数学演習第6回 2022 11/1

微分積分

広義積分

(1) $f(x)$が区間$(a,b]$ $(-\infty \le a < b)$で連続のとき極限値$\lim_{u \to a} \int_u^b f(x)dx$が存在するならばこの値を$f(x)$の$(a,b]$上の広義積分といい$\int_a^b f(x)dx$と表す。区間$[a,b)$ $(a < b \le \infty)$上の$f(x)$の広義積分も$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to b} \int_a^u f(x)dx$で定義する。

(2) $f(x)$が(a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$で連続のとき1点$c \in (a,b)$をとり広義積分$\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$が共に存在すれば(a,b)上の広義積分を

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

で定義する。この積分の存在と値はcのとり方によらない。

(3) 広義積分$\int_a^b f(x)dx$が存在するとき広義積分は収束するという。収束しないとき発散するという。

練4.3 (A)

1. 次の広義積分は収束するか。収束する場合には値を求めよ。

(2) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ (3) $\int_0^1 x\log x\,dx$

解) 積分を計算して収束,発散をしらべる。

(2) $x = 1+t^2$とおくと

x	$u \to 2$
t	$\sqrt{u-1} \to 1$

与式は$x \to 1+0$のとき$\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \to \infty$より$(1,2]$での広義積分

$$\int_u^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int_{\sqrt{u-1}}^1 \frac{2t}{(1+t^2)t}dt = \int_{\sqrt{u-1}}^1 \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \lim_{u \to 1+0} \int_u^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}dt = 2\left[\tan^{-1} t\right]_0^1$$

$$= 2(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$ 収束して値は$\frac{\pi}{2}$ □

(3) $x\log x$は$x=0$で定義されていないから$(0,1]$での広義積分

$$\int_u^1 x\log x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_u^1 - \int_u^1 \frac{x}{2}dx = -\frac{u^2}{2}\log u - \left[\frac{x^2}{4}\right]_u^1$$

$$= -\frac{u^2}{2}\log u - \frac{1}{4} + \frac{u^2}{4}$$ $\therefore$ 与式 $= \lim_{u \to +0} \int_u^1 x\log x\,dx = \lim_{u \to +0}\left(-\frac{u^2}{2}\log u - \frac{1}{4} + \frac{u^2}{4}\right) = -\frac{1}{4}$

よって収束して値は $-\frac{1}{4}$ □

3. 次の広義積分は収束するか。収束する場合には値を求めよ。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}dx$　(4) $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$, $(a>0)$

解) (1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4}dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{1}{x^2+4}dx = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}0\right)$

$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

同様に $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4}dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^0 \frac{1}{x^2+4}dx = \lim_{u\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}0 - \frac{1}{2}\tan^{-1}u\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4}dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+4}dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

よって収束して値は $\frac{\pi}{2}$ □

(4) $I = \int e^{-ax}\cos bx\,dx$, $J = \int e^{-ax}\sin bx\,dx$ とおくと

$I = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx + \int \frac{a}{b}e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx + \frac{a}{b}J$

$J = -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx - \int\frac{a}{b}e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx - \frac{a}{b}I$

$I - \frac{a}{b}J = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx$ ---①　$\frac{a}{b}I + J = -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx$ ---②

① $+ \frac{a}{b}\times$ ② より $\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = e^{-ax}\frac{b\sin bx - a\cos bx}{b^2}$

$I = \frac{1}{a^2+b^2}e^{-ax}(b\sin bx - a\cos bx) + C$

故に $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx - a\cos bx)\right]_0^u$

$= \lim_{u\to\infty}\left\{\frac{e^{-au}}{a^2+b^2}(b\sin bu - a\cos bu) + \frac{a}{a^2+b^2}\right\} = \frac{a}{a^2+b^2}$

よって収束して値は $\frac{a}{a^2+b^2}$ □