

デジタル信号処理 第12回 周波数応答

2023年6月27日

立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

今回の概要

- 前回の講義では、**デジタル信号** $\{f[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ に対する理想ローパスフィルタはsinc関数との畳み込みとして実現できることに加え、一般の**線形時不変システム**は**畳み込み**として表現できることを勉強した。
- 今回の講義では、**線形時不変システム**は**周波数応答**によって特徴付けられることを紹介し、さらに、所望の周波数応答を持つ線形時不変システムの実現法について勉強します！

(復習) 線形時不変システム = 畳み込み

$\{f[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を入力して $\{g[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を出力する線形時不変システムは
入力信号 $f[k]$ とインパルス応答 $h[k]$ の畳み込み $f * h$ として表現可能

$$g[k] = (f * h)[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k - l]$$

- インパルス応答 $h[k]$ はシステムの性質を表す
- インパルス応答が分かれば, 任意の入力信号に対する出力が計算できる

時間領域の畳み込み = 周波数領域の乗算

第5回講義で、アナログ信号の時間領域の畳み込み $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau) d\tau$

は、周波数領域では乗算 $G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$ になることを勉強した。

デジタル信号でも同様の性質があり、時間領域の畳み込み $g[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k - l]$

は、周波数領域では乗算 $G_d(\omega) = \frac{1}{T} F_d(\omega) H_d(\omega)$ になる!!

$$G_d(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k - l] \right) e^{-ikT\omega}$$

離散時間フーリエ変換

$$F_d(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-ikT\omega}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] \left(T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k - l] e^{-i(k-l)T\omega} \right) e^{-ilT\omega}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] H_d(\omega) e^{-ilT\omega} = H_d(\omega) \frac{1}{T} \left(T \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] e^{-ilT\omega} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{T} F_d(\omega) H_d(\omega)}}$$

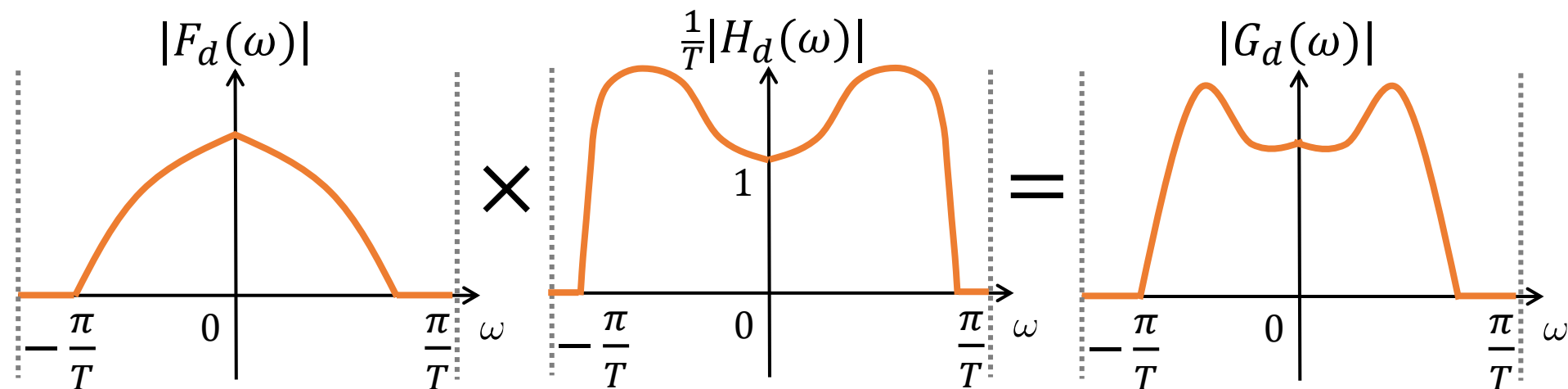
線形時不変システムの周波数応答

線形時不変システムの入力信号 $f[k]$ と出力信号 $g[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k-l]$

の周波数成分の変化率 $\frac{G_d(\omega)}{F_d(\omega)} = \frac{1}{T} H_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-ikT\omega}$

のことを，線形時不変システムの「**周波数応答**」と呼ぶ。

入力信号のスペクトル \times システムの周波数応答 $=$ 出力信号のスペクトル



移動平均フィルタ

現在の入力と直前の $N - 1$ 個の入力の, 計 N 個の平均値を出力するシステム

$$\text{インパルス応答 } h[k] = \begin{cases} 1/N & (k = 0, \dots, N - 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

出力は, 以下ようになる

$$g[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k-l] = f[k]h[0] + f[k-1]h[1] + \dots + f[k-N+1]h[N-1] = \frac{1}{N} \sum_{l=k-N+1}^k f[l]$$

直前の入力の平均

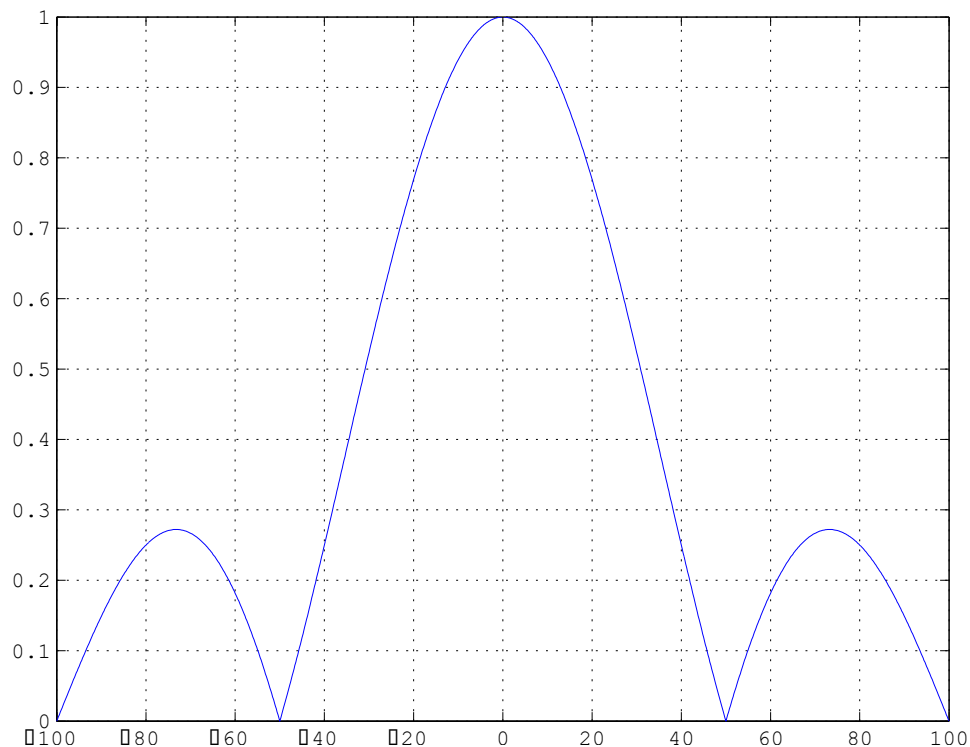
周波数応答は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} H_d(\omega) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{-ikT\omega} = \frac{1}{N} (1 + e^{-iT\omega} + e^{-i2T\omega} + \dots + e^{-i(N-1)T\omega}) \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{-iNT\omega}}{1 - e^{-iT\omega}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{(e^{iNT\omega/2} - e^{-iNT\omega/2})e^{-iNT\omega/2}}{(e^{iT\omega/2} - e^{-iT\omega/2})e^{-iT\omega/2}} = \frac{\sin(NT\omega/2)}{N \sin(T\omega/2)} e^{-i(N-1)T\omega/2} \end{aligned}$$

移動平均フィルタの周波数応答

振幅特性: $N = 4$ の場合

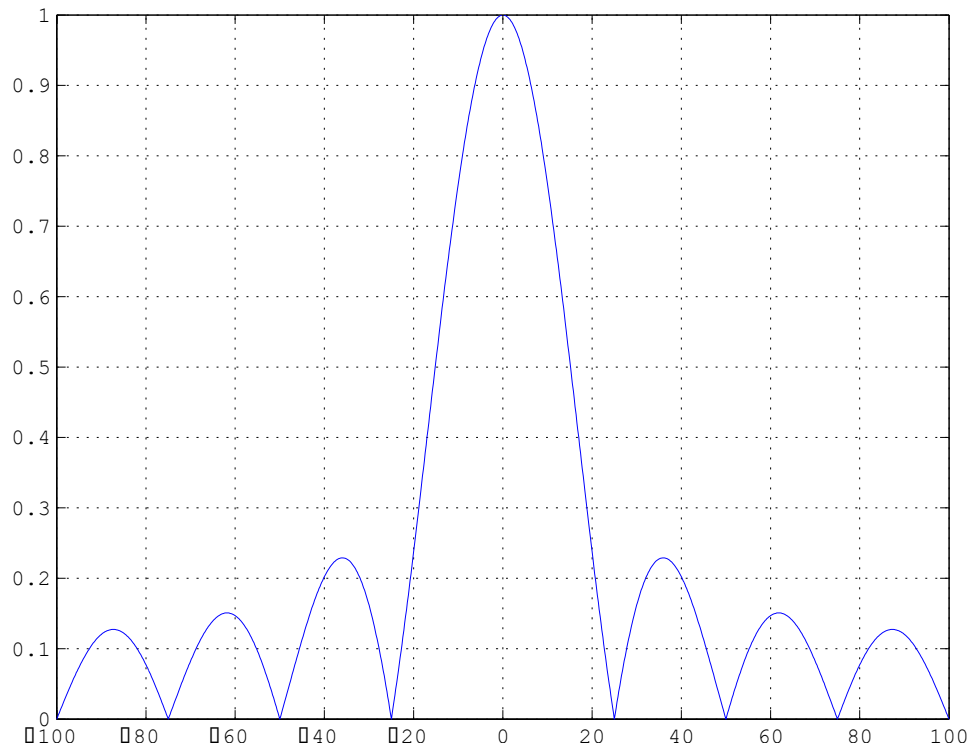
$$|H_d(\omega)| = \left| \frac{\sin(NT\omega/2)}{N \sin(T\omega/2)} \right|$$



$$T = \frac{1}{200}$$

振幅特性: $N = 8$ の場合

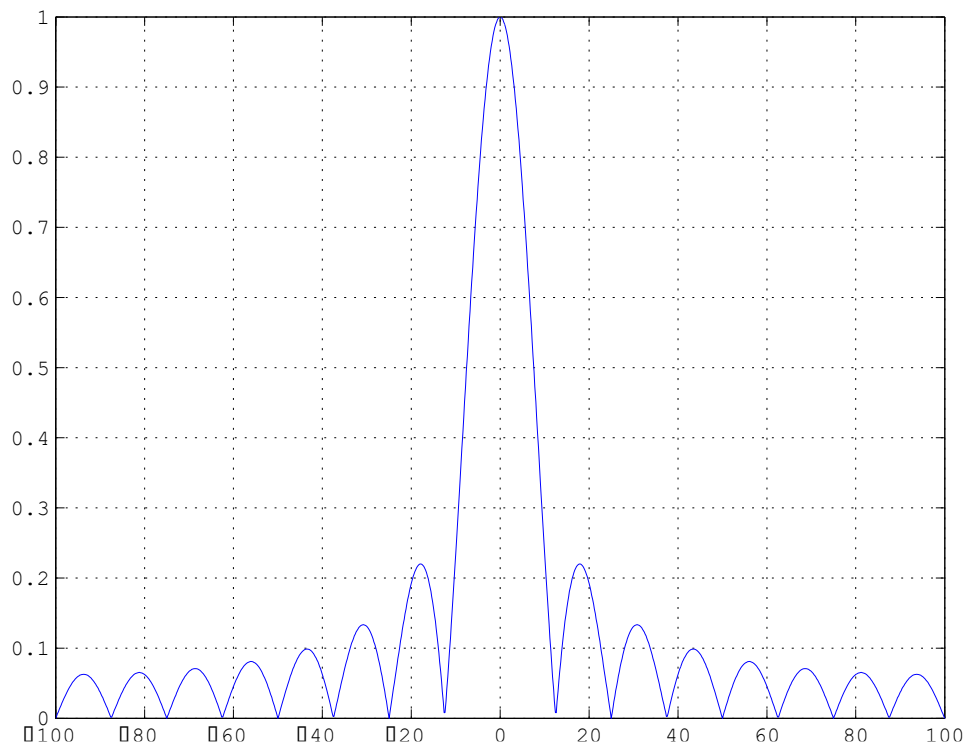
$$|H_d(\omega)| = \left| \frac{\sin(NT\omega/2)}{N \sin(T\omega/2)} \right|$$



$$T = \frac{1}{200}$$

振幅特性: $N = 16$ の場合

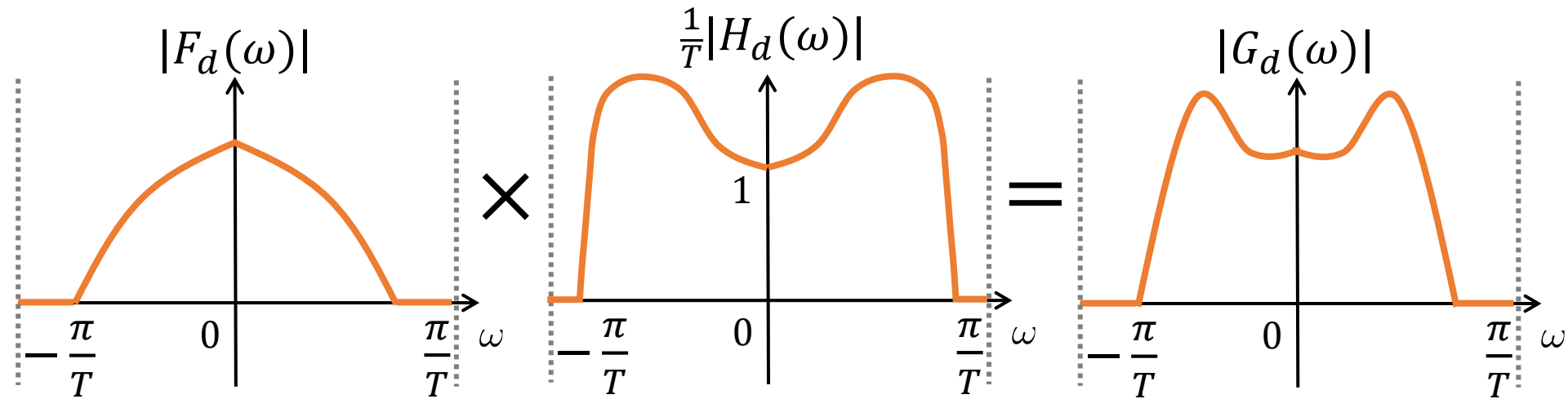
$$|H_d(\omega)| = \left| \frac{\sin(NT\omega/2)}{N \sin(T\omega/2)} \right|$$



$$T = \frac{1}{200}$$

線形時不変システムの設計

入力信号のスペクトル \times システムの周波数応答 $=$ 出力信号のスペクトル



以下の工程により、所望の変換を可能にする線形時不変システムを構築できる！！

1. 最初に、所望の周波数応答 $\frac{1}{T}H_d(\omega)$ を決定する. (所望のイコライザを設定する)

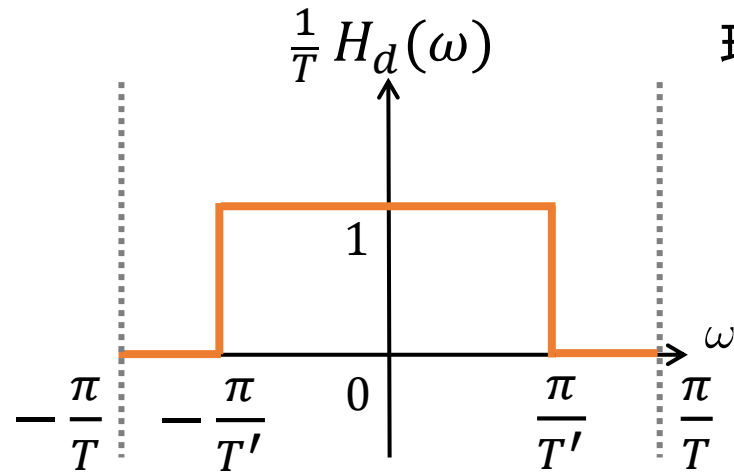
2. 離散時間フーリエ逆変換により、 $H_d(\omega)$ から $h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H_d(\omega) e^{ikT\omega} d\omega$ を求める. (周波数応答からインパルス応答を逆算)

3. インパルス応答 $h[k]$ と入力信号 $f[k]$ を畳み込む $g[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k-l]$.

(復習) 理想ローパスフィルタ = sinc 関数との畳み込み

理想ローパスフィルタ

ある $p \in (0,1)$ に対して $\frac{\pi}{T'} = p \frac{\pi}{T}$ が成り立つとして、
理想ローパスの周波数特性を



$$\frac{1}{T} H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \frac{\pi}{T'}) \\ 0 & (|\omega| > \frac{\pi}{T'}) \end{cases} \quad \text{のように定義する.}$$

$$\Updownarrow \\ H_d(\omega) = \begin{cases} T & (|\omega| \leq \frac{\pi}{T'}) \\ 0 & (|\omega| > \frac{\pi}{T'}) \end{cases}$$

インパルス応答は sinc 関数になる!! (前回のスライドとは T と T' が入れ替わっているので注意)

$$\begin{aligned} h[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T'}}^{\frac{\pi}{T'}} H_d(\omega) e^{ikT\omega} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T'}}^{\frac{\pi}{T'}} e^{ikT\omega} d\omega = \frac{T}{T'} \operatorname{sinc}\left(\frac{kT}{T'}\right) \\ &= p \operatorname{sinc}(kp) \end{aligned}$$

したがって理想ローパスフィルタは、

$$g[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] p \operatorname{sinc}((k-l)p) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] \frac{\sin((k-l)p\pi)}{(k-l)\pi} \quad \text{となる.}$$

実は今までの話は、リアルタイムの処理には使えない…

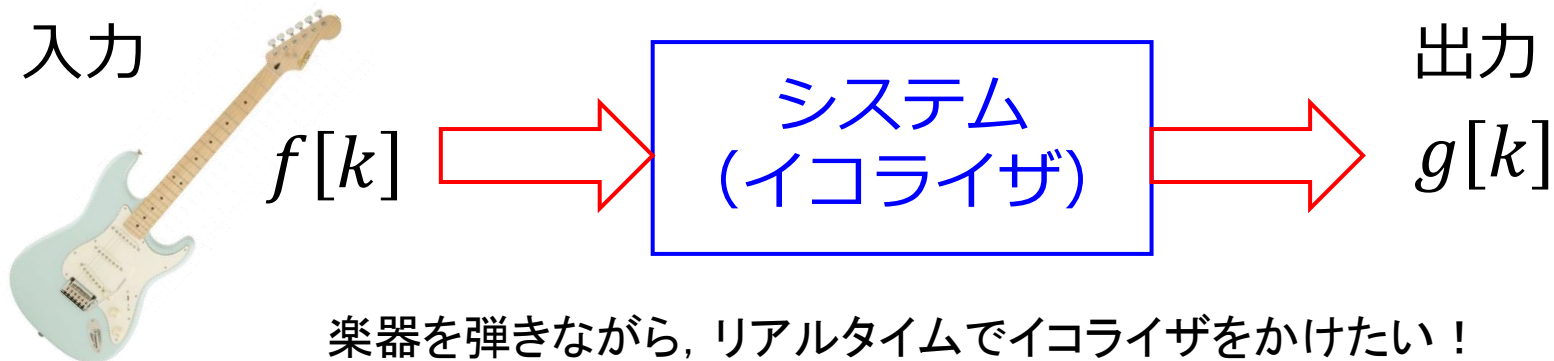
以下の工程により、所望の変換を可能にする線形時不変システムを構築できる！！

1. 最初に、所望の周波数応答 $H_d(\omega)$ を決定する。（所望のイコライザを設定する）

2. 離散時間フーリエ逆変換により、 $H_d(\omega)$ から $h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H_d(\omega) e^{ikT\omega} d\omega$ を求める。（第6回講義資料参照）

3. インパルス応答 $h[k]$ と入力信号 $f[k]$ を畳み込む $g[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k-l]$.

上記の方法で、画像や、既に録音済みの音源に対しては、所望の変換を適用させることができる！ しかし、楽器を演奏しながらリアルタイムでイコライザを適用させるといった処理には使えない！ ➡ なぜ??

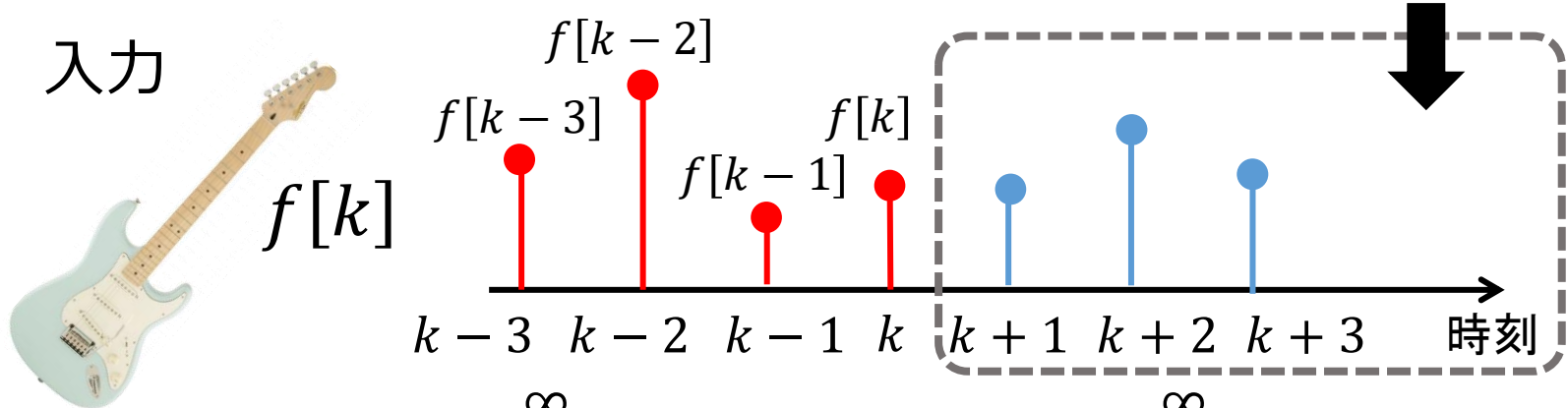


楽器を弾きながら、リアルタイムでイコライザをかけたい！

リアルタイム処理では未来の信号値は計算に 使えない

楽器を弾いていて時刻 k になったとする。

未来の時刻に弾く音はまだ確定していない。



$$\underline{g[k]} = (f * h)[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k-l] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[k-l] h[l]$$

現在の出力

$$= \cdots + \underline{f[k-2]h[2]} + \underline{f[k-1]h[1]} + \underline{f[k]h[0]}$$

過去に弾いた音

過去に弾いた音

現在の入力

$$+ \underline{f[k+1]h[-1]} + \underline{f[k+2]h[-2]} + \cdots$$

未来の音(未確定)

未来の音(未確定)

リアルタイム処理では、未来の時刻の情報は使うことはできない！

リアルタイム処理可能 = 因果的なシステム

$$\underbrace{g[k]}_{\text{現在の出力}} = (f * h)[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k-l] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \underbrace{f[k-l]}_{\text{過去の入力}} h[l]$$

$$= \cdots + \underbrace{f[k-2]}_{\text{過去に弾いた音}} h[2] + \underbrace{f[k-1]}_{\text{過去に弾いた音}} h[1] + \underbrace{f[k]}_{\text{現在の入力}} h[0]$$

$$\boxed{+ \underbrace{f[k+1]}_{\text{未来の音(未確定)}} h[-1] + \underbrace{f[k+2]}_{\text{未来の音(未確定)}} h[-2] + \cdots}$$

$h[k] = 0 \quad (k = -1, -2, \dots)$ とすれば, 未来の情報は使われない

$$= \cdots + f[k-2]h[2] + f[k-1]h[1] + f[k]h[0]$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} f[k-l] h[l]$$

$h[k] = 0 \quad (k = -1, -2, \dots)$ を満たすシステムは因果的であるという.

2種類の因果的システム：FIRフィルタとIIRフィルタ

因果的システム $g[k] = \sum_{l=0}^{\infty} f[k-l] h[l]$ に関して,

インパルス応答 $h[k]$ がある正整数 M に対して, $h[k] = 0$ ($k > M$) を満たすとき, このシステムは**FIR (Finite Impulse Response) フィルタ**と

呼ばれ, $g[k] = \sum_{l=0}^M f[k-l] h[l]$ と表すことができる.

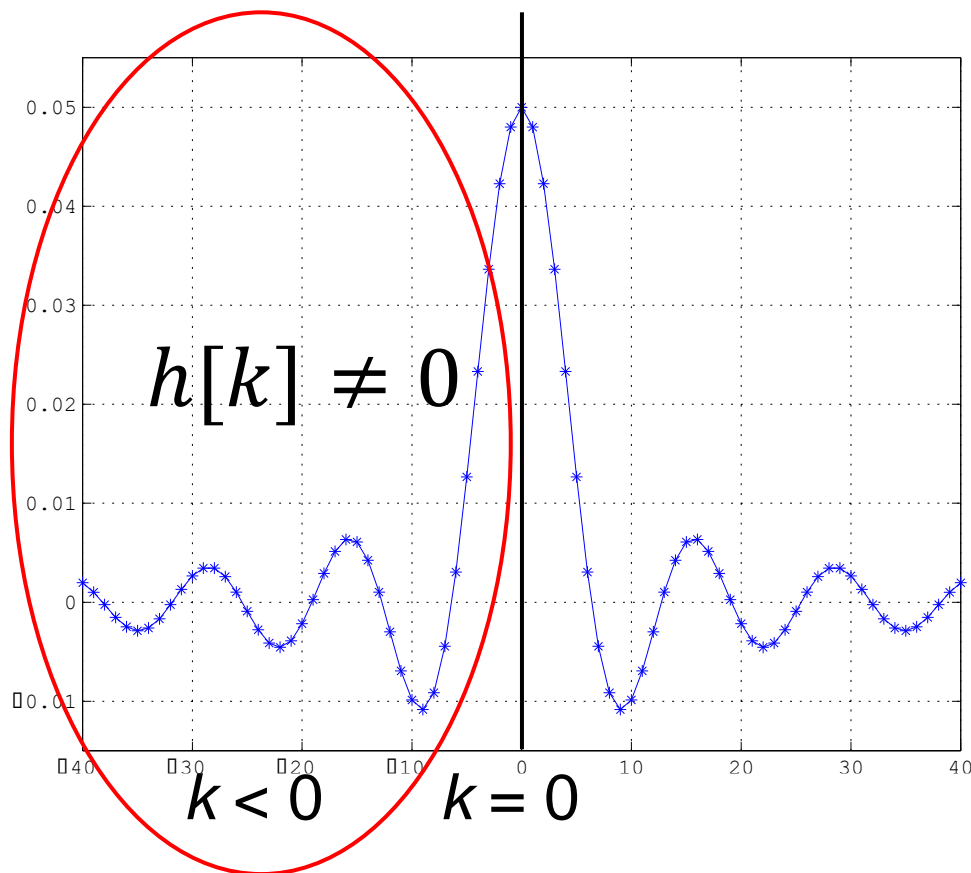
一方で, 上記のような正整数 M が存在せず, インパルス応答が無限に続くシステムを**IIR (Infinite Impulse Response) フィルタ**と呼ぶ.

FIRフィルタは, 正整数 M が大きすぎない限り, 簡単に実装可能.

IIRフィルタは, $\frac{1}{T} H_d(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] e^{-ikT\omega} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-ikT\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-ikT\omega}}$ と表現できるものは実装可能.

理想ローパスフィルタのFIRフィルタによる近似 1/2

$p = 0.05$ の場合



$$h[k] = p \operatorname{sinc}(kp)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

理想ローパスフィルタは
因果的でないので、
時系列データの
リアルタイム処理には
使用できない。

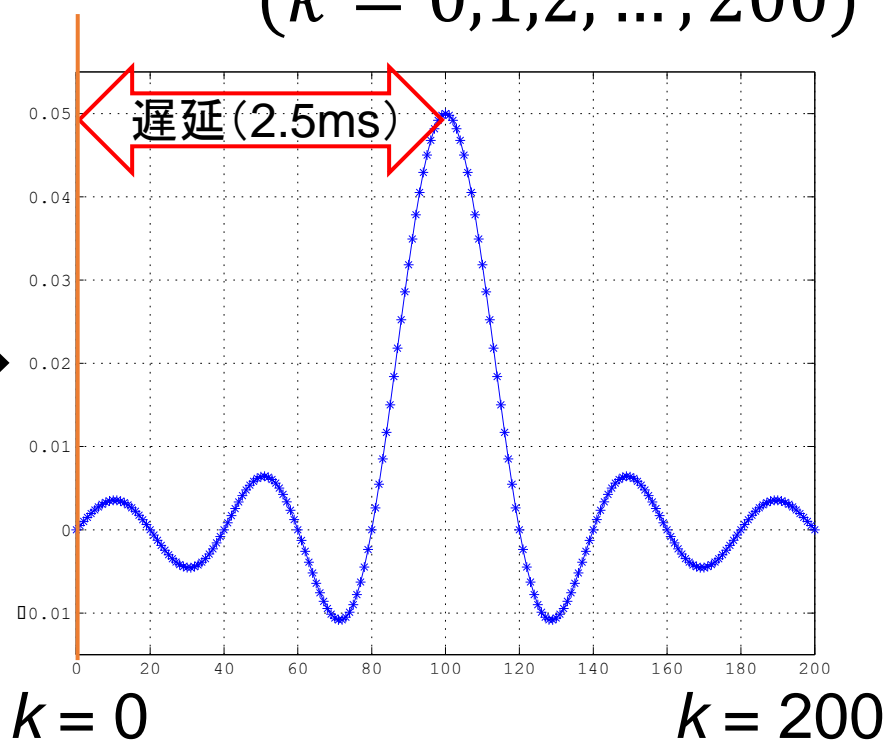
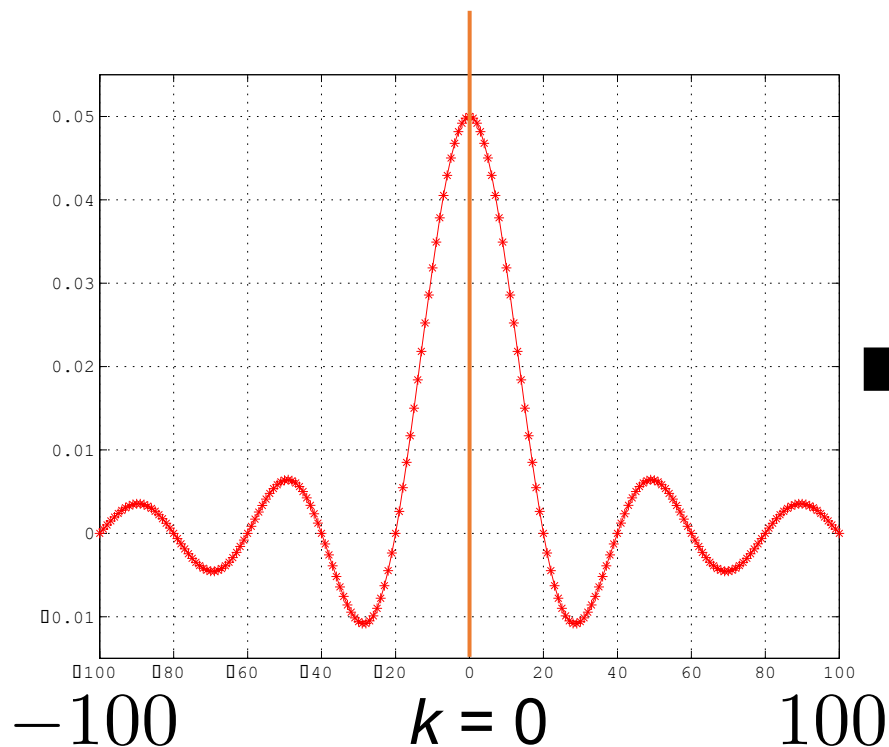
また、無限に続くインパルス
応答の畳み込みも現実的に
は計算が難しい。

理想ローパスフィルタのFIRフィルタによる近似 2/2

- 無限和を用いている ➡ 有限和で打ち切る (例: k は ± 100 以内)
- 非因果的 ➡ シフトすることで, $h[k]=0$ ($k < 0$) とする

注: 因果的にしていることで, 中心が右にずれ, 出力信号はその分, 若干の遅延を伴う。

$$h[k] = p \operatorname{sinc}((k - 100)p) \\ (k = 0, 1, 2, \dots, 200)$$



FIRフィルタの設計

以下の工程により, 所望の変換を近似するFIRフィルタを設計できる！！

1. 最初に, 所望の周波数応答 $\frac{1}{T} H_d(\omega)$ を決定する. (所望のイコライザを設定する)

2. 所望の周波数応答 $\frac{1}{T} H_d(\omega)$ をできる限りの精度で近似するために,

$$\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{T} H_d(\omega) - \sum_{k=0}^M h[k] e^{-ikT\omega} \right|^2 d\omega$$

を最小にする有限インパルス応答 ($h[0], h[1], \dots, h[M]$) を求める.

この作業をフィルタ設計と呼ぶ.

(実際には, 通過域リップル, 阻止域リップル, 遷移域の幅などの詳細な仕様を考慮しながら, 所望の周波数応答を最も良く近似するインパルス応答を求める)

3. インパルス応答 $h[k]$ と入力信号 $f[k]$ を畳み込む $g[k] = \sum_{l=0}^M f[k-l] h[l]$.

理解度確認 小テスト

manaba +R にログインして、第12回小テストを行います。
制限時間は **10分間** です。

スライドを見返しながら、解いてよいです。

12週目の宿題内容

- 振幅スペクトル

問題(1-2)の同じ条件で離散フーリエ変換を行う：

$$F[n] = \text{DFT}\{f[k]\}$$

$$G[n] = \text{DFT}\{g[k]\}$$

$f[k], g[k]$ は第11回の宿題を参照

(3-1) 振幅スペクトル $|F[n]|$ 、 $|G[n]|$ を描画して、比較してください。

- 周波数領域の乗算

フィルタの周波数応答 $H[n]$ と信号のスペクトル $F[n]$ を乗算する：

$$G'[n] = F[n]H[n]$$

(3-2) 振幅スペクトル $|G'[n]|$ を描画して、 $|G[n]|$ と比較してください。

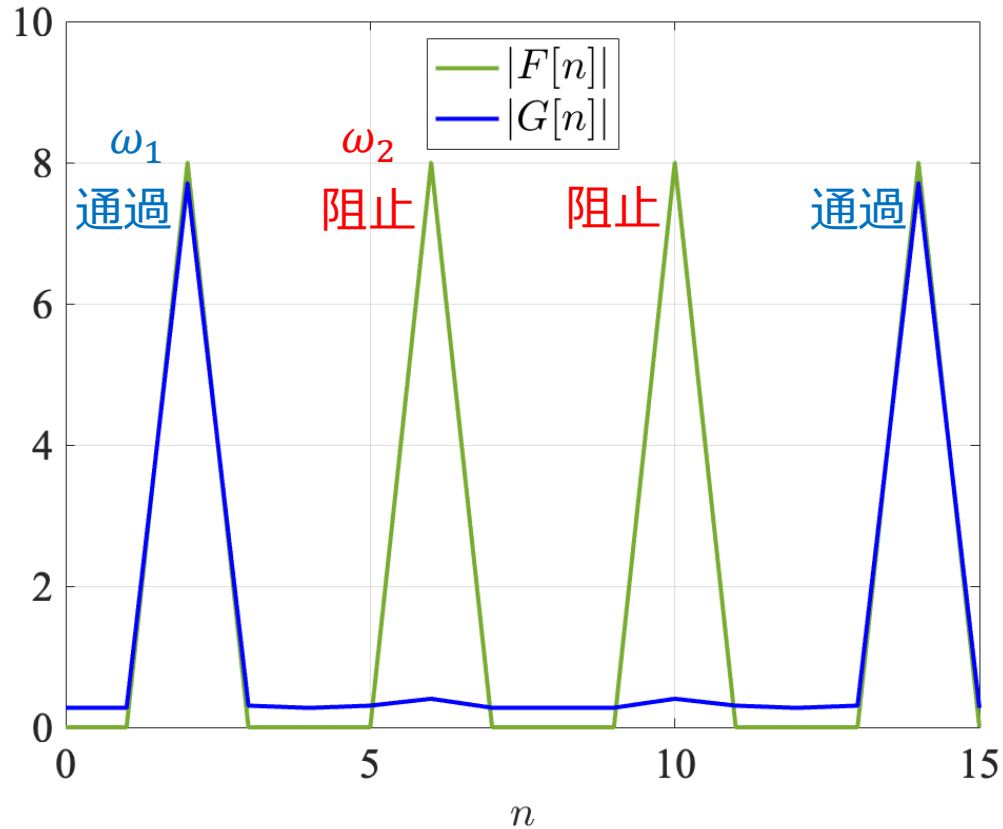
$G'[n]$ に対し、逆離散フーリエ変換を行う：

$$g'[k] = \text{IDFT}\{G'[n]\}$$

(3-3) 時間信号 $g'[k]$ を描画して、 $g[k]$ と比較してください。

結果例

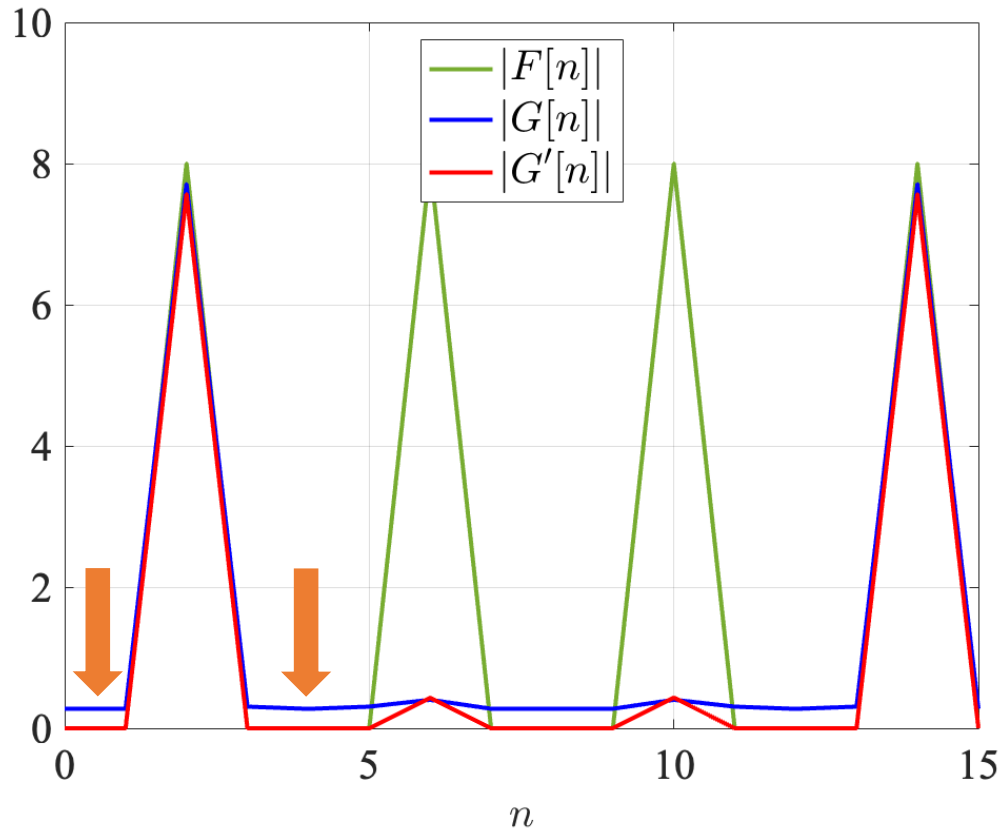
(3-1) 振幅スペクトル $|F[n]|$ 、 $|G[n]|$ を描画して、比較してください。



※ $|F[n]|$ 、 $|G[n]|$ を比較すると、 ω_1 成分が保持、 ω_2 成分が抑圧されることを確認できます。

結果例

(3-2) 振幅スペクトル $|G'[n]|$ を描画して、 $|G[n]|$ と比較してください。



考察ポイント：
橙色の矢印で示している
 $|G'[n]|$ と $|G[n]|$ の誤差について、
原因を考えてみてください。

信号長、フィルタ長、フーリエ点数などを変更してみてください。

※ $|G'[n]|$ 、 $|G[n]|$ を比較すると、概ね傾向が一致していることを確認できます。

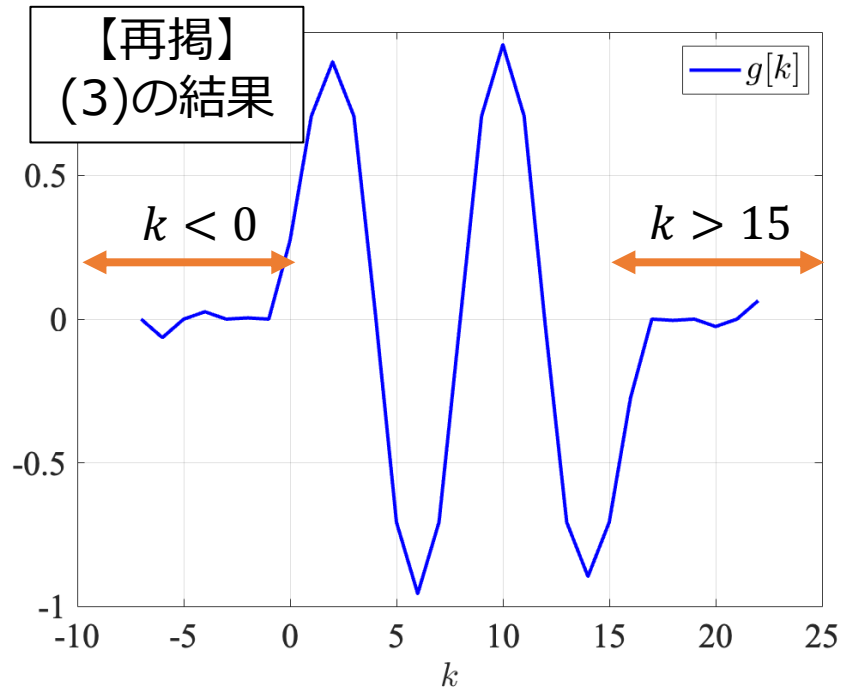
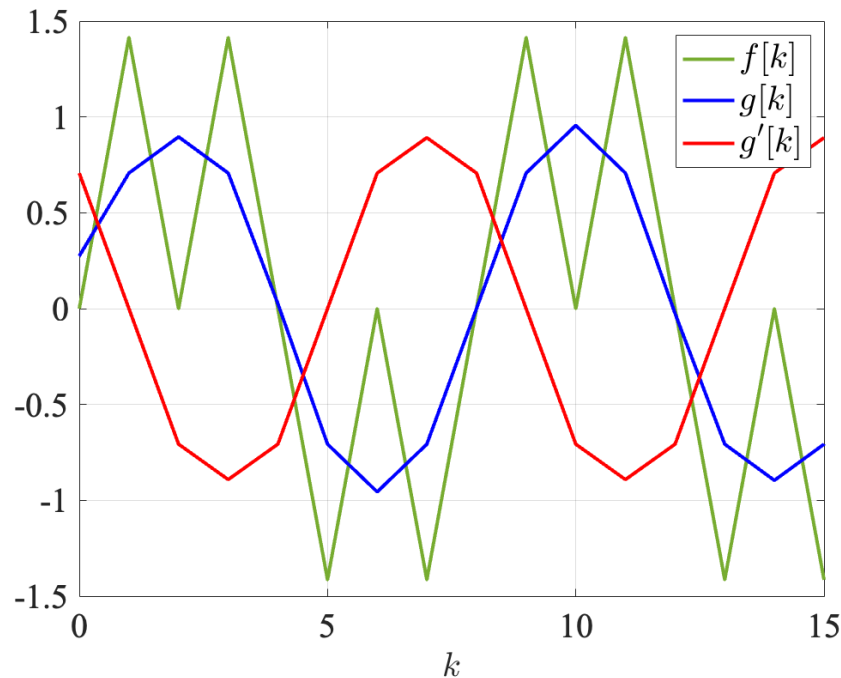
$$G[n] = \text{DFT}\{f[k] * h[k]\}$$

$$G'[n] = \text{DFT}\{f[k]\} \text{DFT}\{h[k]\}$$

「時間領域の畳み込み」と「周波数領域の乗算」の対応関係を確認できます。

結果例

(3-3) 時間信号 $g'[k]$ を描画して、 $g[k]$ と比較してください。



※ $g'[k]$ 、 $g[k]$ を比較すると、形がほぼ一致しますが、時間軸上のシフト(位相のずれ)があることを確認できます。

$$g[k] = f[k] * h[k]$$

$$g'[k] = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{f[k]\}\text{DFT}\{h[k]\}\}$$

「時間領域の畳み込み」と「周波数領域の乗算」の対応関係を確認できます。

考察ポイント：

位相のずれの原因は何でしょうか？

右の図に橙色の矢印で示している区間において、 $g'[k]$ の値は何でしょうか？