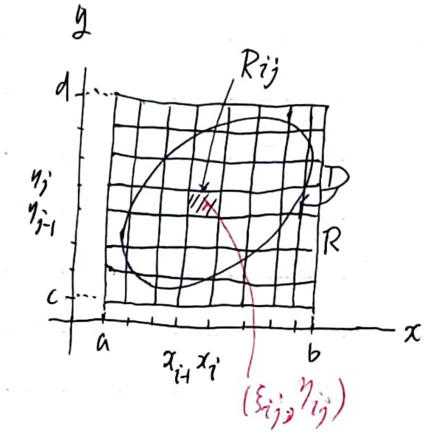
数学演習2 第10回

2022 11/29

重積分

<u>定義1</u> $D\subset\mathbb{R}^2$ を有界集合、$f(x,y)$ を D 上の有界関数とし、$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$ によって $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\tilde{f}(x,y)$ を定義するとき、D を含む長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ をひとつとり R の分割

$$\Delta:\ \begin{matrix} a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b \\ c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d \end{matrix}$$



の各小長方形 $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$ から任意の1点 $(\xi_{ij},\eta_{ij})\in R_{ij}$ をとって作った分割 Δ に対する $f(x,y)$ のリーマン和

$$S_\Delta(f)=\sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\tilde{f}(\xi_{ij},\eta_{ij})|R_{ij}|,\quad |R_{ij}| \text{ は } R_{ij} \text{ の面積}$$

が分割 Δ の幅 $|\Delta|=\max\{\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2}\mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ を 0 に限りなく近づけるとき分割や代表点（点 (ξ_{ij},η_{ij}) のこと）のとり方によらない一定の極限値 S に限りなく近づくならば S を $f(x,y)$ の D 上の<u>2重積分</u>といい $S=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ と表す。このとき $f(x,y)$ は D 上2重積分可能であるという。

定数 $f(x,y)=1$ が D 上2重積分可能のとき 1 の D 上の2重積分 $\iint_D dxdy$ を D の面積といい、D は面積確定であるという。

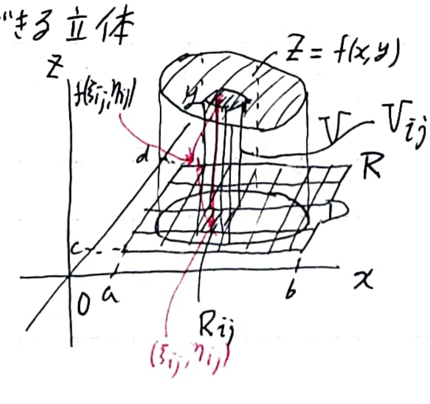
<u>定理1</u> $D\subset\mathbb{R}^2$ が面積確定な有界閉集合、$f(x,y)$ が D 上連続ならば $f(x,y)$ は D 上2重積分可能である。

<u>例1.</u> $f(x,y)$ が面積確定有界閉集合 D で連続, $f(x,y)\ge 0$ であるとき

$S=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は曲面 $z=f(x,y)$ と D とでできる立体

$$V=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ 0\le z\le f(x,y)\}$$

の体積である。

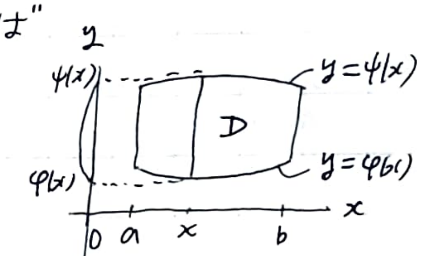


(:) $V\fallingdotseq\sum_{R_{ij}\subset D}V_{ij}\fallingdotseq\sum_{R_{ij}\subset D}f(\xi_{ij},\eta_{ij})|R_{ij}|$ において $|\Delta|\to 0$ とすると 右辺 $\to S$ となるから $V=S$ □

累次積分

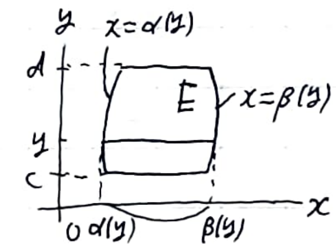
<u>定理2.</u> (1) $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$ とおく。
ここで $\varphi(x),\psi(x)$ は $[a,b]$ で連続, $\varphi(x)\le\psi(x)$ とする。
このとき D は面積確定有界閉集合で $f(x,y)$ が D 上連続ならば

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx$$



(2) $E=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \alpha(y)\le x\le\beta(y)\}$ とおく。
ここで $\alpha(y),\beta(y)$ は $[c,d]$ で連続, $\alpha(y)\le\beta(y)$ とする。
このとき E は面積確定有界閉集合で $f(x,y)$ が E 上連続ならば

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left\{\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right\}dy$$



上で (1), (2) の右辺を $\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$, $\int_c^d dy\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ とも表す。

練 5.2 (A)

1. 次の積分を計算せよ。

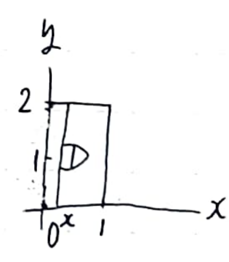
(1) $\iint_D (3x^2+y)\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$

(3) $\iint_D y^2\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid -y\le x\le y,\ 0\le y\le 1\}$

解) (1) $\iint_D (3x^2+y)\,dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^2(3x^2+y)\,dy\right\}dx$

$=\int_0^1\left[3x^2y+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2}dx$

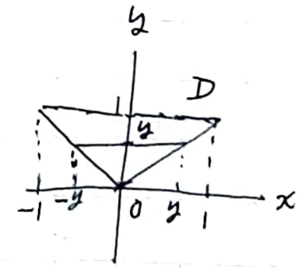
$=\int_0^1(6x^2+2)\,dx=\left[2x^3+2x\right]_0^1=2+2=4$ □



(3) $\iint_D y^2\,dxdy=\int_0^1\left(\int_{-y}^{y}y^2\,dx\right)dy$

$=\int_0^1\left[y^2x\right]_{x=-y}^{x=y}dy=\int_0^1 2y^3\,dy$

$=\left[\frac{1}{2}y^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$ □



3. 次の積分を計算せよ。

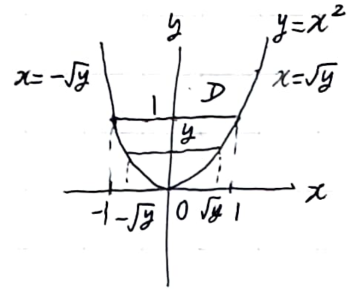
(3) $\iint_D y\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x^2\le y\le 1\}$

解) $\iint_D y\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y\,dx\right)dy$

$= \int_0^1 \Big[yx\Big]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy$

$= \int_0^1 2y\sqrt{y}\,dy$

$= \left[\frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$



別) $\iint_D y\,dxdy = \int_{-1}^1\left(\int_{x^2}^1 y\,dy\right)dx$

$= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=1} dx$

$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-(x^2)^2)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-x^4)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)\right\} = \frac{4}{5}$ □