ロボティクス
第5回
質点系と剛体の力学
動力学
便利なLagrange 運動方程式

李　周浩

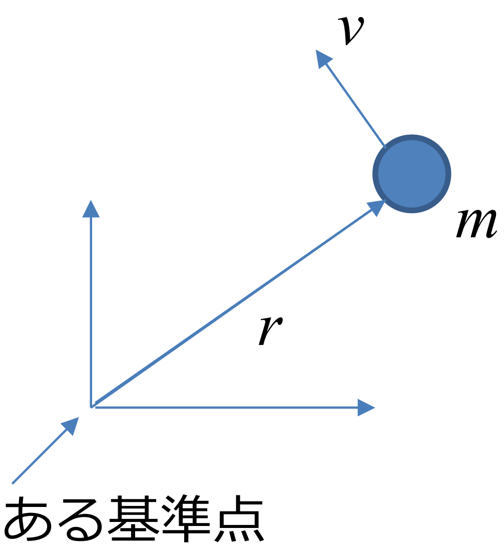
質点系の力学

1．角運動量とトルク

運動量　$p = mv = m\dot{r}$

運動方程式　$$\frac{dp}{dt} = f$$

角運動量　$L = r \times p = mr \times \dot{r}$



運動方程式

$$\frac{dL}{dt} = \dot{r} \times p + r \times \dot{p}$$

$$= r \times \dot{p} \quad (\because \dot{r} \times p = m(\dot{r} \times \dot{r}) = \boldsymbol{0})$$

$$= r \times f = n$$

剛体の力学

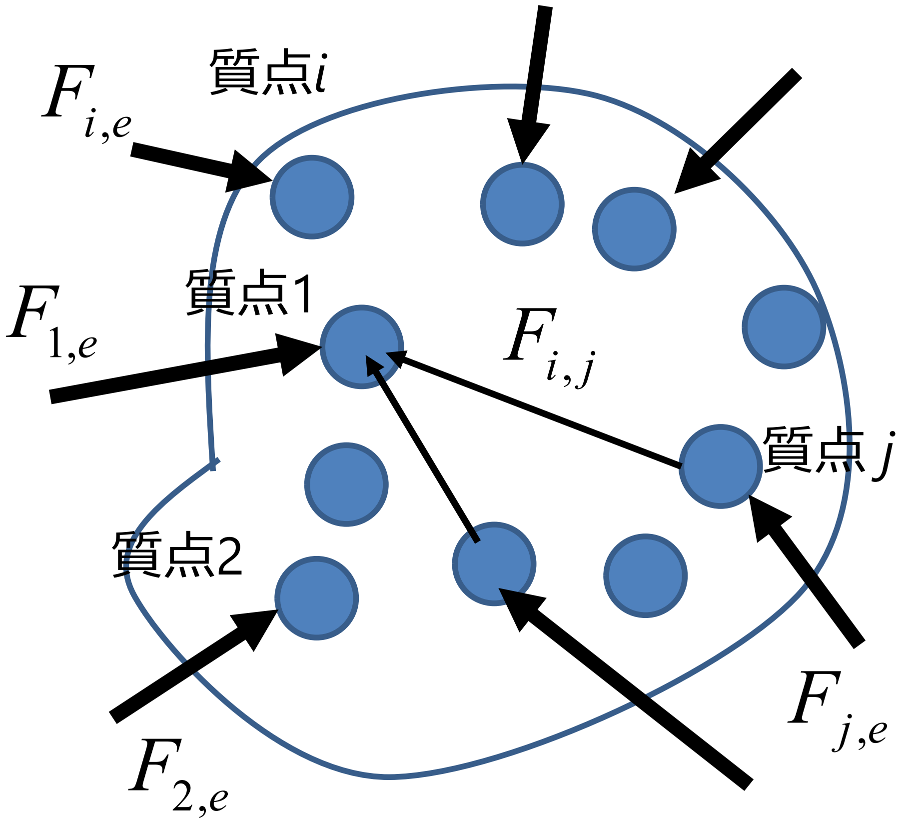
2． 剛体の運動量

剛体：物体上の任意の点間の距離が不変であるもの
例：N個の質点（i=1,・・・N)から構成される剛体を想定

p_i 質点iの運動量

$F_{i,e}$ 質点iが質点外から受ける力(外力)

$F_{i,j}$ 質点iが質点jから受ける力（内力）



質点iの運動方程式

$$\frac{dp_i}{dt} = F_{i,e} + \sum_{j(\neq i)}^{N} F_{i,j}$$

剛体全体の運動量

$$p = \sum_{i=1}^{N} p_i$$

剛体全体の運動方程式

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{i,\mathrm{e}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j(\neq i)} F_{i,j}$$

剛体の力学

2．剛体の運動量

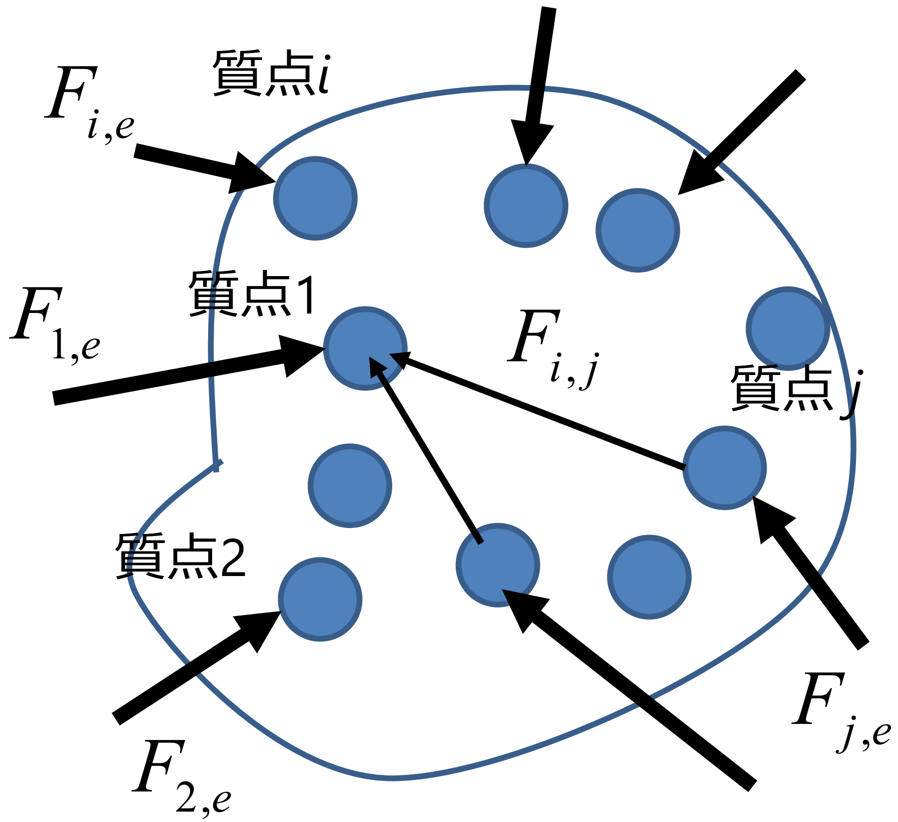
剛体全体の運動方程式

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{i,\mathrm{e}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j(\neq i)} F_{i,j}$$

作用反作用の法則より

$$F_{i,j} = -F_{j,i}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j(\neq i)} F_{i,j} = 0$$

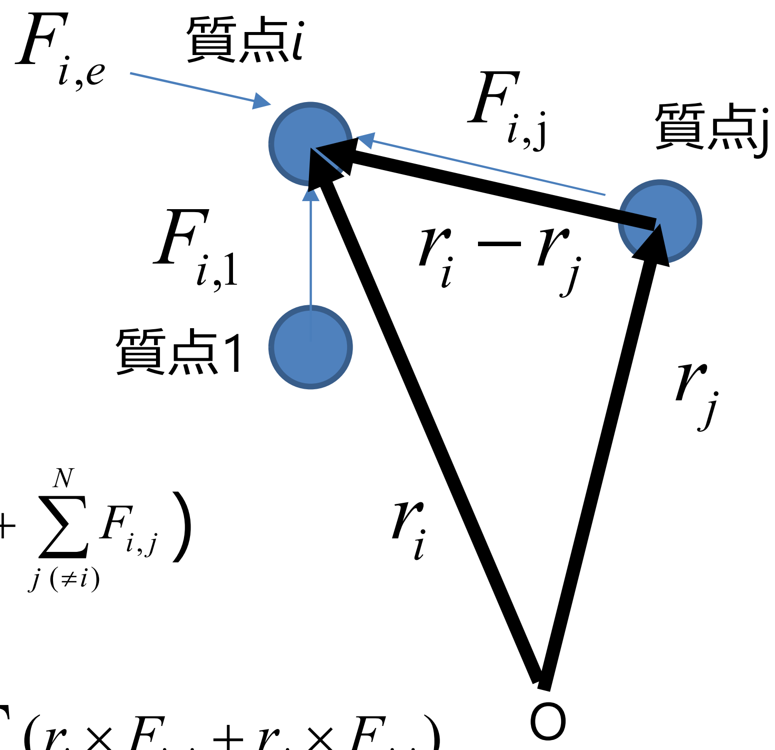


これを上式に代入し，剛体の運動方程式が得られる．

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{i,\mathrm{e}} = F_e \quad =(\text{外力の総和})$$

３．剛体の角運動量

r_i ：原点から質点iまでの位置ベクトル



剛体全体の角運動量

$$L = \sum_{i=1}^{N} r_i \times p_i$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{r}_i \times p_i + \sum_{i=1}^{N} r_i \times \dot{p}_i = \sum_{i=1}^{N} r_i \times \dot{p}_i \qquad \left(\frac{dp_i}{dt} = F_{i,e} + \sum_{j(\neq i)}^{N} F_{i,j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_{i,e} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j(\neq i)} r_i \times F_{i,j} = \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_{i,e} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j(\neq i)} (r_i \times F_{i,j} + r_j \times F_{j,i})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_{i,e} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j(\neq i)} (r_i - r_j) \times F_{i,j} \qquad (\because F_{i,j} = -F_{j,i}\text{を用いた})$$

$(r_i - r_j) \times F_{i,j} = \mathbf{0}$であるから，

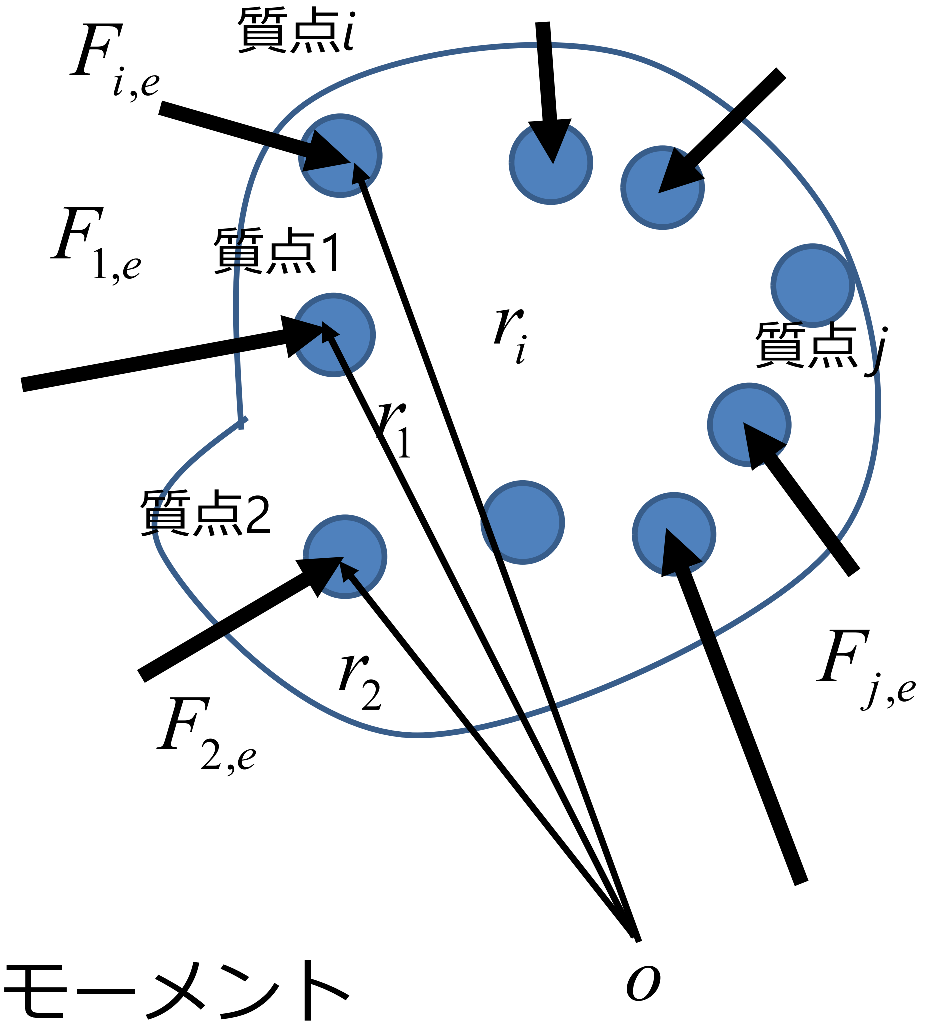
$$\frac{dL}{dt} == \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_{i,e} = N_e \qquad \text{=(外力によるモーメントの総和)}$$

2 & 3 剛体の運動量と角運動量（まとめ）

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{i,e} = F_e$$ =(外力の総和)

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_{i,e} = N_e$$

=(外力によるモーメントの総和)



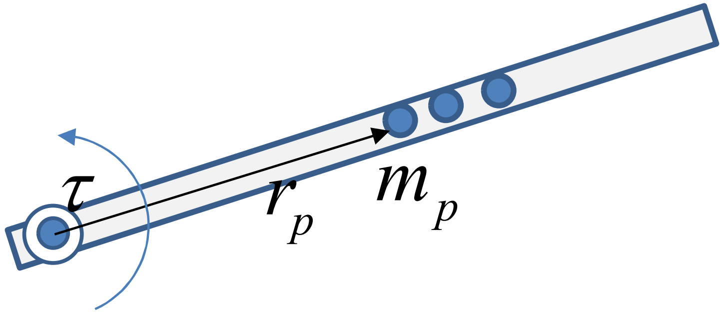
剛体運動では,

- 剛体に作用する力と，外力によるモーメント（トルク）のみを考慮すれば良い.
- 内力（$F_{i,j}$）は無視してよい

3.2 剛体（棒）の固定軸周りの回転運動 （有本，関本，p71）

回転軸からN個の質点（p=1,・・・N)構成されているとする.

リンク全体の角運動量



$$L = \sum_{p=1}^{N} r_p \times (m_p \dot{r}_p)$$

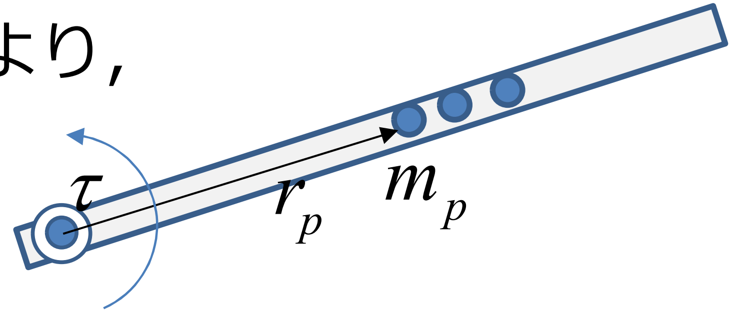
$$\dot{r}_p = \omega \times r_p$$ より

$$L = \sum_{p=1}^{N} m_p r_p \times (\omega \times r_p) = \sum_{p=1}^{N} m_p \{(r_p{}^T r_p)\omega - (r_p{}^T \omega) r_p\} = \sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2 \, \omega$$

ここで，$a \times (b \times c) = (a^T c) b - (a^T b) c$ と，$\mathrm{r}_p{}^T \omega = 0$を用いた

3.2 剛体（棒）の固定軸周りの回転運動　（続き）

$$L=\sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2 \omega$$　かつ，　$\omega:=[0,0,\dot{\theta}]^T$ より，



$$\frac{dL}{dt}=\sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2 \dot{\omega}=\{\sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2\}\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}\end{bmatrix}$$

また，$N_e=[0,0,\tau]^T$　である．(r_p^2 の r_p は単なる距離)

ここで運動方程式は　$\dfrac{dL}{dt}=N_e$　であるから

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2 \dot{\omega}=\{\sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2\}\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\tau\end{bmatrix}$$

➡

$$I\ddot{\theta}=\tau$$

$$I:=\sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2 \quad (3.17)$$

慣性モーメント

４．重心

【定義】N個の質点に対して、以下の位置ベクトルで表現される点を，重心と呼ぶ.

$$r_G := \frac{\sum_{p=1}^{N} m_p r_p}{\sum_{p=1}^{N} m_p} = \frac{\sum_{p=1}^{N} m_p r_p}{M} \qquad (3.22)$$

m_p : 質点pの質量

r_p : 質点pの位置ベクトル

全質量

この重心の定義より，次式が成立する.

$$M r_G = \sum_{p=1}^{N} m_p r_p$$

重心に全質量が集まっていると考える.

4．重心

【定義】N個の質点に対して、以下の位置ベクトルで
表現される点を，重心と呼ぶ.

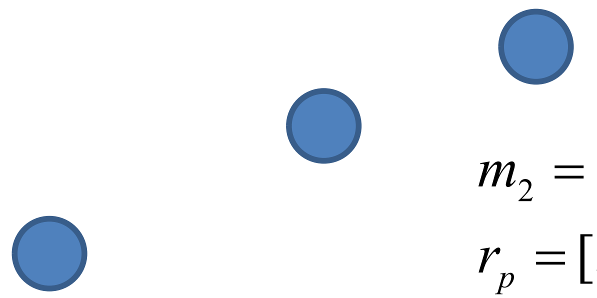
$$r_G := \frac{\sum_{p=1}^{N} m_p r_p}{\sum_{p=1}^{N} m_p} = \frac{\sum_{p=1}^{N} m_p r_p}{M} \qquad (3.22)$$

m_p : 質点pの質量

r_p : 質点pの位置ベクトル

【例】下記のとおり質量，位置が与えられた
２つの質点の重心を求めよ.

$$r_G := \frac{\sum_{p=1}^{N} m_p r_p}{M} = \frac{1}{6}\left\{1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}16\\11\\0\end{bmatrix} \qquad (3.22)$$



$m_2 = 5kg$

$r_p = [3, 2, 0]$

$m_1 = 1kg$

$r_p = [1, 1, 0]$

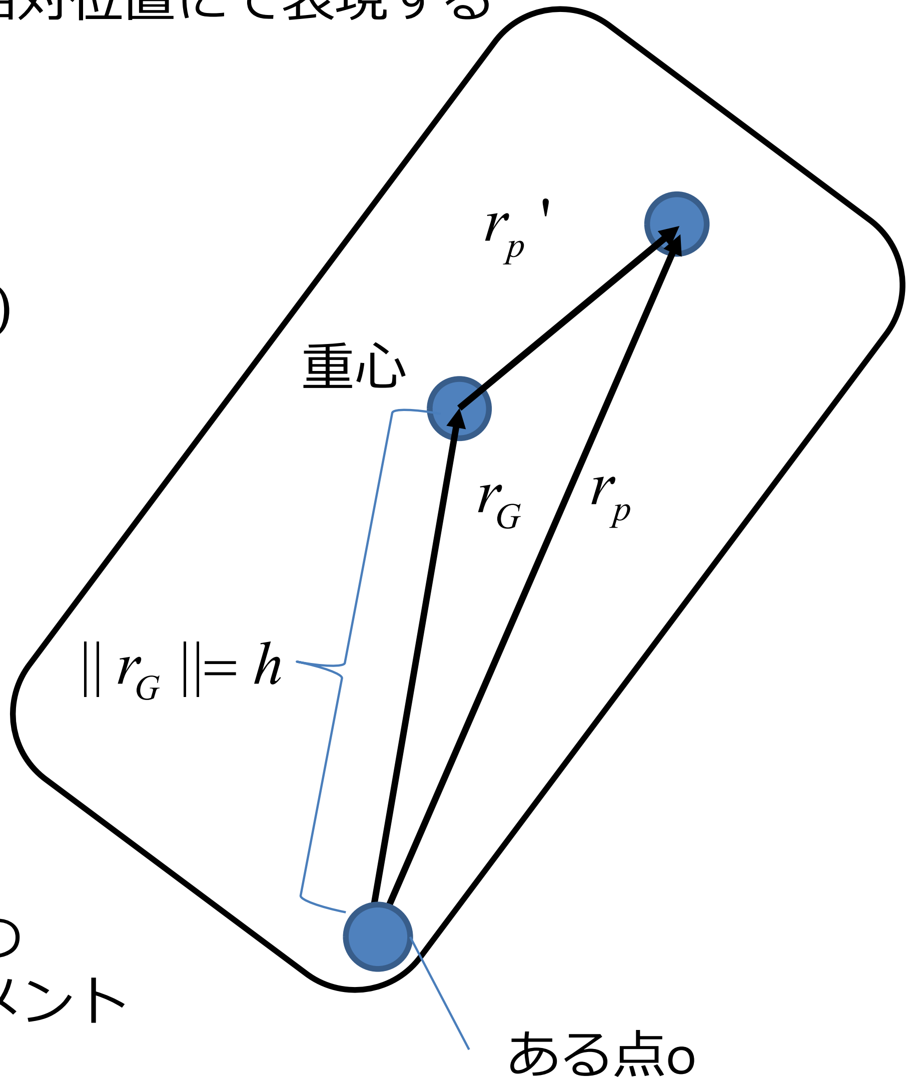
4．慣性モーメント・平行軸の定理の(導出)

ある点oを起点としたベクトル$\boldsymbol{r}_p$を，重心からの相対位置にて表現する

$$r_p = r_G + r_p' \qquad (3.24)$$

(3.17)に代入する．

$$I := \sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2 \qquad (3.17)$$



ある点oまわりの慣性モーメント I

$$I = \sum_{p=1}^{N} m_p (r_G + r_p')^T (r_G + r_p')$$

$$= \underbrace{\sum_{p=1}^{N} m_p}_{M} \underbrace{r_G^T r_G}_{h^2} + 2 r_G^T \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{N} m_p r_p'\right)}_{=0} + \underbrace{\sum_{p=1}^{N} m_p r_p'^T r_p'}_{I_G}$$

$= 0$ （重心であるから）

I_G 重心周りの慣性モーメント

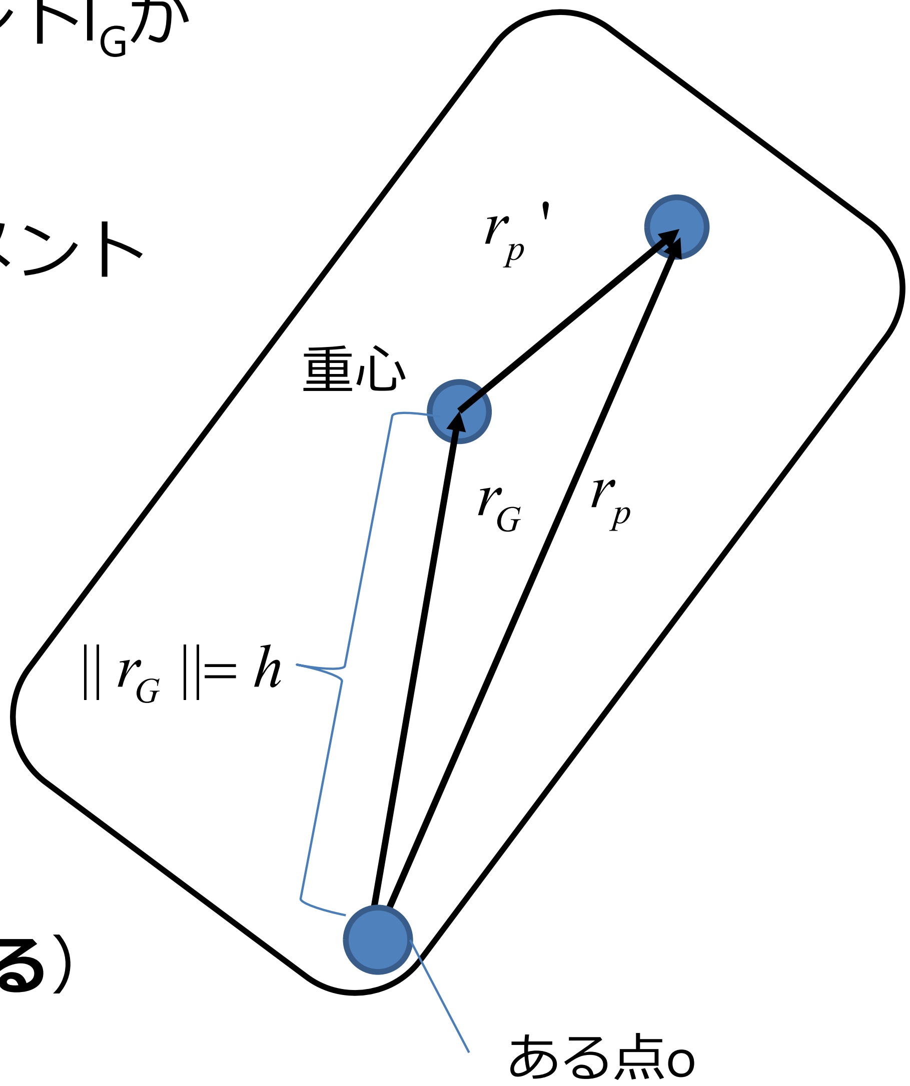
$$I = I_G + Mh^2$$ 平行軸の定理

４．慣性モーメント・平行軸の定理

重心を通るある軸まわりの慣性モーメントI_Gが与えられているとする.
このとき，重心から距離h離れた通り，
前述の軸と平行な軸まわりの慣性モーメント
Iは次式を満たす.

$$I = I_G + Mh^2$$

ここにMは剛体の質量である.
なお，これを平行軸の定理と呼ぶ.
（**必ず軸の方向が一緒である必要がある**）



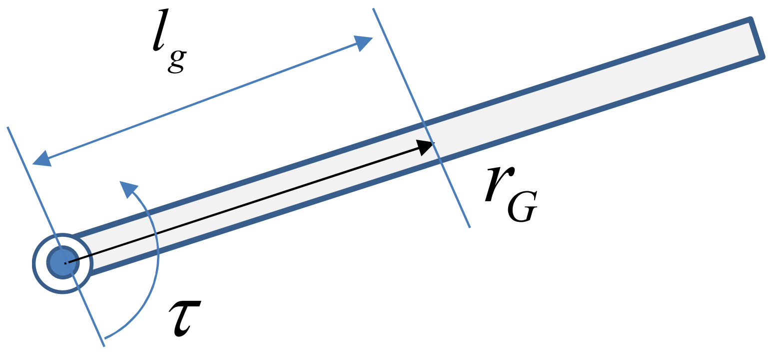
3.2 剛体の固定軸周りの回転運動（補足）

ロボットアームの運動方程式

$$I\ddot{\theta} = \tau$$

$$I := \sum_{p=1}^{N} m_p r_p^2 \quad (3.17)$$

回転軸周りの慣性モーメント



重心まわりの慣性モーメントIGが与えられている場合

$$I = I_G + M\,l_g^{\,2}$$

l_g 回転軸と重心の距離

$$(I_G + M\,l_g^{\,2})\ddot{\theta} = \tau$$