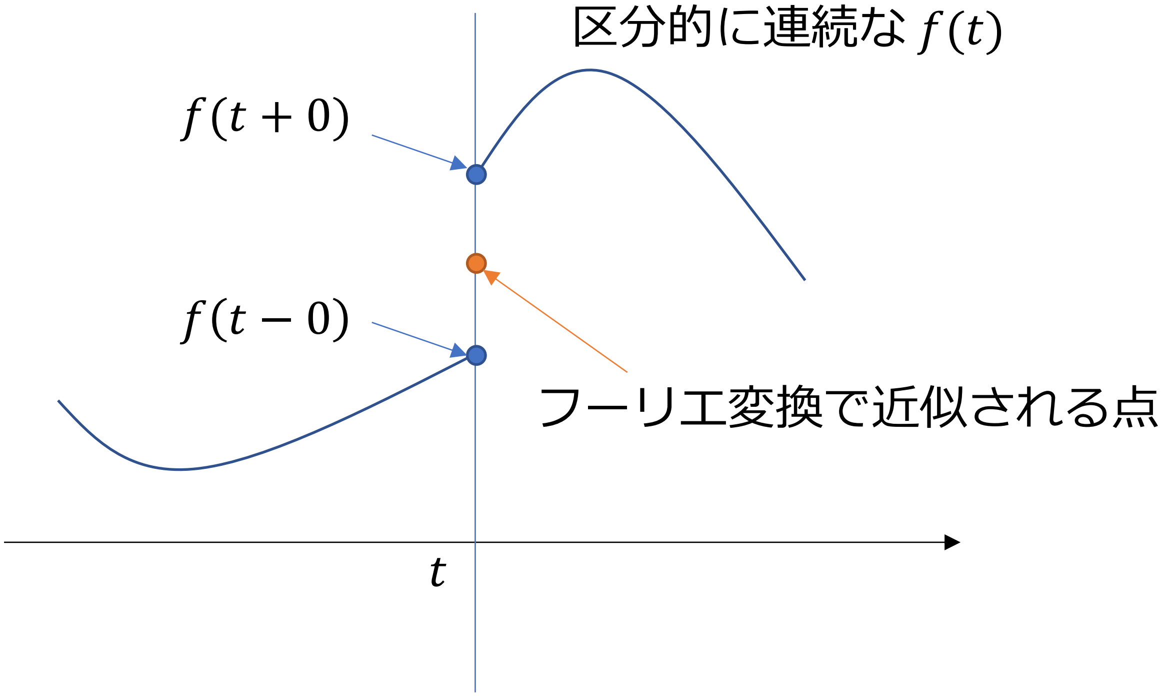
  条件2: 実直線上 $-\infty < t < \infty$ で, $f(t)$ と
  その1階微分 $f'(t)$ が区分的に連続
  (有限個であれば微分不可能な点があってもよい)

- このとき，任意の点 $t \in (-\infty, \infty)$ で

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right\}e^{i\omega t}d\omega$$

が成立する．これをフーリエの積分定理と呼ぶ.

フーリエの積分定理：図解



フーリエの積分定理に関する注意

- もし t で f が連続ならば，左極限 $f(t-0)$ と右極限 $f(t+0)$ は $f(t)$ に一致する．すなわち，フーリエの積分定理は f の連続点においては

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right\}e^{i\omega t}d\omega$$

となる．すなわち，
連続点ではフーリエ積分は元の関数値と一致する．

フーリエ変換とフーリエ逆変換

- 今後は，簡単のため，$f(t)$ の不連続点においては，関数値を $f(t)=\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ と再定義していることにする.
- このとき，フーリエ変換 $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ を

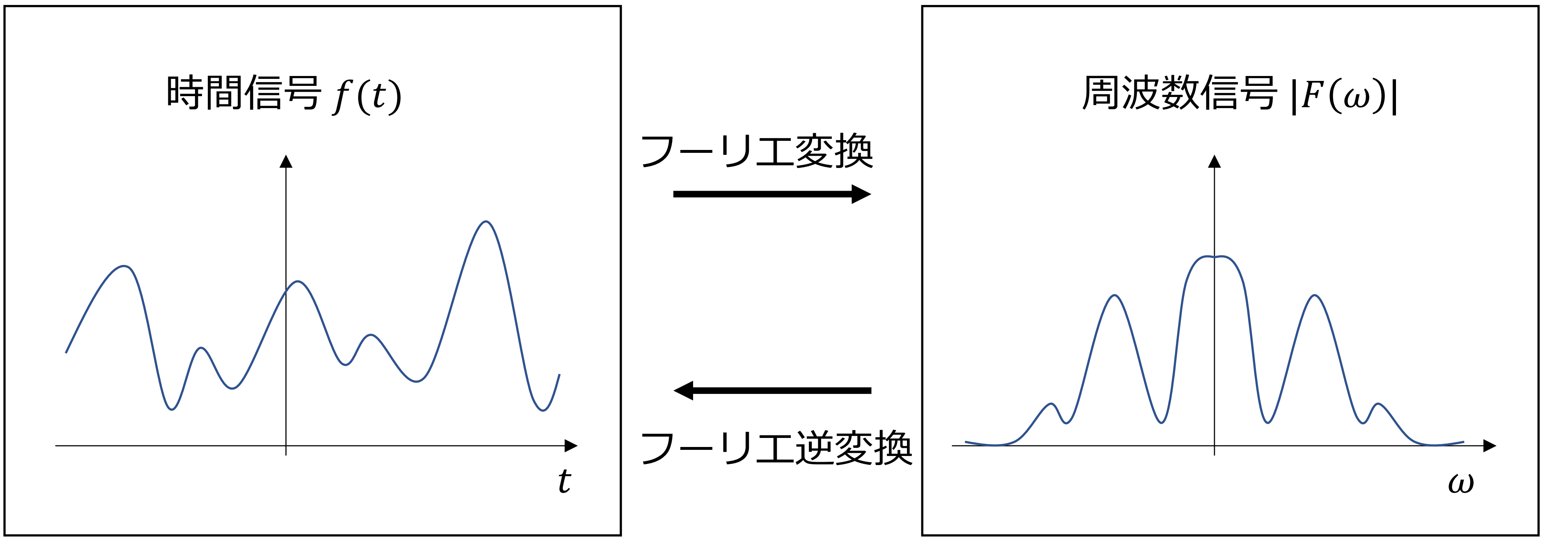
  フーリエ積分に代入すれば，フーリエの積分公式から

  $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ が成立する.

  この式を $F(\omega)$のフーリエ逆変換と呼ぶ

- つまり，$f(t)$ をフーリエ変換した $F(\omega)$ をフーリエ逆変換すると元の関数 $f(t)$に戻る.

フーリエ変換・逆変換：図解



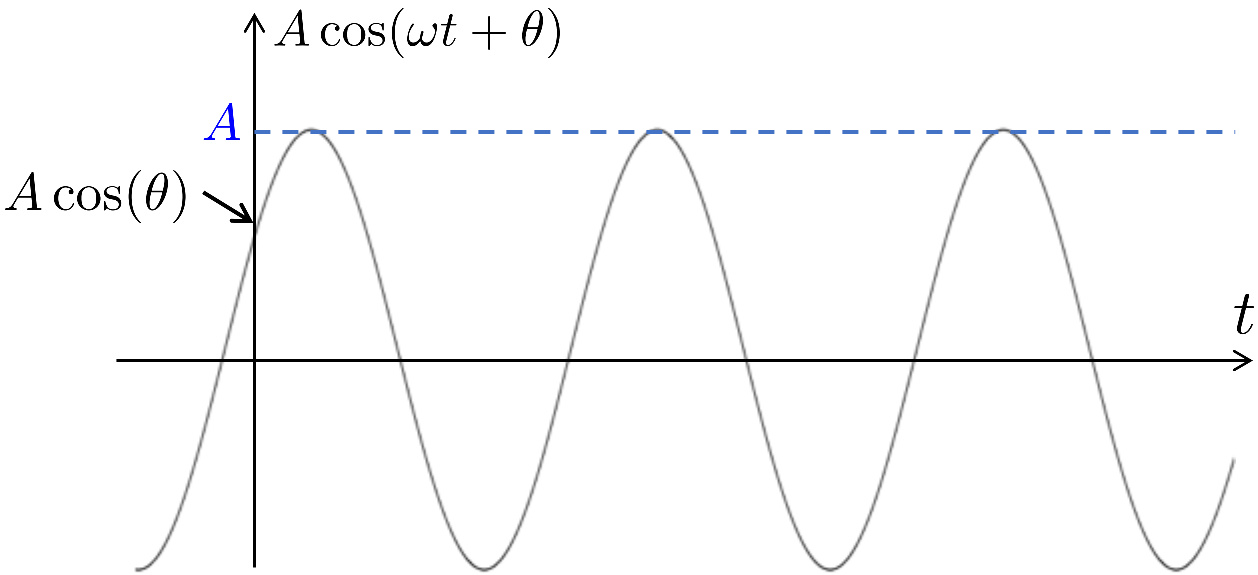
とある時間 t に、どれくらいの
強さの信号があるかが分かる

全区間において、
とある周波数 ω の成分が
どのように含まれているかが分かる

次に，フーリエ変換の意味を
より詳しく考えてみよう！

正弦波の振幅と位相

- $A\cos(\omega t+\theta)$ や $Ae^{i(\omega t+\theta)}$ は，時間 t に関する (実 or 複素)の正弦波を表している（$A \geq 0$としてー般性を失わない）
- ここで，A は振幅，ω は(角)周波数，θ は(初期)位相と呼ばれ，それぞれ振動の強度，速さ，$t=0$ での位置に対応する．



- 実は，フーリエ変換は振幅と位相の情報を持っている．
このことを調べていこう．

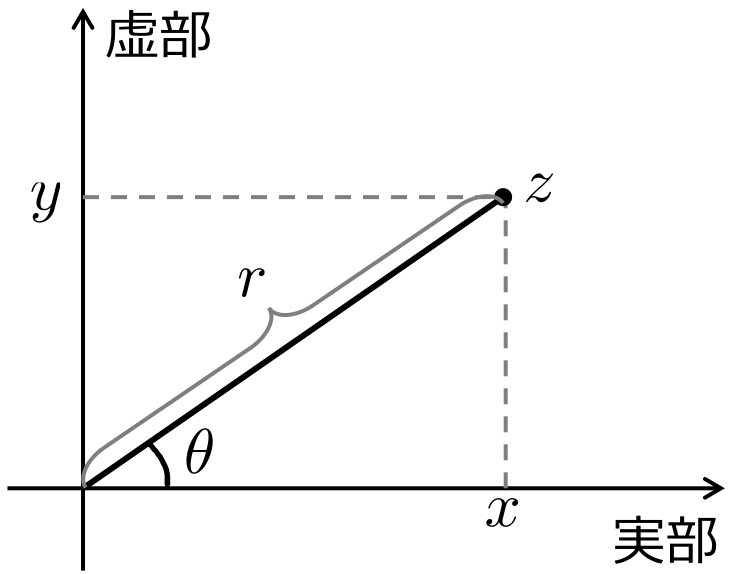
（補足）複素数の極形式

- 複素数 $z = x + iy$ は，複素平面の点として表せる

- よって，右図のように r, θ を定めると，

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

となる．(最後の変形はオイラーの公式による)



(注: 数式で表すと，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$．また，θ は $\cos\theta = x/r, \sin\theta = y/r$ を満たす角度で 2π の整数倍の任意性が含まれる）

- この $z = re^{i\theta}$ が複素数の極形式である．

なお，$r = |z|$ である．また，θ を z の偏角と呼び，$\theta = \arg z$ と書く．

複素フーリエ係数の意味

- 複素フーリエ係数を $c_k = A_k e^{i\theta_k} \quad (A_k = |c_k|,\ \theta_k = \arg c_k)$ と極形式で表して級数展開の式に代入すると,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\theta_k} e^{i\frac{k\pi}{T}t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\left(\frac{k\pi}{T}t+\theta_k\right)}$$ となる.

- 最後の式から，フーリエ級数展開では，周波数 $k\pi/T$ の正弦波の振幅を A_k，位相を θ_k として，$k = -\infty, \ldots, \infty$ の範囲で足し合わせていることが分かる

- このことから，複素フーリエ係数の絶対値 $|c_k| = A_k$ を振幅，偏角 $\arg c_k = \theta_k$ を位相と呼ぶ

フーリエ変換の意味 1/2

- フーリエ変換では, $F(\omega)$ の絶対値と偏角が周波数 ω の正弦波の振幅と位相に対応する

- $$F(\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)} \quad (A(\omega) = |F(\omega)|,\ \theta(\omega) = \arg F(\omega))$$

  と極形式で表現して逆変換の式に代入すると,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{i\theta(\omega)}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{i(\omega t+\theta(\omega))}d\omega \end{aligned}$$

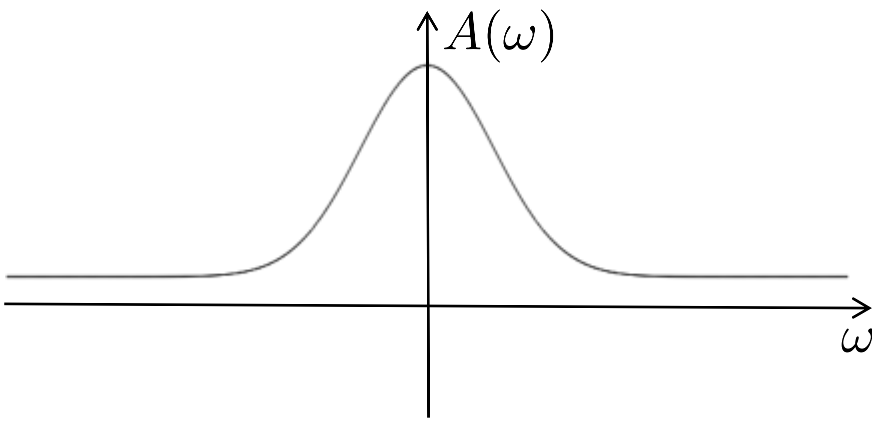
となる.

- 最後の式から，フーリエ逆変換では，周波数 ω の正弦波の振幅を $A(\omega)$，位相を $\theta(\omega)$ として，ω に関する積分で連続的に足し合わせていることが分かる

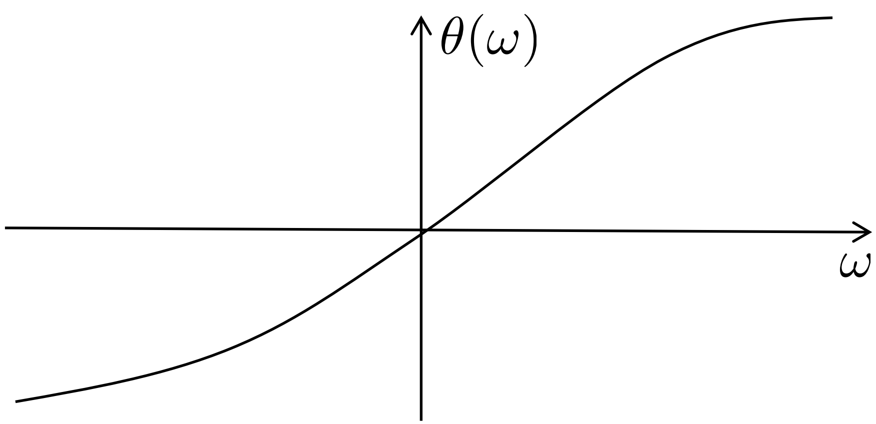
フーリエ変換の意味 2/2

- フーリエ変換 $F(\omega)$ により，元の関数 $f(t)$ に含まれる周波数 ω ごとの波の強度・位相が分かる
- フーリエ級数が離散的な周波数成分を調べるのに対し，フーリエ変換は連続的な周波数成分を調べる
- $F(\omega)$ をスペクトルと呼ぶこともある.（分光器との類似性から）
  特に, $F(\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)}$ としたときの
  $A(\omega)$ を振幅スペクトル, $\theta(\omega)$ を位相スペクトルと呼ぶ.

周波数ごとの振幅を表示

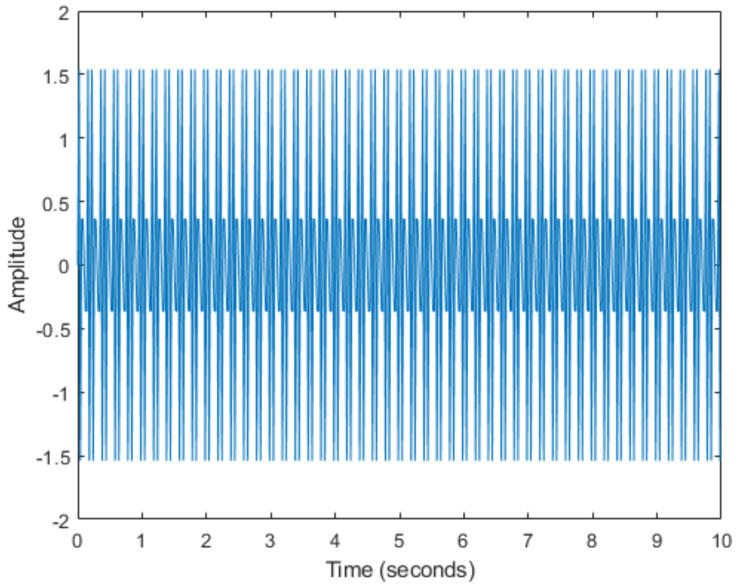


周波数ごとの位相を表示



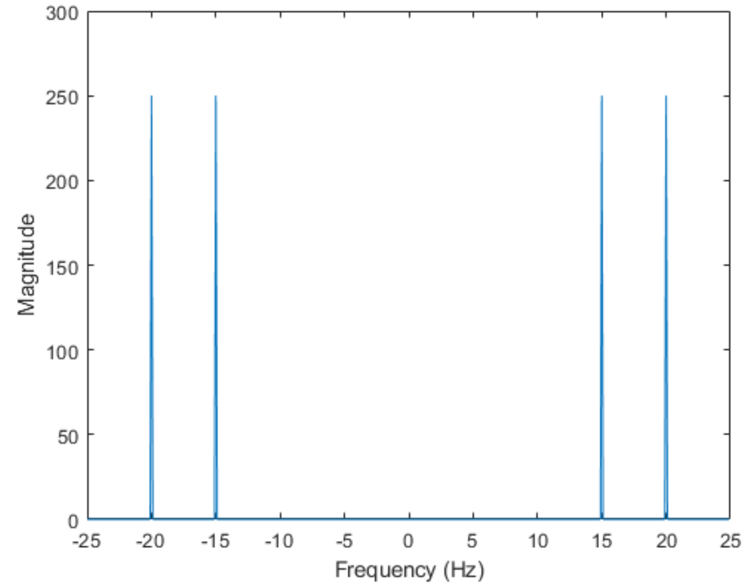
単純な例

元信号
$f(t)$



フーリエ変換

振幅スペクトラム
$A(\omega)$

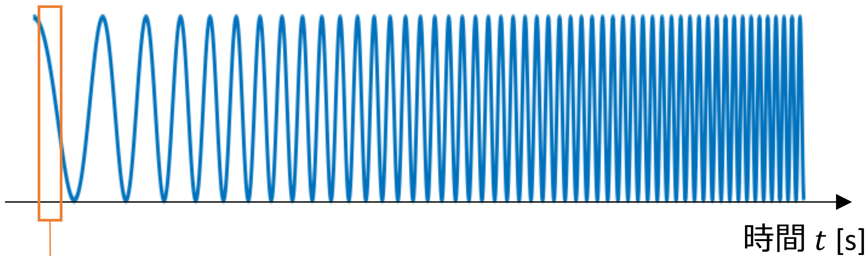


- フーリエ変換すると、
  元の信号には 15 Hz と 20 Hz の成分が含まれていることが分かる

理解度確認テスト

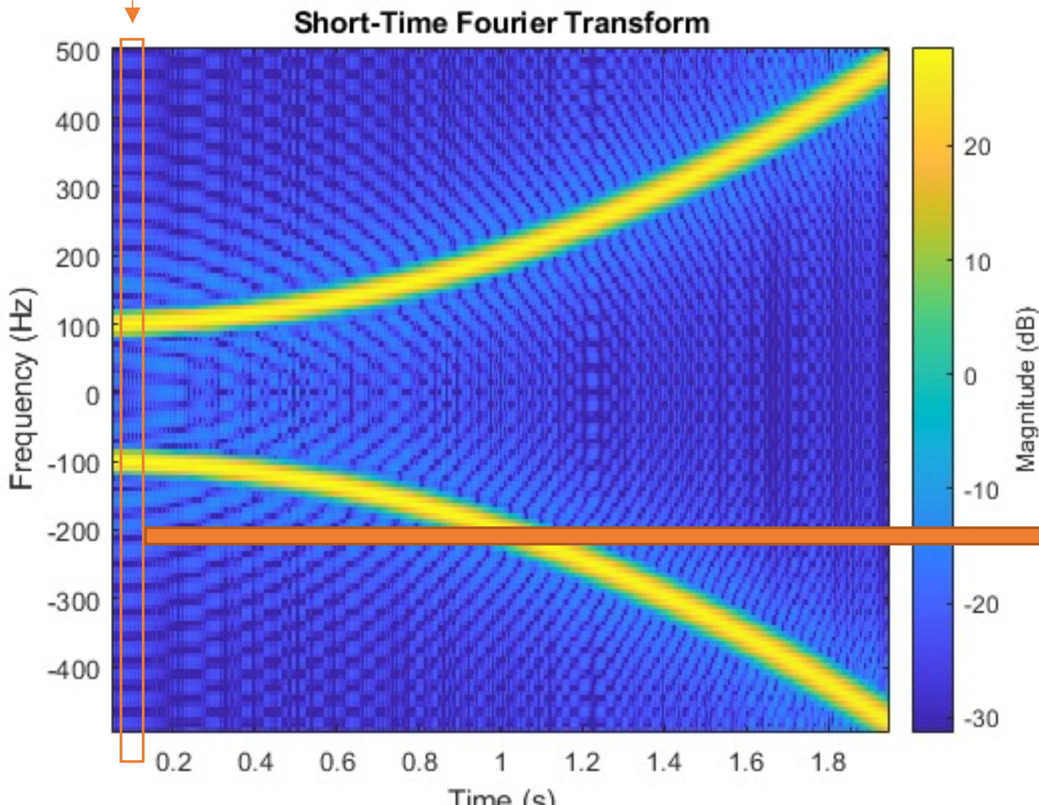
manaba +R にログインして，理解度確認小テストを行います。
制限時間は 10分間 です。

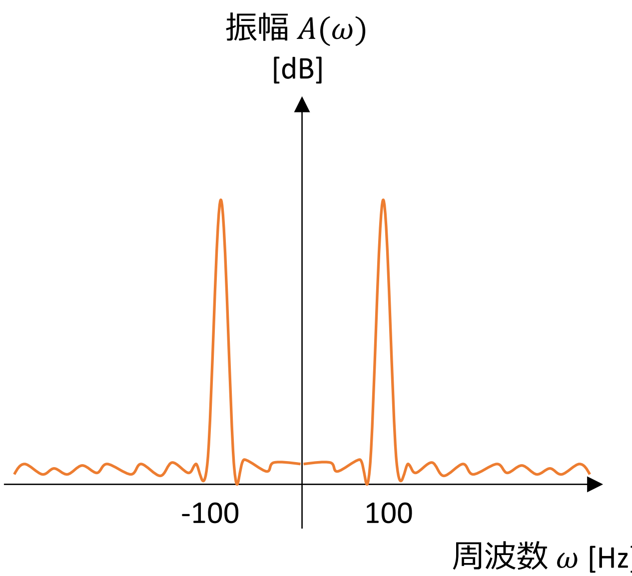
応用例: スペクトログラム



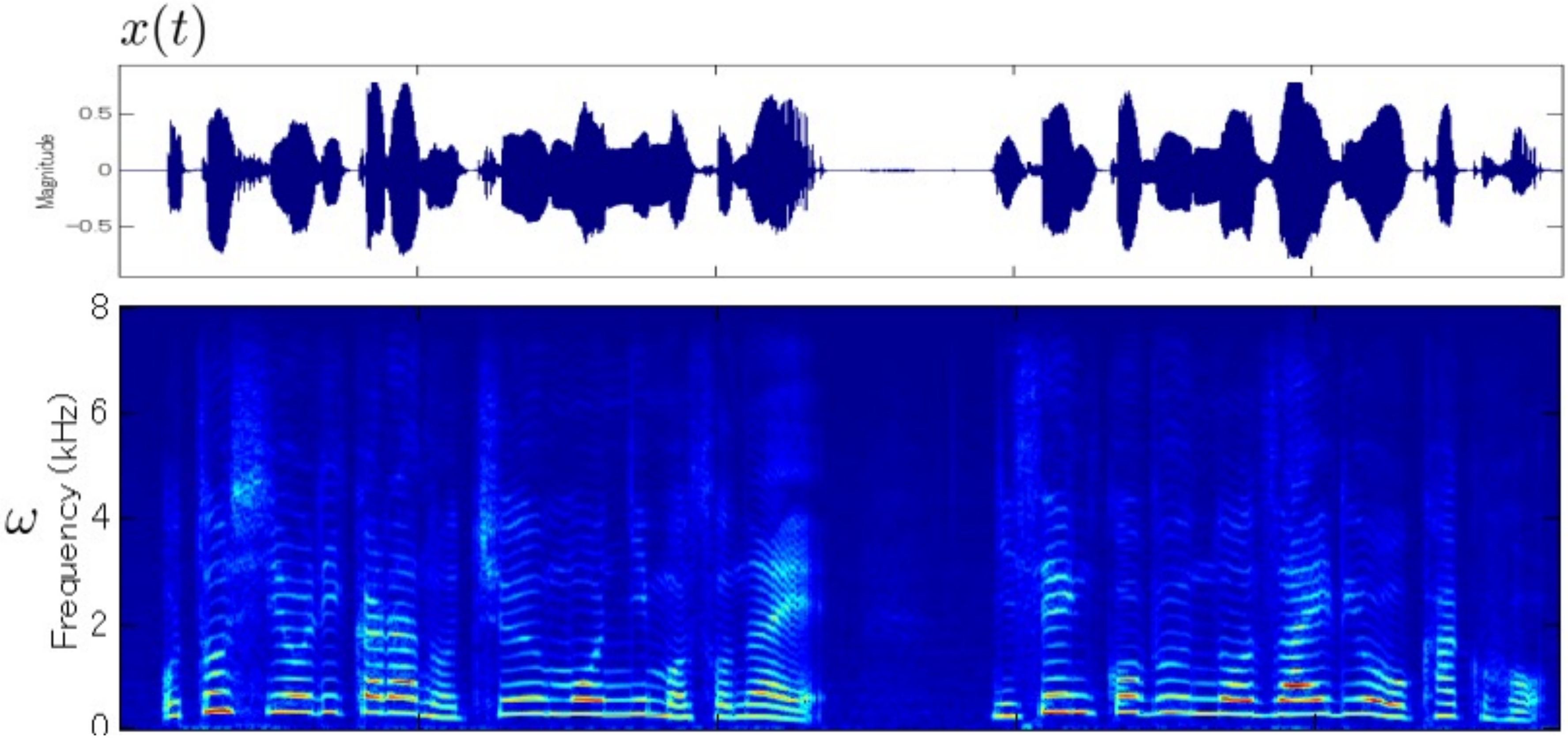
低い音から高い音へ
スイープする信号（チャープ信号）

この区間だけフーリエ変換





応用例：スペクトログラム

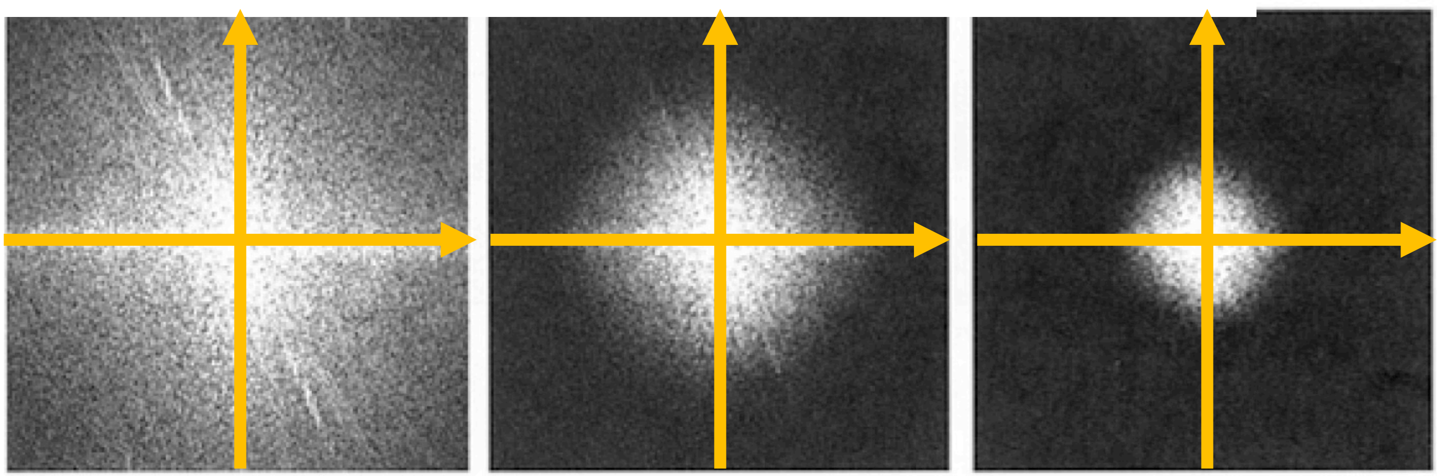


通常は、正の周波数だけを表示することが多い

応用例：画像

入力画像（時間領域）

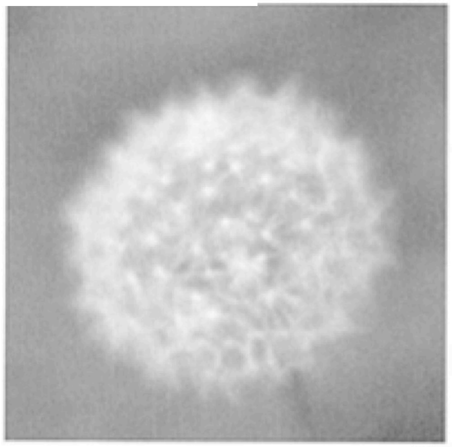
振幅スペクトル（周波数領域）

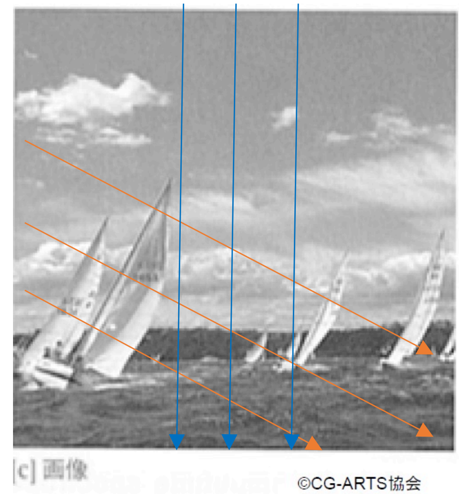


高周波成分が多い＝くっきりしている or ノイズが多い

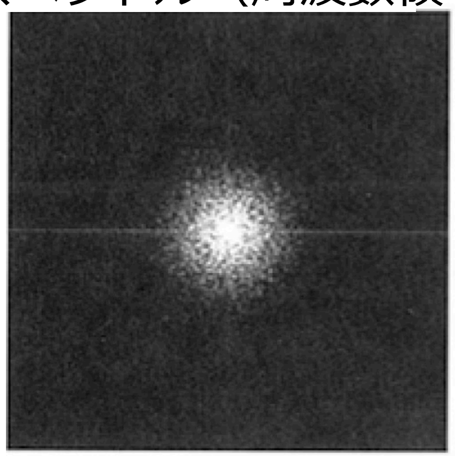
応用例：画像

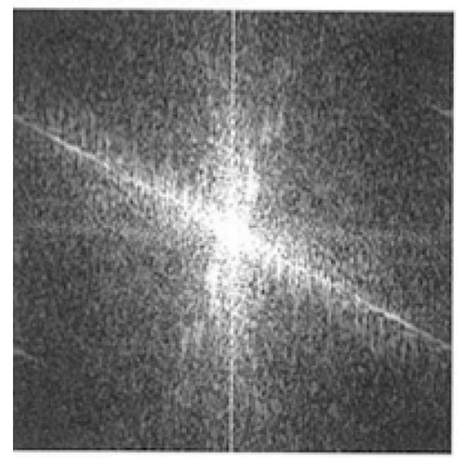
入力画像（時間領域）





振幅スペクトル（周波数領域）



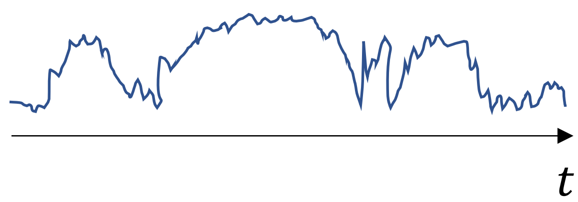


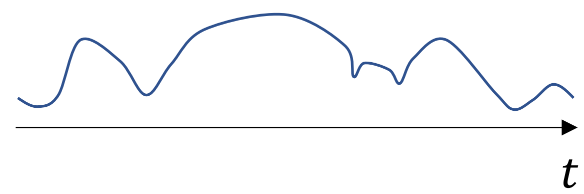
どっち方向に、どのような周波数の成分が分布しているかわかる

周波数解析の例

右の信号の方が、高周波成分が少ないことが分かる

時間領域信号

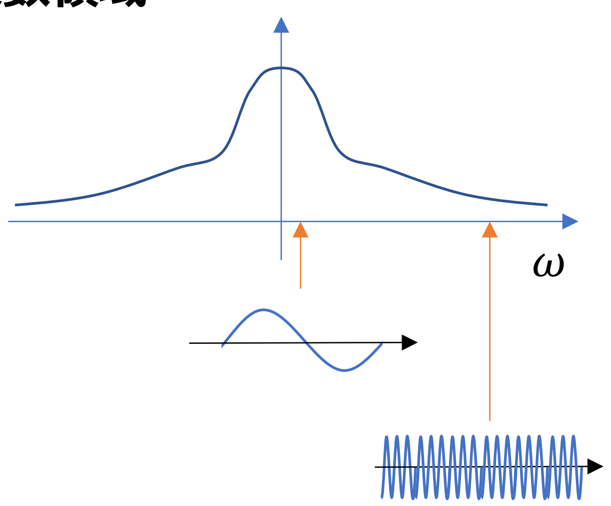


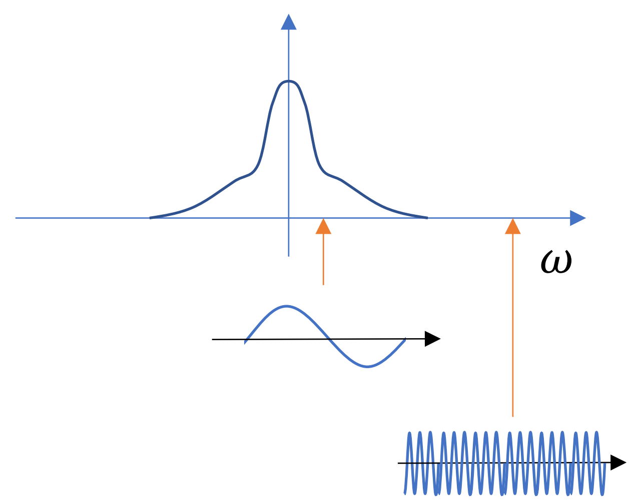


フーリエ変換　フーリエ逆変換

フーリエ変換　フーリエ逆変換

周波数領域





今回のまとめ

- 非周期関数にも適用可能なフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とそのフーリエ逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

を導入した.

- フーリエ変換 $F(\omega)$ の絶対値と偏角は，元の関数 $f(t)$ に含まれる周波数 ω の波の振幅と位相の情報を反映する！

今回の宿題

- 以下の関数について
  1. グラフにプロットせよ。（横軸が t 、縦軸が $f(t)$）
  2. フーリエ変換を求めよ。

1. $f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq \frac{1}{a}) \\ 0 & \left(|t| > \frac{1}{a}\right) \end{cases}$　ただし、$a > 0$

2. $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$

3. $f(t) = e^{-\beta |t|}$　ただし $\beta > 0$

宿題の注意事項

- Overleaf や Word, Powerpoint などのソフトを用いて数式展開を詳細に書き、Manaba+R のレポート機能からPDF形式で提出せよ。手書きのノートの写真などを PDF にしたものは不可とする。
- 答えのみは不可。導出過程が重要である。
- グラフは、Excel や プログラムを用いてプロットすることを期待するが、要点が記載されていれば、略図でもよい。
  - もし、α や β の具体的な値が必要な場合は、適当な正の実数を自分で決めよ。