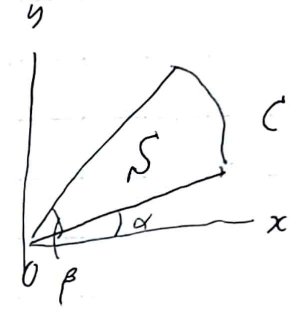
数学演習2 第8回

2022 11/15

面積

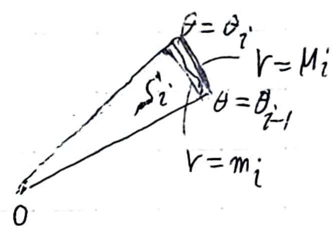
定理1. 極座標によって表された曲線 $C: r=f(\theta)$ $(\alpha\leq\theta\leq\beta)$ と半直線 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ の囲む図形の面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}f(\theta)^2 d\theta$$



証明) $\Delta: \alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta$ を $[\alpha,\beta]$ の分割

$m_i = \min\limits_{\theta_{i-1}\leq\theta\leq\theta_i} f(\theta)$, $M_i = \max\limits_{\theta_{i-1}\leq\theta\leq\theta_i} f(\theta)$ とし、



S_i を $\theta=\theta_{i-1}, \theta=\theta_i, C$ の囲む面積とすれば

$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i,\quad \frac{1}{2}m_i^2(\theta_i-\theta_{i-1})\leq S_i\leq\frac{1}{2}M_i^2(\theta_i-\theta_{i-1})$$

より
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i^2(\theta_i-\theta_{i-1})\leq S\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}M_i^2(\theta_i-\theta_{i-1})$$

故に $|\Delta|=\max\limits_{1\leq i\leq n}(\theta_i-\theta_{i-1})\to 0$ とすると上式の左辺, 右辺 $\to \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f(\theta)^2d\theta$ より公式が成立つ。□

曲線の長さ

定理2. C^1 級の平面曲線 $C: x=x(t), y=y(t)$, $(a\leq t\leq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

ここで長さの定義は $[a,b]$ の分割 $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ に対し曲線の点 $P_i(x(t_i), y(t_i))$ を順次結んでできる折れ線の長さ

$$L_\Delta=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\{x(t_i)-x(t_{i-1})\}^2+\{y(t_i)-y(t_{i-1})\}^2}$$

に対し, $L=\lim\limits_{|\Delta|\to 0}L_\Delta$ が存在するならばこの値を C の長さという。

定理3. C^1 級の関数 $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$ に対し、曲線 $C: y=f(x)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

定理4 極座標で表されたC^1級曲線$C: r=f(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$、ここで$f(\theta)$は$C^1$級とする。の長さ$L$は

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta$$

練4.5(A)

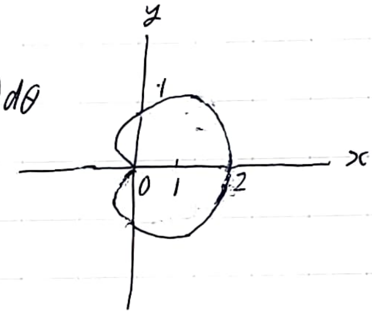
4. カージオイド $r=1+\cos\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

解) 面積Sは

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi \quad \square$$



3. サイクロイド: $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$ の $0\le t\le 2\pi$ の部分の長さを求めよ。

解) $$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=4-(-4)=8$$

$\square$

例題4.5.1 曲線 $r=1+\cos\theta$ の長さLを求めよ。(カージオイド)

解) $$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=2\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta-\int_\pi^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\right)=2\left(\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}-\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_\pi^{2\pi}\right)$$

$$=2(2-(-2))=8 \quad \square$$