第5回　画像復元と画像再構成

画像復元

- 画像復元（restoration）とは、ぼけやぶれのある画像を復元すること。すなわち、画像が劣化した過程を逆にたどる処理を行う。

- 内容
  - 劣化画像と点広がり関数
  - 復元方法（逆フィルタ、ウィーナフィルタ）
  - 点広がり関数のモデル化とパラメータ推定

劣化画像

- f(x,y): 劣化前の画像
- g(x,y):劣化後の画像
- h(x,y):劣化を表す関数（空間フィルタ）

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi, y-\eta)h(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$= f(x,y) * h(x,y)$$

劣化画像gは、原画像fとhとの畳み込みで表される

点広がり関数

f(x,y)は点光源[2次元デルタ関数：δ(x,y)]の場合、

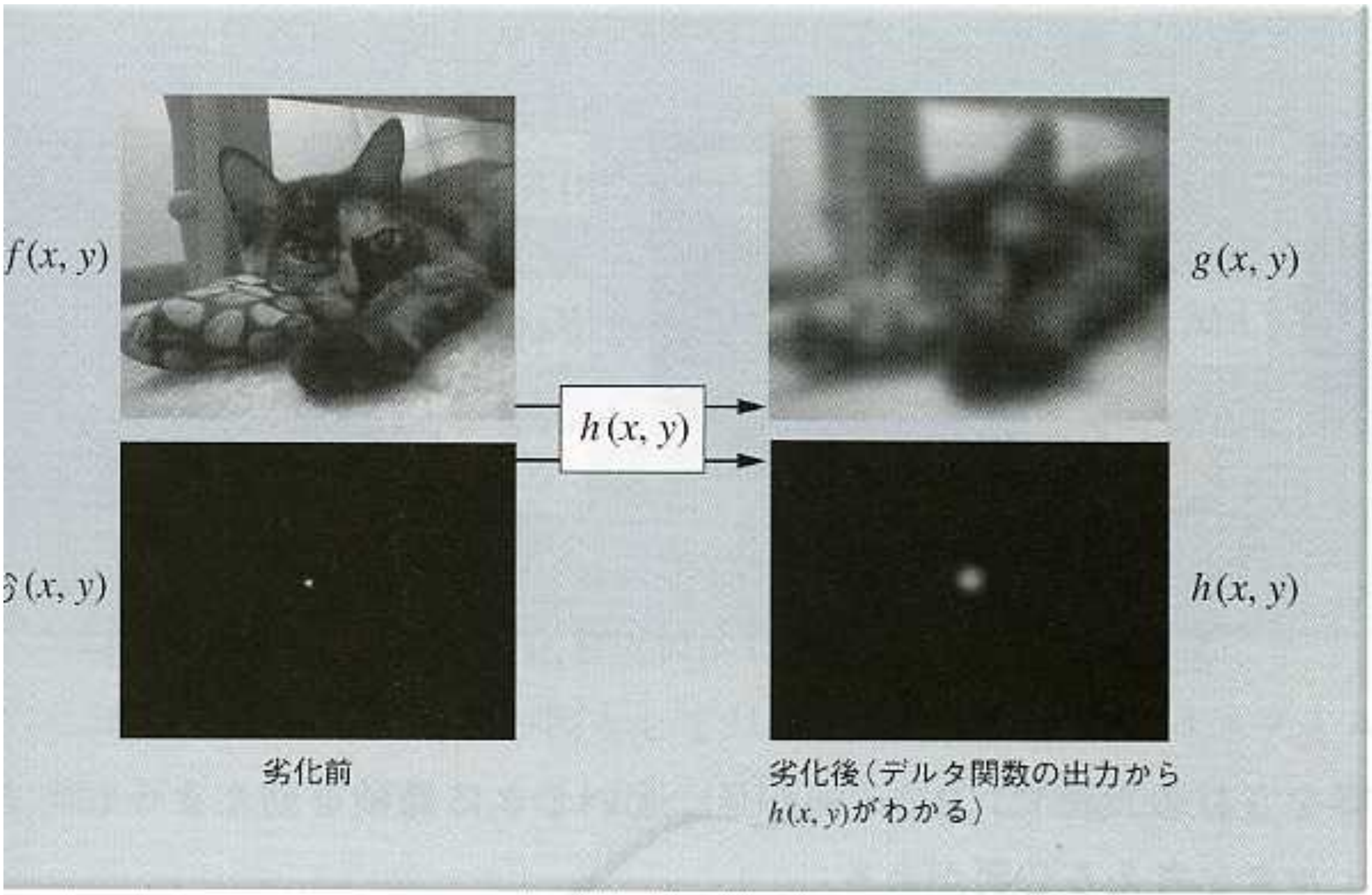
$$\delta(x,y) = \begin{cases} \infty; & (x,y) = (0,0)\text{のとき} \\ 0; & \text{その他} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$g(x,y) = \delta(x,y) * h(x,y) = h(x,y)$$

すなわち、点光源の出力はh(x,y)である。従って、
h(x,y)は点広がり関数（PSF: Point Spread function）とも呼ぶ。

点広がり関数と劣化画像



画像の復元方法

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi, y-\eta) h(\xi,\eta) d\xi d\eta$$
$$= f(x,y) * h(x,y)$$

- 劣化画像g(x,y)から、原画像f(x,y)を求める逆問題である。
- 畳み込み計算は、フーリエ変換すると、掛け算になる

$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

$$\Downarrow$$

$$F(u,v) = G(u,v) \cdot \frac{1}{H(u,v)}$$

IF(u,v)=1/H(u,v)は、
逆フィルタ（inverse filter）という

ウィーナフィルタ(Wiener filter)

- **一方、劣化画像にノイズを含む場合、**

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + n(x,y)$$

フーリエ変換

$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v) + N(u,v)$$

$Inverse\ Filter$の場合、

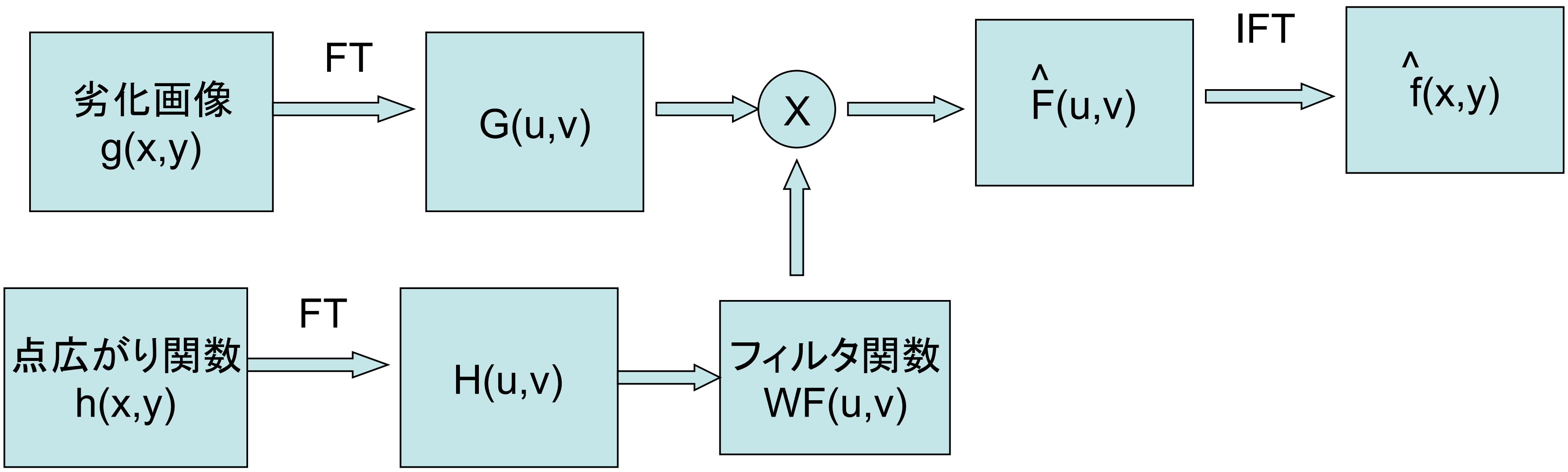
$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

H(u,v)が零のところで、ノイズが増幅してしまう。

Wiener filter:

$$WF(u,v) = \frac{1}{H(u,v)} \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + |N(u,v)|^2 / |F(u,v)|^2}$$

画像復元の流れ



点広がり関数の推定

- **劣化画像の復元には、劣化過程を表す点広がり関数を知っておく必要がある。**
- **焦点ぼけによる点広がり関数**

$$h(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\quad (Gaussian\text{分布})$$

$$H(u,v)=\exp(-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2))\quad (Gaussian\text{分布})$$

a] 劣化画像

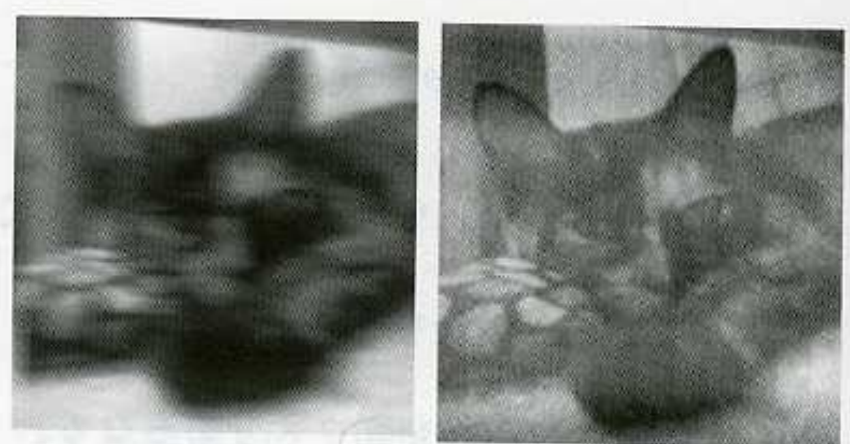
[b] 復元画像

画素サイズ：128x128
σ=5

カメラのぶれによる点広がり関数

$$h_\theta(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{w}, & x\cos\theta + y\sin\theta \le \dfrac{w}{2} \\ 0, & x\cos\theta + y\sin\theta > \dfrac{w}{2} \end{cases}$$

$$H_\theta(u,v) = \frac{\sin(\pi w(u\cos\theta + v\sin\theta))}{\pi w(u\cos\theta + v\sin\theta)}$$



[a] 劣化画像　[b] 復元画像

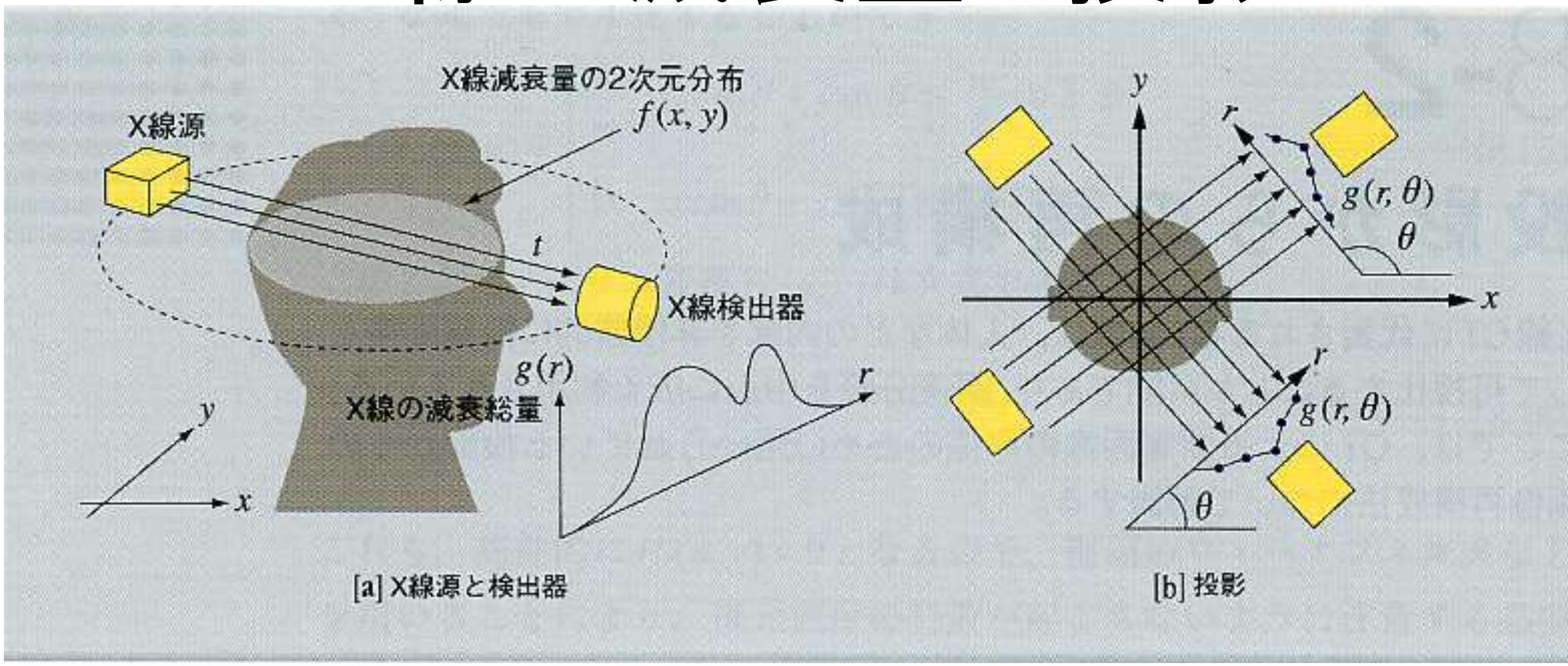
画像サイズ：128x128
θ=0, w=10

画像再構成（CTの原理）

- X線CT(Computed Tomograpy)は、人体などの内部を非侵襲的に可視化する技術である。その基本原理は、2次元（または1次元）投影像から3次元（または2次元）画像に再構成(reconstruction)する技術である。

- 内容
  - 投影と線積分値
  - 投影からの再構成アルゴリズム
    - フィルタ逆投影法、
    - フーリエ変換法
    - 反復法

X線の減衰量と投影



$$I_0(r) = I \cdot \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dt\right]$$

where

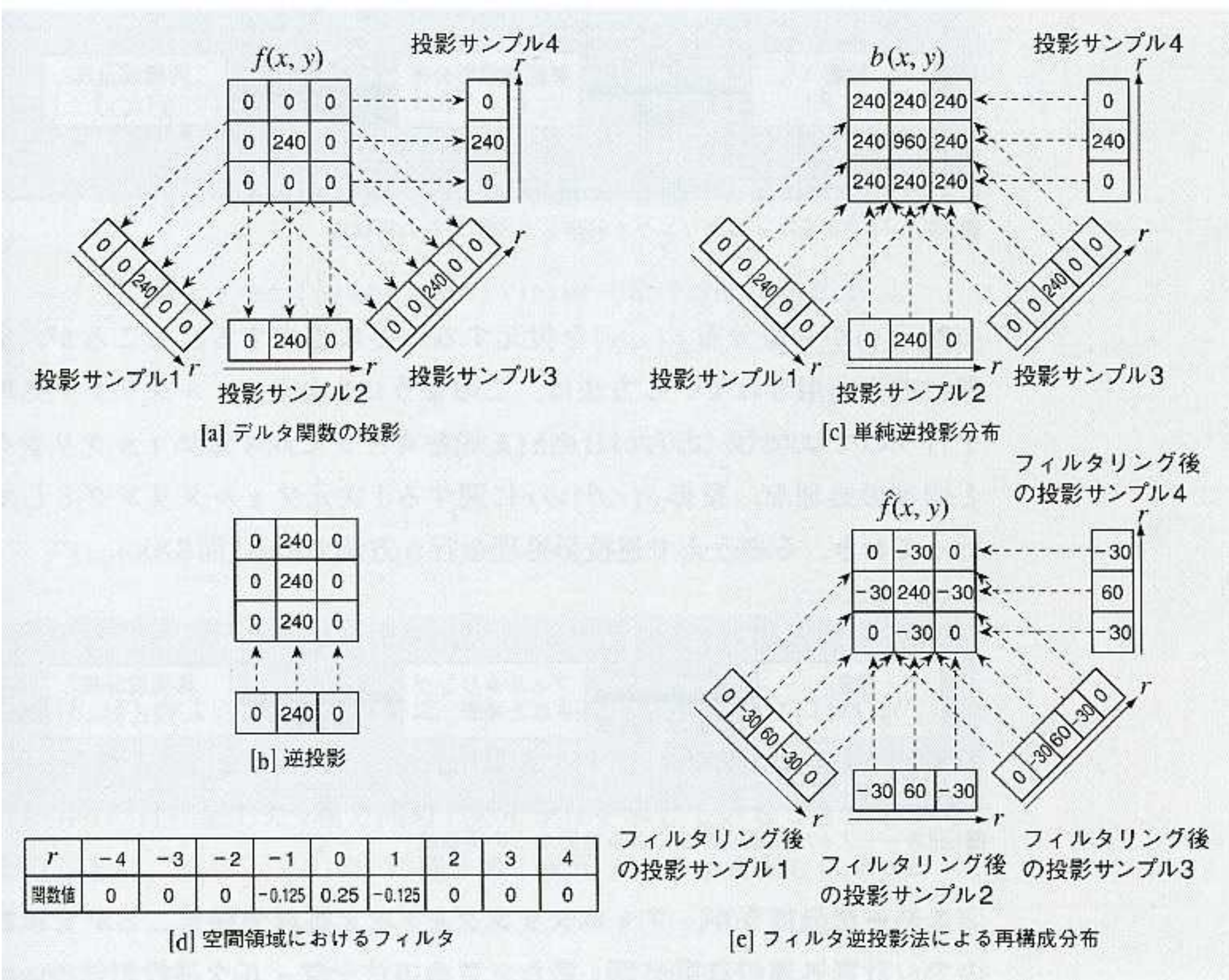
$$r = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad t = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

投影 $g\ (r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dt = \ln \dfrac{I}{I_0(r)}$

重要：θ方向への投影はf(x,y)のθ方向に沿った線積分で表される。

CT(画像再構成）：g(r,θ)からf(x,y)を求める逆問題である。

フィルタ逆投影法（filtered back projection）



r	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
関数値	0	0	0	−0.125	0.25	−0.125	0	0	0

[a] デルタ関数の投影

[b] 逆投影

[c] 単純逆投影分布

[d] 空間領域におけるフィルタ

[e] フィルタ逆投影法による再構成分布

単純逆投影とフィルタリング

- 単純逆投影：投影方向に沿って、g(r,θ)を均等にf(x,y)に与える（図b）

- しかし、得られる単純逆投影２次元分布b(x,y)は、元の分布f(x,y)と一致しない（図c）　b(x,y)=f(x,y)*h(x,y)
- h(x,y)は、点光源（デルタ関数）で推定することができる。

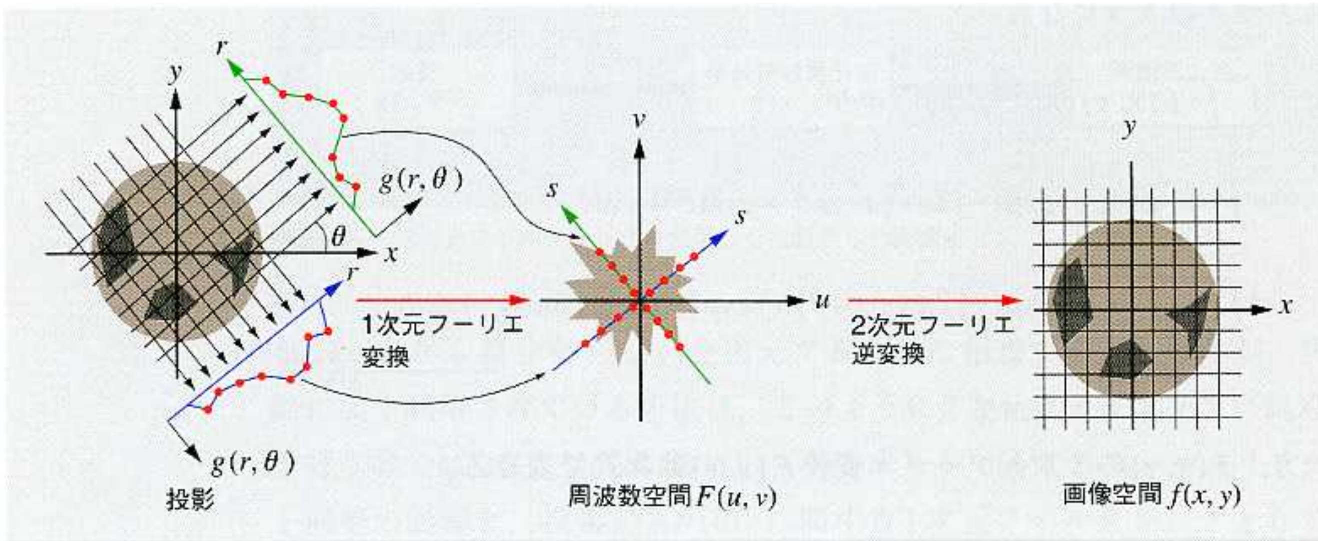
$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- 単純逆投影像b(x,y)から元の分布f(x,y)をもとめるには、h(x,y)の逆フィルタを用いれば、よい。フィルタ関数は図dに示す。

フィルタ逆投影の流れ

実際に、2次元フィルタリング処理を行うのではなく、投影データg(r.θ)のrに関する1次元フィルタリングを行う。

中央断面原理とフーリエ変換法



中央断面定理：g(r,θ)の１次元フーリエ変換G(s,θ)は, f(x,y)の２次元フーリエ変換F(u,v)において、u軸とθの角度をなすs軸方向の分布と等しい

様々な角度から、１次元投影データを取り、そのフーリエ変換で2次元f(x,y)のフーリエ変換F(u,v)を得ることができる。そのF(u,v)を２次元フーリエ逆変換すれば、f(x,y)を求めることができる。

フーリエ変換の問題点

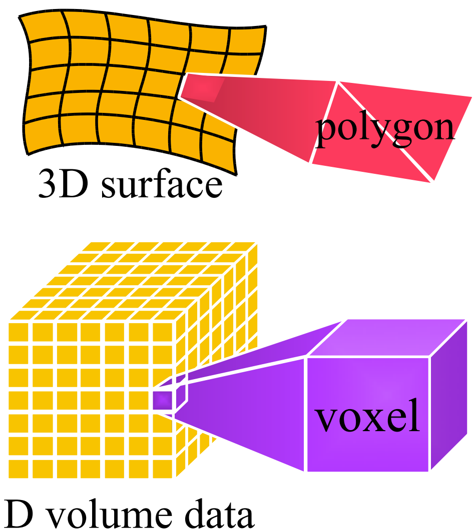
- 実際に得られる２次元フーリエ変換は極座標表現となり、低周波数領域（原点に近い領域）では、サンプル点が多いが、高周波数領域（原点から遠い領域）では、サンプル点が少ない。正方格子配列にするには、高周波数領域で補間する必要があり、誤差が大きく出る。
- 実際には、フーリエ変換法はあまり利用されていません。

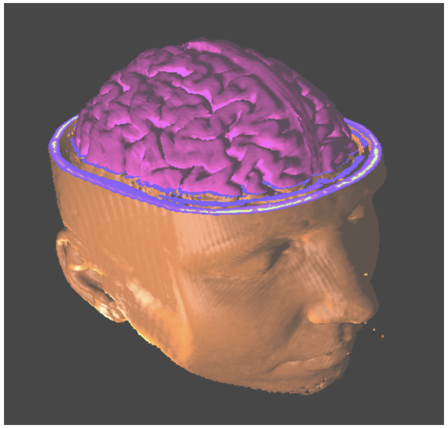
CT画像(volume image)の可視化

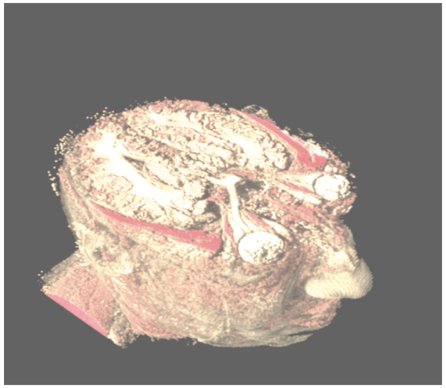
- CT画像のような3次元画像は、表面だけではなく、中のほうも意味があり、可視化する必要がある。その可視化技術はvolume renderingと呼ぶ

3D Surface Graphics

3D Volume Graphics

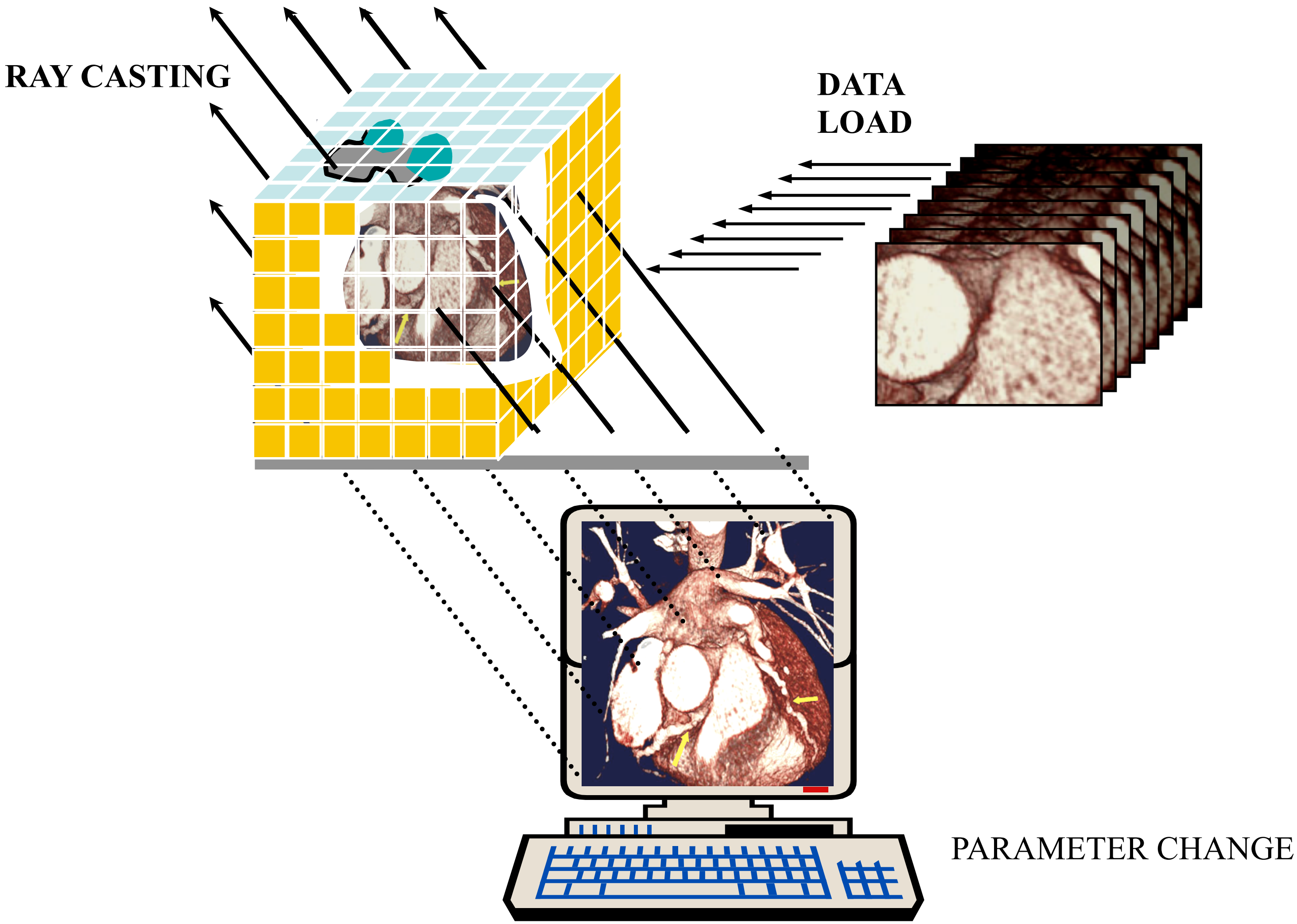






Courtesy of University of Mannheim, Germany

How to make a Volume Rendering



Volume rendering of CT images