数学演習2 第14回

2023 1/10

行列の対角化

$\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とおく。

n次正方行列Aに対してn次正則行列Pが存在して$P^{-1}AP$が対角行列になるときAは対角化可能であるという。

Aがn次正方実行列のときPも実行列にとれるならばAは$\mathbb{R}$上対角化可能であるという。

定理1 Tが$\mathbb{K}$上の有限次元ベクトル空間Vの線形変換、$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$を$T$の相異なる固有値全体とすると

$$\sum_{i=1}^{r} \dim W(\lambda_i;T) \le \dim V$$

また各$W(\lambda_i;T)$の基$u_{i1},\cdots,u_{in_i}$をとるとき

$u_{11},\cdots,u_{1n_1},\cdots,u_{r1},\cdots,u_{rn_r}$は1次独立である。

証明) $u_1,\cdots,u_k$をu_iがλ_iの固有ベクトルにとるとき1次独立を示す。kに関する帰納法。$k=1$のとき成立つ。$k-1$のとき成立つとすると$u_1,\cdots,u_k$が1次従属なら、$u_1,\cdots,u_{k-1}$は1次独立より$c_1u_1+\cdots+c_ku_k=\mathbf{0}$を自明でない1次関係とすると$c_k=0$なら$c_1u_1+\cdots+c_{k-1}u_{k-1}=\mathbf{0}$が自明でない1次関係で矛盾だから$c_k\ne 0$となり、$u_k=d_1u_1+\cdots+d_{k-1}u_{k-1}$と表せる。$T$を施すと

$$\lambda_k u_k = Tu_k = d_1Tu_1+\cdots+d_{k-1}Tu_{k-1} = d_1\lambda_1u_1+\cdots+d_{k-1}\lambda_{k-1}u_{k-1}$$

これと$\lambda_k u_k = d_1\lambda_k u_1+\cdots+d_{k-1}\lambda_k u_{k-1}$を引くと

$$d_1(\lambda_1-\lambda_k)u_1+\cdots+d_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)u_{k-1}=\mathbf{0}$$

$u_1,\cdots,u_{k-1}$が1次独立より$d_1(\lambda_1-\lambda_k)=0,\cdots,d_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)=0$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$は異なるから$d_1=0,\cdots,d_{k-1}=0$ よって$u_k=\mathbf{0}$となりu_kが固有ベクトルに矛盾する。よってkのとき成立つ。

次に$u_{i1},\cdots,u_{in_i}$を上のとおりとするとき$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}u_j=\mathbf{0}$とし、$v_i=\sum_{j=1}^{n_i}c_{ij}u_j$とすると$v_1+\cdots+v_r=\mathbf{0}$

もしある$v_i\ne\mathbf{0}$ならば$v_1,\cdots,v_r$の内$\ne\mathbf{0}$なものを$v_{i_1},\cdots,v_{i_k}$とするとこれらは$\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_k}$の固有ベクトルより1次独立で、$v_{i_1}+\cdots+v_{i_k}\ne\mathbf{0}$ ∴ $v_1+\cdots+v_r\ne\mathbf{0}$となり矛盾。∴ $v_1=\mathbf{0},\cdots,v_r=\mathbf{0}$ ∴ $\sum_{j=1}^{n_i}c_{ij}u_j=\mathbf{0}$より$c_{ij}=0\ (j=1,\cdots,n_i)$

故に$u_{ij}\ (1\le i\le r,1\le j\le n_i)$は1次独立。∴ $n_1+\cdots+n_r\le\dim V$

$n_i=\dim W(\lambda_i;T)$であるから定理が成立つ。□

定理2　Aを実n次正方行列(またはn次正方行列)、Aの相異なる実固有値全体(または相異なる固有値全体)を$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$とするとき Aが$\mathbb{R}$上対角化可能(または対角化可能)であるための必要十分条件は $T_A(x) = Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$(または $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$)に対し

$$\sum_{i=1}^{r} \dim W(\lambda_i; T_A) = n$$

証明)(必要性) $P = [\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n]$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$ とすると

$AP = [A\mathbb{p}_1 \cdots A\mathbb{p}_n] = P[\mu_1 \mathbb{e}_1 \cdots \mu_n \mathbb{e}_n] = [\mu_1 \mathbb{p}_1 \cdots \mu_n \mathbb{p}_n]$

$\therefore A\mathbb{p}_i = \mu_i \mathbb{p}_i$ よって $\mathbb{p}_i$はT_Aの固有ベクトル μ_iは固有値

$\mu_1, \cdots, \mu_n$の内 λ_iであるものの個数をk_iとすると $k_1 + \cdots + k_r = n$ で

$k_i \le \dim W(\lambda_i; T_A)$ より $n \le \sum_{i=1}^{r} \dim W(\lambda_i; T_A)$ ここで定理1より

右辺 $\le n$ よって等号が成立つ。

(十分性)各$W(\lambda_i; T_A)$の基 $\mathbb{u}_{i1}, \cdots, \mathbb{u}_{in_i}$ をとると $\mathbb{u}_{i1}, \cdots, \mathbb{u}_{in_i}$ $(1 \le i \le r, 1 \le j \le n_i)$

は1次独立より $n_1 + \cdots + n_r = n$ であるから $P = [\mathbb{u}_{11} \cdots \mathbb{u}_{1n_1} \cdots \mathbb{u}_{r1} \cdots \mathbb{u}_{rn_r}]$

は正則で

$$AP = [A\mathbb{u}_{11} \cdots A\mathbb{u}_{1n_1} \cdots A\mathbb{u}_{r1} \cdots A\mathbb{u}_{rn_r}] = [\lambda_1 \mathbb{u}_{11} \cdots \lambda_1 \mathbb{u}_{1n_1} \cdots \lambda_r \mathbb{u}_{r1} \cdots \lambda_r \mathbb{u}_{rn_r}]$$

$$= P[\lambda_1 \mathbb{e}_1 \cdots \lambda_1 \mathbb{e}_{n_1} \cdots \lambda_r \mathbb{e}_{n-n_r+1} \cdots \lambda_r \mathbb{e}_n] = P \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\lambda_r \ddots \lambda_r}_{n_r} \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_r \end{bmatrix} \qquad \square$$

問題5.4

1. 次の行列Aは対角化できるか調べ、対角化できれば対角化せよ。

(1) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

解) (1) $g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ -3 & t+2 \end{vmatrix} = (t-7)(t+2) + 18$

$= t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$

T_Aの固有値は $\lambda = 1, 4$

各固有値の固有空間を求めると、$W(\lambda; T_A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\lambda E - A)x = \mathbb{0}\}$ より

$\lambda=1$のとき　$(E-A)x=\mathbb{0}$を解くと、$E-A=\begin{bmatrix}-6&6\\-3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ より $x_1-x_2=0$

$x=c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$　$\therefore W(1;TA)=\left\{c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$

$\lambda=4$のとき　$(4E-A)x=\mathbb{0}$を解くと　$4E-A=\begin{bmatrix}-3&6\\-3&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix}$ より $x_1-2x_2=0$

$x=c\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$　$\therefore W(4;TA)=\left\{c\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$

$\dim W(1;TA)+\dim W(4;TA)=1+1=2$ より Aは対角化可能

各固有空間の基　$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ をとり　$P=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$ とおくと

$$AP=\left[A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1&8\\1&4\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},4\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right]=P\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$$

(4)　$g_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t+3&2&2\\-4&t-3&-2\\-8&-4&t-5\end{vmatrix}=(t+3)(t-3)(t-5)+32+32+8(t-5)-8(t+3)+16(t-3)$

$=t^3-5t^2+7t-3=(t-1)(t^2-4t+3)=(t-1)^2(t-3)$

よって TAの固有値は $\lambda=1,3$

固有ベクトルは、$\lambda=1$のとき　$(E-A)x=\mathbb{0}$を解くと　$E-A=\begin{bmatrix}4&2&2\\-4&-2&-2\\-8&-4&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1/2&1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

より $x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=0$　$x_2=c_1,\ x_3=c_2$ とおくと　$x=\begin{bmatrix}-\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{2}\\c_1\\c_2\end{bmatrix}$

$W(1;TA)=\left\{c_1\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\, c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$

$\lambda=3$のとき　$(3E-A)x=\mathbb{0}$を解くと　$3E-A=\begin{bmatrix}6&2&2\\-4&0&-2\\-8&-4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&2&-1\\2&0&1\\0&-4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore x_1+\frac{1}{2}x_3=0$　$x=c\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

$x_2-\frac{1}{2}x_3=0$　$W(3;TA)=\left\{c\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$

$\dim W(1;TA)+\dim W(3;TA)=2+1=3$ より Aは対角化可能

各固有空間の基をとり　$W(1;TA)$の基$\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\right\}$, $W(3;TA)$の基$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right\}$

から　$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&0&-1\\0&-2&-2\end{bmatrix}$ とおくと　$AP=\left[A\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix},A\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix},A\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1&1&3\\-2&0&-3\\0&-2&-6\end{bmatrix}$

$=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$　$\therefore P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ □