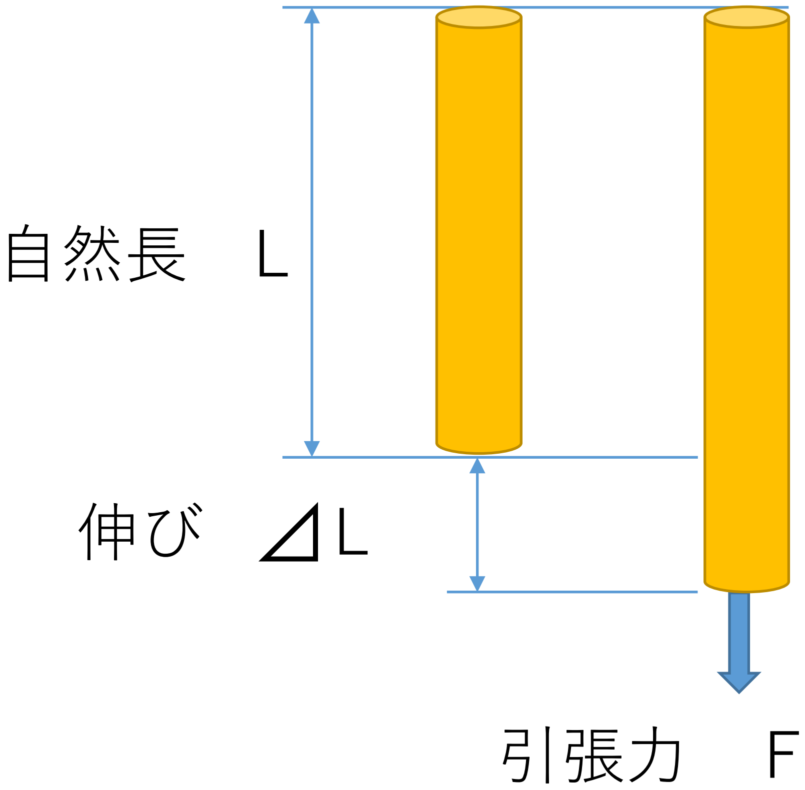
前回の復習　棒材の圧縮・引張変形



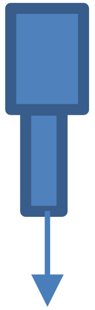
$$\sigma = E\,\varepsilon$$

$$\sigma\text{:応力} = \frac{\text{力}(N)}{\text{断面積}(m^2)} = F/A$$

E：ヤング率

$$\varepsilon\text{:ひずみ} = \frac{\text{変形量}(m)}{\text{自然長}(m)} = \Delta L/L$$

問８　右下図のように断面積 20 mm², 長さ 10 cm の丸棒と，断面積 40 mm², 長さ 10 cm の丸棒が接合された部材に 4000 N の引張力を加えると伸びはいくらになるか。ただし，ヤング率は 200 GPa とする。



(解)　$\boxed{15}\,\boxed{16}\times 10^{-\boxed{17}}$ mm　　15.0×10^{-2}[mm]

上下いずれの丸棒にも4000Nの引張力が加わる。

下側：応力$\sigma = \frac{力}{断面積} = \frac{4000}{20\times10^{-6}} = 20\times10^{7}[Pa]$

ひずみ$\varepsilon = \frac{応力}{ヤング率} = \frac{20\times10^{7}}{200\times10^{9}} = 1.0\times10^{-3}$

伸び＝長さ×ひずみ$= 100\times1.0\times10^{-3} = 10.0\times10^{-2}$[mm]

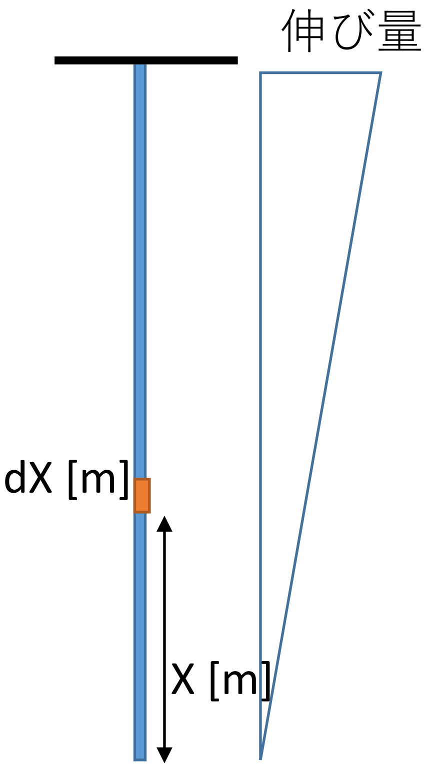
上側：応力$\sigma = \frac{4000}{40\times10^{-6}} = 10\times10^{7}[Pa]$

ひずみ$\varepsilon = \frac{応力}{ヤング率} = \frac{10\times10^{7}}{200\times10^{9}} = 0.5\times10^{-3}$

伸び＝長さ×ひずみ$= 100\times0.5\times10^{-3} = 5.0\times10^{-2}$[mm]

問 9 高さ 1000 m の高層ビルのエレベータのワイヤを考える。ワイヤの密度が 8 g/cm^3, ヤング率が 200 GPa, 断面積が断面積 2 cm^2 であるとすると、ワイヤは自重によって何 m 伸びるか？ワイヤの上部と下部で伸び量が異なることに注意すること。

(解) $\boxed{18} \times 10^{\boxed{19}}$ mm　　2×10^2[mm]



最下端からx [m]、長さ dx [m]の微小部位の伸びを考える。

下にあるワイヤの質量8×2× x ×100= 1600 x [g]　　1.6 x kg

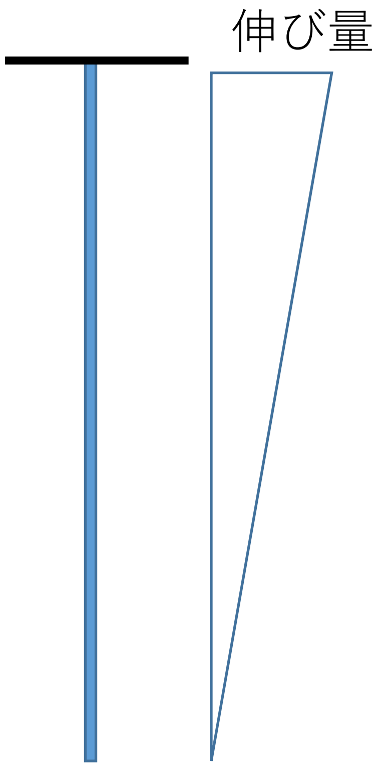
引張応力は 1.6 x ×9.8/(2×10^{-4}) [Pa]　　78.4 x kPa

伸び量は78.4 x k / 200 G × dx = 0.392 x dx ×10^{-6} [m]

$$\int_0^{1000} 0.392 \times 10^{-6} x dx = 0.392 \times 10^{-6} \times \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{1000} = 0.196$$

問 9　高さ 1000 m の高層ビルのエレベータのワイヤを考える。ワイヤの密度が 8 g/cm^3, ヤング率が 200 GPa, 断面積が断面積 2 cm^2 であるとすると、ワイヤは自重によって何 m 伸びるか？ワイヤの上部と下部で伸び量が異なることに注意すること。

(解)　$\boxed{18}\times 10^{\boxed{19}}$ mm　　　2×10^2[mm]



ワイヤの質量は $8\times 2\times 1000\times 100=16\times 10^5$ [g]　　1600 kg

最上部の引張応力は $1600\times 9.8/(2\times 10^{-4})$ [Pa]　　78.4 MPa

すべての箇所に、この引張応力がかかった場合の伸び量は
78.4 M / 200 G $\times$1000 = 0.392 [m]

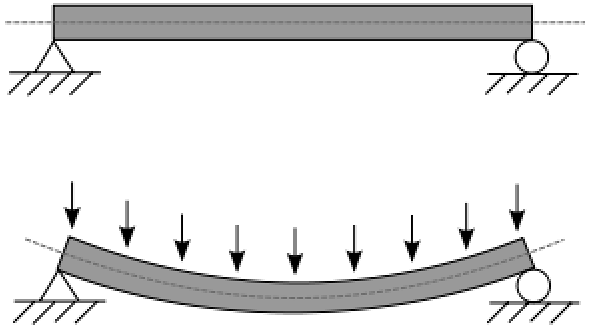
求める伸び量は半分であるため、0.392/2 = 0.196 [m]

材料力学２：曲げモーメント、
断面２次モーメント、はりの変形

はり（梁）とは

- 水平にかけて荷重を支える構造材　⇔　柱

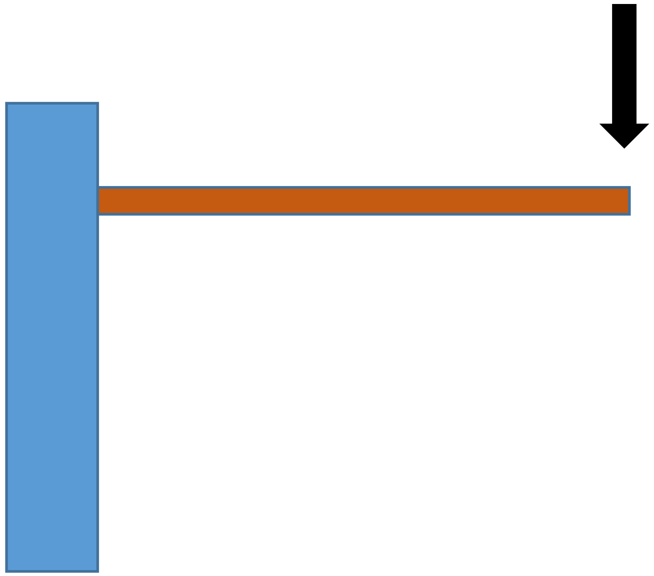
彦根城のはり　(Wikipediaより）



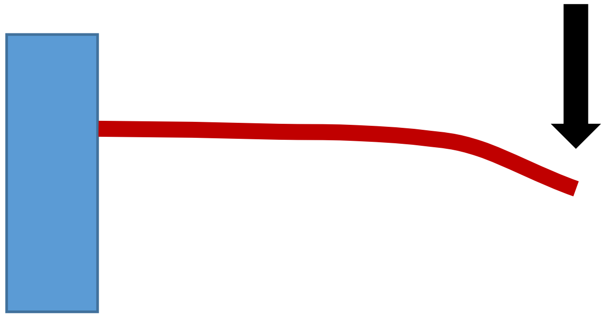
はりの変形　(Wikipediaより）

クイズ：曲げ変形

下図のように力を加えると、どのように変形するでしょう？



①

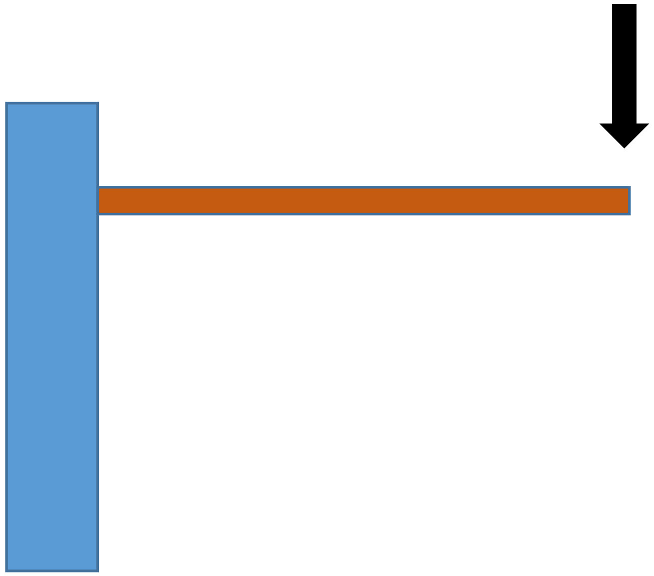


②

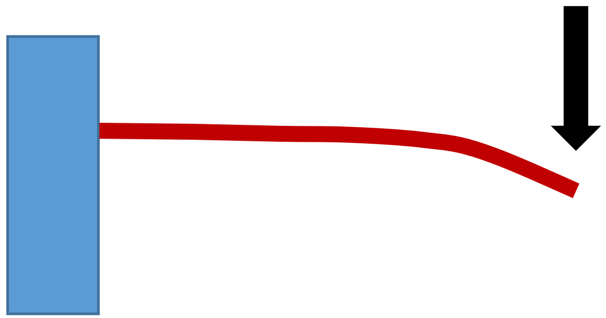
③

クイズ：曲げ変形　正解

下図のように力を加えると、どのように変形するでしょう？



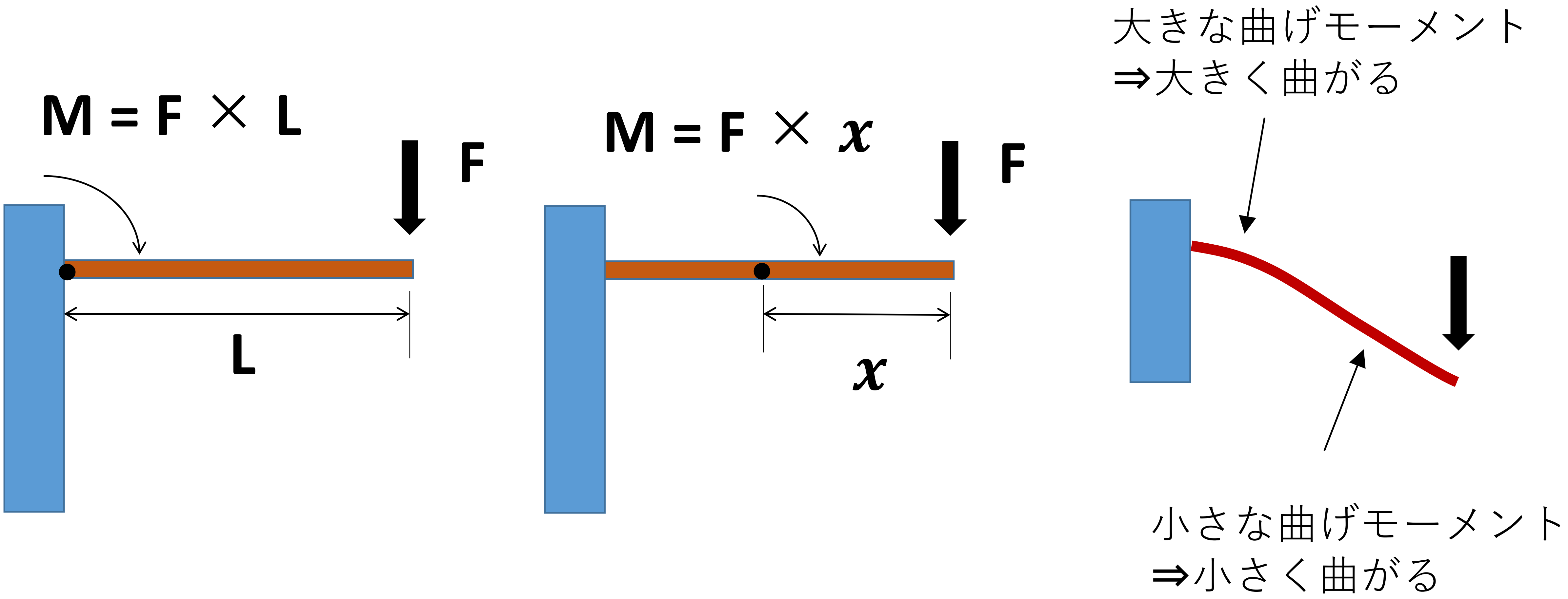
①



②

③

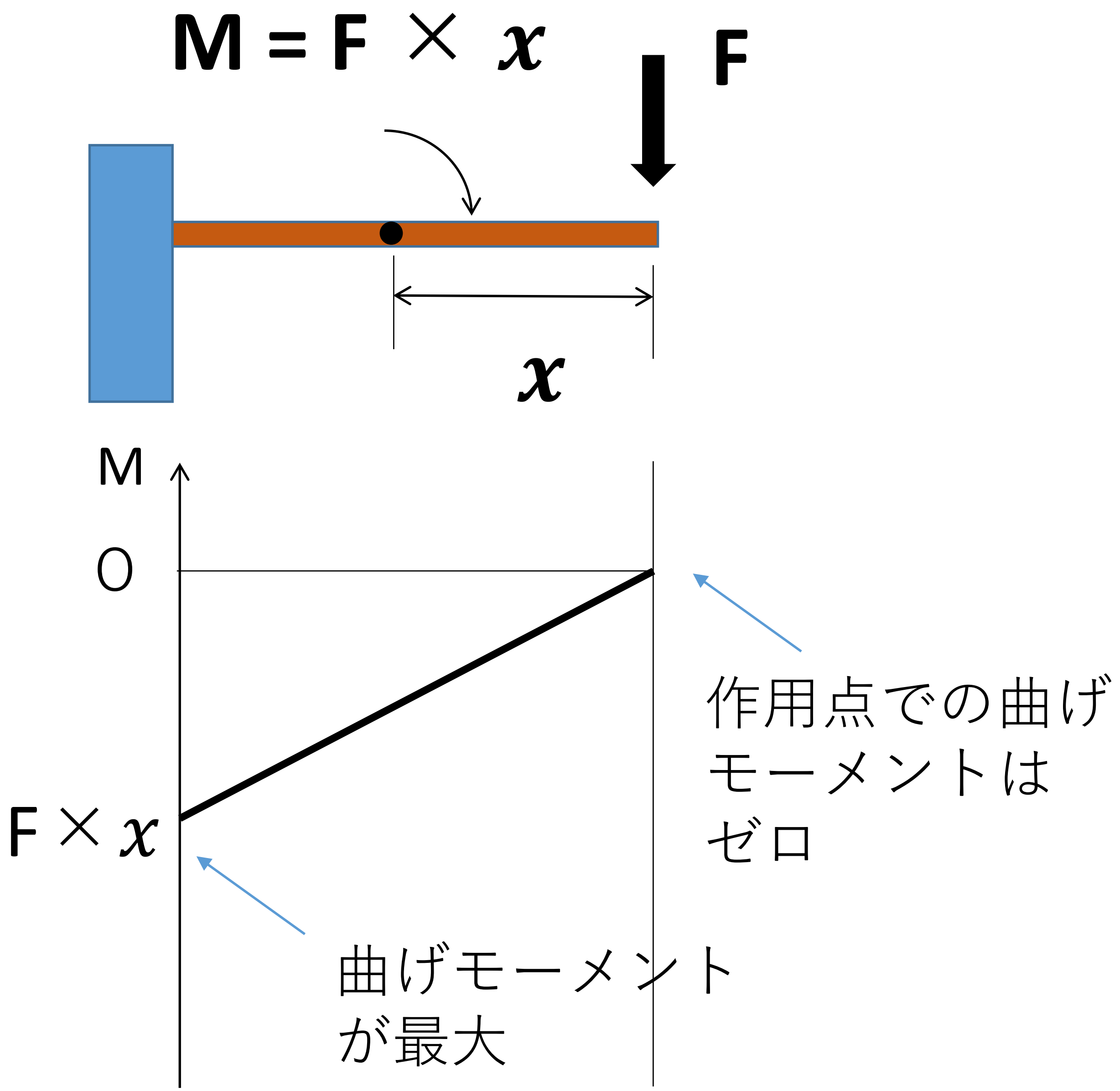
曲げモーメント＝作用力×モーメントアーム



曲げモーメント図

曲げモーメントの符号（正と負）

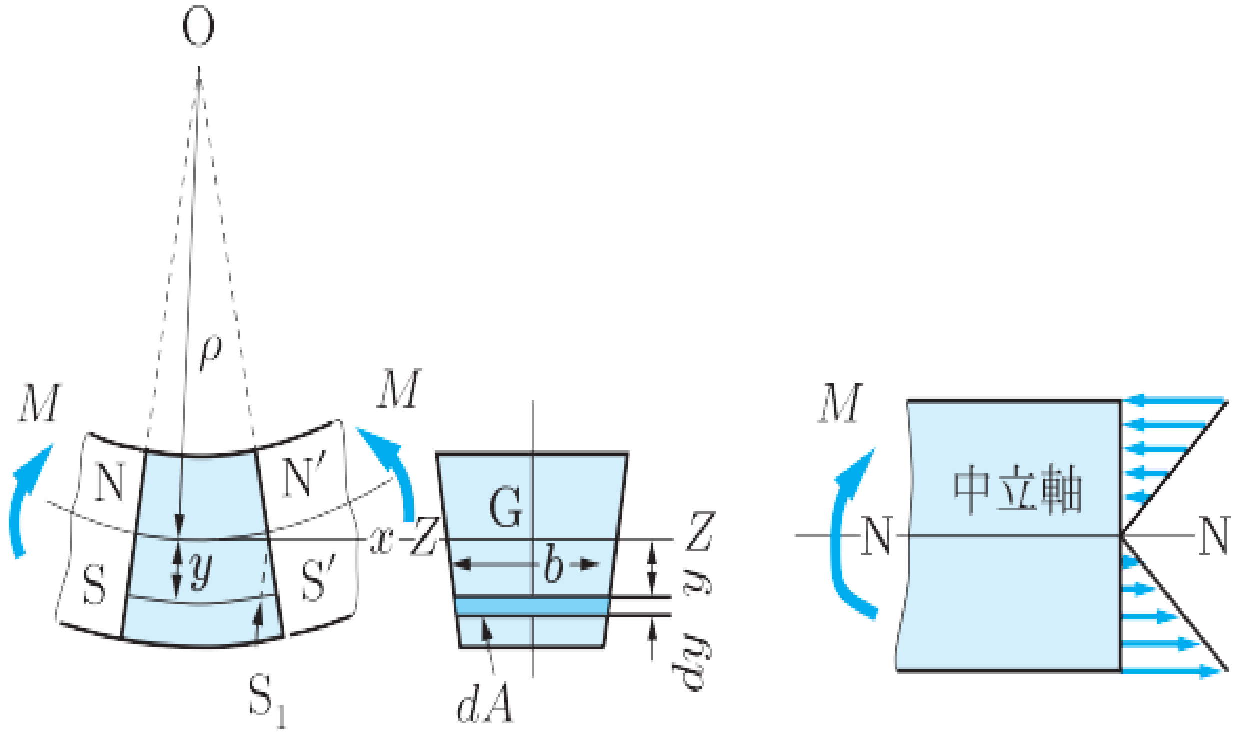
※ 書籍により定義は異なる。



はりの曲げと応力

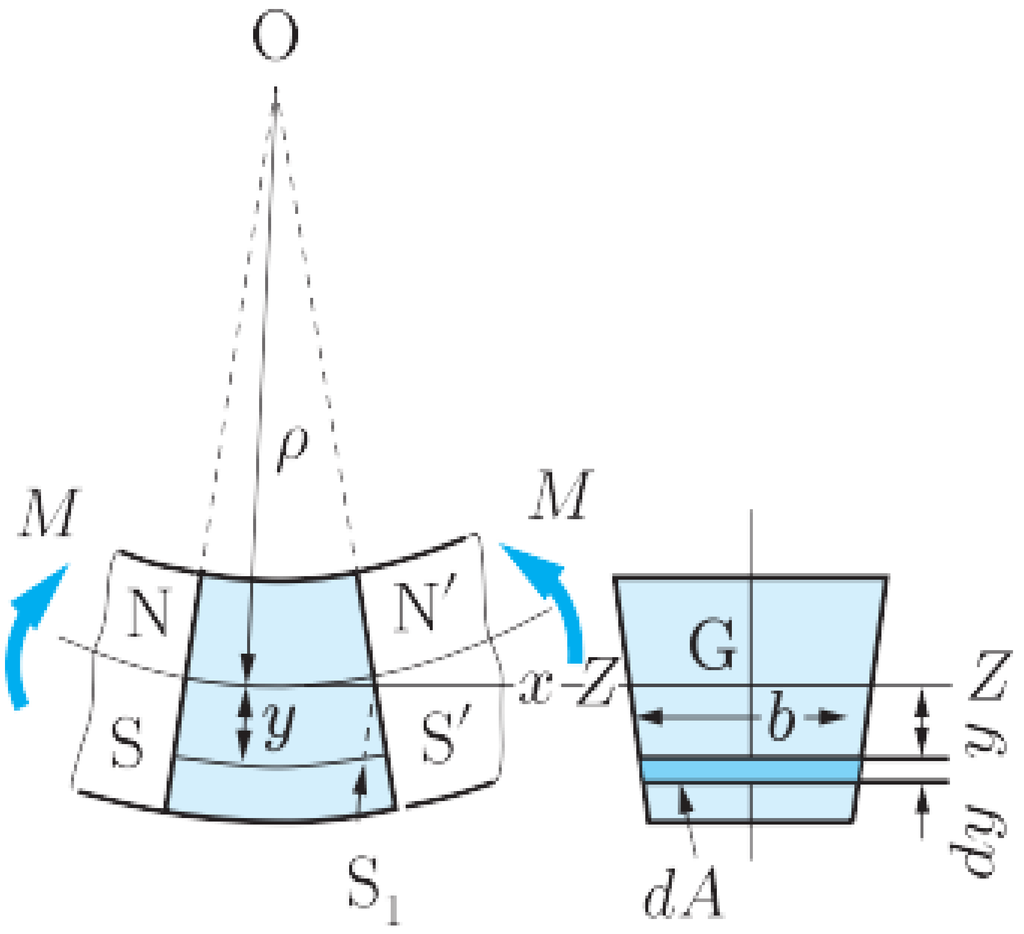
矩形断面のはりが曲げモーメントを受けて湾曲するとき、外側は引張りを受けて延び、内側は圧縮を受けて縮む。

中央では伸びも縮みもしない面があり、このような面を中立面という。



（a）ひずみ　　（b）応力分布

はりの曲げと応力



（a）ひずみ

中立面からの距離yにある点のひずみε、および応力σは、

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$ 　ρ: 曲率半径

断面２次モーメント

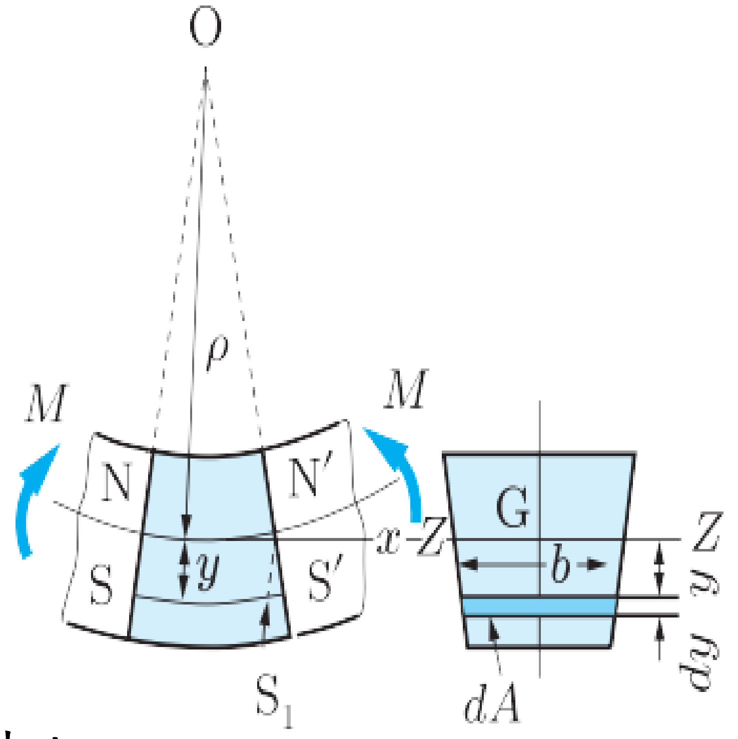
横断面の応力が発生する
モーメントは曲げモーメント
と等しい。

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA$$

$\int_A y^2 dA = I$ とおくと、

$$M = \frac{EI}{\rho} \qquad (I：断面２次モーメント)$$

また、$\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$



（a）ひずみ　　　（b）応力分布

横断面の応力が発生する
モーメントは曲げモーメント
と等しい。
$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA$
$\int_A y^2 dA = I$ とおくと、
$M = \frac{EI}{\rho}$　(I：断面２次モーメント)
また、$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

断面係数

前式を変形すると$\sigma = \frac{M}{I}y$ となる。

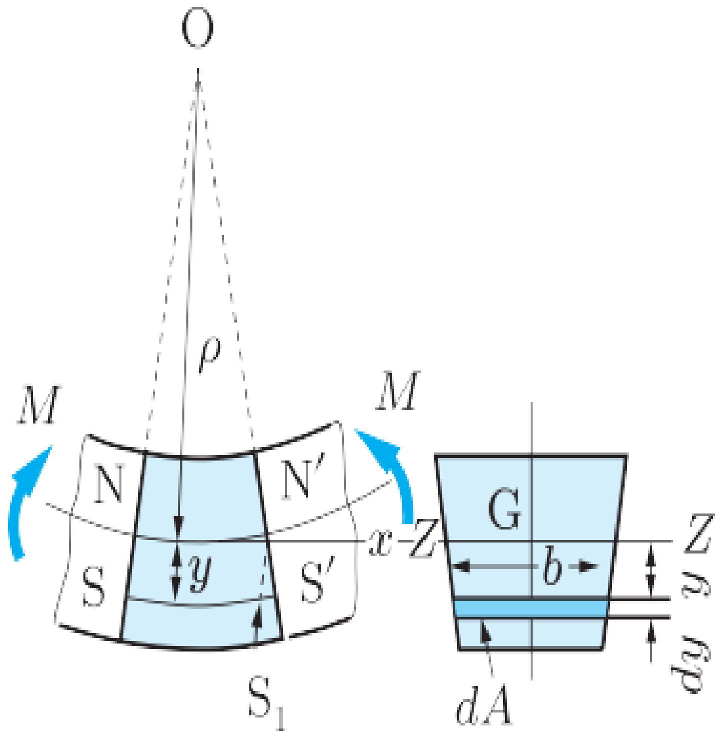
ここで、中立面から最も遠い

距離をe_1(凸側), e_2(凹側)とすると、

$\sigma_{max} = \frac{M}{I}e_1, \sigma_{min} = \frac{M}{I}e_2$となる。

$Z_1 = \frac{I}{e_1}, Z_2 = \frac{I}{e_2}$ (断面係数)とすると、

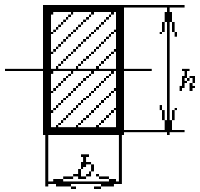
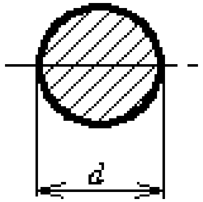
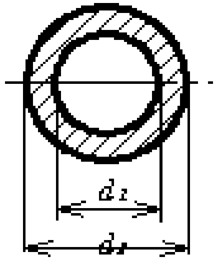
$\sigma_{max} = \frac{M}{Z_1}, \sigma_{min} = \frac{M}{Z_2}$

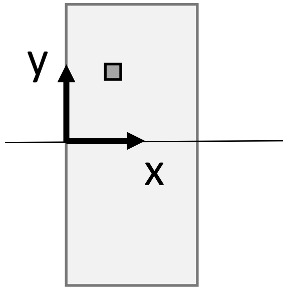


（a）

はりの曲げ断面の最大応力

各種断面形の断面２次モーメントと断面係数

断面形状	断面2次モーメント I [m^4]	断面係数 Z [m^3]
	$\dfrac{bh^3}{12}$	$\dfrac{bh^2}{6}$
	$\dfrac{\pi d^4}{64}$	$\dfrac{\pi d^3}{32}$
	$\dfrac{\pi({d_2}^4 - {d_1}^4)}{64}$	$\dfrac{\pi({d_2}^4 - {d_1}^4)}{32 d_2}$



幅dx, 高さdyの微小な矩形について
断面全体で積分する。

$$I = \int_A y^2 dA = \int_{y=-h/2}^{y=h/2} \int_{x=0}^{x=b} y^2 dx dy$$

$$= \int_{y=-h/2}^{y=h/2} b\, y^2 dy = \left[b \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \frac{1}{12} bh^3$$

(教p38)例題3.2　断面が1辺10 mmの正方形のはりに、10000 N・mmの曲げモーメントが作用している。はりの表面に作用する最大応力を求めよ。

(解) 断面係数Z は

(mmで計算)　$Z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6} \times 10^3 = 166.7\ [mm^3]$

(mで計算)　$Z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6} \times 10^3 \times 10^{-9} = 166.7\ \times 10^{-9} [m^3]$

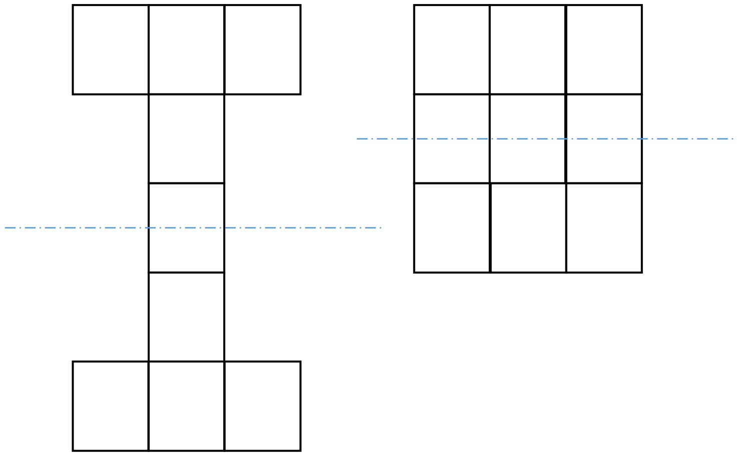
最大応力σ_{max}は

(mmで計算)　$\sigma_{max} = \frac{M}{Z_1} = \frac{10000}{166.7} = 60.0$ [N/mm²]

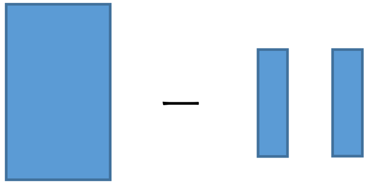
(mで計算)　$\sigma_{max} = \frac{M}{Z_1} = \frac{10}{166.7 \times 10^{-9}} = 60.0 \times 10^{-6}$[N/m²]

問題

下図に示すような同じ断面積をもつI字鋼と
正方形断面の鋼材の断面二次モーメントを比較しなさい。



(解)　I字鋼の断面２次モーメント



$$\frac{3 \times 5^3 - 2 \times 3^3}{12} = \frac{321}{12}$$

正方形断面の鋼の断面２次モーメント

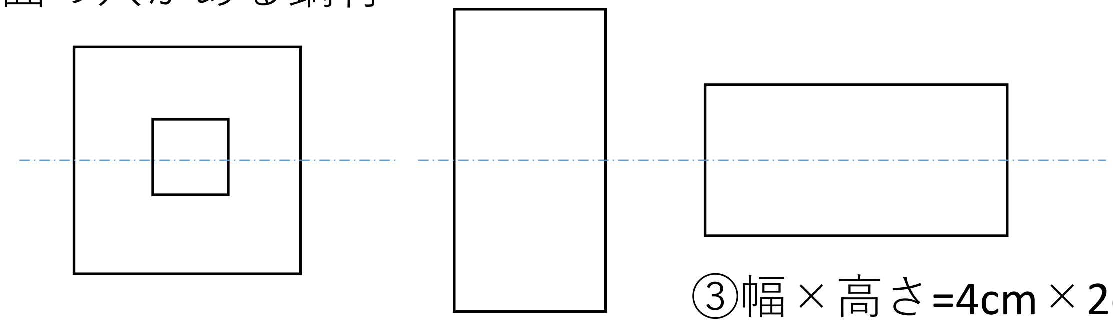
$$\frac{3^4}{12} = \frac{81}{12}$$

よって、I字鋼は、同じ断面積の正方形断面の鋼の
約４倍の断面２次モーメントをもつ

問題

下図に示すような同じ断面積をもち、形状が異なる鋼材の断面二次モーメントを比較しなさい。

①１辺3cmの正方形断面で中央に１辺1cmの正方形断面の穴がある鋼材



③幅×高さ=4cm×2cmの長方形断面の鋼材

②幅×高さ=2cm×4cmの長方形断面の鋼材

(解)

左の鋼材 $\dfrac{3\times3^3-1}{12}=\dfrac{80}{12}$

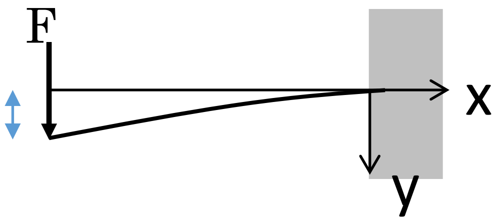
中央の鋼材 $\dfrac{2\times4^3}{12}=\dfrac{128}{12}$

右の鋼材 $\dfrac{4\times2^3}{12}=\dfrac{32}{12}$

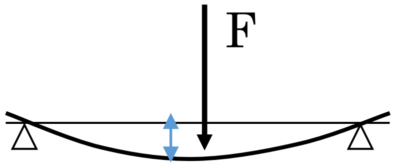
はりの曲げ変形

$M = \frac{EI}{\rho}$ 、$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{d^2x}$ より求められる。

長さlの片持ち梁の先端にFの荷重をかけたときのたわみ量 $\frac{Fl^3}{3EI}$

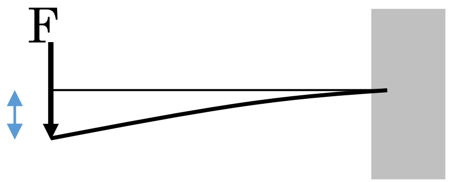


長さlの両端支持梁の中央にFの荷重をかけたときのたわみ量 $\frac{Fl^3}{48EI}$



断面2次モーメント、ヤング率が大きいほうが曲がりにくい。

問題



固定端から1 mの自由端に100 Nの集中荷重を受ける片持ちはりの長方形断面寸法を横×高さ= 20mm×40mmとする。最大曲げモーメントと最大たわみを求めなさい。材料の縦弾性係数を200GPaとする。

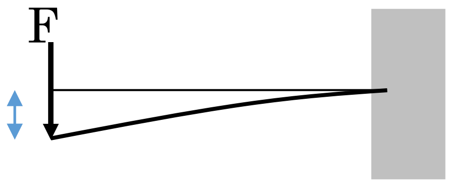
解　M_{max}=100×1=100 [Nm]

I = 20×40³/12×10⁻¹², E = 200×10⁹ [N/m²]

最大たわみは

$$\frac{Fl^3}{3EI} = \frac{100\times1^3}{3\times200\times10^9\times20\times40^3\div12\times10^{-12}} = 1.56\times10^{-3}[m]$$

問題



固定端から1 mの自由端に100 Nの集中荷重を受ける片持ちはりの長方形断面寸法を横×高さ= 20mm×40mmとする。最大曲げモーメントと最大たわみを求めなさい。材料の縦弾性係数を200GPaとする。

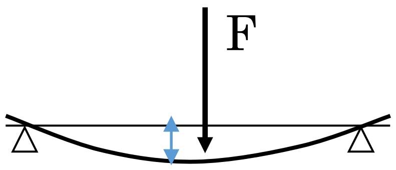
解　M_{max}=100×1000=10×10^4 [Nmm]

I = 20×40^3/12, E = 200×10^3 [N/mm^2]

最大たわみは

$$\frac{Fl^3}{3EI} = \frac{100\times1000^3}{3\times200\times10^3\times20\times40^3\div12} = \frac{10\times10^{10}}{64\times10^9} = 1.56\ [mm]$$

問題



右上図に示す単純支持はりにおいて、長さ3mの軟鋼(縦弾性係数206GPa)のはりの中央に質量50kgの人間が乗ったときのはりの中央のたわみを求めよ。ただし、はりの断面は1辺 20mmの正方形であるとする。

解

$I = 20 \times 20^3/12,\ \ E = 206 \times 10^3\ [N/mm^2]$

最大たわみは

$$\frac{Fl^3}{48EI} = \frac{50\times9.8\times3000^3}{48\times206\times10^3\times20\times20^3\div12} = \frac{13.23\times10^{12}}{13.18\times10^{10}} = 100\ \ [mm]$$