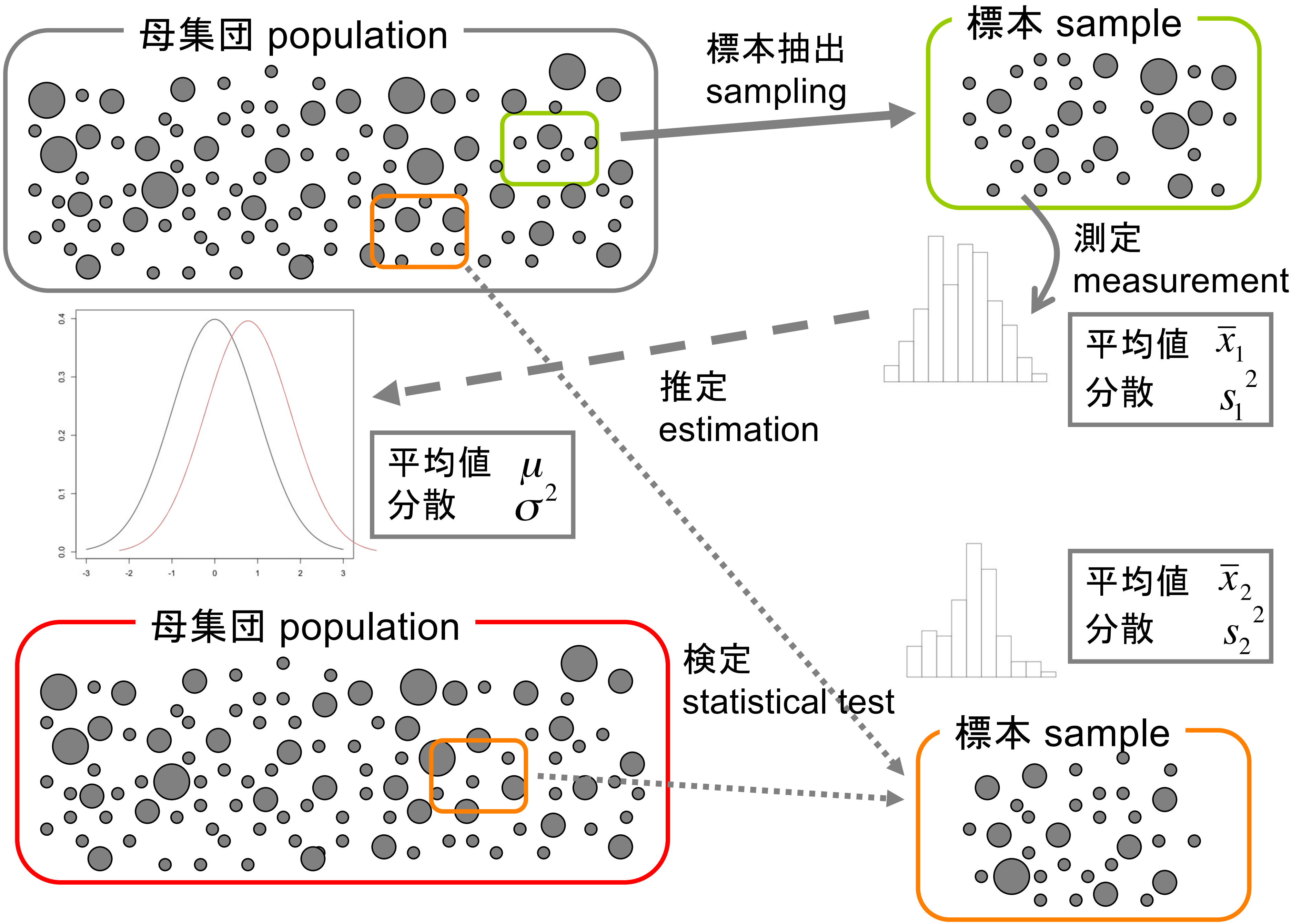
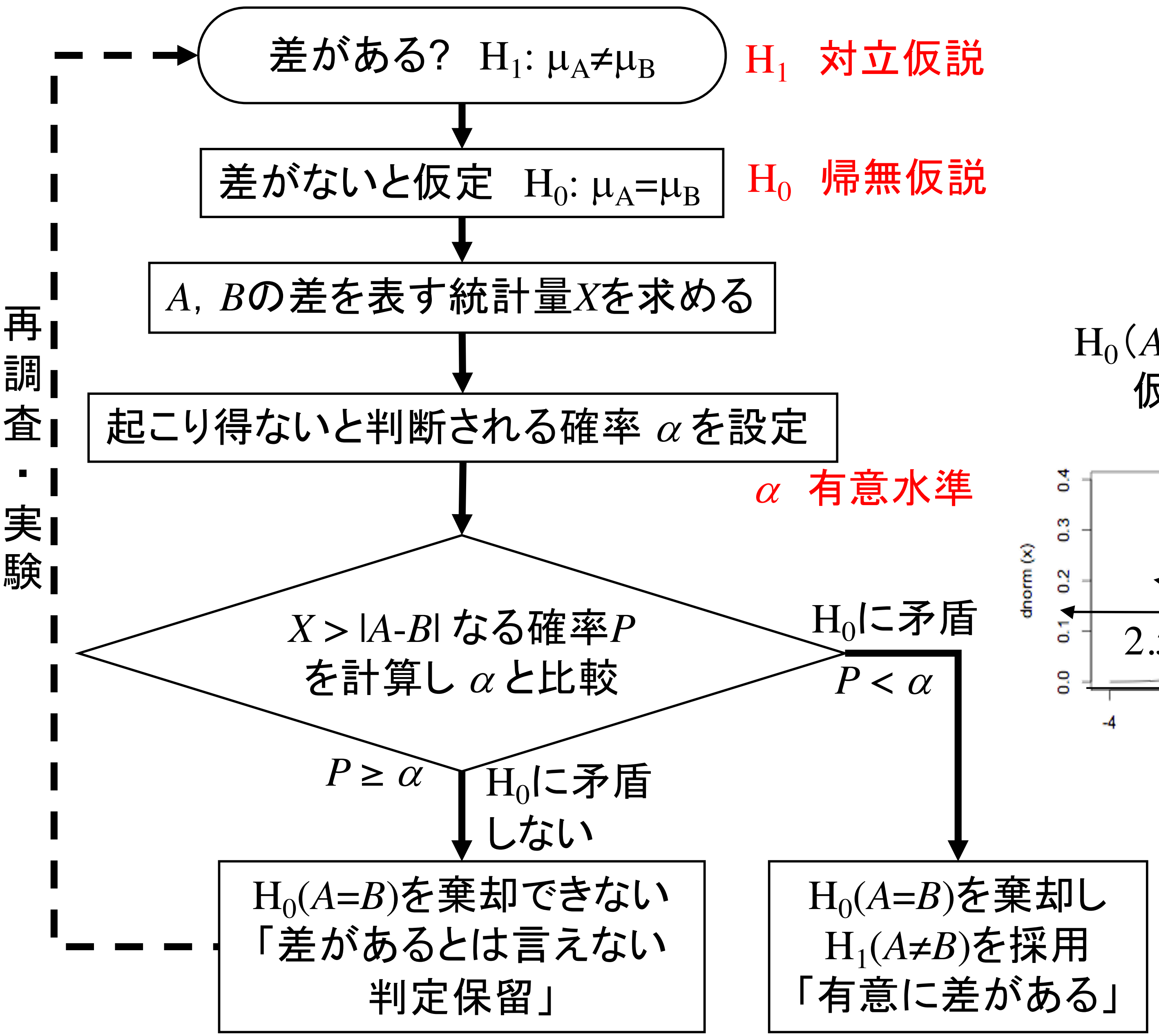
多変量解析

第4回　有意差検定

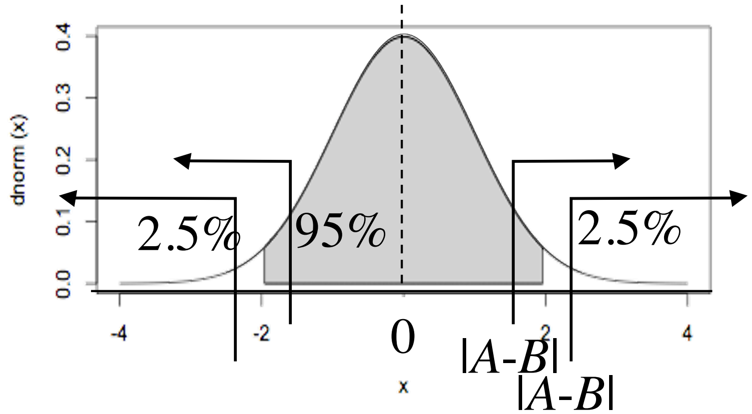
萩原•篠田
情報理工学部


母集団 population
標本抽出
sampling
標本 sample
測定
measurement
平均値 $\bar{x}_1$
分散 s_1^2
推定
estimation
平均値 μ
分散 σ^2
平均値 $\bar{x}_2$
分散 s_2^2
母集団 population
検定
statistical test
標本 sample

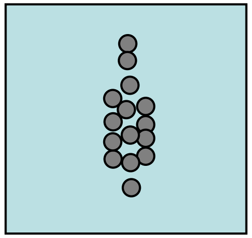
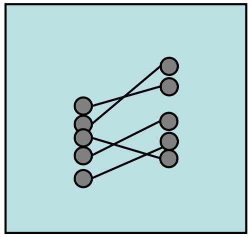
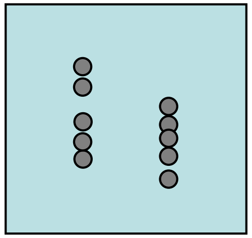
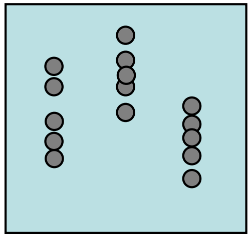
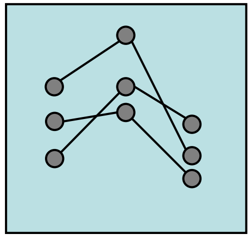
検定の原理･手続き



H_0（AとBは同じ母集団μ_A=μ_B）
仮定下のX の理論分布



検定の分類

	1群	関連2群	独立2群	独立多群	関連多群
データ形式	 標本と母集団 との比較	 同一個体で2条件 縦断的研究	 異なる個体2条件 横断的研究	 要因により分類が水準化された多群を 同時に比較 要因の効果を検定	 2つの要因により分類が水準化された多群を同時に比較 2つの要因の主効果 複数要因の交互作用
間隔・比例尺度	平均値の検定 σ既知の場合 $\bar{x} \rightarrow z$ σ未知，大標本 $\bar{x} \rightarrow z$ σ未知，小標本 $\bar{x} \rightarrow t$	一標本 t 検定 小標本 $\bar{d} \rightarrow t$ 大標本 $\bar{d} \rightarrow z$	二標本 t 検定 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \rightarrow t$ 等分散の検定 $\frac{s_1^2}{s_2^2} = F$	一元配置分散分析 ANOVA $\frac{s_A^2}{s_E^2} = F$	二元配置分散分析 ANOVA $\frac{s_A^2}{s_E^2} = F_A$ $\frac{s_B^2}{s_E^2} = F_B$
順序尺度		Wilcoxon符号 付き順位和検定	Mann-Whitney 検定	Kruskal-Wallis 検定	Friedman 検定

平均値の検定（σ既知）

（例題）機械が袋に詰める砂糖の重さは平均1000 g，標準偏差5 gの正規分布に従うように調整される．9個の袋の重さを量ったら平均が1003 gであった．機械は正しく調整されているか？

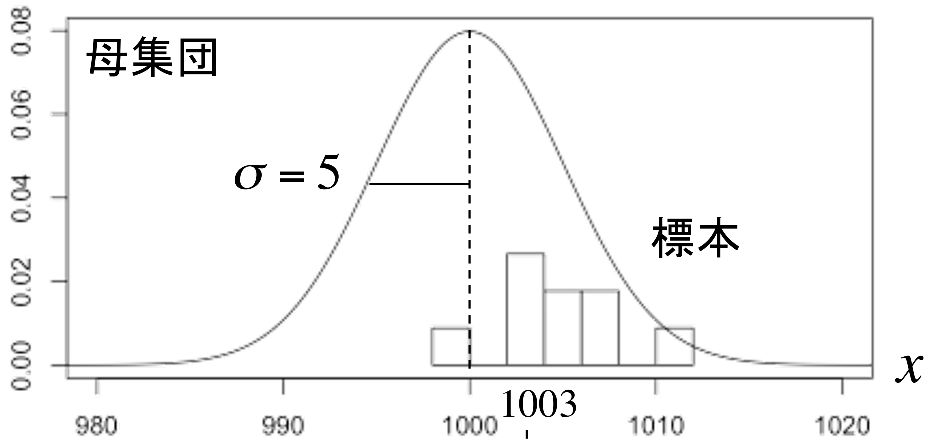
→ <u>標本がとられた母集団は平均1000g，標準偏差5gの正規分布か？</u>

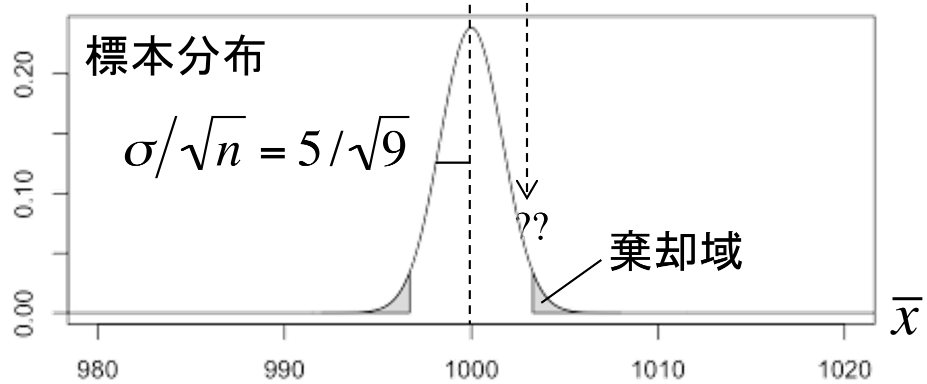
- **帰無仮説** H_0: μ=1000 g，σ=5 g
- **両側検定**（差の有無が知りたい）
- **対立仮説** H_1: $\mu \neq$1000 g
- **有意水準** α=5%として検定

帰無仮説を仮定して確率を計算

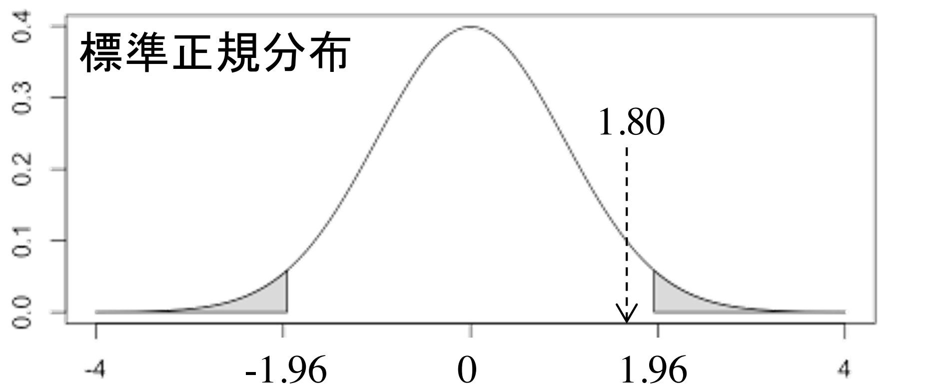
$$\begin{cases} P \geq \alpha/2 = 2.5\% & \rightarrow \text{起こりうる，} H_0\text{保持} \\ P < \alpha/2 = 2.5\% & \rightarrow \text{起こりえない，} H_0\text{棄却} \end{cases}$$

両側検定の場合





$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{標準化} \qquad \frac{1003 - 1000}{5/\sqrt{9}} = 1.80$$



$$F(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

例 : $N(\mu, \sigma^2)$で
$\mu-\sigma < x < \mu+\sigma$
となる確率は？
↓
$N(0, 1)$で
$-1 < z < 1$となる
確率に等しい

$P(-1< z <1)$
$=2(F(1)- F(0))$
$=2*(0.8413-0.5)$
$=0.6826$

表 : $F(z)$標準正規分布$N(0, 1)$のc.d.f.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

平均値の検定（σ既知）

（例題）ある機械が袋に詰める砂糖の重さは，平均1000 g，
標準偏差5 gの正規分布に従うように調整される．
9個の袋の重さを量ったところ，平均が1003 gであった．
この機械は正しく調整されているか？

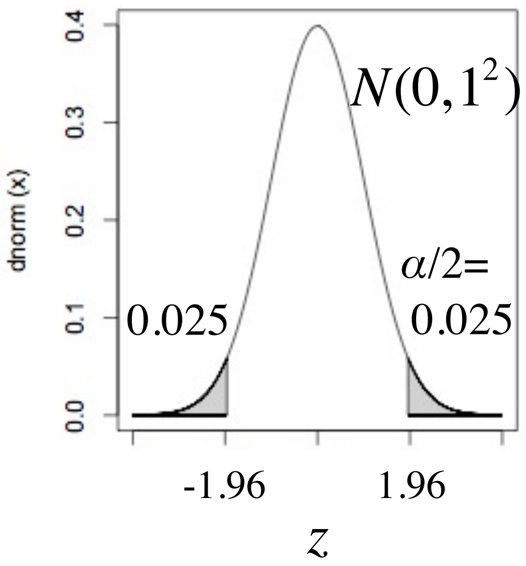
→ 標本がとられた母集団は，平均1000gで標準偏差5gの正規分布か？

帰無仮説　H_0: μ=1000 g，σ=5 g

両側検定（差の有無が知りたい），対立仮説　H_1: $\mu \neq 1000$ g

有意水準　α=5%として検定

H_0に従えば9個の袋の平均 $\bar{x}$の標本分布は正規分布$N(1000, 5^2/9)$



標準化　$z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{x} - 1000}{5/\sqrt{9}}$

$F(z)$の表から棄却域は $|z| \geq 1.96$

標本は z =(1003-1000)/(5/3)=1.80 < 1.96
十分起こり得る，H_0は保持

平均値の検定（σ既知）

（例題）ある機械が袋に詰める砂糖の重さは，平均1000 g，
標準偏差5 gの正規分布に従うように調整される．
9個の袋の重さを量ったところ，平均が~~1003 g~~であった．
この機械は正しく調整されているか？ **1005 g**

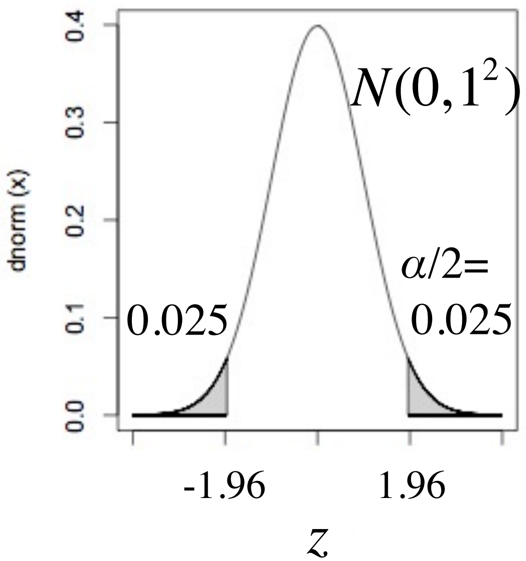
→ <u>標本がとられた母集団は，平均1000gで標準偏差5gの正規分布か？</u>

帰無仮説　H_0: μ=1000 g，σ=5 g

両側検定（差の有無が知りたい），対立仮説　H_1: $\mu \neq$1000 g

有意水準　α=5%として検定

H_0に従えば9個の袋の平均 $\bar{x}$の標本分布は正規分布$N(1000, 5^2/9)$



標準化 $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{x} - 1000}{5/\sqrt{9}}$

$F(z)$の表から棄却域は $|z| \geq 1.96$

標本は z =($\cancel{1003}$ **1005**-1000)/(5/3)=$\cancel{1.80 < 1.96}$ **3.00 > 1.96**

~~十分起こり得る，H_0は保持~~

極めて稀で起こり得ない，H_0は棄却され，H_1採用

平均値の検定（σ既知）

（例題）ある機械が袋に詰める砂糖の重さは，平均1000 g，
標準偏差5 gの正規分布に従うように調整される．
9個の袋の重さを量ったところ，平均が1003 gであった．
この機械は~~正しく調整されているか~~？
重めに設定されていないか

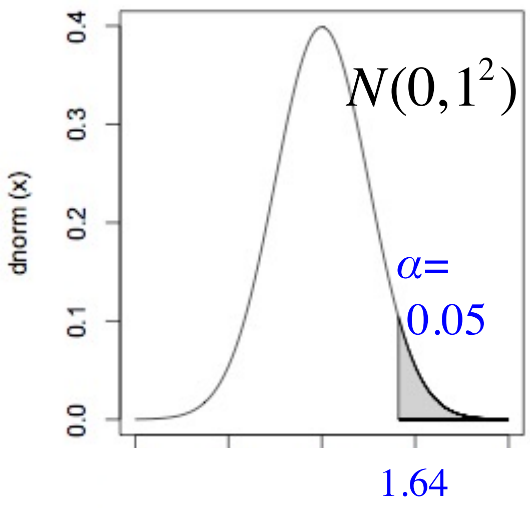
→ 標本がとられた母集団は，平均1000gで標準偏差5gの正規分布か？

帰無仮説　H_0: μ=1000 g，σ=5 g

~~両側検定（差の有無が知りたい）~~，対立仮説　~~H_1: $\mu \neq 1000$ g~~　H_1: $\mu > 1000$ g

有意水準　α=5%として検定　片側検定（重めかどうかを知りたい）

H_0に従えば9個の袋の平均 $\bar{x}$の標本分布は正規分布$N(1000, 5^2/9)$



標準化　$z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{x} - 1000}{5/\sqrt{9}}$

$F(z)$の表から棄却域は $|z| \geq$ ~~1.96~~ **1.64**

標本は z =(1003-1000)/(5/3)=1.80 ~~< 1.96~~ **> 1.64**

~~十分起こり得る，H_0は保持~~

極めて稀で起こり得ない，H_0は棄却され，H_1採用

表 : $F(z)$標準正規分布$N(0, 1)$のc.d.f.

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

例 : $N(\mu, \sigma^2)$で
$\mu\text{-}\sigma < x < \mu+\sigma$
となる確率は？

↓

$N(0, 1)$で
$-1 < z < 1$となる
確率に等しい

$P(-1< z <1)$
$=2(\ F(1)\text{-}\ F(0))$
$=2*(0.8413\text{-}0.5)$
$=0.6826$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

平均値の検定（σ未知） 大標本n

（例題）機械が袋に詰める砂糖の重さは平均1000 g, ~~標準偏差5 g~~の正規分布に従うように調整される. ~~9個~~の袋の重さを量ったら平均が1003 gであった. 機械は正しく調整されているか？

36個

標準偏差5 g

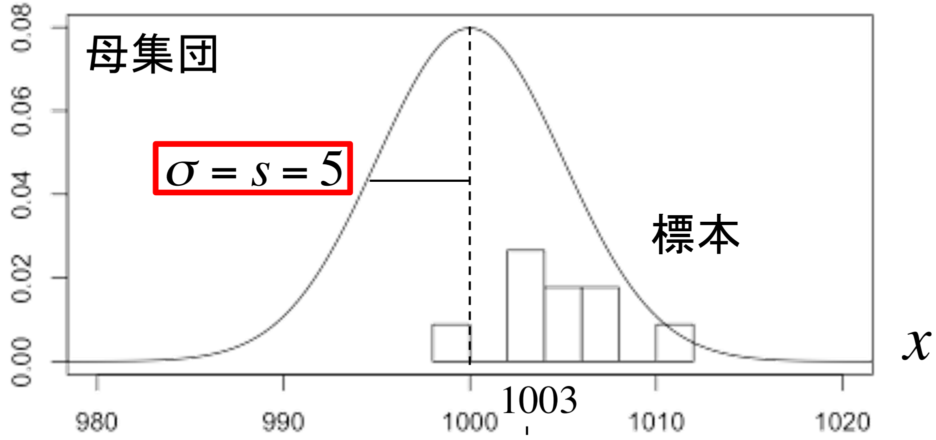
→ 標本がとられた母集団は平均1000g, ~~標準偏差5g~~の正規分布か？

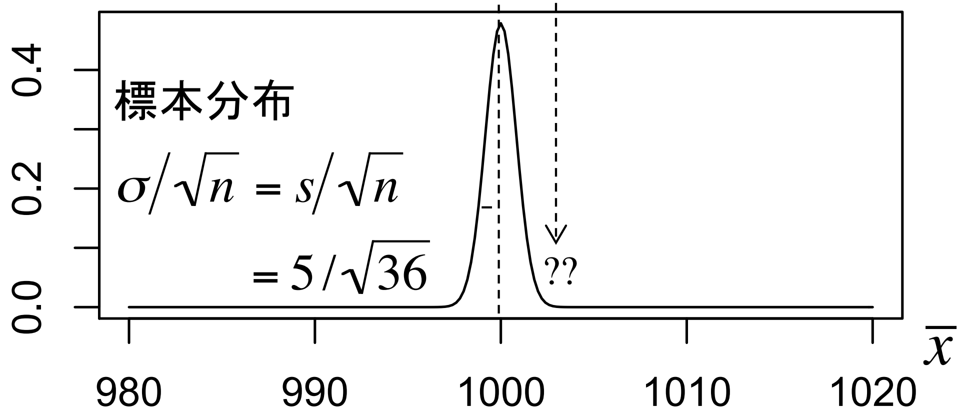
- **帰無仮説** H_0: μ=1000 g, ~~σ=5 g~~
- **両側検定**（差の有無が知りたい）
- **対立仮説** H_1: $\mu \neq$1000 g
- **有意水準** α=5%として検定

帰無仮説を仮定して確率を計算

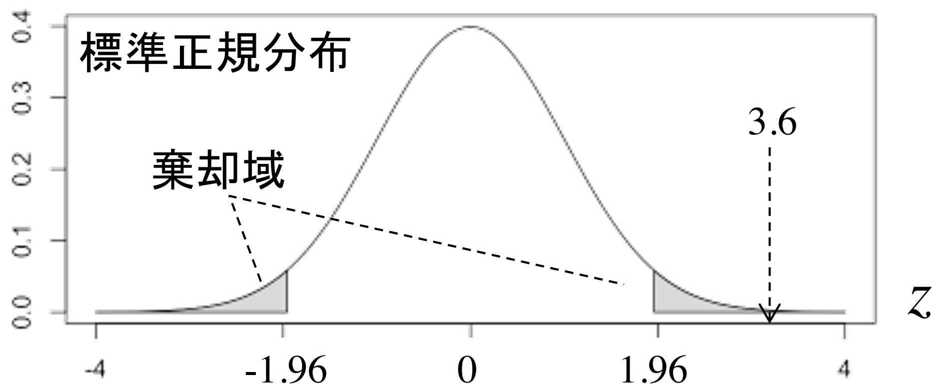
$$\begin{cases} P \geq \alpha/2 = 2.5\% & \rightarrow \text{起こりうる, } H_0\text{保持} \\ P < \alpha/2 = 2.5\% & \rightarrow \text{起こりえない, } H_0\text{棄却} \end{cases}$$

両側検定の場合





$z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ 標準化 $\qquad \dfrac{1003 - 1000}{5/\sqrt{36}} = 3.6$



平均値の検定（σ未知，大標本 n） → n 大より$\sigma = s$としてよい → z 検定

（例題）ある機械が袋に詰める砂糖の重さは，
平均1000 gの正規分布に従うように調整される．
36個の袋の重さを量ったところ，平均が1003 g，
標準偏差 s=5 gであった．この機械は正しく調整されているか？

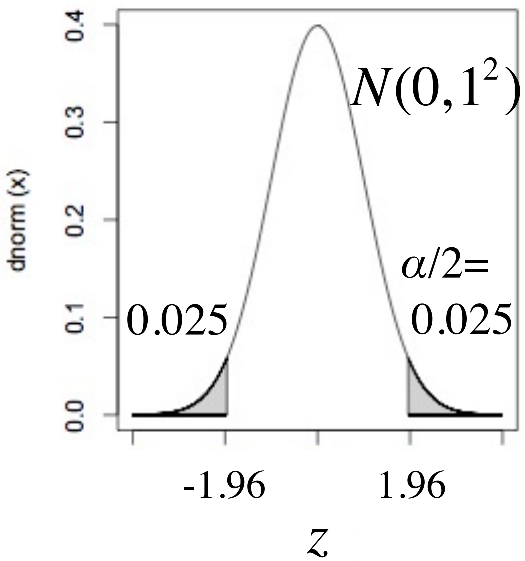
→ 標本がとられた母集団は平均1000gの正規分布か？

帰無仮説　H_0: μ=1000 g，σ未知

両側検定（差の有無が知りたい），対立仮説　H_1: $\mu \neq$1000 g

有意水準　α=5%として検定

H_0に従えば36個の袋の平均 $\bar{x}$の標本分布は正規分布$N(1000, \overset{s}{5}{}^2/36)$



標準化　$z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{x} - 1000}{5/\sqrt{36}}$

$F(z)$の表から棄却域は $|z| \geq 1.96$

標本は z =(1003-1000)•6/5=3.6 > 1.96

極めて稀で起こり得ない，H_0棄却，H_1採用

平均値の検定（σ未知，小標本 n） → n小より$\sigma \neq s$ → t 検定

（例題）ある機械が袋に詰める砂糖の重さは，
平均1000 gの正規分布に従うように調整される．
9個の袋の重さを量ったところ，平均が1003 g，
標準偏差 s=5 gであった．この機械は正しく調整されているか？

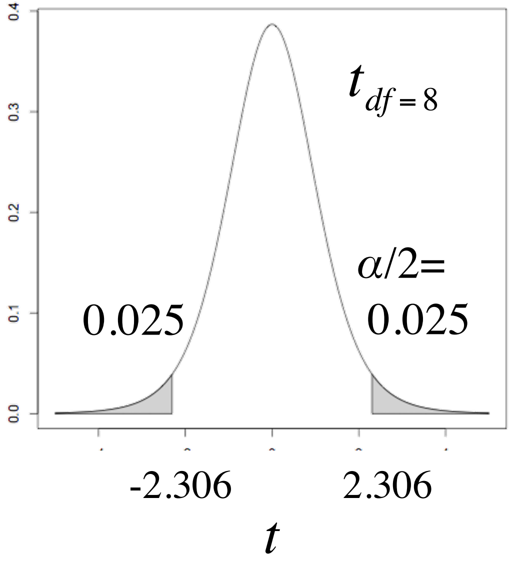
→ <u>標本がとられた母集団は平均1000gの正規分布か？</u>

帰無仮説　H_0: μ=1000 g，σ未知

両側検定（差の有無が知りたい），対立仮説　H_1: $\mu \neq 1000$ g

有意水準　α=5%として検定

H_0に従えば9個の袋の平均 $\bar{x}$の標本分布は自由度$df=n-1=8$の t 分布 に従う



変換　$t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{x} - 1000}{5/\sqrt{9}}$

t 分布の表から，df=8，$p=\alpha/2=0.025$の t 値を探し，
棄却域は $|t| \geq 2.306$

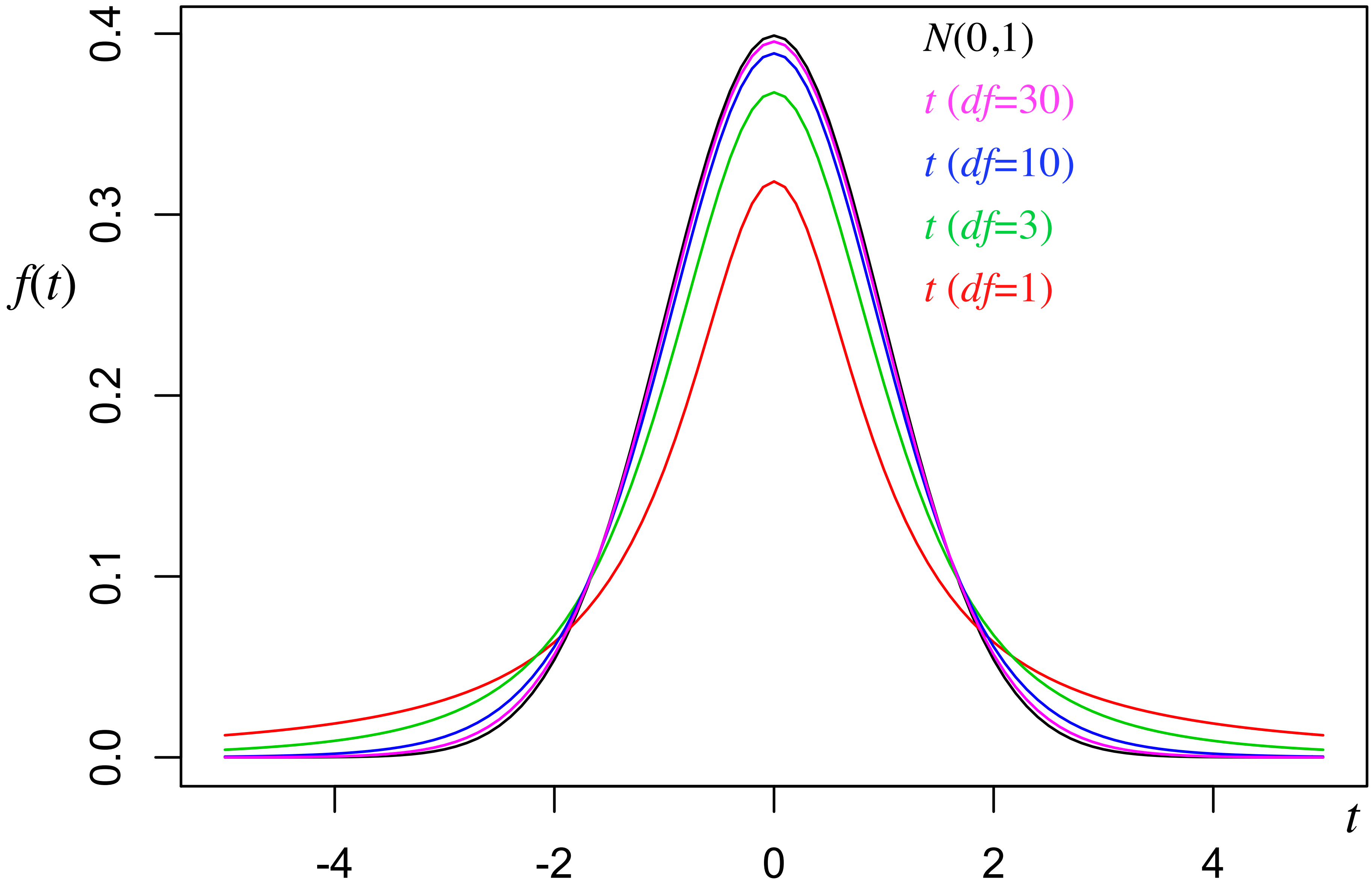
標本は t =(1003-1000)/(5/3)=1.80 < 2.306

十分起こり得る，H_0保持

ステューデント（W. S. ゴセット）の t 分布

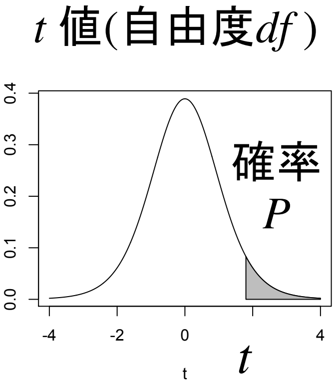
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$ 自由度 $df = n$-1

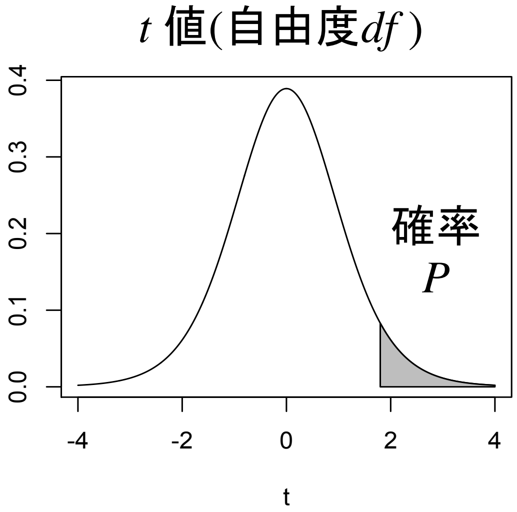
$df \rightarrow \infty$で，t 分布は
z 分布（標準正規分布$N(0,1)$）に近づく



t 分布表

	P = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
df = 1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390





t 分布表

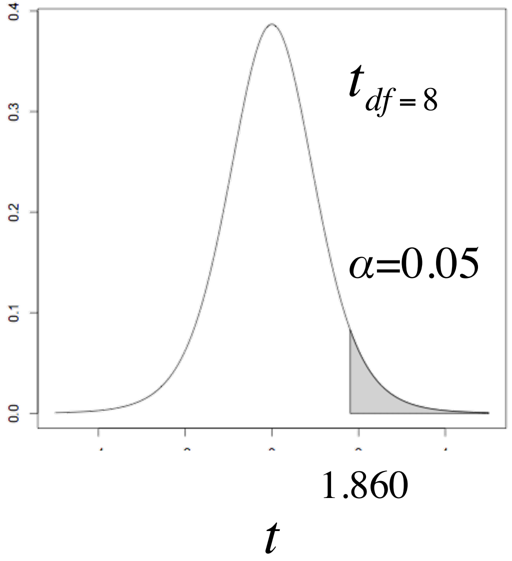
	P = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
df = 1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725

平均値の検定（σ未知，小標本 n） → n小より$\sigma \neq s$ → t 検定

（例題）ある機械が袋に詰める砂糖の重さは，
平均1000 gの正規分布に従うように調整される．
9個の袋の重さを量ったところ，平均が1003 g，
標準偏差 s=5 gであった．この機械は~~正しく調整されているか~~？
重めに設定されていないか

→ <u>標本がとられた母集団は平均1000gの正規分布か？</u>

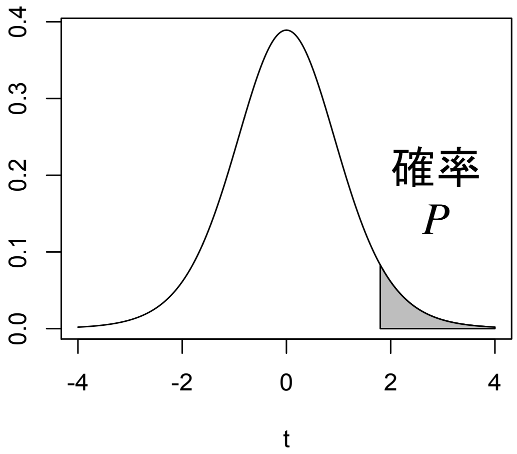
帰無仮説　H_0: μ=1000 g，σ未知　　片側検定（重めかどうかを知りたい）
~~両側検定（差の有無が知りたい）~~，対立仮説　H_1: μ>1000 g
有意水準　α=5%として検定
H_0に従えば9個の袋の平均 $\bar{x}$の標本分布は自由度df=n-1=8の t 分布 に従う



変換　$t = \dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{x}-1000}{5/\sqrt{9}}$

t 分布の表から，df=8，~~$p=\alpha/2=0.025$~~ $p=\alpha=0.05$（片側）の t 値を探し，
棄却域は~~$|t|\geq 2.306$~~ $t \geq 1.860$

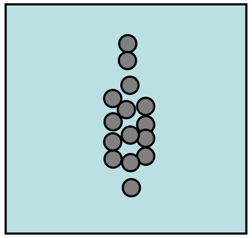
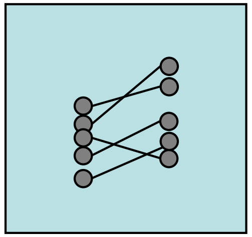
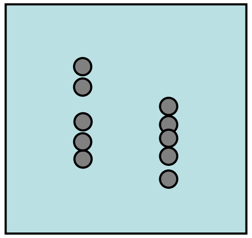
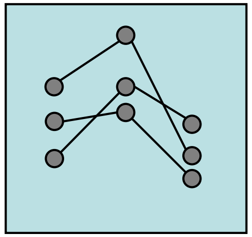
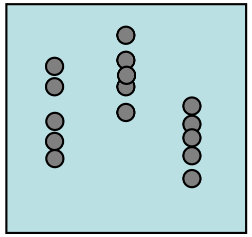
標本は t =(1003-1000)/(5/3)=~~1.80 < 2.306~~ 1.80 < 1.860
十分起こり得る，H_0保持



t 分布表

	P = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
df = 1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725

検定の分類

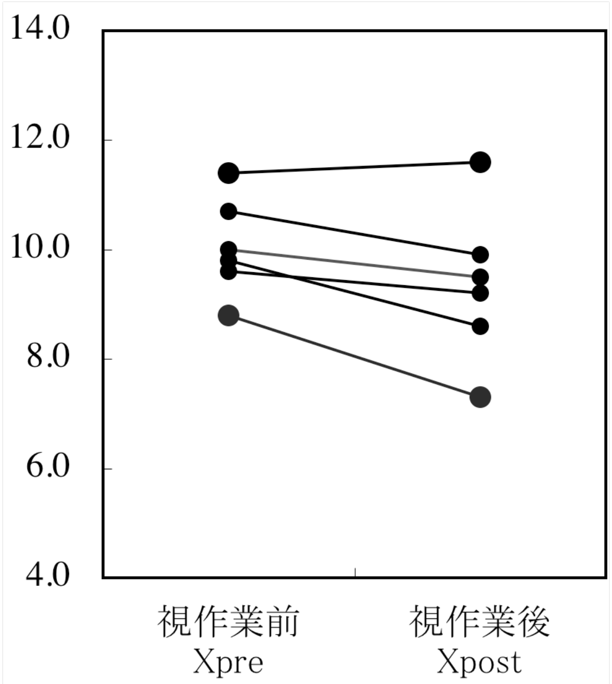
	1群	関連2群	独立2群	関連多群	独立多群
データ形式	 標本と母集団 との比較	 同一個体で2条件 縦断的研究	 異なる個体2条件 横断的研究	 2つの要因により分類が水準化された多群を同時に比較 2つの要因の主効果 複数要因の交互作用	 要因により分類が水準化された多群を 同時に比較 要因の効果を検定
間隔・比例尺度	平均値の検定 σ既知の場合 $\bar{x} \to z$ σ未知，大標本 $\bar{x} \to z$ σ未知，小標本 $\bar{x} \to t$	一標本 t 検定 $\bar{d} \to t$	二標本 t 検定 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \to t$ 等分散の検定 $\frac{s_1^2}{s_2^2} = F$	一元配置分散分析 ANOVA $\frac{s_A^2}{s_E^2} = F$	二元配置分散分析 ANOVA $\frac{s_A^2}{s_E^2} = F_A$ $\frac{s_B^2}{s_E^2} = F_B$
順序尺度		Wilcoxon符号 付き順位和検定	Mann-Whitney 検定	Kruskal-Wallis 検定	Friedman 検定

関連2群の差の検定（σ未知，小標本n）

（例題）疲労を調べるため，ある視作業の前と後で読書速度を計測し，以下を得た．
このとき，視作業の前後で読書速度に差があると言えるか？

読書速度[文字数/秒]

被験者	視作業前 Xpre	視作業後 Xpost	差d = Xpre−Xpost
A	9.8	8.6	1.2
B	8.8	7.3	1.5
C	10.0	9.5	0.5
D	9.6	9.2	0.4
E	10.7	9.9	0.8
F	11.4	11.6	-0.2
平均			0.700
s			0.607



→ 差dの母集団の平均値が0か検定

変数　$d = x_{\mathrm{pre}} - x_{\mathrm{post}}$

帰無仮説　H_0: μ（dの母集団の平均）$= 0$

両側検定

対立仮説　H_1: $\mu \neq 0$

有意水準　α=5%

関連2群の差の検定（σ未知，小標本n）→ t 分布

（例題）疲労を調べるため，ある視作業の前と後で読書速度を計測し，以下を得た．
このとき，視作業の前後で読書速度に差があると言えるか？

読書速度[文字数/秒]

被験者	視作業前 Xpre	視作業後 Xpost	差d = Xpre−Xpost
A	9.8	8.6	1.2
B	8.8	7.3	1.5
C	10.0	9.5	0.5
D	9.6	9.2	0.4
E	10.7	9.9	0.8
F	11.4	11.6	-0.2
平均			0.700
s			0.607

→ 差dの母集団の平均値が0か検定

変数　$d = x_{pre} - x_{post}$

帰無仮説　H_0: μ(dの母集団の平均) = 0

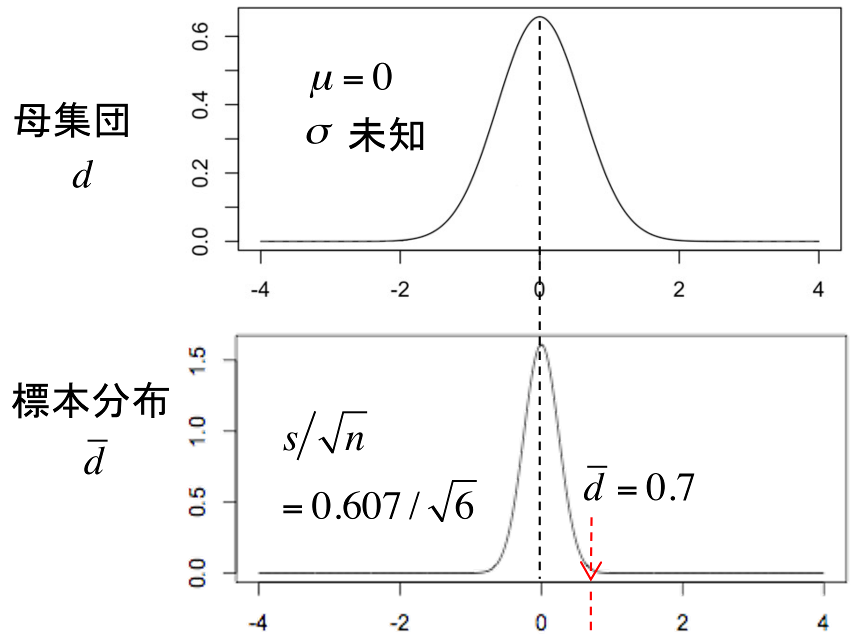
両側検定

対立仮説　H_1: $\mu \neq 0$

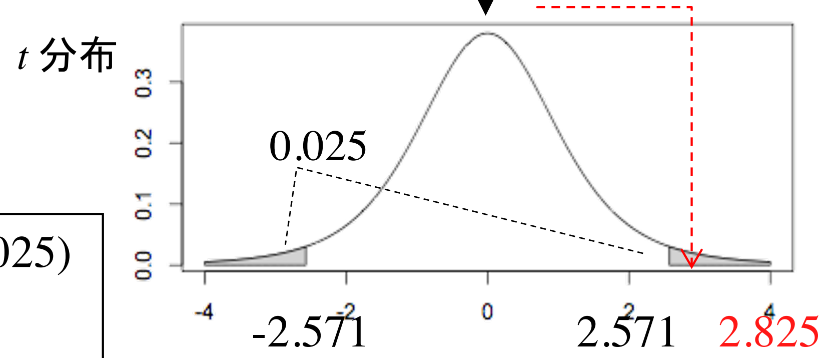
有意水準　α=5%

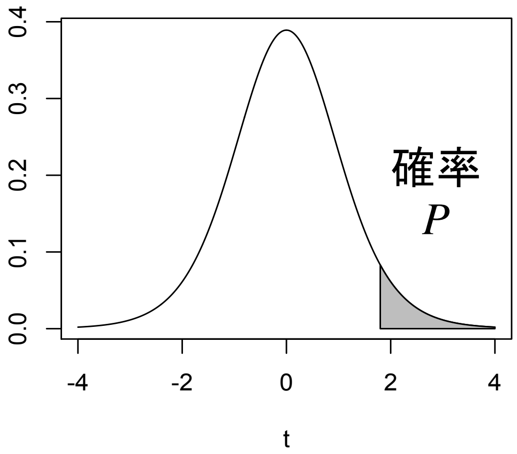
$2.825 > 2.571 = t(df=5, \alpha/2=0.025)$

よってH_0棄却，H_1採用



標準化 $t = \dfrac{\bar{d} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{0.7 - 0}{0.607/\sqrt{6}} = 2.825$





t 分布表

	P = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
df = 1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725

関連2群の差の検定（σ未知，小標本n）→ t 分布

（例題）疲労を調べるため，ある視作業の前と後で読書速度を計測し，以下を得た．

　　　このとき，視作業の前後で読書速度に差があると言えるか？

読書速度[文字数/秒]

被験者	視作業前 $Xpre$	視作業後 $Xpost$	差d = $Xpre-Xpost$
A	9.8	8.6	1.2
B	8.8	7.3	1.5
C	10.0	9.5	0.5
D	9.6	9.2	0.4
E	10.7	9.9	0.8
F	11.4	11.6	-0.2
平均			0.700
s			0.607

→ 差dの母集団の平均値が0か検定

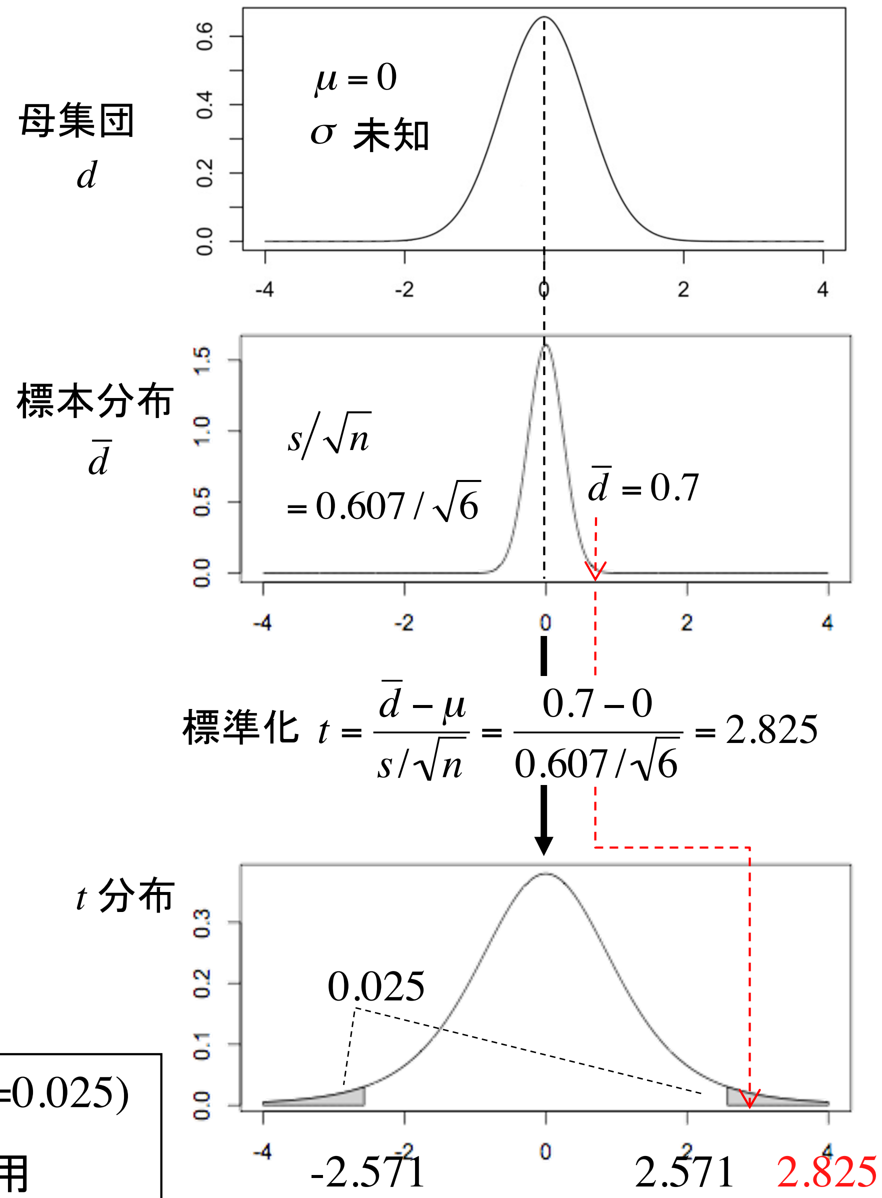
変数　$d = x_{pre} - x_{post}$

帰無仮説　H_0: μ（dの母集団の平均）= 0

両側検定

対立仮説　H_1: $\mu \neq 0$

有意水準　α=5%



$2.825 > 2.571 = t(df=5, \alpha/2=0.025)$

よってH_0棄却，H_1採用

関連2群の差の検定（σ未知，小標本n）$\rightarrow$ t 分布

（例題）疲労を調べるため，ある視作業の前と後で読書速度を計測し，以下を得た．

このとき，**視作業前より後の方が読書速度が遅い**と言えるか？

読書速度[文字数/秒]

被験者	視作業前 Xpre	視作業後 Xpost	差d = Xpre−Xpost
A	9.8	8.6	1.2
B	8.8	7.3	1.5
C	10.0	9.5	0.5
D	9.6	9.2	0.4
E	10.7	9.9	0.8
F	11.4	11.6	-0.2
平均			0.700
s			0.607

→ <u>差dの母集団の平均値が0か検定</u>

変数　$d = x_{\mathrm{pre}} - x_{\mathrm{post}}$

帰無仮説　H_0: μ（dの母集団の平均）$= 0$

片側検定

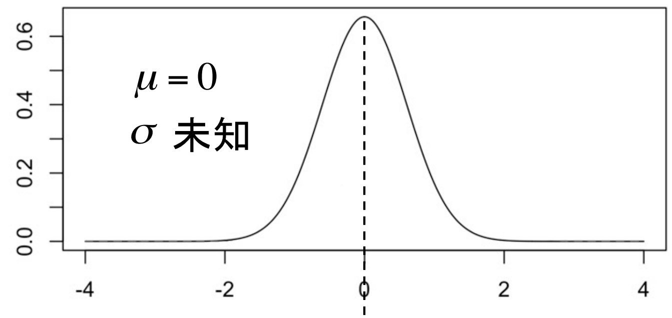
対立仮説　H_1: $\mu > 0$

有意水準　α=5%

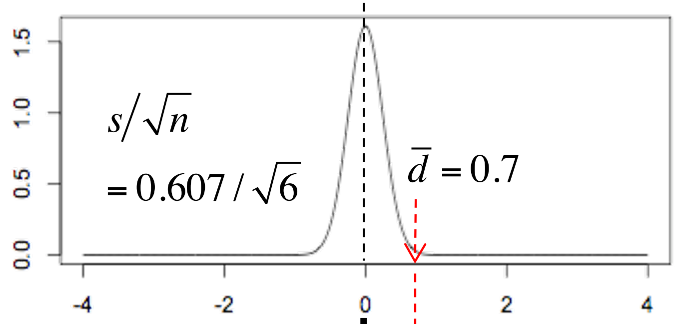
2.825 > 2.015= $t(df{=}5, \alpha{=}0.05)$

よってH_0棄却，H_1採用

母集団
d

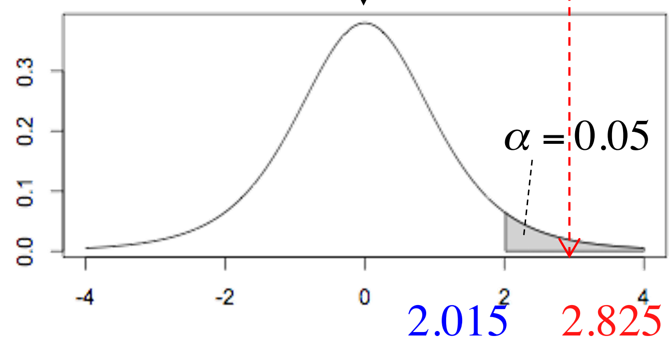


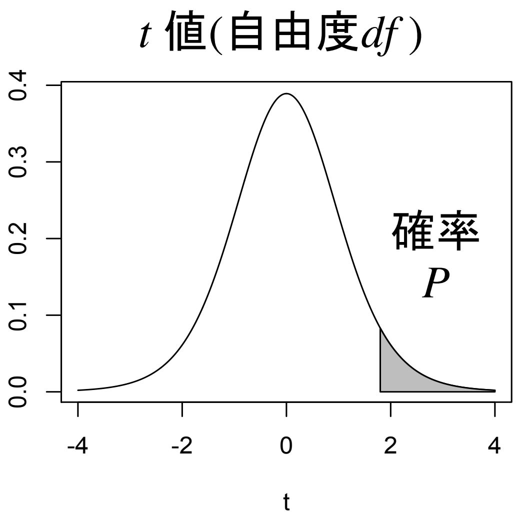
標本分布
$\bar{d}$



標準化 $t = \dfrac{\bar{d} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{0.7 - 0}{0.607/\sqrt{6}} = 2.825$

t 分布





t 分布表

	P = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
df = 1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725

関連2群の差の検定（σ未知，小標本n）→ t 分布

（例題）疲労を調べるため，ある視作業の前と後で読書速度を計測し，以下を得た．
このとき，視作業の前後で読書速度に差があると言えるか？

読書速度[文字数/秒]

被験者	視作業前 $Xpre$	視作業後 $Xpost$	差d = $Xpre-Xpost$
A	9.8	8.6	1.2
B	8.8	7.3	1.5
C	10.0	9.5	0.5
D	9.6	9.2	0.4
E	10.7	9.9	0.8
F	11.4	11.6	-0.2
平均			0.700
s			0.607

→ 差dの母集団の平均値が0か検定

変数　$d = x_{pre} - x_{post}$

帰無仮説　H_0: μ(dの母集団の平均) = 0

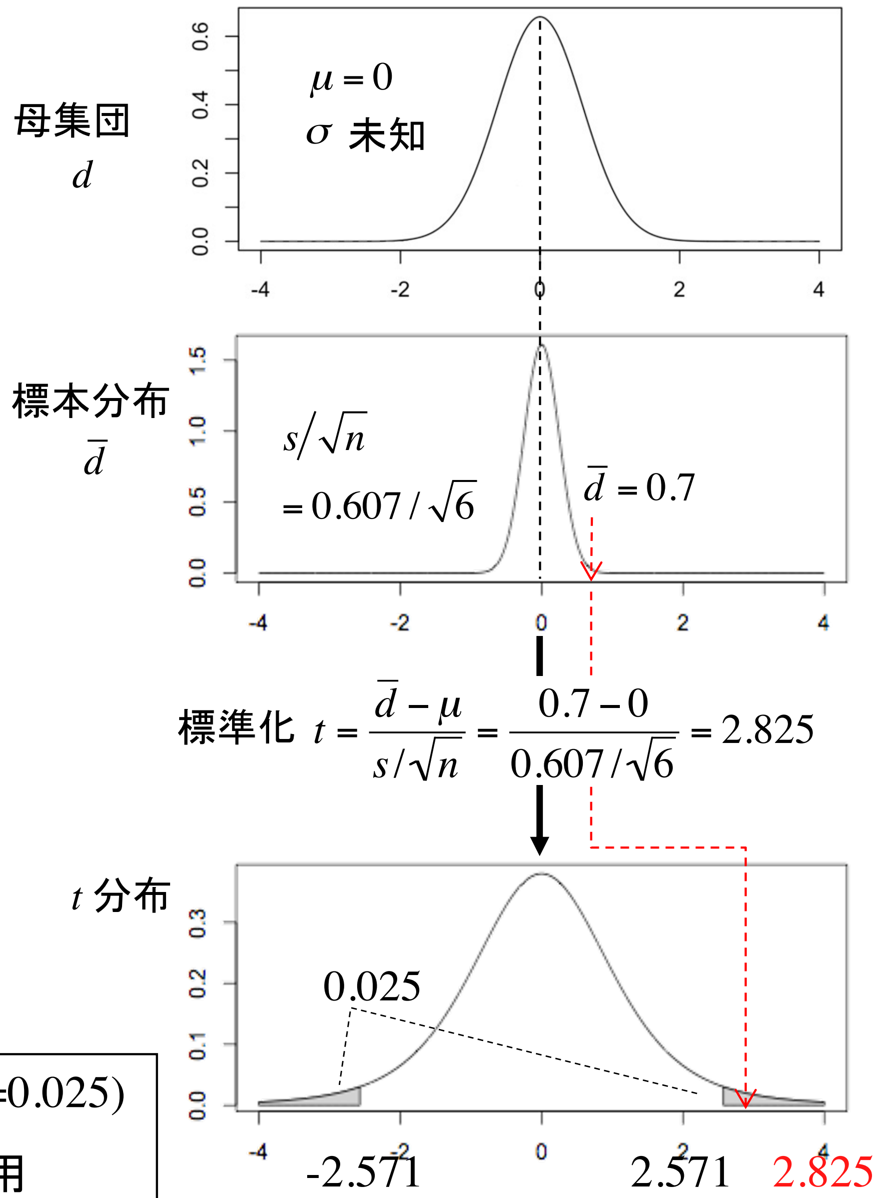
両側検定

対立仮説　H_1: $\mu \neq 0$

有意水準　α=5%

$2.825 > 2.571 = t(df=5, \alpha/2=0.025)$

よってH_0棄却，H_1採用



標準化 $t = \dfrac{\bar{d}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{0.7-0}{0.607/\sqrt{6}} = 2.825$

関連2群の差の検定（σ未知，大標本n）$\rightarrow$ z 分布 $N(0, 1)$

（例題）疲労を調べるため，ある視作業の前と後で読書速度を計測し，以下を得た.

このとき，視作業の前後で読書速度に差があると言えるか？

読書速度[文字数/秒]

被験者	視作業前 $Xpre$	視作業後 $Xpost$	差d = $Xpre-Xpost$
A	9.8	8.6	1.2
B	8.8	7.3	1.5
C	10.0	9.5	0.5
	:		
	:		
平均			0.700
s			0.607

n=36

→ 差dの母集団の平均値が0か検定

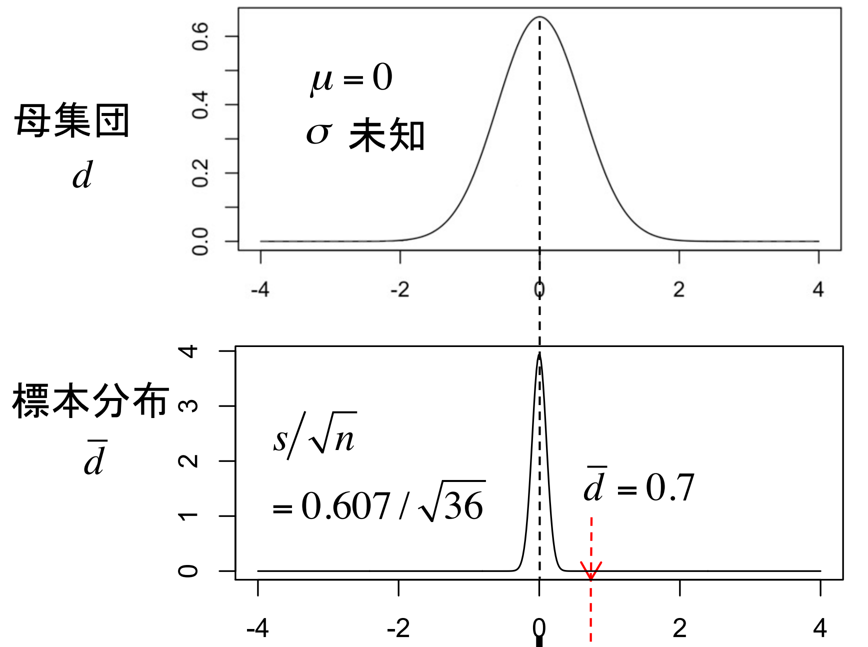
変数　$d = x_{pre} - x_{post}$

帰無仮説　H_0: μ(dの母集団の平均) = 0

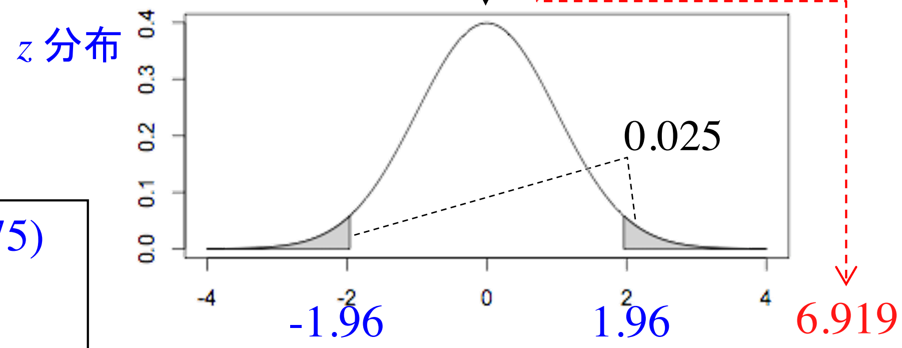
両側検定

対立仮説　H_1: $\mu \neq 0$

有意水準　α=5%



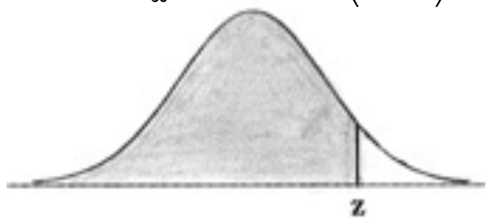
標準化　$z = \dfrac{\bar{d} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{0.7 - 0}{0.607/\sqrt{36}} = 6.919$



$6.919 > 1.96 = z(F(z)=0.975)$

よってH_0棄却，H_1採用

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$



例：$N(\mu, \sigma^2)$で
$\mu\text{-}\sigma < x < \mu+\sigma$
となる確率は？
↓
$N(0, 1)$で
$-1 < z < 1$となる
確率に等しい

$P(-1< z <1)$
$=2(\ F(1)\text{-}\ F(0))$
$=2*(0.8413\text{-}0.5)$
$=0.6826$

表：$F(z)$標準正規分布$N(0, 1)$のc.d.f.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990