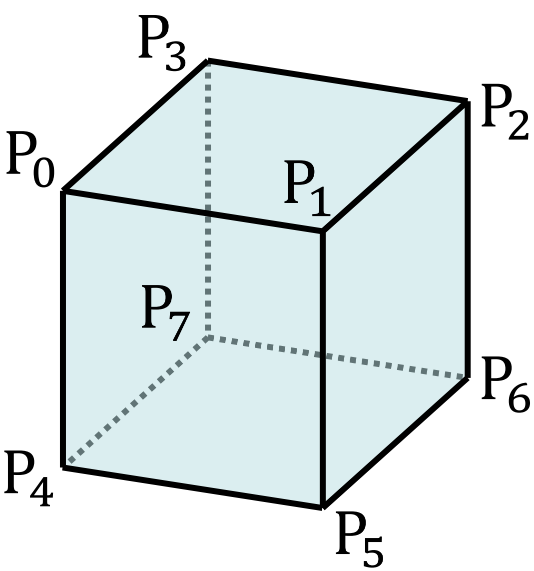
コンピュータグラフィックス(R)

第6回：ポリゴンの表裏と隠面・隠線消去

復習：ポリゴンによる形状定義

形状定義に必要なもの

1. 頂点座標
   形状に含まれるすべての頂点の座標
2. 頂点の接続情報
   各面について，どの頂点がどの順番で結ばれているか．



頂点

$P_0(x_0, y_0, z_0)$
$P_1(x_1, y_1, z_1)$
$P_2(x_2, y_2, z_2)$
$P_3(x_3, y_3, z_3)$
$P_4(x_4, y_4, z_4)$
$P_5(x_5, y_5, z_5)$
$P_6(x_6, y_6, z_6)$
$P_7(x_7, y_7, z_7)$

ポリゴン

上面：0 1 2 3
下面：4 7 6 5
右面：1 5 6 2
左面：0 3 7 4
前面：0 4 5 1
後面：3 2 6 7

復習:内積

- $\boldsymbol{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \boldsymbol{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$ のとき,
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
である.
- 内積は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ を満たす.
- 内積の符号は
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} > 0 \quad (\theta < 90°)$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \quad (\theta = 90°)$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0 \quad (\theta > 90°)$$
である.

復習：外積

- $\boldsymbol{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \boldsymbol{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$ のとき，
  $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$
  $$= (a_y b_z - a_z b_y, \quad a_z b_x - a_x b_z, \quad a_x b_y - a_y b_x)$$
  である．
- 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ に垂直であり，かつ，$\boldsymbol{b}$ に垂直である．
- 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かって回した右ねじの方向を向く．
- 外積の大きさは $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ であり，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす平行四辺形の面積に等しい．

復習:外積

問　ベクトル $\boldsymbol{a} = (2,0,1), \boldsymbol{b} = (1,2,0)$ を考える.

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

2. ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ.

3. ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ がなす角を θ とする. $\sin\theta$ を求めよ.

4. 3点 $(0,0,0)$, $(2,0,1)$, $(1,2,0)$ を含む平面の単位法線 $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

復習:外積

答　$\boldsymbol{a} = (2,0,1), \boldsymbol{b} = (1,2,0)$

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-2,1,4)$

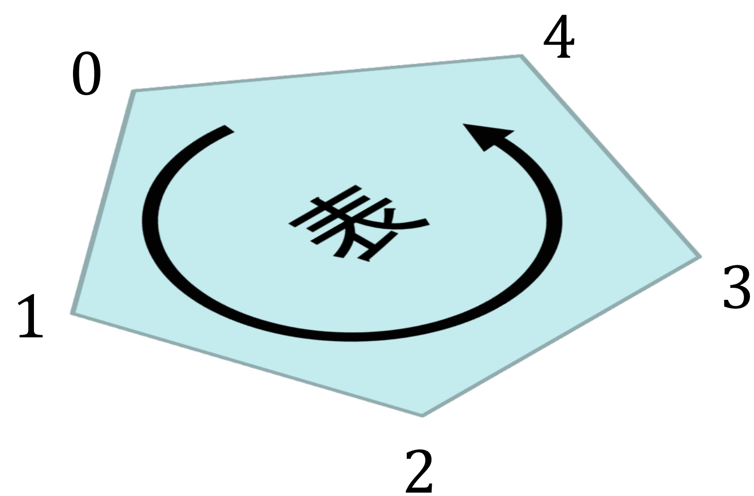
2. $S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \sqrt{21}$

3. $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ より，$\sin\theta = \frac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

4. $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2,1,4)$

復習：凸ポリゴンの「表」の定義

- ポリゴン頂点の接続情報が反時計回りに見える側を，そのポリゴンの表側と定義する.



復習：凸ポリゴンの法線

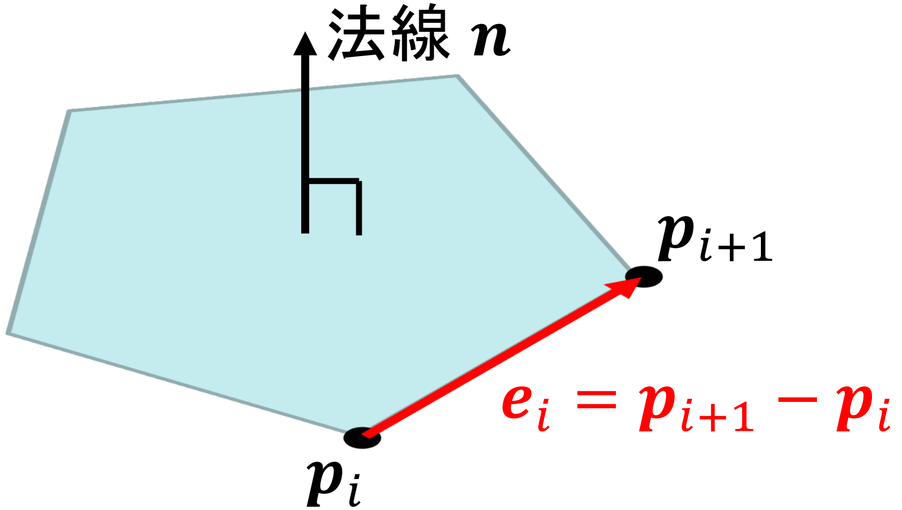
- ポリゴンの法線は表側を向くこととする.
- ポリゴン頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_{n-1}$ とし，辺ベクトルを $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i$ $(\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_0)$ とすると，法線は

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1} \quad (\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_0)$$

であり，単位法線は

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1}}{\|\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1}\|} \quad (\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_0)$$

である.



法線の計算誤差に注意

- 単位法線

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1}}{\|\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1}\|} \quad (\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_0)$$

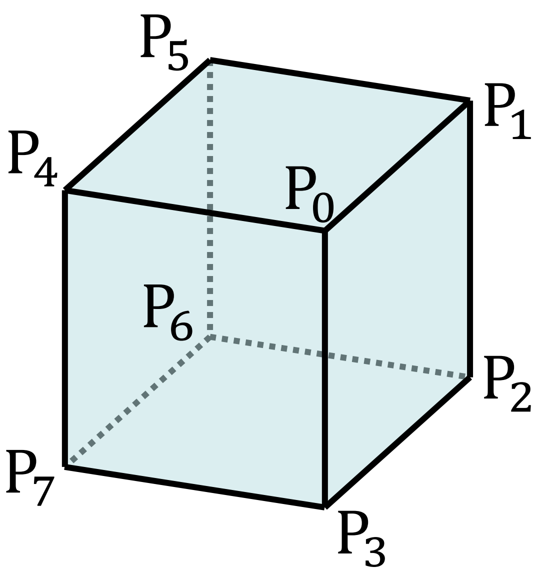
  の計算誤差は,

$$\|\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1}\| \approx 0$$

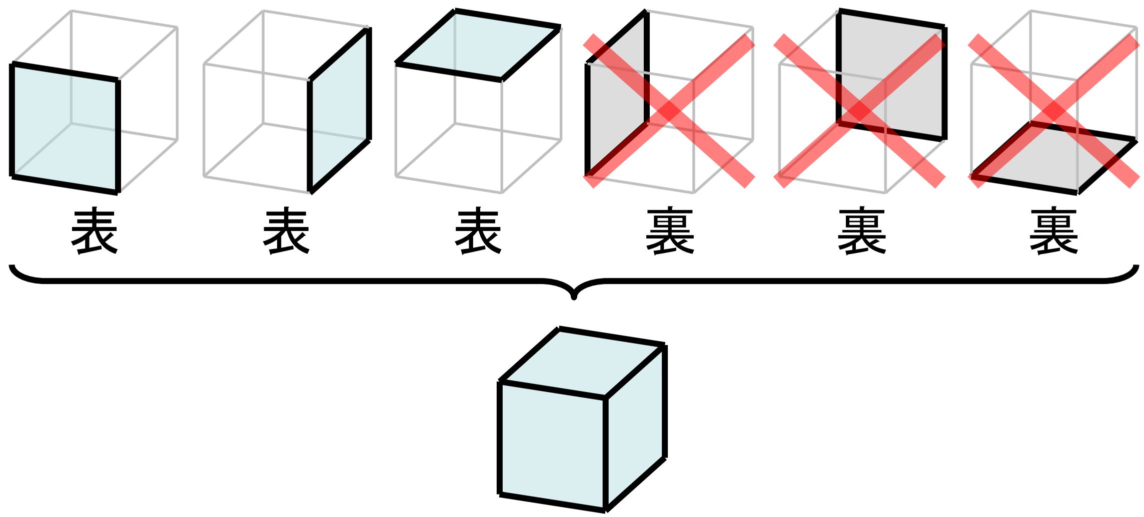
  の場合に大きくなる.
  - ケース1 : $\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_{i+1}$ が平行に近い
  - ケース2 : 辺の長さ $\|\boldsymbol{e}_i\|$ または $\|\boldsymbol{e}_{i+1}\|$ がゼロに近い

バックフェースカリング (p.126-)

- バックフェースカリング (back-face culling)
  - 物体描画時に，視点から見て裏の面をあらかじめ除去しておく方法



多面体

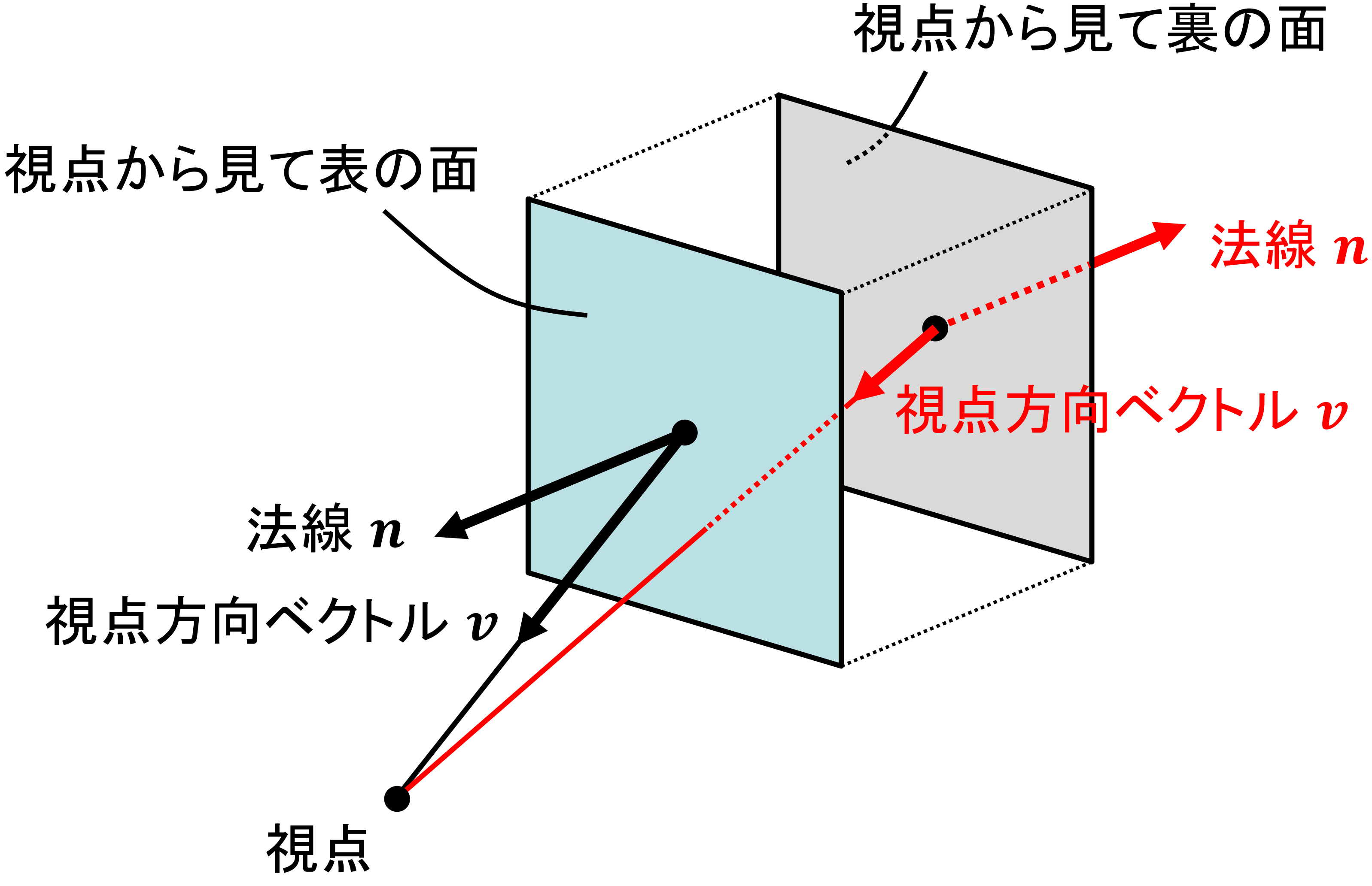


裏の面を除去し，表の面のみを描画することで隠面消去を実現できる場合もある

バックフェースカリング (p.126-)

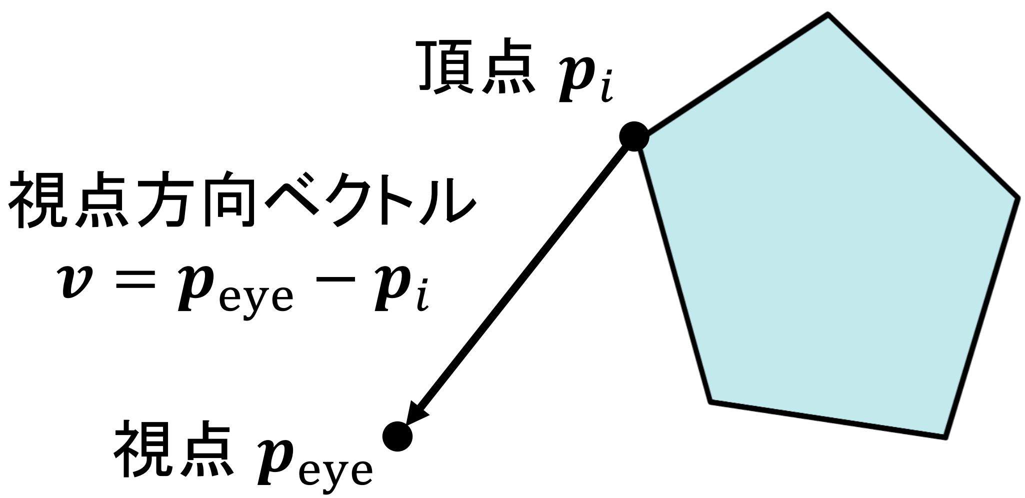
- バックフェースカリング (back-face culling)
  - 表の面／裏の面の判定の考え方
    面の法線: $\boldsymbol{n}$
    面上の任意の点から視点へ向かう視点方向ベクトル: $\boldsymbol{v}$
    $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{v}$ が鋭角なら表の面，鈍角なら裏の面
  - 表の面／裏の面の判別式
    $D_f = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$
    $D_f > 0$ のときは表の面
    $D_f < 0$ のときは裏の面

バックフェースカリング (p.126-)



バックフェースカリング (p.126-)

- 視点方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ の作り方
  判定は面上の任意の点で行ってよい．
  したがって，一つの頂点 $\boldsymbol{p}_i$ を選び，その頂点から視点 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{eye}}$ に向かうベクトル
  $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{eye}} - \boldsymbol{p}_i$$
  とすればよい．判定式は
  $$D_f = \left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{eye}} - \boldsymbol{p}_i\right) \cdot \boldsymbol{n}$$
  である．



バックフェースカリング (p.126-)

問　位置ベクトル $\boldsymbol{p}_0 = (1,0,0), \boldsymbol{p}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{p}_2 = (0,1,2)$ からなる三角形は，視点 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{eye}} = (0,1,0)$ から見て表か裏か．

バックフェースカリング (p.126-)

答　三角形の辺ベクトルが

$$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0 = (0,1,1), \quad \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = (-1,0,1)$$

だから，三角形の法線は

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_0 \times \boldsymbol{e}_1 = (1,-1,1)$$

である.

三角形の頂点 $\boldsymbol{p}_0 = (1,0,0)$ から視点 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{eye}} = (0,1,0)$ に向かうベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{eye}} - \boldsymbol{p}_0 = (-1,1,0)$$

である.

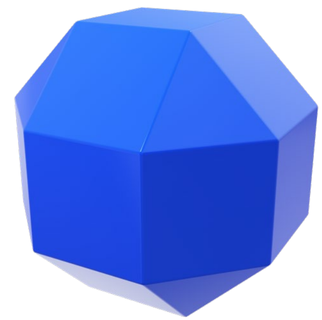
以上より，判別式は

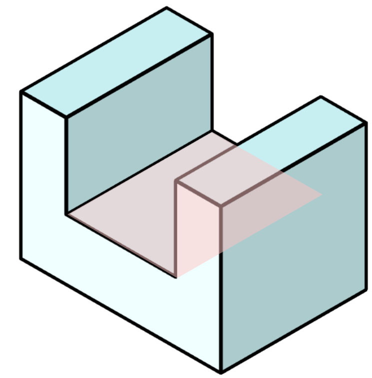
$$D_f = \left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{eye}} - \boldsymbol{p}_i\right) \cdot \boldsymbol{n} = (-1,1,0) \cdot (1,-1,1) = -2$$

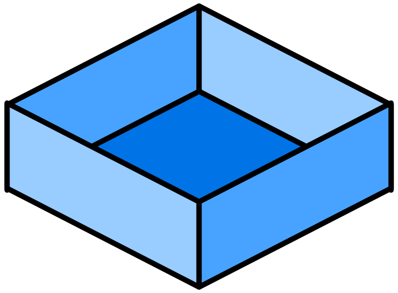
であり，$D_f < 0$ だから三角形は視点から見て裏である.

バックフェースカリング (p.126-)

- バックフェースカリングの良いところ
  - 単一の凸多面体であれば見えない面をすべて消去できる.
  - 裏の面の描画処理を省略することで高速化を期待できる.
- バックフェースカリングの限界
  - 複数の物体が存在する場合や凹形状の物体に対しては見えない面をすべて消去することはできない.
  - 閉じた形状でない場合は裏の面を描画する必要があるためバックフェースカリングを使えない.

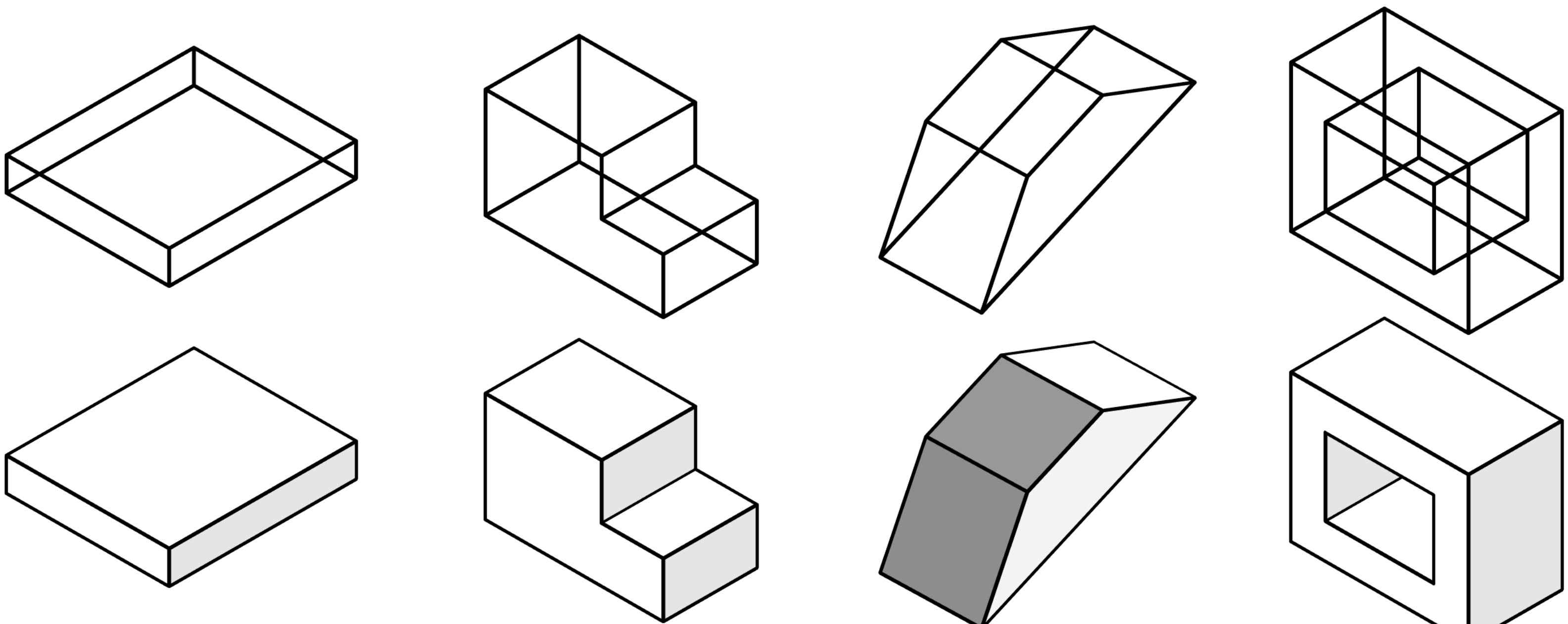






バックフェースカリング (p.126-)

問　次の多面体を任意の視点から描画したい．バックフェースカリングのみで確実に隠面消去を実現できる立体はどれか．

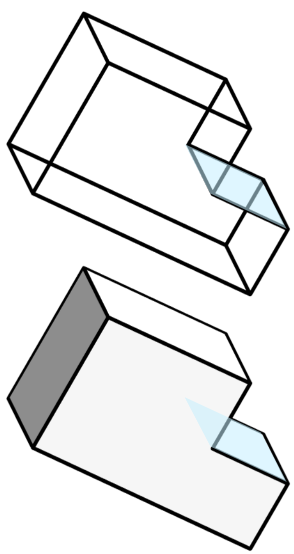


(a)　(b)　(c)　(d)

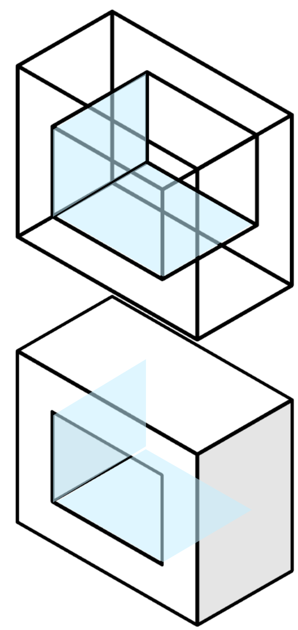
バックフェースカリング (p.126-)

答 (a) と (c)

- (a)(c) は凸多面体なので任意の視点で隠面消去可能.
- (b)(d) は凹多面体なので，表の面が他の面に隠れることがある. つまり，バックフェースカリングのみでは隠面消去を実現できない.



(b)



(d)

バックフェースカリング (p.126-)

問　次の記述のうち正しいものを選べ.

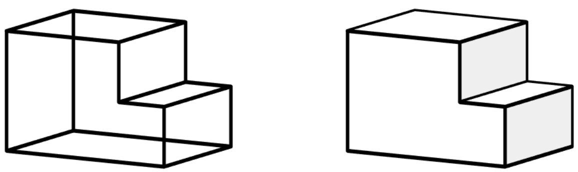
1. 1つの凸多面体の陰面消去にはバックフェースカリングが効果的である.
2. 凹多面体にバックフェースカリングを適用した場合，描画結果は常に間違っている.
3. バックフェースカリングを実行するためには頂点の法線が必要である.
4. 凹多面体を描画する場合はバックフェースカリングを使うべきではない.

バックフェースカリング (p.126-)

答

1. ○ 1つの凸多面体であれば，カメラから見えない面がバックフェースカリングによって非表示となり，見える面のみをすべて描画することができる.

2. ×

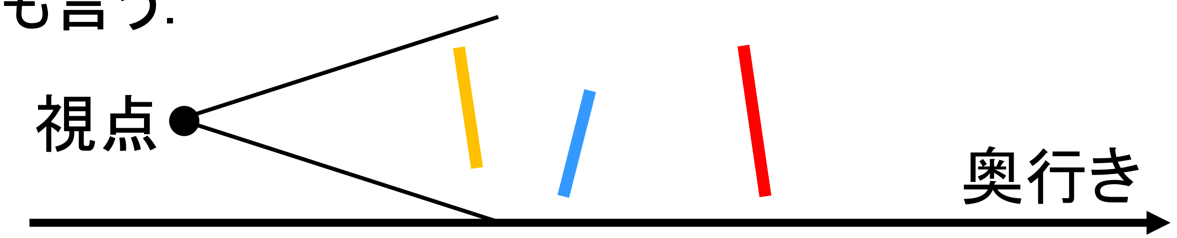


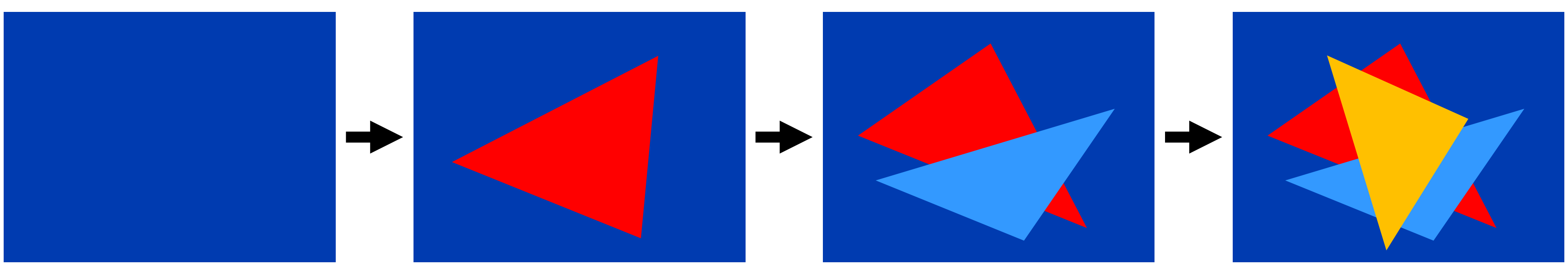
3. × 頂点ではなく，面の法線が必要である.

4. × 陰面消去の処理は別途必要であるが，処理の削減のためにはバックフェースカリングが効果的である.

優先順位アルゴリズム (p.127-)

- 優先順位アルゴリズム
  - 視点から見て，奥にある面を先に描き，手前にある面をあとで描くことで隠面消去を実現する方法.
  - 奥行きソート法 (depth-sort algorithm): 視点からの距離に従って面を並び替えて，遠方の面から順次重ね描きする. ペインタアルゴリズム (painter’s algorithm) とも言う.



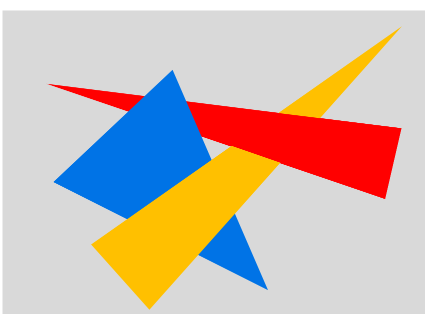


優先順位アルゴリズム (p.127-)

- 奥行きソート法の処理手順
  1. すべてのポリゴンについて，それぞれ重心を求める.
  $$\boldsymbol{g} = \frac{1}{n}(\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_{n-1})$$
  2. すべてのポリゴンを，視点からの奥行き（z値）で並べ替える.
  3. 奥のポリゴンから順に重ね描きする.

優先順位アルゴリズム (p.127-)

- 優先順位アルゴリズム（奥行きソート法）の良いところ
  - アルゴリズムがシンプルである.
  - 物体が複数あってもよいし，凹形状にも対応できる.
- 優先順位アルゴリズム（奥行きソート法）の限界
  - 隠面消去に失敗する場合がある.
  - ポリゴン数に応じて並び替えのコストが増える



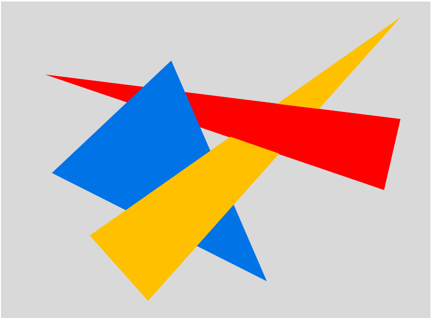
三すくみの場合

貫通している場合

凹ポリゴンの場合

優先順位アルゴリズム (p.127-)

問　奥行きソート法は隠面消去に失敗する場合がある. この問題の本質はどこにあるか.



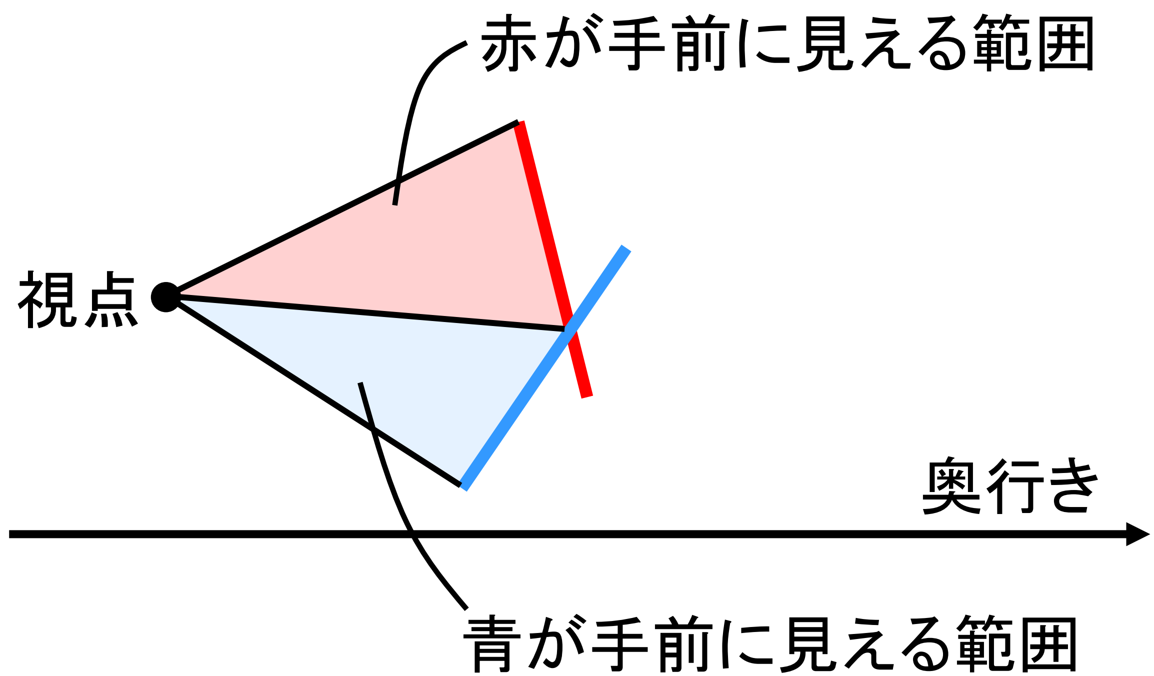
三すくみの場合

貫通している場合

凹ポリゴンの場合

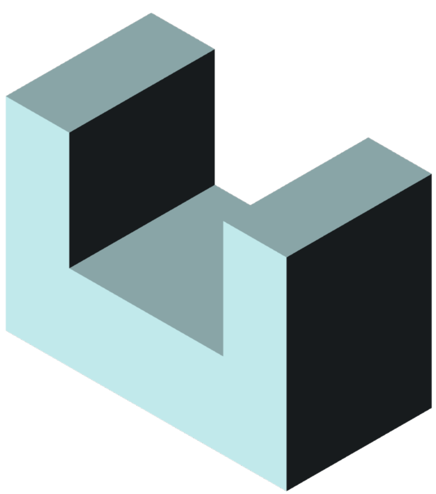
優先順位アルゴリズム (p.127-)

答　ポリゴンには「大きさ」があるから，重心だけではポリゴンの前後関係が定まらない.
つまり，ポリゴンの単位で前後関係を決めるのではなく，ポリゴンより細かい単位で前後関係を決める必要がある.

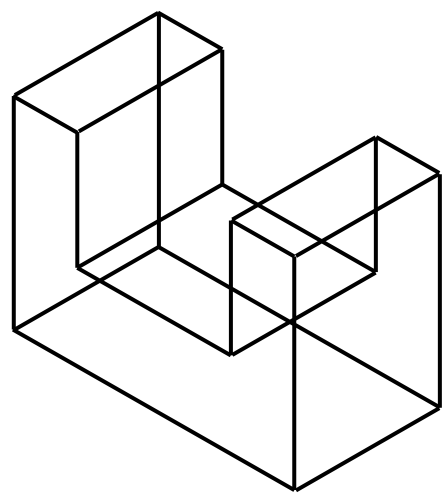


隠線消去 (p.123, p.192-)

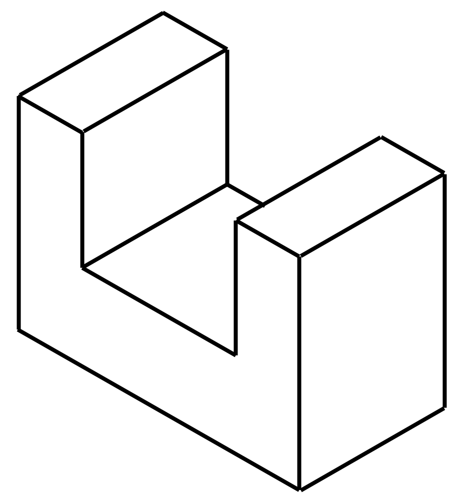
- 隠線消去
  - 線画で物体の表示を行う場合，ほかの面や物体により隠される部分を消去する処理を隠線消去という.
  - 物体の立体構造を把握するための表示方法の一つ.



多面体の描画
（隠面消去）



ワイヤフレーム表示
（隠線消去なし）



ワイヤフレーム表示
（隠線消去あり）

隠線消去 (p.123, p.192-)

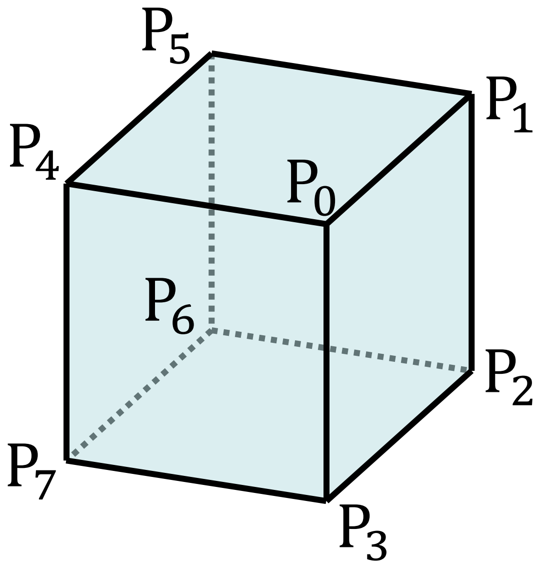
- 凸多面体の隠線消去：稜線の3つのパターン

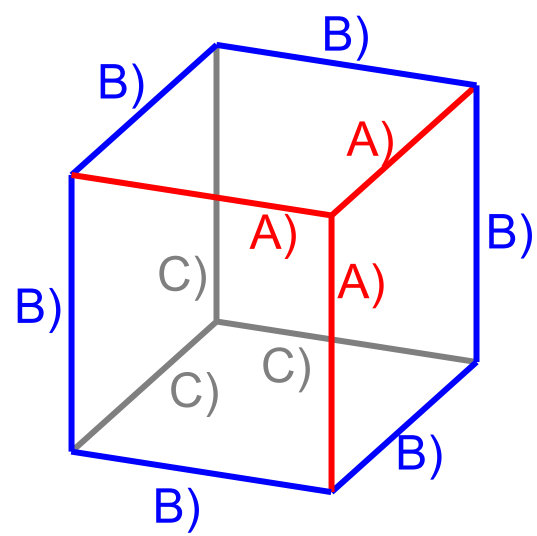
  1つの凸多面体について，各辺（稜線）の可視性は以下の通り.

  A) 稜線を共有する2つの面が表と表：可視

  B) 稜線を共有する2つの面が表と裏：可視

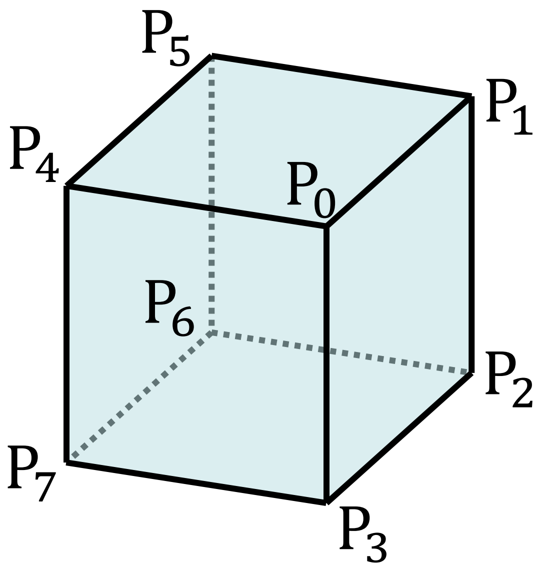
  C) 稜線を共有する2つの面が裏と裏：不可視



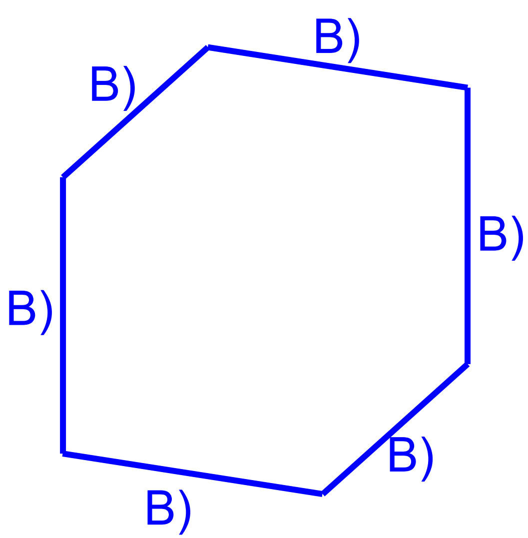


隠線消去 (p.123, p.192-)

- 凸多面体の隠線消去：稜線と輪郭線
  - 稜線のうち，「B) 稜線を共有する2つの面が表と裏」を輪郭線という.
  - 凸多面体の輪郭線は1本のループであり，凸多角形となる.



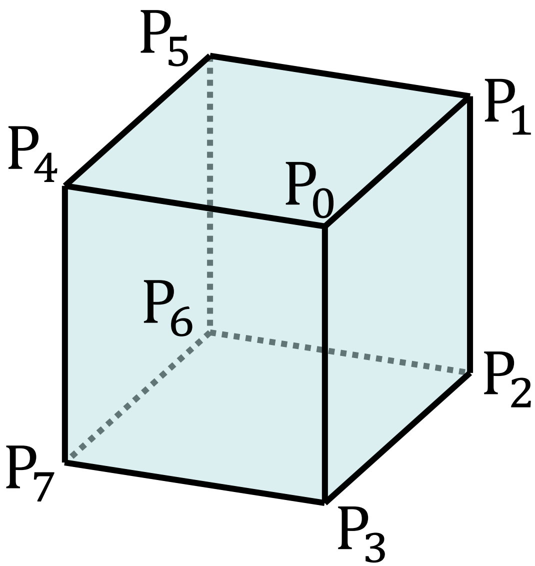
凸多面体



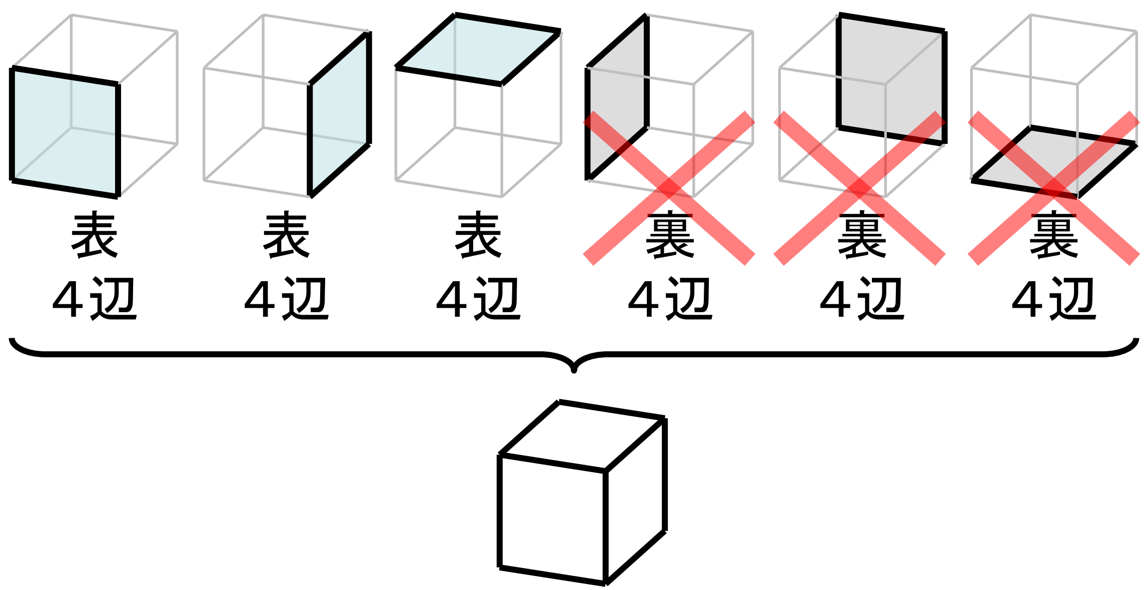
凸多面体の輪郭線

隠線消去 (p.123, p.192-)

- 隠線消去におけるバックフェースカリングの有効性
  - 表の面の周囲の線があればすべての線を網羅できる.
  - つまり，裏の面は隠線処理の前に取り除いてよい（バックフェースカリング）.
  - 凸多面体に限らず有効である.



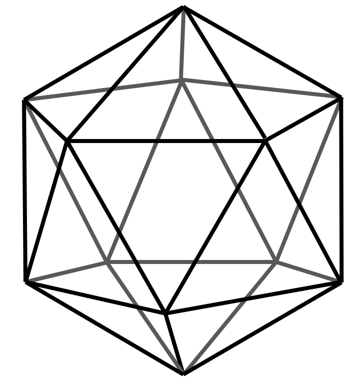
凸多面体



隠線消去:表の面の周囲の辺のみで十分

隠線消去 (p.123, p.192-)

問　正20面体について以下の問いに答えよ.

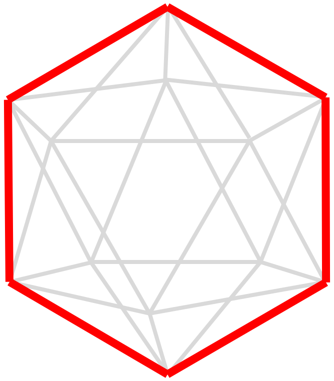


1. 輪郭線（投影された多角形領域の辺）のみを描画するにはどうすればよい？
2. 陰線消去をするにはどうすればよい？

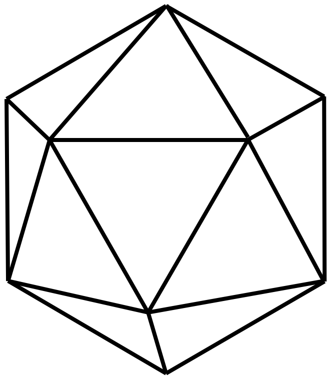
隠線消去 (p.123, p.192-)

答

1. すべての稜線のうち，稜線を共有する2つの面が表と裏の場合のみ描画する.

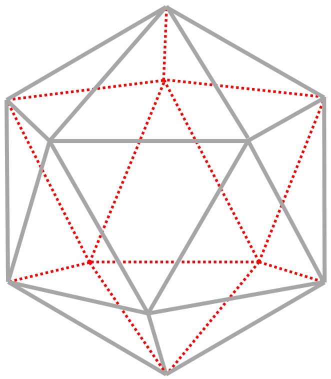


2. バックフェースカリングを行い，表面の稜線のみを描画する.



隠線消去 (p.123, p.192-)

問　正20面体について，本来隠れて見えないはずの稜線のみを描画するにはどうすればよい？



隠線消去 (p.123, p.192-)

答
すべての稜線のうち，稜線を共有する2つの面が裏と裏の場合のみ描画する.