電気電子回路
第９回：正弦波交流回路（１）
sinusoidal alternating current circuit (1)

情報理工学部
佐竹　賢治

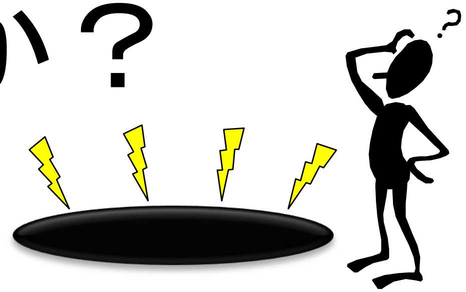
今週の内容

- 正弦波交流回路を扱うための準備として、関連する基礎事項を確認します
  - コンデンサとコイル
  - 三角関数
- これらを踏まえ、正弦波交流回路の以下の性質を学びます
  - 正弦波交流の瞬時値と振幅、周期、位相
  - 平均消費電力と実効値
  - コンデンサの瞬時電圧 v と瞬時電流 i の関係
  - コイルの瞬時電圧 v と瞬時電流 i の関係

（1）コンデンサ

- 2個の近接した導体からなる回路素子
  - 2個の導体の間に誘電体を挟むこともある
- 日本語では「コンデンサ」という呼び方が定着しているが、英語では「キャパシタ（capacitor）」という呼び名が一般的である
- 容量（capacitance）の単位はF（ファラッド）

電荷を貯めるのは簡単か？



クイズ

- 半径 1m のエボナイト製の板の表面を毛皮でこすり、表面を –1000V に帯電させた。このエボナイト板に溜まった電荷の量はどれぐらいか？
  A) 56 キロクーロン （56000クーロン）
  B) 56 クーロン
  C) 56 ミリクーロン （0.056クーロン）
  D) 56 マイクロクーロン （0.000056クーロン）
  E) 56 ナノクーロン （0.000000056クーロン）

単１乾電池の放電容量は約5万クーロン

600Wの電気コンロを1時間に流れる電荷は約２万クーロン

静電気で電荷を貯めるのは難しい

半径 1m のエボナイト製の板の表面を毛皮でこすり、表面を –1000V に帯電させた。このエボナイト板に溜まった電荷の量はどれぐらいか？

- 正解は 56ナノクーロン
  - このとき、$1mm^2$ あたり11万個の電子が溜まっている
  - もっと高電圧に帯電させようとしても、空気中を放電するなどし、中々うまくいかないだろう
- つまり、1個の物体に静電気という形で貯められる電荷の量は非常に少ない
  - 電子同士が反発するから、1か所に集めると不安定
- しかし、2枚の板があれば多量の電荷を簡単に貯めることができる！

2個の導体（＝コンデンサ）

クイズ

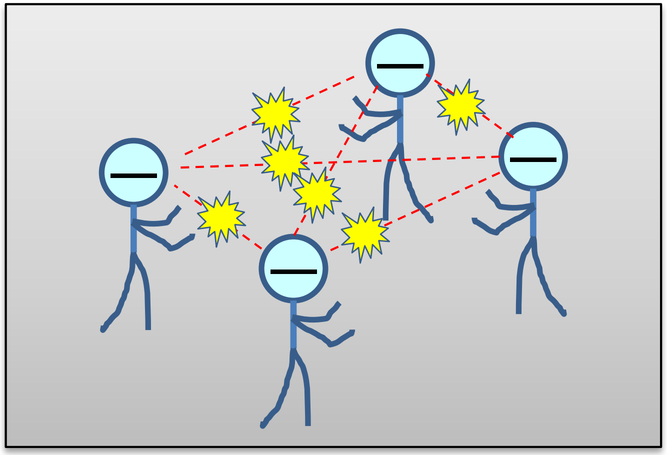
- 半径 1m の2枚の金属板が 1mm の間隔で置かれた平行平板コンデンサを 1000V で充電した。このコンデンサに溜まった電荷の量はどれぐらいか？
  - A) 28キロクーロン （28000クーロン）
  - B) 28クーロン
  - C) 28ミリクーロン （0.028クーロン）
  - D) 28マイクロクーロン （0.000028クーロン）
  - E) 28ナノクーロン （0.000000028クーロン）

ちなみに
先ほどの正解は
56ナノクーロン

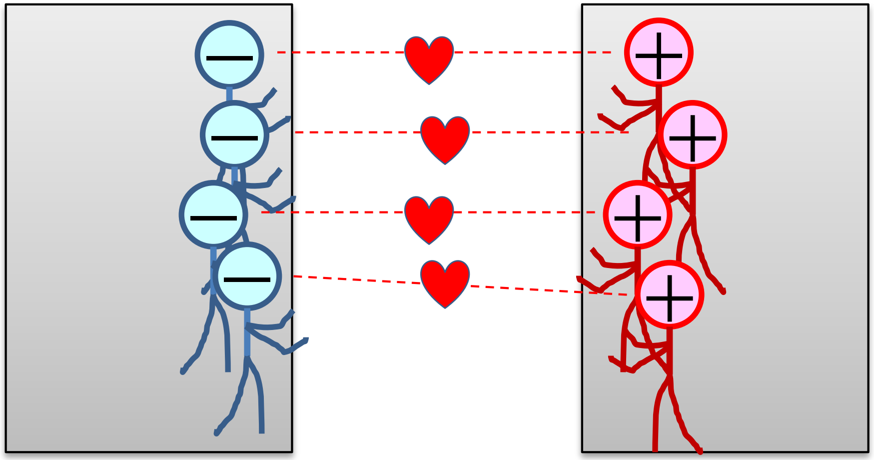
答：面積 A=3.14[m^2]、間隔 d=10^{-3}[m]の平行平板コンデンサの静電容量は $\varepsilon_0 A/d$ = 28[nF] なので、これを10^3[V]で充電すると 28[μC] の電荷が溜まる。

コンデンサは小さな電圧で多くの電荷を貯められる

- 1個の物体に電荷をたくさん貯めるのは難しい
  - 同符号の電荷同士には 反発力 が働く



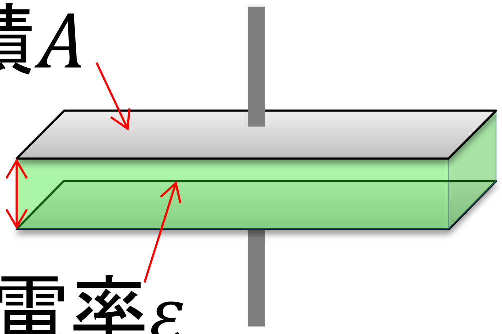
- 2個の近接した導体に異符号の電荷を貯めるのは容易
  - 異符号の電荷同士には 引力 が働く



コンデンサの容量

- コンデンサに電荷が溜まると、それに比例して電極間の電場が強くなる
  - 電極の間隔が一定なので、電極間の電圧も比例する
- よって電荷Qと電極間の電圧Vの比例係数をCとおくと $\boxed{Q = CV}$ と書ける
- この比例係数を「 容量（キャパシタンス） 」と呼ぶ
  - 容量はコンデンサの形状や電極間に挟まれている誘電体の種類などによって決まる
- 容量の単位は「 F（ファラッド） 」
  - 1.5[V]の乾電池で容量が4[F]のコンデンサを充電すると 6[C] 溜まるが、容量が2[F]のコンデンサでは 3[C] しか溜まらない

〔参考〕容量の例

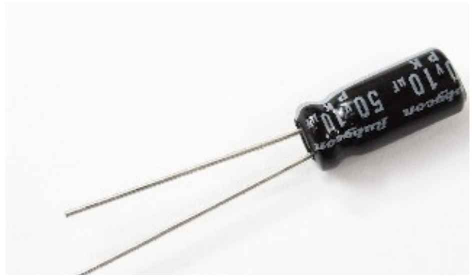


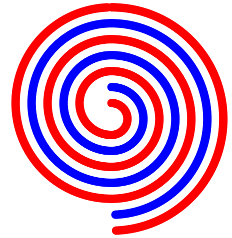
- 平行平板コンデンサ
  - 2枚の平板状の電極が平行に向かい合ったもの
  - 面積A、電極間隔d、誘電体の誘電率εの平行平板コンデンサの容量Cは、 $C = \varepsilon A/d$ （電磁気の教科書より）
- 容量の例
  - $A = 1$[cm^2]、$d = 1$[mm]、$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85$[pF/m]（真空あるいは空気）のとき、$C =$ $\boxed{0.885[\mathrm{pF}]}$
  - $A = 1$[cm^2]、$d = 0.1$[mm]、$\varepsilon = 4\varepsilon_0$（一般的なセラミックス等）のとき、$C =$ $\boxed{35.4[\mathrm{pF}]}$
  - $A = 10$[cm^2]、$d = 0.01$[mm]、$\varepsilon = 1000\varepsilon_0$（特殊なセラミックス等）のとき、$C =$ $\boxed{0.885[\mu\mathrm{F}]}$

［参考］コンデンサの例

セラミックコンデンサ

- 1pF～0.1μF程度
- 直径2mm～1cm

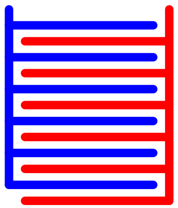


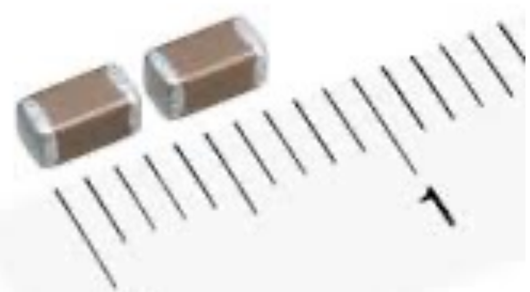


断面構造

アルミ電解コンデンサ

- 0.1μF～2000μF程度
- 本体長さ5mm～10cm





断面構造

チップコンデンサ

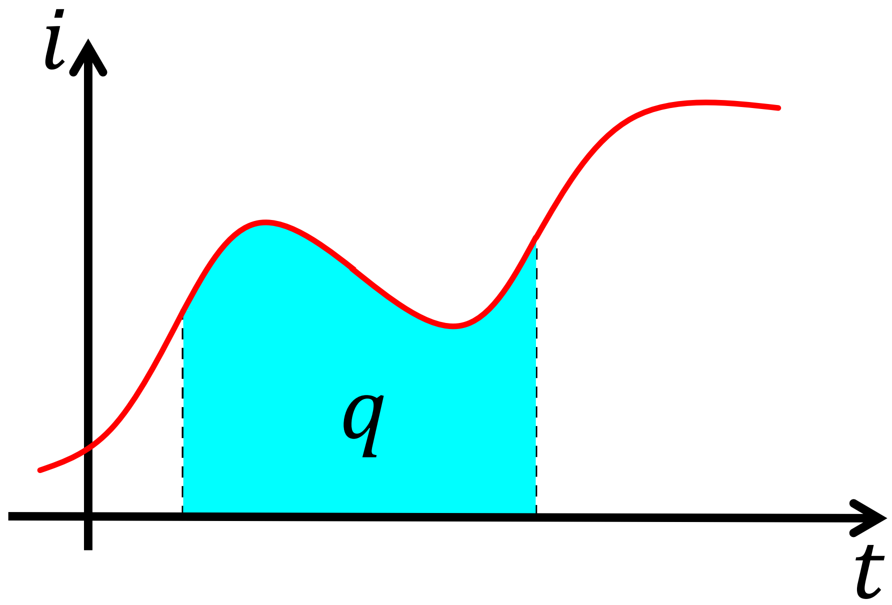
- 100pF～10μF程度
- 長さ2～3mm

電気二重層コンデンサ

- 1F～100F程度
- 本体長さ2cm～5cm

コンデンサの電圧と電流の関係

- 電流:単位時間あたりに移動する電荷の量
- 電流 i が一定なら時間tの間に動く電荷qは $q = it$
- 電流 i が変化する場合、微小時間Δtの間に移動する電荷Δqは$\Delta q = i\Delta t$



- 微分で書くと、$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$
- 積分で書くと、$\boxed{q = \int i dt}$
- $q = Cv$より、

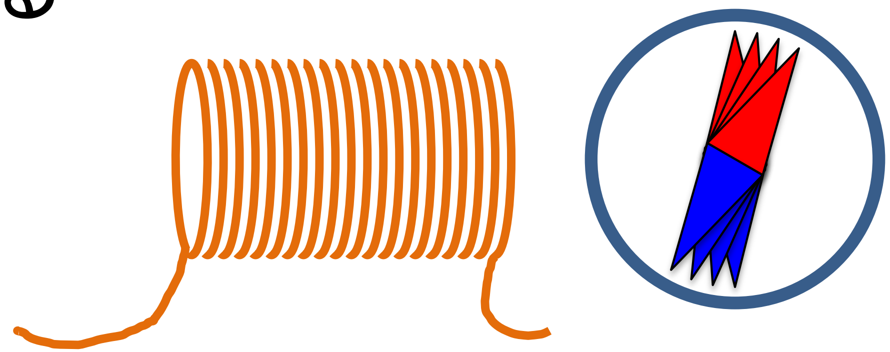
$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$ $\boxed{v = \frac{1}{C}\int i dt}$ ← 重要

（2）コイル

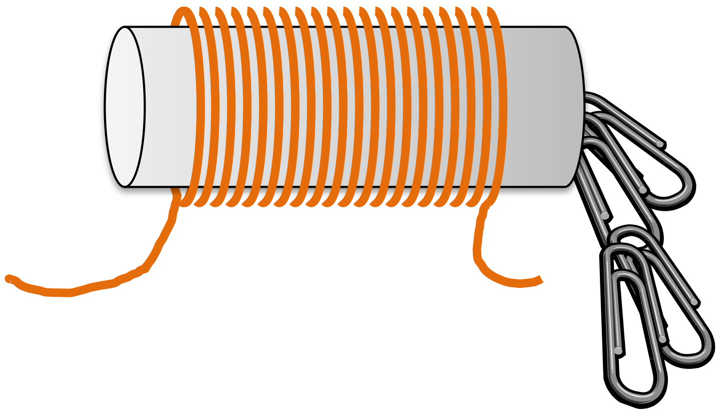
- 螺旋状や渦巻状に巻いた導線からなる回路素子
  - 導線を鉄芯に巻くこともある
- 日本語では「コイル」という呼び方が定着しているが、英語では「 $\boxed{\text{インダクタ（inductor）}}$ 」という呼び名が一般的である
- インダクタンス（inductance）の単位は $\boxed{\text{H（ヘンリー）}}$

小学校で習ったコイルの性質

- 電線を巻いたコイルに電流を流すと、磁場が発生する

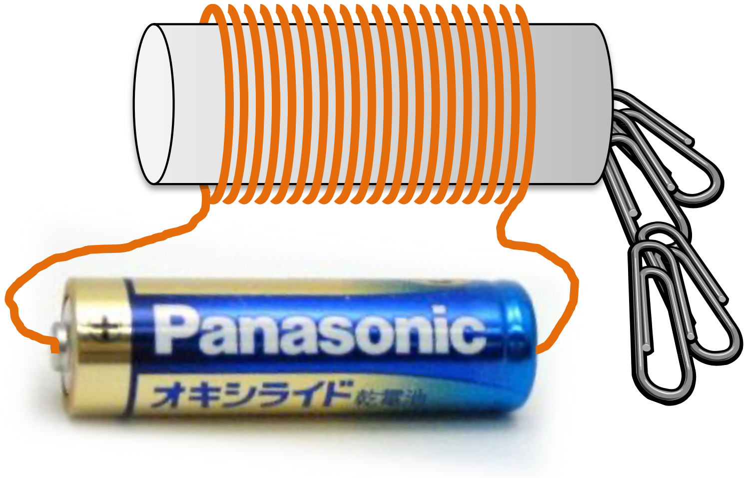


- 特にコイルの中に鉄芯を入れると、より強い磁場が発生する



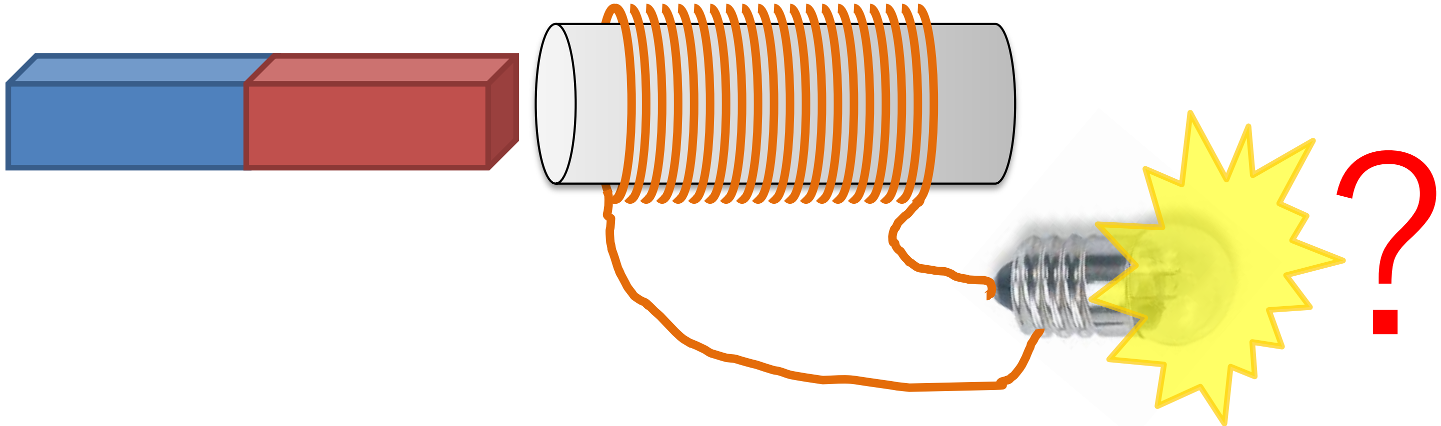
逆に外部から磁場を与えたら？

- コイルに電流を流したら、磁場が発生する



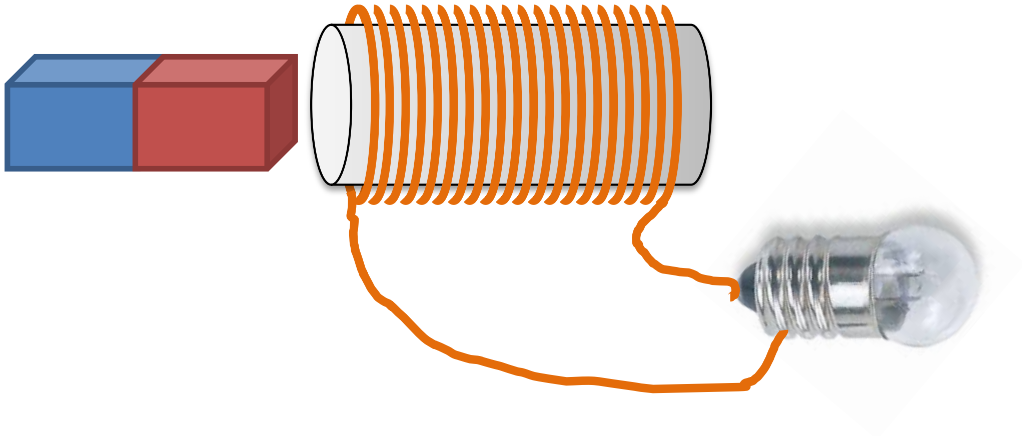
- 電流が流れている間、磁場は存在している
- 磁場の強さは電流の大きさに比例

- 逆にコイルに磁場を与えると、電流が流れるか？



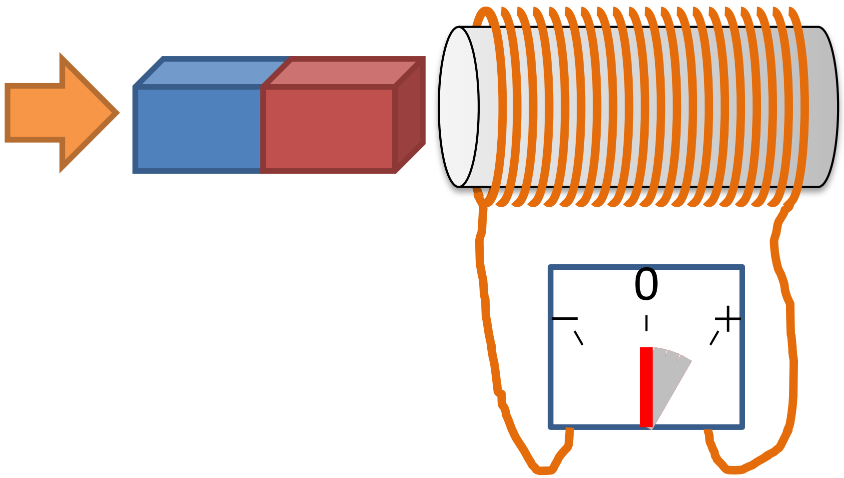
外部からの磁場とコイル

- コイルに一定の磁場をかけた時、電流は 流れない

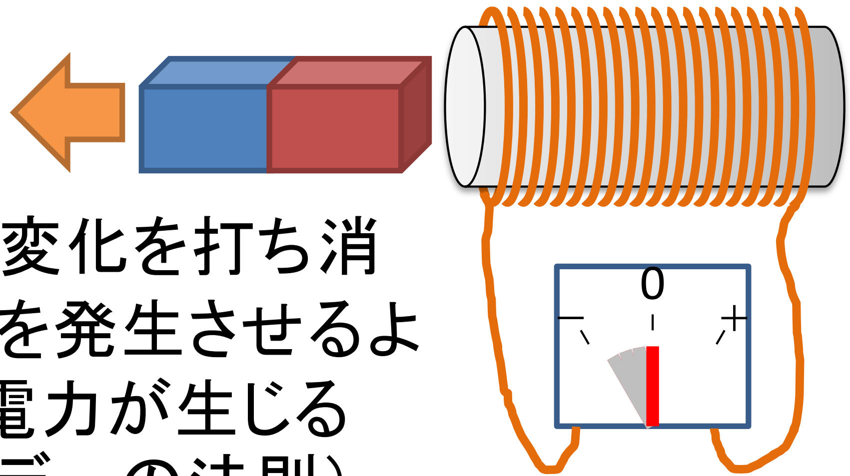


- これで電力を取り出せるなら、原発もソーラーパネルも不要なのだが
- 仕事せずにエネルギーが取り出せる筈がない

- コイルにかかる磁場が変化した時、電流は 流れる



- 磁場の変化を打ち消す磁場を発生させるような起電力が生じる（ファラデーの法則）



コイルの電流と電圧の関係

- 磁束 $\phi = BA$ (B:コイル内の磁場、A:コイルの断面積)
- 電流→磁束
  - コイルを流れる電流 i とコイルを貫く磁束 ϕ は比例する
- 磁束→電圧
  - 磁束の変化 $\frac{d\phi}{dt}$ に比例する起電力 v が発生する
- よって、電流の変化 $\frac{di}{dt}$ と磁束の変化 $\frac{d\phi}{dt}$ と起電力 v が比例する
  - ここで比例係数を L とおくと、以下のように書ける

$$\boxed{v = L\frac{di}{dt}}$$

← 重要

〔参考〕インダクタンスの例

- 前頁の L をインダクタンス（inductance）と呼ぶ
- インダクタンスの単位は「 H（ヘンリー） 」
- 長さ（l）10[cm]、直径 5[mm]の筒に太さ0.4mmのエナメル線を巻いたコイルのインダクタンスは？
  - 電磁気学の教科書でも見ながら試算してみよう
  - 巻き数 n は 10[cm]÷0.4[mm]＝250[回]
  - 断面積 A は 3.14×(2.5[mm])^2＝19.6[mm^2]
  - 真空の透磁率 μ_0 は 1.26[μH/m]
  - インダクタンス $L = \mu_0 n^2 A/l$ ＝15.4[μH]
- 上のコイルの芯に例えば比透磁率200の鉄釘を使えば L は200倍になる

〔参考〕コイルの例

高周波チョークコイル
- 1mH～100mH程度
- 直径5mm～1cm

トロイダルコイル
- 10μH～100μH程度
- 直径1cm～3cm

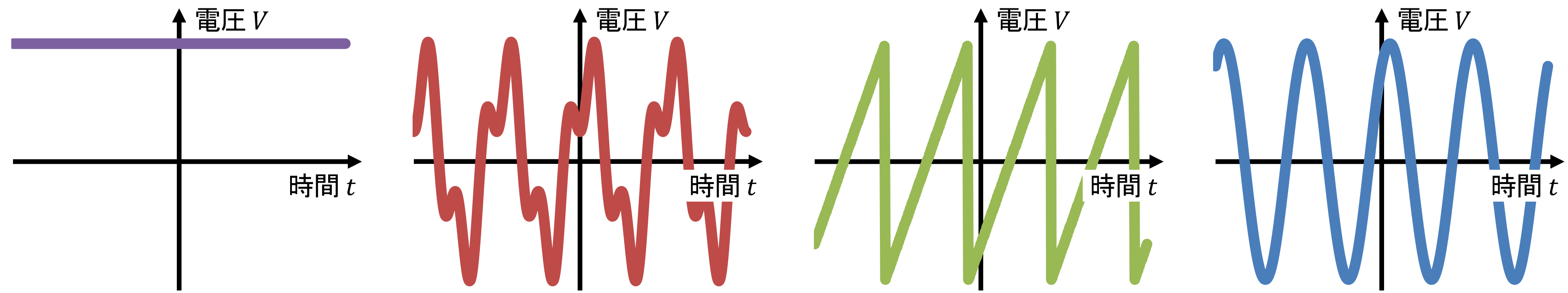
チップインダクタ
- 0.1μH～100μH程度
- 長さ2～3mm

オンチップインダクタ
- 10nH～100nH程度
- 直径10μm～100μm

（3）正弦波交流

直流と交流

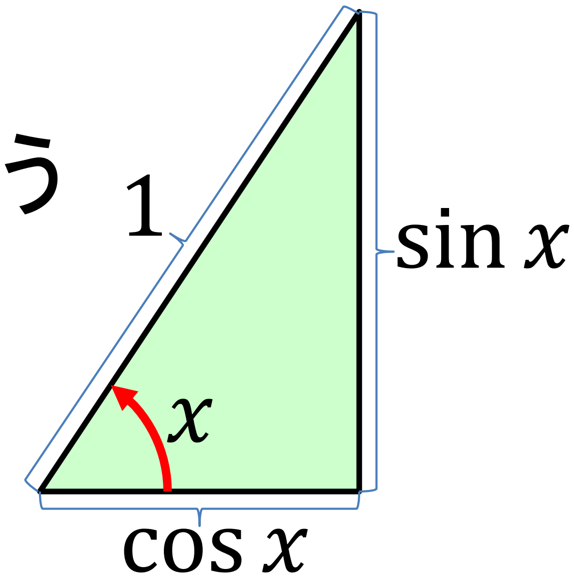
- 直流(Direct Current: DC)
  - 時間的に変化しない電圧や電流
- 交流(Alternating Current: AC)
  - 広義には、時間的に大きさが変化する電流や電圧
  - 狭義には、時間的に向きが変化する電流や電圧
  - より狭義には、周期的に向きが変化する電流や電圧
  - この授業では、交流と言えば正弦波交流を指す

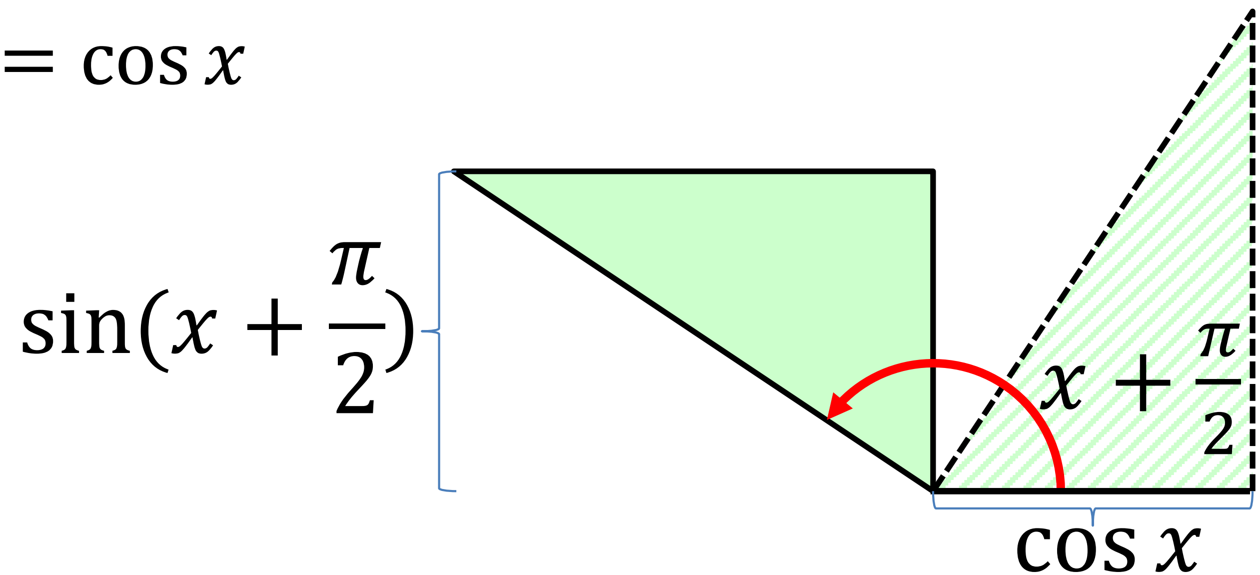


直流　周期的な交流　周期的な交流　正弦波交流

〔復習〕三角関数（1）

- 正弦（sin）と余弦（cos）
- 角度は弧度法（ラジアン、rad）を使う
  $360^\circ = 2\pi$
- ピタゴラスの定理より
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- 90°回すとsinとcosが重なる
  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

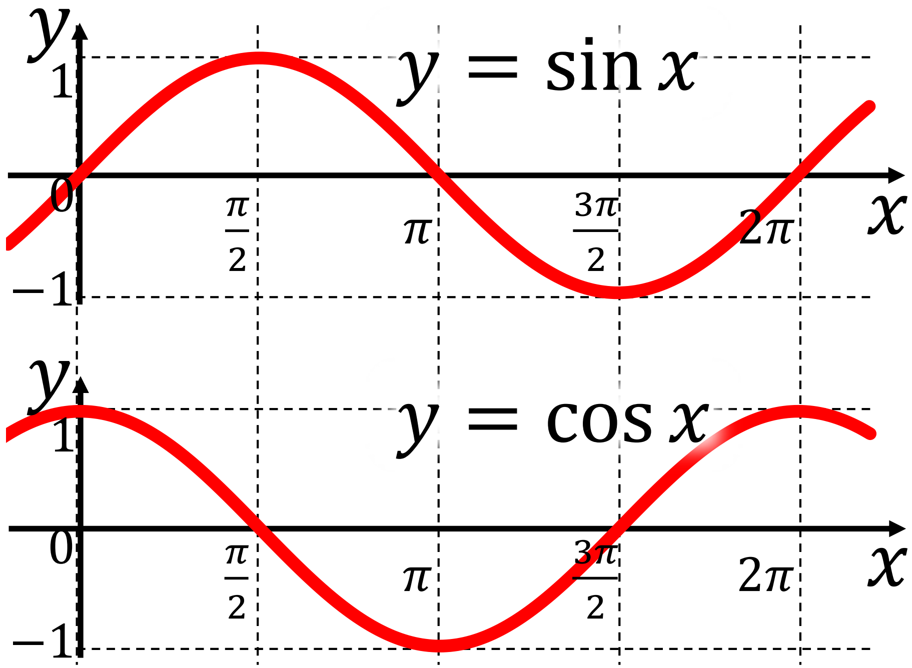




〔復習〕三角関数(2)

- 微分

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

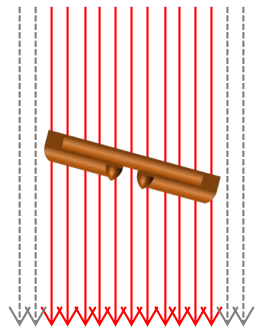


- 不定積分

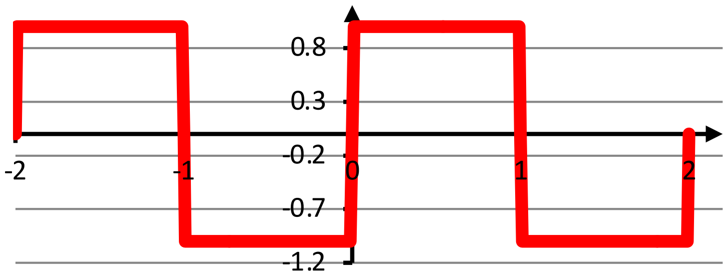
$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$
$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

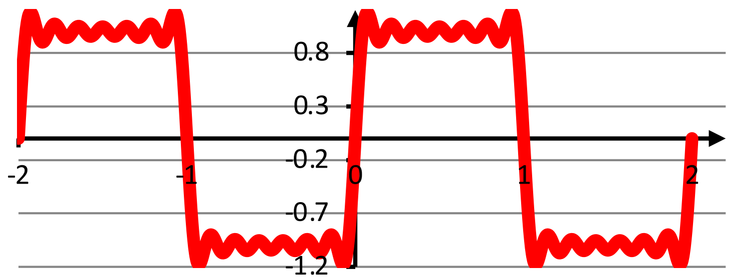
- これらの公式は角度 x がラジアンで表されていることが前提

何故、交流と言えば正弦波なのか？



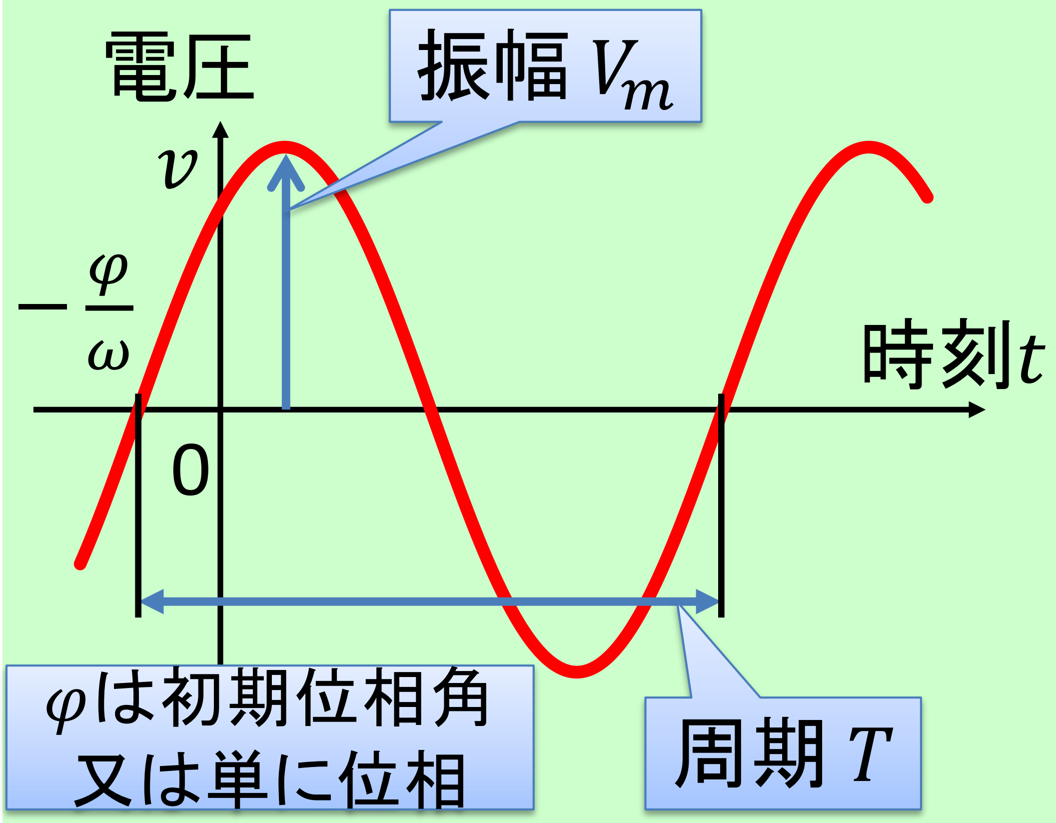
- 実用的意義
  - 発電機を廻すと、正弦波が得られる
    - 回転するコイルを通過する磁束は$\cos\theta$に比例
  - 現在のAC100Vの電源も正弦波である
- 理論的意義
  - 任意の周期波形は、正弦波の重ね合わせで表すことができる（フーリエ変換）ので、正弦波を解析する方法がわかれば、任意の周期波形も容易に解析できる





- 右のグラフは $\frac{4}{\pi}\left(\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \frac{1}{7}\sin 7\theta + \frac{1}{9}\sin 9\theta + \frac{1}{11}\sin 11\theta\right)$ であり、左の矩形波をうまく近似できている

正弦波交流の瞬時値



- 時刻 t に従って刻々と変化する正弦波交流の電圧 v は周期 T を使えば次式で表現できる

$$v = V_m \sin(2\pi \frac{t}{T} + \varphi)$$

- 周期 T に代えて $\boxed{\text{周波数 } f = 1/T}$ を使うと次のように表現できる

$$v = V_m \sin(2\pi f t + \varphi)$$

  - 周波数の単位は Hz（ヘルツ＝1／秒）
- 電気回路では $\boxed{\text{角周波数 } \omega = 2\pi f}$ を使うのが一般的

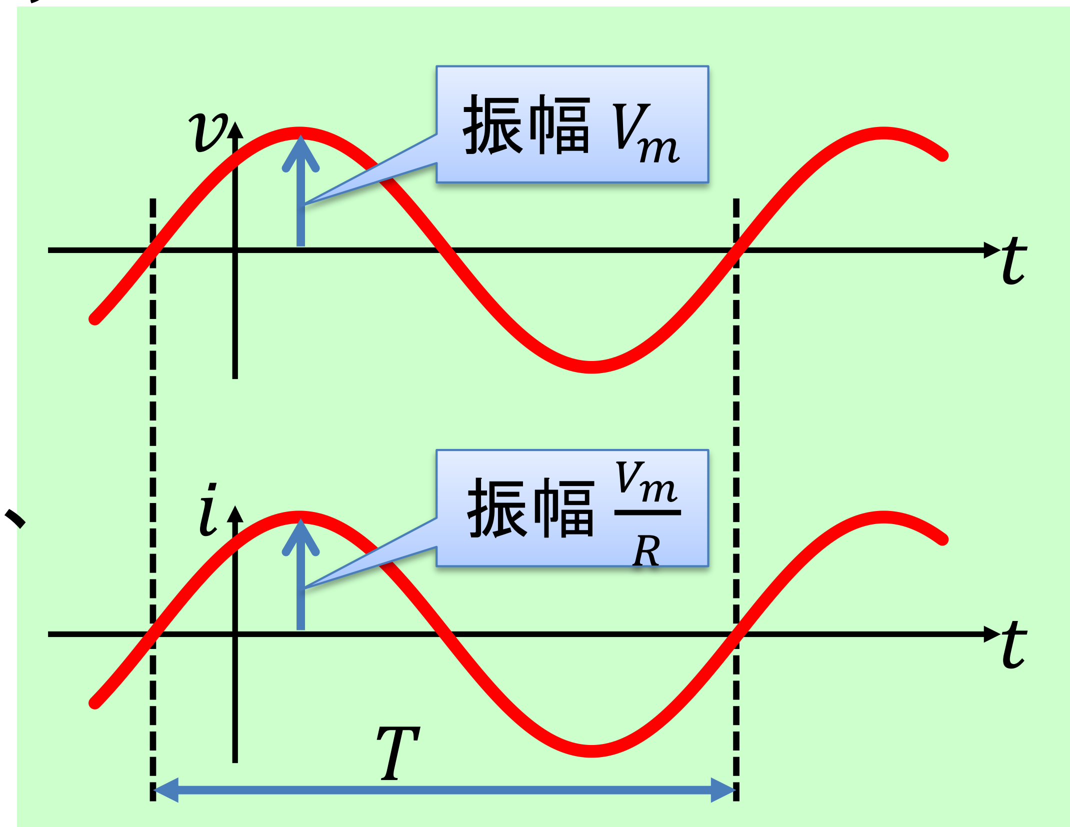
$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

正弦波交流と抵抗

- 直流の場合はオームの法則 $V = IR$ に従う
- 交流の場合もオームの法則 $v = iR$ に従う

  $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ [V] の交流電圧を $R[\Omega]$ の抵抗にかけると、$i = \frac{V_m}{R} \sin(\omega t + \varphi)$ [A] の電流が流れる

- 抵抗の場合、電圧と電流は周期だけでなく位相角も一致する
- 電流の振幅は電圧振幅V_mと抵抗Rで決まり、周波数に依存しない



平均消費電力

【問題】 $v = V_m \sin(\omega t + \phi)$ [V] の交流電圧を $R[\Omega]$ の抵抗にかけた時の平均消費電力を求めよ

- 消費電流は $i = \boxed{\frac{v}{R}} = \boxed{\frac{V_m}{R}\sin(\omega t + \phi)}$ [A] なので、
  消費電力は $p = \boxed{vi} = \boxed{\frac{{V_m}^2}{R}\sin^2(\omega t + \phi)}$ [W] である
  - 半角の公式 $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ を使うと下のように書ける

$$p = \frac{{V_m}^2}{2R}(1 - \cos 2(\omega t + \phi)) \text{ [W]}$$

- これを時刻$t = 0$からTまで平均すると、
  $P_{\mathrm{AC}} = \frac{1}{T}\int_0^T p dt = \boxed{\frac{{V_m}^2}{2R}}$ [W] となる

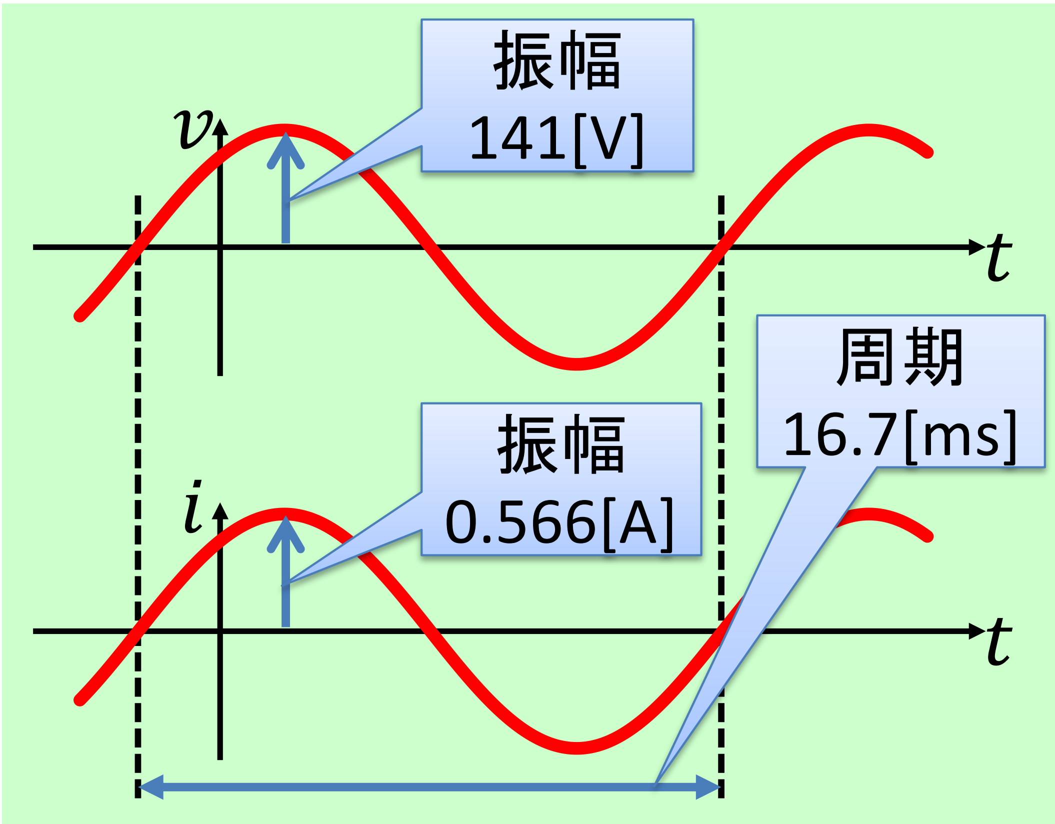
実効値

- 前頁より、抵抗Rに振幅V_mの正弦波交流を与えた時の消費電力は $P_{\mathrm{AC}} = \frac{{V_m}^2}{2R}$ である
- ところで、抵抗Rに直流電圧V_{DC}を与えた時の消費電力は $P_{\mathrm{DC}} = \boxed{\frac{{V_{\mathrm{DC}}}^2}{R}}$ である
- よって、$V_{DC} = \boxed{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}$ のとき、$P_{\mathrm{AC}} = P_{\mathrm{DC}}$ となる
- つまり、振幅V_mの正弦波交流は、電圧$\boxed{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}$の直流と同じ仕事しかしない
- この $V_e = \boxed{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}$ を正弦波交流の 実効値 と呼ぶ

例題

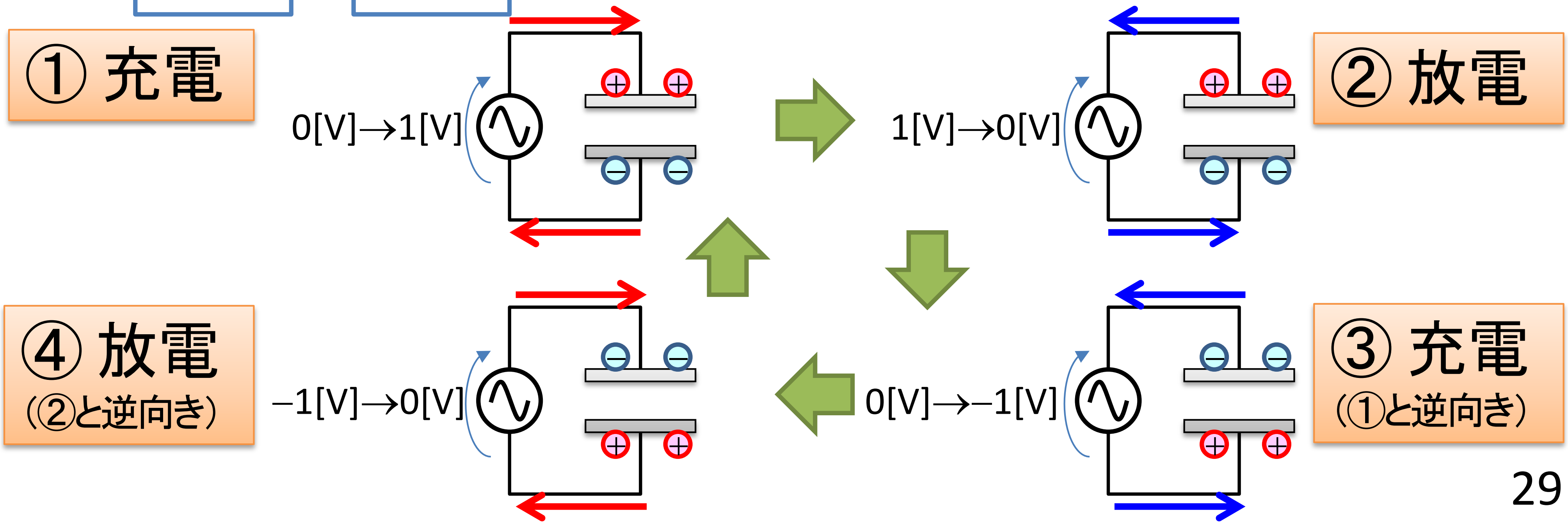
- 西日本の電源コンセントからは実効値100[V] で60[Hz] の交流を取り出すことができる。ここに40[W]の電球をつないだときの電圧波形及び電流波形を描け（振幅や周期も求めて図示すること）

- 電圧の振幅は実効値の $\boxed{\sqrt{2}}$ 倍の $\boxed{141}$ [V]
- 電流の実効値は $\boxed{40[W] \div 100[V]=0.4}$ [A]
- 電流の振幅は実効値の $\boxed{\sqrt{2}}$ 倍の $\boxed{0.566}$ [A]
- 周期は $\boxed{1 \div 60[Hz]=0.0167}$ [s]



正弦波交流とコンデンサ(定性的理解)

- コンデンサに直流電圧をかけても、定常的な電流は流れない
  - 2枚の金属板が離れて向かい合っているだけ
  - 但し、電圧をかけた瞬間は充電のための電流が流れる
- コンデンサに交流電圧をかけたらどうなるか?
  - 充電 と 放電 を繰り返す!

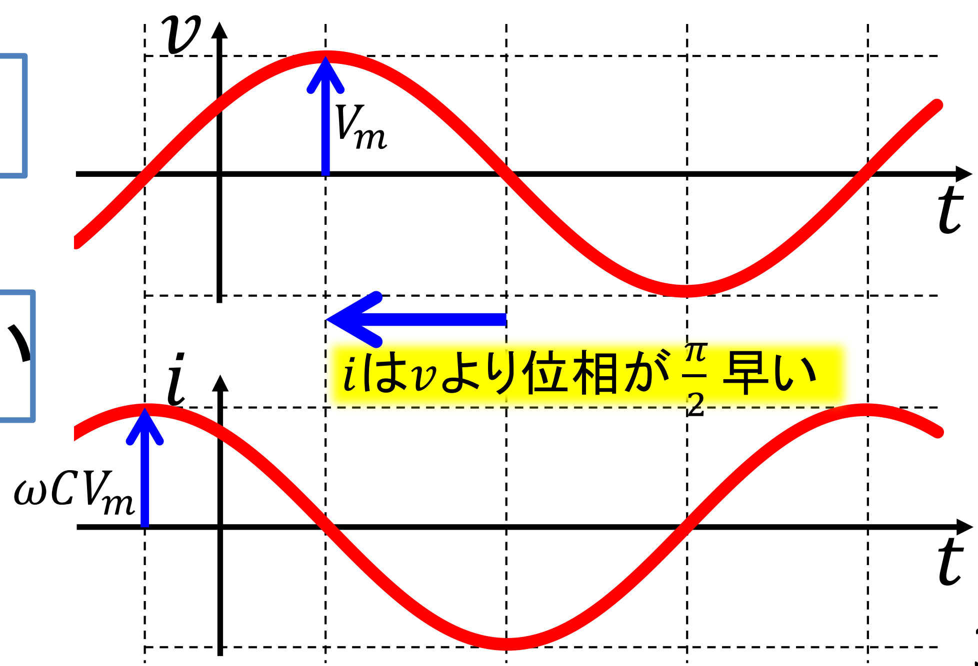


正弦波交流とコンデンサ(定量的解析)

- コンデンサの電圧と電流の関係は $\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$
- 直流は電圧が一定($\frac{dv}{dt} = 0$)なので電流 $i = 0$
- 正弦波交流 $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ をかけると、$i = CV_m \frac{d}{dt}\sin(\omega t + \varphi)$

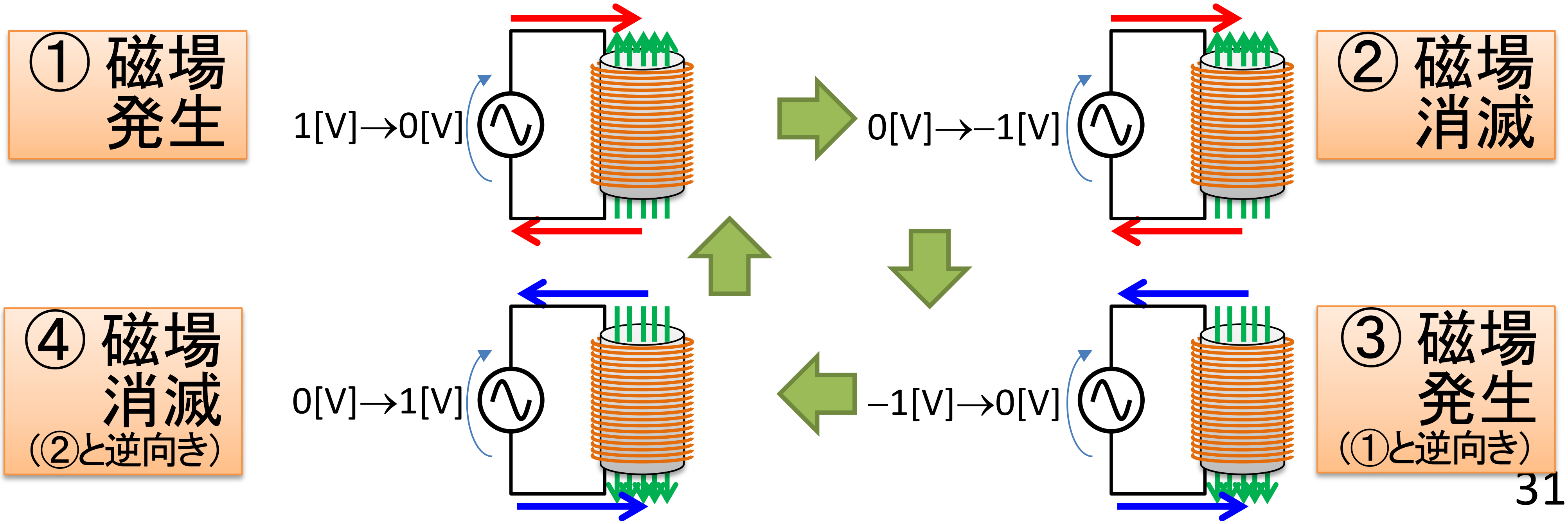
  $= \boxed{\omega CV_m \cos(\omega t + \varphi)}$

  という電流が流れる
  - 位相:電圧より $\frac{\pi}{2}$ 早い
  - 大きさ:ωC に比例



正弦波交流とコイル(定性的理解)

- コイルに直流電圧をかけると大きな電流が流れる
  - 巻いた針金でショートしているようなもの
  - 但し、電圧をかけた瞬間は逆起電力のため徐々に電流が流れ始める
- コイルに交流電圧をかけたらどうなるか？
  - 磁場の発生と消滅を繰り返す！



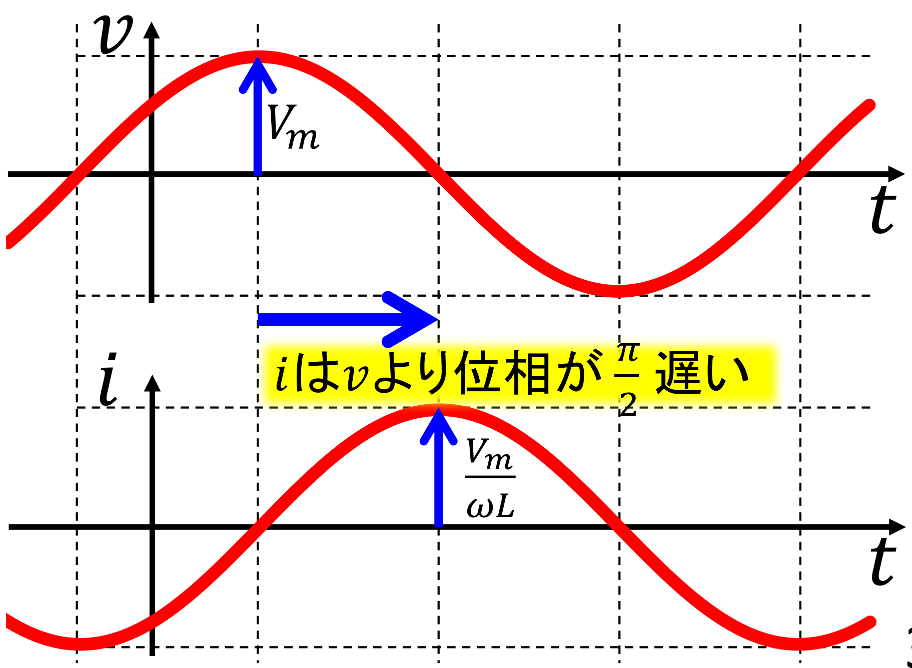
正弦波交流とコイル（定量的解析）

- コイルの電圧と電流の関係は $\boxed{v = L\frac{di}{dt}}$
- 直流は電圧が一定なので電流 i は毎秒 $\frac{v}{L}$ ずつ増加
- 正弦波交流 $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ をかけると、$\frac{di}{dt} = \frac{V_m}{L}\sin(\omega t + \varphi)$ より

$$i = \boxed{-\frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t + \phi)}$$

という電流が流れる

- 位相：電圧より $\frac{\pi}{2}$ 遅い
- 大きさ：ωL に反比例



例題（1）

1. $C = 22$ [μF]のコンデンサに実効値 $V_e = 3$ [V]、周波数 $f = 440$ [Hz] の正弦波交流電圧をかけた。この時の電流の実効値を求めよ。
2. $f = 880$ [Hz]の場合はどうか。

- 電圧振幅は、$V_m = \boxed{\sqrt{2}}V_e$ [V]
- 440[Hz]の場合、電流振幅は $I_m = \boxed{\omega C}V_m = \boxed{2\pi f C}V_m = \sqrt{2}\times\boxed{0.182}$ [A] $= \sqrt{2}\times\boxed{182}$ [mA]
- よって電流の実効値は $\boxed{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \boxed{182}$ [mA]
- f を2倍にすると電流は $\boxed{2}$ 倍の $\boxed{365}$ [mA] になる

例題（2）

1. $L = 4$[mH]のコイルに実効値 $V_e = 3$ [V]、周波数 $f = 440$ [Hz] の正弦波交流電圧をかけた。この時の電流の実効値を求めよ。
2. $f = 880$ [Hz]の場合はどうか。

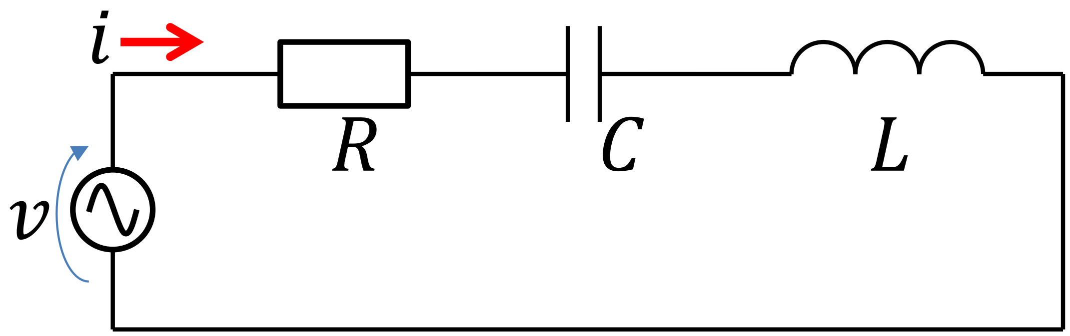
- 電圧振幅は、$V_m = \boxed{\sqrt{2}} V_e$ [V]
- 440[Hz]の場合、電流振幅は $I_m = \frac{V_m}{\boxed{\omega L}} = \frac{V_m}{\boxed{2\pi f L}} = \sqrt{2} \times \boxed{0.271}$ [A]$= \sqrt{2} \times \boxed{271}$ [mA]
- よって電流の実効値は $\boxed{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \boxed{271}$ [mA]
- f を2倍にすると電流は $\boxed{\text{半分}}$ の $\boxed{136}$ [mA] になる

今週のまとめ

- 正弦波交流
  - 周期 T、周波数 f、角周波数 ω、初期位相角（位相）ϕ
  - 振幅 V_m、実効値 V_e
- v と i の瞬時値の関係
  - コンデンサ: $i = C\dfrac{dv}{dt}$
  - コイル: $v = L\dfrac{di}{dt}$
- 正弦波交流の I と V の関係
  - コンデンサ: 振幅: $I_m = \omega C V_m$ 位相: i が v より$\frac{\pi}{2}$早い
  - コイル: 振幅: $I_m = \dfrac{1}{\omega L}V_m$ 位相: i が v より$\frac{\pi}{2}$遅い

来週の内容

- 例えば抵抗とコンデンサとコイルの直列回路を解析するためには、キルヒホッフの法則に従い、下の方程式を立式することが考えられる



$$v = iR + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt}$$

- しかし、この方程式をいちいち解くのは煩わしい
- そこで我々は、振幅と位相をまとめて扱う巧妙な方法「フェーザ」を学ぶ

電気電子回路（第９回）講義は これで終わりです

質問：support_eecra@sl.is.ritsumei.ac.jp

直接返信する場合と、まとめてmanaba+に掲示する場合があります。ご了承ください。