数学演習2 第12回

2022 12/13

三重積分

三重積分は二重積分と同様に定義される。

$D \subset \mathbb{R}^3$ を有界集合, $f(x,y,z)$ を D 上の有界関数とするとき, D を含む直方体 $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ の分割

$$\Delta : a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = a_2$$
$$b_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = b_2$$
$$c_1 = z_0 < z_1 < \cdots < z_r = c_2$$

の小直方体 $R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ $(1 \le i \le p, 1 \le j \le q, 1 \le k \le r)$ の任意の1点 $(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})$ をとり, 関数

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in D \\ 0, & (x,y,z) \notin D \end{cases}$$

を用いて $f(x,y,z)$ の分割 Δ に対するリーマン和

$$S_\Delta(f) = \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q \\ 1 \le k \le r}} \tilde{f}(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk}) |R_{ijk}| \text{ , } |R_{ijk}| \text{ は } R_{ijk} \text{ の体積}$$

を作るとき, $S_\Delta(f)$ が分割 Δ の幅 $|\Delta| = \max_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q \\ 1 \le k \le r}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}$

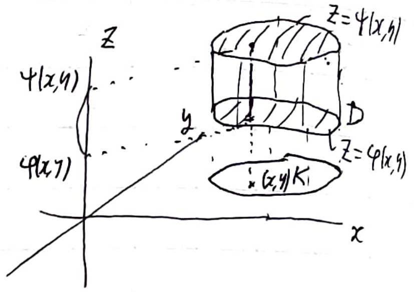
を0に限りなく近づけるとき分割 Δ や代表点 ($(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})$ のこと) のとり方によらない極限値 S に収束するならば S を $f(x,y,z)$ の D 上の三重積分といい $S = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ と表す。このとき $f(x,y,z)$ は D 上三重積分可能であるという。$f(x,y,z) \equiv 1$ が D 上三重積分可能のとき D は体積確定であるといい, $\iiint_D 1\,dxdydz$ を D の体積という。

<u>定理1</u> D が体積確定有界閉集合のとき D 上の連続関数 $f(x,y,z)$ は D 上三重積分可能である。

累次積分

K を $\mathbb{R}^2$ の面積確定有界閉集合, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ を K 上の連続関数で $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ とすると, $D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in K,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ とおくとき D は $\mathbb{R}^3$ の体積確定有界閉集合で D 上の連続関数 $f(x,y,z)$ に対し

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_K \left\{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right\} dxdy$$



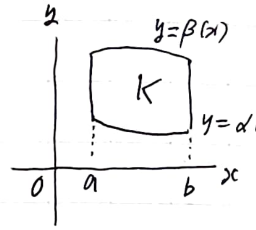
が成立つ。

さらに K が

K: $a \leq x \leq b$, $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ は $[a,b]$ で連続, $\alpha(x) \leq \beta(x)$

と表されているとき



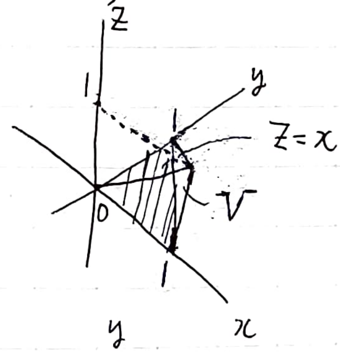
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left\{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right\} dy\right] dz$$

ここで x, y, z の役割を入れかえても全く同様の公式が成立つ。とくに D が直方体であるとき累次積分の順序は任意に選ぶことができる。

練習5.3(A)

4. 次の積分を計算せよ。

(1) $\iiint_V y\,dxdydz$, $V=\{(x,y,z) \mid x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq x\}$



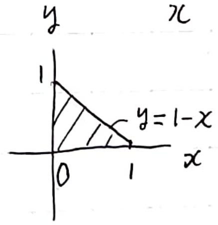
解) V は V: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$, $0 \leq z \leq x$

と表される。

$$\iiint_V y\,dxdydz = \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} \left(\int_0^x y\,dz\right) dy\right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[yz\right]_{z=0}^{z=x} dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} yx\,dy\right) dx$$



$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 x\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x^2-2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{24} \quad \square$$