コンピュータグラフィックス(R)

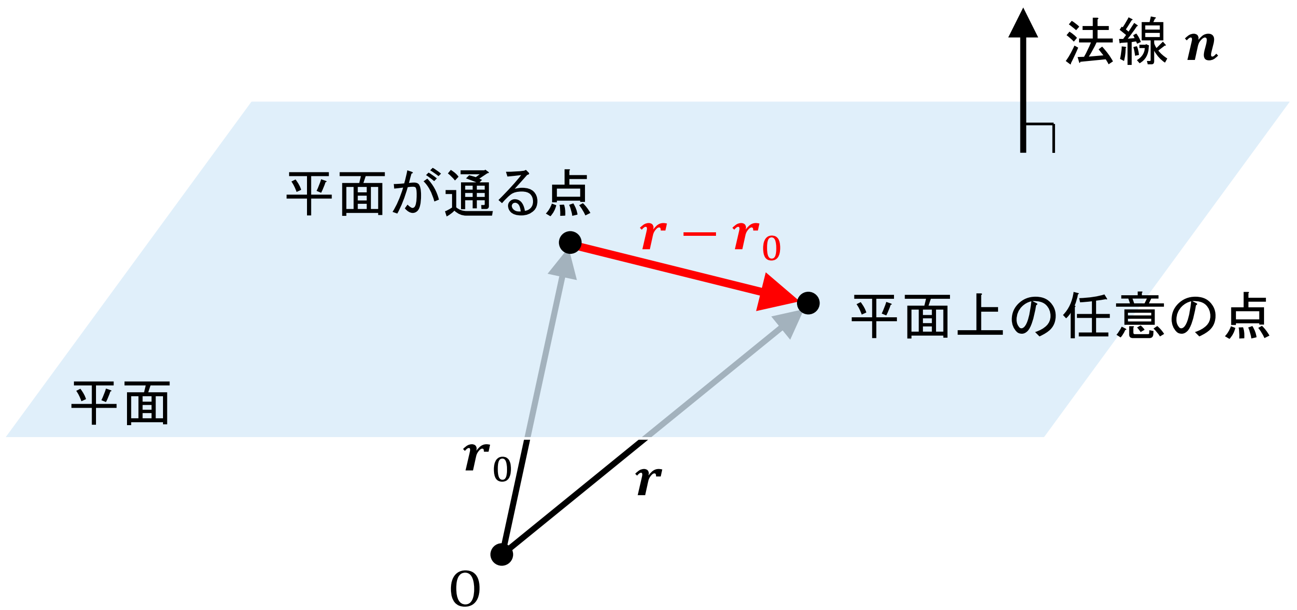
第5回：ポリゴンの幾何学

平面の方程式 (ベクトル表示)

位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ の点を通り，法線が $\boldsymbol{n}$ である平面の方程式は

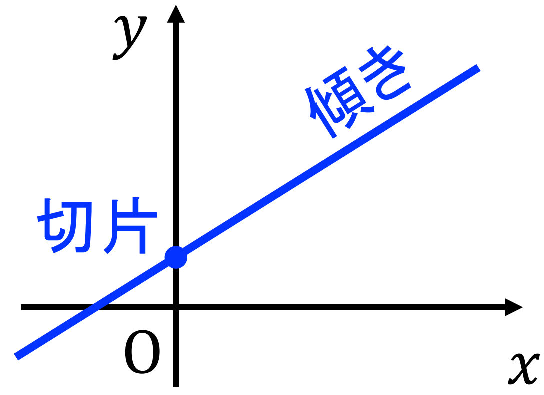
$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

である.

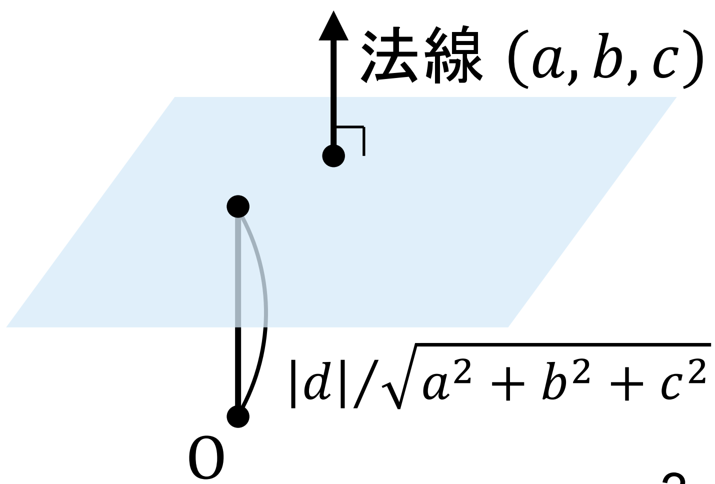


平面の方程式 (成分表示)

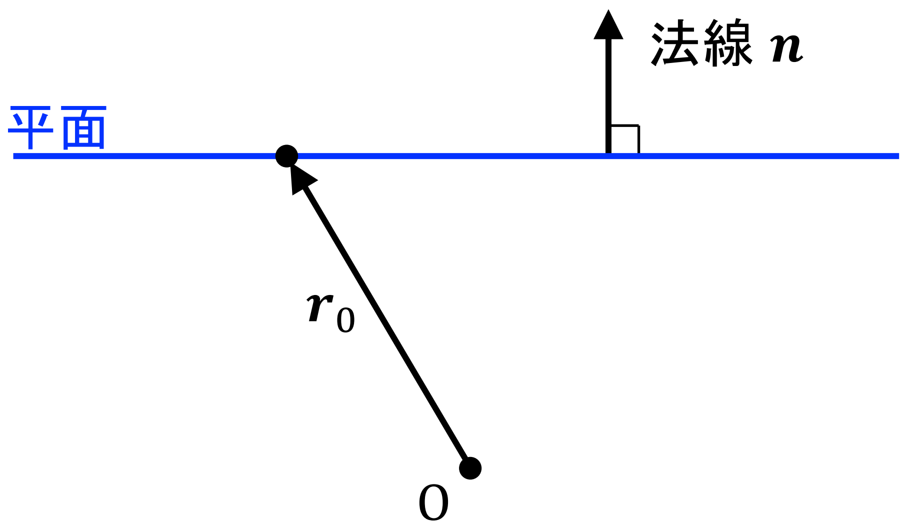
- 2次元 (x, y) の1次方程式
  $ax + by = c$
  $\Rightarrow y = (-a/b)x + c/b$
  傾き $-a/b$, 切片 c/b の直線



- 3次元 (x, y, z) の1次方程式
  $ax + by + cz = d$
  - 平面を表す.
  - 係数 (a, b, c) の組は法線に等しい.
  - 原点からの距離は $|d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ である.



平面の方程式 (ベクトル表示から成分表示へ)



平面のベクトル方程式

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_0$$

ここで, $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_0 = d$ とおくと,

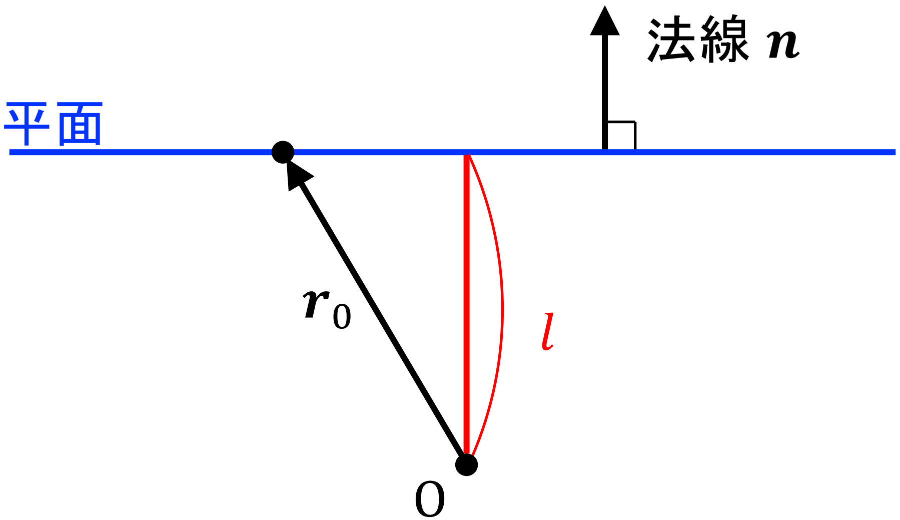
$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = d$$

$$ax + by + cy = d$$

平面の1次方程式が得られた.

平面の方程式

問　平面 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$ について，原点から平面までの距離 l を求めよ.



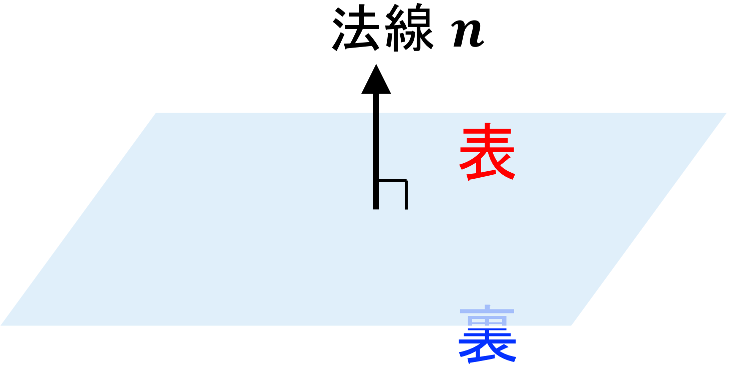
平面の方程式

答

$$
\begin{aligned}
l &= \left|\|\boldsymbol{r}_0\|\cos\theta\right| \\
&= \left|\frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|}\|\boldsymbol{n}\|\|\boldsymbol{r}_0\|\cos\theta\right| \\
&= \frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|}|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0|
\end{aligned}
$$

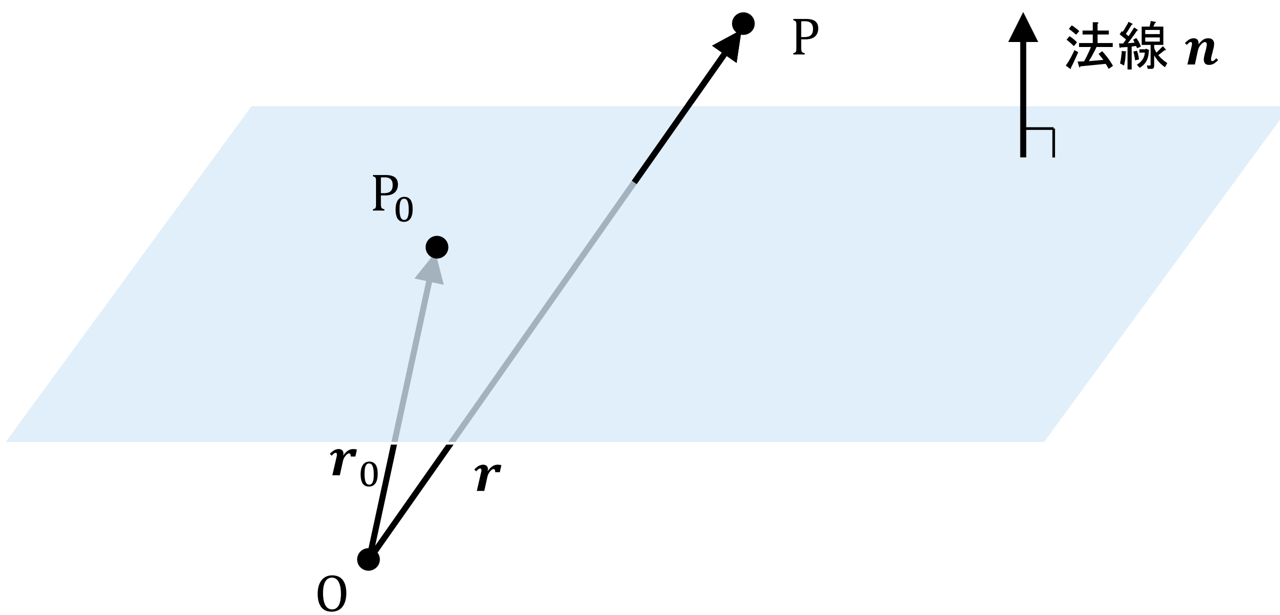
平面の表と裏

- 平面には「表」と「裏」がある.
- 法線の向いている方向を「表」と定義する.



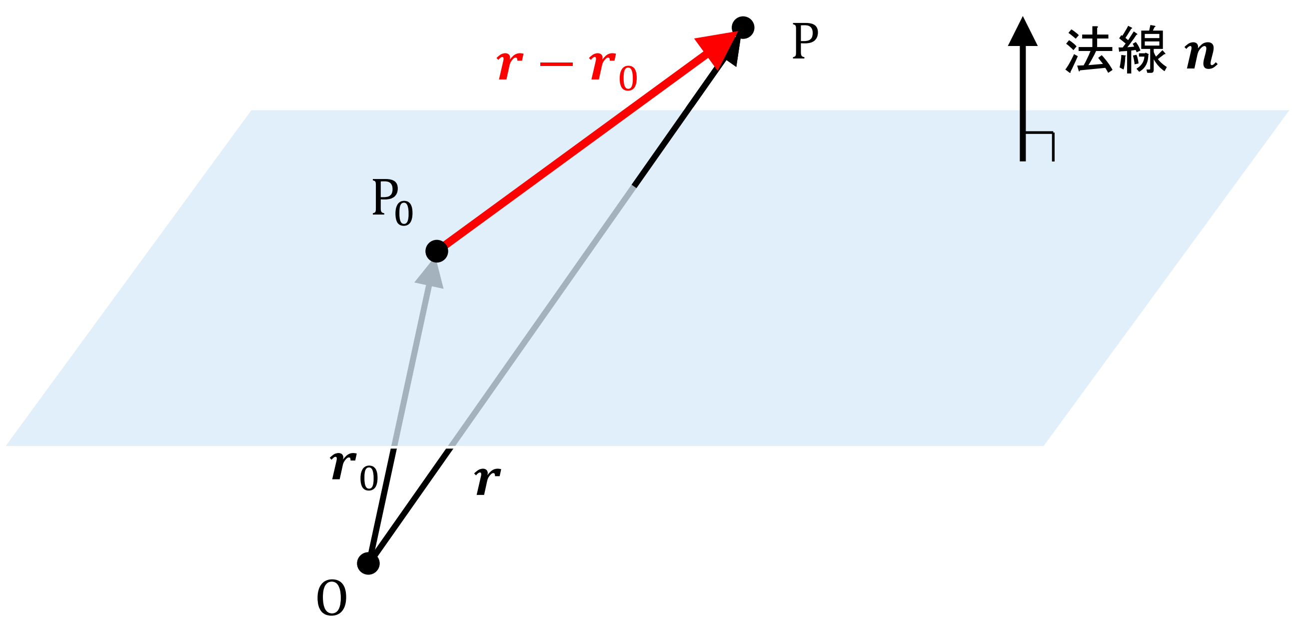
平面の表と裏

問　位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ の点 P_0 と法線 $\boldsymbol{n}$ で定義される平面がある. 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される点 P が表側にあるか裏側にあるかを判定する方法を述べよ.



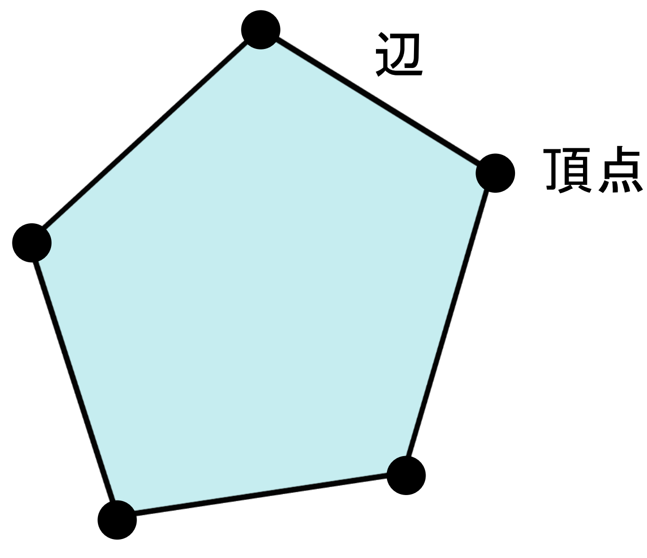
平面の表と裏

答　$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}>0$ ならば，P は表にある．
　　$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}<0$ ならば，P は裏にある．



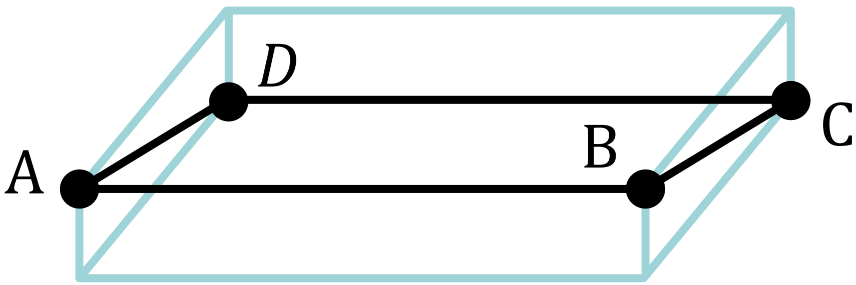
ポリゴン(多角形)の定義

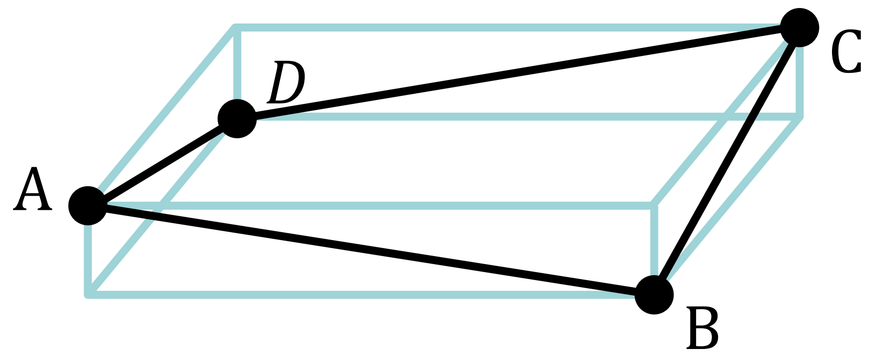
- 定義(ポリゴン):
  ポリゴンとは，3個以上の同一平面上にある点(頂点)を順序づけて線分(辺)で順に結んで，辺や点の交点・共有のない閉曲線を作ったものである.
  単純に点を結んでもポリゴンになるとは限らない.



ポリゴン(多角形)の定義

ポリゴンになる条件1
　すべての頂点が同一平面上にある





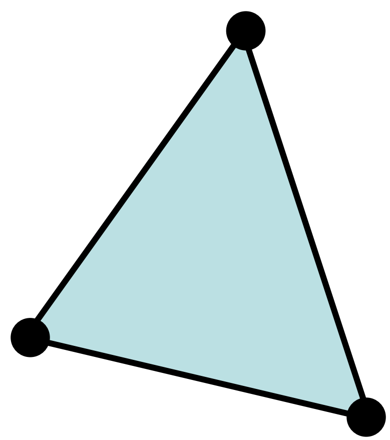
頂点 A, B, C, D を結んでできる閉曲線はポリゴンである.

頂点 A, B, C, D を結んでできる閉曲線はポリゴンではない.

ポリゴン（多角形）の定義

問　すべての頂点が必ず同一平面上にある図形（線分で結んでできる閉曲線）は何か.

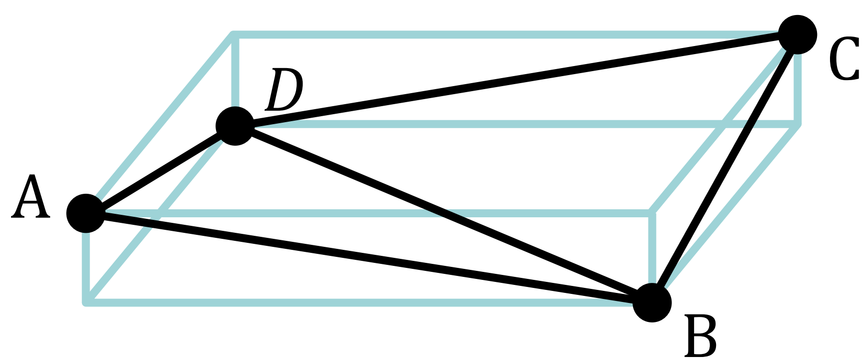
答　三角形



ポリゴン（多角形）の定義

問　4つの頂点が同一平面上に無いとする．ポリゴンにするにはどうすればよいか．

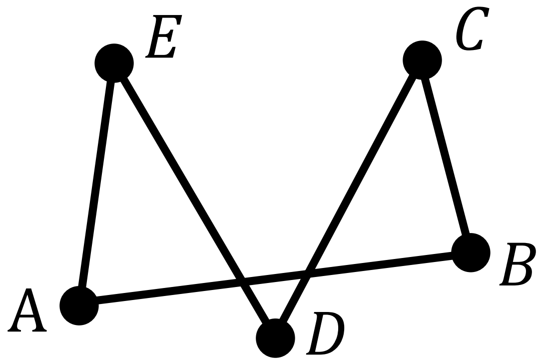
答　2つの三角形に分割する．



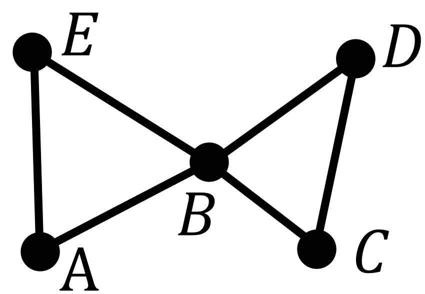
三角形 ABD と三角形 BCD

ポリゴン（多角形）の定義

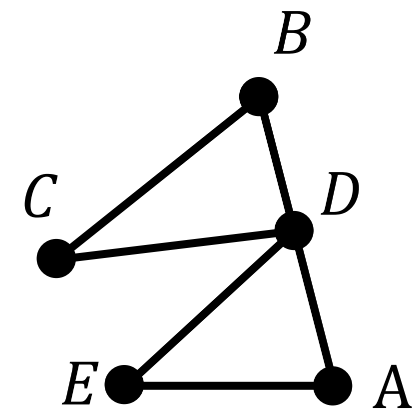
ポリゴンになる条件2
辺・点の交差や共有が無い



ABCDE
辺と辺の交差
（ポリゴンの条件を満たさない）



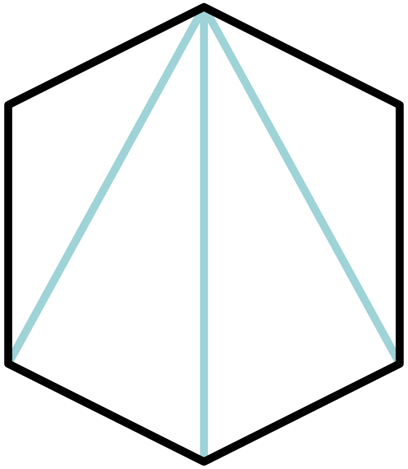
ABCDBE
点と点の交差
（ポリゴンの条件を満たさない）



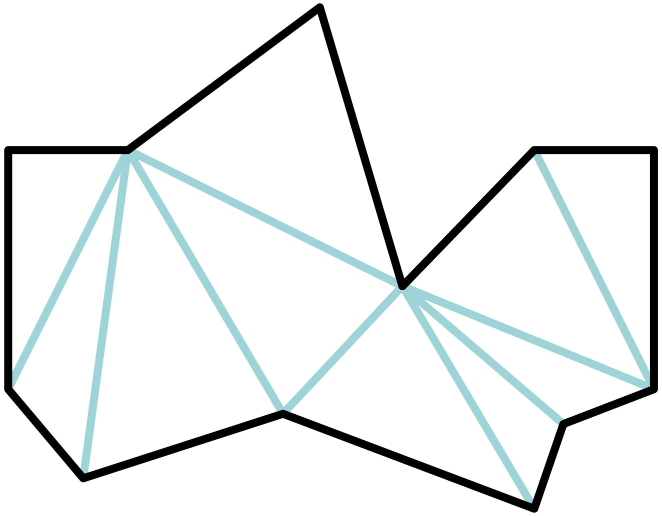
ABCDE
点と辺の共有
（ポリゴンの条件を満たさない）

三角形分割

定理（三角形分割）
　n 個の頂点からなるポリゴン（多角形）は, $n-2$ 個の三角形に分割できる.



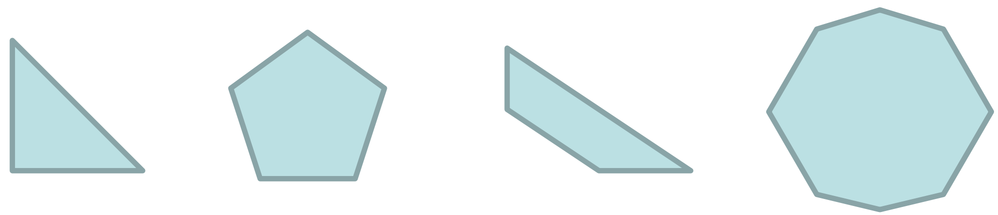
6角形
↓
4つの三角形に分割



12角形
↓
10個の三角形に分割

凸ポリゴンと凹ポリゴン

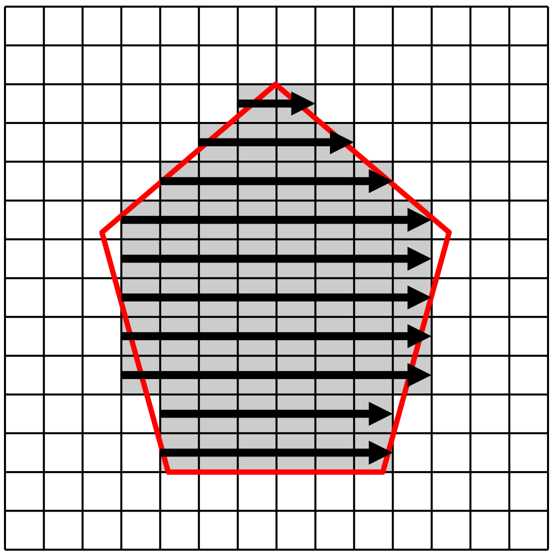
凸ポリゴン:
- すべての内角が 180 度より小さい
- 内部の任意の2点を結ぶ線分がポリゴンの内部を通る



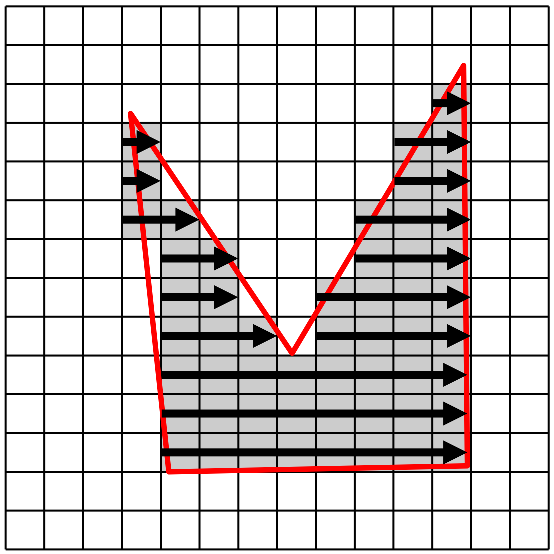
凹ポリゴン:
- 少なくとも一つの内角が 180 度より大きい
- 内部の2点を結ぶ線分がポリゴンをはみ出すことがある

凸ポリゴンと凹ポリゴン

ポリゴンの塗りつぶし処理



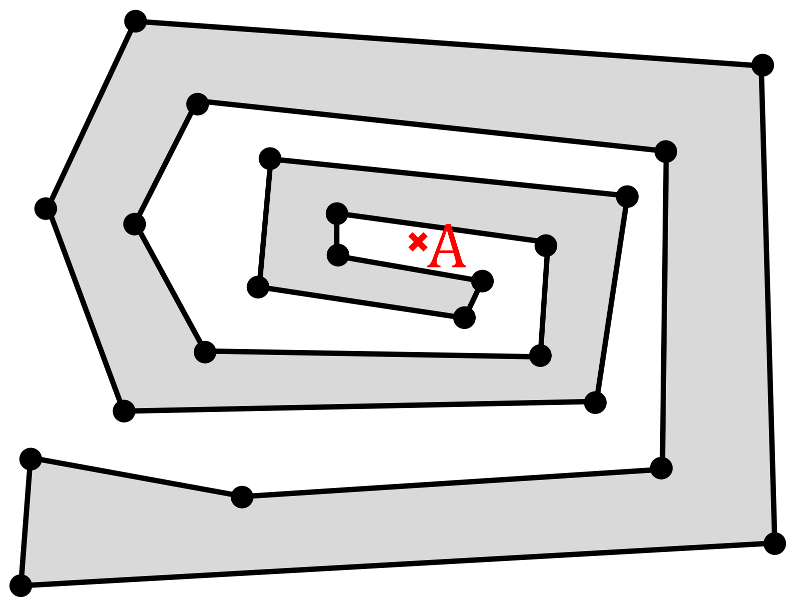
凸ポリゴン:
各列の塗りつぶしは
両端点の間を埋めればよい



凹ポリゴン:
各列の塗りつぶしは
複数の処理に分かれる

凸ポリゴンと凹ポリゴン

問　以下の多角形（頂点と順序付けて線分で結んだ図形）において，点 A が多角形の内部にあるか外部にあるかを判定したい．どのような方法が考えられるか．

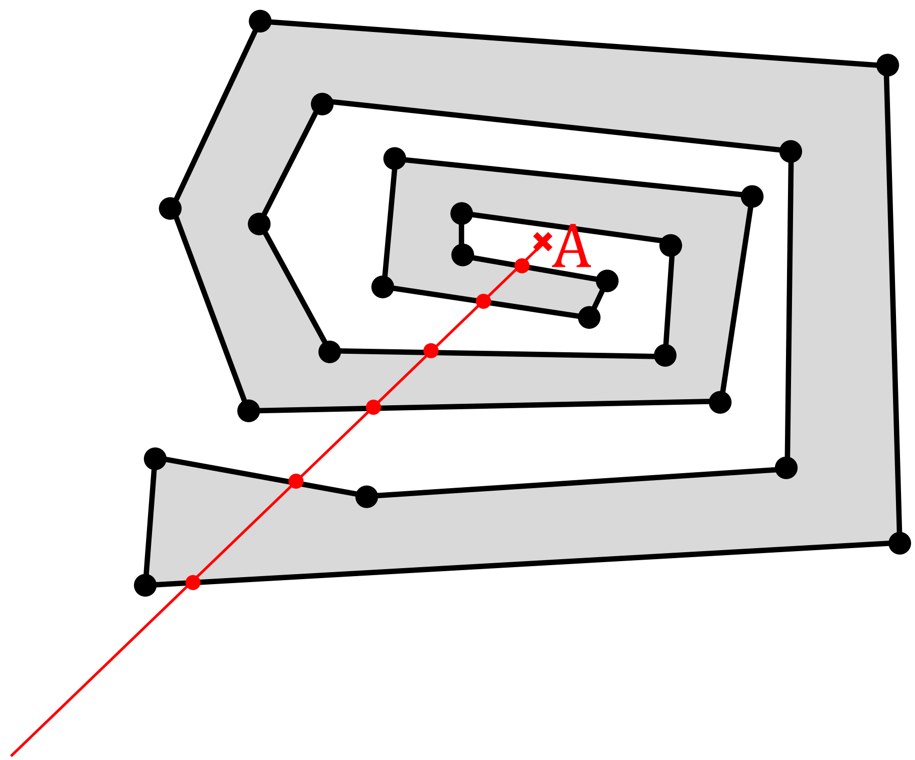


凸ポリゴンと凹ポリゴン

答　点 A から伸びる半直線が多角形と交差する回数をカウントする.

偶数回:外部

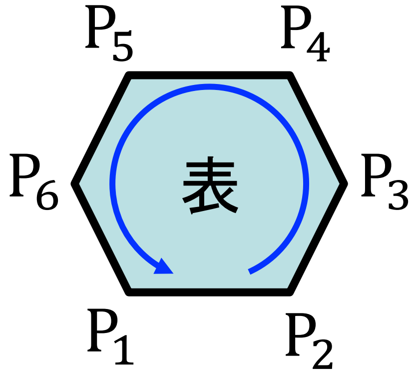
奇数回:内部



凸ポリゴンの性質

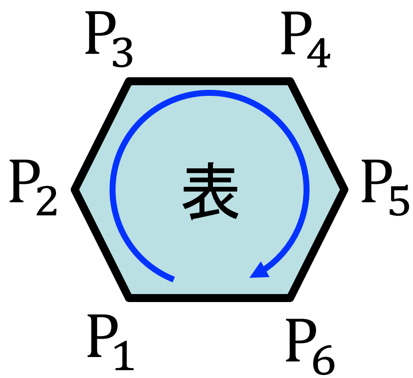
凸ポリゴンで成立する性質：左回りと右回り

- 頂点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$ を順に結んでできる凸ポリゴンを表側から見る．頂点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$ を順にたどるとき，以下のいずれかが成り立つ．
  - P_i から P_{i+1} に向かうとき，P_{i+2} が左側に見える．（反時計回り）



以降，反時計回りとする．

  - P_i から P_{i+1} に向かうとき，P_{i+2} が右側に見える．（時計回り）



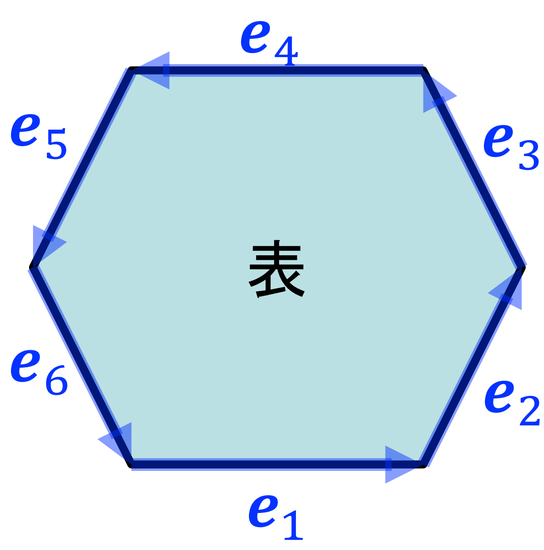
凸ポリゴンの性質

凸ポリゴンで成立する性質：法線ベクトルの計算

– n 個の頂点を順序付けて結んでできる凸ポリゴンの辺ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ とする. このポリゴンの単位法線は

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1}}{\|\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1}\|}$$

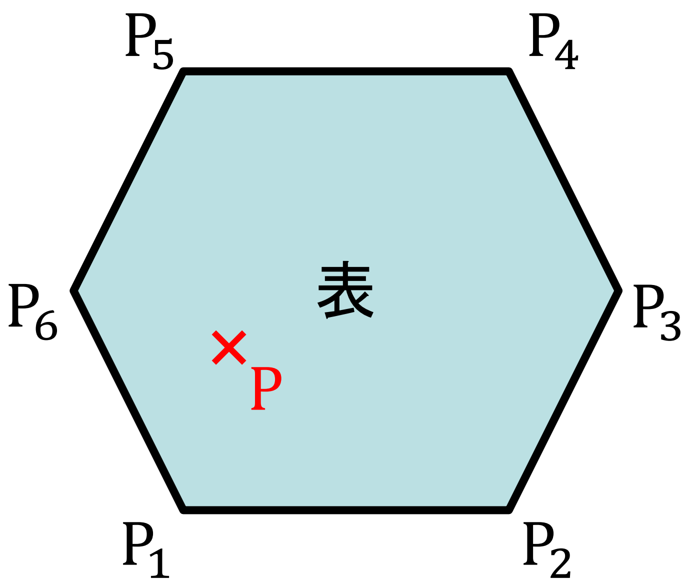
である.（i は $1, 2, \dots, n$ のどれを使ってもよい）



凸ポリゴンの性質

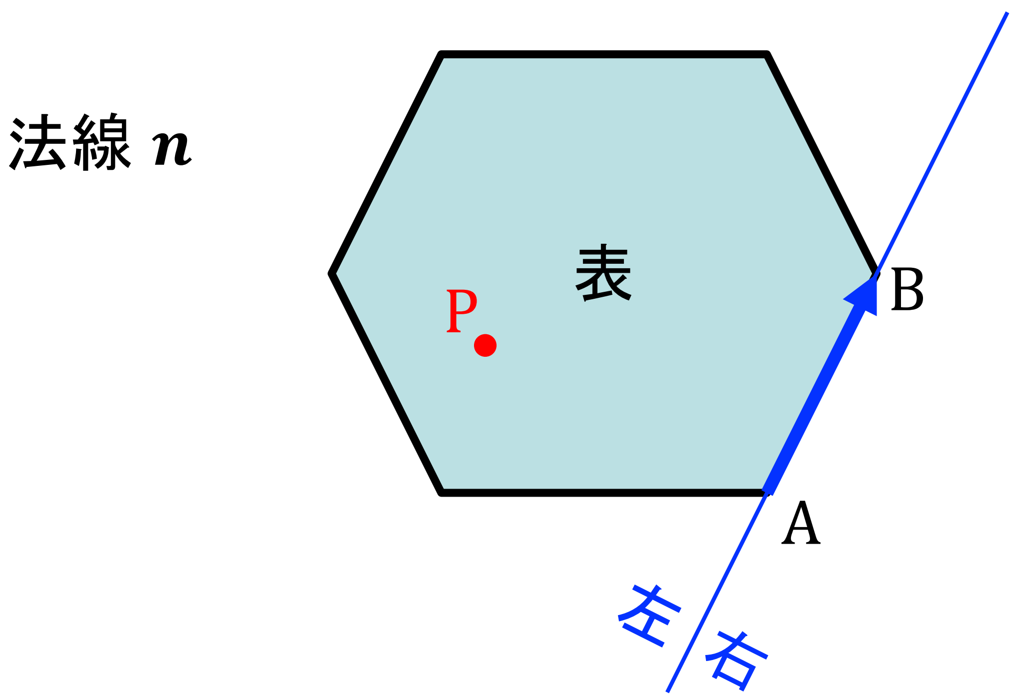
凸ポリゴンで成立する性質：内部の点

- 頂点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_1$ を順にたどるとき，内部にある点 P は常に左側に見える．



凸ポリゴンの性質

問　法線が $\boldsymbol{n}$ の凸ポリゴンの1辺 AB と，この平面上の点 P を考える．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から見て，点 P が右側にあるか左側にあるかを判定するにはどうすればよいか．



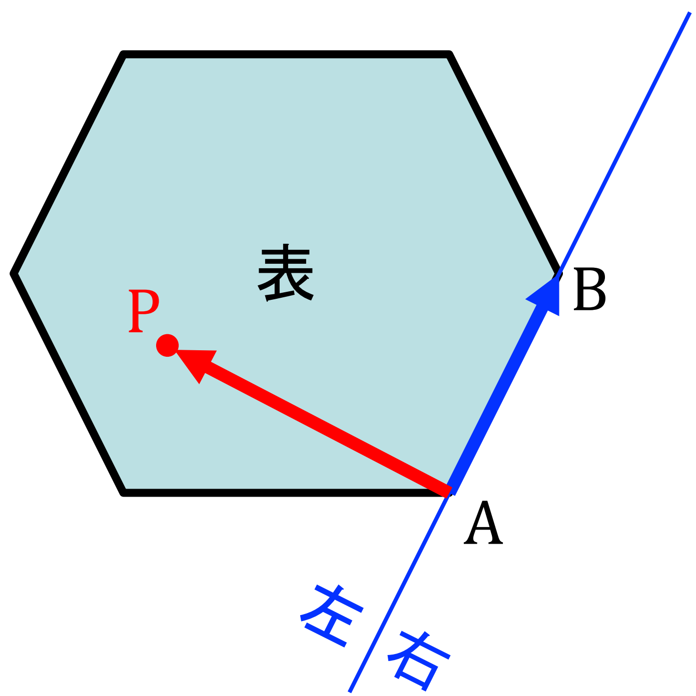
凸ポリゴンの性質

答　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と，法線 $\boldsymbol{n}$ の向きが等しければ左側にあり，向きが逆であれば右側にある．つまり，

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}) \cdot \boldsymbol{n} > 0$ ならば，点 P は左側

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}) \cdot \boldsymbol{n} < 0$ ならば，点 P は右側

法線 $\boldsymbol{n}$



凸ポリゴンの性質

問 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(1,1,-1)$, $\mathrm{C}(0,1,0)$, $\mathrm{D}(0,0,1)$ を頂点とする凸ポリゴン ABCD を考える.

(1) 単位法線 $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(2) この凸ポリゴンを共有する平面の方程式を求めよ.

凸ポリゴンの性質

答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-1,0,1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (1,1,1)$

$\therefore \boldsymbol{n} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(2) $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$ に

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{n} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を代入

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (x-1, y, z) = 0$

$x + y + z = 1$