問題 3.1 (Lv.2)

次の逆三角関数の値を求めよ.

(1) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\cos^{-1}\dfrac{1}{2}$　(3) $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　(5) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(6) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

(7) $\sin^{-1}1$　(8) $\cos^{-1}0$　(9) $\tan^{-1}(-1)$

問題 3.2 (Lv.4)

(1) 関係式 $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$ を示せ.

(2) 関係式 $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$ を示せ.

(3) 関係式 $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}x & (x > 0) \\ -\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}x & (x < 0) \end{cases}$ を示せ.

問題 3.3 (Lv.2)

(1) 双曲線関数の値 $\sinh 0$, $\cosh 0$, $\tanh 0$ を求めよ.

(2) 関係式 $\sinh(-x) = -\sinh x,\ \cosh(-x) = \cosh x$ を示せ.

(3) 関係式 $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$ を示せ.

問題 3.4 (Lv.3)

$f(x) = x^2 + x + 1$ とする. (関数の終域は値域に制限しておく)

次の範囲を定義域とする関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を求めよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 2$　(2) $-1 \leqq x \leqq 1$　(3) $-2 \leqq x \leqq -1$

問題 3.5 (Lv.4)

点 $x \in [\,0\ \ \pi\,]$ に値 $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ を対応させて, 関数 $f : [\,0\ \ \pi\,] \to \mathbb{R}$ を定める.

(1) 関数 f の定義域, 終域および値域を求めよ.

(2) 終域を値域に制限して考えたとき, f が 1 対 1 対応になるか調べよ.

問題 3.6 (Lv.5)

関数 f は閉区間 $[\,a\ \ b\,]$ 上で狭義単調増加で連続, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ とする.

(関数の定義域は $[\,a\ \ b\,]$ とし, 終域は値域に制限しておくものとする)

(1) 閉区間 $[\,\alpha\ \ \beta\,]$ 上に f の逆関数 f^{-1} が定まることを示せ.

(2) 逆関数 f^{-1} も狭義単調増加で連続になることを示せ.

問題 3.1 (解答)

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ における解より, $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における解より, $\cos^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

(3) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ における解より, $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

(4) $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ の $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ における解より, $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$

(5) $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における解より, $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{4}\pi$

(6) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ の $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ における解より, $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

(7) $\sin\theta = 1$ の $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ における解より, $\sin^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{2}$

(8) $\cos\theta = 0$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における解より, $\cos^{-1} 0 = \dfrac{\pi}{2}$

(9) $\tan\theta = -1$ の $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ における解より, $\tan^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

問題 3.2 (解答)

(1) $\theta = \sin^{-1} x$ とおくと, $\sin\theta = x$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より,
$\sin(-\theta) = -\sin\theta = -x$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq -\theta \leqq \frac{\pi}{2}$ だから,
逆三角関数の定義より, $\sin^{-1}(-x) = -\theta = -\sin^{-1} x$

(2) $\theta = \cos^{-1} x$ とおくと, $\cos\theta = x$ かつ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より,
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -x$ かつ $0 \leqq \pi - \theta \leqq \pi$ だから,
逆三角関数の定義より, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1} x$

(3) $\theta = \tan^{-1} x$ とおくと, $\tan\theta = x$ かつ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$x > 0$ のときは, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\left(-\frac{\pi}{2} <\right) 0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$ であり,
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{x}$ だから,
逆三角関数の定義より, $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \theta = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$
$x < 0$ のときは, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ より, $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \theta < 0 \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ であり,
$\tan\left(-\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \dfrac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{x}$ だから,
逆三角関数の定義より, $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2} - \theta = -\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$

問題 3.3 (解答)

(1) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ より, $\sinh 0 = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ より, $\cosh 0 = \dfrac{e^0 + e^{-0}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ より, $\tanh 0 = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

(2) $\sinh(-x) = \dfrac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$

$\cosh(-x) = \dfrac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

(3) $$\frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x} = \frac{2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)}{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2} = \frac{2(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2}$$

$$= \frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{(e^{2x}+2+e^{-2x})+(e^{2x}-2+e^{-2x})} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \tanh 2x$$

$\bigl(\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$ や $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ なども成り立つ$\bigr)$

問題 3.4 (解答)

$f(x) = x^2 + x + 1 = \left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ より,

$y = f(x)$ のグラフは, 頂点が $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ の下に凸な放物線

$f(x)$ は $x \leqq -\frac{1}{2}$ では狭義単調減少, $-\frac{1}{2} \leqq x$ では狭義単調増加

(1) 定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ において, $f(x)$ は狭義単調増加, $f(0) = 1$, $f(2) = 7$

定義域と値域が 1 対 1 に対応し, 値域 $1 \leqq y \leqq 7$ 上に逆関数が定まる.

2 次方程式の解の公式を用いて, $y = x^2 + x + 1$ を x について解くと,

$x^2 + x + (1-y) = 0$ より, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4(1-y)}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4y-3}}{2}$

$x = \dfrac{-1 + \sqrt{4y-3}}{2}$ の方が $1 \leqq y \leqq 7$ から $0 \leqq x \leqq 2$ への逆対応になるので,

$y = x^2 + x + 1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の逆関数は, $x = \dfrac{-1 + \sqrt{4y-3}}{2}$ $(1 \leqq y \leqq 7)$

(2) $f(0) = 1$, $f(-1) = 1$ より, $f(x)$ は異なる点 $x = 0$ と $x = -1$ で同じ値になる.

定義域 $-1 \leqq x \leqq 1$ では, 値域と 1 対 1 に対応しないので, 逆関数は存在しない.

(3) 定義域 $-2 \leqq x \leqq -1$ において, $f(x)$ は狭義単調減少, $f(-2) = 3$, $f(-1) = 1$

定義域と値域が 1 対 1 に対応し, 値域 $1 \leqq y \leqq 3$ 上に逆関数が定まる.

(1) と同様に, $y = x^2 + x + 1$ を x について解くと, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4y-3}}{2}$

$x = \dfrac{-1 - \sqrt{4y-3}}{2}$ の方が $1 \leqq y \leqq 3$ から $-2 \leqq x \leqq -1$ への逆対応になるので,

$y = x^2 + x + 1$ $(-2 \leqq x \leqq -1)$ の逆関数は, $x = \dfrac{-1 - \sqrt{4y-3}}{2}$ $(1 \leqq y \leqq 3)$

問題 3.5 (解答)

(1) $f:[0\ \ \pi]\to\mathbb{R}$ だから, f の定義域は閉区間 $[0\ \ \pi]$, 終域は実数全体 $\mathbb{R}$

$[0\ \ \pi]$ 上で $\sin x$ の値域は $[0\ \ 1]$ であり, $[0\ \ 1]$ 上で $\sin^{-1}x$ の値域は $\left[0\ \ \frac{\pi}{2}\right]$

ゆえに, $[0\ \ \pi]$ 上で合成関数 $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$ の値域は $\left[0\ \ \frac{\pi}{2}\right]$ となる.

(2) $f(0)=\sin^{-1}(\sin 0)=\sin^{-1}0=0,\ f(\pi)=\sin^{-1}(\sin\pi)=\sin^{-1}0=0$

異なる点 $x=0$ と $x=\pi$ で関数が同じ値になるので, f は 1 対 1 対応ではない.

[$\sin x\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数が $\sin^{-1}x$ だから,
$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ 上では, $\sin^{-1}(\sin x)=x$ が成り立つ.]

問題 3.6 (解答)

(1) 点 $x_1,x_2\in[a\ \ b]$ とし, $x_1\neq x_2\ (x_1<x_2)$ とすると, 関数 f が狭義単調増加より,

$x_1<x_2$ から $f(x_1)<f(x_2)$ となり, 関数の値は異なる $\big(f(x_1)\neq f(x_2)\big)$.

また, 点 $x\in[a\ \ b]$ のとき, $a\leqq x\leqq b$ より, $f(a)\leqq f(x)\leqq f(b)$ だから,

$\alpha\leqq f(x)\leqq\beta$ となり, 関数の値 $f(x)$ は閉区間 $[\alpha\ \ \beta]$ 内にあるが,

逆に, 点 $y\in[\alpha\ \ \beta]$ とすると, $\alpha\leqq y\leqq\beta$ より, $f(a)\leqq y\leqq f(b)$

関数 f が閉区間 $[a\ \ b]$ 上で連続だから, 中間値の定理を適用すると,

$f(x)=y$ となる点 $x\in[a\ \ b]$ の存在が保証され, f の値域は閉区間 $[\alpha\ \ \beta]$ となる.

よって, 定義域 $[a\ \ b]$ と値域 $[\alpha\ \ \beta]$ が 1 対 1 に対応し, $[\alpha\ \ \beta]$ 上に逆関数が定まる.

(2) $y_1,y_2\in[\alpha\ \ \beta]$, $y_1<y_2$ とし, $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$ とする.

f の逆関数が f^{-1} より, $f\big(f^{-1}(y)\big)=y$ であり, $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ となる.

$x_1\geqq x_2$ と仮定すると, $f(x_1)\geqq f(x_2)$ だから, $y_1\geqq y_2$ となり, $y_1<y_2$ に反する.

ゆえに, $x_1<x_2$ つまり $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ となり, 逆関数 f^{-1} は狭義単調増加

連続性は, 任意の点 $y_0\in[\alpha\ \ \beta]$ において, $\displaystyle\lim_{y\to y_0}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$ を示せばよい.

f^{-1} が単調増加だから, y を y_0 に右から近づけるとき ($y\to y_0+0$ のとき),

$f^{-1}(y)$ の値は, 下に有界 $\big(\geqq a=f^{-1}(\alpha)\big)$ であり, かつ, 単調に減少していく.

ゆえに, 極限値 $\displaystyle\lim_{y\to y_0+0}f^{-1}(y)$ が存在するので, その値を x_0 とする.

f が連続関数より, 極限値における関数の値は, 関数の値の極限値と一致する.

ゆえに, $\displaystyle f\Big(\lim_{y\to y_0+0}f^{-1}(y)\Big)=\lim_{y\to y_0+0}f\big(f^{-1}(y)\big)$ となり, $\displaystyle f(x_0)=\lim_{y\to y_0+0}y=y_0$

よって, $f(x_0)=y_0$ より, $x_0=f^{-1}(y_0)$ だから, $\displaystyle\lim_{y\to y_0+0}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$

同様にして $\displaystyle\lim_{y\to y_0-0}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$ となり, $\displaystyle\lim_{y\to y_0}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$ がわかる.