数学演習2 第15回　　2023 1/17

内積

$\mathbb{R}$上のベクトル空間Vにおいて任意の$u, v \in V$に対し実数(u, v)が定義され次が成立つとき、(u, v)をVの内積、(u, v)の値をu, vの内積という。

(1) $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$, $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$

(2) $(cu, v) = c(u, v)$, $(u, cv) = c(u, v)$ $(c \in \mathbb{R})$

(3) $(u, v) = (v, u)$

(4) $(u, u) \geq 0$ で、$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$\mathbb{R}$上のベクトル空間Vに内積が定義されているときVを内積空間という。

$\sqrt{(u, u)} = \|u\|$と表しuのノルムという。$\|cu\| = |c|\,\|u\|$が成立つ。

例 $\mathbb{R}^n$において $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ に対して $(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = {}^t x y$ と定義すると内積になる。$\mathbb{R}^n$のこの内積を標準的内積という。

以下で$\mathbb{R}^n$の内積は標準的内積とする。

<u>定理1.</u> Vを内積空間とすると次が成立つ。

(1) $|(u, v)| \leq \|u\|\,\|v\|$ (シュワルツの不等式)

(2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (3角不等式)

u, vに対し$(u, v) = 0$が成立つときu, vは直交するという。

<u>定理2</u> 内積空間Vにおいて$u_1, \cdots, u_k$が零ベクトルでなく互いに直交するとき1次独立である。

シュミットの直交化法

内積空間Vのベクトル$u_1, \cdots, u_r$が互いに直交し、ノルムが1であるとき正規直交系であるという。Vが有限次元のとき正規直交系であるVの基をVの正規直交基という。

<u>定理3</u> 内積空間Vにおいて$v_1, \cdots, v_r$が1次独立であるとき次の方法で正規直交系$u_1, \cdots, u_r$を任意のiに対し$u_1, \cdots, u_i$と$v_1, \cdots, v_i$の生成する部分空間が等しいように作ることができる。よってVが有限次元のとき正規直交基を持つ。

$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$ とおくと $\|u_1\| = 1$

$u_1, \dots, u_k$ $(k<r)$ までとったとき

$v_{k+1}' = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (v_{k+1}, u_i) u_i$ とおくと $v_{k+1}' \neq 0$ で

$u_{k+1} = \frac{1}{\|v_{k+1}'\|} v_{k+1}'$ とおくと $(u_{k+1}, u_i) = 0\ (1 \leq i \leq k)$, $\|u_{k+1}\| = 1$

となり $u_1, \dots, u_{k+1}$ は正規直交系である。またこれらの生成する部分空間は $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}$ によるものと等しく、$v_1, \dots, v_{k+1}$ によるものと等しい。

問題6.2

1. 次の$\mathbb{R}^3$または$\mathbb{R}^4$の基をシュミットの方法で正規直交化せよ。

(3) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

解) 与えられたベクトルを $v_1, \dots, v_4$ とおく。求める正規直交基を $u_1, \dots, u_4$ とおく。

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

$v_2' = v_2 - (v_2, u_1)u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$

$u_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2' = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4}} \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$

$v_3' = v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$u_3 = \frac{1}{\|v_3'\|} v_3' = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4}} \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$v_4' = v_4 - (v_4, u_1)u_1 - (v_4, u_2)u_2 - (v_4, u_3)u_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

$u_4 = \frac{1}{\|v_4'\|} v_4 = \frac{1}{\frac{1}{4}\sqrt{4}} \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore u_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, u_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, u_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ □

直交行列 実n次正方行列Pが ${}^tP = P^{-1}$ を満たすとき直交行列という。

定理4 実n次正方行列$P = [p_1, \cdots, p_n]$に対し
Pが直交行列 $\Longleftrightarrow$ $p_1, \cdots, p_n$は$\mathbb{R}^n$の正規直交基

問題6.2

3. 次の行列は直交行列であることを示せ。

(2) $\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$

解) 列ベクトルをp_1, p_2, p_3とおく。$\|p_1\|^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, $\|p_2\|^2 = \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$
$\|p_3\|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $(p_1, p_2) = -\cos\phi\sin\phi + \cos\phi\sin\phi = 0$
$(p_1, p_3) = (-\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)\sin\phi = 0$, $(p_2, p_3) = (-\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)\cos\phi = 0$
よってp_1, p_2, p_3は$\mathbb{R}^3$の正規直交基 □

実対称行列の対角化
n次実正方行列 が ${}^tA = A$ を満たすとき実対称であるという。

定理5 実対称行列Aの固有値は全て実数である。

n次実対称行列Aに対し$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$を相異なる固有値全体とする。
λ_iは$T_A(x) = Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$の固有値である。
固有値λ_iのT_Aの固有空間$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda_i x\} = W(\lambda_i; T_A)$を
$W(\lambda_i; A)$と表しAの固有空間といい、T_Aの固有ベクトルをAの固有ベクトルという。

定理6 λ, μをn次実対称行列Aの相異なる固有値 $x, y \in \mathbb{R}^n$をそれぞれ
固有値λ, μのAの固有ベクトルとするとx, yは直交する。

定理7 n次実対称行列Aは直交行列Pで対角化される。すなわち

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

となるn次直交行列Pがとれる。

問題6.3

1. 次の実対称行列を直交行列で対角化せよ。

(4) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

解) $g_A(t) = \det(tE-A) = \begin{vmatrix}t-1 & 1 & 0\\ 1 & t+1 & -1\\ 0 & -1 & t-1\end{vmatrix} = (t-1)^2(t+1) - 2(t-1)$

$= (t-1)(t^2-3) = (t-1)(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$

Aの固有値は $\lambda = 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

固有空間は $\lambda=1$のとき $E-A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$W(1;A) = \left\{ c\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$

$\lambda = -\sqrt{3}$のとき $-\sqrt{3}E-A = \begin{bmatrix}-\sqrt{3}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1-\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1 & -\sqrt{3}-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & -1 & -\sqrt{3}-1\\ 1 & 1-\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1 & -\sqrt{3}-1\end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix}0 & 1 & 1+\sqrt{3}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -\sqrt{3}-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1+\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $W(-\sqrt{3};A) = \left\{ c\begin{bmatrix}-1\\-1-\sqrt{3}\\1\end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$

$\lambda = \sqrt{3}$のとき $\sqrt{3}E-A = \begin{bmatrix}\sqrt{3}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1 & \sqrt{3}-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & -1 & \sqrt{3}-1\\ 1 & 1+\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1 & \sqrt{3}-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 1 & 1-\sqrt{3}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $W(\sqrt{3};A) = \left\{ c\begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}-1\\1\end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$

各固有空間の基 $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1-\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}-1\\1\end{bmatrix}$ は直交し、正規化すると

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}-1\\-1-\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}-1\\1\end{bmatrix}$ は正規直交基で

$P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6+2\sqrt{3}} & -1/\sqrt{6-2\sqrt{3}}\\ 0 & -(1+\sqrt{3})/\sqrt{6+2\sqrt{3}} & (\sqrt{3}-1)/\sqrt{6-2\sqrt{3}}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6+2\sqrt{3}} & 1/\sqrt{6-2\sqrt{3}}\end{bmatrix}$ は直交行列で $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$ □