コンピュータグラフィックス(R)

第7回：ポリゴンを使わないCG

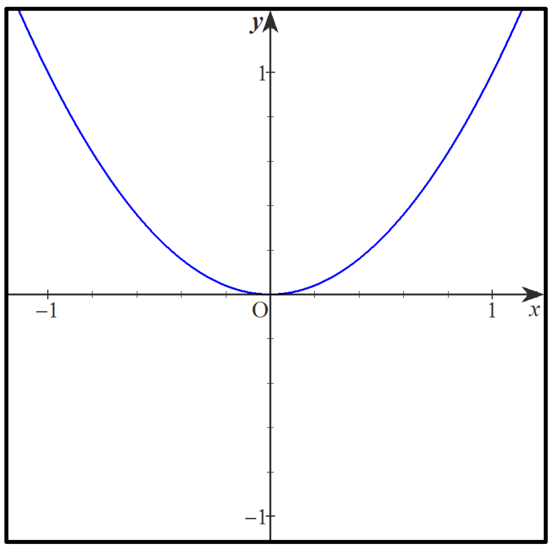
曲面・曲線 (p.72-)

曲線と曲面の表現方法

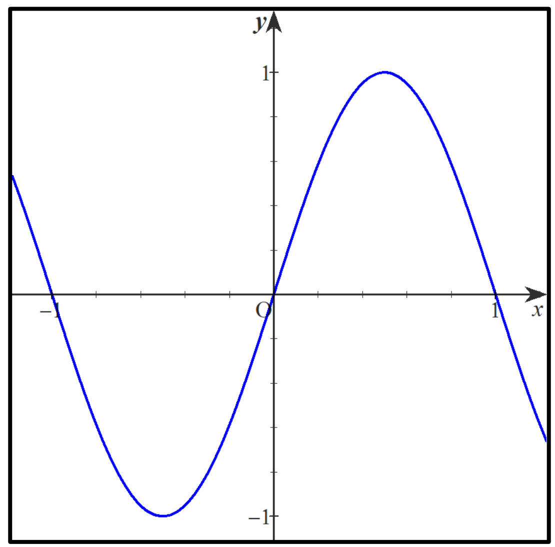
- 陽関数形式
  1つの座標値をほかの座標値の関数で定める.
  平面上の曲線: $y = f(x)$
  空間内の曲面: $z = f(x, y)$
- 陰関数形式
  関数を陰に用いて曲線や曲面を定義する.
  平面上の曲線: $f(x, y) = 0$
  空間内の曲面: $f(x, y, z) = 0$
- パラメータ形式
  個々の座標をパラメータ（媒介変数）の関数として表現する.
  平面上の曲線: $x = f(t), \quad y = g(t)$
  空間内の曲面: $x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$

陽関数形式 (p.72)

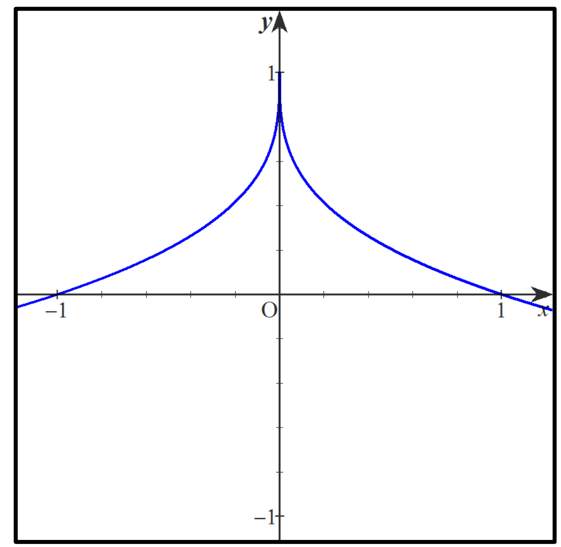
- 陽関数形式
  1つの座標値をほかの座標値の関数で定める.
  平面上の曲線: $y = f(x)$



$y = x^2$



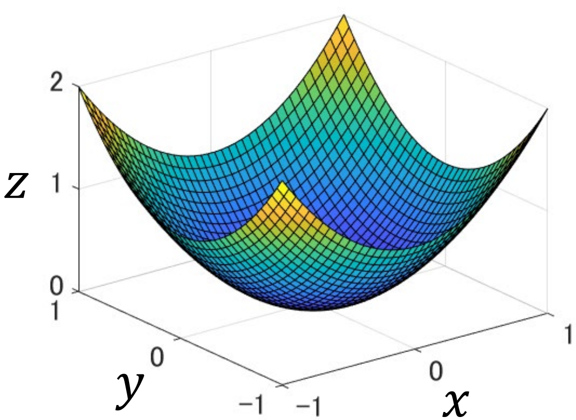
$y = \sin \pi x$



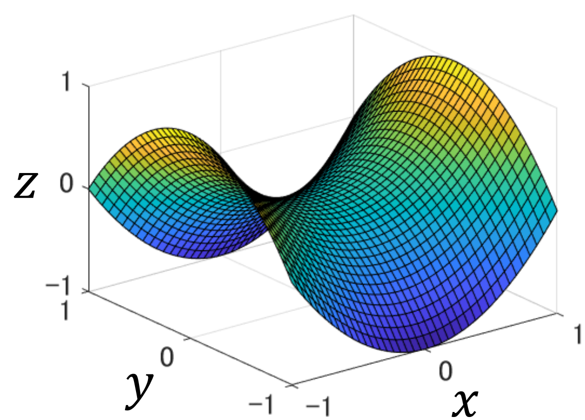
$y = 1 - \sqrt[3]{|x|}$

陽関数形式 (p.72)

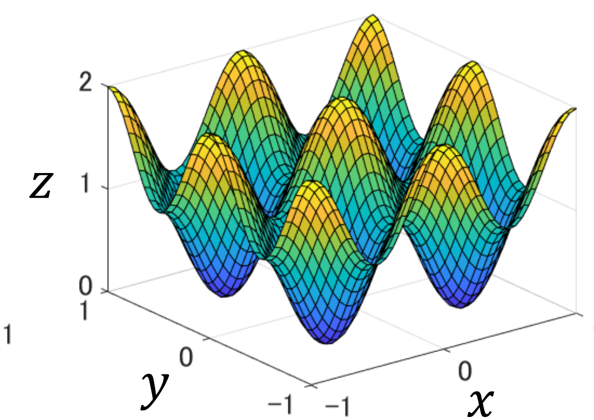
- 陽関数形式
  1つの座標値をほかの座標値の関数で定める.
  空間内の曲面: $z = f(x, y)$



$$z = x^2 + y^2$$



$$z = x^2 - y^2$$



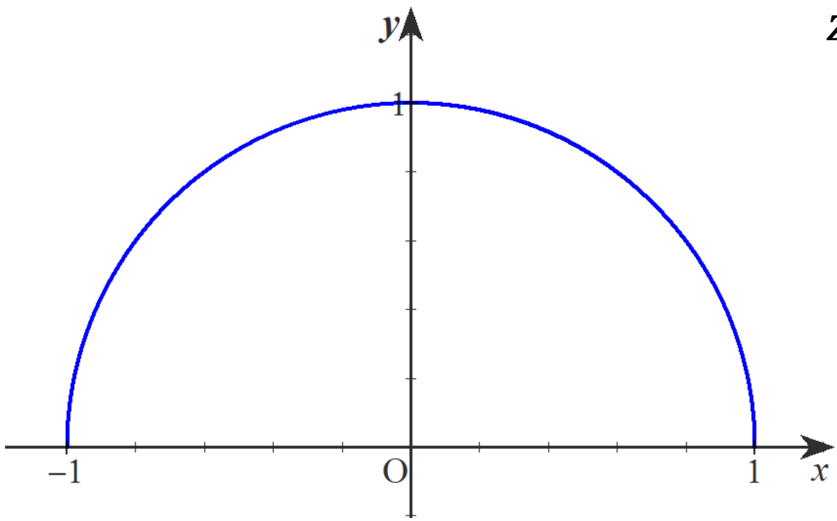
$$z = \cos^2 x + \cos^2 y$$

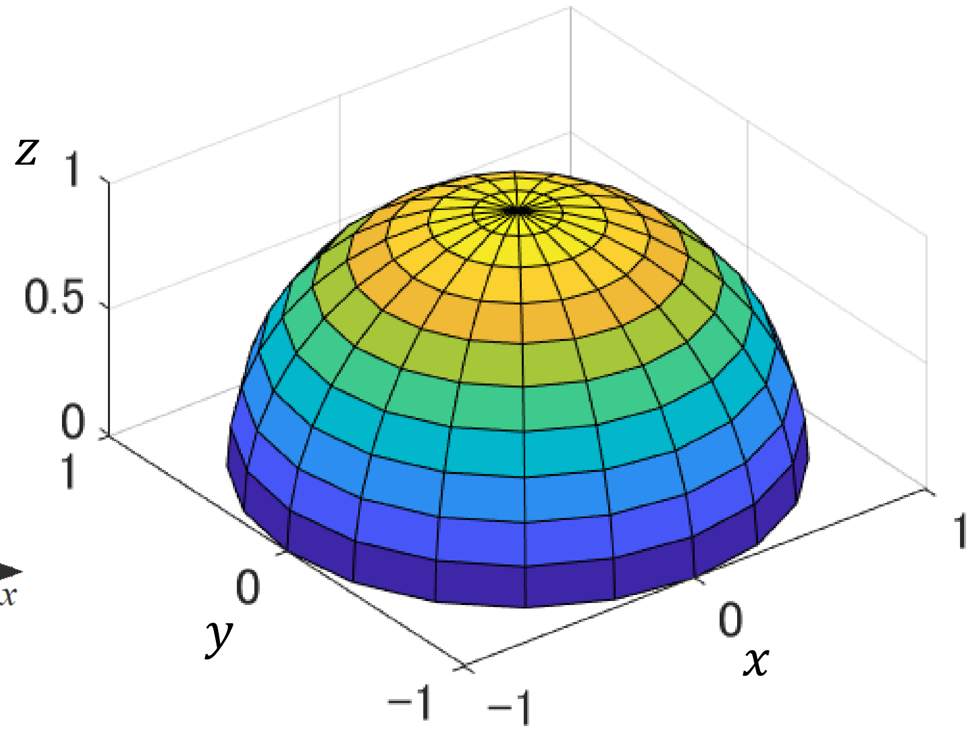
陽関数形式 (p.72)

問　半円と半球をそれぞれ陽関数形式で表現せよ.

陽関数形式 (p.72)

答



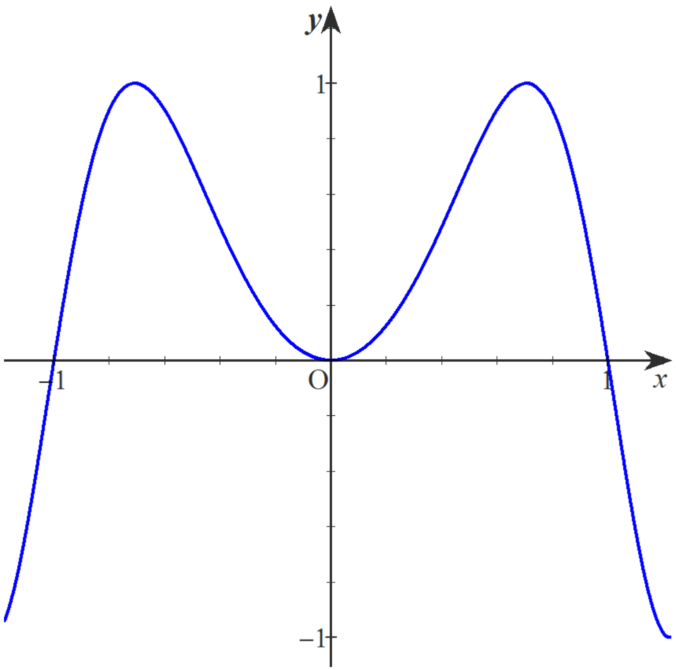


半円 $y = \sqrt{1 - x^2}$

半球 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

陽関数形式 (p.72)

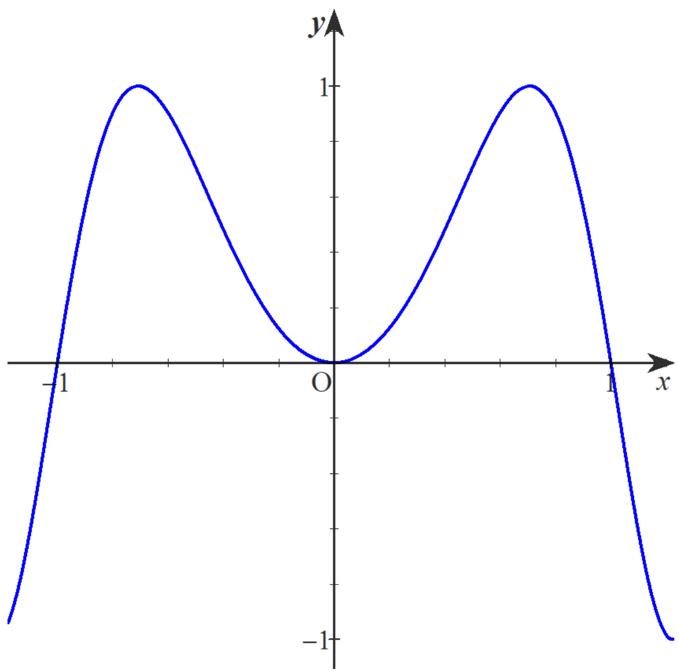
問　曲線 $y = \sin \pi x^2$ を y 軸周りに回転してできる曲面を陽関数形式で表現せよ.



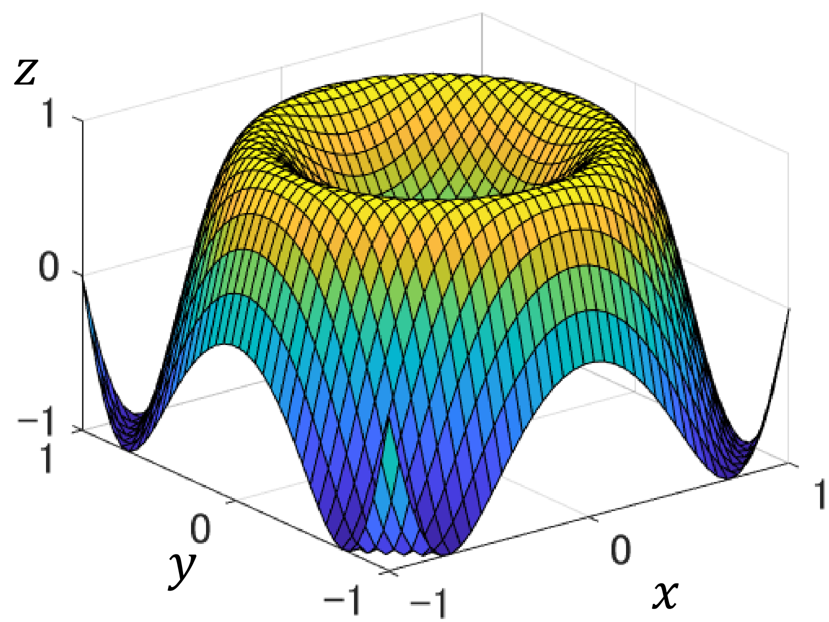
$$y = \sin \pi x^2$$

陽関数形式 (p.72)

答　曲線 $y = \sin(\pi x^2)$ の x を半径 r と考えれば，
曲面 $z = \sin(\pi r^2)$ は z 軸を中心に回転させた形状を表す．
$r^2 = x^2 + y^2$ より，曲面は $z = \sin\pi(x^2 + y^2)$ である．



$y = \sin\pi x^2$



$z = \sin\pi(x^2 + y^2)$

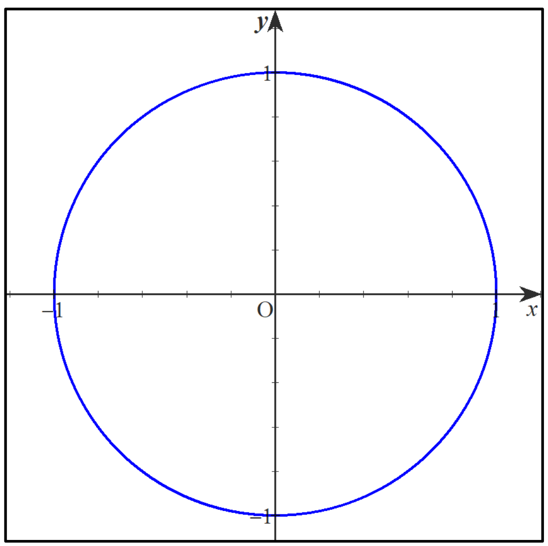
陽関数形式 (p.72)

陽関数形式の特徴と限界

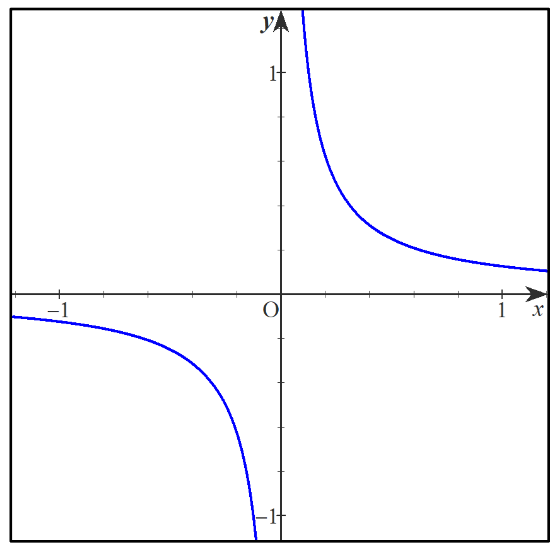
- 陽関数で表現された曲線では，任意の x 座標に対して，曲線上の点がたかだか1つ存在する.
  陽関数で表現された曲面では，任意の xy 座標の組に対して，曲面上の点がたかだか1つ存在する.
- x 座標に対応する点が2つ以上ある曲線は表現できない.
  xy 座標の組に対応する点が2つ以上ある曲面は表現できない.
- 陽関数曲面の応用例：地形の表現（ハイトフィールド）

陰関数形式 (p.73)

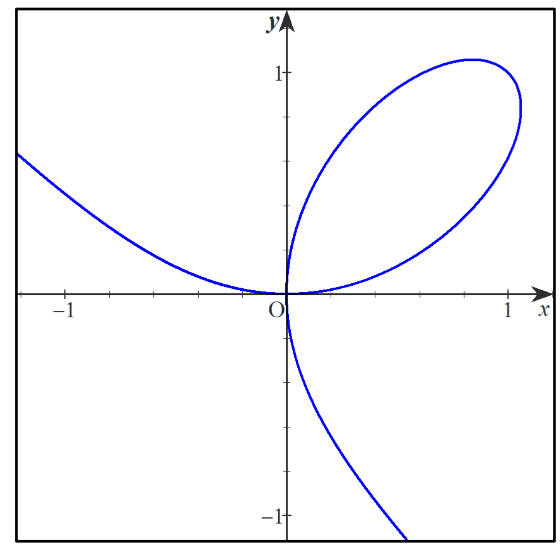
- 陰関数形式
  関数を陰に用いて曲線や曲面を定義する.
  平面上の曲線: $f(x, y) = 0$



$x^2 + y^2 - 1 = 0$



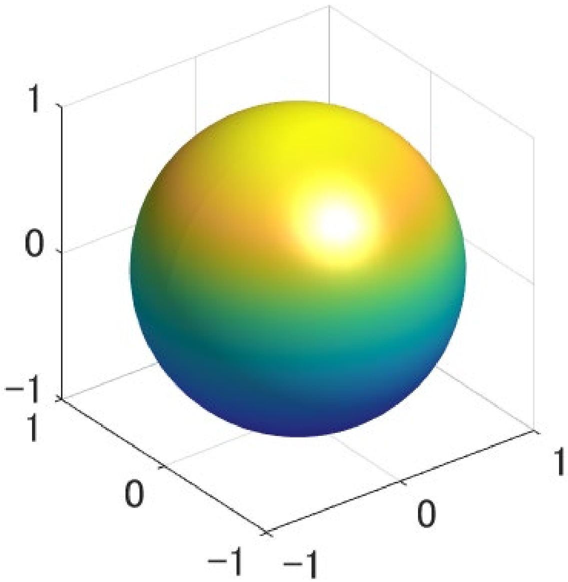
$8xy - 1 = 0$



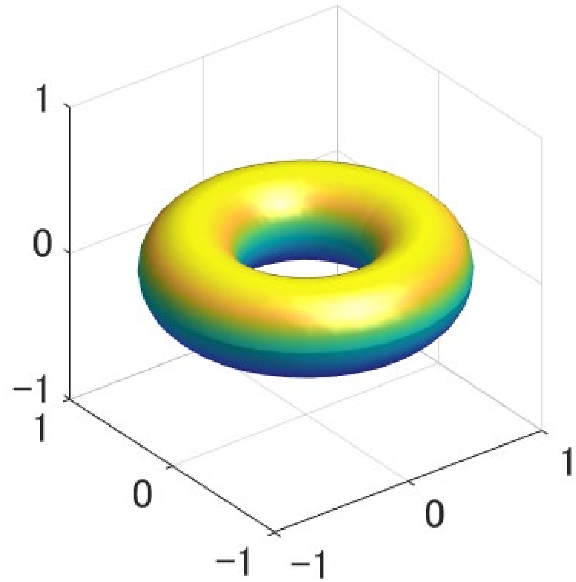
$x^3 - 2xy + y^3 = 0$

陰関数形式 (p.73)

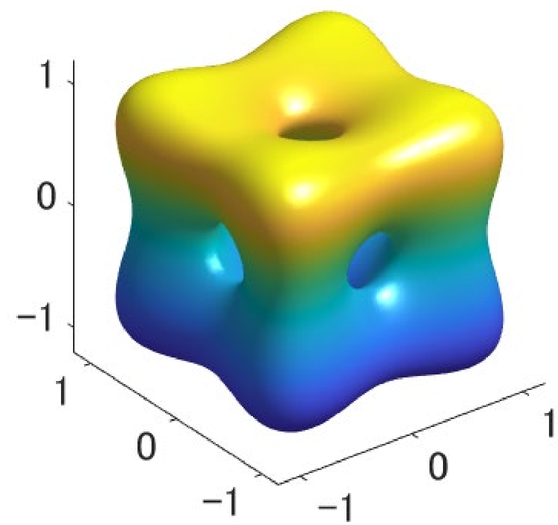
- 陰関数形式
  関数を陰に用いて曲線や曲面を定義する.
  空間内の曲面: $f(x, y, z) = 0$



$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$



$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 0.7\right) + z^2 - 0.3^2 = 0$$



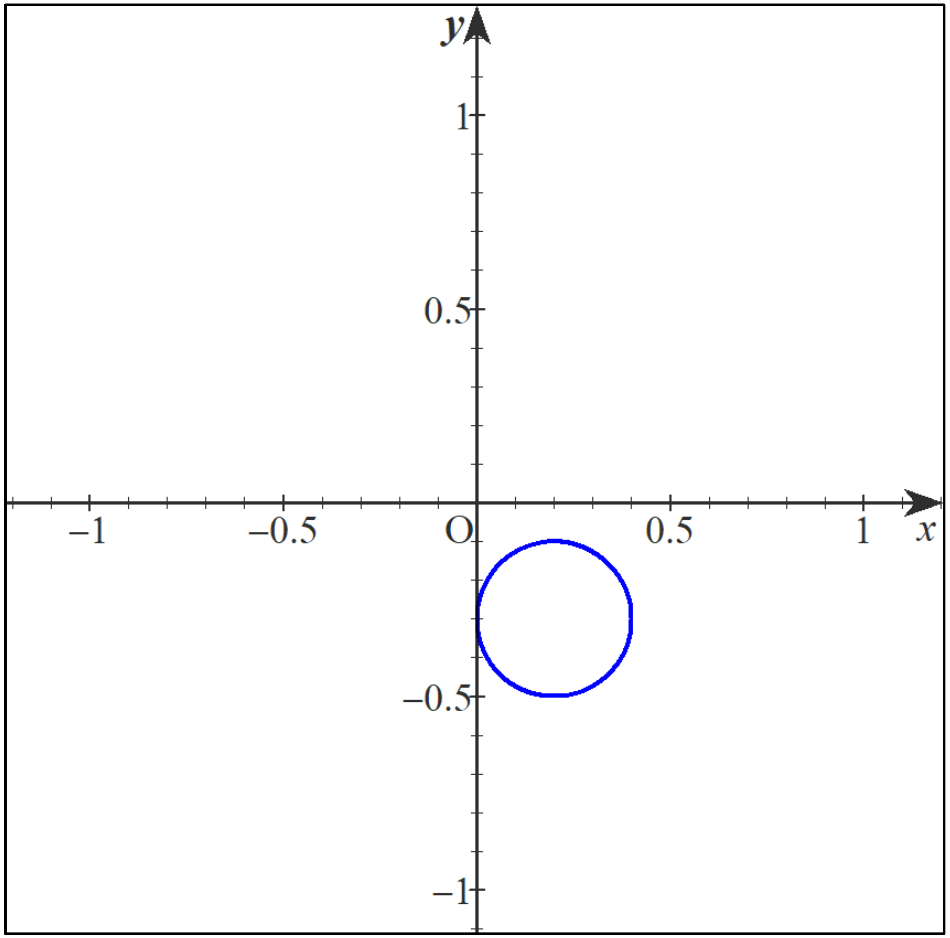
$$x^4 + y^4 + z^4 - (x^2 + y^2 + z^2) - 3 = 0$$

陰関数形式 (p.73)

問　中心が $(0.2, -0.3)$ で半径が 0.2 の円を陰関数形式で表現せよ.

陰関数形式 (p.73)

答 $(x-0.2)^2+(y+0.3)^2-0.04=0$



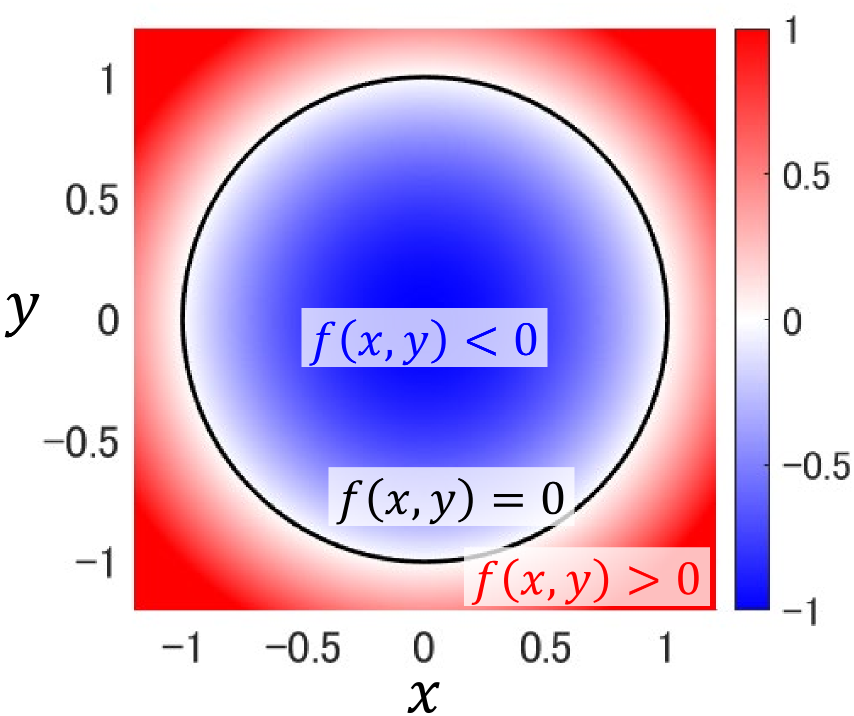
陰関数形式 (p.73)

問　陰関数表現における関数 $f(x, y)$ の値の意味を考えてみよう.

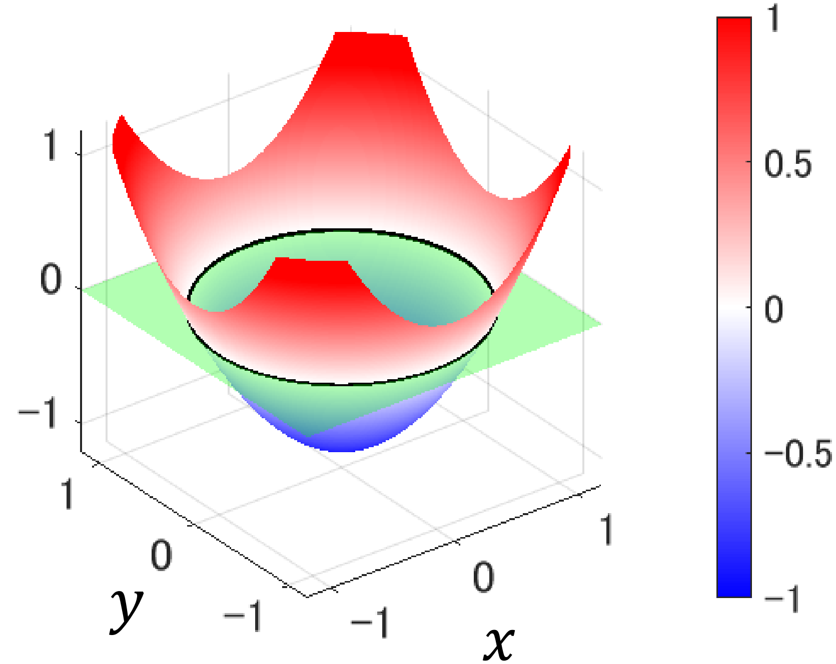
陰関数形式 (p.73)

答　$f(x,y)=x^2+y^2-1$ について考える.

- 関数の値は内側が負，外側が正である.（逆も可）
- 曲面は負の領域と正の領域の境界として定義される.



関数 $f(x,y)$ の値（色地図）



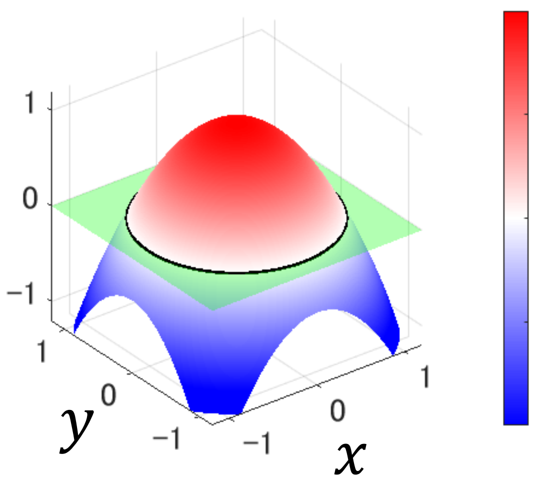
関数 $f(x,y)$ の値（鳥観図）

陰関数形式 (p.73)

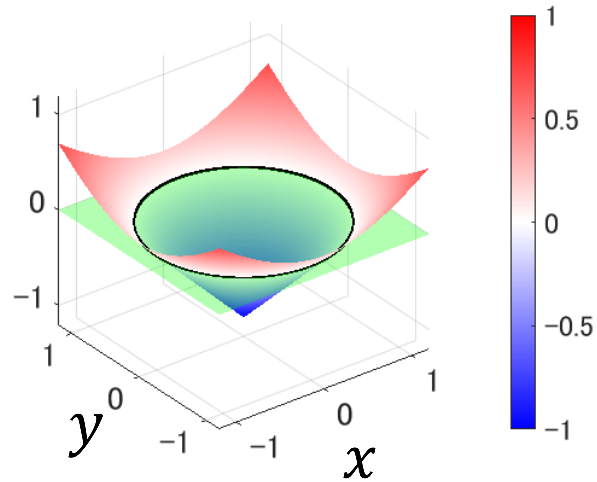
問　原点中心，半径 1 の円を陰関数形式で表す．
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ 以外にどのような関数があるか．

陰関数形式 (p.73)

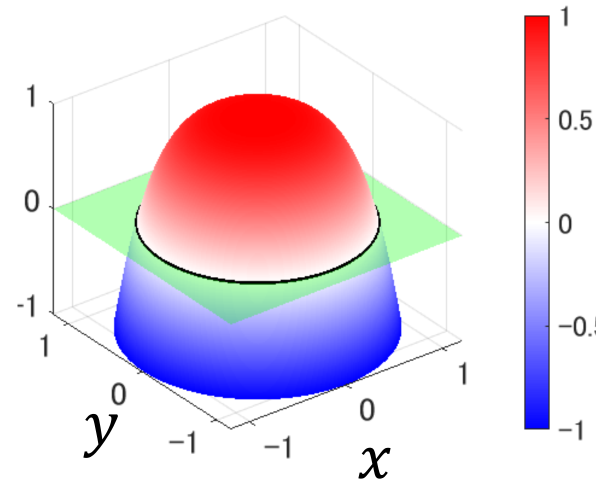
答 たくさん作れる.



$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$



$$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^2$$

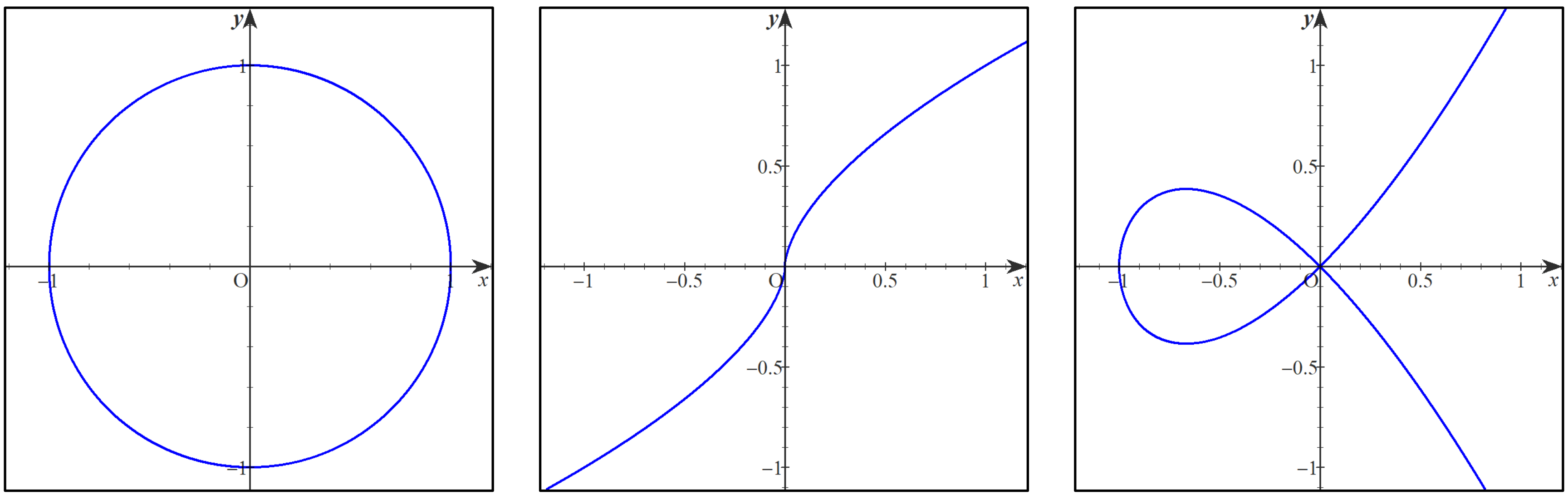
陰関数形式 (p.73)

陰関数形式の特徴と限界

- 物体の内側と外側で関数の符号が異なるため，空間上の点の内外判定が容易である.
- 表示のために折れ線／多面体に変換するのは簡単ではない（詳細は教科書「3-6-5 等値面抽出」を参照）.

パラメータ形式 (p.74)

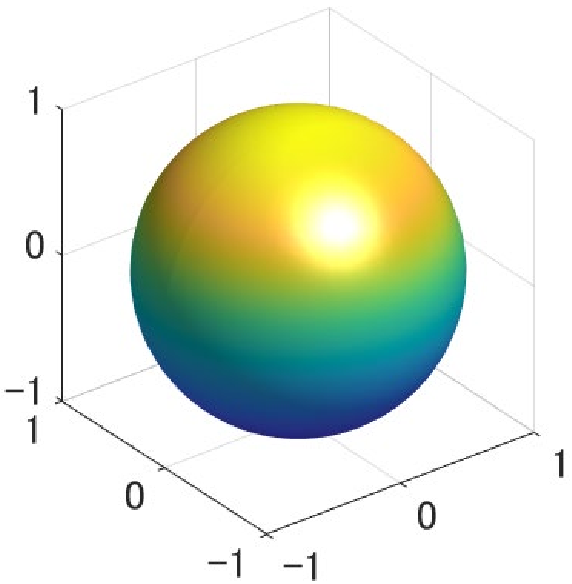
- パラメータ形式
  個々の座標をパラメータの関数として表現する.
  平面上の曲線: $x = f(t), \quad y = g(t)$



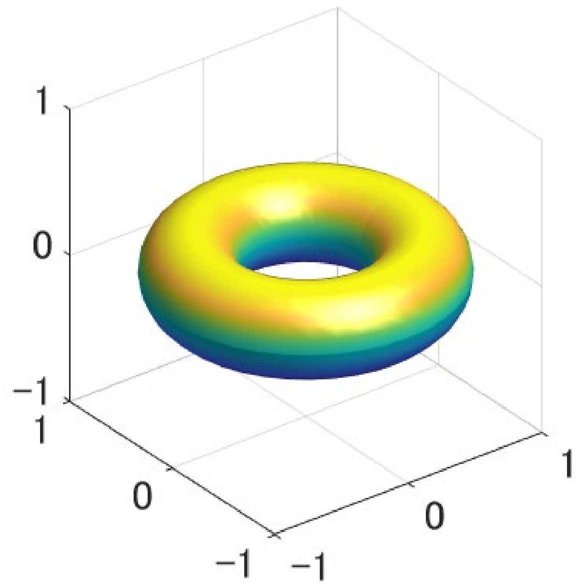
$x = \cos t$	$x = t^5$	$x = t^2 - 1$
$y = \sin t$	$y = t^3$	$y = t^3 - t$
$(0 \leq t < 2\pi)$	$(-\infty < t < \infty)$	$(-\infty < t < \infty)$

パラメータ形式 (p.74)

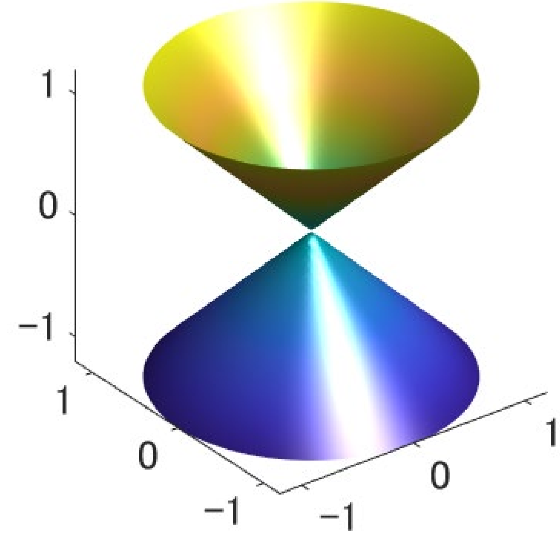
- パラメータ形式
  個々の座標をパラメータの関数として表現する.
  空間内の曲面: $x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$



$$x = \cos u \cos v$$
$$y = \sin u \cos v$$
$$z = \sin v$$
$$\left(0 \le u < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}\right)$$



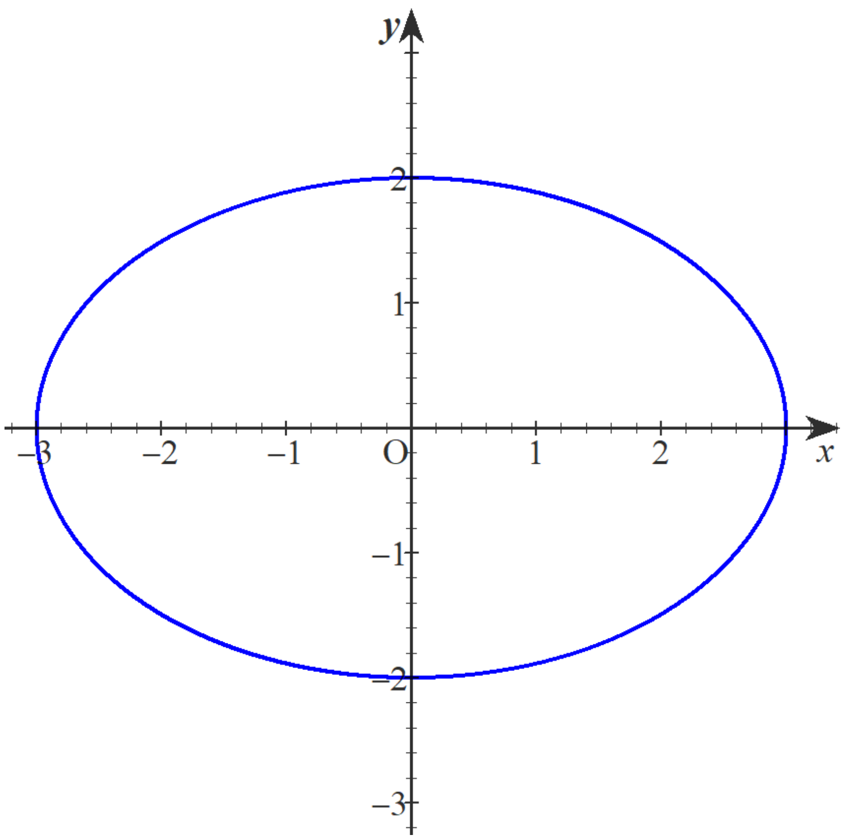
$$x = (0.7 + 0.3 \cos v) \cos u$$
$$y = (0.7 + 0.3 \cos v) \sin u$$
$$z = 0.3 \sin v$$
$$(0 \le u < 2\pi, 0 \le v \le 2\pi)$$



$$x = v \cos u$$
$$y = v \sin u$$
$$z = v$$
$$(0 \le u < 2\pi, -\infty < t < \infty)$$

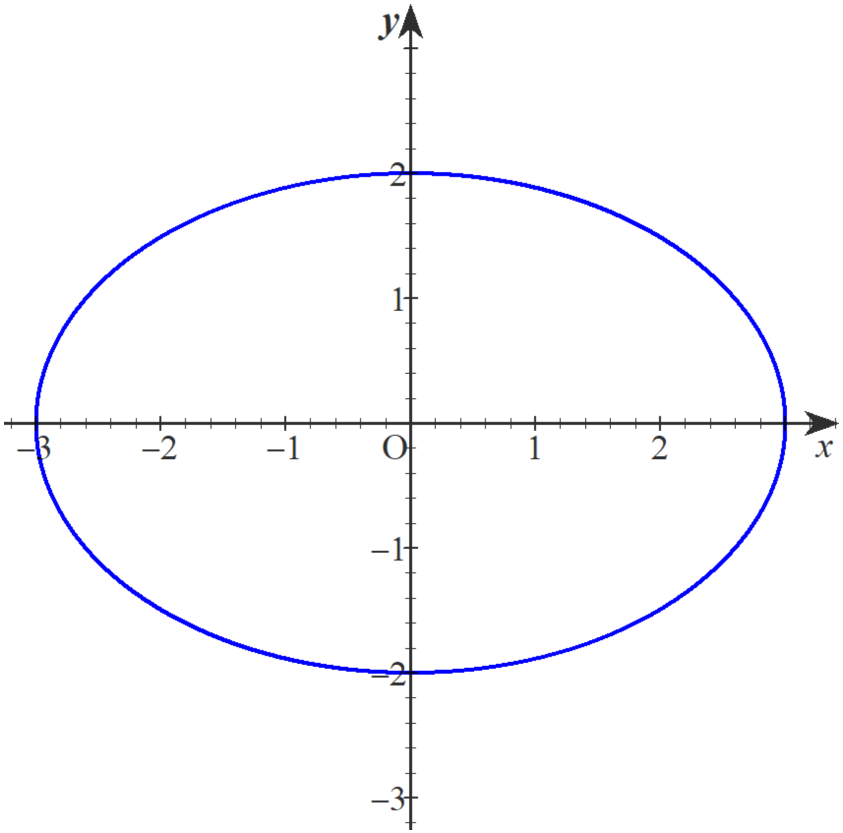
パラメータ形式 (p.74)

問　楕円の陰関数形式 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ をパラメータ形式で表現せよ.



パラメータ形式 (p.74)

答 $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$ とおけば，楕円の方程式 $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ を満たす．パラメータの範囲は $0 \le t < 2\pi$ とすればよい．

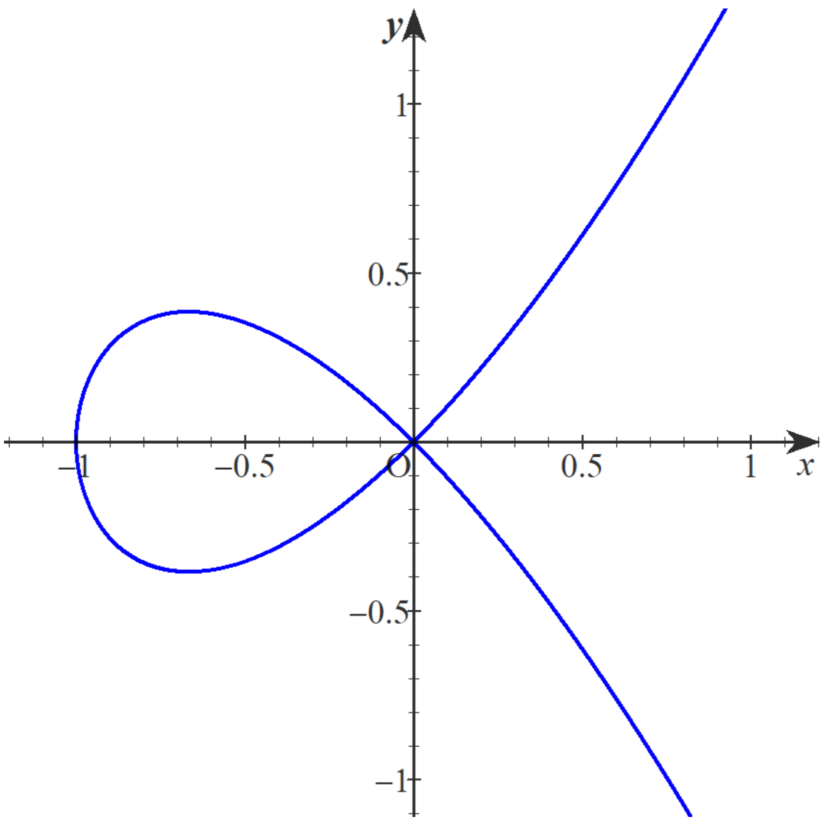


パラメータ形式 (p.74)

問　パラメータ形式の曲線

$$x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t\ \ (-\infty < t < \infty)$$

を陰関数形式で表現せよ.



パラメータ形式 (p.74)

答 $y = t^3 - t = t(t^2 - 1)$ より,

$$y^2 = t^2(t^2 - 1)^2 \qquad (1)$$

を得る. 一方, $x = t^2 - 1$ より,

$$t^2 = x + 1 \qquad (2)$$

である. (2) を (1) に代入すると,

$$y^2 = (x + 1)x^2$$

$$\therefore (x + 1)x^2 - y^2 = 0$$

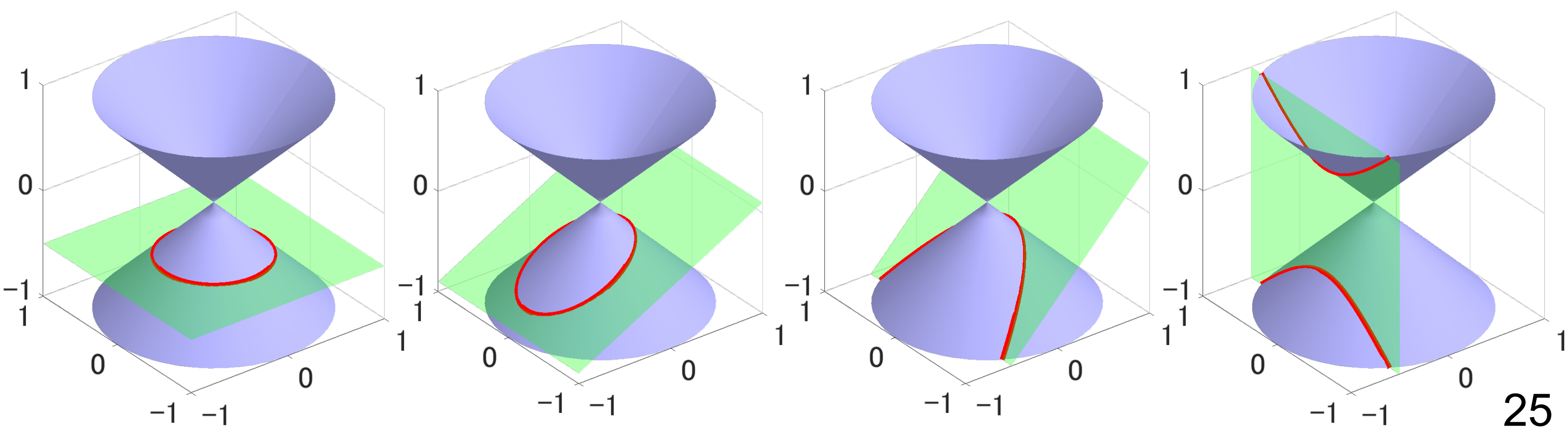
2次曲線 (p.75-)

２次曲線とは

- 陰関数形式で表現される曲線
$$ax^2 + by^2 + c + 2dxy + 2ex + 2fy = 0$$
の総称（左辺は x, y に関する2次多項式）

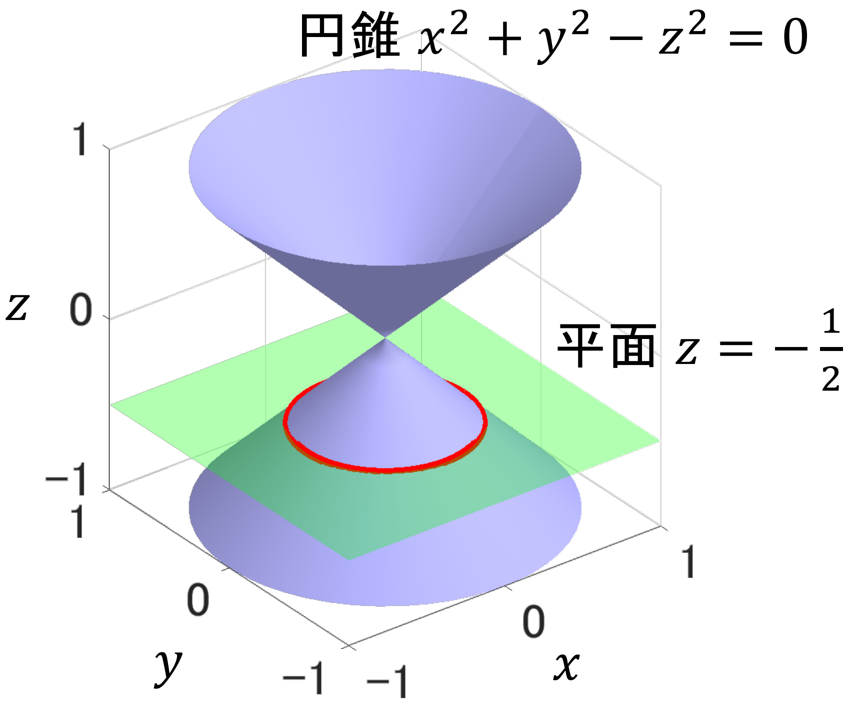
- 2次曲線は楕円，放物線，双曲線のいずれかである.

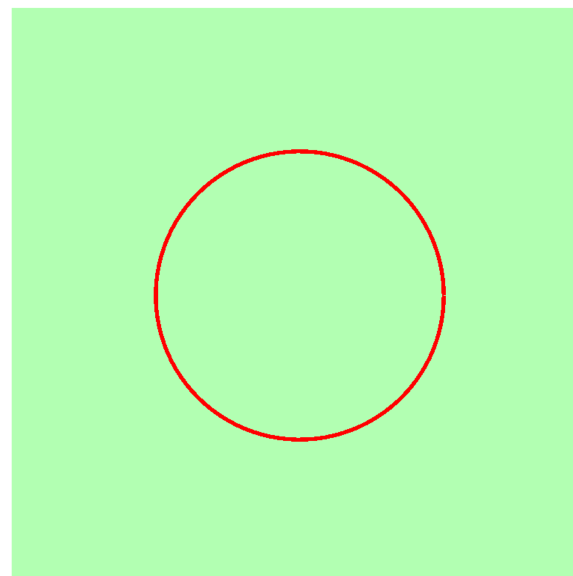
- 2次曲線は円錐曲線ともよばれる. これはすべての2次曲線が円錐面の断面線として得られることに由来している.



2次曲線 (p.75-)

円錐曲線：円





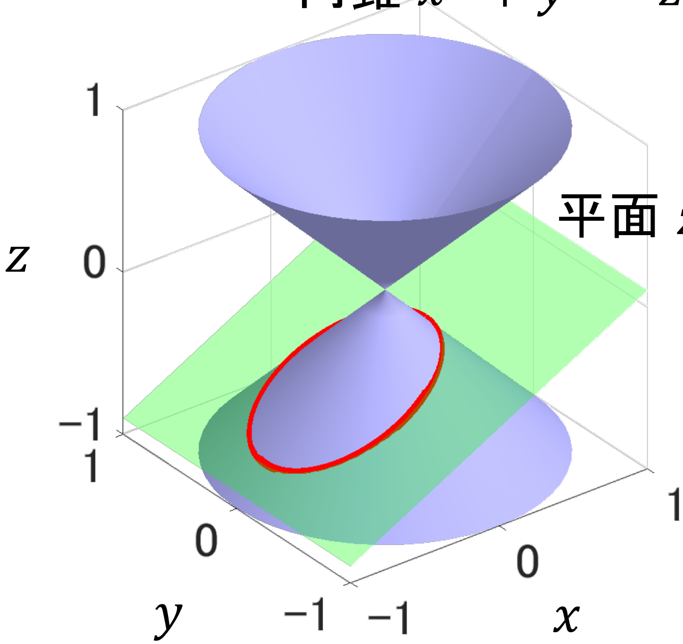
切り口の形状は円

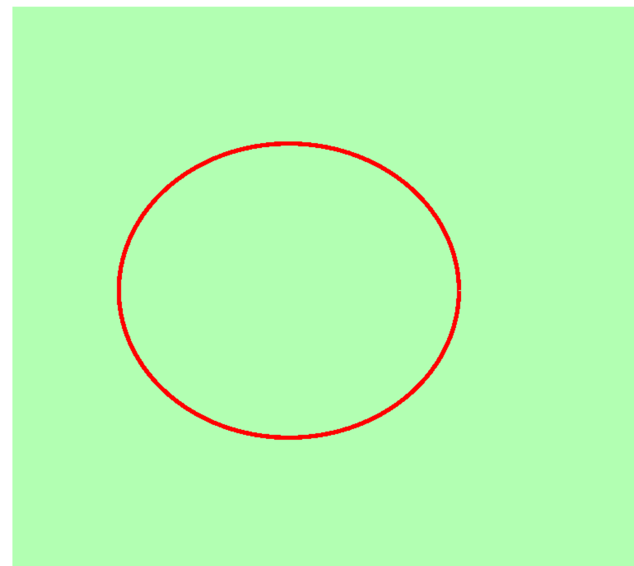
2次曲線 (p.75-)

円錐曲線:楕円

円錐 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

平面 $z = \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$

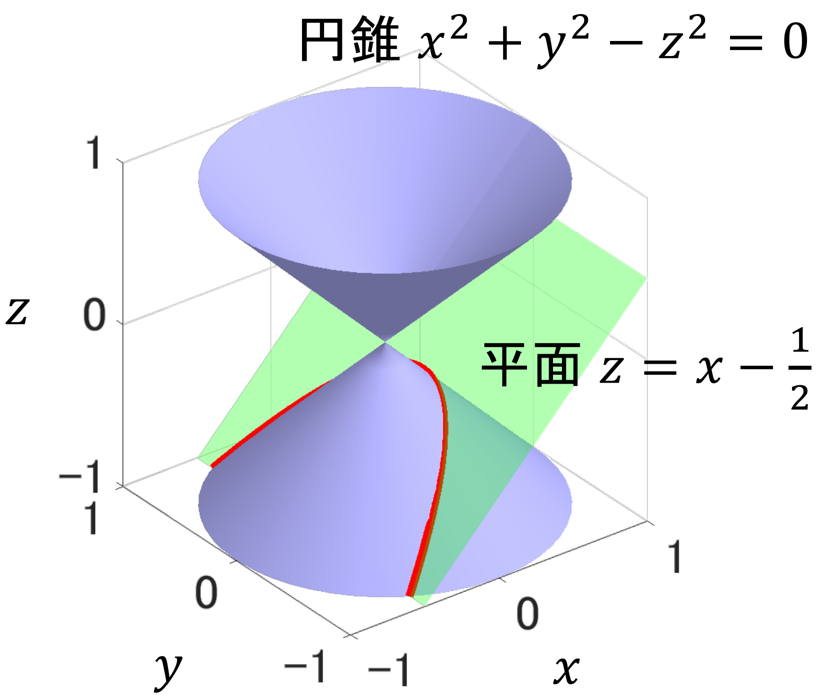


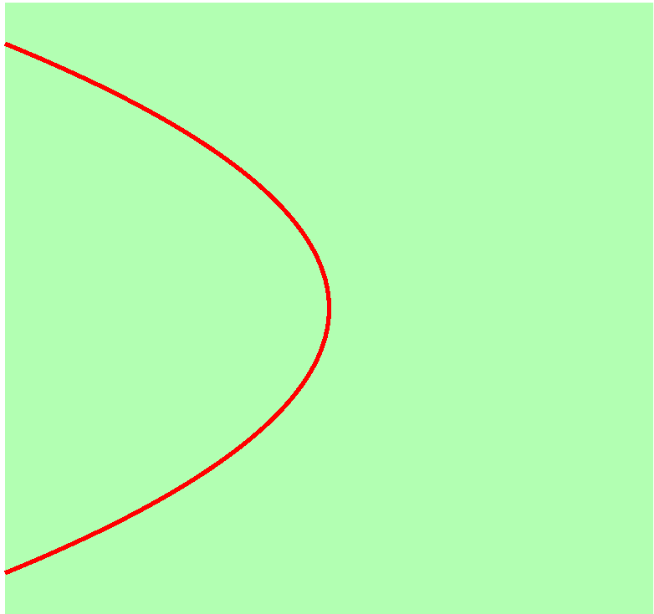


切り口の形状は楕円

2次曲線 (p.75-)

円錐曲線:放物線

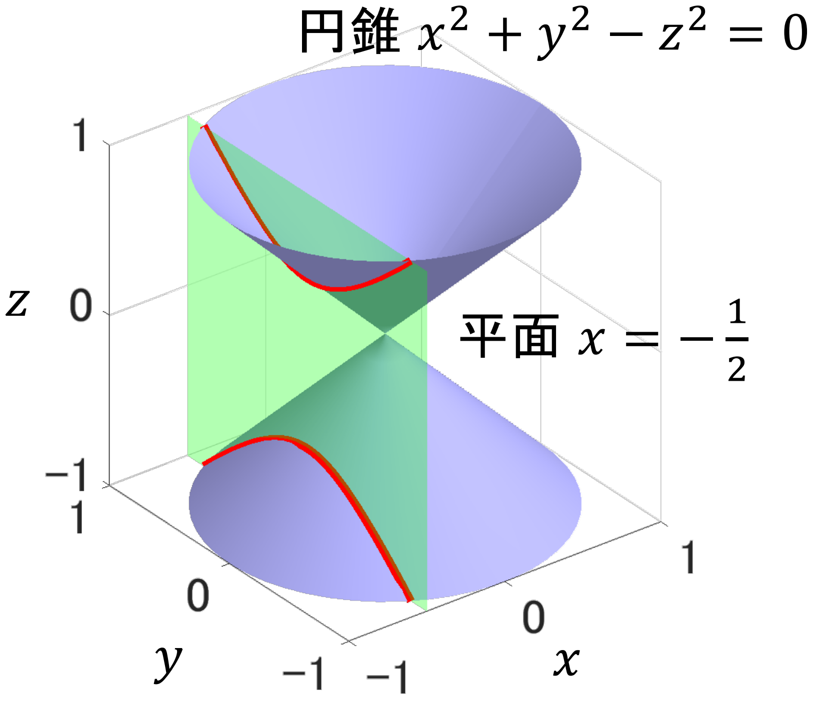


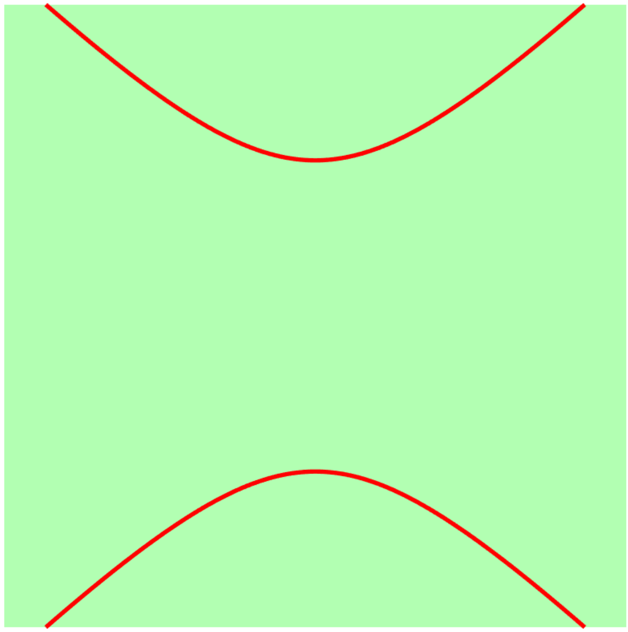


切り口の形状は放物線

2次曲線 (p.75-)

円錐曲線：双曲線





切り口の形状は双曲線

2次曲線 (p.75-)

２次曲線の標準形

- 楕円の標準形

  陰関数形式　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

  パラメータ形式　$x=a\cos\theta\,,\quad y=b\sin\theta$

- 放物線の標準形

  陰関数形式　$y^2-ax=0$

- 双曲線の標準形

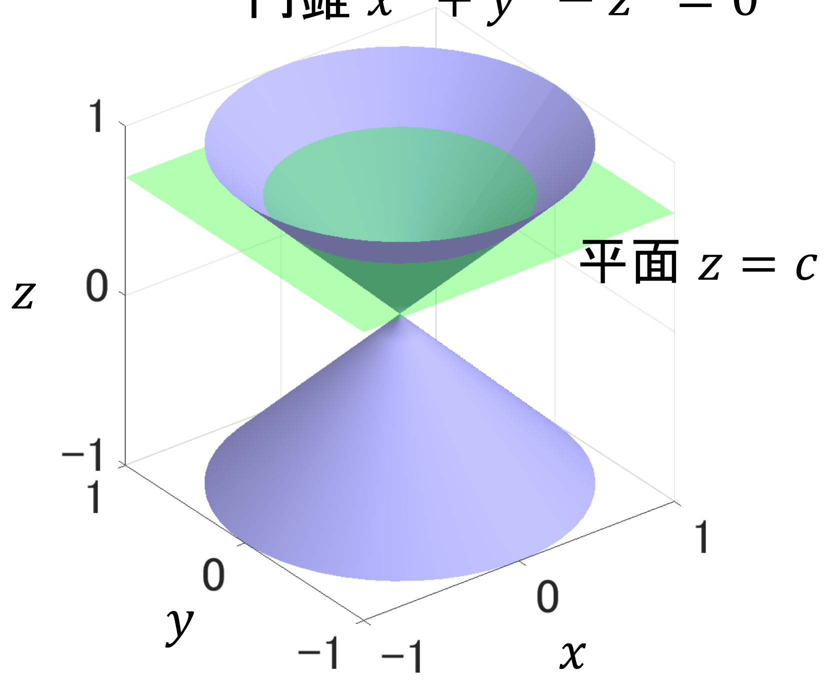
  陰関数形式　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

  パラメータ形式　$x=\frac{a}{\cos\theta},\quad y=b\tan\theta$

2次曲線は，平面上の平行移動と回転によって標準形に変換できる.

2次曲線 (p.75-)

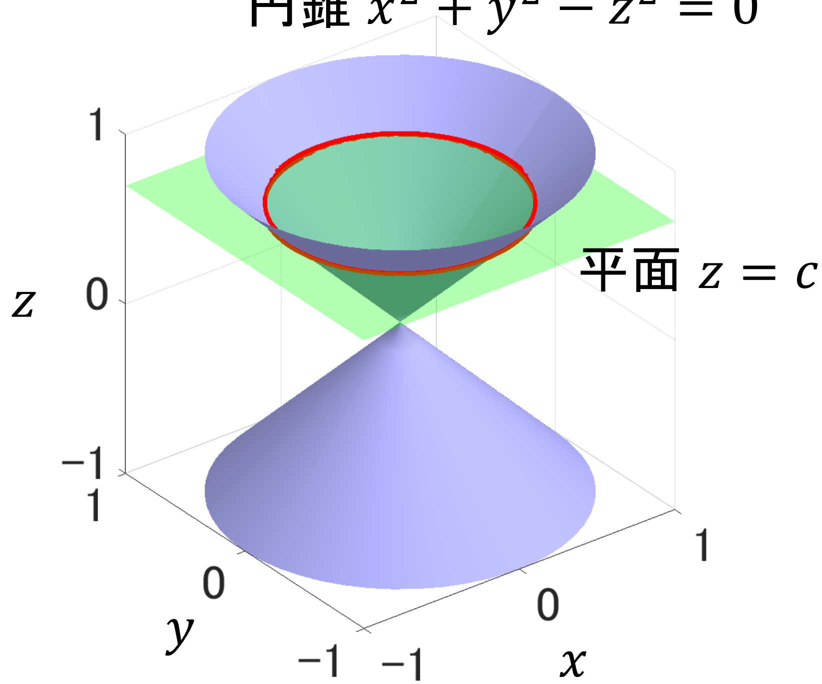
問　円錐 $x^2+y^2-z^2=0$ を平面 $z=c$ で切り取るとどのような図形ができるか.

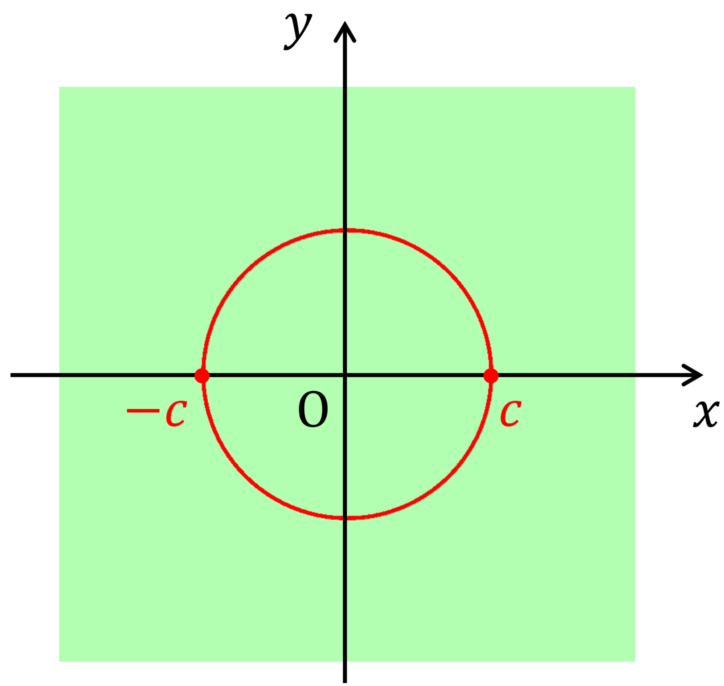


2次曲線 (p.75-)

答 $x^2+y^2-z^2=0$ に $z=c$ を代入すると，$x^2+y^2=c^2$ である．したがって，切り口は中心が $(0,0)$ で半径が c の円である．

円錐 $x^2+y^2-z^2=0$

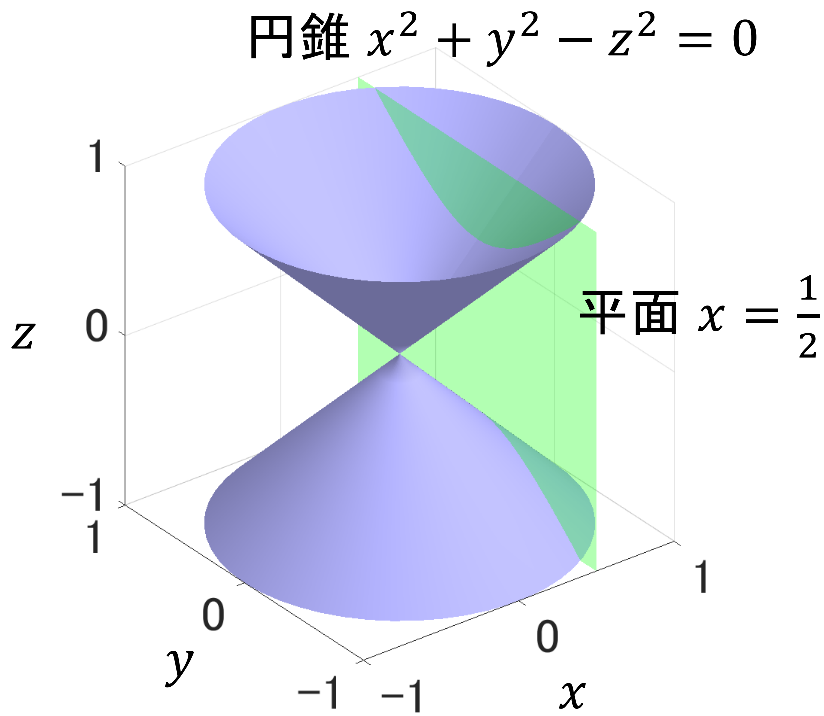




切り口は中心が $(0,0)$ で半径が c の円

2次曲線 (p.75-)

問　円錐 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ を平面 $x = \frac{1}{2}$ で切り取るとどのような図形ができるか.



2次曲線 (p.75-)

答　$x^2+y^2-z^2=0$ に $x=\frac{1}{2}$ を代入すると,

$$\frac{z^2}{(1/2)^2}-\frac{y^2}{(1/2)^2}-1=0$$

である. したがって切り口は zy 平面における双曲線である.