ロボティクス
第4回

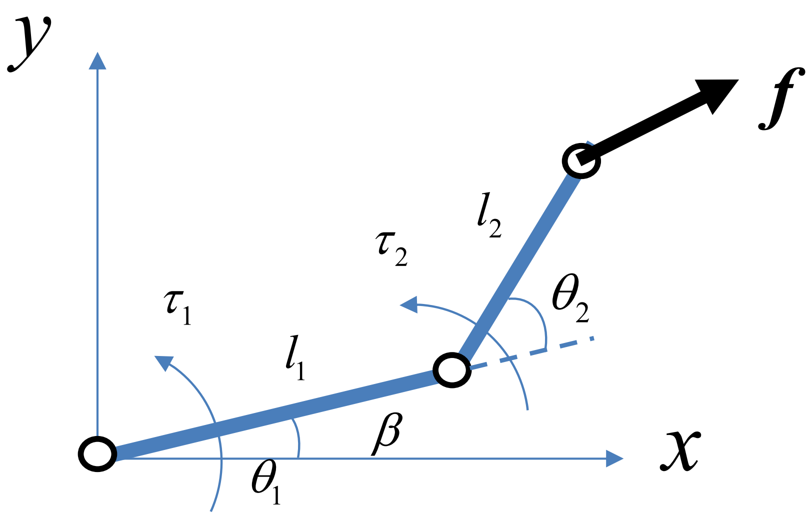
静力学と外積

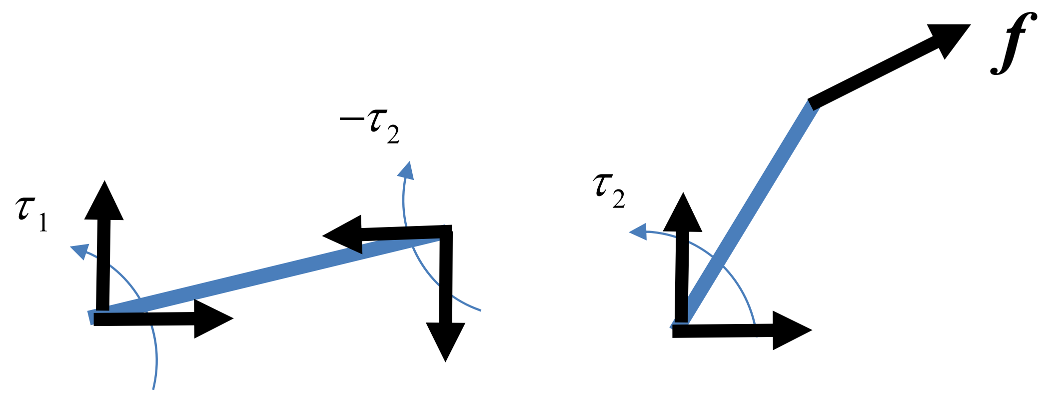
李 周浩

静力学

ロボットが静止状態or 準静的な状態における力の釣り合い

水平面内で運動する２リンクロボットの手先に力　$\boldsymbol{f} := [f_x, f_y]^T$ がかかっている.
これに釣り合うための関節トルク
$\boldsymbol{\tau} := [\tau_1, \tau_2]^T$ を求めよ.



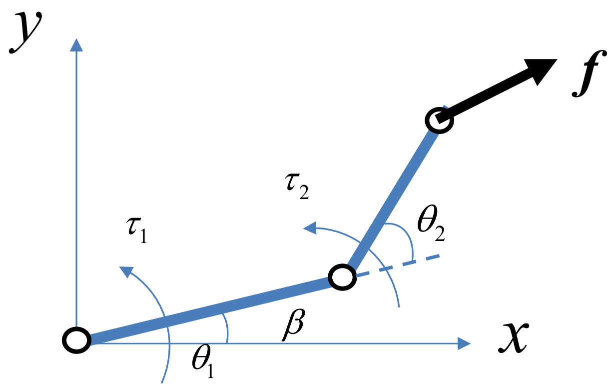


静力学

各セグメント（リンク）の

・平面内の力の釣り合い

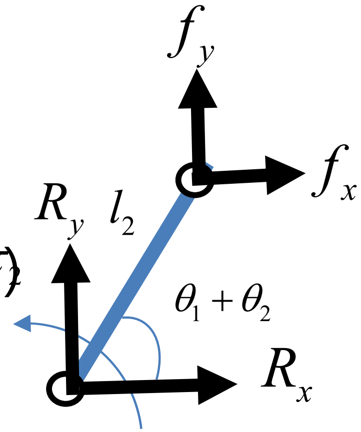
・モーメントの釣り合い　　　を考える



【第２リンク】

x方向の力の釣り合い　$f_x + R_x = 0$　--(1)

y方向の力の釣り合い　$f_y + R_y = 0$　--(2)

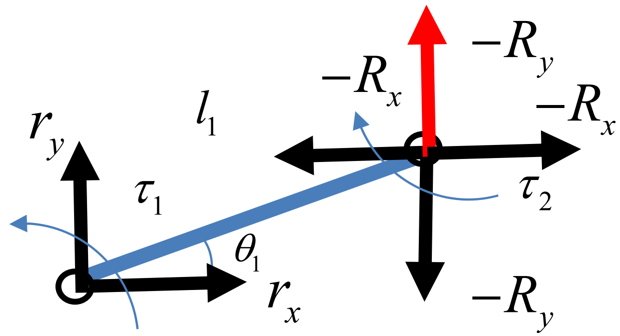


<u>第2関節軸周りの</u>モーメントの釣り合い

$$-f_x \cdot l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{f}_y \cdot l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + \tau_2 = 0$$ --(3)

ここに，R_x, R_yは，第１リンクが第２リンクに及ぼす力

【第１リンク】



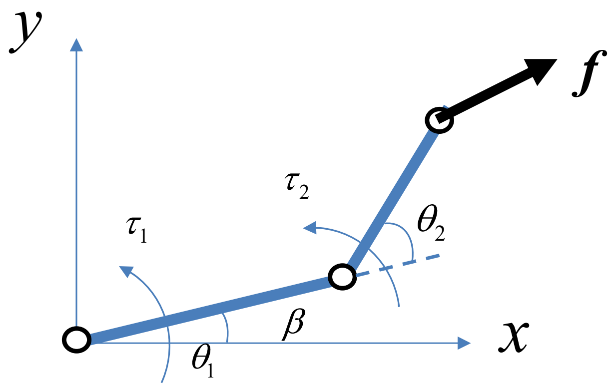
$$-R_x + r_x = 0$$ --(4)

$$-R_y + r_y = 0$$ --(5)

$$R_x \times l_1 \sin\theta_1 - R_y \times \cos\theta_1 - \tau_2 + \tau_1 = 0$$ --(6)

ここに，r_x, r_yは，土台が第１リンクに及ぼす力

方法１の続き



$$f_x + R_x = 0 \qquad \text{--(1)}$$

$$f_y + R_y = 0 \qquad \text{--(2)}$$

$$-f_x \cdot l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + f_y \cdot l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \tau_2 = 0 \qquad \text{--(3)}$$

$$R_x l_1 \sin\theta_1 - R_y l_1 \cos\theta_1 - \tau_2 + \tau_1 = 0 \qquad \text{--(6)}$$

式(6)に(1), (2)を代入し，Rx, Ryを消去する．

$$\tau_1 - \tau_2 = f_x l_1 \sin\theta_1 - f_y l_1 \cos\theta_1 \qquad \text{--(7)}$$

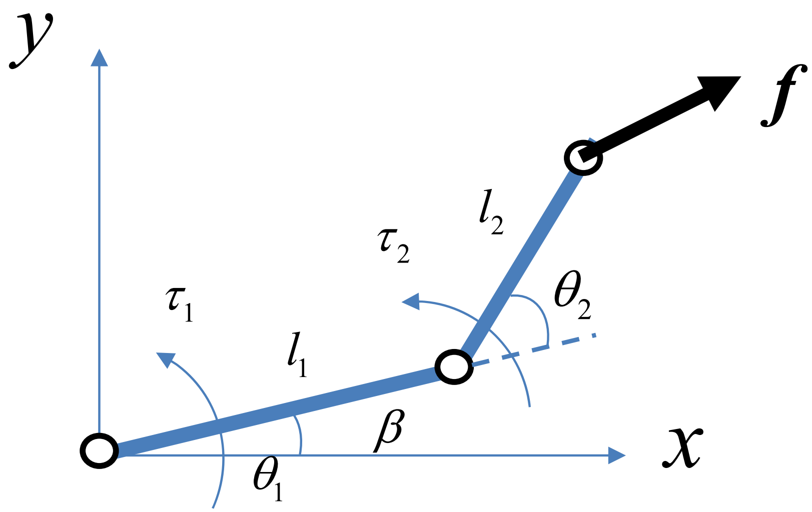
式(3)+(7)

$$\tau_1 = f_x(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) - f_y(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \qquad \text{--(8)}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = -J^T \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\tau} = -J^T \boldsymbol{f}$$

つり合う力とトルク



$$\boldsymbol{\tau} = -J^T \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{\tau} + J^T \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$$

つり合い
トルク

ロボット
の姿勢

外部からロボットが受ける力　⇦　正解

or

外部にロボットが及ぼす力

静力学（省略）（ｐ68参照）

$\boldsymbol{\tau} = -J^T \boldsymbol{f}$ が一般的に成立することを証明

【仮想仕事の原理】
釣り合い状態にあるとき，任意の物体の仮想的な変位（仮想変位）δu によって，物体にかかる力Fが行う仕事の総和（仮想仕事) δWは０である．

【ｎ自由度リンクロボットへの応用例】
仮想仕事は次式で与えられる．

$$\delta W = \boldsymbol{\tau}^T \delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{f}^T \delta\boldsymbol{r} \qquad (1)$$

仮想仕事の原理からδW=0であり，
以下が成立する．

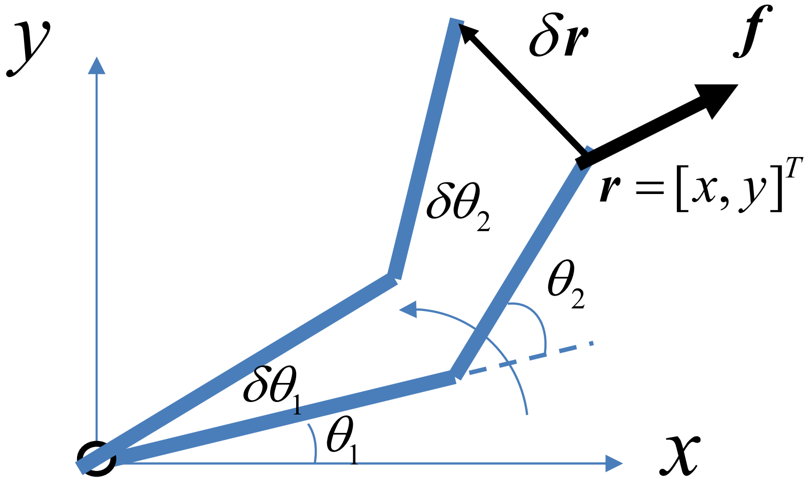
$$\delta W = \boldsymbol{\tau}^T \delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{f}^T \delta\boldsymbol{r} = 0 \qquad (2)$$

ここで微小な仮想変位$\delta\theta$, δr 間には
次式の関係が成立する．

$$\delta\boldsymbol{r} = J\,\delta\boldsymbol{\theta} \qquad (3)$$

式(3)を式(2)に代入し，式(4)を得る．

$$(\boldsymbol{\tau}^T + \boldsymbol{f}^T J)\delta\boldsymbol{\theta} = 0 \qquad (4)$$

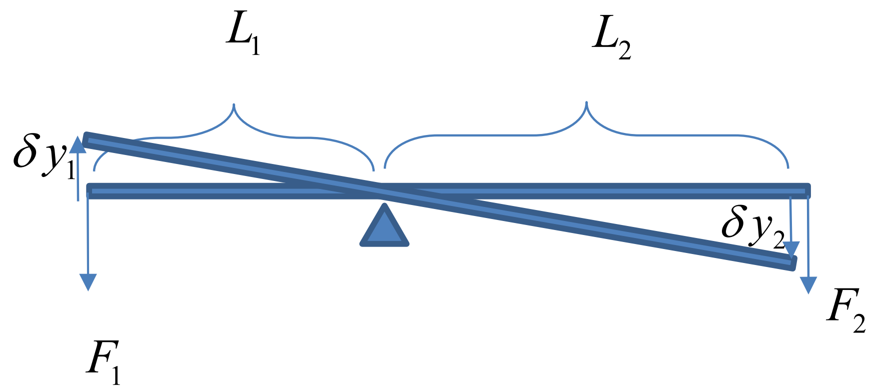


仮想仕事の原理から，任意のδθについてこれが成立することから，

$\boldsymbol{\tau} = -J^T \boldsymbol{f}$ を得る．

仮想仕事の原理の別例（省略）

水平状態で釣り合っているてこを考える．
力F1, F2の関係を，仮想仕事の原理から求めよ．



仮想変位(δy_1, δy_2)を考える．微小であるから，
鉛直方向であると近似できる．

仮想仕事の原理より，次式が成立する．

$$-F_1\delta y_1 + F_2\delta y_2 = 0 \qquad (1)$$

また，仮想変位δy1とδy2の間には式（２）の関係が成立する．

$$\delta y_1 = L_1 / L_2\, \delta y_2 \qquad (2)$$

式(2)を式(1)に代入し，式（３）を得る．

$$(-F_1 L_1 / L_2 + F_2)\delta y_2 = 0 \qquad (3)$$

式（３）は任意のδy_2で成立するから，式（４）が得られる．

$$F_1 L_1 = L_2 F_2 \qquad (4)$$

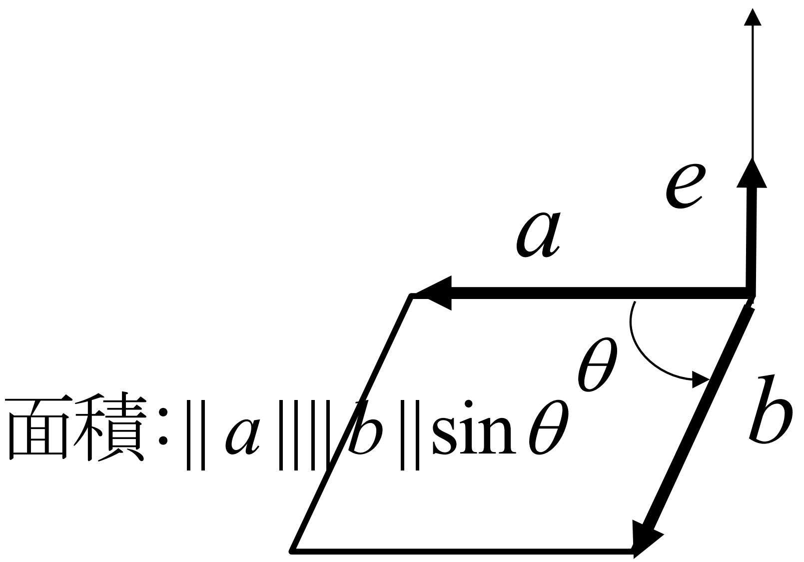
外積（ベクトル積）の定義

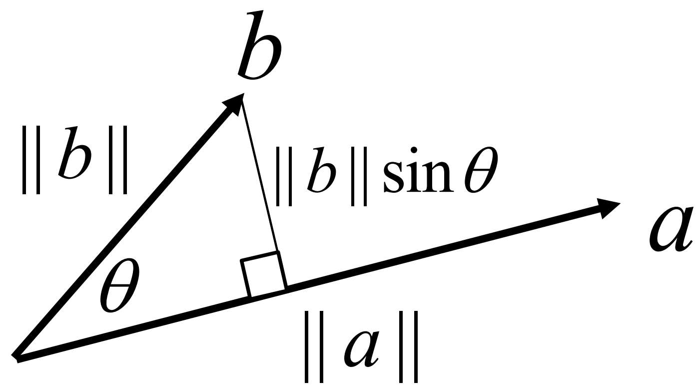
【外積（ベクトル積）】(p70)

【（初等的）定義】
２つのベクトル　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\in R^3$　に対して、以下を$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の外積という．

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta)\,\boldsymbol{e}$$

ここに，θはベクトル***a*** とベクトル ***b***方のなす角　$\theta\in[0,\pi)$　であり，
e は，ベクトル***a*** からベクトル ***b***方向に右ねじを回した際にねじが
進む方向を向く，単位ベクトルである．





外積の性質（１）

【外積の基本的性質】

(i)　交換則　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(ii)　分配則　$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

(iii)　結合則　$(m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (m\boldsymbol{b})$

(ii)　分配則 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ の証明（概略）

【準備】

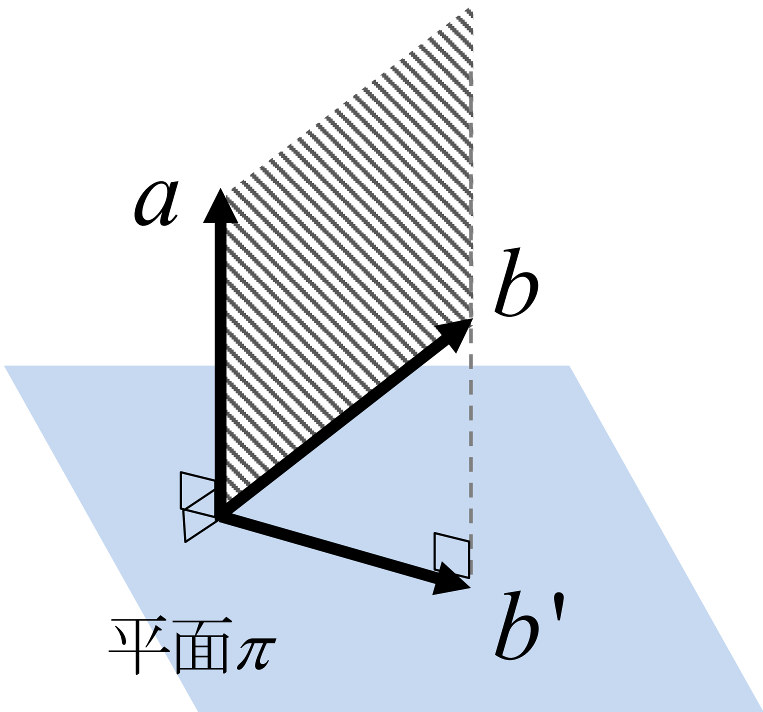
ベクトル***a***に垂直な平面πを考える.

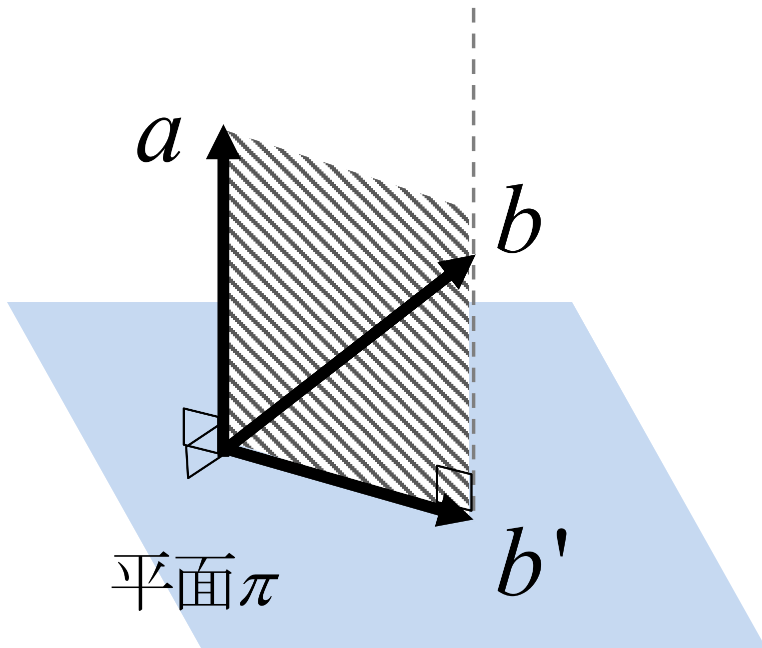
ベクトル***b***を平面πに射影したベクトルを***b′***とおくと

ベクトルa, bが張る平行四辺形（左図）と,

ベクトルa, b′が張る平行四辺形（右図）は同じ面積をもつため，次式が成立する.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'$$





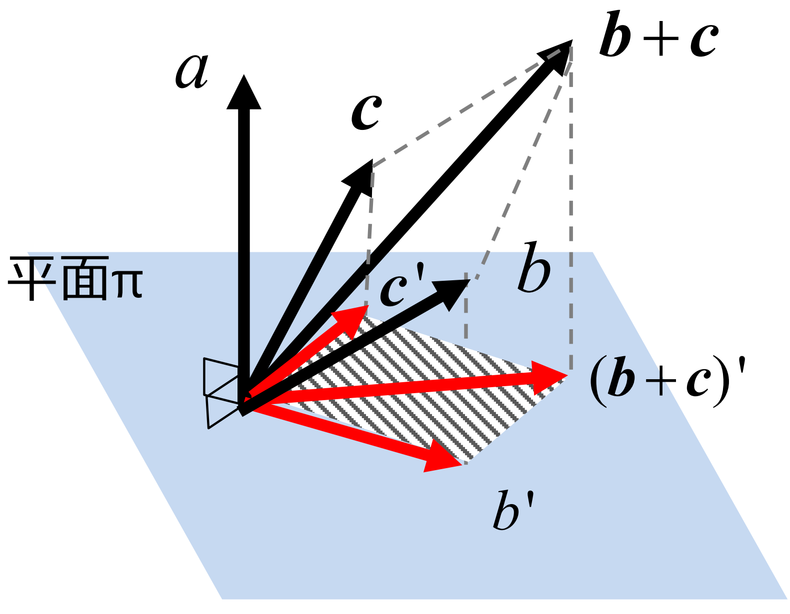
ベクトル***a***に垂直な平面πを考える.
ベクトル***b*, *c*, *b*+*c***を平面πに射影したベクトルを***b*′, *c*′, (*b*+*c*)′**とおく（左図）.
(*b*+*c*)′=*b*′+*c*′　が成立することが容易にわかる.
前頁【準備】より，以下が成立する.

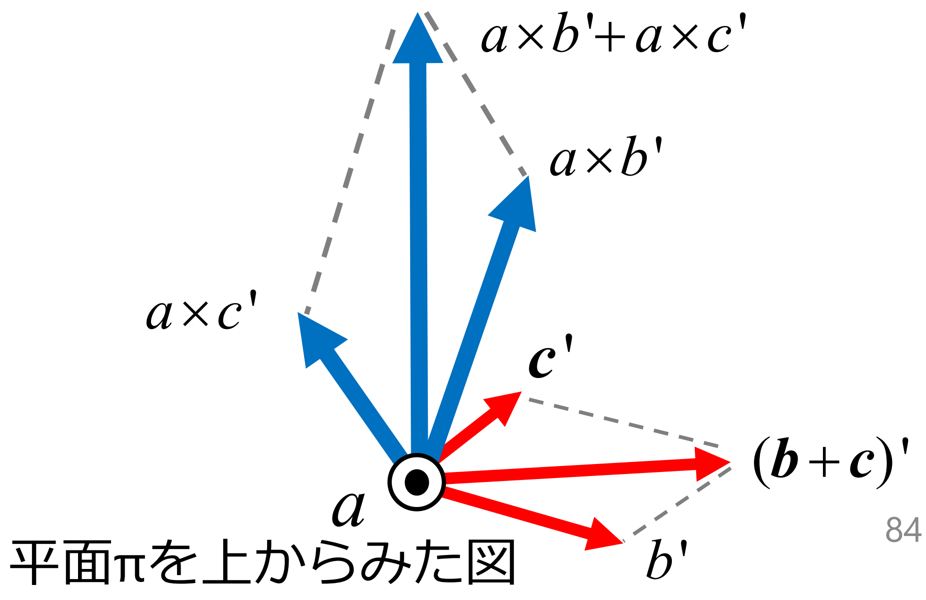
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})'=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}') \qquad (1)$$

π平面を上から見た図を右図に示す$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'$　はこの平面内にあり，b′を反時計回りに90deg回転させたベクトルであり，$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'\|=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}'\|$　である.
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}'$ も c′を90deg回転させたベクトルであり，大きさは$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}'\|=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{c}'\|$である.
したがって，b′とc′で作る平行四辺形と，$a\times b'$　と　$a\times c'$　で張る平行四辺形は相似である．したがって，b′とc′で作る平行四辺形の対角線を構成するベクトルの大きさは，$\|a\times b'+a\times c'\|=\|a\|\cdot\|b'+c'\|$ を満たす．このことから，次式が成立する.

$$a\times b'+a\times c'=a\times(b'+c') \qquad (2)$$

式(1), (2)と前頁の準備からより, $a\times b+a\times c=a\times(b+c)$　が成立する.　(証明終)





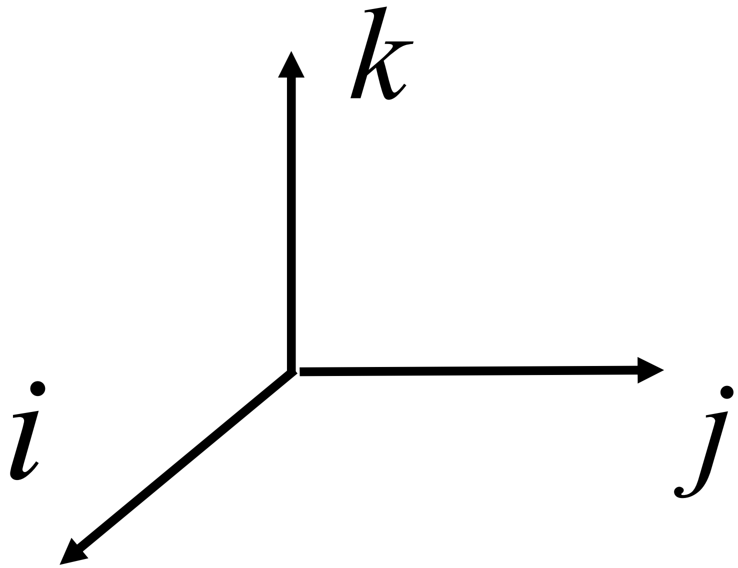
外積

【外積の基本的性質】

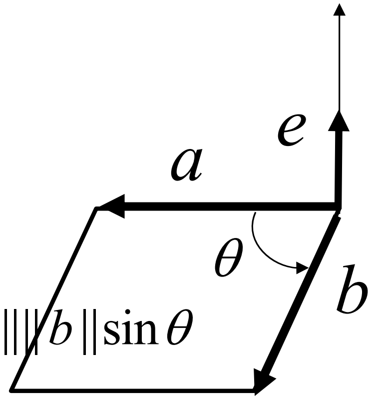
$$i \times j = k, \quad j \times k = i, k \times i = j$$

$$a \times b = -b \times a$$

$$a \times a = 0$$



外積の性質（２）



1. 方向：
   ベクトル　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　は　$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$　と直交する.

２．成分表示

$$\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^T,\ \boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^T$$

のとき次式が成立する.

$$a\times b=\begin{bmatrix} a_yb_z-a_zb_y \\ a_zb_x-a_xb_z \\ a_xb_y-a_yb_x \end{bmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k} \qquad (※)$$

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は，成分表示をする座標系の座標軸方向を向いた単位ベクトルであり次式で与えられる.

$$\boldsymbol{i}:=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{j}:=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{k}:=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

成分表示の証明

２．成分表示

a=[a_x, a_y, a_z]^T, ***b***=[b_x, b_y, b_z]^{T}とするとき，次式成立する

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

【証明のヒント】

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$$

であるから，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \times (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k})$$

を計算し，上式が成立することを証明すれば良い.
その際，分配則などの基本性質を用いる.

→各自で証明せよ.

成分表示の計算方法（暗記方法）

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

【検算】

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{j}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

外積の行列表現

以下の行列 [a×]

$$[\mathrm{a}\times] := \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

は，任意のベクトル b に対して，式（１）が成立する．

$$a \times b = [a\times] b \qquad （１）$$

また　$[\mathrm{a}\times]^T = -[\mathrm{a}\times]$　が成立する．

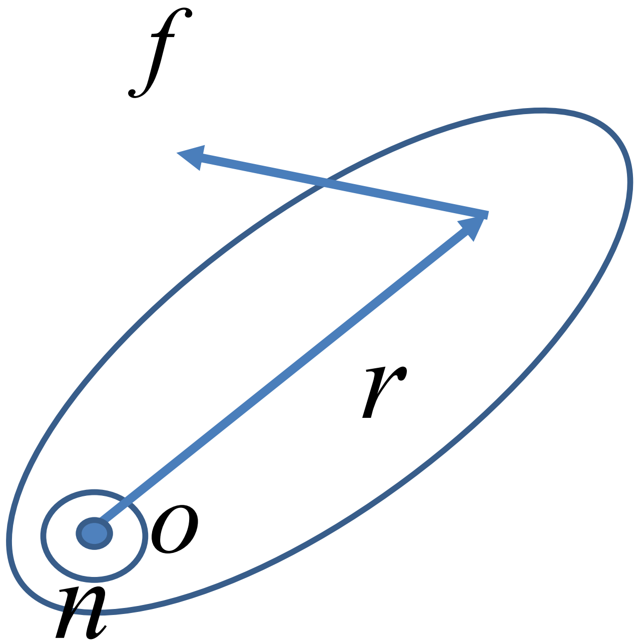
→　歪対称行列（わい対称，ひずみ対称）
　Skew-symmetric matrix

外積と力のモーメント

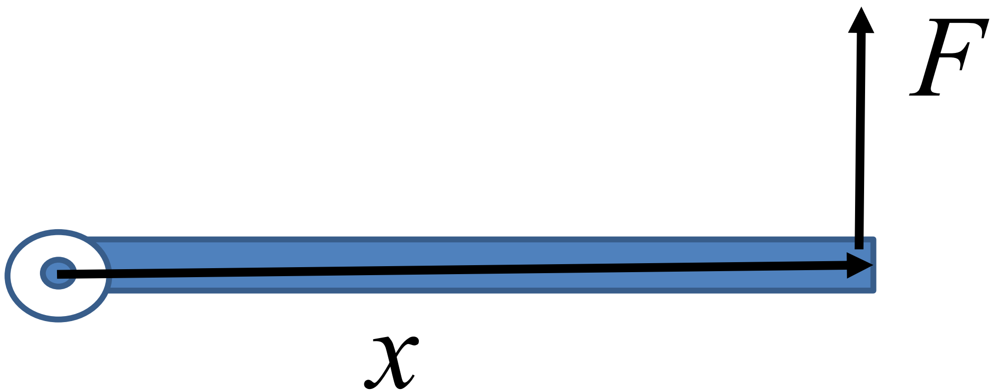
O点からベクトルr の位置に，力f が作用している状況において，力f によるO点まわりのモーメントn は

$$n = r \times f \qquad (\in R^3)$$

で与えられる．



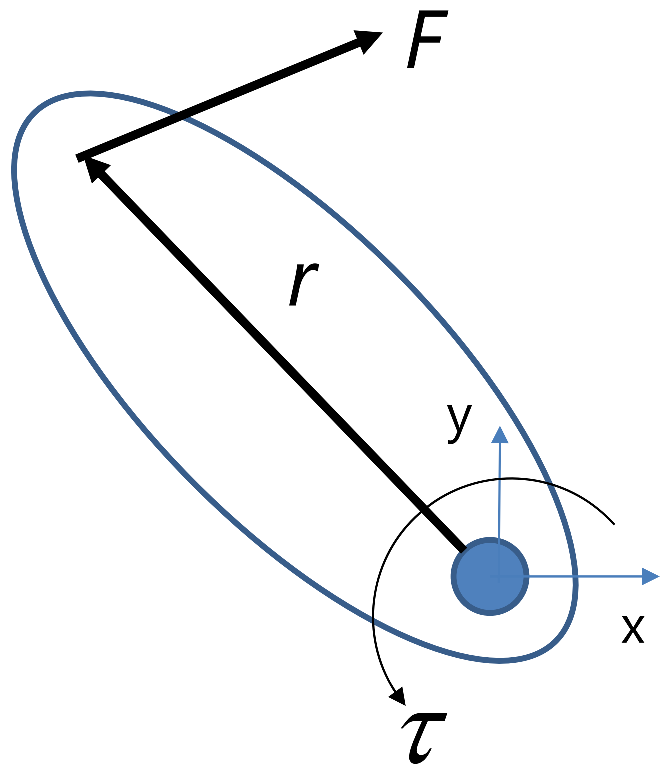
例： $r = [\mathrm{x}, 0, 0]^T,\ f = [0, \mathrm{F}, 0]^T$



$$n = [\mathrm{x}, 0, 0]^T \times [0, \mathrm{F}, 0]^T = [0, 0, xF]$$

外積と力のモーメント

【例題】
右の図のように，回転軸で固定されたリンクの固定軸からベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される位置に，
$\boldsymbol{F}$ の力が作用している．
今，回転軸のモータによりトルクτを印可することでこのリンクが釣り合っている．



$$\boldsymbol{r} = [-1, 2, 0]^T \ [m] \quad \boldsymbol{F} = [50, 30, 0]^T \ [\mathrm{N}]$$

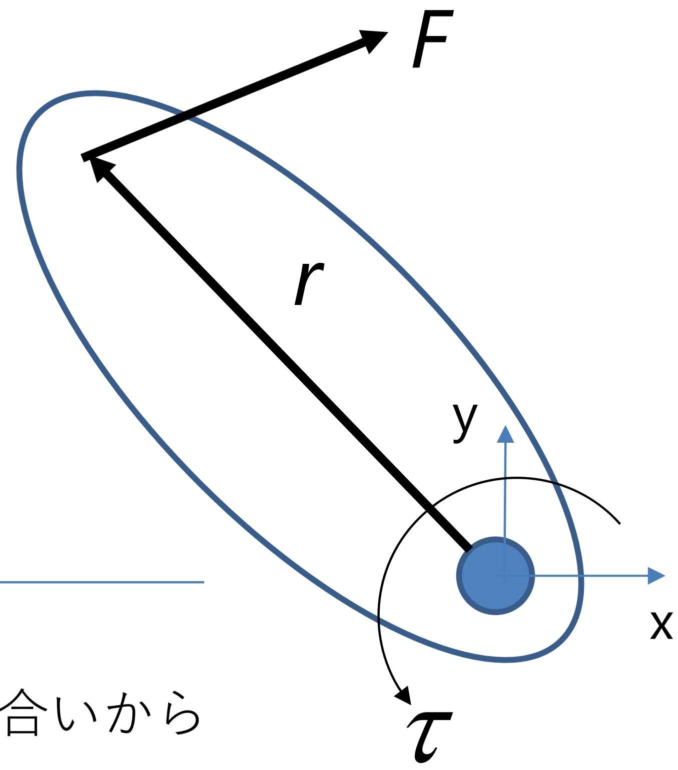
であるとき，トルクτ を求めよ．

次ページと同じ．

【例題1の解答】
右の図のように，回転軸で固定されたリンクの固定軸からベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される位置に，$\boldsymbol{F}$ の力が作用している．
今，回転軸のモータによりトルクτを印可することでこのリンクが釣り合っている．

$$\boldsymbol{r}=[-1,2,0]^T\ [m] \qquad \boldsymbol{F}=[50,30,\ 0]^T\ [\mathrm{N}]$$

であるとき，トルクτ を求めよ．



回転軸においてモータが作りだすトルクをベクトル $\boldsymbol{\tau}$ とおく．このとき，回転軸まわりのモーメントの釣り合いから

$\boldsymbol{\tau}+\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0$ が成立する．これを $\boldsymbol{\tau}$ について解く．

$$\boldsymbol{\tau}=-\mathbf{r}\times\mathbf{F}=-\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & 0\\ 50 & 30 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-(0-0)\mathbf{i}-(0+0)\mathbf{j}-(-30-100)\mathbf{k}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\130\end{bmatrix}[Nm]$$

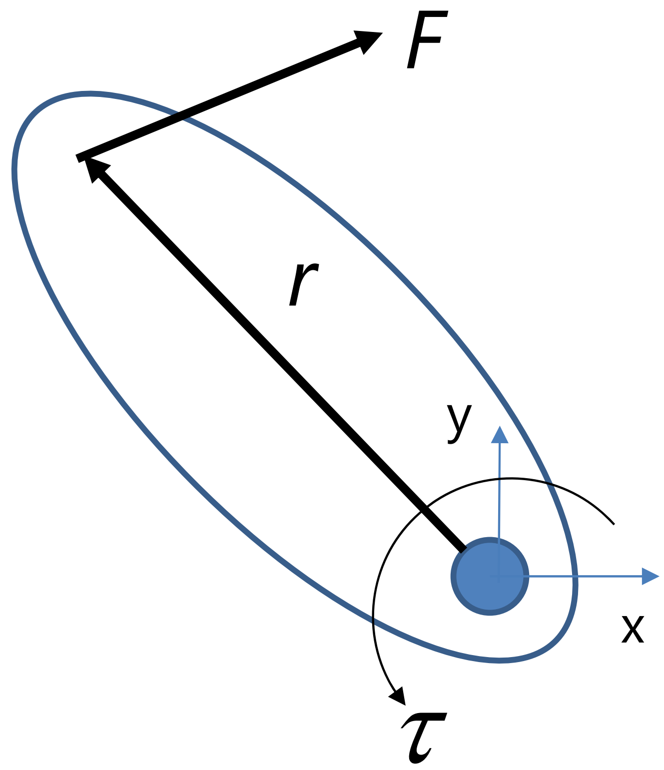
モーターが発生するトルクは z 軸周りであるから，τ=130[Nm]

外積と力のモーメント

【例題２】
右の図のように，回転軸で固定されたリンクの固定軸からベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される位置に，$\boldsymbol{F}$ の力が作用している．
今，回転軸のモータによりトルクτを印可することでこのリンクが釣り合っている．

$$\boldsymbol{r} = [-1, 2, 0]^T \,[m] \quad \boldsymbol{F} = [50, 30, 1]^T \,[\mathrm{N}]$$

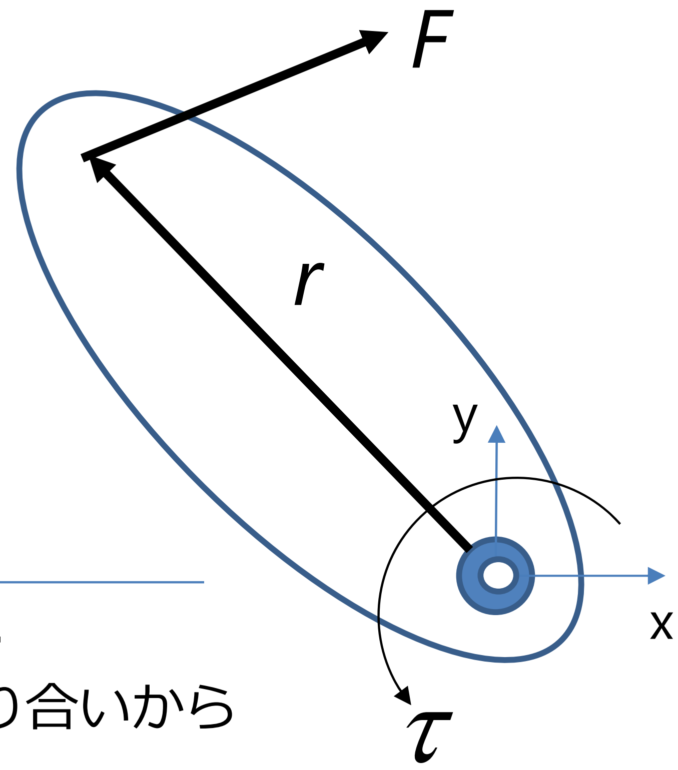
であるとき，トルクτ を求めよ．



【例題解答】
右の図のように，回転軸で固定されたリンクの固定軸からベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される位置に，$\boldsymbol{F}$ の力が作用している.
今，回転軸のモータによりトルクτを印可することでこのリンクが釣り合っている.

$$\boldsymbol{r} = [-1, 2, 0]^T\ [m] \qquad \boldsymbol{F} = [50, 30, 1]^T\ [\mathrm{N}]$$

であるとき，トルクτ を求めよ.



回転軸においてモータが作りだすトルクをベクトル$\boldsymbol{\tau}$とおく．このとき，回転軸まわりのモーメントの釣り合いから
$\boldsymbol{\tau} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$　が成立する．これを$\boldsymbol{\tau}$について解く.

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 50 & 30 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(2-0)\mathbf{i} - (0+1)\mathbf{j} - (-30-100)\mathbf{k}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 130 \end{bmatrix} [Nm]$$

モータがなくても，機械的に勝手に反トルクが発生する部分.

モータが受け持つトルク（モーター電源OFF時には自由に回転できるので，
モータが反トルクjを書けないと行けない.

モーターが発生するトルクは z 軸周りであるから，<u>τ=130[Nm]</u>