デジタル信号処理 第10回
理想ローパスフィルタ

2023年6月13日

立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

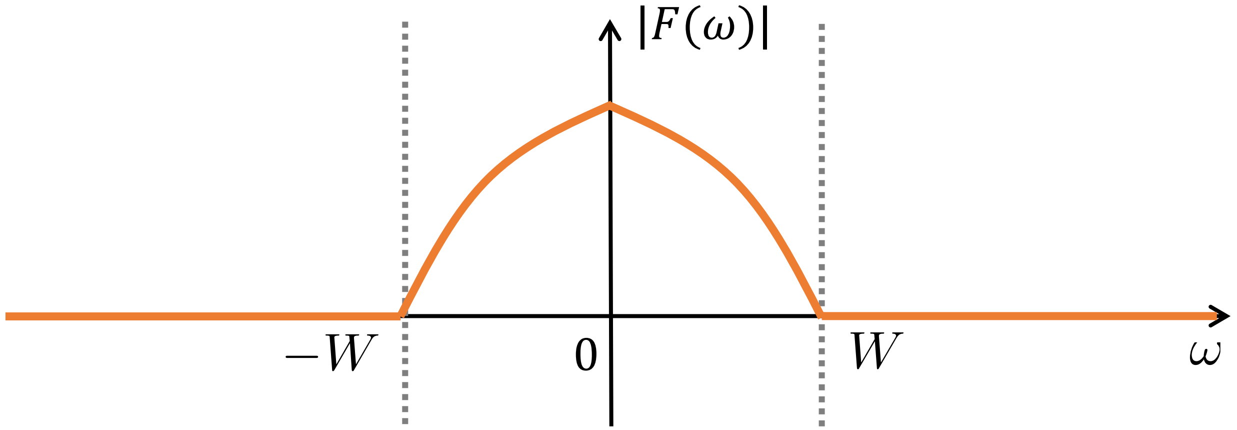
今回の概要

- 第8回講義で，帯域制限信号 $f(t)$ (アナログ信号)は，ナイキスト間隔以下の間隔でサンプリングすれば，$\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ （デジタル信号）から復元できることを示した（標本化定理）．

- 今回はナイキスト間隔より長い間隔でサンプリングした場合や，そもそも$f(t)$が帯域制限信号でない場合に，$\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ の周波数成分がどのように変形してしまうか（エイリアス）を考えていく． そして，エイリアスを防ぐための前処理として， 理想ローパスフィルタを考える．

（復習）帯域制限信号

- アナログ信号$f(t)$が帯域制限信号であり，
  $B = \frac{W}{2\pi}$ [Hz] 以上の高周波数成分を含まないのならば，
  $f(t)$のフーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$は
  $F(\omega) = 0 \ (|\omega| \geq W)$ を満たす．



（復習）離散時間フーリエ変換 1/3

- $f(t)$ を間隔 T でサンプリング（標本化）したデジタル信号 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$の(角)周波数成分は，離散時間フーリエ変換

$$F_d(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\, e^{-ikT\omega}$$

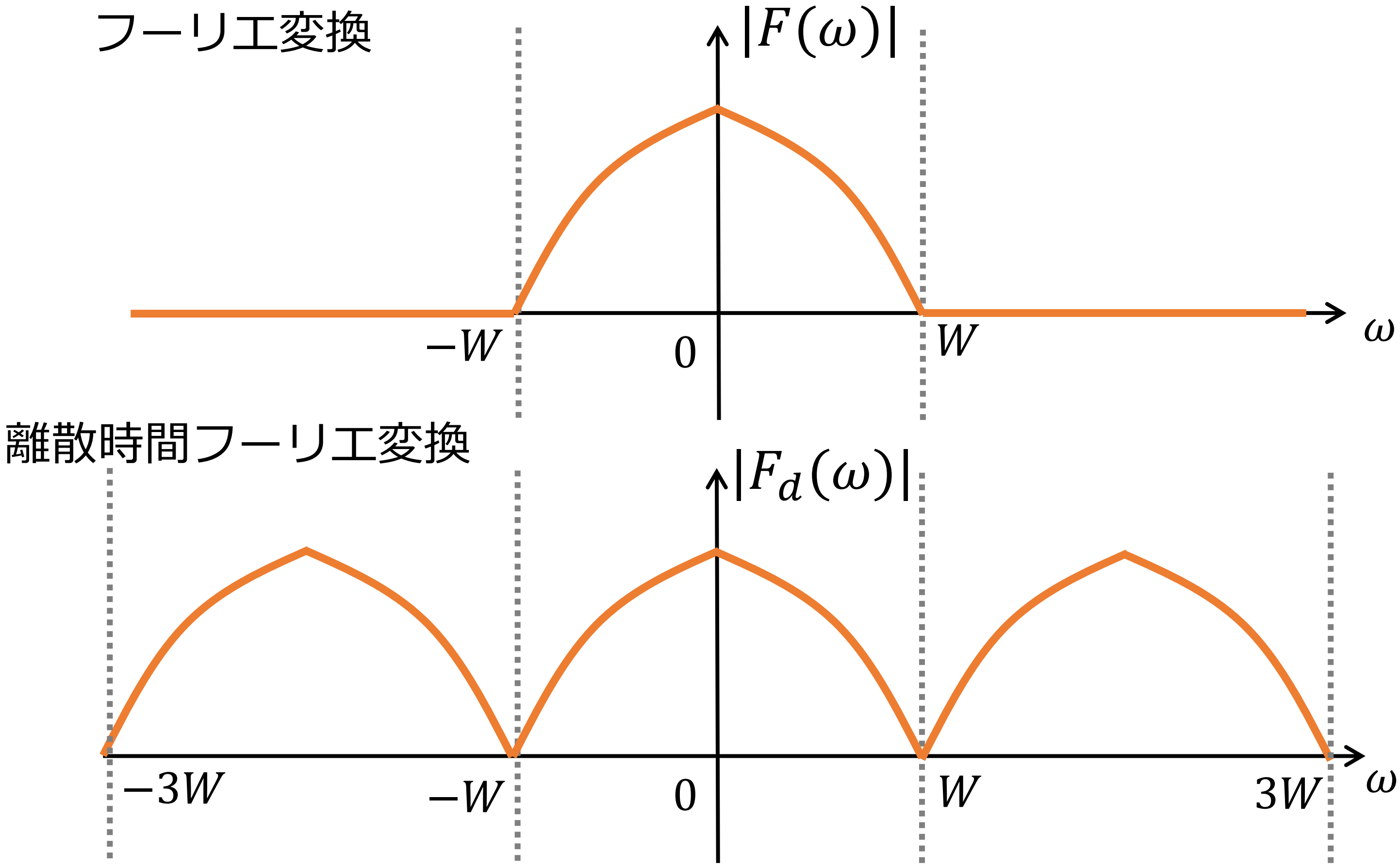
によって計算できる．

- 離散時間フーリエ変換 $F_d(\omega)$は，周期 $\frac{2\pi}{T}$の周期関数である．

この式は，周期 $\frac{2\pi}{T}$ の周期関数 $F_d(\omega)$のフーリエ級数展開としても解釈することができる (第7回講義資料参照)．

（復習）離散時間フーリエ変換 2/3

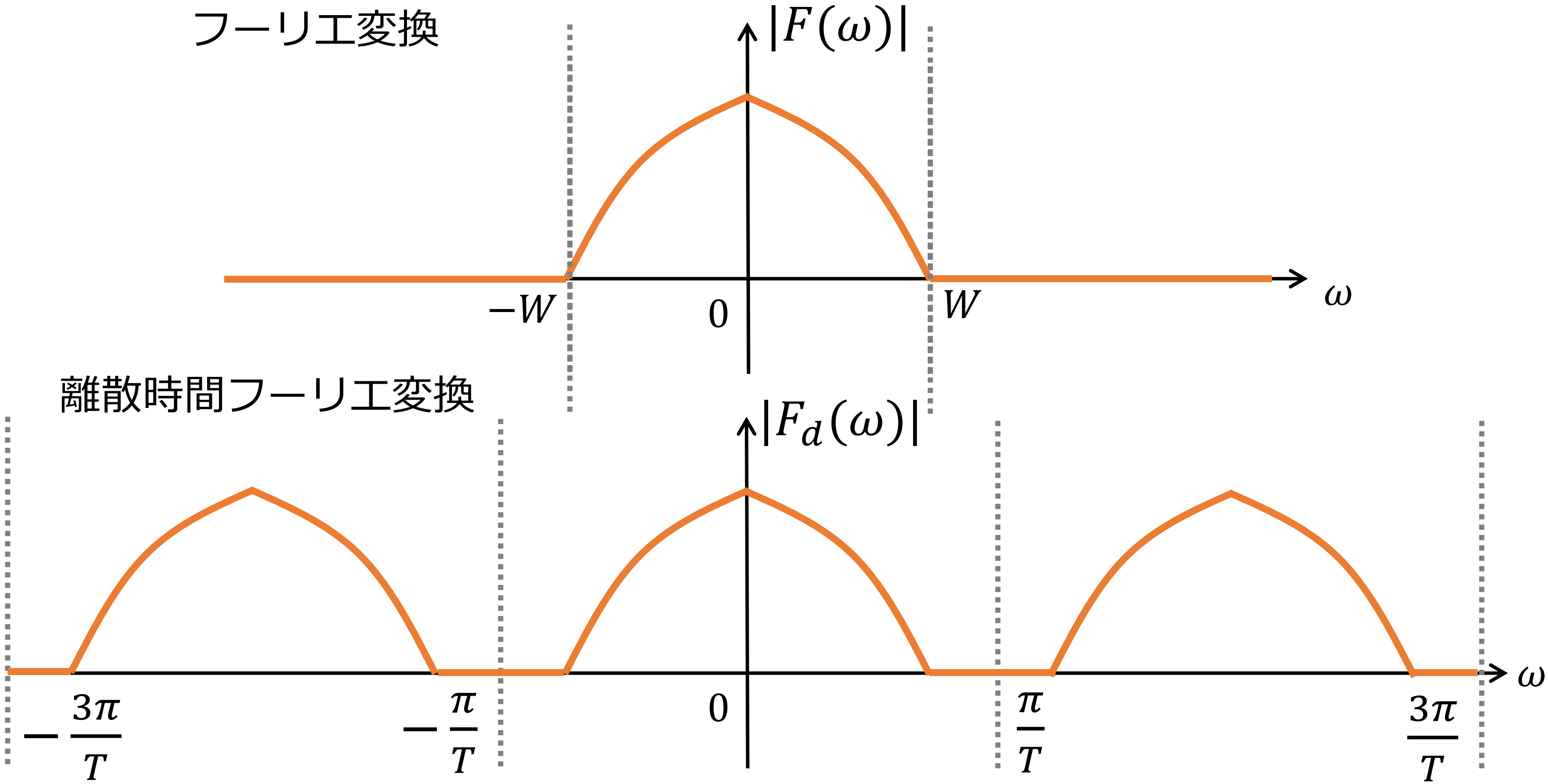
帯域制限信号$f(t)$ をナイキスト間隔 $T=\frac{1}{2B}=\frac{\pi}{W}$ で標本化した場合



$\omega\in[-W,W]$ に対して，$F_d(\omega)=F(\omega)$ が成り立つ

（復習）離散時間フーリエ変換 3/3

$f(t)$をナイキスト間隔よりも短い間隔 $T < \frac{\pi}{W}$ で標本化した場合

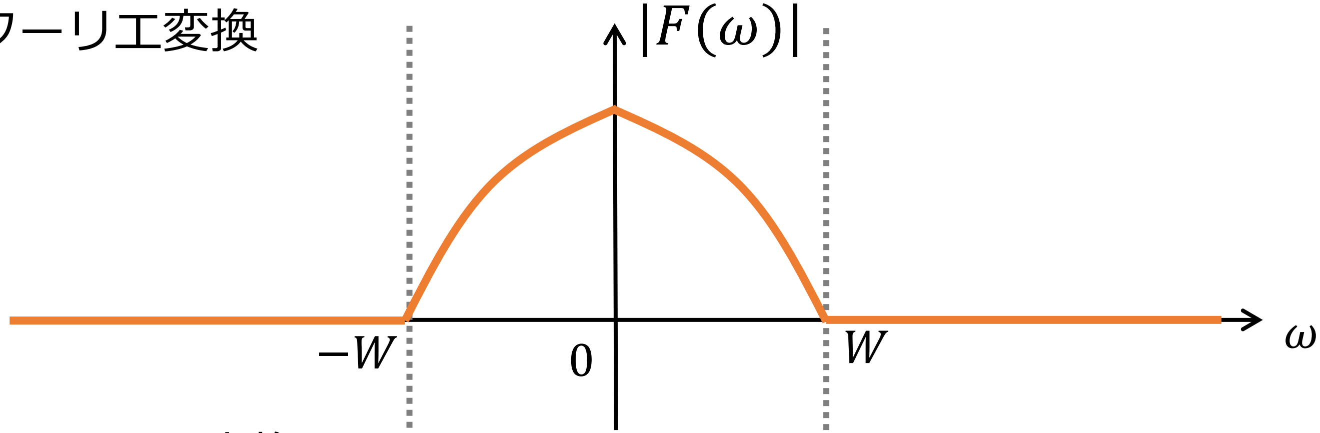


$\omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ に対して， $F_d(\omega) = F(\omega)$ が成り立つ （$[-W, W]$ は$[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ に含まれる）

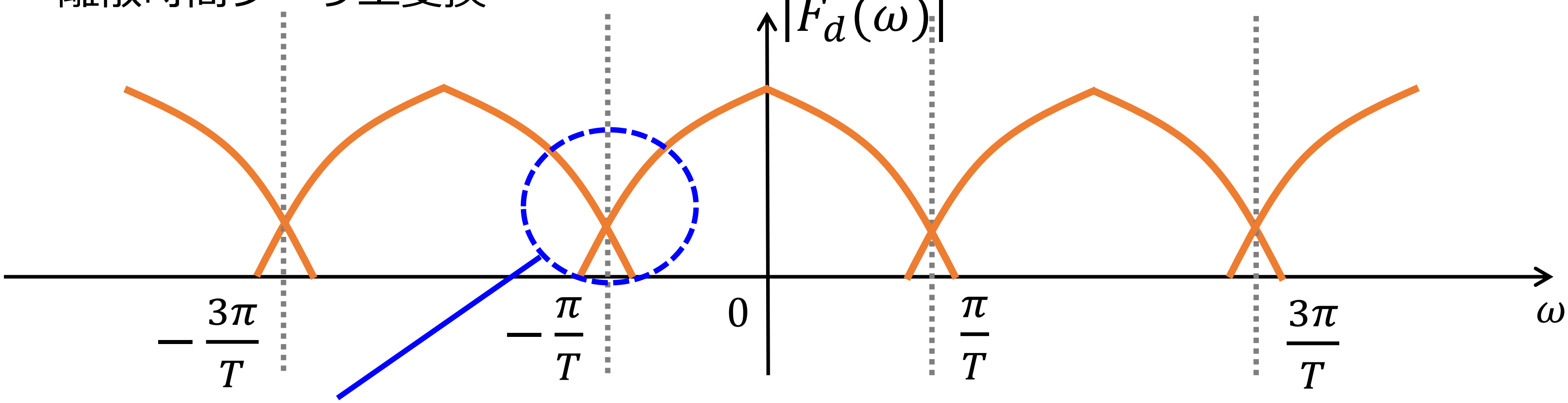
ナイキスト間隔よりも長い間隔で標本化

$f(t)$ をナイキスト間隔よりも長い間隔 $T > \frac{\pi}{W}$ で標本化した場合

フーリエ変換



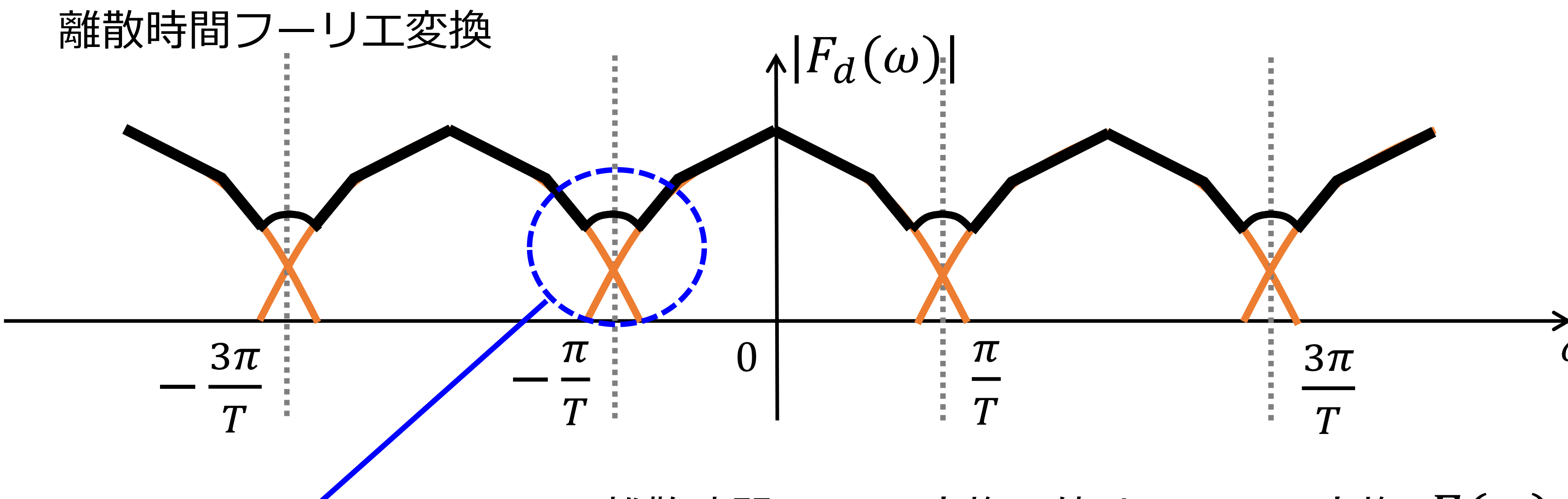
離散時間フーリエ変換



隣りどうしの山（周波数成分）が重なってしまう ➡ エイリアスの発生

エイリアスの発生

$f(t)$ をナイキスト間隔よりも長い間隔 $T > \dfrac{\pi}{W}$ で標本化した場合



$$F_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

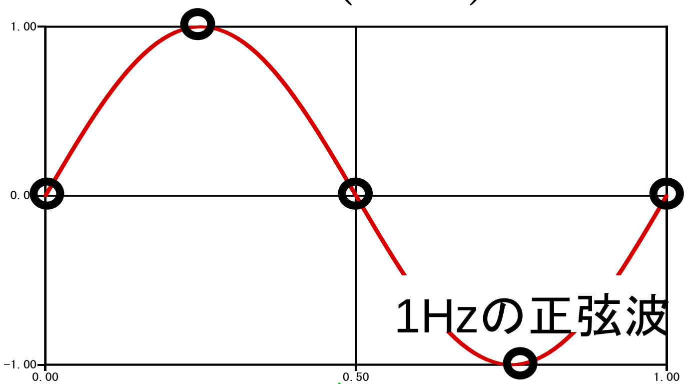
離散時間フーリエ変換の値は，フーリエ変換 $F(\omega)$ を $\frac{2\pi}{T}$ ずつシフトさせて（もしくは $\pm\frac{\pi}{T}$ で折り返させて），それらを全て重ね合わせた値になる．

山が重なっている部分では，$\omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ でも $F_d(\omega) \neq F(\omega)$ となってしまい，本来は存在しなかった周波数成分を生成してしまう．このように，本来は高周波成分なのに，折り返されて低周波成分として現れてしまう偽信号を「エイリアス」という．

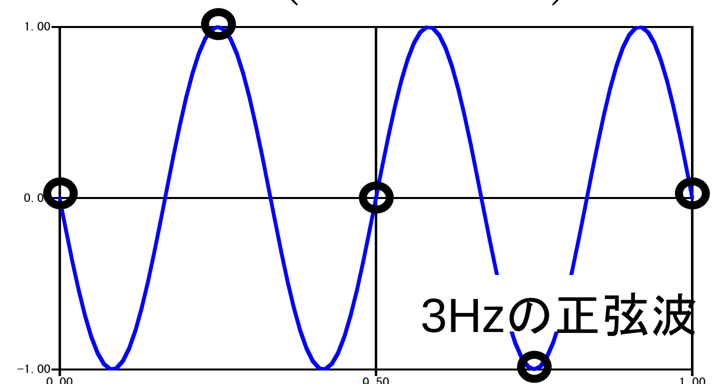
エイリアスの直感的な理解

- エイリアス (alias) の元々の意味は，「**別名・偽名**」である．$\frac{\pi}{T}$ 以上の(角)周波数成分が，$\frac{\pi}{T}$ 以下の**偽の**(角)周波数成分として出現する．
- 異なる周波数を持つ2つの信号が，ナイキスト間隔よりも長い間隔で標本化された場合には，あたかも同じ信号のように見えてしまう現象．

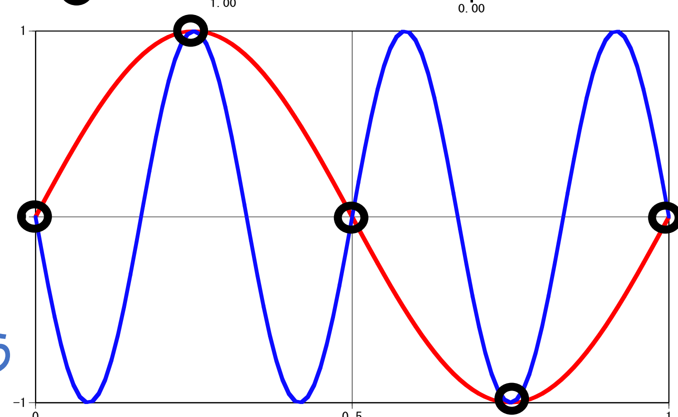
$\sin(2\pi t)$



$\sin(6\pi t + \pi)$



$T = \frac{1}{4}$ で標本化すると
標本値（**○の箇所**）は
どちらも同じ値になる
＝ 元々は異なる信号が
同じ信号と認識されてしまう



最高周波数は3 Hz なので，
ナイキスト間隔は $\frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$
である．これより短い間隔
で標本化すれば，元の信号
の情報を正確に保持できる．

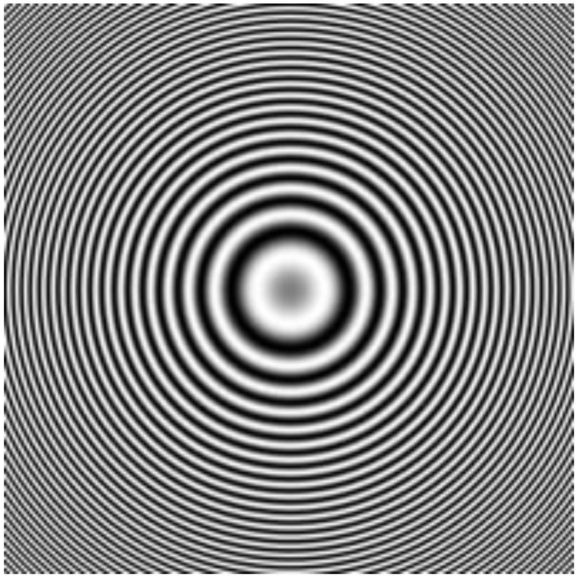
動画におけるエイリアス（ストロボ効果）

車が発進するときの車輪や，ヘリコプターが離陸するときのプロペラの様子をビデオカメラで録画すること考えてみましょう．どちらも，最初は停止した状態で，そこからゆっくりと回転運動を開始します．そして，徐々に回転の速度を上げていくと仮定します．回転速度がゆっくりのときは動画から正確な回転運動を認識できるのですが，回転速度が速くなるにつれて車輪やプロペラが逆回転や静止をしているように見えることがあります．これは，ビデオのフレームレート (fps) の半分より速く物体が回転していることに起因してエイリアスが生じてしまい，偽物の回転運動として撮影されてしまうためです．この現象は，ストロボ現象またはワゴンホイール効果という名前で広く知られています．

＊羽が曲がって見えるのは
ローリングシャッター効果
という．

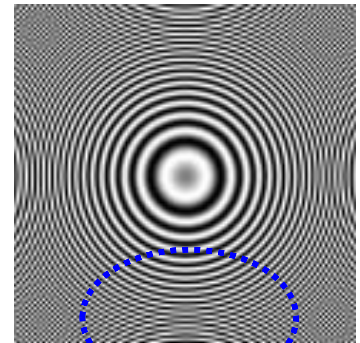
画像におけるエイリアス

真の2次元信号 $f(x, y)$



ダウンサンプリング

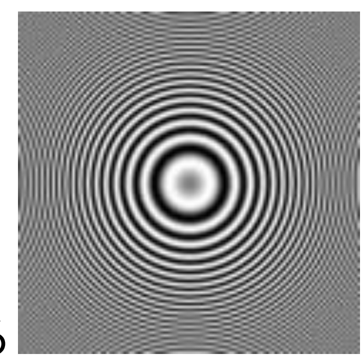
左の画像の標本間隔を2倍にして，
縦横の長さを半分にした画像



本来存在しなかった
模様が出現してしまう

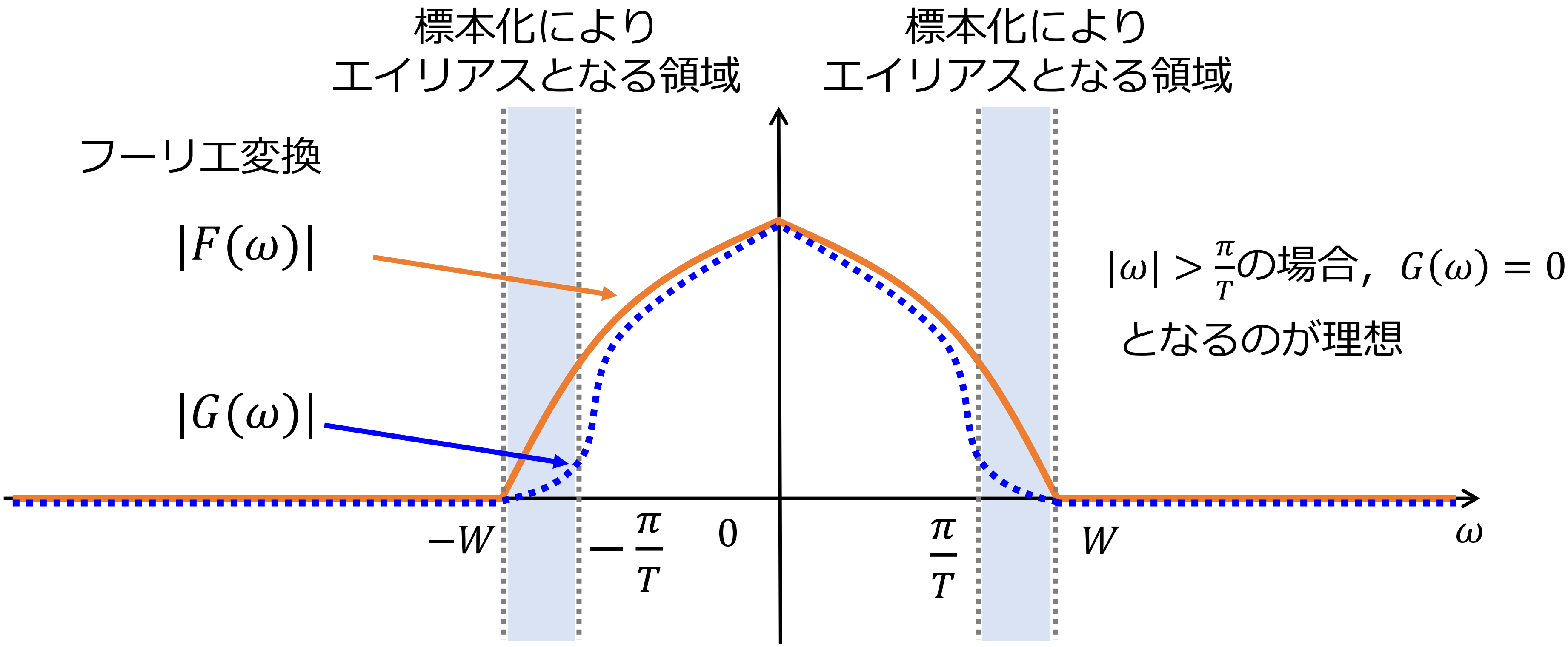
アンチエイリアスフィルタを適用した後に，
標本間隔を2倍にし，縦横半分にした画像

アンチエイリアスフィルタ
+
ダウンサンプリング



エイリアスの発生を抑制するために，
アンチエイリアスフィルタ (ローパスフィルタ) を用いる

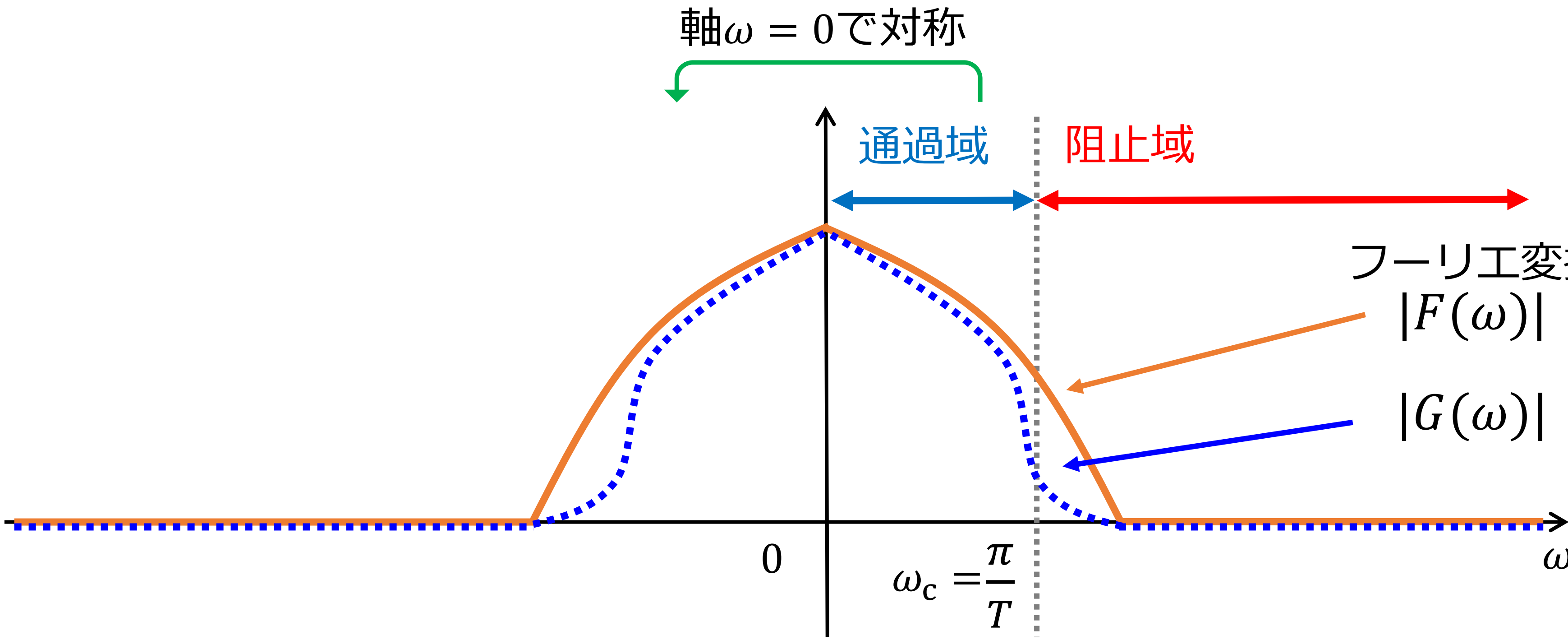
アンチエイリアスフィルタ



$f(t)$ を間隔 T で標本化すると，$\pm\frac{\pi}{T}$ を超える(角) 周波数成分がエイリアスになる．
エイリアスの基準となる $\frac{\pi}{T}$ [rad/s] をナイキスト角周波数，$\frac{1}{2T}$ [Hz] をナイキスト周波数という．

エイリアスの発生を抑えるためには，標本化の前に $\pm\frac{\pi}{T}$ を超える(角) 周波数成分の値を小さくしてしまえばよい．つまり，$f(t)$ にローパスフィルタを適用させ，フーリエ変換が青色の点線になるような信号 $g(t)$ を作成し，$g(t)$ を間隔 T で標本化 $\{g(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ する．

アンチエイリアスフィルタ = ローパスフィルタ



$f(t)$ と $g(t)$ (アンチエイリアスフィルタ$h(t)$を適用させた後の信号)の振幅スペクトル$|F(\omega)|$と$|G(\omega)|$を比較すると，
周波数ω_c(この例では$\omega_c = \frac{\pi}{T}$)以下の成分が通過され，
その周波数以上の成分が阻止されたことが分かる．

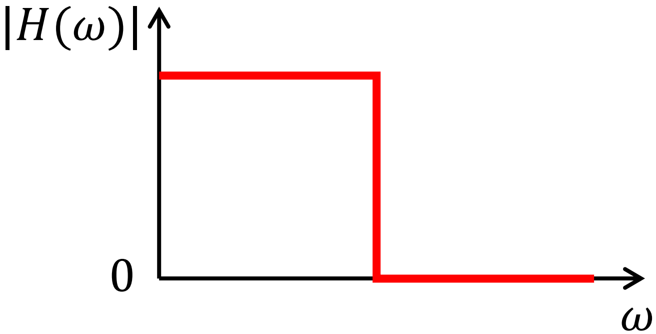
低域成分※が通過されることから，低域通過フィルタまたはローパスフィルタと呼ばれる．

※スペクトルが対称性を持つため，低域・高域の議論では$\omega < 0$の場合を無視

様々のフィルタ

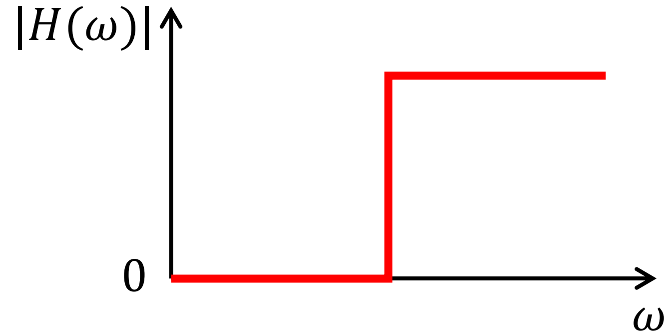
ローパスフィルタ

低域のみを通過させる



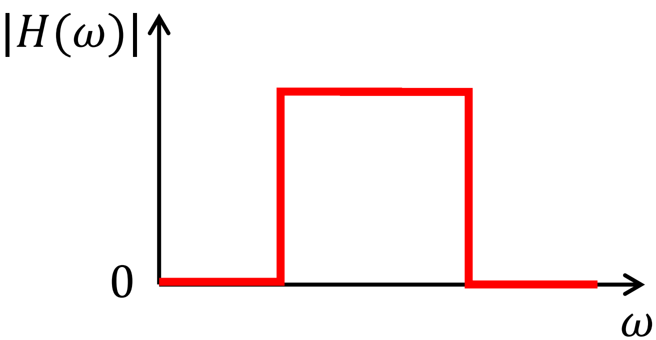
ハイパスフィルタ

高域のみを通過させる



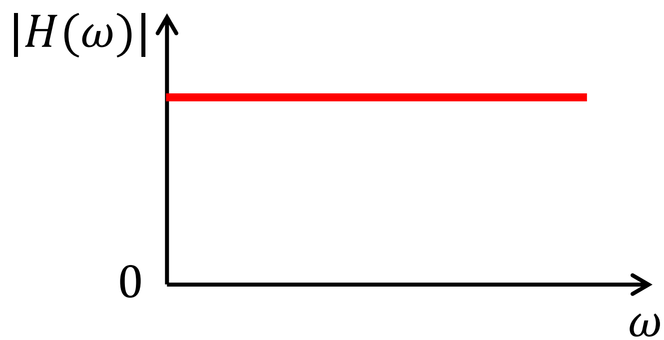
バンドパスフィルタ

一定の帯域のみを通過させる



オールパスフィルタ

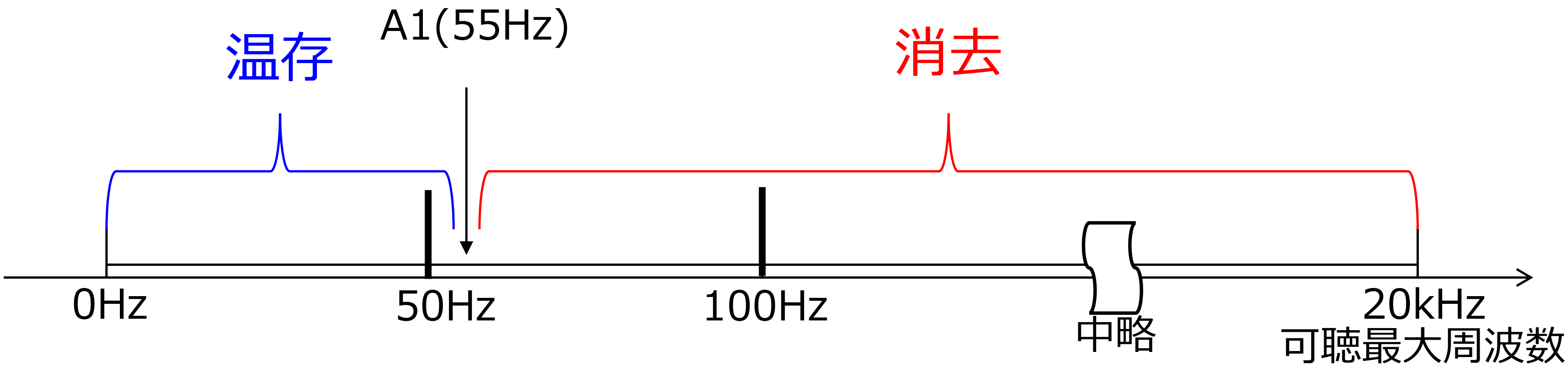
全ての帯域を通過させる



音楽におけるローパスフィルタ = 低音抽出

（例）信号 $f(t)$ の55 Hz以下の低音だけを取り出したい

55 Hz は音楽理論では A1 という名前の低音である.
(例: 4 弦ベースの第3弦の音).



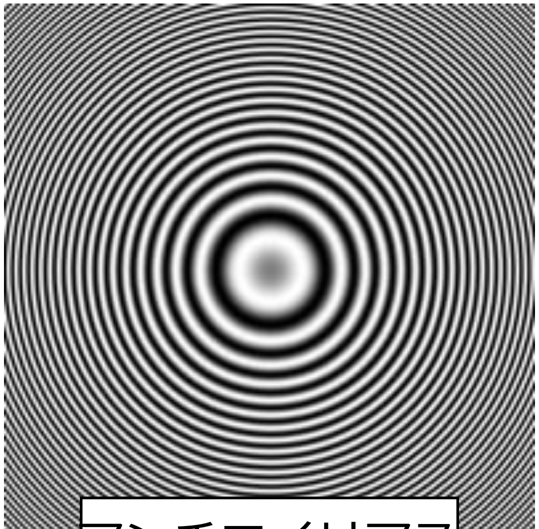
50Hz: $\cos(2\pi 50t)$　　100Hz: $\sin(2\pi 100t)$

残す　　消す

（55 Hz 以上の音を完全に消去せずに，音量を弱めるだけにした場合は
イコライザとなる！）

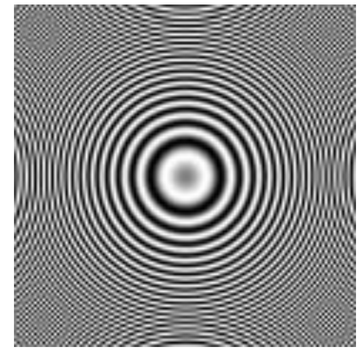
画像におけるローパスフィルタ = ぼかし

真の2次元信号 $f(x,y)$



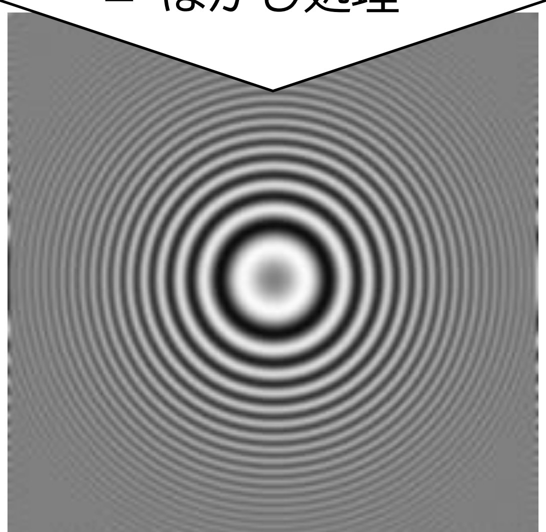
左の画像の標本間隔を2倍にして，
縦横の長さを半分にした画像

ダウンサンプリング



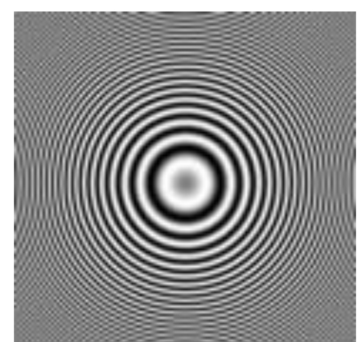
アンチエイリアス
= ぼかし処理

画像処理においては，ローパスフィルタは
「ぼかし処理」と等価.

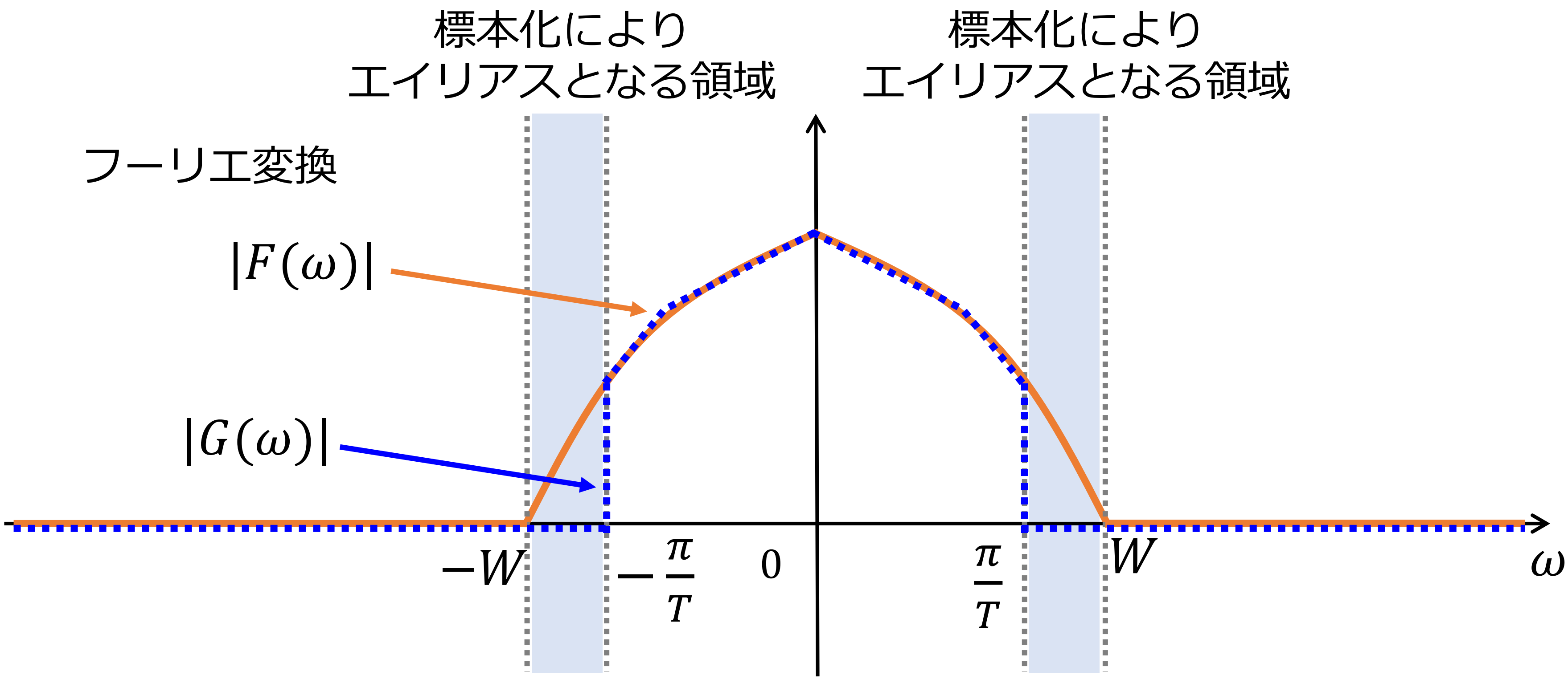


ぼかし処理を適用し得られた左の画像の
標本間隔を2倍にし，縦横半分にした画像

ダウンサンプリング



理想ローパスフィルタ



理想は，$\pm\frac{\pi}{T}$以内の(角)周波数成分をそのまま保存し，
それ以外の(角)周波数成分を 0 にしたい．

$$G(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

⇒ フーリエ逆変換で$g(t)$を計算

理想ローパスフィルタ

$$\boxed{g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$

上記の信号 $g(t)$ を間隔 T で標本化 $\{g(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ できれば，
エイリアスを完全に消去できる！

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \dfrac{\pi}{T} \\ 1/2, & |\omega| = \dfrac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > \dfrac{\pi}{T} \end{cases}$$

------- カットオフ角周波数

厳密には，　$|\omega| = \frac{\pi}{T}$　のとき
$G(\omega) = F(\omega)/2$ となるが，
この違いは逆フーリエ変換の積分計算には影響がない

と定義すれば，$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$

$H(\omega)$を他の信号に適用する場合、その信号の$\frac{\pi}{T}$以上の成分を消去できる
→ フィルタ$H(\omega)$が$F(\omega)$に依存しない
→ システムとして扱う（システムの概念は11回目の授業で勉強する）

どのように$g(t)$ が作れるか？ $H(\omega)$をどう$f(t)$に適用させるか？

実は第5回目の講義で既に勉強していた！！

理想ローパスフィルタ = sinc 関数との畳み込み

※周波数領域の乗算＝時間領域の畳み込み

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) \xrightarrow{\text{逆フーリエ変換}} g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \dfrac{\pi}{T} \\ 1/2, & |\omega| = \dfrac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > \dfrac{\pi}{T} \end{cases} \xrightarrow{\text{逆フーリエ変換}} h(t) = \frac{1}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1/T, & t = 0 \end{cases}$$

アンチエリアスフィルタの例では、カットオフ角周波数を $\frac{\pi}{T}$ で設定した。

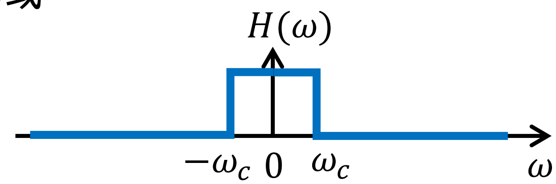
一般的ローパスフィルタ(例えば、カットオフ角周波数をω_cとする)
の時間領域表現を自分で計算してみてください

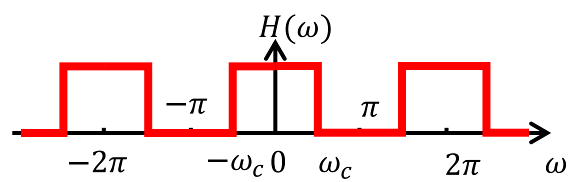
デジタルローパスフィルタ

理想ローパスフィルタの時間領域 $h(t)$ は連続時間信号であるので，
そのままデジタル信号処理で利用できない
→　離散化する必要ある！

	時間領域		周波数領域
理想ローパスフィルタ（連続）	$h(t) = \dfrac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$	← フーリエ変換 (FT) →	$H(\omega)$
デジタルローパスフィルタ（離散）	$h[k] = \dfrac{\sin(\omega_c kT)}{\pi kT}$	← 離散フーリエ変換 (DFT) →	$H[n]$

↓ 間隔 T で標本化

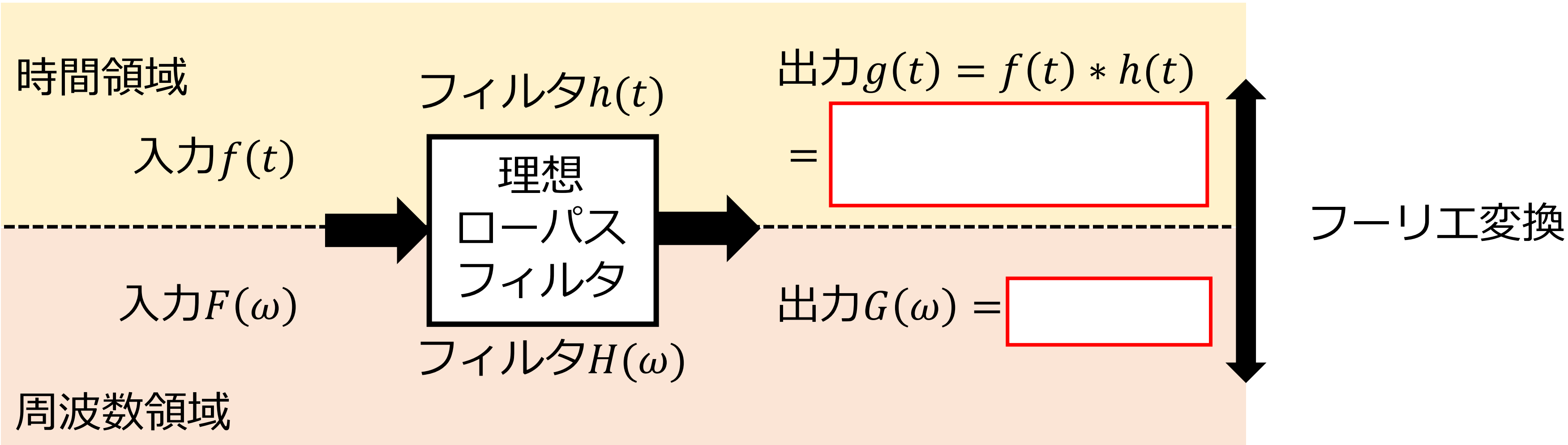




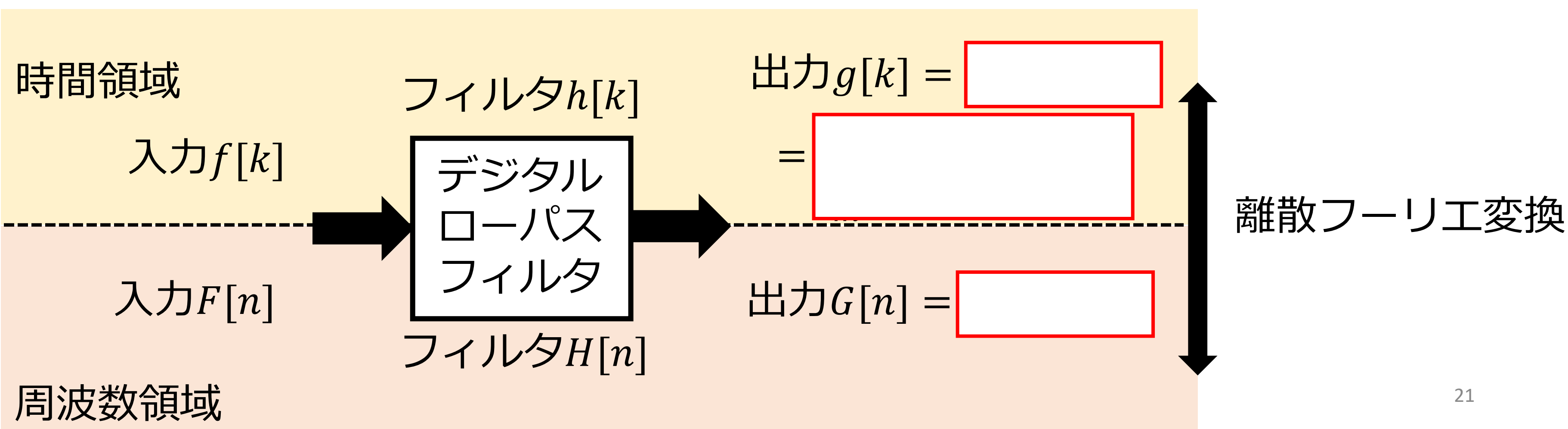
※比較のために，$\omega_n = \dfrac{2\pi n}{NT}$ で
$H[n]$ を$H(\omega)$の形に変換

デジタルローパスフィルタ

理想ローパスフィルタ



デジタルローパスフィルタ



今週の宿題内容

今週の宿題はプログラミング課題です。

＊ソースコード（言語不問）とレポートをmanaba＋Rから提出してください。

＊レポートの体裁は自由ですが、必ず氏名、学籍番号、問題の結果、考察を含めてください。
（以降のスライドにヒントを書いていますので、それを踏まえて考察してください）

10週目の宿題内容

- デジタルローパスフィルタの係数と周波数応答

デジタルローパスフィルタの係数$h[k]$は以下の式で定義される：

$$h[k] = \begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\omega_c kT)\,, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7 \\ 0, & \text{otherwise(その他)} \end{cases}$$

$T = 1$
$\omega_c = 0.5\pi/T$

(1-1) フィルタ $h[k]$の値を計算し、描画してください。

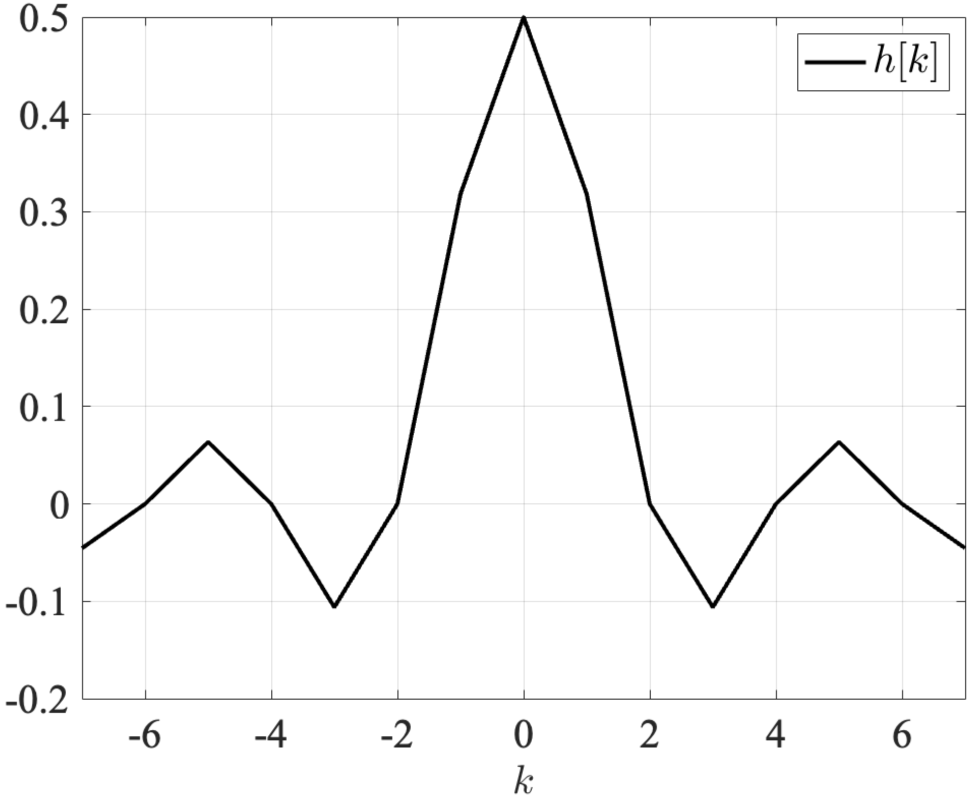
$h[k]$に対し、$N = 16$の離散フーリエ変換を行う：

$$H[n] = \mathrm{DFT}\{h[k]\}$$

(1-2) 周波数領域表現$H[n]$の絶対値 $|H[n]|$を計算し、描画してください。

結果例

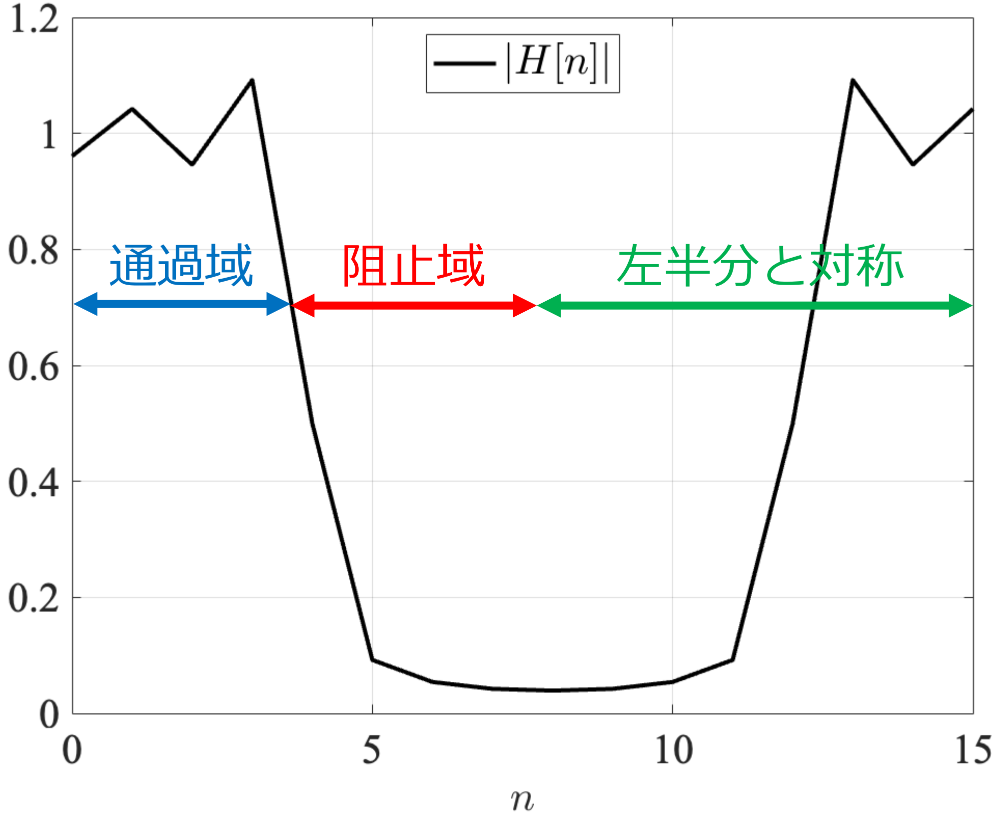
(1-1) フィルタ $h[k]$の値を計算し、描画してください。



※今回のフィルタ係数の設定が粗いですが、sinc関数の傾向を確認できる

結果例

(1-2) 周波数領域表現$H[n]$の絶対値 $|H[n]|$を計算し、描画してください。



※今回のフィルタ係数の設定が粗いですが、
1.低域では通過、
2.高域では阻止、
3.左右対称
の3点を確認できます

manaba+R の小テスト

manaba +R にログインして，第10回小テストを行います。
制限時間は 10分間 です。

スライドを見返しながら，解いてよいです.