

デジタル信号処理 (K3)

第11回 線形時不変システム

2023年6月20日

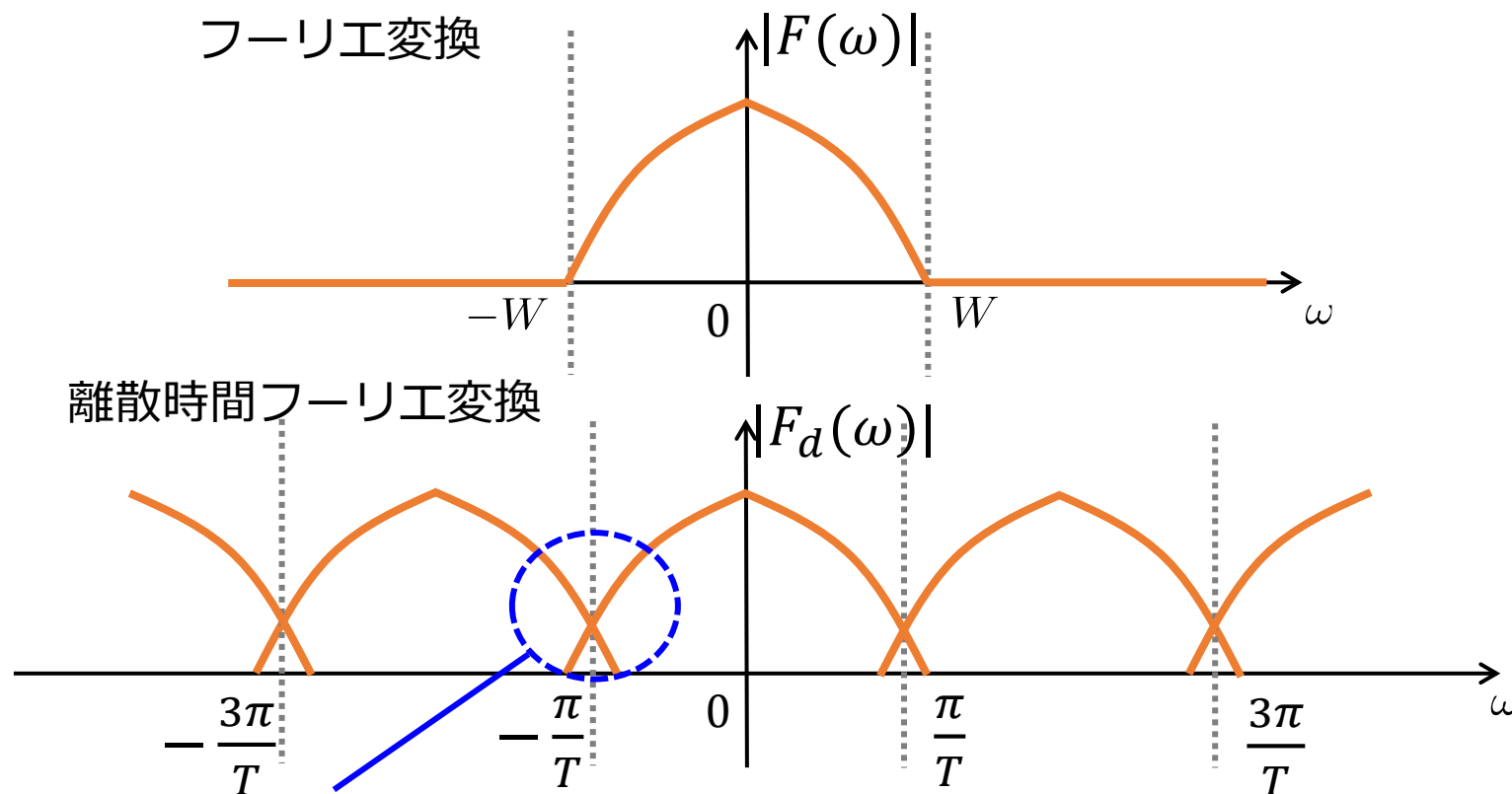
立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumeai.ac.jp

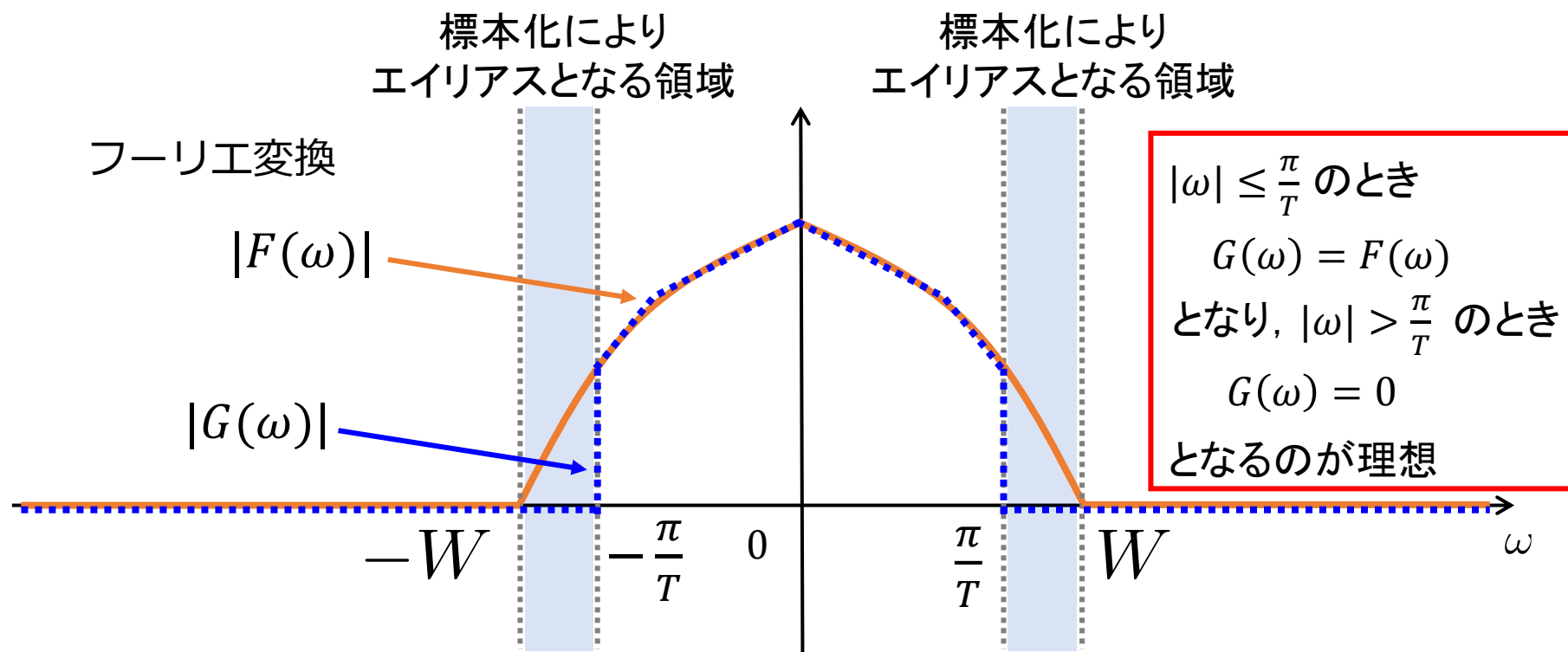
復習

ナイキスト間隔 よりも長い間隔でサンプリングすると、記録されたデジタル信号には、本来含まれていないはずの周波数成分が出現する。この現象を **エイリアス** と呼ぶ。



復習

エイリアスが発生しないようにするためには、サンプリングする前に、**周波数の絶対値が $\frac{\pi}{T}$ より大きい成分を0**にしておくのが理想である。そのような理想的な**ローパスフィルタ**は、**sinc関数を畳み込む**ことで実現できる。

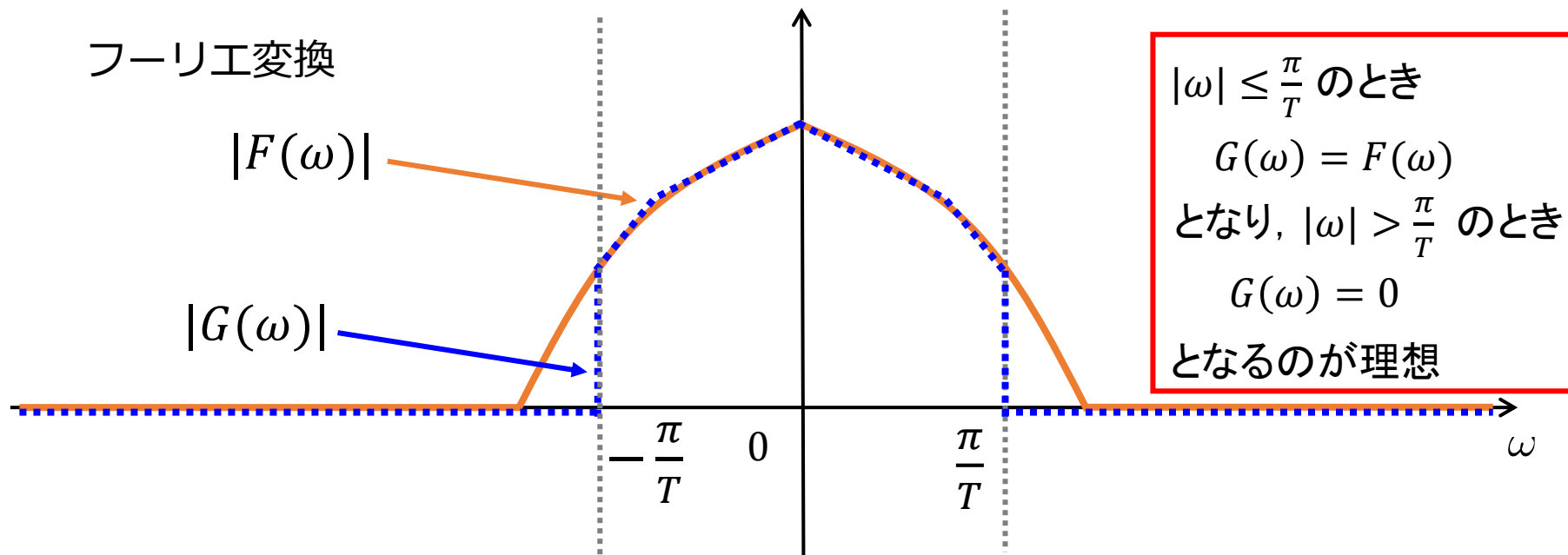


今回の概要

- 今までの講義では、**アナログ信号** $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を勉強し、その後 $f(t)$ が帯域制限信号であるならば、ナイキスト間隔以下で標本化された**デジタル信号** $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ から元のアナログ信号 $f(t)$ の情報が完全に復元できることを勉強した (離散時間フーリエ変換 $F_d(\omega)$ や標本化定理) .
- 前回の講義では、**(アナログ)理想ローパスフィルタ** は sinc 関数との**畳み込み**になることを勉強した.
- 今回の講義では、**デジタル信号処理による理想ローパスフィルタの実現法**を勉強し、さらに、一般の**畳み込み**について考えてみます！

(復習) 理想ローパスフィルタ


$\pm \frac{\pi}{T}$ 以内の(角)周波数成分は保存し, それ以外の(角)周波数成分を 0 にする.



$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(復習) アナログ理想ローパスフィルタ = sinc 関数

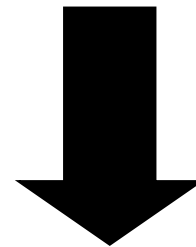
$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

このような $g(t)$ が作れるか？  できる！ 実は第7回目の講義で既に勉強していた！！

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 1/2, & |\omega| = \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad \text{と定義すれば, } G(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad \text{である.}$$



逆フーリエ変換



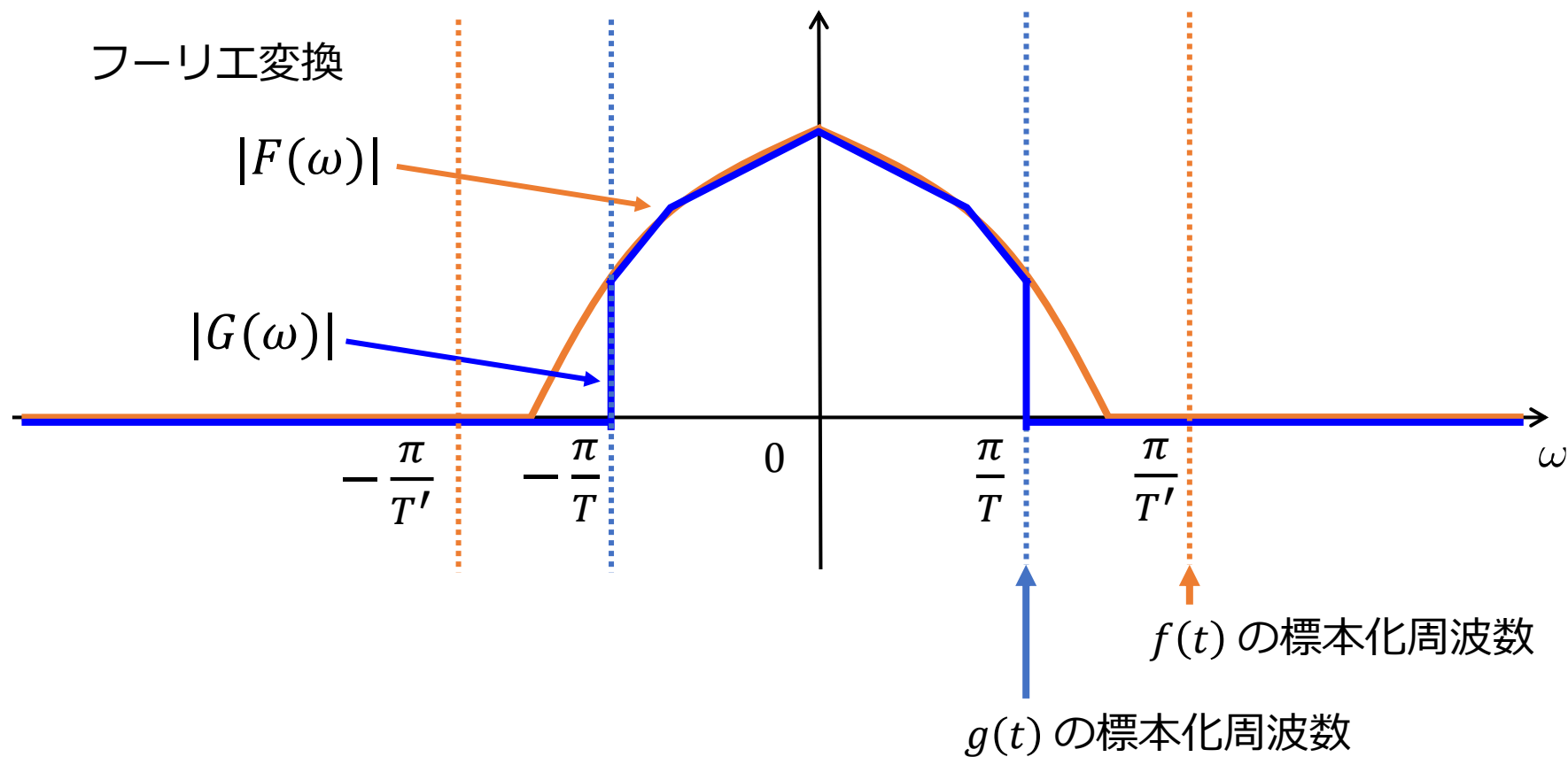
周波数領域の乗算
||
時間領域の畳み込み

$$h(t) = \frac{1}{T} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1/T, & t = 0 \end{cases}$$

$$g(t) = (f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

前半の内容： デジタルローパスフィルタ（再標本化）

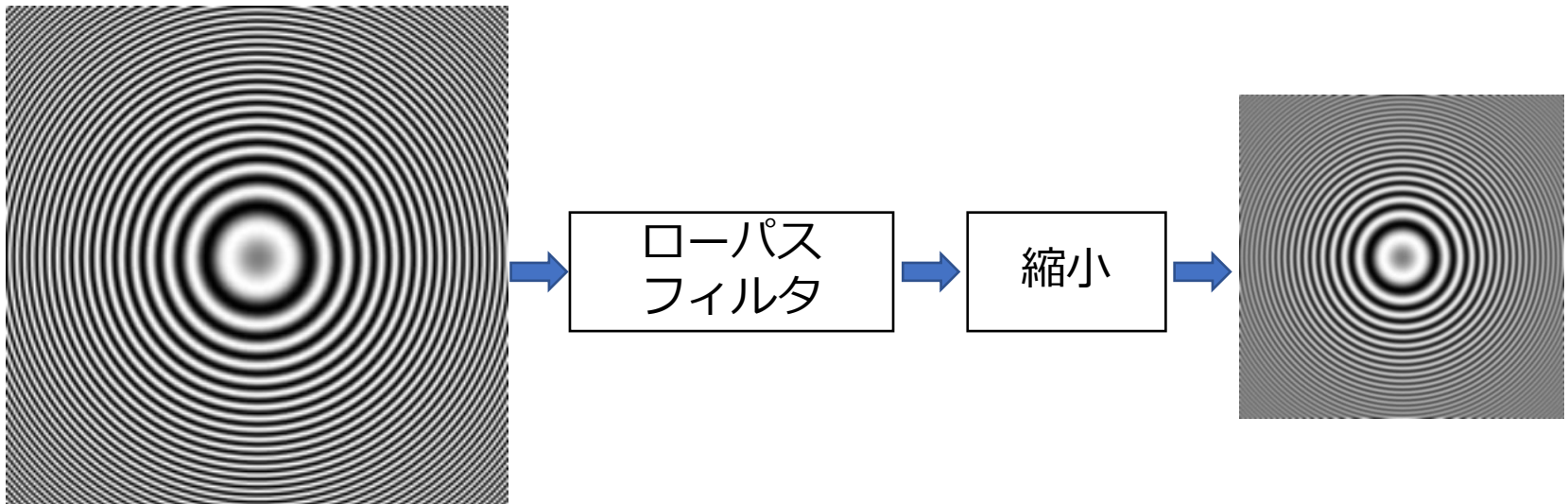
デジタル信号を、より粗い標本化間隔（低い周波数）で標本化しなおす



使うデータは、デジタル化された $f[k]$ のみ（元のアナログ信号は使わない）

(デジタル) ローパスフィルタはいつ使う？

- 低周波だけが欲しい
 - 低音だけを聞く / 画像をぼかしたい / ノイズを押さえない etc.
- サンプリング周波数が相対的に低くなる時
 - 倍速再生にする
 - 画像を縮小する



デジタル信号処理による理想ローパスフィルタ 1/4

$$g(t) = (f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$h(t) = \frac{1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1/T, & t = 0 \end{cases}$$



理想ローパスフィルタは sinc 関数との畳み込みであり, 積分計算(アナログ信号処理)が必要

$g(t)$ を $f(t)$ の標本値 $\{f(k'T')\}_{k'=-\infty}^{\infty}$ のみから計算(デジタル信号処理)できないだろうか?



これもできる！！

ただし, $f(t)$ はナイキスト間隔以下の間隔 $T' \leq \frac{\pi}{W}$ で標本化されている必要がある!
このとき, $f(t)$ のフーリエ変換と離散時間フーリエ変換は以下の関係になる.

$$F(\omega) = F_d(\omega) = T' \sum_{k'=-\infty}^{\infty} f(k'T') e^{-ik'T'\omega} \quad \left(\omega \in \left[-\frac{\pi}{T'}, \frac{\pi}{T'}\right] \right)$$

デジタル信号処理による理想ローパスフィルタ 2/4

$$F(\omega) = F_d(\omega) = T' \sum_{k'=-\infty}^{\infty} f(k'T') e^{-ik'T'\omega} \quad \left(\omega \in \left[-\frac{\pi}{T'}, \frac{\pi}{T'}\right] \right)$$

細かくサンプリングしたデータ

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

($\frac{\pi}{T} \leq \frac{\pi}{T'}$ であることに注意)

$$= \frac{T'}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} f(k'T') e^{-ik'T'\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} T' f(k'T') \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{i\omega(t-k'T')} d\omega$$

デジタル信号処理による理想ローパスフィルタ 3/4

$$g(t) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} T' f(k'T') \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{i\omega(t-k'T')} d\omega$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} T' f(k'T') \frac{1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - k'T'}{T}\right)$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} f(k'T') \frac{T'}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - k'T'}{T}\right)$$

デジタル信号処理による理想ローパスフィルタ 4/4

$$g(t) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} f(k'T') \frac{T'}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - k'T'}{T}\right)$$

$g(t)$ を間隔 T で標本化 $\{g(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ した値は,

$$g(kT) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} f(k'T') \frac{T'}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{kT - k'T'}{T}\right)$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} f(k'T') l(kT - k'T')$$

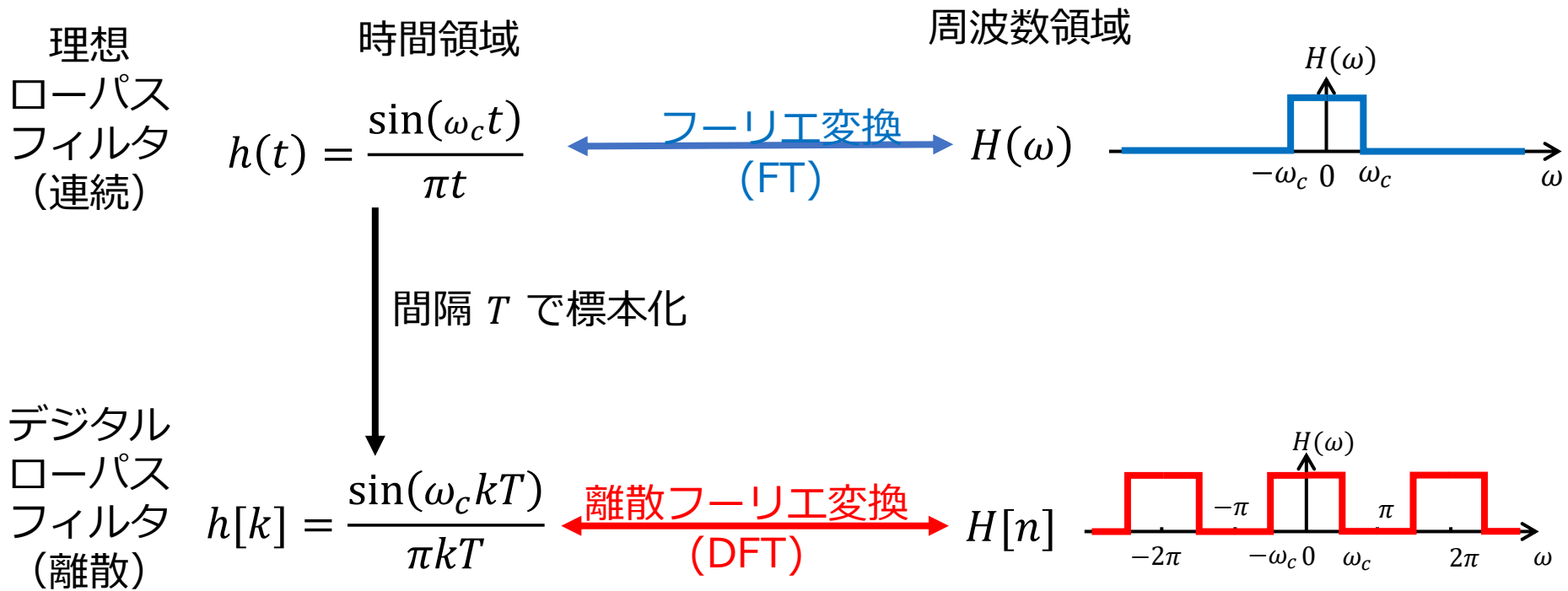
$$l(t) = \frac{T'}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

離散時間信号の畳み込み(デジタル信号処理)

デジタル信号処理で理想ローパスフィルタを実現できた！

デジタルローパスフィルタ

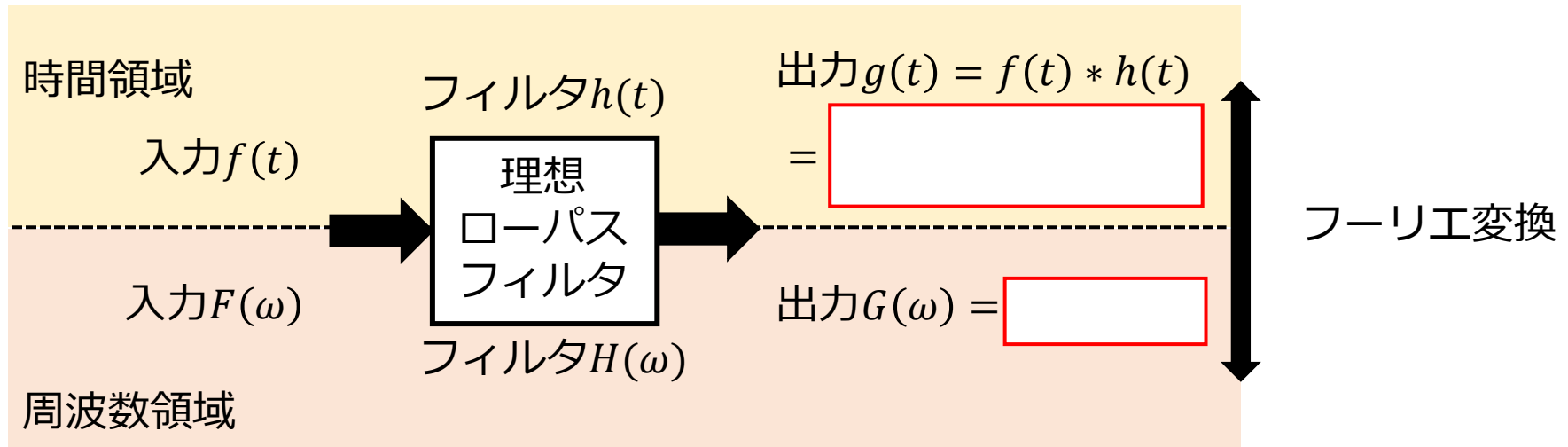
理想ローパスフィルタの時間領域 $h(t)$ は連続時間信号であるので、
そのままデジタル信号処理で利用できない
→ 離散化する必要がある！



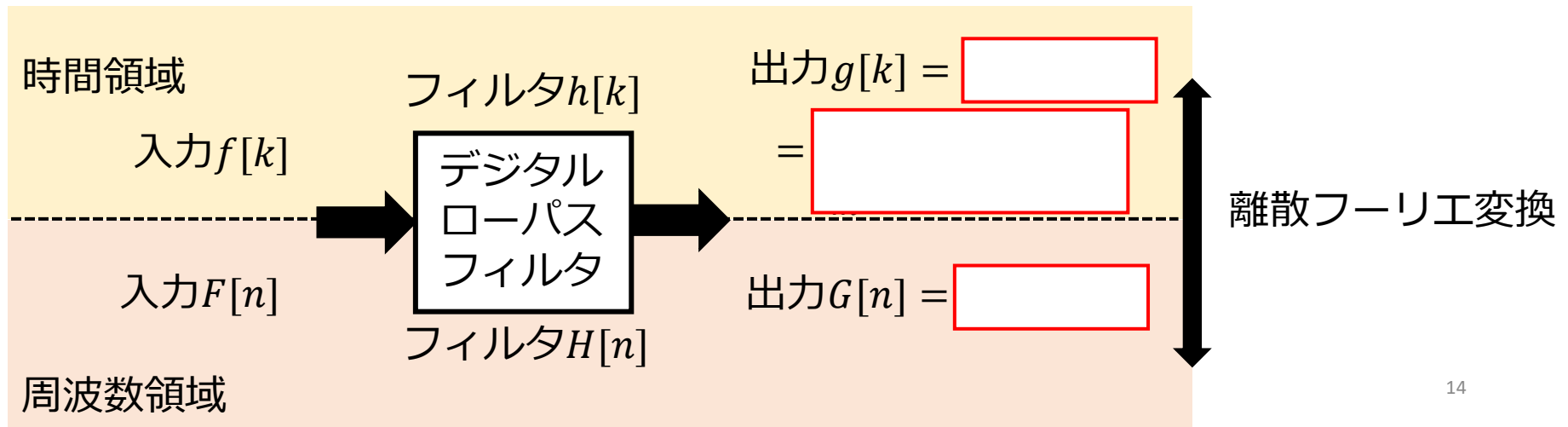
※比較のために, $\omega_n = \frac{2\pi n}{NT}$ で
 $H[n]$ を $H(\omega)$ の形に変換

デジタルローパスフィルタ

理想ローパスフィルタ



デジタルローパスフィルタ



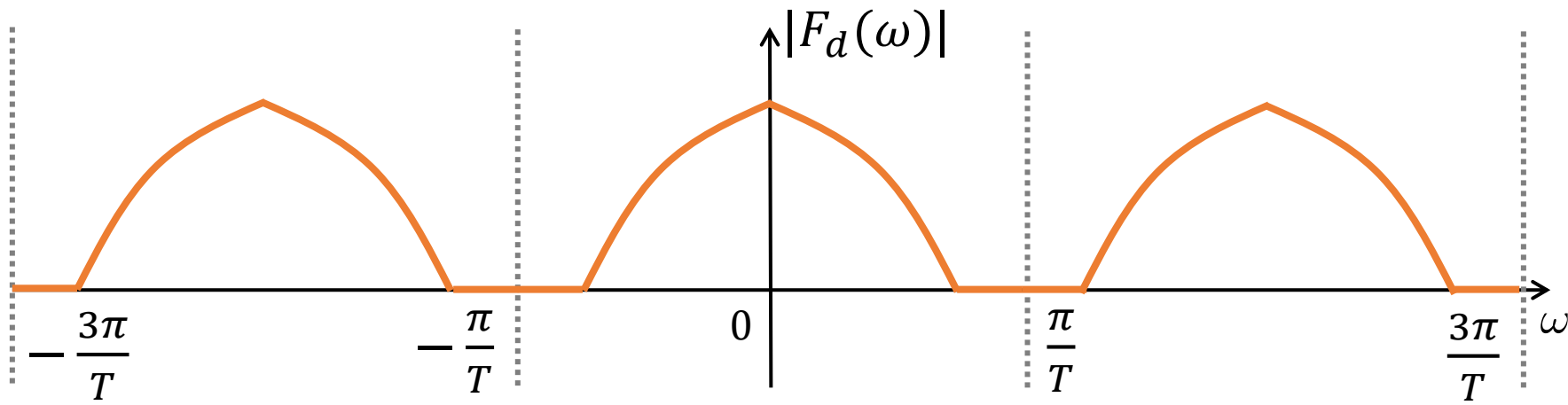
理解度確認テストその1

離散システム

(復習) 離散時間フーリエ変換 1/2

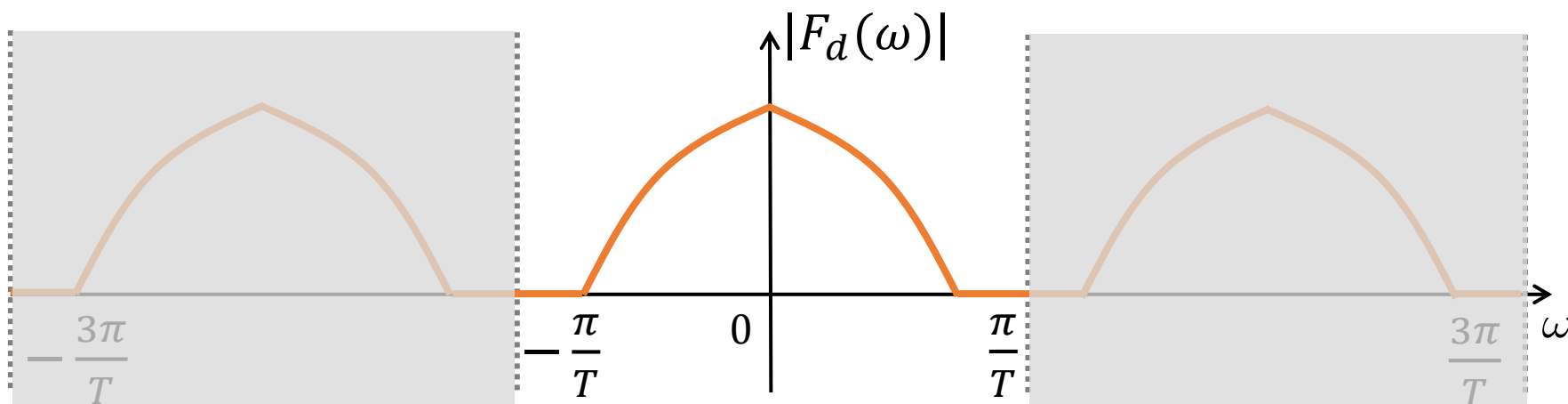
- これ以降は, $f(t)$ を間隔 T で標本化したデジタル信号 $f[k] = f(kT)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) のみを考えることにして, これ以降, $f(t)$ と $f[k]$ の対応関係は考えない. $f[k]$ にはエイリアスがある場合もあるが, 今回は特に問題視しない.

離散時間フーリエ変換
$$F_d(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-ikT\omega}$$



(復習) 離散時間フーリエ変換 2/2

離散時間フーリエ変換
$$F_d(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-ikT\omega}$$



$F_d(\omega)$ は周期 $\frac{2\pi}{T}$ の周期関数であるため, $\omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$ の区間を考えれば十分である.

したがって, **これ以降は $\omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$ のみしか図に表示しない.**

線形時不変システム = 畳み込み 1/3

システム（あるいは「系」）… 信号処理の文脈では，何らかの入力信号に対して，何らかの出力信号を与える変換．数学用語では写像．

デジタル信号 $f[k]$ をあるシステムに入力し，周波数成分の大きさを所望の比率で変化させた，新しいデジタル信号 $g[k]$ を出力させたい

注：これ以降は $\{\cdot\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を省略する



線形時不変システム = 畳み込み 2/3

$\{f[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を入力して $\{g[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を出力するシステムを

$$S(f[k]) = g[k]$$

で表す. 以下の(i), (ii)を満たすとき, S を線形時不変システムと呼ぶ.

(i) 線形性 $S(\alpha f_1[k] + \beta f_2[k]) = \alpha S(f_1[k]) + \beta S(f_2[k])$

(α と β は任意の定数. $f_1[k]$ と $f_2[k]$ は任意のデジタル信号)

(ii) 時不変性 $S(f[k - \tau]) = g[k - \tau]$ (τ は任意の整数)

線形性は, 入力にたくさんの音が含まれていても, それぞれの音を独立に処理して, 足し合わせた結果と一致するということ. 時不変性は, 処理の方法は時刻には依存しないということ.

実は, 任意の線形時不変システムは畳み込みとして表現されることが数学的に証明できる(証明は割愛)

線形時不変システム = 畳み込み 3/3

$\{f[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を入力して $\{g[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を出力する線形時不変システムは

$$g[k] = (f * h)[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l] h[k - l]$$

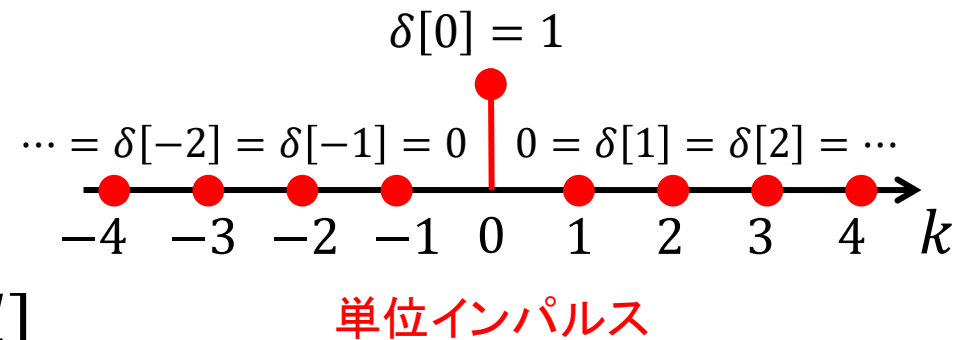
のように、デジタル信号 $f[k]$ と $h[k]$ の畳み込み $f * h$ として表現可能

$h[k]$ はインパルス応答と呼ばれ、
システムの性質を決定する数列となる

$h[k]$ をインパルス応答と呼ぶ理由

線形時不変システムに単位インパルス $\delta[k] = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$

を入力してみると.....



$$(\delta * h)[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[l] h[k-l]$$

$$\begin{aligned} &= \cdots + \underbrace{\delta[-2]}_0 h[k+2] + \underbrace{\delta[-1]}_0 h[k+1] \\ &\quad + \underbrace{\delta[0]}_1 h[k] + \underbrace{\delta[1]}_0 h[k-1] + \underbrace{\delta[2]}_0 h[k-2] + \cdots \end{aligned}$$

$$= h[k] \quad \Rightarrow h[k] \text{ は単位インパルスを入力したときの応答(出力)!!}$$

理解度確認テストその2

11週目の宿題内容

- 時間領域の畳み込み

デジタル信号 $f[k]$ は以下の式で定義される：

$$\begin{aligned} T &= 1 \\ \omega_1 &= 0.25\pi/T \\ \omega_2 &= 0.75\pi/T \end{aligned}$$

$$f[k] = \begin{cases} \sin(\omega_1 kT) + \sin(\omega_2 kT), & k = 0, 1, 2, \dots, 15 \\ 0, & \text{otherwise (その他)} \end{cases}$$

$\omega_1 < \omega_c < \omega_2$ から、信号 $f[k]$ にフィルタ $h[k]$ を適用することで、 ω_1 成分が保持、 ω_2 成分が抑圧されることが予想される。

この予想を検証するために、

まず、上記の定義で、入力信号 $f[k]$ の値を計算してください。

そして、入力信号 $f[k]$ とフィルタ $h[k]$ を畳み込むことで、出力信号

$$g[k] = f[k] * h[k]$$

の値を計算してください。

(2) 入力信号 $f[k]$ と出力信号 $g[k]$ を描画し、比較してください。

(ヒント) デジタル信号の畳み込み

連続信号の畳み込みは積分演算 $g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$

↓
離散信号の畳み込みは総和演算 $g[k] = f[k] * h[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] h[k - m]$

→ 整数 m の値が無限個あるが、実際にはどう計算するか？

実際の場合、 $f[k]$ と $h[k]$ の k の範囲によって、 m の範囲が定まる

例：入力信号 $f[k]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) とフィルタ $h[k]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 2L$) を畳み込む場合

$$g[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] h[-m] = \dots + f[-1] h[1] + f[0] h[0] + f[1] h[-1] + \dots = f[0] h[0]$$

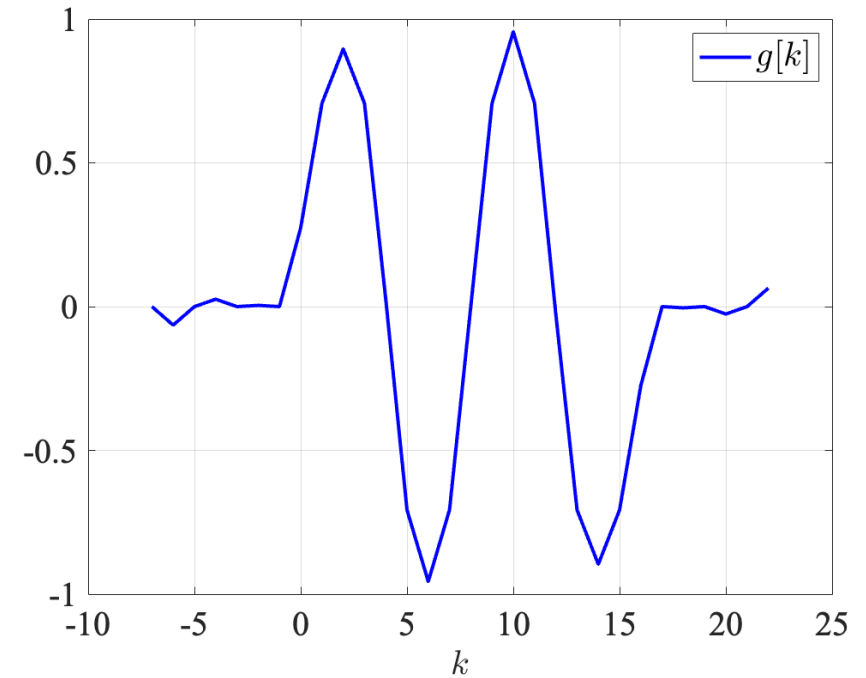
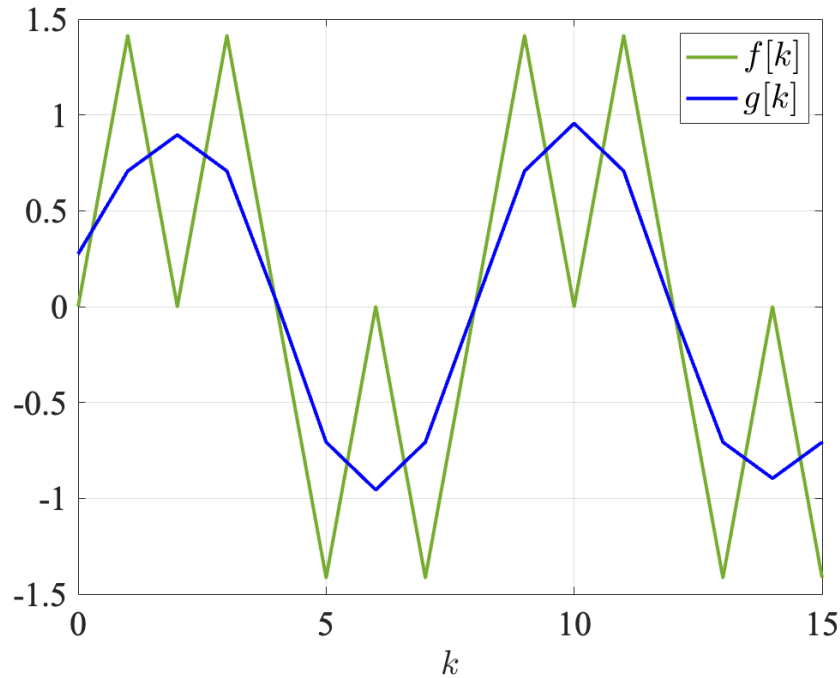
$$g[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] h[1 - m] = \dots + f[-1] h[2] + f[0] h[1] + f[1] h[0] + f[2] h[-1] + \dots$$

$$g[L] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] h[L - m] = \dots + f[-1] h[L + 1] + f[0] h[L] + f[1] h[L - 1] + \dots \\ + f[L - 1] h[1] + f[L] h[0] + f[L + 1] h[-1] + \dots$$

赤い部分は未定義 → 0として扱う → 青い部分のみを足し合わせることに！

結果例

(2) 入力信号 $f[k]$ と出力信号 $g[k]$ を描画し、比較してください。



※ $f[k]$ と $g[k]$ を比較すると、 $g[k]$ の方が滑らかであることを確認できます。

比較しやすいよう、左の図には部分表示しました。
計算できる全ての $g[k]$ を右の図に表示しました。