数学演習2 第3回

2022 10/11

微分積分

分数式の積分に直せる積分

例 $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ 　　$R(x,y)$ は x, y の分数式

これは $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと t の分数式の積分になる。

このとき $\frac{dx}{dt}\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = 1$, $\frac{dx}{dt} = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{1+t^2}$

また $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

練4.1(B)

2, 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\frac{1}{\sin x + 1}$

解) $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと 　$\frac{dx}{dt} = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{1+t^2}$

$\sin x = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

これより $\int \frac{1}{\sin x + 1}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{2t+1+t^2}dt$

$= \int \frac{2}{(t+1)^2}dt = \frac{-2}{t+1} + C = \frac{-2}{\tan\frac{x}{2} + 1} + C$ □

線形代数

ベクトルの1次独立, 1次従属

K上のベクトル空間 V の ベクトル $u_1, \cdots, u_r$ に対し

$c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r$ 　$(c_1, \cdots, c_r \in K)$

と表されるベクトルを $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合という。

Vのベクトル $u_1, \cdots, u_r$ に対し関係式

$$c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r = 0$$

が成立つとき $u_1, \cdots, u_r$ の1次関係という。とくに $c_1 = \cdots = c_r = 0$ のとき自明な1次関係という。

$u_1, \cdots, u_r \in V$ に対し $u_1, \cdots, u_r$ の満たす1次関係が自明な1次関係に限るとき $u_1, \cdots, u_r$ は1次独立であるという。

$u_1, \cdots, u_r$ が1次独立でないとき1次従属であるという。

例1. $\mathbb{R}^n$の基本ベクトル $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は1次独立である。

実際 $c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n = 0$ とすると $c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ より $c_1 = \cdots = c_n = 0$

故に $e_1, \cdots, e_n$ の満たす1次関係は自明なものに限る。

例2. $\mathbb{R}[x]_n$ において $1, x, \cdots, x^n$ は1次独立である。

実際 $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$ とすると

$x = 0$ とおいて $c_0 = 0$ よって $c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$ 両辺を微分して

$c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1} = 0$ $x = 0$ とおくと $c_1 = 0$

よってまた $c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$ 両辺を2回微分して $2c_2 + 6c_3 x + \cdots + n(n-1) \times c_n x^{n-2} = 0$ $x = 0$ を代入して $c_2 = 0$ これをくり返して $c_0 = 0, \cdots, c_n = 0$

故に1次独立である。

問4.2

1. 次のベクトルは1次独立か1次従属か調べよ。

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

解 (1) $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

とすると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

これを解くと

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ となり自明な解に限るから1次独立である。□

(2) $c_1\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}5\\4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

とすると

$$\begin{bmatrix}3&2&5\\2&1&4\\1&3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

これを解くと

$$\begin{bmatrix}3&2&5\\2&1&4\\1&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&2&5\\0&-1&2\\0&7&-14\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&9\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\therefore\begin{cases}c_1+3c_3=0\\c_2-2c_3=0\end{cases}$$

$c_3=t$ とおくと $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}$ よって自明でない解が存在するから1次従属

である。□