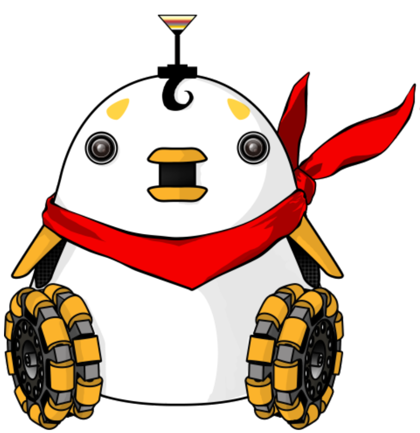
# 人工知能

## 第7章　確率モデル（２）
## 確率的生成モデルとナイーブベイズ



# 中間テスト

- 次週 11月17日(金)10:50~
  - 場所:授業を実施している教室
  - ペーパーテストを実施
  - 持ち込み許可物なし

- 考慮すべき理由があって当日受験できなかった場合
  - 泉に連絡をし、追試を受験するための申請をすること
    - メールアドレス:izumi-t@fc.ritsumei.ac.jp
    - 申請受付〆切:(当日)11月17日15時
    - 受験できなかったことを証明するものを添付することが必須
      - 体調不良の場合は病院の診断書など
      - 証明するものがない場合は追試を受験できない可能性がある
  - 寝坊や忘れていた、特別に許可されたものでない学外イベントへの参加、などの理由での欠席したものは追試の対象とならない
  - 正当な理由であると判断された場合にのみ追試を認める
  - 追試の詳細な実施方法は対象者にのみ後日通知

# STORY確率的生成モデルとナイーブベイズ

ダンジョンの中は不確実な世界．さまざまなことが確率的に生じてしまう．オムニホイールを回転させて右に移動しようとしても，前に移動してしまうかもしれない．まっすぐ来ると思っていた敵は，次のステップで気まぐれに左へと移動するかもしれない．確率の基礎を知ったホイールダック2号は，そんな不確実性に立ち向かうためにいろいろと考え出した．しかし何が何の確率に影響を与えるのだろう．「2ステップ前に前進したことは，次のステップの停止に影響を与えるのだろうか？」「いや，目の前に壁があるのは，敵が右に行く確率に影響を与えるのだろうか？」「一昨日，博士が食べていた納豆ご飯は出口の場所に影響を与えるのだろうか！？」考え出すときりがない．そんな確率的な事象を整理して，現実的な推論を可能にする枠組み——それが確率的生成モデルだった．

# 仮定 確率とベイズ理論の基礎

- ホイールダックは2号過去の経験から確率の計算ができるものとする.

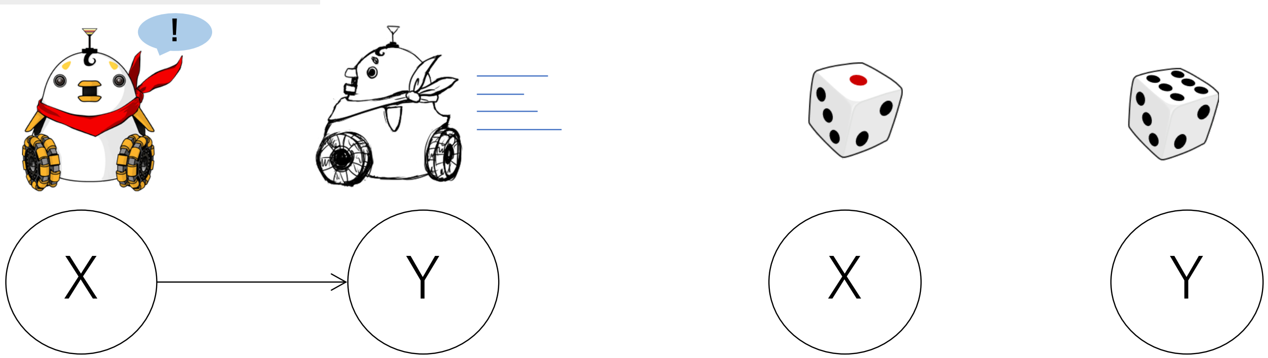

図 7.1 さまざまな事象の間の関係に悩むホイールダック2号

# Contents

# 7.1.1 さまざまな確率変数と依存関係

- ロボットを取り巻く環境では確率的に変化する様々な変数が存在する.
- このように対象とするシステムに「どのような変数があるのか？」また「それらがどのような関係にあるか？」を明らかにすることは確率に基づく人工知能を作る第一歩として重要.

依存関係＝独立？従属？




(a) YはXに依存している

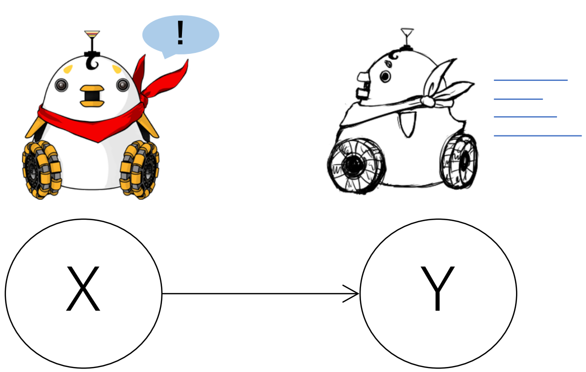
$$P(X,Y) = P(X)P(Y|X)$$

(b) XとYは独立である

$$P(X,Y) = P(X)P(Y)$$

# 7.1.2 グラフィカルモデルと生成過程

- さまざまな確率変数が具体的にどのように影響を与え合いながらその値を決めていくのかを具体的に表現するのが**確率的生成モデル**である。
- それを図式的に表現したのが**グラフィカルモデル**ある。
- 確率的生成モデルは**生成過程**によって具体的に定義される。




（確率的）グラフィカルモデル
(Probabilistic graphical model)

$$X \sim P(X)$$
$$Y \sim P(Y|X)$$

（確率的）生成過程
(Probabilistic generative process)

# 7.1.3 観測とプレート

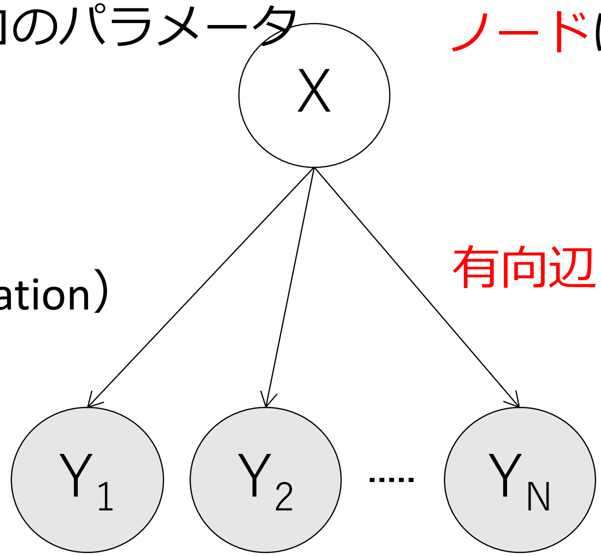
潜在変数（latent variable）は白

例）サイコロのパラメータ

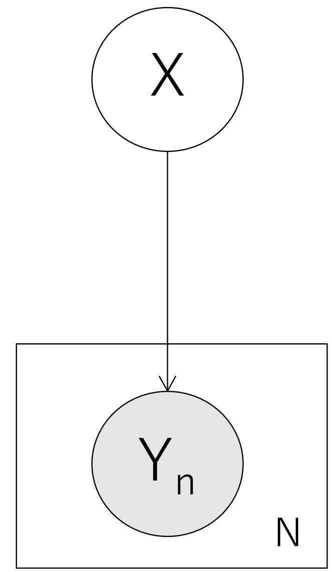
ノードは確率変数

有向辺は依存関係

観測（observation）
は灰色




(a) プレートを用いない表現




(b) プレートを用いた表現

例）サイコロの目

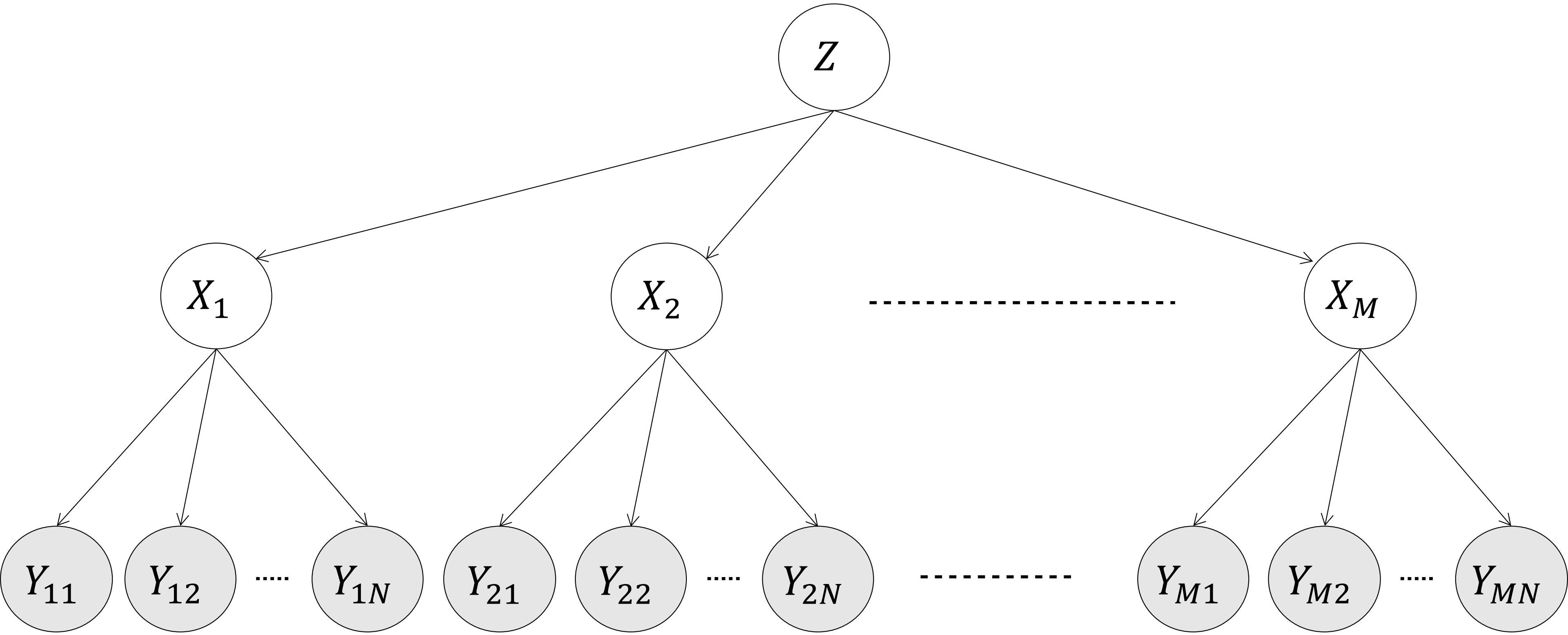
プレートは独立同分布（i.i.d.）

# 演習7-1 グラフィカルモデルとプレート

- 1円玉でコイントスをM回を行う．それぞれにつき表が出れば10円玉を，裏が出れば100円玉をN回コイントスする．
- 結果的に合計$M \times N$回の10円玉か100円玉の表もしくは裏の観測が得られる．
- 1円玉をm回目に振った際に表が出たか裏が出たかという事象を$X_{\mathrm{m}}$，表が出るか裏が出るかを支配する確率分布のパラメータを$Z$とする．また$X_{\mathrm{m}}$に従ってされたコイントスの内n回目の結果を$Y_{\mathrm{m}n}$とする．
- なお見ている側には$\{Y_{\mathrm{m}n}\}$だけが告げられるものとする．

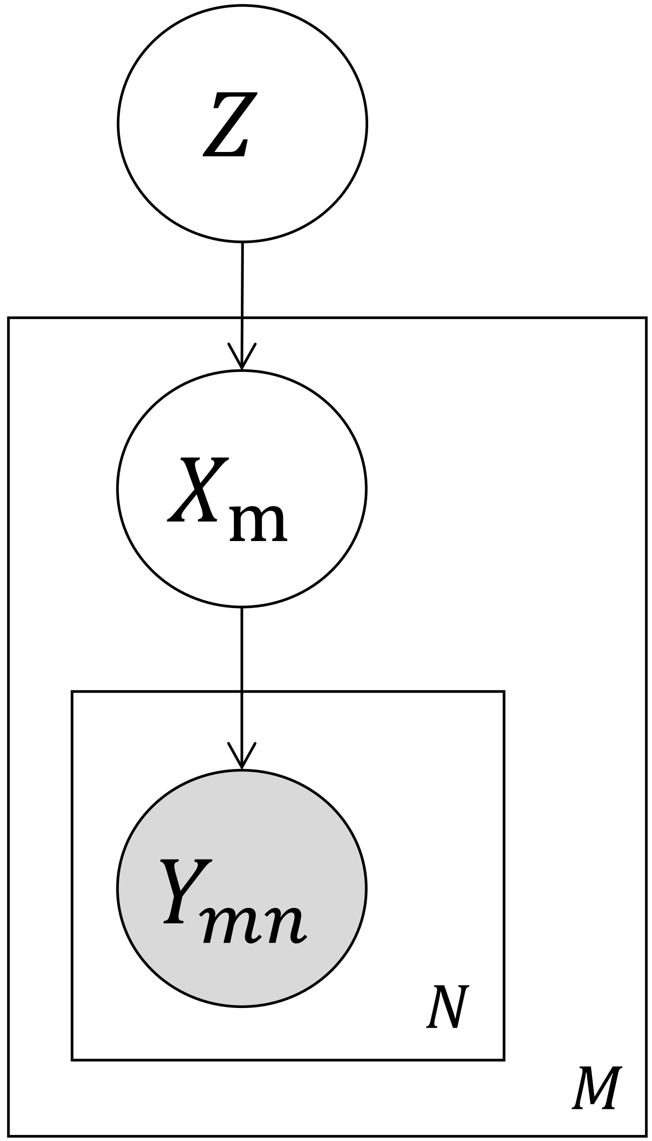
1. これらの事象$Z$，$\{X_{\mathrm{m}}\}, \{Y_{mn}\}$の関係をプレートを用いないグラフィカルモデルで表現せよ．
2. 1.をプレートを用いて表現せよ．

# 演習7-1 グラフィカルモデルとプレート
# 解答




(a) プレートを用いない表現

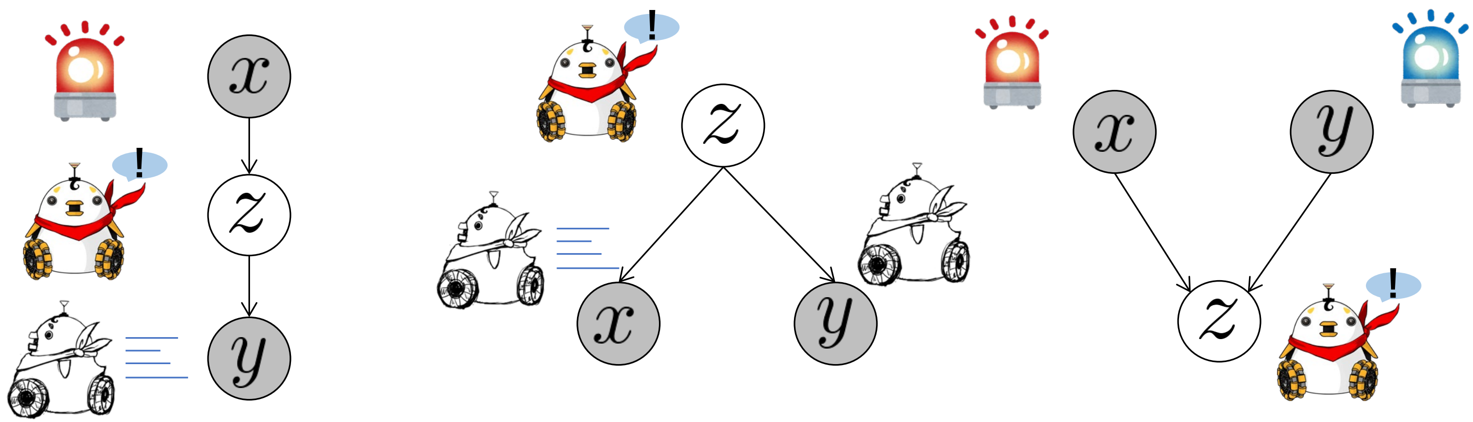
# 演習7-1 グラフィカルモデルとプレート
## 解答




(b) プレートを用いた表現

# 7.1.4 ノードの関係性

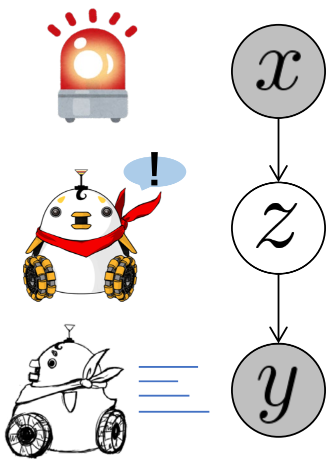
ノードの関係性は以下の3つの基本的な接続から構成される。




(a) head-to-tail　(b) tail-to-tail　(c) head-to-head

**説明のための設定**：実はホイールダック2 号には目の前で光が点灯すれば前進しようとする傾向があるとする.

# (a) head-to-tail




(a) head-to-tail

$$P(X,Y,Z) = P(Y|Z)P(Z|X)P(X)$$

- はあるノードに矢印の先（head）と矢印の根本(tail) が刺さっている状態をさす.
- 伝承サンプリング：$P(X)$ から$X$ をサンプリングし，その$X$ に基づいて$P(Z|X)$ から$Z$ をサンプリングして，最後に$P(Y\,|Z)$ から$Y$ をサンプリングする。
- 真ん中の$Z$ が観測されると，$Y$ の確率は$X$ に全く依存しなくなる.　（**ブロッキング**）

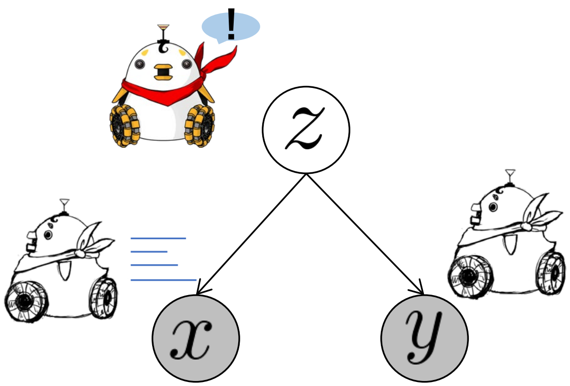
$$P(X,Y|Z) = \frac{P(X,Y,Z)}{P(Z)} = \frac{P(Y|Z)P(Z|X)P(X)}{P(Z)} = P(Y|Z)P(X|Z) \qquad (21)$$

# (b) tail-to-tail

- あるノードに矢印の根本(tail) が複数刺さっている状態

$$P(X,Y,Z) = P(Y|Z)P(X|Z)P(Z)$$

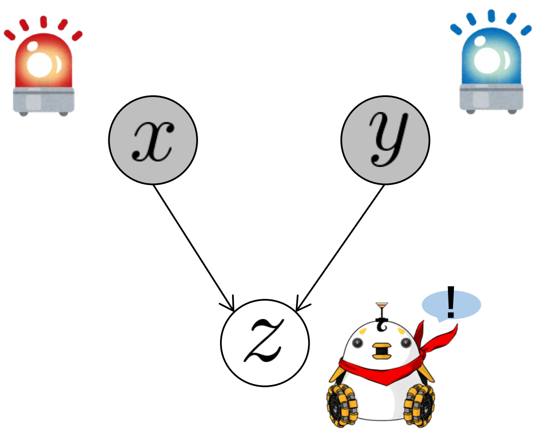
- tail-to-tail でもブロッキングが起きる。




(b) tail-to-tail

$$P(X,Y|Z) = \frac{P(X,Y,Z)}{P(Z)} = \frac{P(Y|Z)P(X|Z)P(Z)}{P(Z)} = P(Y|Z)P(X|Z) \tag{23}$$

# (c) head-to-head




(c) head-to-head

- あるノードに矢印の先(head) が複数刺さっている状態

$$P(X,Y,Z) = P(X)P(Y)P(Z|X,Y)$$

- ここで*X* と*Y* は*Z* が観測されていない状況で既に独立である（観測されていない*Z* が*X* と*Y* の間の経路をブロックしている）．
- *Z* が観測されることで*X* と*Y* の間に依存関係が生まれる。

# マルコフブランケット

- **ロ**グラフィカルモデルが有用なのは，確率モデルの式変形を行う際に，どこまでの変数を無視してよいかが明確にわかることにある．
- **ロマルコフブランケット**(Markov blanket)$\partial A$

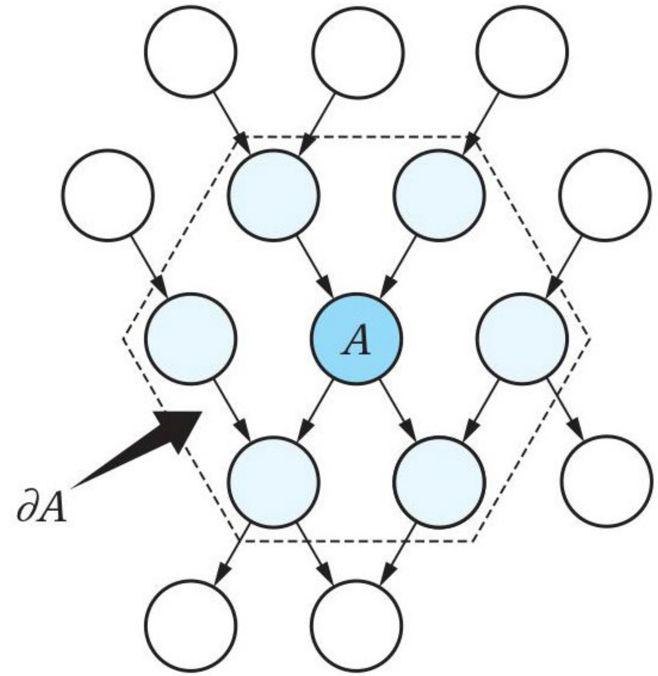


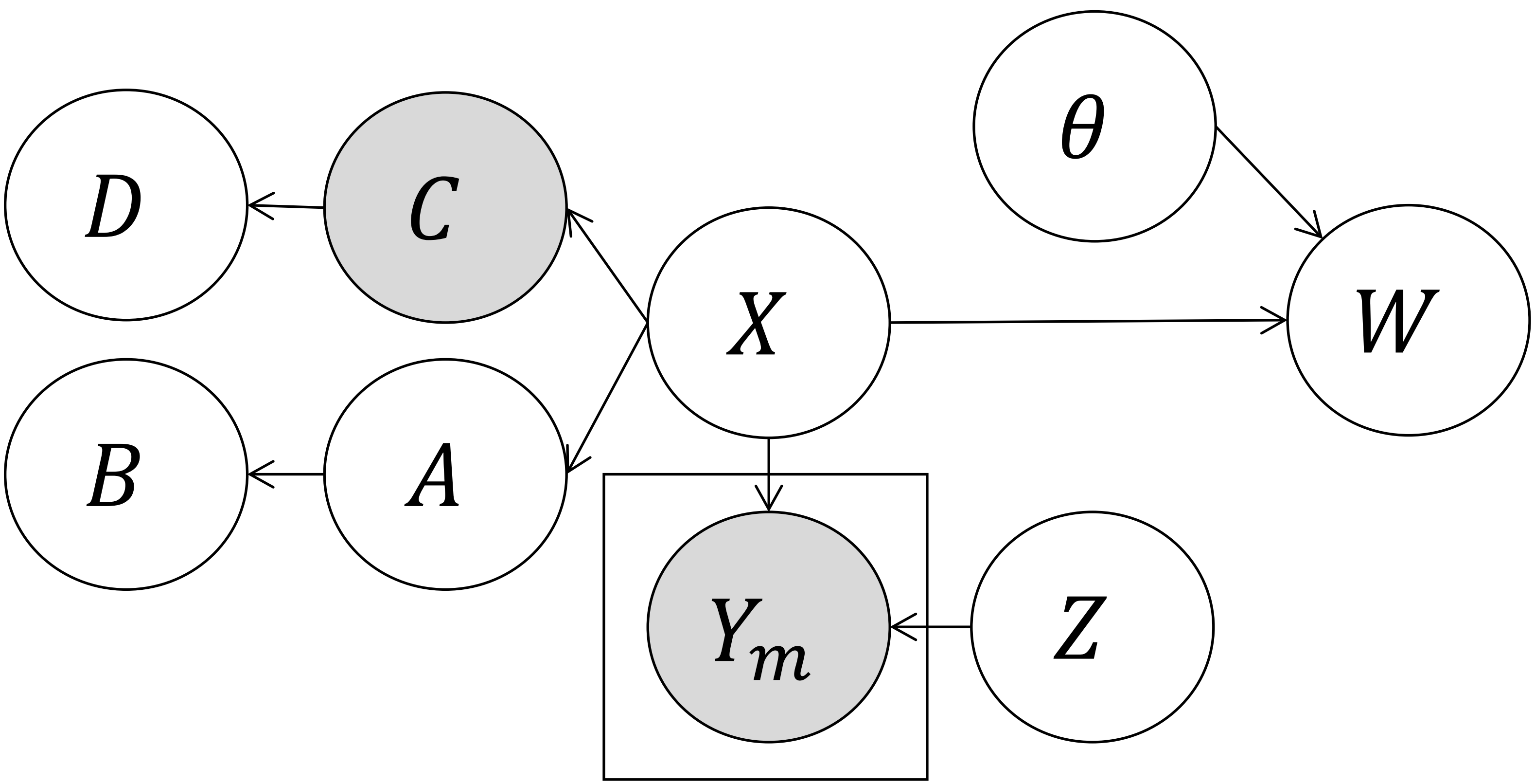

図 7.5 マルコフブランケット

$$P(A|\partial A, B) = P(A|\partial A)$$

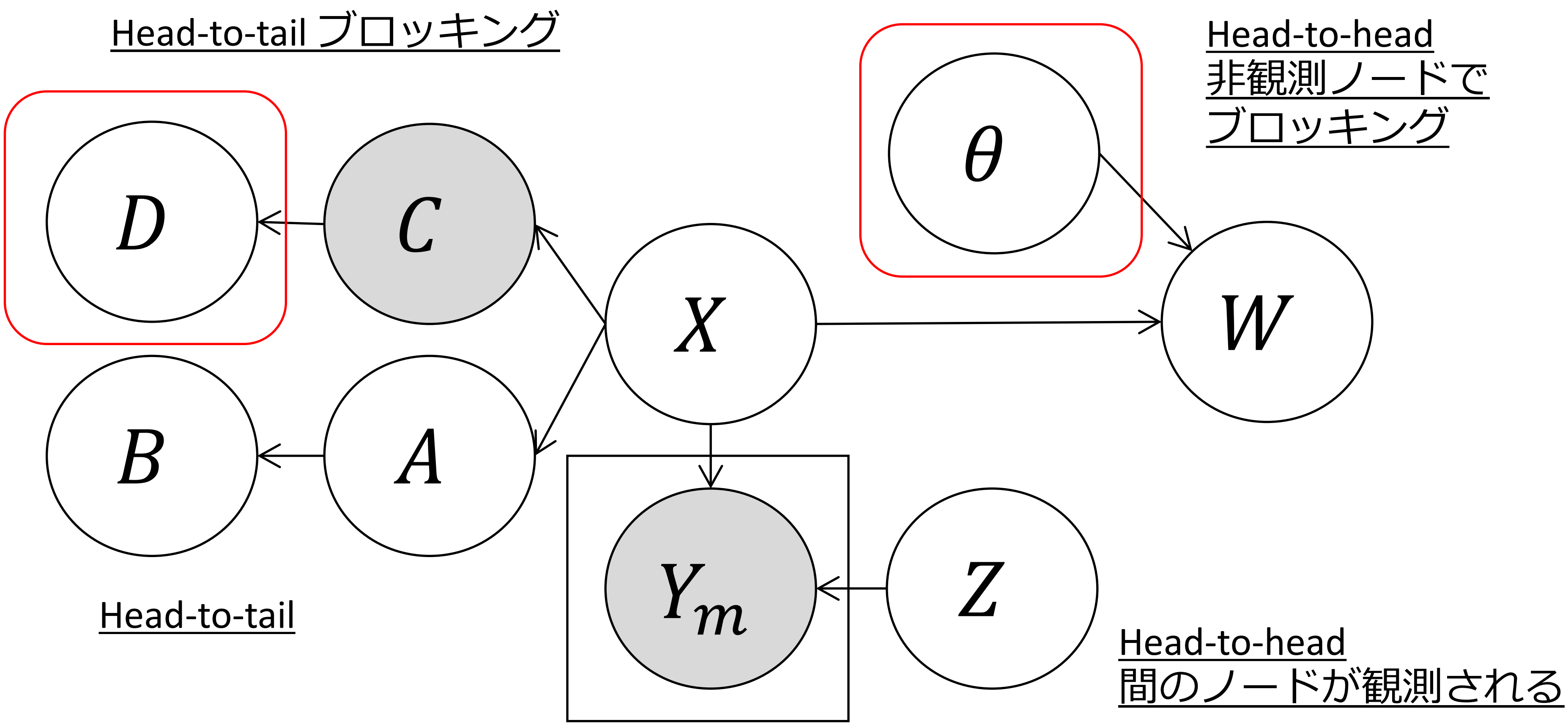
**妻／夫と子供と親以外は消せる！**

# 演習7-2 グラフィカルモデルと独立性

- 以下のグラフィカルモデルにおいてxと独立な潜在変数を全て述べよ．なお灰色のノードは観測可能な確率変数を表す．



# 演習7-2 グラフィカルモデルと独立性　解答



# Contents

# 7.2.1 マルコフ過程：状態のみの確率システム
# 7.2.2 グラフィカルモデルとマルコフ性

## ■マルコフ性

$$P(s_{t+1}|s_{1:t}) = P(s_{t+1}|s_t) \qquad (6.25)$$

## ■マルコフ過程

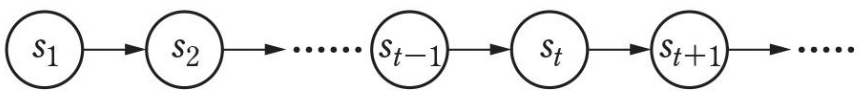



図 7.6 マルコフ過程のグラフィカルモデル

## ■マルコフ決定過程

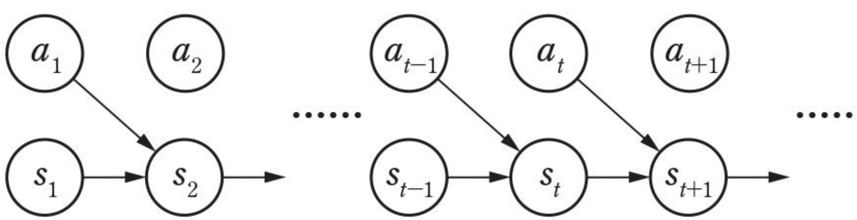



図 7.8 マルコフ決定過程のグラフィカルモデル

# 7.2.2 状態遷移確率

■状態遷移確率 (transition probability)

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \tag{6.23}$$

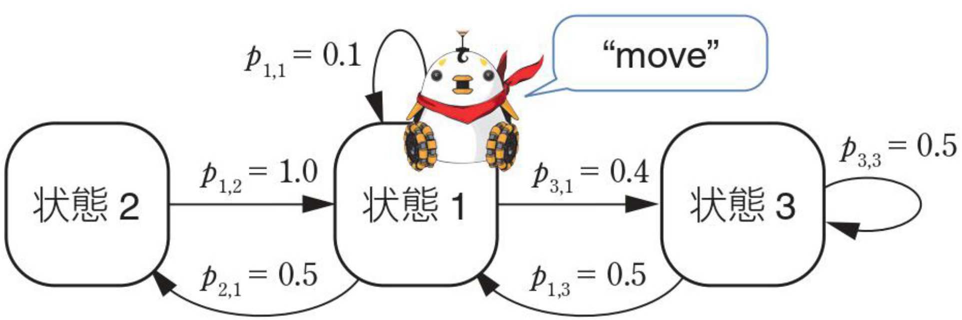



図 7.7 状態遷移確率を表すグラフ

# 7.2 確率システムの表現

- 次状態が現在の状態と行動に依存して確率的に決定するシステムのことを，**確率システム(stochastic system)**と呼ぶ.
- 確率システムの場合は状態遷移則が確率的になるため関数での表記が不可能になる.
- 確率分布による表現を用いる.

マルコフ決定過程
(離散)確率システム

状態遷移則 $$P(s_{t+1}|s_t, a_t) = p_{s_{t+1}, s_t, a_t} \tag{7.17}$$

状態集合 $$s_t \in S = \{1, 2, \ldots, \#(S)\} \tag{7.18}$$

行動集合 $$a_t \in A = \{1, 2, \ldots, \#(A)\} \tag{7.19}$$

# 7.2.3 行動選択に依存した状態遷移確率

- 例えば行動として，$A = \{\text{“stop”}, \text{“move”}\}$ の2 種類があり，$a_t$ = “stop” の際にロボットは動かないとする．

$$
\mathbf{P} = \left( \overbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1,\mathrm{move}} & p_{1,2,\mathrm{move}} & p_{1,3,\mathrm{move}} \\ p_{2,1,\mathrm{move}} & p_{2,2,\mathrm{move}} & p_{2,3,\mathrm{move}} \\ p_{3,1,\mathrm{move}} & p_{3,2,\mathrm{move}} & p_{3,3,\mathrm{move}} \end{pmatrix}}^{a_t = \text{“move”}}, \overbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1,\mathrm{stop}} & p_{1,2,\mathrm{stop}} & p_{1,3,\mathrm{stop}} \\ p_{2,1,\mathrm{stop}} & p_{2,2,\mathrm{stop}} & p_{2,3,\mathrm{stop}} \\ p_{3,1,\mathrm{stop}} & p_{3,2,\mathrm{stop}} & p_{3,3,\mathrm{stop}} \end{pmatrix}}^{a_t = \text{“stop”}} \right)
$$

$$
= \left( \begin{pmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (\mathbf{P}_{\mathrm{move}}, \mathbf{P}_{\mathrm{stop}}) \qquad (7.20)
$$

ここで $p_{s_{t+1}, s_t, a_t} = P(s_{t+1} | s_t, a_t)$ とする．

**状態遷移の確率計算**

$$
P(s_{t+1} | a_t) = \sum_{s_t} P(s_{t+1}, s_t | a_t) = \sum_{s_t} P(s_{t+1} | s_t, a_t) P(s_t) \qquad (7.21)
$$

# 演習7-3 状態遷移

- 教科書図7.7の状態遷移を前提とした際に，ホイールダック２号が初めに状態1に居たとして，move, stop, move という3つの行動を行った場合に，その後ホイールダック２号が状態3にいる確率を求めよ.

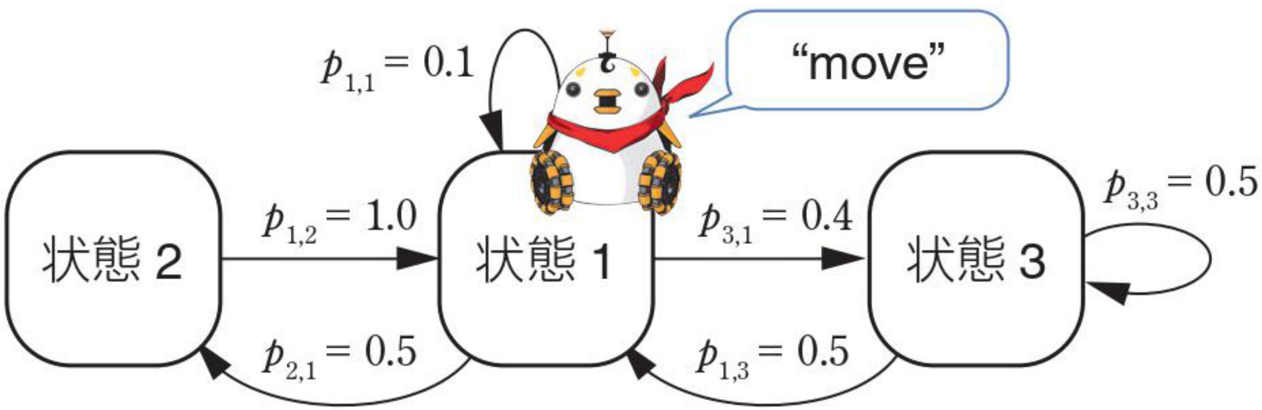



図 7.7 状態遷移確率を表すグラフ

# 演習7-3 状態遷移 解答

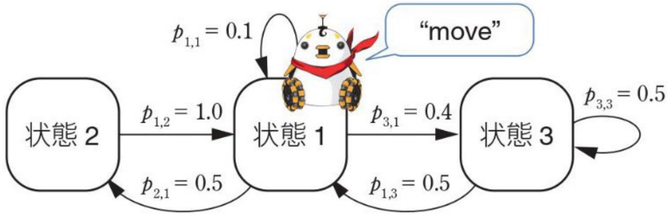
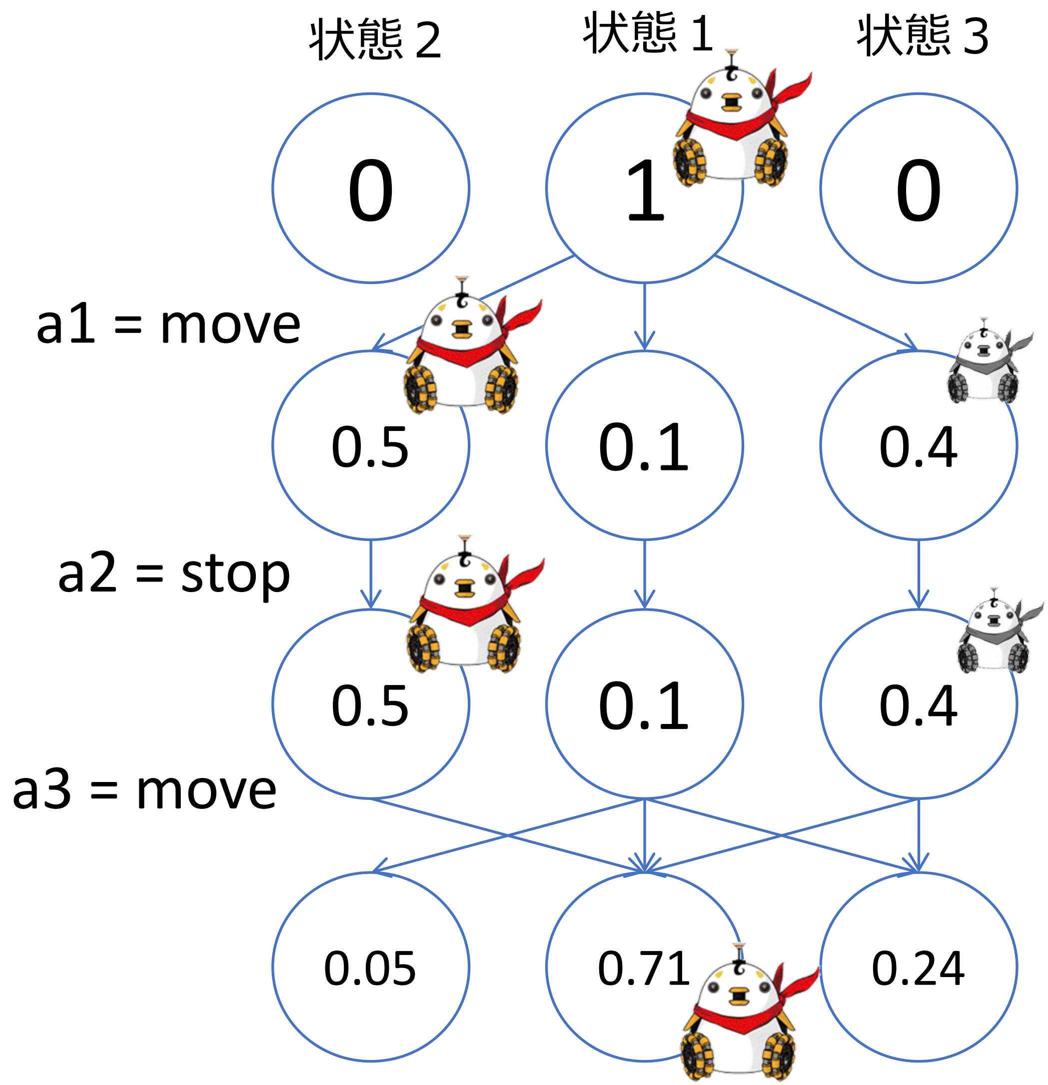



図 7.7 状態遷移確率を表すグラフ




- P3=o.1*0.4+0.4*0.5
  =0.24
- P1=0.1*0.1+0.5*1.0+0.4*0.5
  =0.71
- P2=0.1*0.5
  =0.05

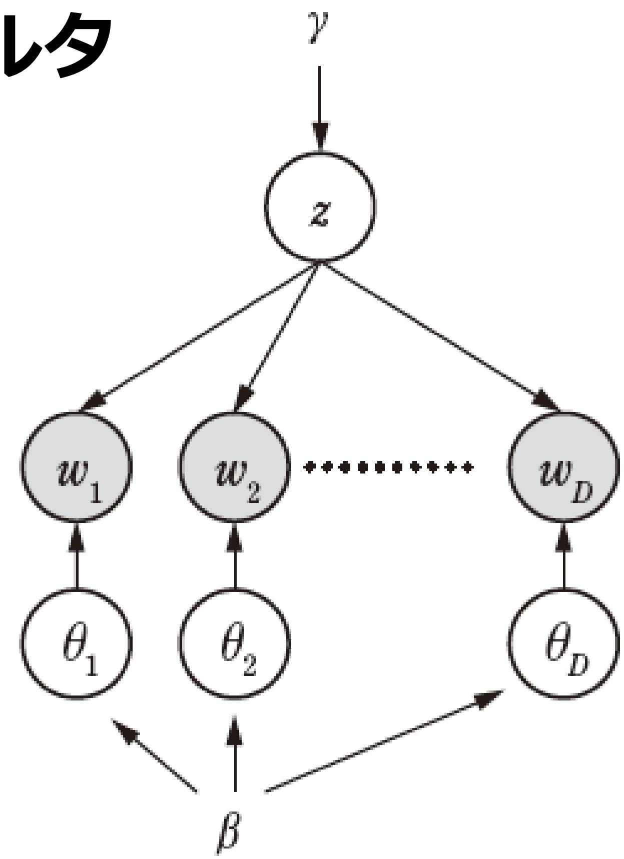
# Contents

- 7.1 確率的生成モデルとグラフィカルモデル
- 7.2 確率システム：マルコフ決定過程
- 7.3 ナイーブベイズモデルによるスパムメールフィルタ

# スパムメールのナイーブベイズフィルタ

- **ナイーブベイズモデル**(naive Bayes model) は生成モデルに基づき分類を行うために用いられる最も単純なモデルの一つである.
- メールがスパムメールかどうかを判定する分類問題を考える.

$$
\begin{aligned}
P(z|W) &= P(z|w_1, w_2, \ldots, w_D) \\
&\propto P(w_1, w_2, \ldots, w_D|z)P(z) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{D} P(w_i|z)\right) P(z)
\end{aligned}
$$




問：メールに「お得」「女子高生」が含まれていたときのスパムメール確率はいくらか？

スパムフィルタがつくれます！

**表 7.1** スパムメール分類問題における単語の発生確率の例

| | $w_1$: “お世話” | $w_2$: “お得” | $w_3$: “女子高生” |
|---|---|---|---|
| $P(w_i\|z=1)$ ：スパム | 0.05 | 0.60 | 0.30 |
| $P(w_i\|z=0)$ ：正常 | 0.30 | 0.10 | 0.01 |

$P(z=1) = 0.1$

$P(z=0) = 0.9$

# スパムフィルタの計算

あるメールに「お得」「女子高生」が含まれていたとする.

$$
\begin{aligned}
P(z=1|w_1=0,w_2=1,w_3=1) &\propto P(w_1=0|z=1)\times P(w_2=1|z=1) \\
&\times P(w_3=1|z=1)\times P(z=1) \\
&= (1-0.05)\times 0.60\times 0.30\times 0.1 \\
&= 1.7\times 10^{-2} \qquad (7.25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(z=0|w_1=0,w_2=1,w_3=1) &\propto P(w_1=0|z=0)\times P(w_2=1|z=0) \\
&\times P(w_3=1|z=0)\times P(z=0) \\
&= (1-0.30)\times 0.10\times 0.01\times 0.9 \\
&= 6.3\times 10^{-4} \qquad (7.26)
\end{aligned}
$$

となり，スパムメールである確率が，スパムメールでない確率よりも 27 倍ほど大きいことがわかる．このようにナイーブベイズフィルタは観測データである単語集合が「生成される」過程を生成モデルのナイーブベイズモデルによってモデル化し，「スパムであるかどうか」を表す潜在変数 $z$ を推定することで分類を行っている．

# どうやってテーブルを学習するか？

- 簡単にはユーザが「迷惑メールフォルダ」に移動させたメールのデータから簡単に計算できる.


表 7.1 スパムメール分類問題における単語の発生確率の例

| | $w_1$: "お世話" | $w_2$: "お得" | $w_3$: "女子高生" |
|---|---|---|---|
| $P(w_i \mid z=1)$ ：スパム | 0.05 | 0.60 | 0.30 |
| $P(w_i \mid z=0)$ ：正常 | 0.30 | 0.10 | 0.01 |

$$P(z=1)=0.1$$
$$P(z=0)=0.9$$

# 問7-4 スパムフィルタ

- 「お世話」「女子高生」がメールに含まれて，「お得」が含まれていなかった場合，届いたメールがスパムメールである確率をナイーブベイズモデルに基づき計算せよ．（他の条件は教科書の例と等しいとする）

表 7.1 スパムメール分類問題における単語の発生確率の例

| | $w_1$：“お世話” | $w_2$：“お得” | $w_3$：“女子高生” |
|---|---|---|---|
| $P(w_i\|z=1)$ ：スパム | 0.05 | 0.60 | 0.30 |
| $P(w_i\|z=0)$ ：正常 | 0.30 | 0.10 | 0.01 |

# 問7-4 スパムフィルタ　解答

- P(z=1|**w**)∝P(z=1)P(世話|z=1) P(￢得|z=1) P(女子高生|z=1)
  0.1×0.05×(1-0.6)×0.3 = **0.0006**
- P(z=0|**w**)∝P(z=0)P(世話|z=0) P(￢得|z=0) P(女子高生|z=0)
  0.9×0.3×(1-0.1)×0.01=**0.00243**
- **0.0006/(0.0006+0.00243)= <u>19.8%</u>**

表 7.1　スパムメール分類問題における単語の発生確率の例

| | $w_1$: "お世話" | $w_2$: "お得" | $w_3$: "女子高生" |
|---|---|---|---|
| $P(w_i \mid z=1)$ ：スパム | 0.05 | 0.60 | 0.30 |
| $P(w_i \mid z=0)$ ：正常 | 0.30 | 0.10 | 0.01 |

# 第7章のまとめ

- 確率的生成モデルとグラフィカルモデルとは何かに関して学んだ.
- 観測と潜在変数の色分けやプレート表現などグラフィカルモデルの基本的な表記ルールについて学んだ.
- ノードの関係性とそれに基づく条件付き独立性，およびマルコフブランケットについて学んだ.
- マルコフ過程とマルコフ決定過程について学んだ.
- ナイーブベイズモデルについてスパムメールフィルタの事例を交えて学んだ.