デジタル信号処理（K3）
第2回 フーリエ級数の実表現

2022年4月18日

立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

第2回の内容

- 信号は、数式で表現する！
  - 三角関数をつかう
- 任意の信号は、三角関数の和で表現できる（フーリエ級数）
  - 周波数分解ともいう

周波数分解の応用分野

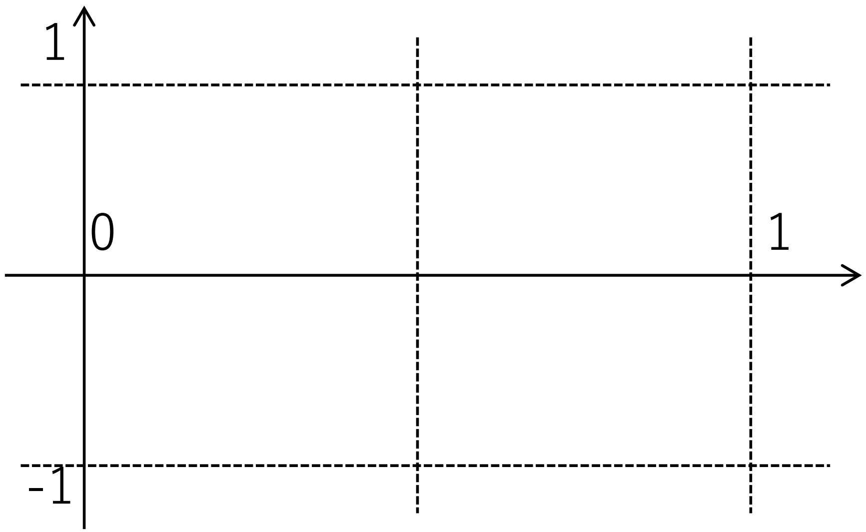
- 音響処理全般
- 画像処理全般 (cf. 画像情報処理１)
- CT / MRI 等の断層撮影
- 通信（セルラー / WiFi / TV / 光ファイバ / 同軸通信 ）
- 地震解析
- 工業（車 / 精密機器 / レーダー）
- 光計測 (スペクトル解析 / 光コム / レーザー)

まずは皆さんに
三角関数の記憶を
呼び起こしてもらいます！

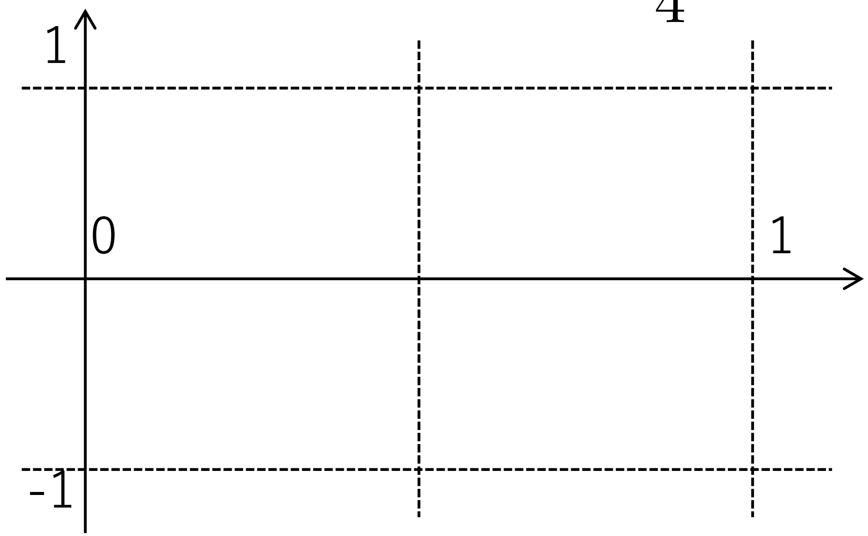
確認問題1

- 以下の信号のグラフを描け

$$\sin(2\pi t), \sin(4\pi t), \sin(6\pi t)$$

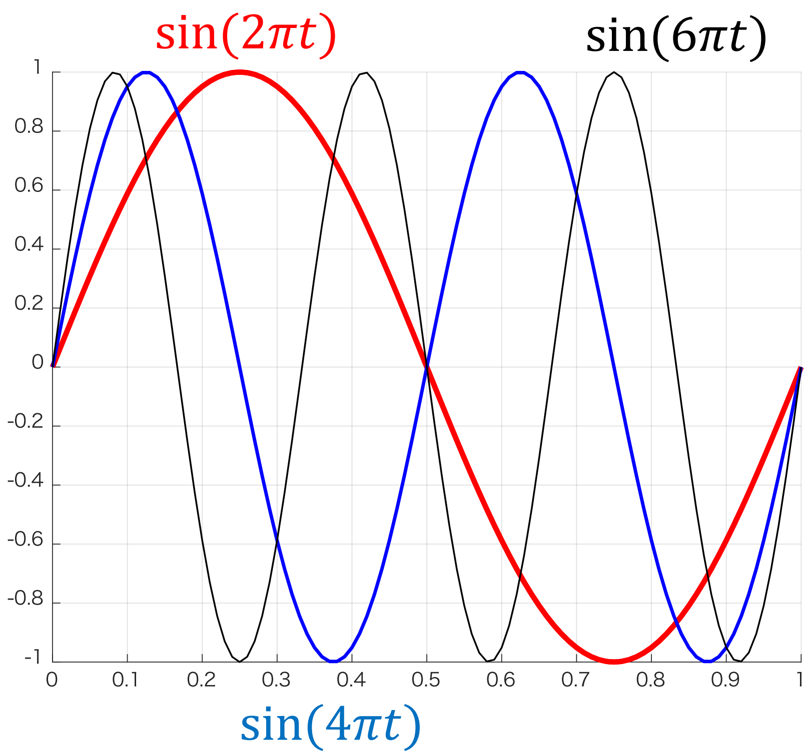


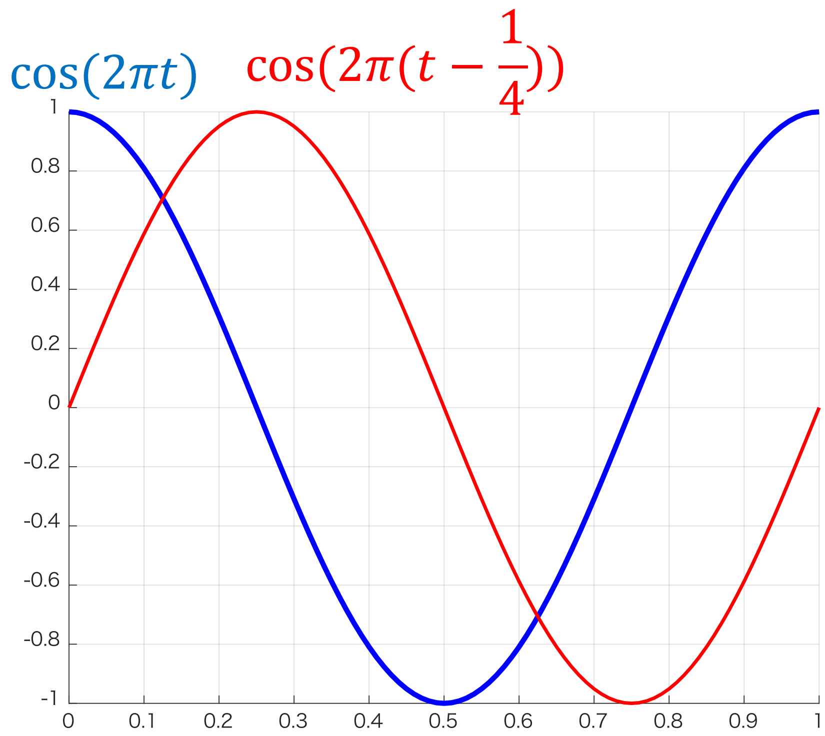
$$\cos(2\pi t), \cos(2\pi(t - \frac{1}{4}))$$



確認問題1【解答】

- 以下の信号のグラフを描け





ポイント：係数が変わると周期が変わる

ポイント：変数tからの引き算で平行移動
しかも、左図と右図の2本の赤線は一致。

確認問題2

- 加法定理，倍角の公式，半角の公式を示せ：

$$\sin(\alpha \pm \beta) =$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) =$$

$$\sin(2\alpha) =$$

$$\cos(2\alpha) =$$

$$\sin^2(\alpha) =$$

$$\cos^2(\alpha) =$$

確認問題2【解答】

- 加法定理，倍角の公式，半角の公式を示せ：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\sin^2(\alpha) = (1 - \cos(2\alpha))/2$$

$$\cos^2(\alpha) = (1 + \cos(2\alpha))/2$$

確認問題3

- 以下の積を和で表現せよ：

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) =$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) =$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) =$$

確認問題3【解答】

- 以下の積を和で表現せよ：

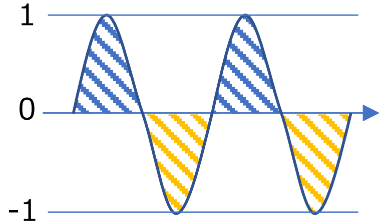
$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

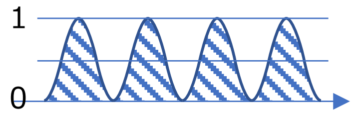
確認問題4

(a) $\int_0^1 \sin(4\pi t)dt =$



(b) $\int_0^1 \cos(2\pi t)\, dt =$

(c) $\int_0^1 \sin^2(4\pi t)\, dt =$



(d) $\int_0^1 \cos^2(2\pi t)\, dt =$

(e) $\int_0^1 \sin(2\pi t)\sin(4\pi t)\, dt =$

(f) $\int_0^1 \cos(2\pi t)\cos(4\pi t)\, dt =$

(g) $\int_0^1 \sin(2\pi t)\cos(4\pi t)\, dt =$

確認問題4　【解答】

(a) $\int_0^1 \sin(4\pi t)dt = 0$

(b) $\int_0^1 \cos(2\pi t)\,dt = 0$

(c) $\int_0^1 \sin^2(4\pi t)\,dt = 1/2$

(d) $\int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,dt = 1/2$

(e) $\int_0^1 \sin(2\pi t)\sin(4\pi t)\,dt = 0$

(f) $\int_0^1 \cos(2\pi t)\cos(4\pi t)\,dt = 0$

(g) $\int_0^1 \sin(2\pi t)\cos(4\pi t)\,dt = 0$

- (a), (b) は問題1のグラフを見れば、x軸と曲線で囲まれた領域の面積が正の部分と負の部分で等しいことから理解できます。
- (c), (d) は確認問題2の「半角の公式」で変形してから積分すれば、cosが消えて定数1/2のみの積分になります。
- (e), (f), (g) は確認問題3の「積和公式」を使えば (a), (b) に帰着されます。

確認問題4の一般化

自然数 k, l に対して以下の等式が成立する：

(a) $\int_0^1 \sin(2k\pi t)dt = 0$

(b) $\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,dt = 0$

(c) $\int_0^1 \sin^2(2k\pi t)\,dt = 1/2$

(d) $\int_0^1 \cos^2(2k\pi t)\,dt = 1/2$

(e) $\int_0^1 \sin(2k\pi t)\sin(2l\pi t)\,dt = 0$

(f) $\int_0^1 \cos(2k\pi t)\cos(2l\pi t)\,dt = 0$

(g) $\int_0^1 \sin(2k\pi t)\cos(2l\pi t)\,dt = 0$

- ただし、(e), (f) においては $l \neq k$ です。
- $l = k$ の場合、 (e), (f)の左辺はそれぞれ(c),(d)になります。
- 等式 (e), (f), (g) は「三角関数の直交性」と呼ばれます。
- なお、(a)は(g)において、(b)は(f)において$l = 0$とおけば導出されます。

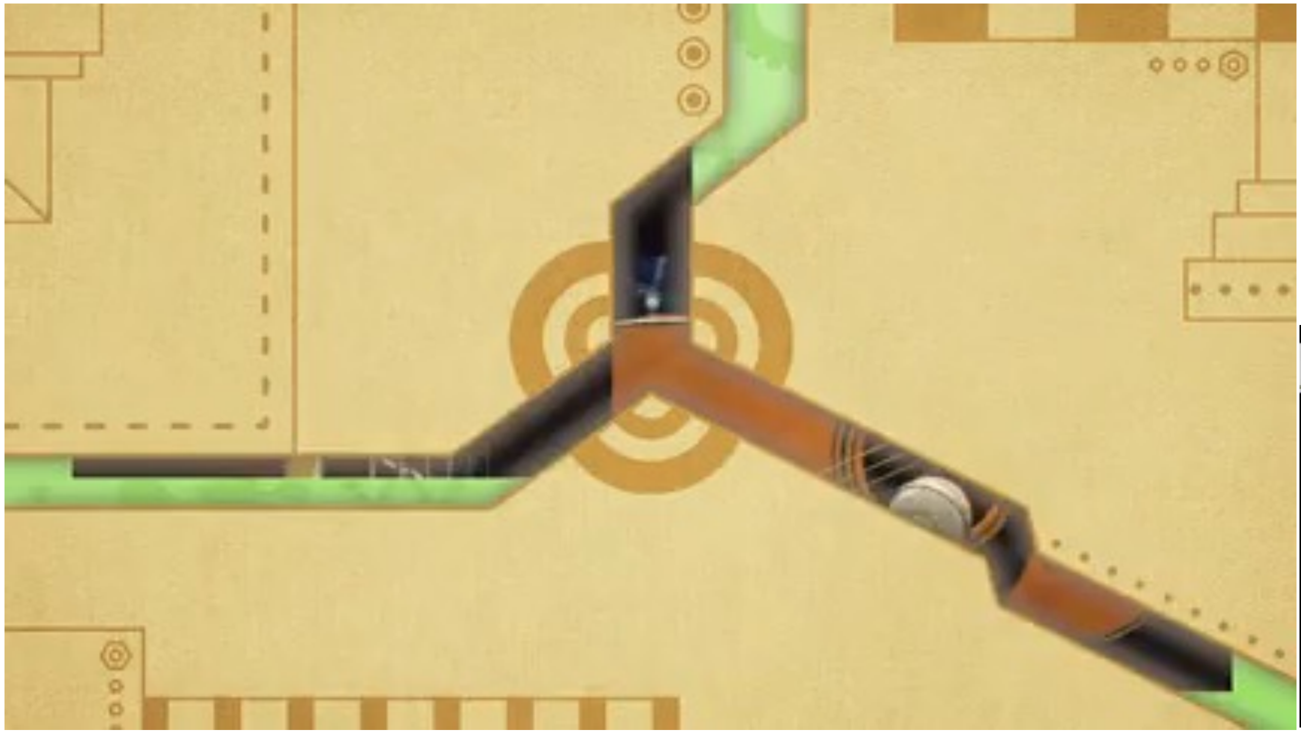
では、信号の表現に三角関数を
なぜ使うのか?

身近な音源である
弦の振動を例に話を始めます。

弦の振動1

- 下記URLの動画「弦の振動のしくみ（倍音・倍振動）」の10分38秒前後を見てください。

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022150048_00000#in=630&out=683



10分38秒頃の画面

弦の振動2

- 下記URLの動画「弦の振動のしくみ（倍音・倍振動）」の10分38秒前後を見てください。

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022150048_00000#in=630&out=683

- 弦の振動には基本振動だけでなく、いくつもの倍音成分が同時に含まれていることがわかります。
- チャプター5を全部みてもらってもとても参考になります。

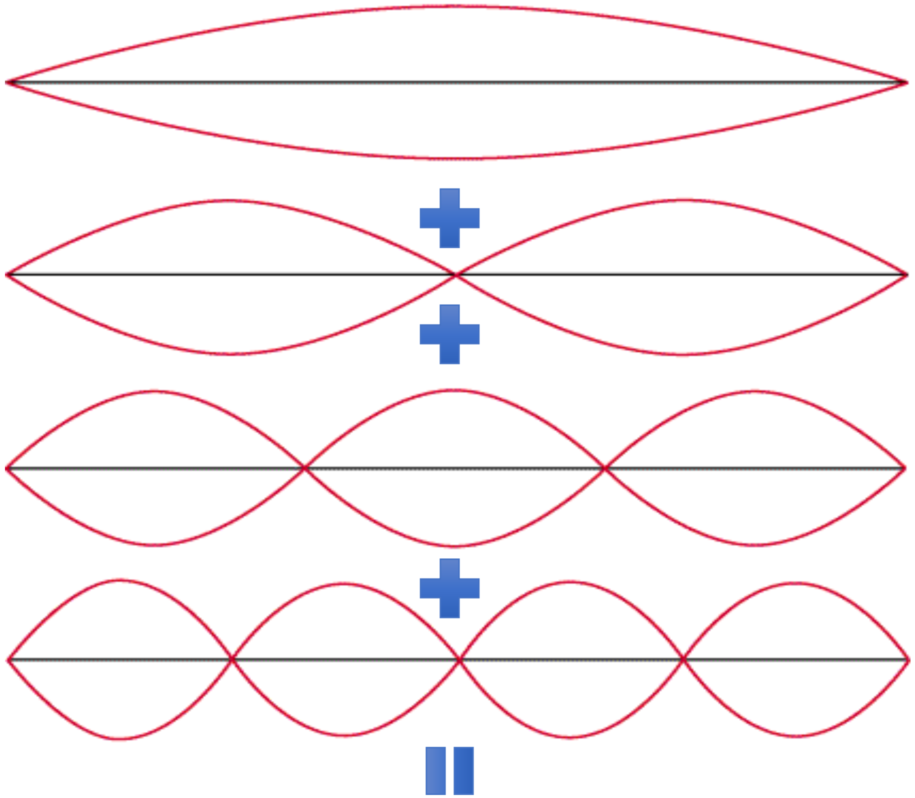
10分38秒頃の画面

弦の振動3

L: 弦の長さ

$b_i > 0$: 各振動の振幅（音量）
通常， b_1 が一番大きな値

- 基本振動や倍音それぞれは三角関数で表現できる。



基本振動 $b_1 \sin \dfrac{\pi x}{L}$

2倍振動 $b_2 \sin \dfrac{2\pi x}{L}$

3倍振動 $b_3 \sin \dfrac{3\pi x}{L}$

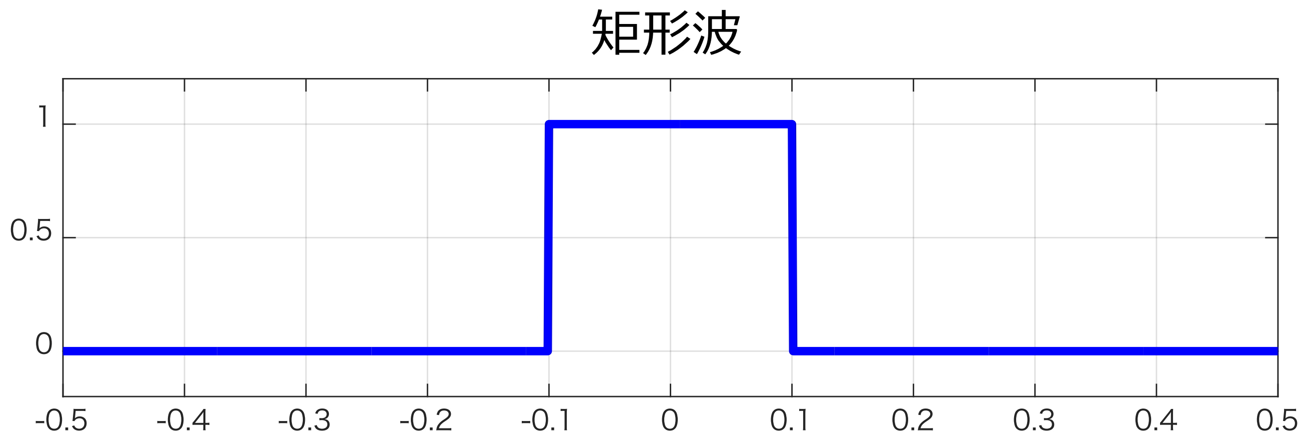
4倍振動 $b_4 \sin \dfrac{4\pi x}{L}$

三角関数を足し合わせれば弦の振動を表現できる！

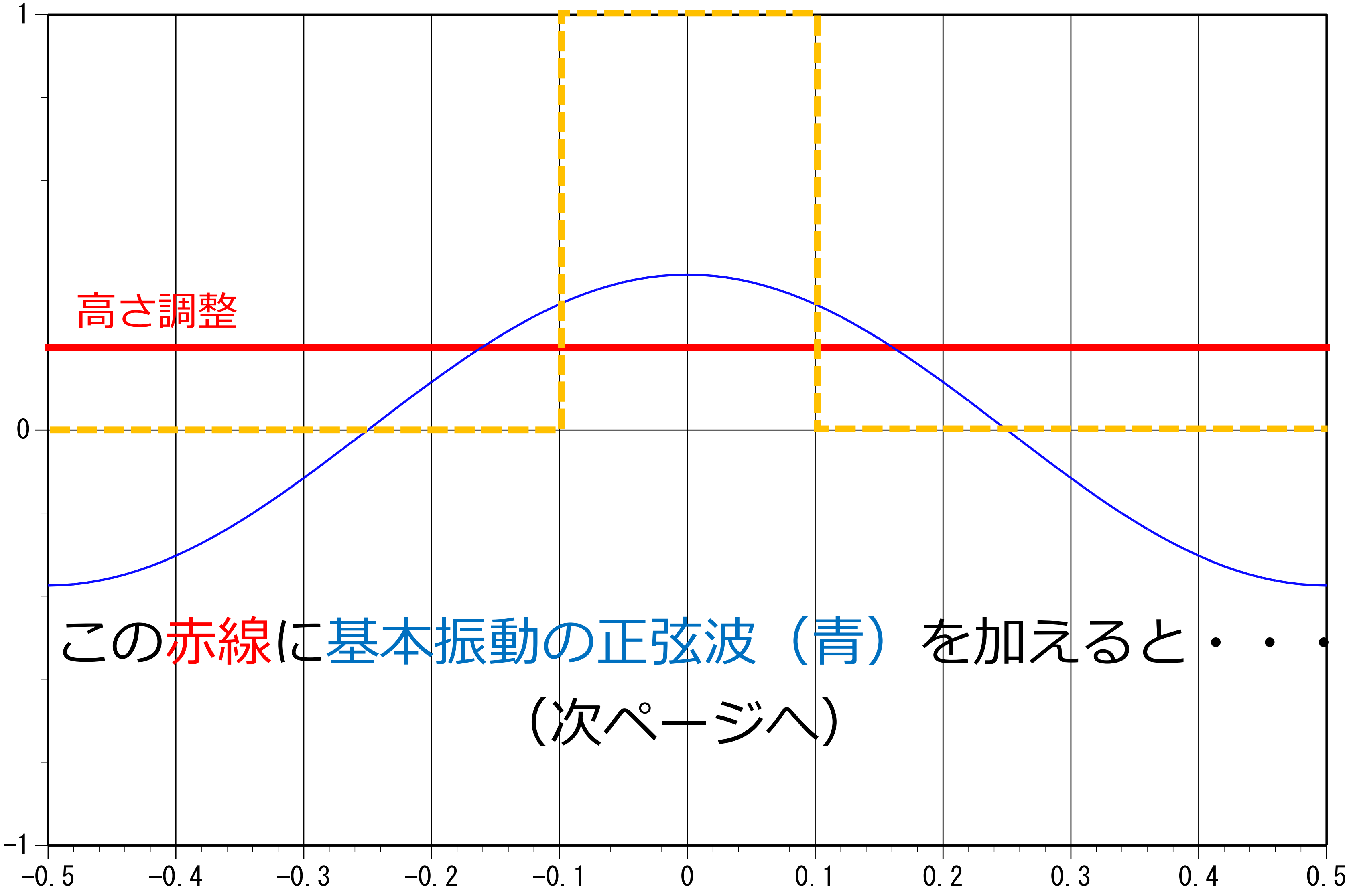
注意：ここでの議論は弦の位置xにおける振幅のみであり時間tに対する変位は考慮していない。

例）矩形波の場合

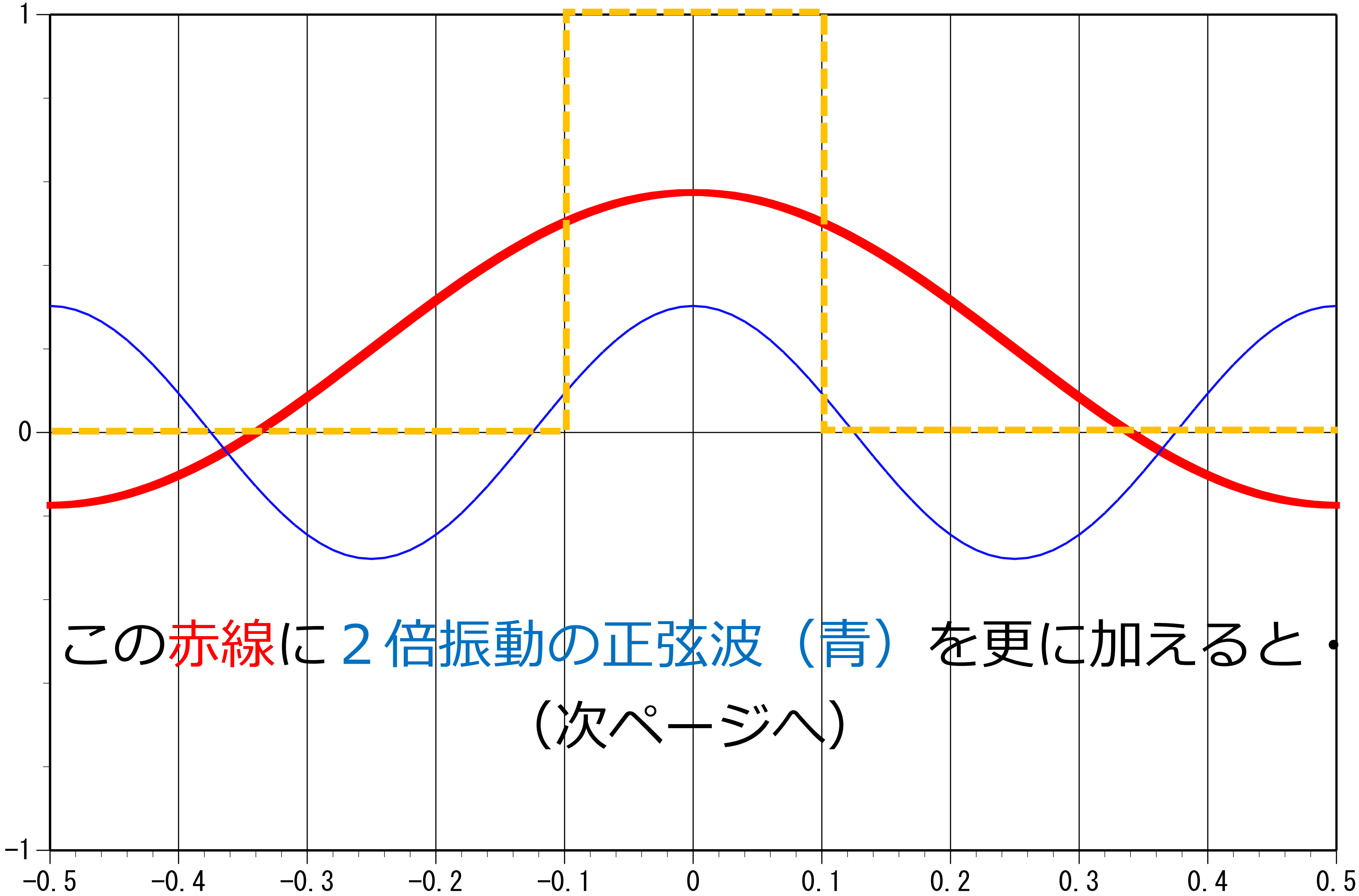
- 極端な例によって、それが近似的に可能であることを理解しよう。
- 極端な例とは「矩形波」
- 「滑らかな正弦波」を足し合わせることによって「角ばった矩形波」を表現できるのか？



まず高さ調整の赤線を引く



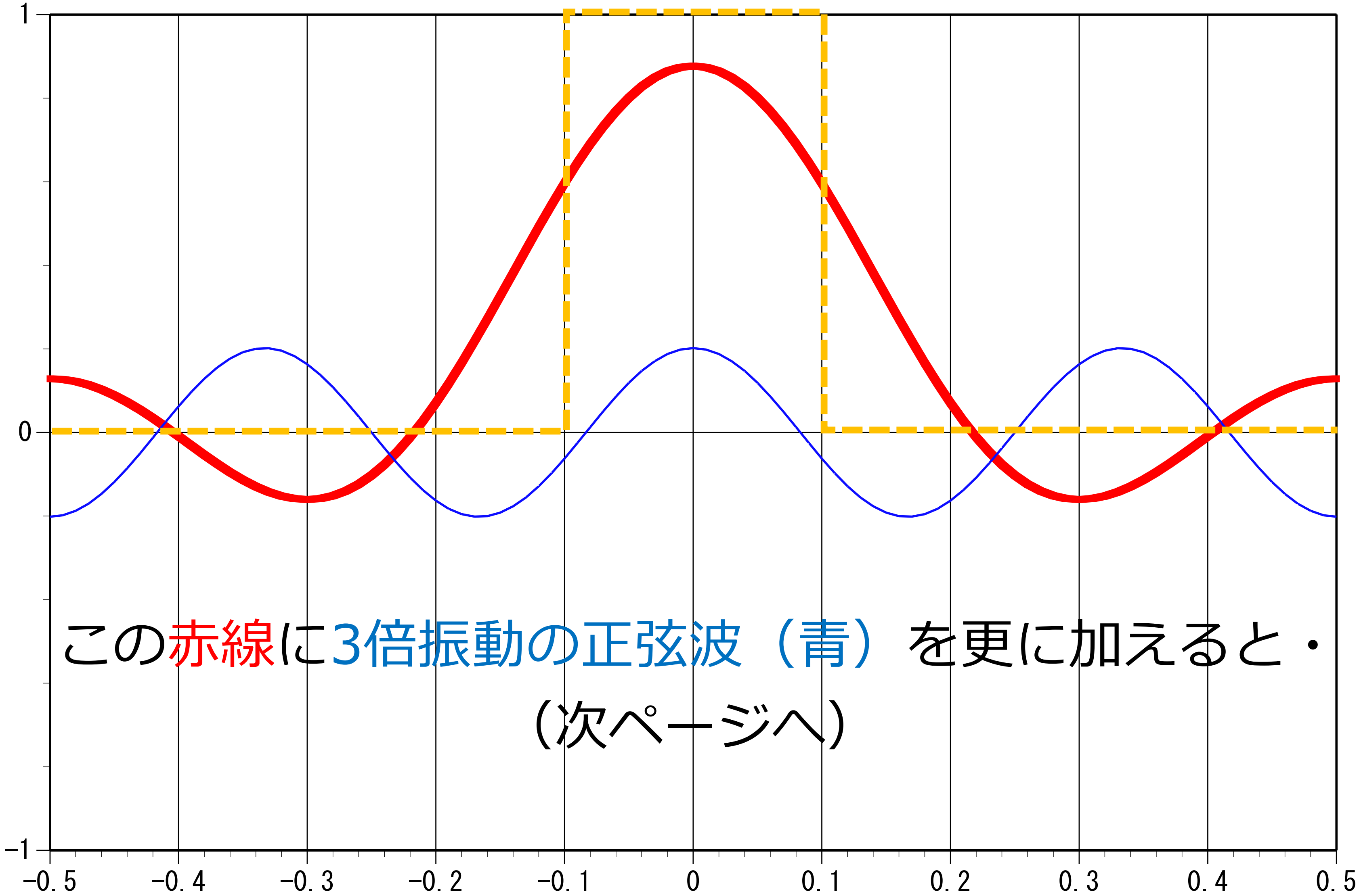
この赤線になる



この赤線に２倍振動の正弦波（青）を更に加えると・・・

（次ページへ）

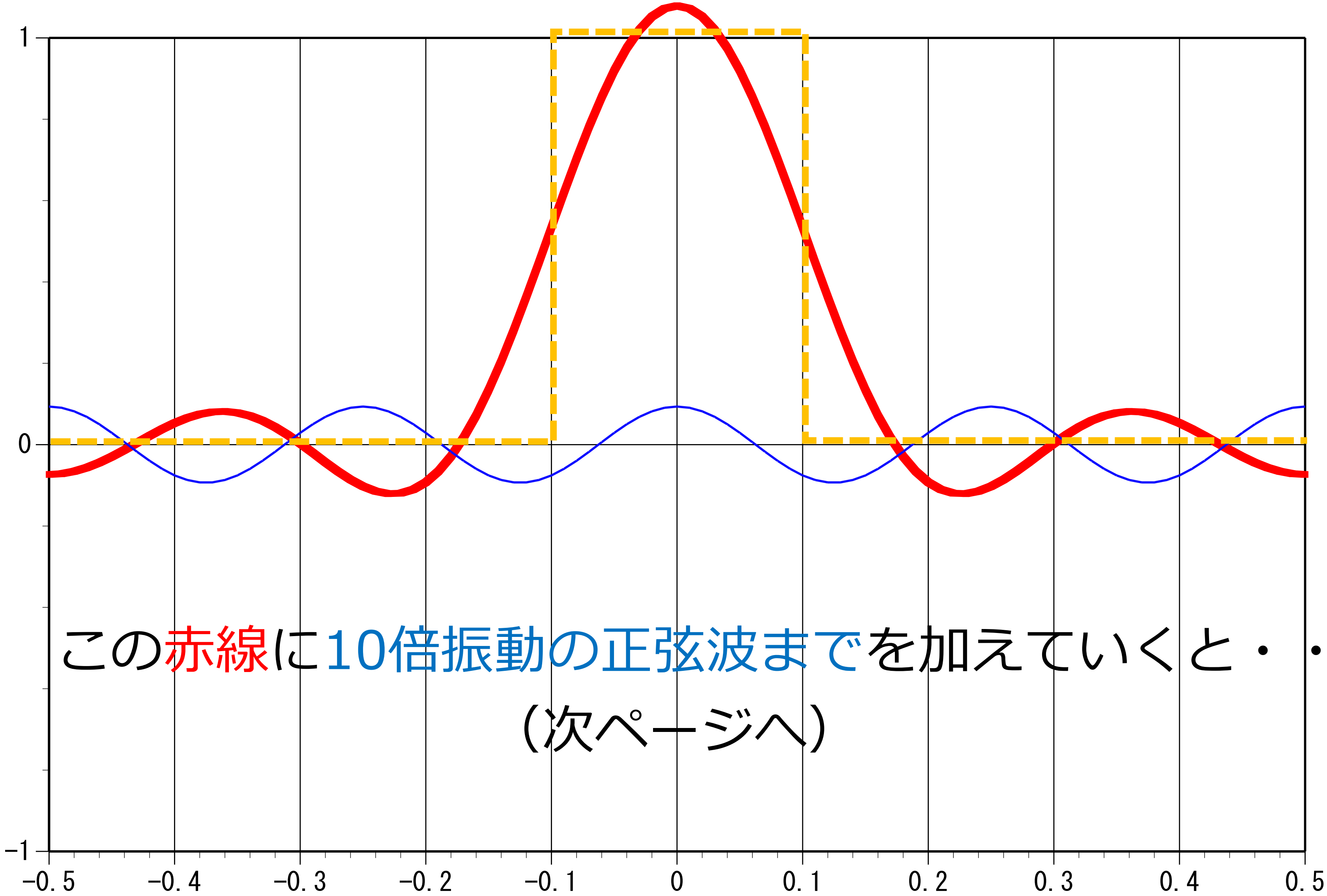
中央が盛り上がってくる



この赤線に3倍振動の正弦波（青）を更に加えると・・・

（次ページへ）

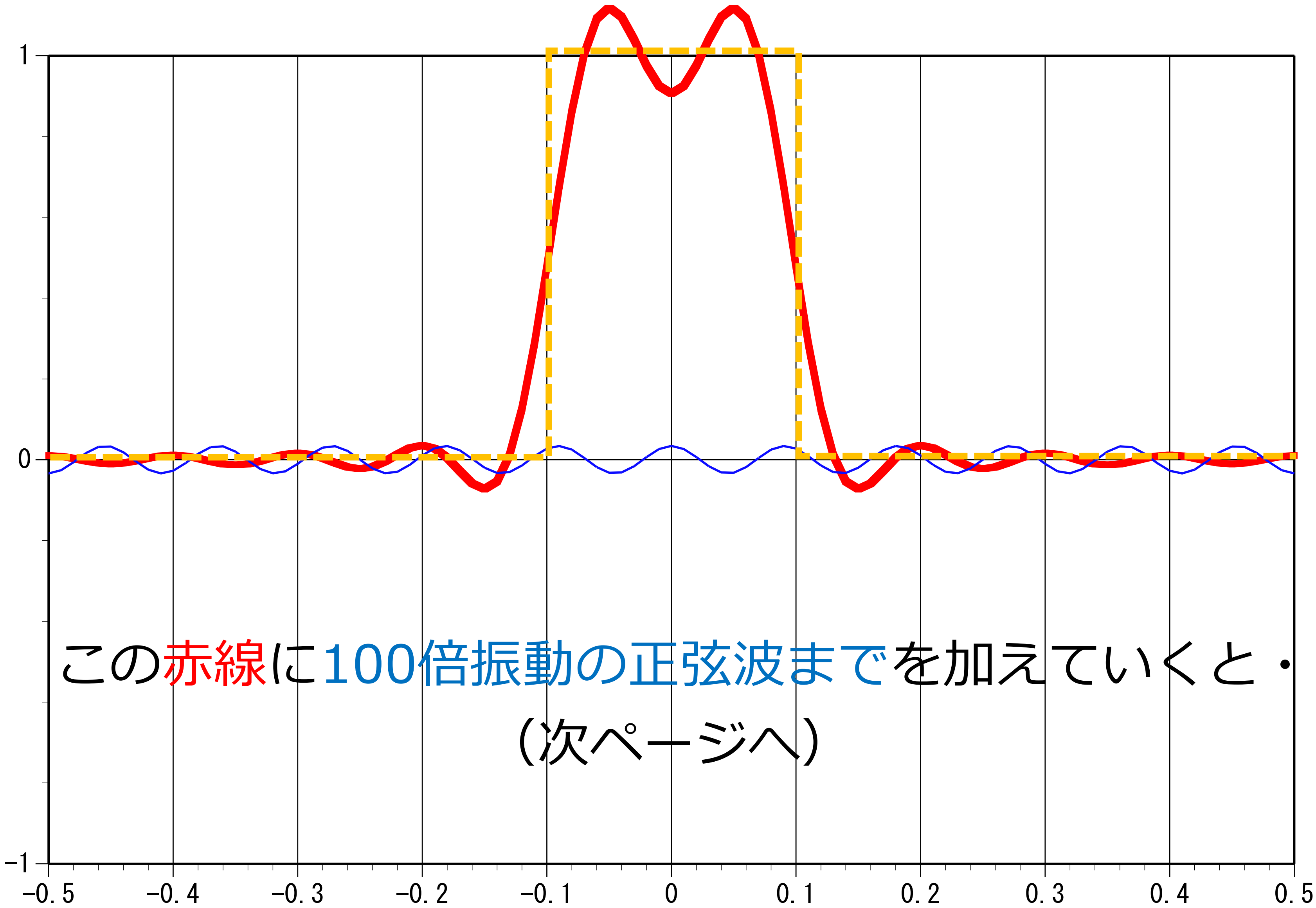
中央が更に盛り上がってくる



この赤線に10倍振動の正弦波までを加えていくと・・・

（次ページへ）

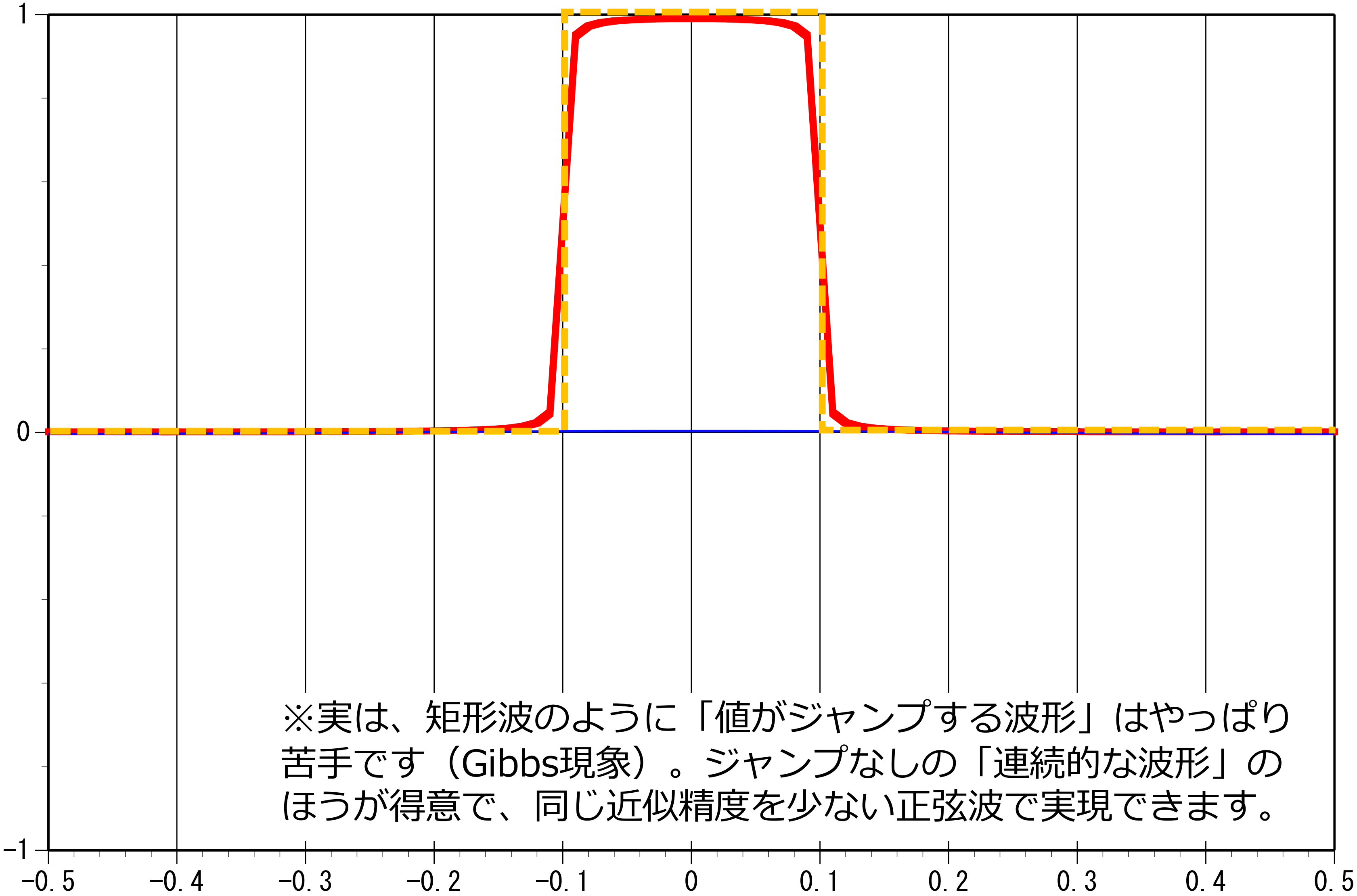
両脇が非常に小さくなってきた



この赤線に100倍振動の正弦波までを加えていくと・・・

（次ページへ）

矩形波に近い波形になってきた



※実は、矩形波のように「値がジャンプする波形」はやっぱり苦手です（Gibbs現象）。ジャンプなしの「連続的な波形」のほうが得意で、同じ近似精度を少ない正弦波で実現できます。

フーリエ級数

　周期1の周期信号$f(t)$の2乗誤差を最小にするという意味での最良近似を

⓪ 定数 $a_0/2$ と、

① 基本周波数の正弦波 $a_1\cos(2\pi t)$, $b_1\sin(2\pi t)$

② ２倍周波数の正弦波 $a_2\cos(4\pi t)$, $b_2\sin(4\pi t)$

③ ３倍周波数の正弦波 $a_3\cos(6\pi t)$, $b_3\sin(6\pi t)$

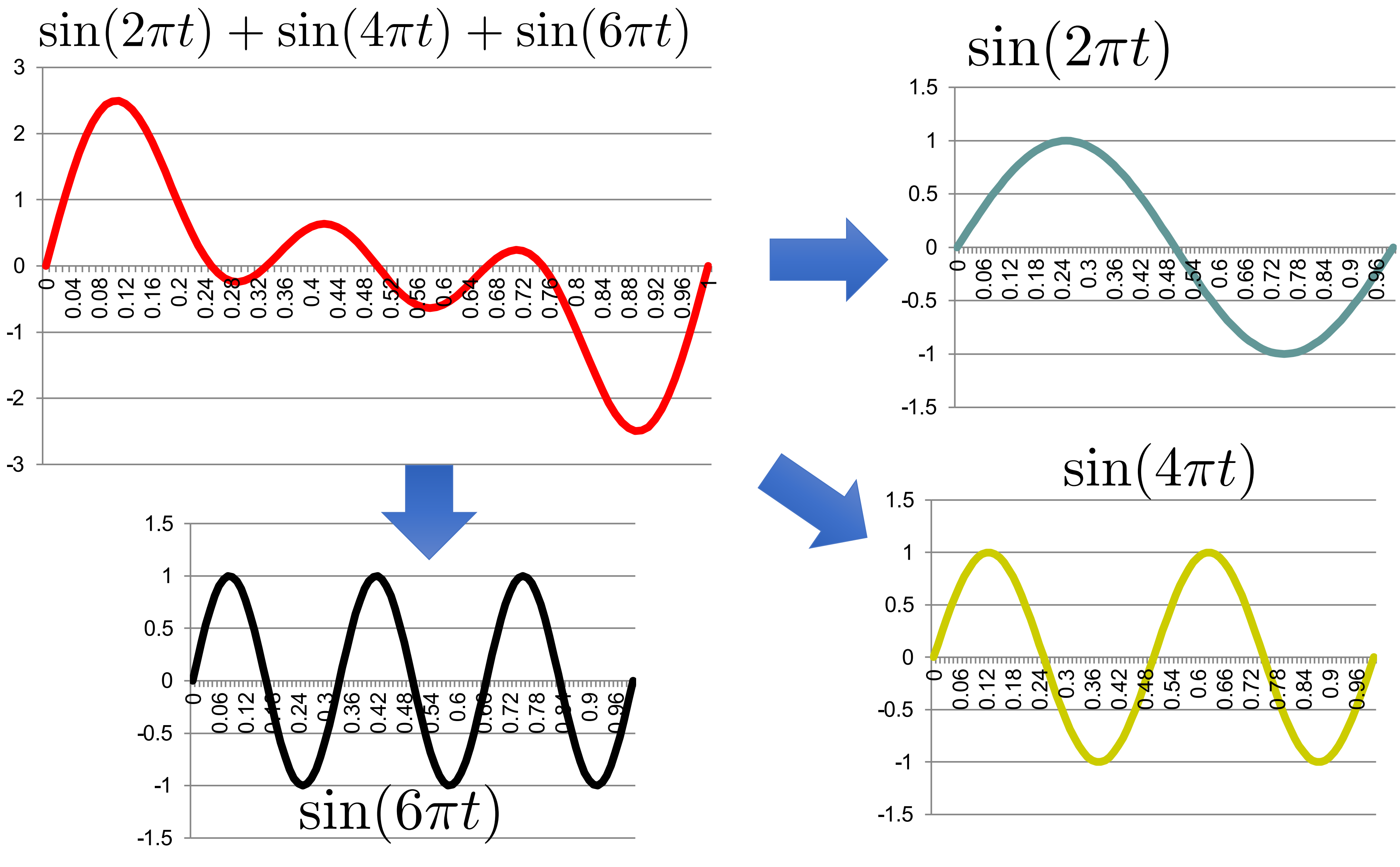
・・・

Ⓚ K倍周波数の正弦波 $a_K\cos(2K\pi t)$, $b_K\sin(2K\pi t)$

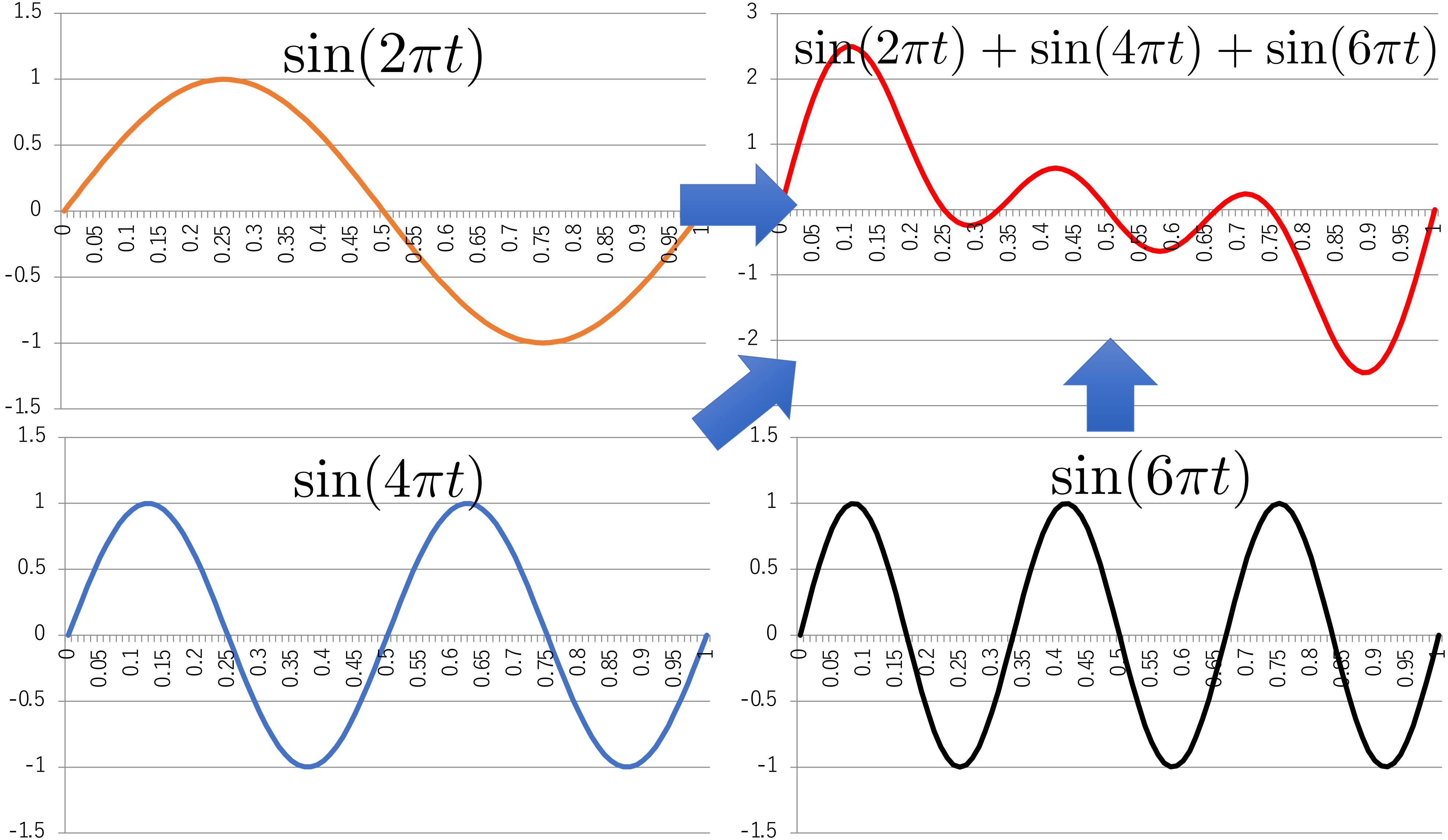
に分解して、それらの和 $f_K(t)$ として表現

$$\boxed{f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t)}$$

信号を3種の三角関数の和に分解



3種の三角関数の和で信号を合成



信号の周波数分解の有用性

　所望の信号が特定の周波数に含まれていることがわかっている場合、信号を周波数成分に分解した後に、該当する周波数成分を操作すればよい。

- 例１）雑音除去：
  - 雑音が高周波（大きな k の周波数）である場合、低周波成分だけを抽出すれば雑音除去できる。
- 例２）イコライザー：
  - 操作したい周波数成分のフーリエ係数を大きくしたり（強調の場合）、小さくしたり（抑制の場合）するなど、好みで調整すればよい。

フーリエ級数の係数の決め方

$$f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t)$$

- この$f_K(t)$を使って周期1の周期信号$f(t)$を近似する：

$$f(t) \sim f_K(t)$$

- 記号「~」が「近似」を表している。
- この近似が最も良くなるように、即ち$f_K(t)$が$f(t)$ の**最良近似**になるようにパラメータ

$$\{a_k\}_{k=0}^{K}, \{b_k\}_{k=1}^{K}$$

を決定する。

フーリエ級数（実数表現）

- 周期１の周期信号$f(t)$を**最良近似**するフーリエ級数は次式で得られる：

$$f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t)$$

- ここで、係数 a_k, b_k は次式で定める：

$$a_k = 2\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,dt \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

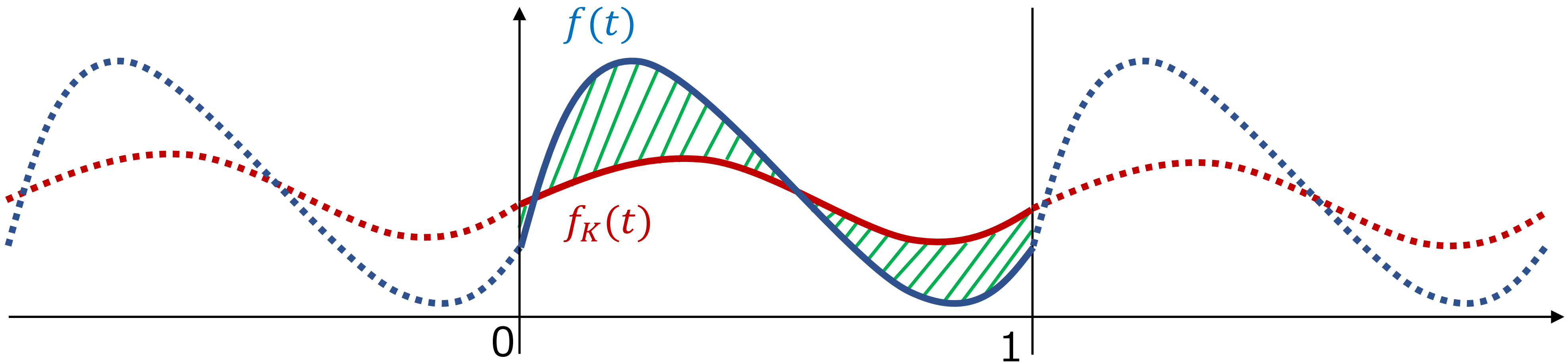
$$b_k = 2\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,dt \quad (k = 1,2,\dots)$$

- 係数 a_k, b_k をフーリエ係数と呼ぶ。
- 三角関数に現れる$2k\pi$を角周波数、それを2πで割ったkを周波数と呼ぶ．(周期1の場合)

「最良近似」とは

- ここでは**近似の良し悪し**を、 2曲線$f_K(t)$と$f(t)$で囲まれた領域（緑部分）の面積の2乗で評価する：

$$J = \int_0^1 \{f_K(t) - f(t)\}^2 \,\mathrm{d}t$$



- 評価基準$J\left(\{a_k\}_{k=0}^{K}, \{b_k\}_{k=1}^{K}\right)$を**最小**にするようにパラメータ $\{a_k\}_{k=0}^{K}, \{b_k\}_{k=1}^{K}$ を決めたとき、$f_K(t)$を$f(t)$ の**最良近似**と呼ぶ.

評価基準 J の変形（その1）

$$f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t)$$

- 簡単のために以下のように置く：

$$A(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t),\ B(t) = \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t)$$

- するとフーリエ級数$f_K(t)$は次式で表現される：

$$f_K(t) = \frac{a_0}{2} + A(t) + B(t)$$

$$J = \int_0^1 \{f_K(t) - f(t)\}^2 \,\mathrm{d}t$$

- 次に評価基準Jの被積分関数を展開して分解する：

$$J = \int_0^1 \{f_K(t)\}^2 \,\mathrm{d}t - 2\int_0^1 f_K(t) f(t) \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \{f(t)\}^2 \,\mathrm{d}t$$

(定数C)

- 右辺第3項はパラメータ$\{a_k\}_{k=0}^{K}, \{b_k\}_{k=1}^{K}$に無関係な定数である。
- 右辺第2項は以下のように展開できる：

$$2\int_0^1 f_K(t) f(t) \,\mathrm{d}t = a_0 \int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 A(t) f(t) \,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 B(t) f(t) \,\mathrm{d}t$$

$$= a_0 \int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^{K} a_k \int_0^1 f(t) \cos(2k\pi t) \,\mathrm{d}t$$

$$+2\sum_{k=1}^{K} b_k \int_0^1 f(t) \sin(2k\pi t) \,\mathrm{d}t$$

評価基準 J の変形（その2）

- 右辺第1項の被積分関数を展開して分解する：

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \{f_K(t)\}^2 \,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \{A(t)\}^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \{B(t)\}^2 \,\mathrm{d}t \\
+ a_0 \int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t + a_0 \int_0^1 B(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 A(t)B(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

- ここで右辺第4項は「確認問題4の一般化」(b)より0になる。
- 右辺第5項は「確認問題4の一般化」(a)より0になる。
- 右辺第6項は「確認問題4の一般化」(g)より0になる。
- よって、右辺は第1項から第3項までを考えればよい。
- 右辺第1項の積分は1、よって（第1項）＝ $a_0^2/4$

評価基準 J の変形（その3）

$$A(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t)$$

- 右辺第2項の被積分関数を展開する：

$$\{A(t)\}^2 = \sum_{k=1}^{K} a_k^2 \cos^2(2k\pi t) + 2\sum_{k=1}^{K-1}\sum_{l=k+1}^{K} a_k a_l \cos(2k\pi t)\cos(2l\pi t)$$

- よって、右辺第2項の積分は次式のように変形できる：

$$\int_0^1 \{A(t)\}^2 dt$$
$$= \sum_{k=1}^{K} a_k^2 \underbrace{\int_0^1 \cos^2(2k\pi t)\,\mathrm{d}t}_{\frac{1}{2}} + 2\sum_{k=1}^{K-1}\sum_{l=k+1}^{K} a_k a_l \underbrace{\int_0^1 \cos(2k\pi t)\cos(2l\pi t)\,\mathrm{d}t}_{0}$$

- この結果の第1項は「確認問題4の一般化」(d)より1/2になる。
- さらに第2項は「確認問題4の一般化」(f)より0になる。
- よって$\int_0^1 \{A(t)\}^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} a_k^2$，同様に$\int_0^1 \{B(t)\}^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} b_k^2$
- 以上より、次式を得る：

$$\int_0^1 \{f_K(t)\}^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} b_k^2$$

評価基準 J の変形（その4）

- 従って、評価基準Jは次式となった：

$$J = \underbrace{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} b_k^2}_{\text{その３より}} - \underbrace{a_0 \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{その1より}}$$
$$\underbrace{-2\sum_{k=1}^{K} a_k \int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t - 2\sum_{k=1}^{K} b_k \int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t} + (\text{定数C})$$

- この式を平方完成すれば次式を得る：

$$J = \frac{1}{4}\left\{a_0 - 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left\{a_k - 2\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\right\}^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left\{b_k - 2\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t\right\}^2 + (\text{定数D})$$

- よってパラメータが以下のときに二乗誤差 J は最小値（定数D）をとる

$$a_0 = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad a_k = 2\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$$
$$b_k = 2\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$$

フーリエ級数（実数表現）

- 以上をまとめれば、周期 1の周期信号$f(t)$を最良近似するフーリエ級数は次式で得られる：

$$f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t)$$

- ここで、係数 a_k, b_k は次式で定める：

$$a_k = 2\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

$$b_k = 2\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \quad (k = 1,2,\dots)$$

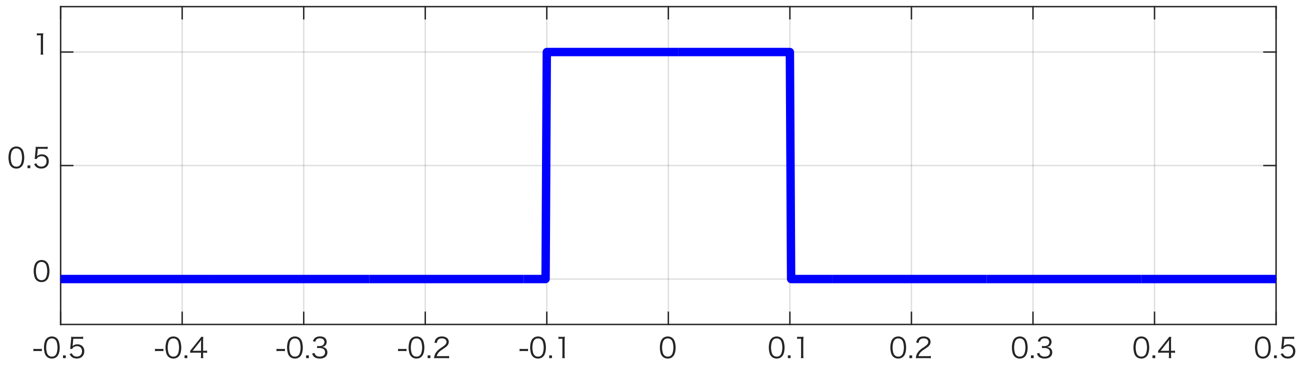
（注意：a_k の式に $k = 0$ を代入すれば a_0 の式になるのでまとめて表記してある）

- 係数 a_k, b_k をフーリエ係数と呼ぶ。
- 三角関数に現れる$2k\pi$を角周波数、それを2πで割ったkを周波数と呼ぶ。（周期1の場合）

それでは具体例を使って
フーリエ係数を
計算してみましょう！

例）矩形波

- 最初のスライドで示した例である「矩形波」についてフーリエ係数を計算してみます。
- そのスライドでは矩形波を$-0.5 \leq t < 0.5$で表示していました。



- これが周期1で繰り返されるので、$0 \leq t < 1$では

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 0.1,\ \ 0.9 < t < 1) \\ 0 & (0.1 \leq t \leq 0.9) \end{cases}$$

と表記される。

係数a_0の計算

- $a_0 = 2\int_0^1 f(t)dt$ より

$$a_0 = 2\int_0^1 f(t)dt$$
$$= 2\int_0^{0.1} 1dt + 2\int_{0.9}^{1} 1dt = 0.4$$

となり

$$a_0 = 0.4$$

が求まる。

係数a_kの計算（$k = 1, \ldots, K$）

- $a_k = 2\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,dt$ より

$$a_k = 2\int_0^{0.1}\cos(2k\pi t)\,dt + 2\int_{0.9}^{1}\cos(2k\pi t)\,dt$$

$$= \left[\frac{\sin(2k\pi t)}{k\pi}\right]_0^{0.1} + \left[\frac{\sin(2k\pi t)}{k\pi}\right]_{0.9}^{1}$$

$$= \left(\frac{\sin(0.2k\pi)}{k\pi} - 0\right) + \left(0 - \frac{\sin(1.8k\pi)}{k\pi}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin(0.2k\pi)}{k\pi} - 0\right) + \left(0 - \frac{\sin(2k\pi - 0.2k\pi)}{k\pi}\right)$$

$$= \frac{2\sin(0.2k\pi)}{k\pi}$$

（注意） $\sin(2k\pi - \theta) = -\sin(\theta)$を利用.

となる。例えば、

$$a_1 = \frac{2\sin(0.2\pi)}{\pi} \approx 0.374,\ a_2 = \frac{2\sin(0.4\pi)}{2\pi} \approx 0.303,\ a_3 = \frac{2\sin(0.6\pi)}{3\pi} \approx 0.202$$

係数b_kの計算（$k = 1, \dots, K$）

- $b_k = 2\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,dt$ より

$$b_k = 2\int_0^{0.1} \sin(2k\pi t)\,dt + 2\int_{0.9}^{1} \sin(2k\pi t)\,dt$$
$$= \left[-\frac{\cos(2k\pi t)}{k\pi}\right]_0^{0.1} + \left[-\frac{\cos(2k\pi t)}{k\pi}\right]_{0.9}^{1}$$
$$= -\frac{\cos(0.2k\pi) - 1}{k\pi} - \frac{1 - \cos(1.8k\pi)}{k\pi}$$
$$= -\frac{\cos(0.2k\pi)}{k\pi} + \frac{\cos(2k\pi - 0.2k\pi)}{k\pi}$$
$$= 0$$

（注意） $\cos(2k\pi - \theta) = \cos(\theta)$を利用.

となる．よって，全ての $k = 1,2, \dots K$ に対して

$$b_k = 0$$

求まったフーリエ級数

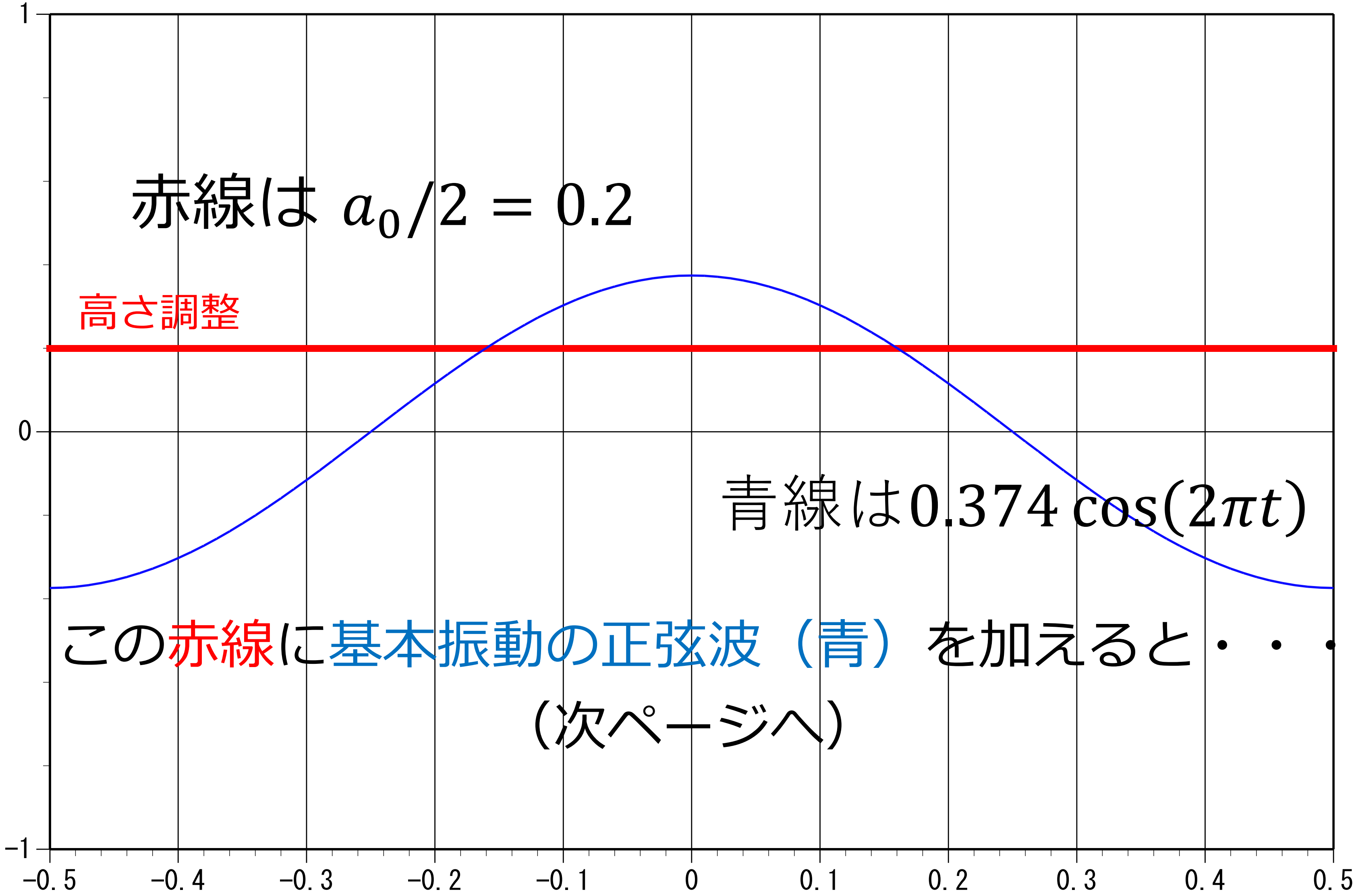
- 以上より

$$f_K(t) = \frac{0.4}{2} + \frac{2\sin(0.2\pi)}{\pi}\cos(2\pi t) + \frac{2\sin(0.4\pi)}{2\pi}\cos(4\pi t) + \frac{2\sin(0.6\pi)}{3\pi}\cos(6\pi t) + \cdots + \frac{2\sin(0.2K\pi)}{K\pi}\cos(2K\pi t)$$

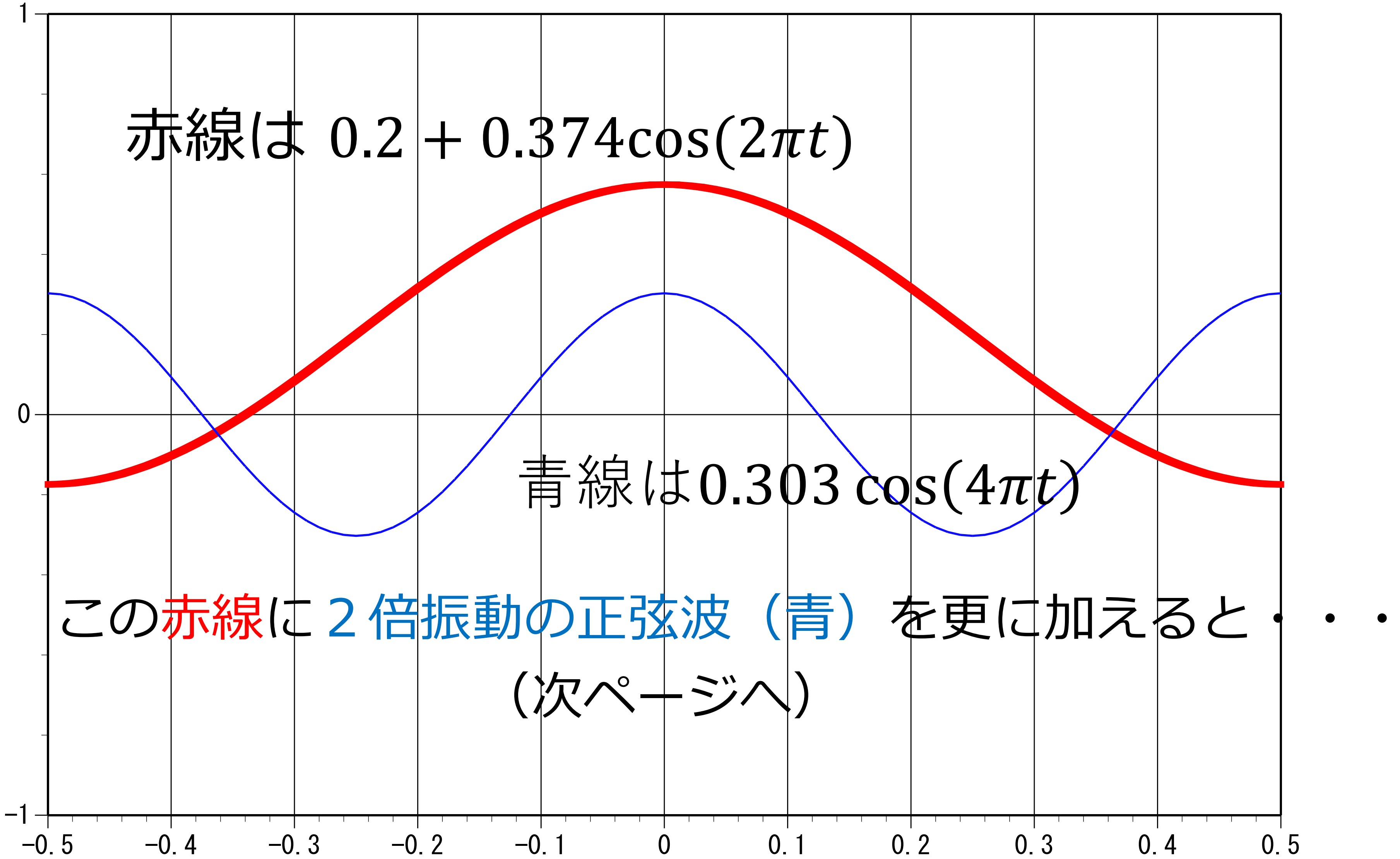
$$\approx 0.2 + 0.374\cos(2\pi t) + 0.303\cos(4\pi t) + 0.202\cos(6\pi t) + \cdots + \frac{2\sin(0.2K\pi)}{K\pi}\cos(2K\pi t)$$

が求まった。この結果と前のスライドで示したグラフを照らし合わせてみる。

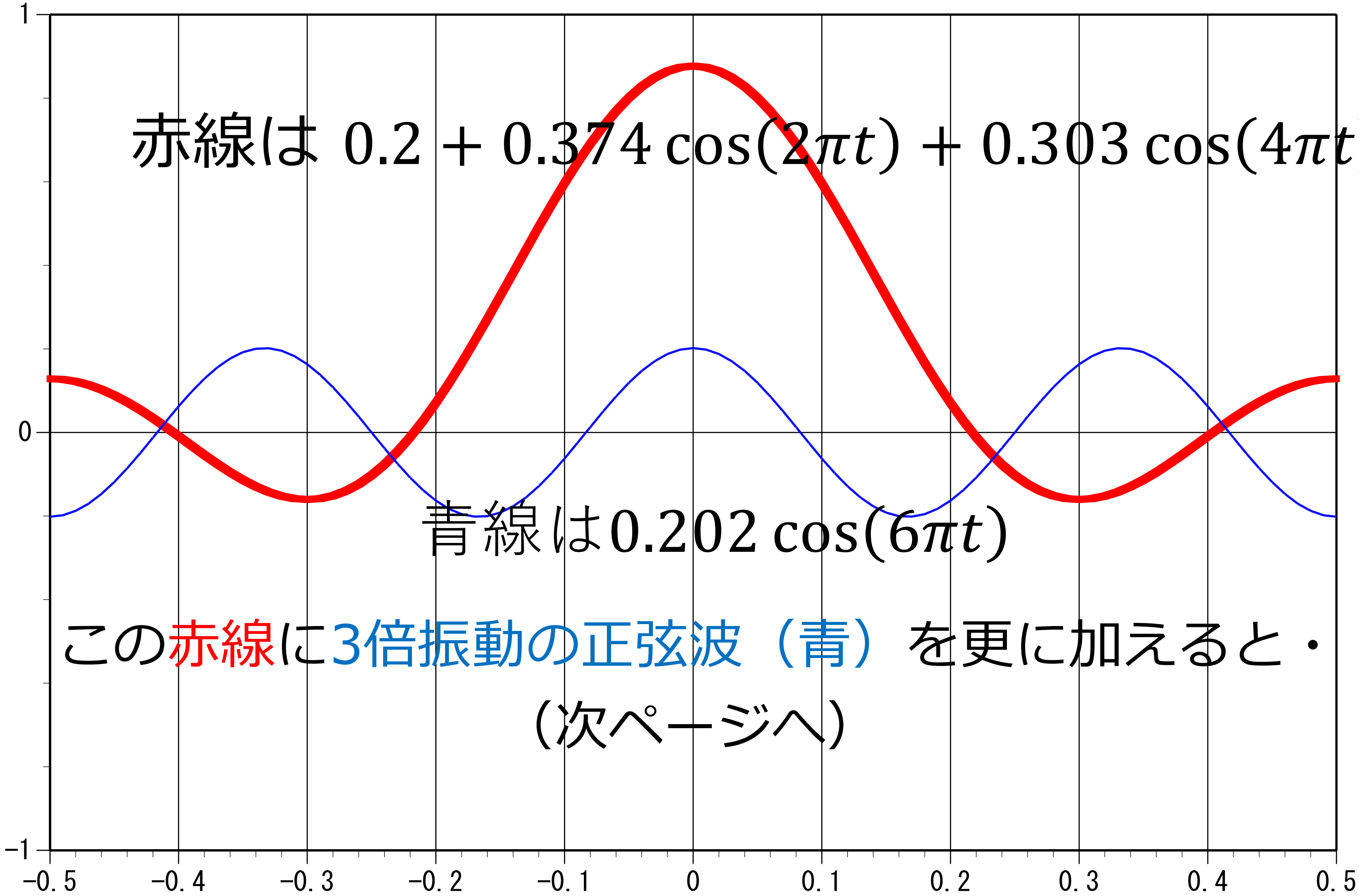
スライドの19枚目


赤線は $a_0/2 = 0.2$
高さ調整
青線は$0.374\cos(2\pi t)$
この赤線に基本振動の正弦波（青）を加えると・・・
（次ページへ）
1
0
−1
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

スライドの20枚目


赤線は $0.2 + 0.374\cos(2\pi t)$
青線は$0.303\cos(4\pi t)$
この赤線に２倍振動の正弦波（青）を更に加えると・・・
(次ページへ)
1
0
−1
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

スライドの21枚目



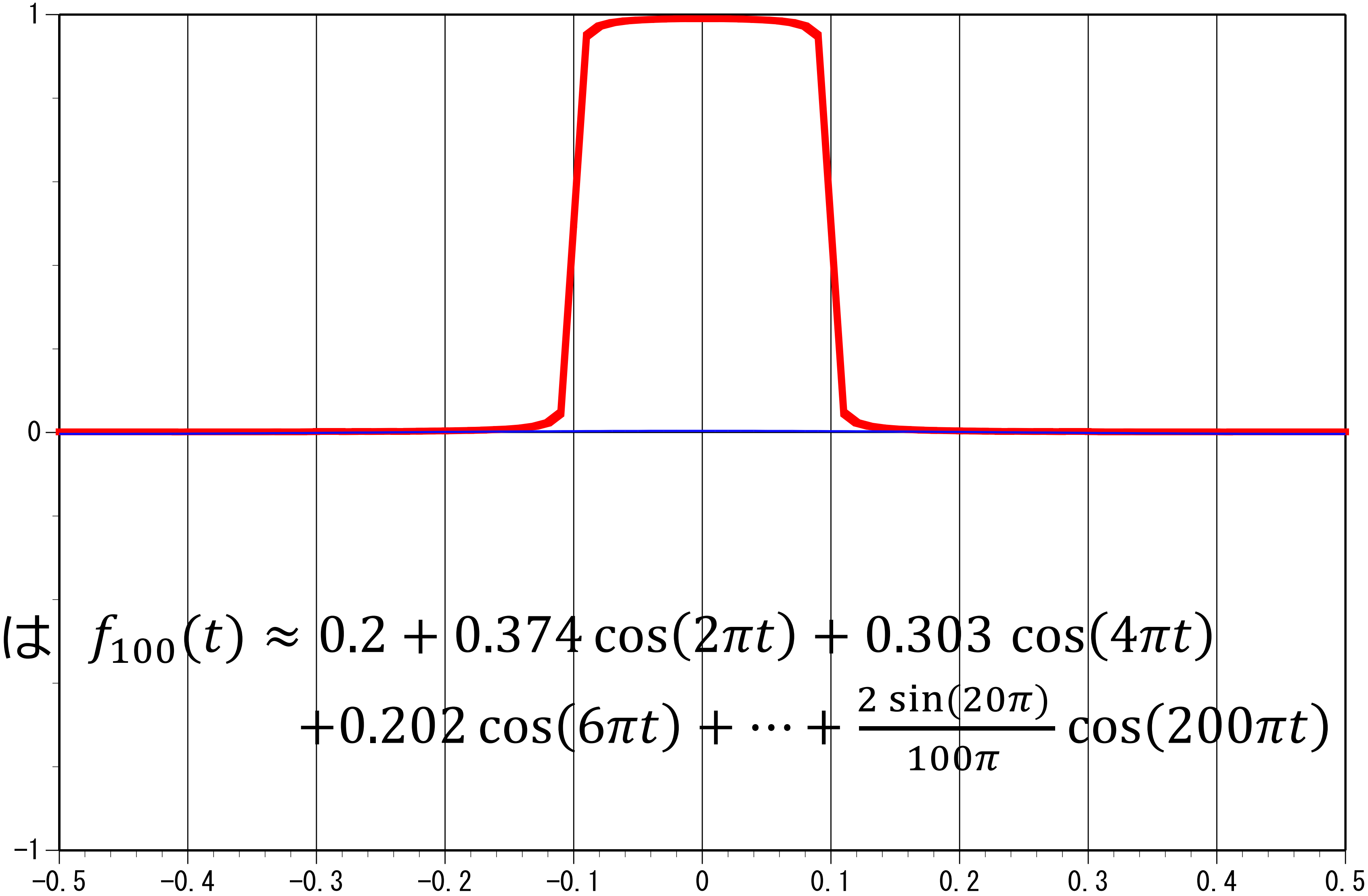
赤線は $0.2 + 0.374\cos(2\pi t) + 0.303\cos(4\pi t)$

青線は$0.202\cos(6\pi t)$

この赤線に3倍振動の正弦波（青）を更に加えると・・・

(次ページへ)

スライドの24枚目



赤線は $f_{100}(t) \approx 0.2 + 0.374\cos(2\pi t) + 0.303\ \cos(4\pi t)$

$$+0.202\cos(6\pi t) + \cdots + \frac{2\sin(20\pi)}{100\pi}\cos(200\pi t)$$

このように、計算で求まった
適切な正弦波を足し込んでいけば、
目的の信号（この場合は矩形波）を
徐々に表現していけるのです。

質問があればmanaba+Rに立ち上げた
「スレッド」で聞くこともできます。

理解度確認 小テスト

manaba +R にログインして，第2回小テストを行います。
制限時間は 10分間 です。

スライドを見返しながら，解いてよいです。
今回の問題は全て選択式の問題です。

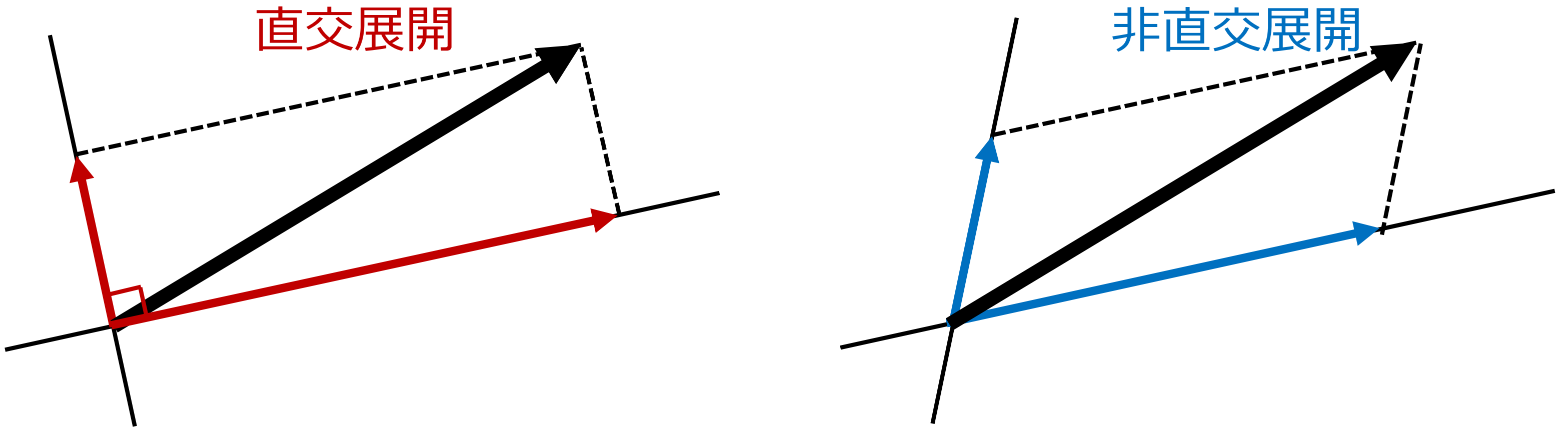
宿題

- Manaba+R にて出題。
  - フーリエ級数の計算問題です
- 期限：来週の授業開始時まで。

おまけ：
フーリエ級数を
幾何学的に解釈してみます！

フーリエ級数での分解：直交展開

- 直交展開とは
  - 例）2次元ベクトルを２本の直交するベクトルに分解すること。
- 非直交展開とは
  - 例） 2次元ベクトルを２本の直交しないベクトルに分解すること。



同一ベクトルを左図では直交2ベクトルに、右図では非直交2ベクトルに分解

関数の直交性とは？

- 2つの2次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$が直交する
  ＝ 2つのベクトルがなす角θが90°（$\pi/2$[rad]）

- $\theta = \pi/2$ のとき$\cos\theta = 0$であり、内積も0：
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta = 0$$

- 3次元までは角度を物理的に計測できるが、4次元以上では無理。よって、「内積が0」になるときに「2ベクトルが直交する」と定義する。

- 「関数の直交性」も「内積が0」で定義すればよい。

関数の内積とは

成分で表したベクトルの内積は

- 2次元ベクトル$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$の内積：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

- 3次元ベクトル$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$,$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$の内積：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

- N次元ベクトル$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_N)$の内積：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$$

この定義を発展させて関数の内積を次のように定義

- 周期 1 の周期関数 $x(t)$, $y(t)$ の内積：

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) y(t) dt$$

三角関数の直交性

周期１の周期関数 $x(t)$, $y(t)$ の内積が0、即ち

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt = 0$$

のときに $x(t)$ と $y(t)$ は直交するという。

1. $x(t) = \sin(2k\pi t)$, $y(t) = \sin(2l\pi t)$ のとき、第2回スライド12「確認問題4の一般化」(e)より $\langle x, y \rangle = 0$, ただし $l \neq k$.
2. $x(t) = \cos(2k\pi t)$, $y(t) = \cos(2l\pi t)$ のとき、同(f)より $\langle x, y \rangle = 0$, ただし $l \neq k$.
3. $x(t) = \sin(2k\pi t)$, $y(t) = \cos(2l\pi t)$ のとき、同(g)より $\langle x, y \rangle = 0$.

よって、これらの関数は互いに「直交」する。

ここまでのまとめ

　周期１の周期関数$f(t)$のフーリエ級数$f_K(t)$とは、2乗誤差

$$J = \int_0^1 \{f_K(t) - f(t)\}^2 dt$$

を最小にする最良近似として、$f(t)$を直交関数系$\{1, \cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t)\}_{k=1}^{K}$で展開したものである。

注： $\cos(2k\pi t)$ は関数1 （常に値1を返す関数）と直交する.
　　　同様に，$\sin(2k\pi t)$ も関数1と直交する。