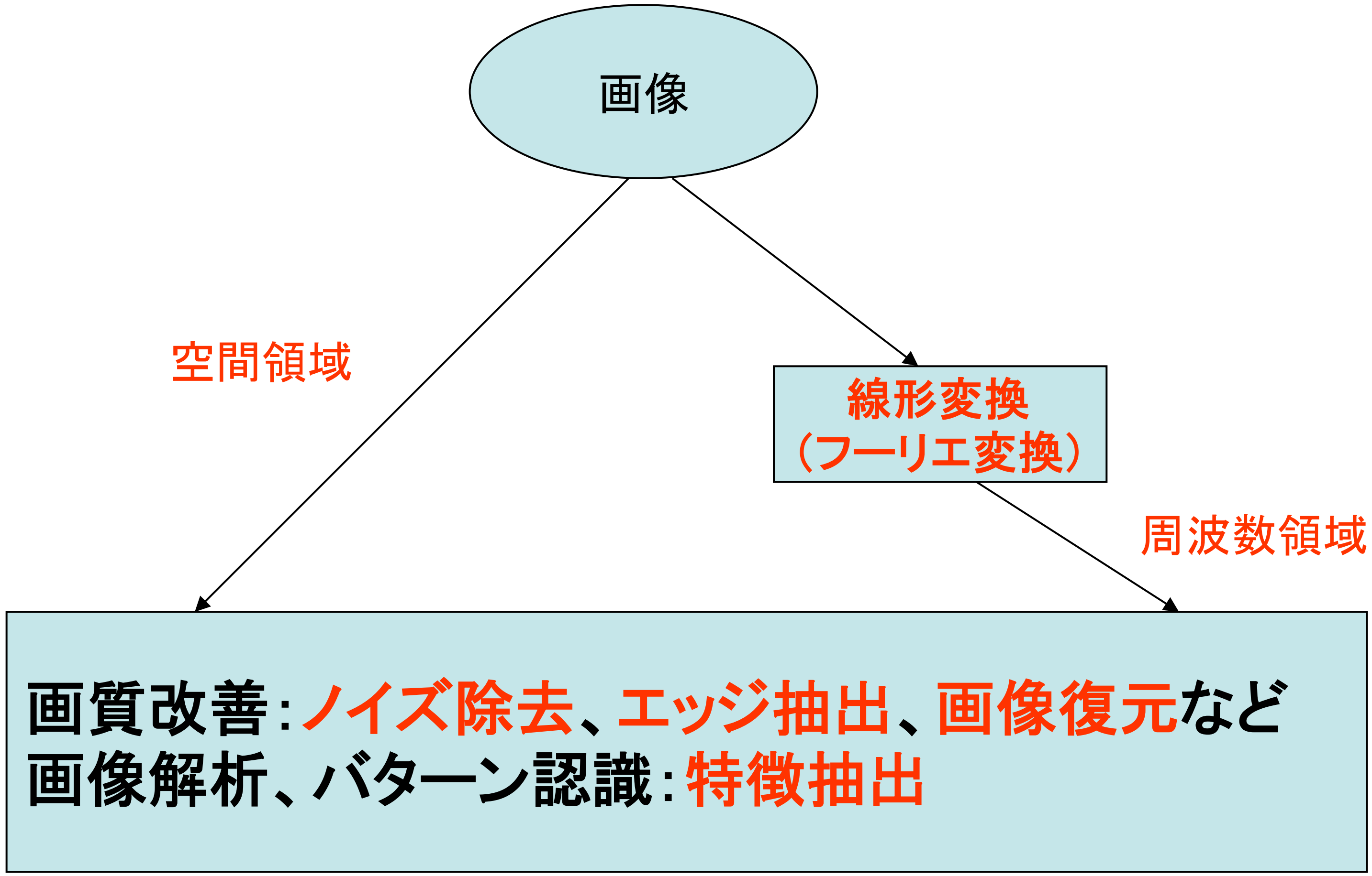
第4回　周波数領域におけるフィルタリング

１．直交変換とフーリエ変換
２．周波数フィルタリング
３．空間フィルタリングと周波数フィルタリング

画像処理の方法



（フーリエ変換、周波数領域画像処理＝＞第５、６回）

直交変換とフーリエ変換

直交関数系

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

⟹ **f(x)とg(x)とが直交する**

(離散系：$\sum_{i=0}^{N} f(x_i)g(x_i) = 0$）

関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots \phi_n(x)$ が互いに直交するとき、すなわち

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx = 0; \quad i \neq j$$

⟹ **直交関数系**

（離散系：　$\sum_{k=0}^{N} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k) = 0)$

注：各関数がxの多項式なら、これを直交多項式という

三角関数（sin, cos）は直交関数である

$\cos kx, \sin kx, k = 1,2,3,\cdots,$ **は空間[−π,π]上の直交関数である。**

証明:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(k+l)x - \sin(k-l)x) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+l)x + \cos(k-l)x) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+l)x - \cos(k-l)x) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \pi$$

信号または関数は直交関数（基底関数）の線形和で表される

$$f(x) \approx c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x)$$

ここで、c_iは係数であり、c_iのみで信号（画像）を表現することができる。信号（画像）のコーディングという。少ない基底関数で表現することができれば、信号（画像）を少数の数値で表現することができ、信号（画像）の圧縮になる。

基底関数（直交関数）がわかっている場合、信号（画像）に合った係数ciをどのように求めることができるでしょうか？

係数c_iの求め方

$$J = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x) - c_0\phi_0(x) - c_1\phi_1(x) - \cdots - c_n\phi_n(x))^2 dx$$

(離散系：$J = \frac{1}{2}\left\| f(x) - c_0\phi_0(x) - c_1\phi_1(x) - \cdots - c_n\phi_n(x) \right\|^2$)

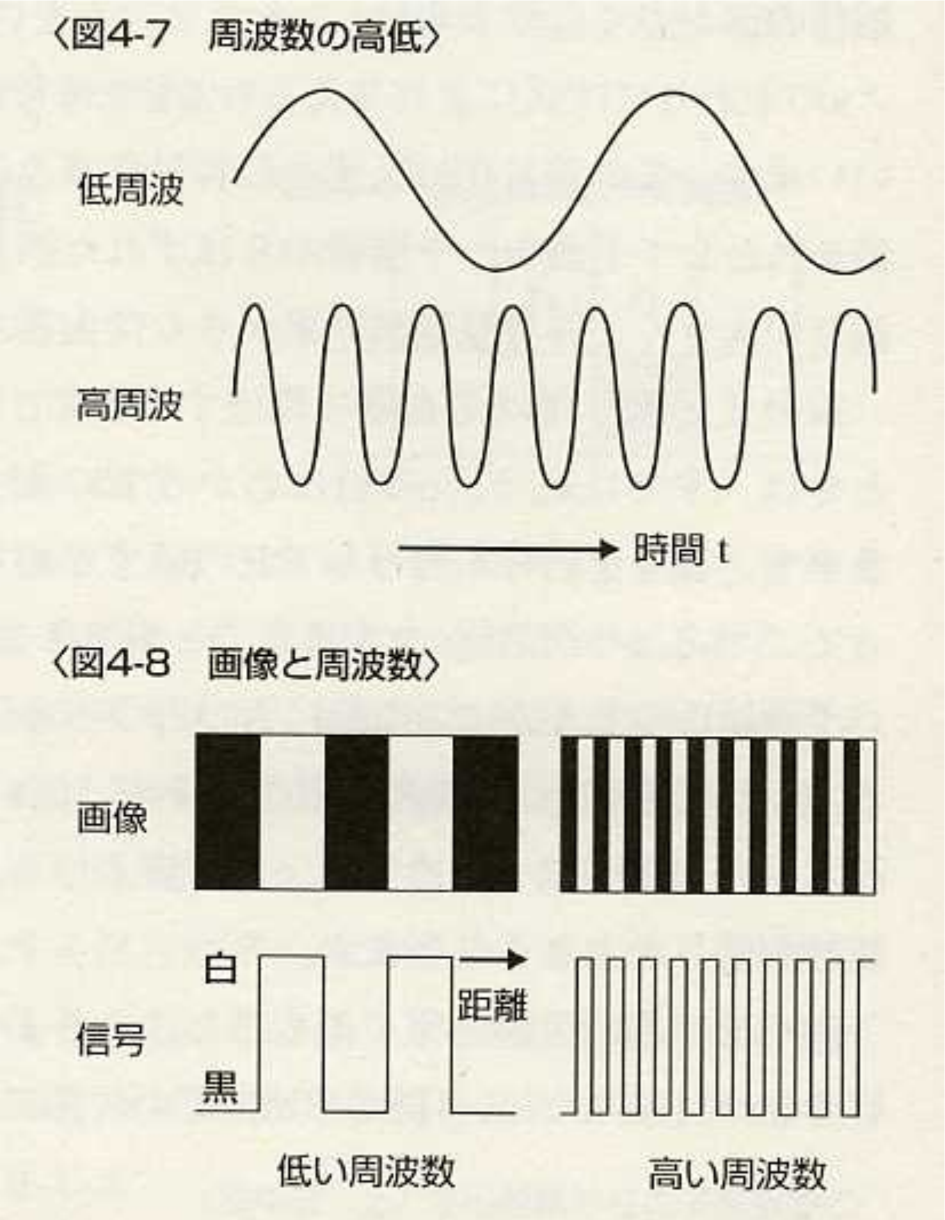
評価関数Jを最小になるC_iを求める

$$\frac{dJ}{dc_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_i = \frac{\int_a^b f(x)\phi_i(x)dx}{\int_a^b \phi_i(x)^2 dx}, \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

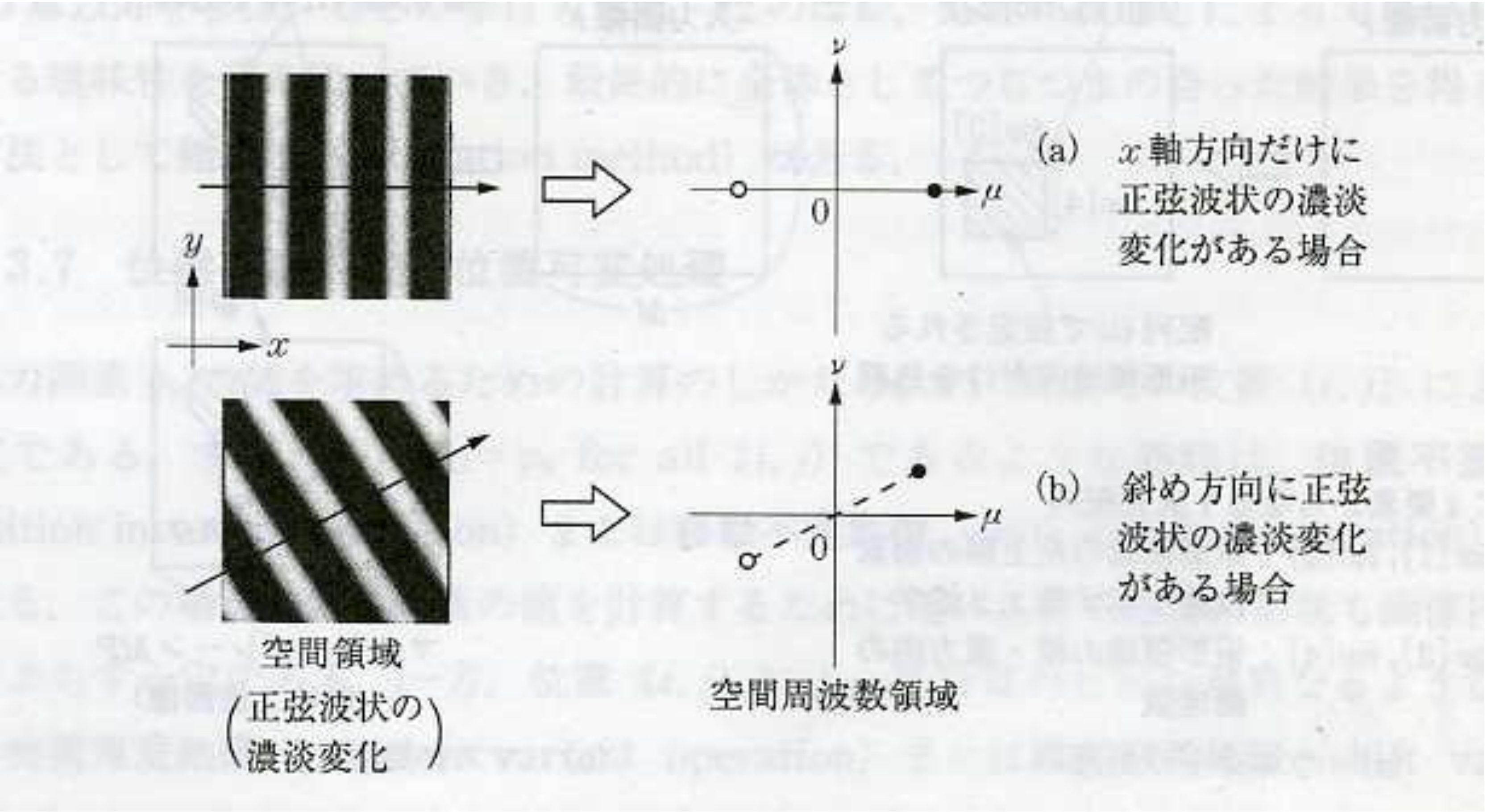
(離散系：$c_i = \frac{\sum_{k=0}^{N} f(x_k)\phi_i(x_k)}{\sum_{k=0}^{N} \phi_i(x_k)^2}, \qquad i = 0,1,\ldots,n$

フーリエ級数とフーリエ変換

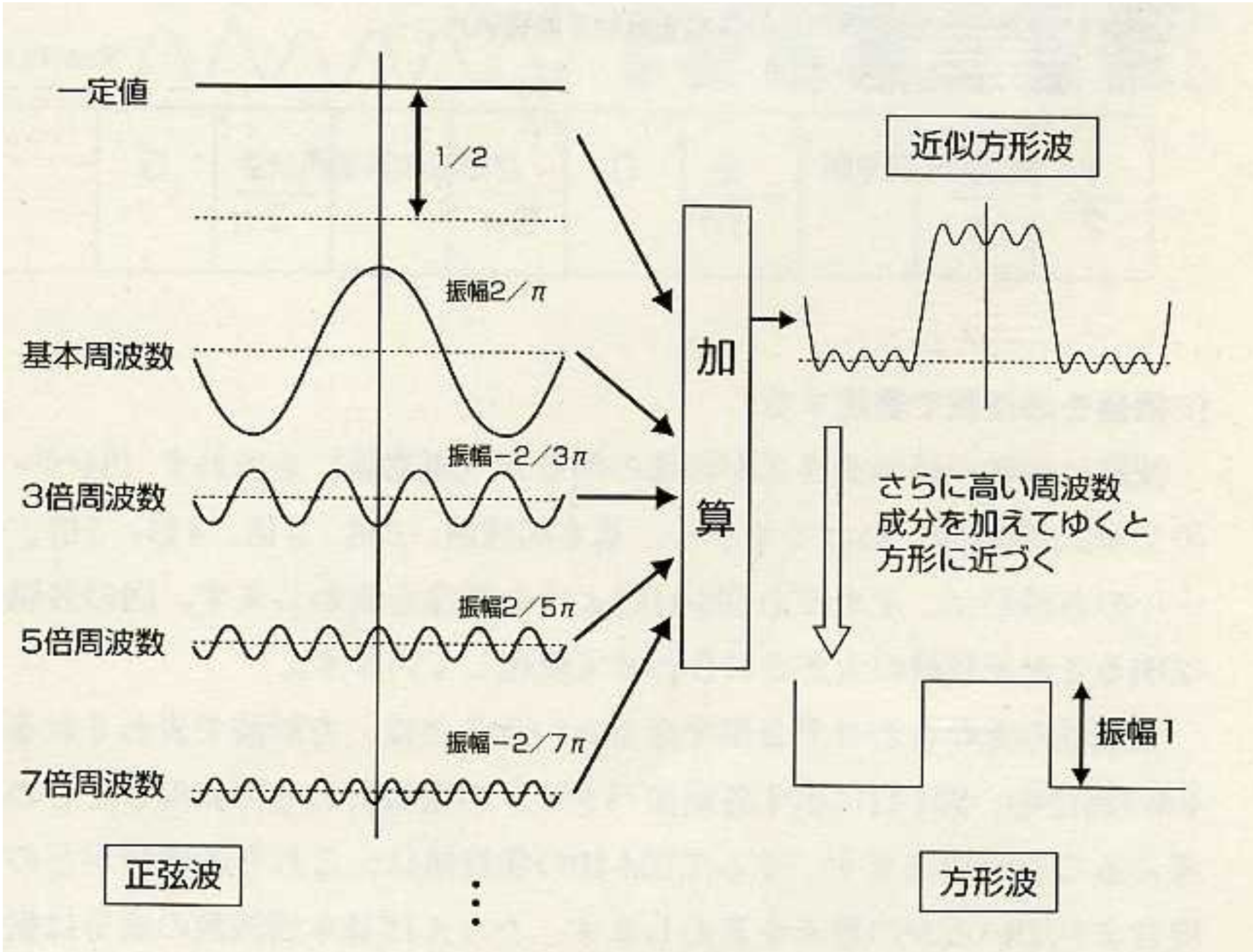
- 三角関数（sin, cos）を基底関数とし、信号を表現するのが、フーリエ級数展開である。



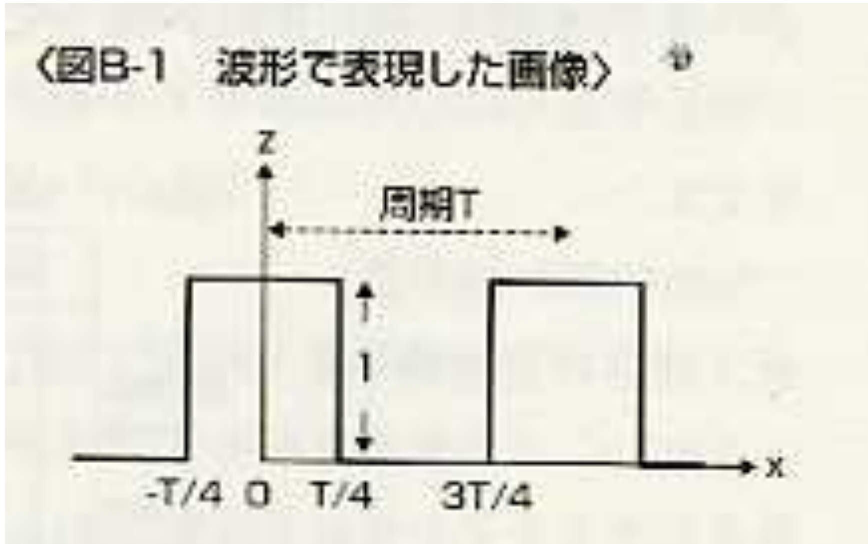
空間周波数


y
x
0
μ
ν
(a)　x軸方向だけに正弦波状の濃淡変化がある場合
(b)　斜め方向に正弦波状の濃淡変化がある場合
空間領域
(正弦波状の濃淡変化)
空間周波数領域

フーリエ級数のイメージ図



矩形波の例

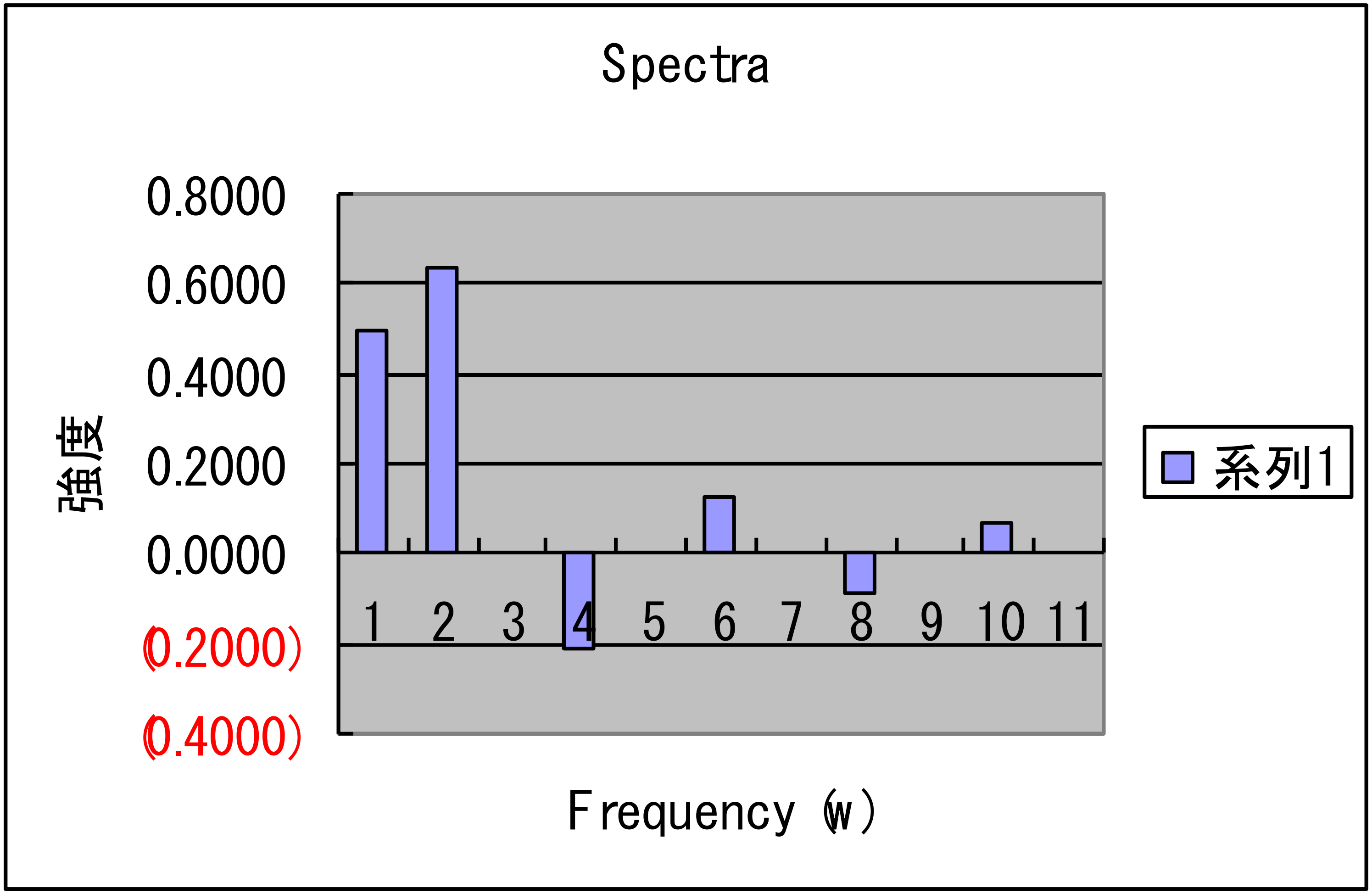


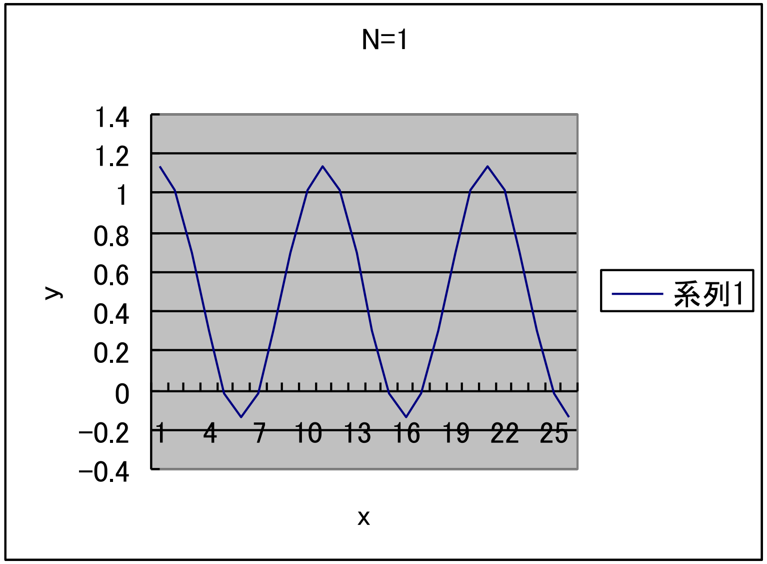
$$z = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos\frac{2\pi}{T}x - \frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{(T/3)}x + \frac{1}{5}\cos\frac{2\pi}{(T/5)}x - \frac{1}{7}\cos\frac{2\pi}{(T/7)}x + \cdots)$$

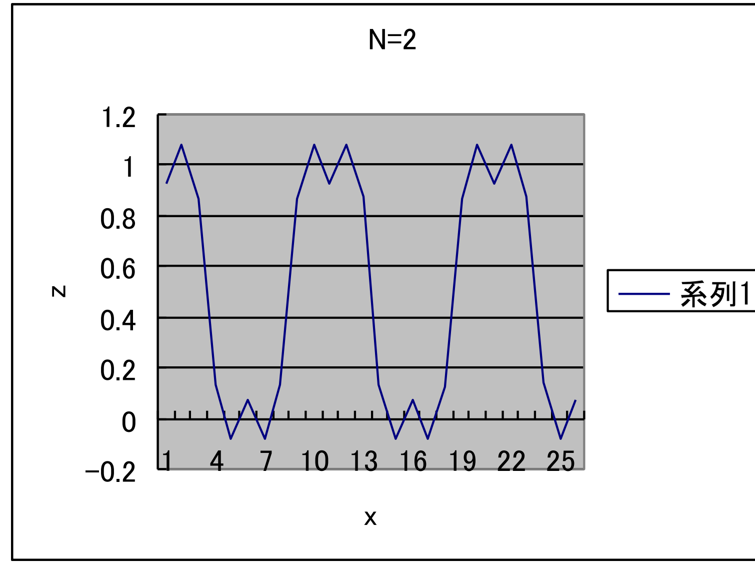
$or \quad (\omega = 2\pi / T \quad and \quad z$を$f(x)$と書き換えると）

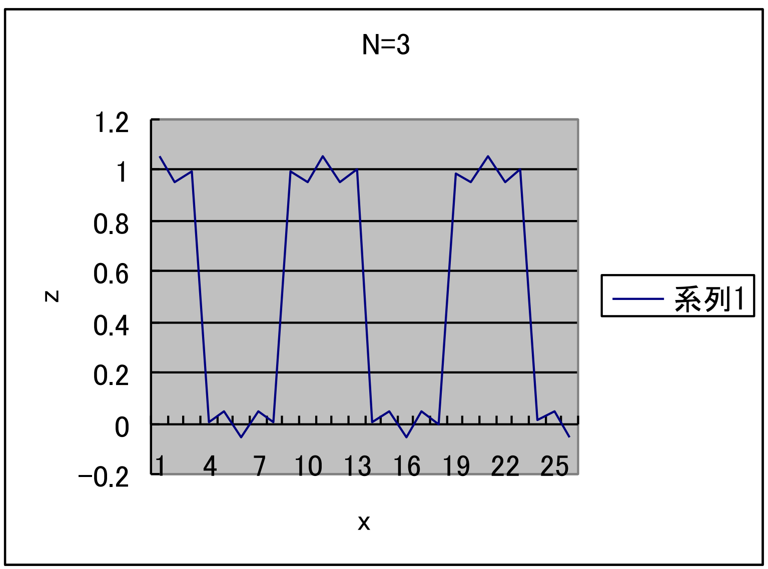
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos\omega x - \frac{1}{3}\cos 3\omega x + \frac{1}{5}\cos 5\omega x - \frac{1}{7}\cos 7\omega x + \cdots)$$

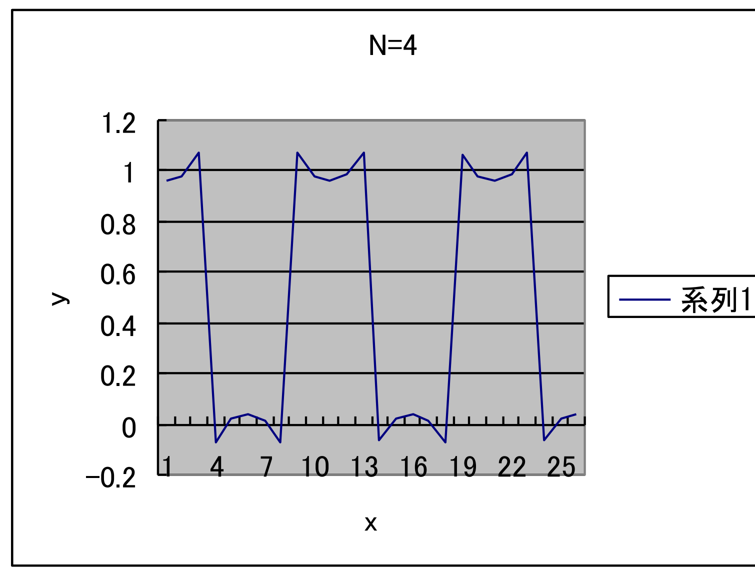
矩形波のスペクトル


Spectra
0.8000
0.6000
0.4000
0.2000
0.0000
(0.2000)
(0.4000)
強度
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
Frequency (w)
系列1

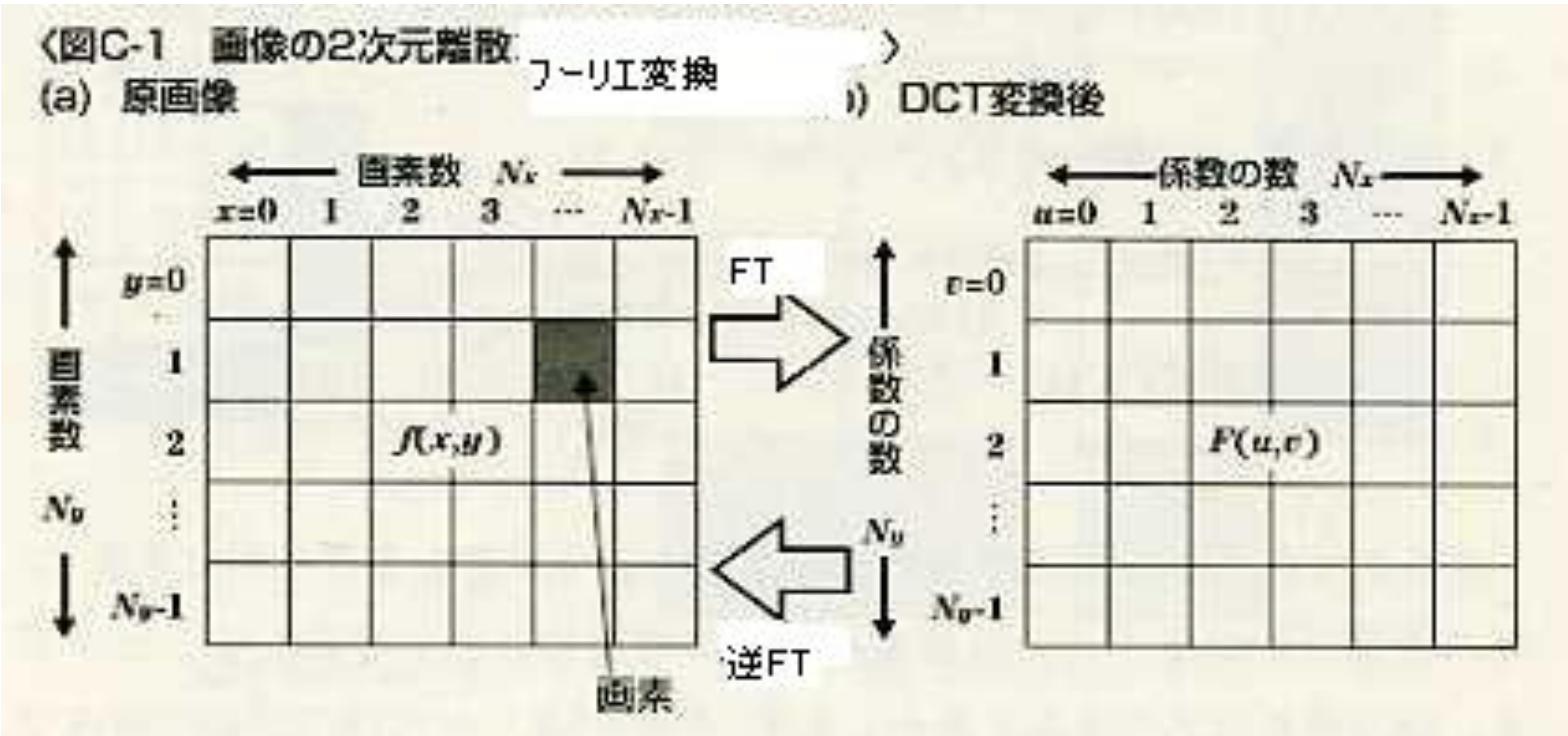

N=1
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
y
1 4 7 10 13 16 19 22 25
x
系列1


N=2
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
z
1 4 7 10 13 16 19 22 25
x
系列1


N=3
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
z
1 4 7 10 13 16 19 22 25
x
系列1


N=4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
y
1 4 7 10 13 16 19 22 25
x
系列1

フーリエ変換とフーリエ逆変換



Fourier Transform

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-i2\pi(ux+vy)dxdy$$

離散フーリエ変換

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\exp[-i2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})]$$

実数部$(real\ \ part)$

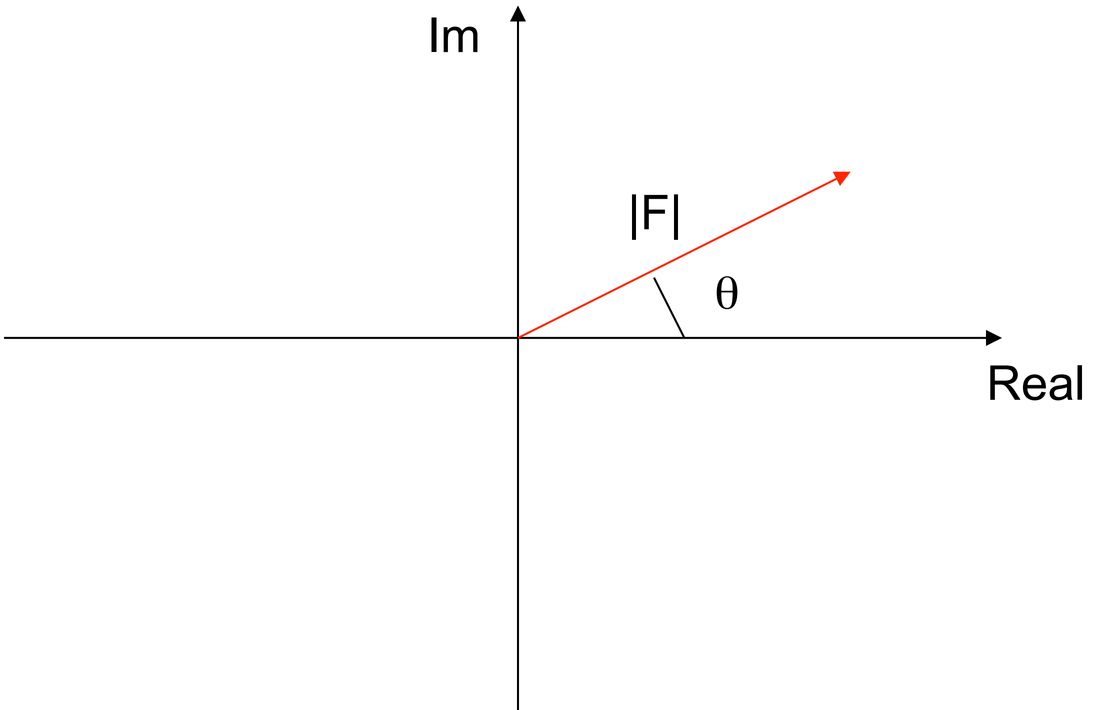
$$F_R(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cos[2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})]$$

虚数部（$imaginary\ part$)

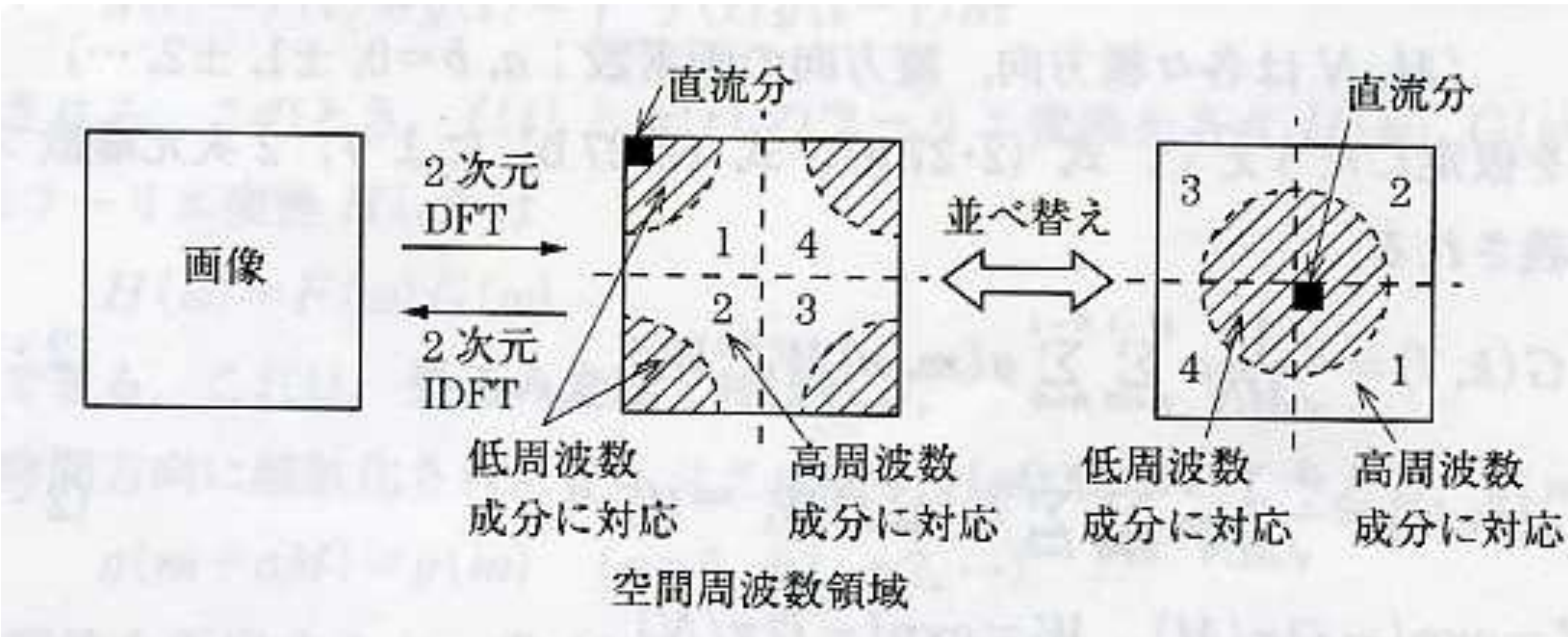
$$F_i(u,v)=-\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\sin[2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})]$$

- 振幅（Amplitude）　$\left|F(u,v)\right| = \sqrt{F_R^2(u,v) + F_i^2(u,v)}$

- 位相（Phase）　$\theta(u,v) = \tan^{-1}\dfrac{F_i(u,v)}{F_R(u,v)}$



２次元離散フーリエ変換結果における周波数成分の配置



フーリエ変換例

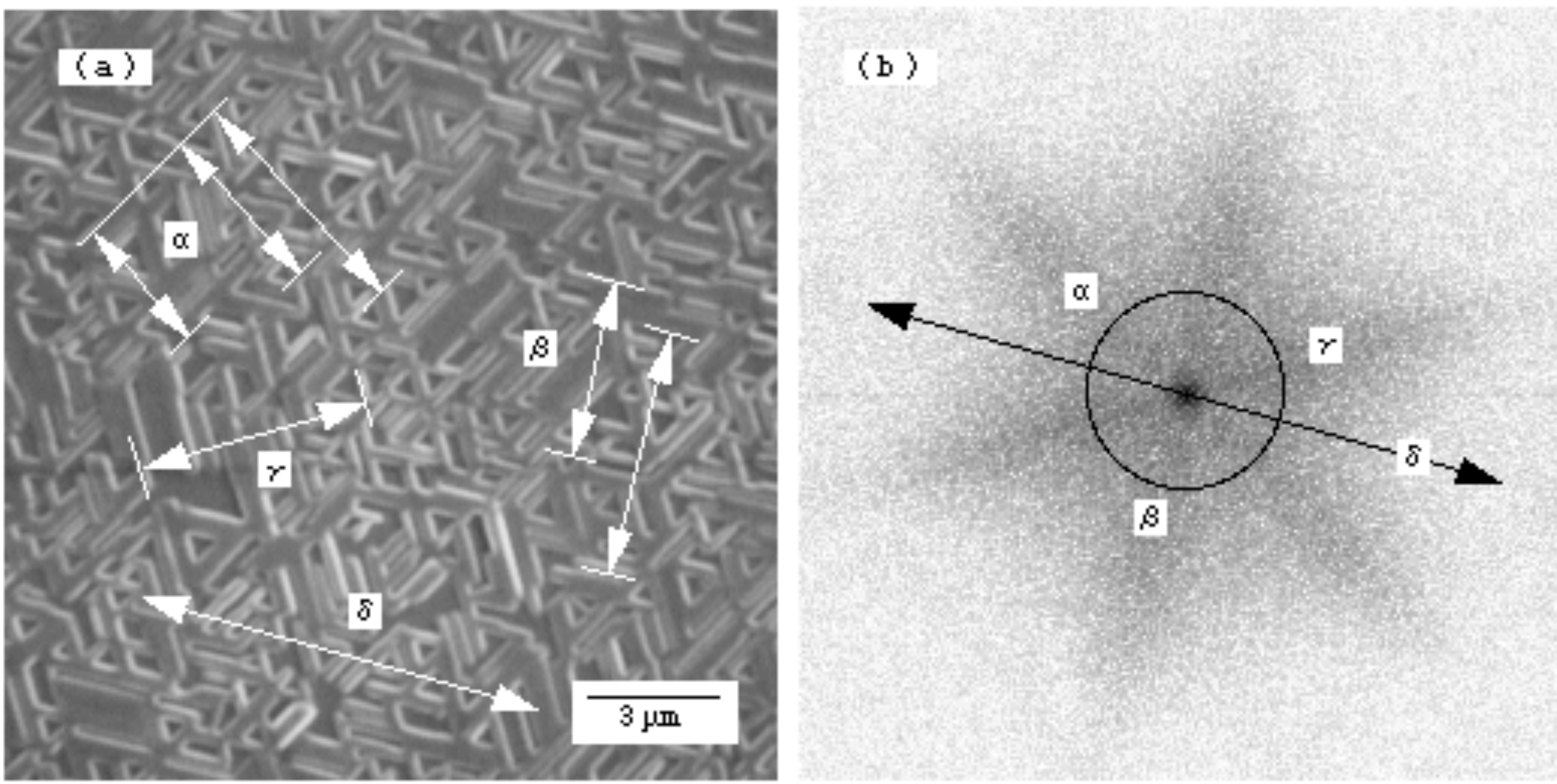


図５　ＨＯＰＧ基板上のパラフィン薄膜（ａ）とそのフーリエ変換像（ｂ）

Inverse Fourier Transform

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\exp[i2\pi(ux+vy)dudv$$

離散逆フーリエ変換

$$f(m,n)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(u,v)\exp[i2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})]$$

実数部$(real\ \ part)$

$$f_R(m,n)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(u,v)\cos[2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})]$$

虚数部（$imaginary\ part$)

$$f_i(m,n)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(u,v)\sin[2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})]$$

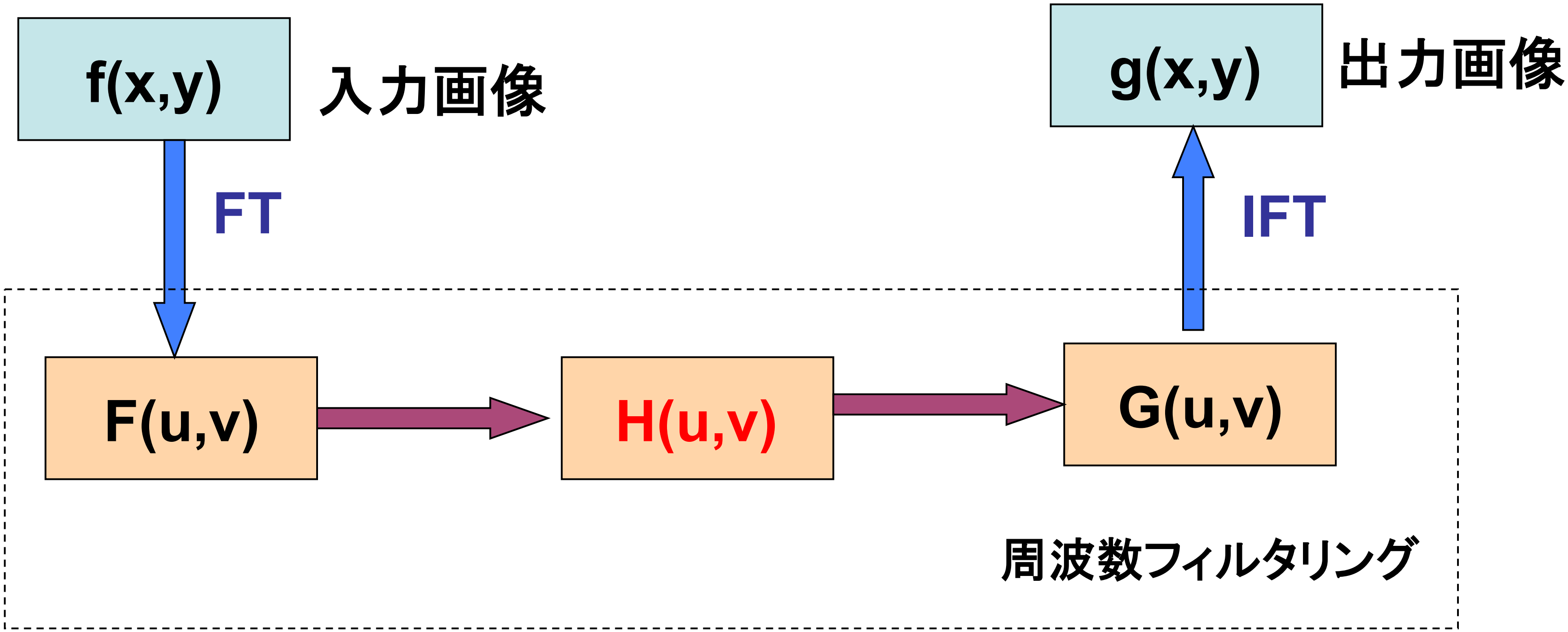
その他の直交変換

直交変換	基底関数
離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform: DFT)	三角関数（sin, cos)
離散コサイン変換 (Discrete Cosine Transform: DCT)	cos
ウォルシュアダマール変換 （Walsh-Hadamard Transform: WHT）	要素として1と-1だけをもつアダマール行列
ウェーブレット変換 （wavelet Transform）	Wavelet関数

周波数フィルタリング

- フーリエ変換の各周波数成分は、画像に含まれるそれぞれの空間周波数の強さを表す。
- 低周波成分は画像中の変化のない部分を表し、高周波成分は画像中の変化する部分（エッジなど）を表す。
- フーリエ変換後の各周波数成分の大きさを各成分ごとに変えることにより、元の画像の性質を変化させることができる。このような処理を周波数フィルタリング（**frequency filtering**）という。

周波数フィルタリング

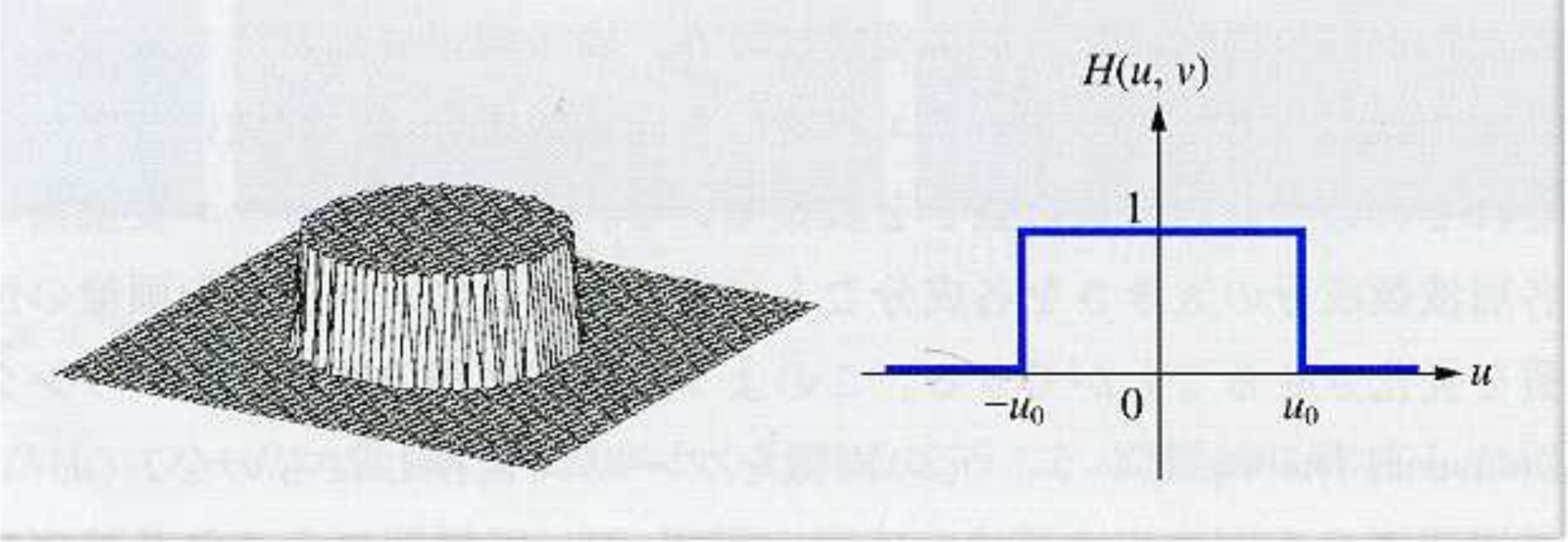


- $G(u,v)=F(u,v)H(u,v)$

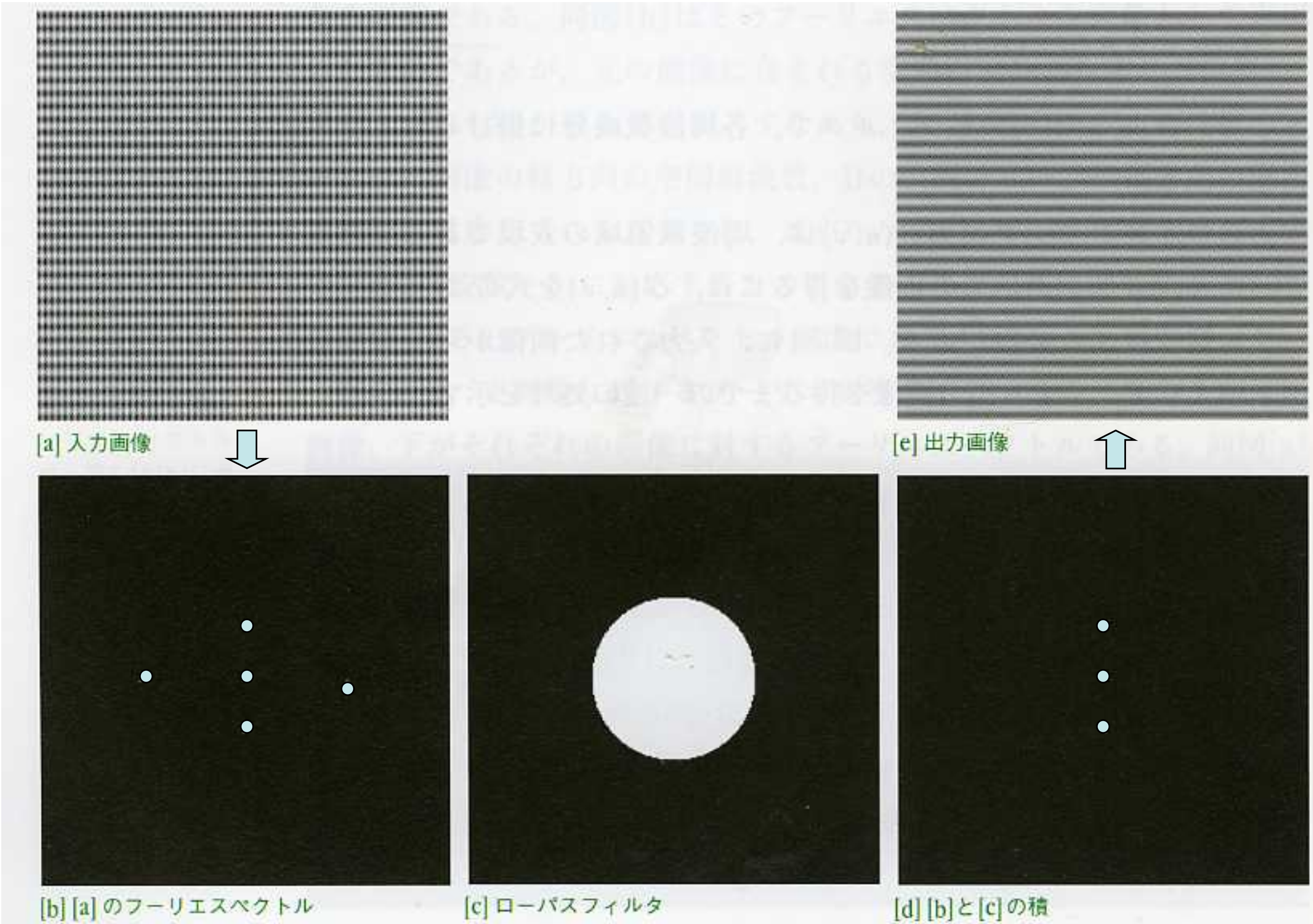
  $H(u,v)$: 周波数フィルタ。各周波数成分にかけられる倍率に相当する（または透過率に相当する）。

ローパスフィルタ(Lowpass filter)

- 画像に含まれる空間周波数成分のうち、低周波数成分は残し、高周波数成分を除去するフィルタを**ローパスフィルタ**という。



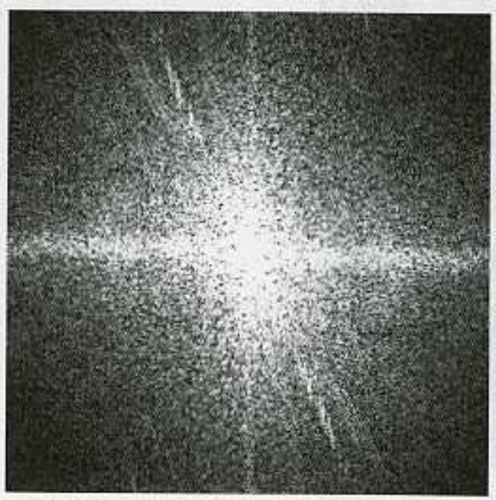
Low-pass filter 例1



Low-pass filter 例2

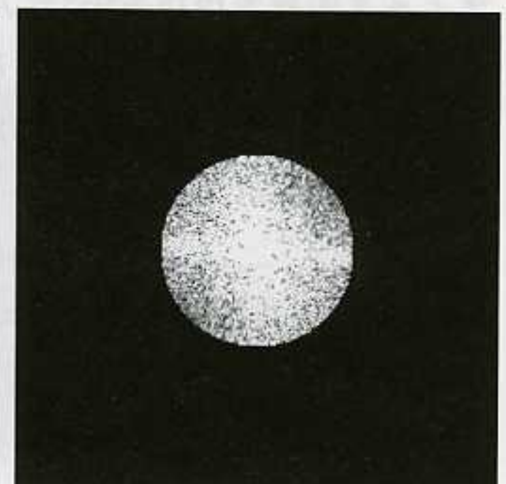
[a] 入力画像 ISO400

[e] 出力画像



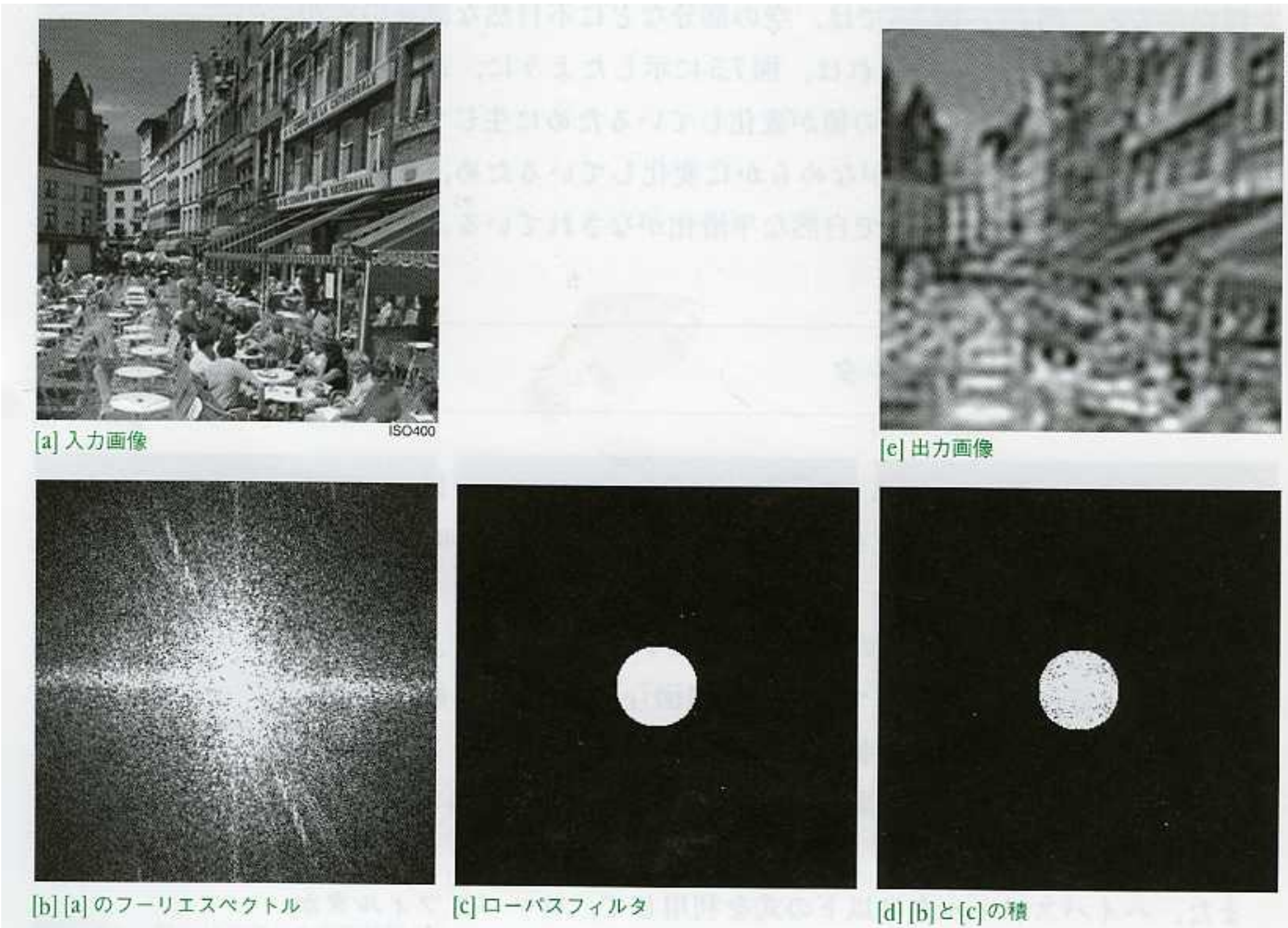
[b] [a] のフーリエスペクトル

[c] ローパスフィルタ



[d] [b]と[c]の積

Low-Pass Filter 例3



[a] 入力画像

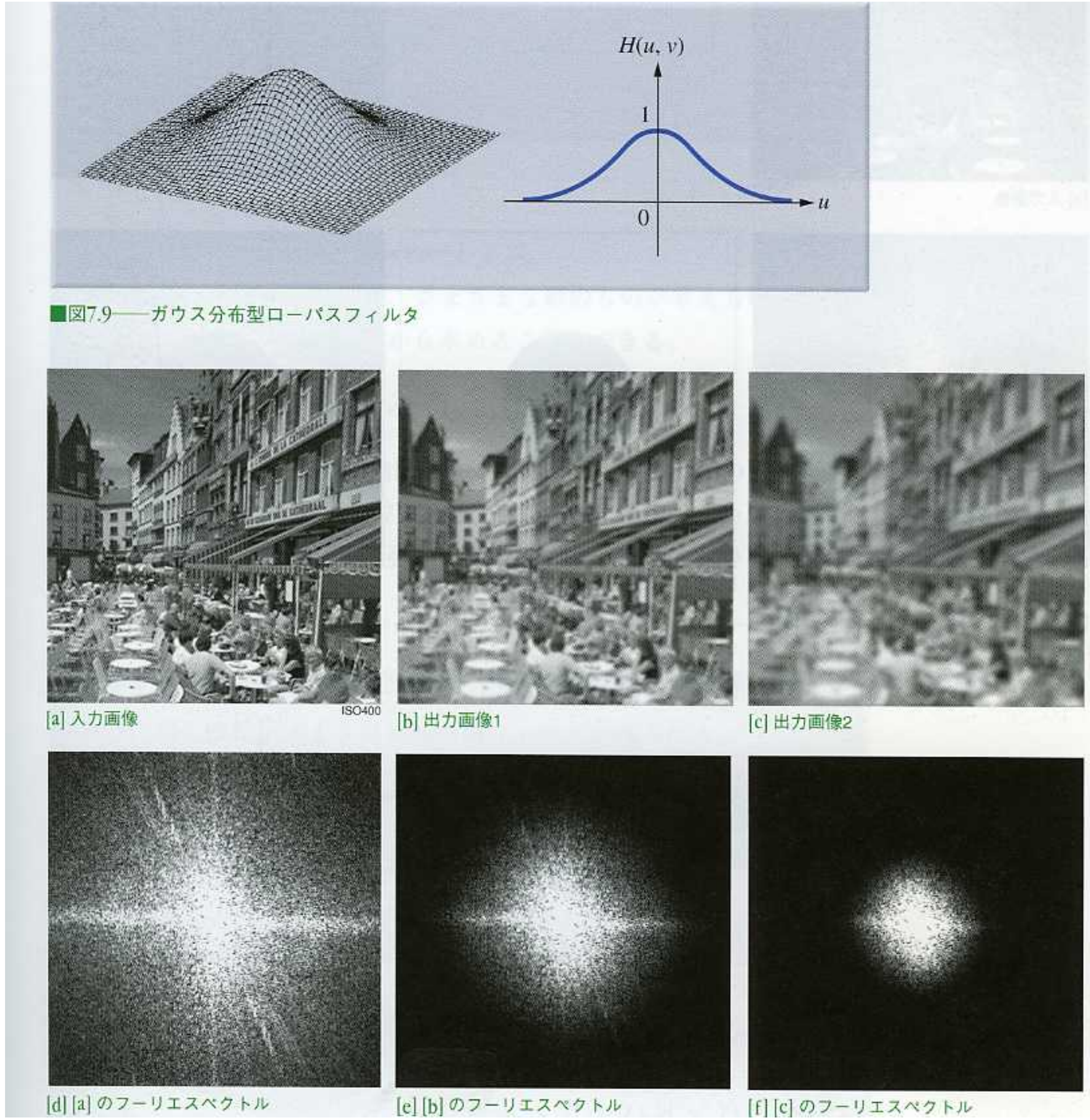
[e] 出力画像

[b] [a] のフーリエスペクトル

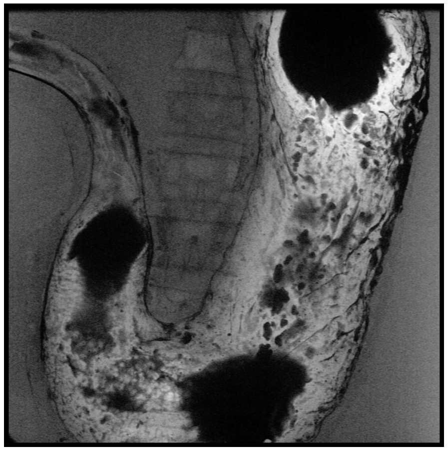
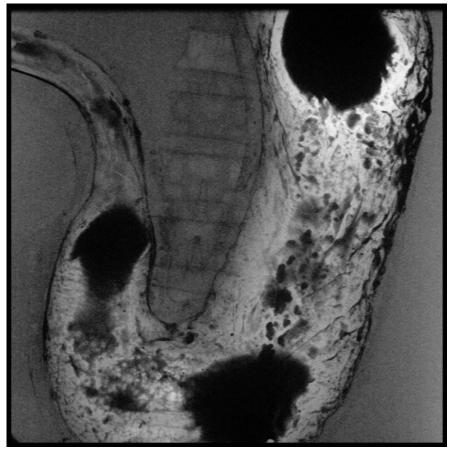
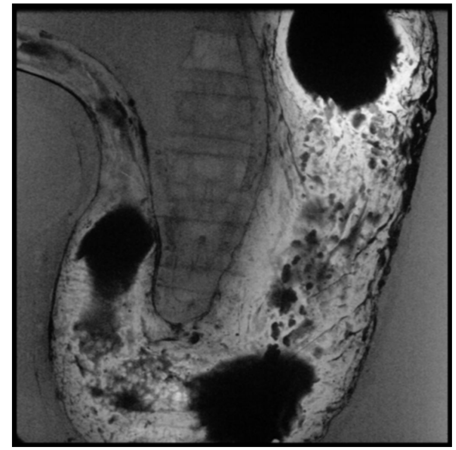
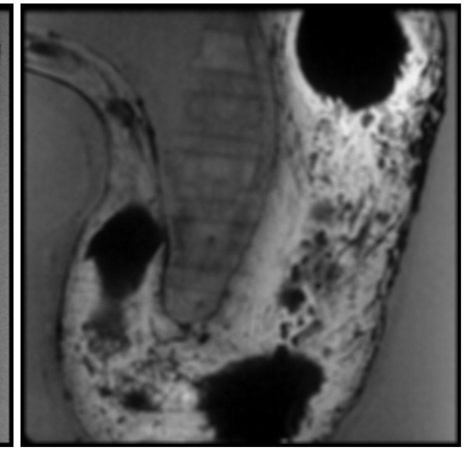
[c] ローパスフィルタ

[d] [b] と [c] の積

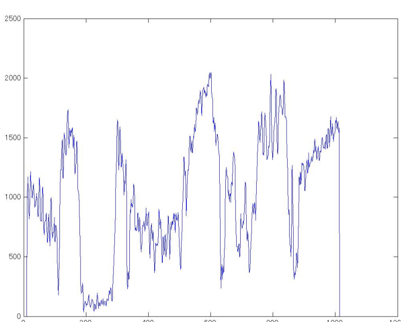
ガウス分布型ローパスフィルタ

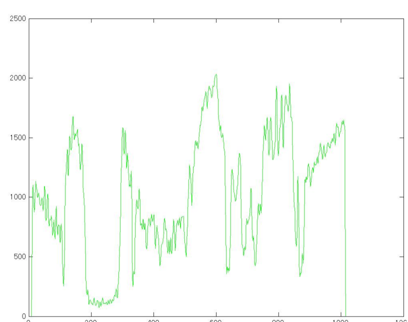


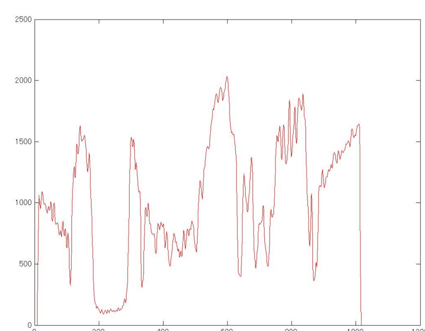
ローパスフィルタによるノイズ除去効果

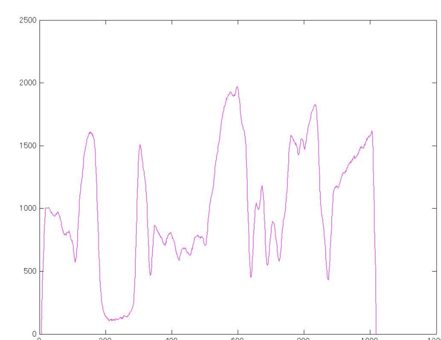





original　gaussian3　gaussian5　gaussian15



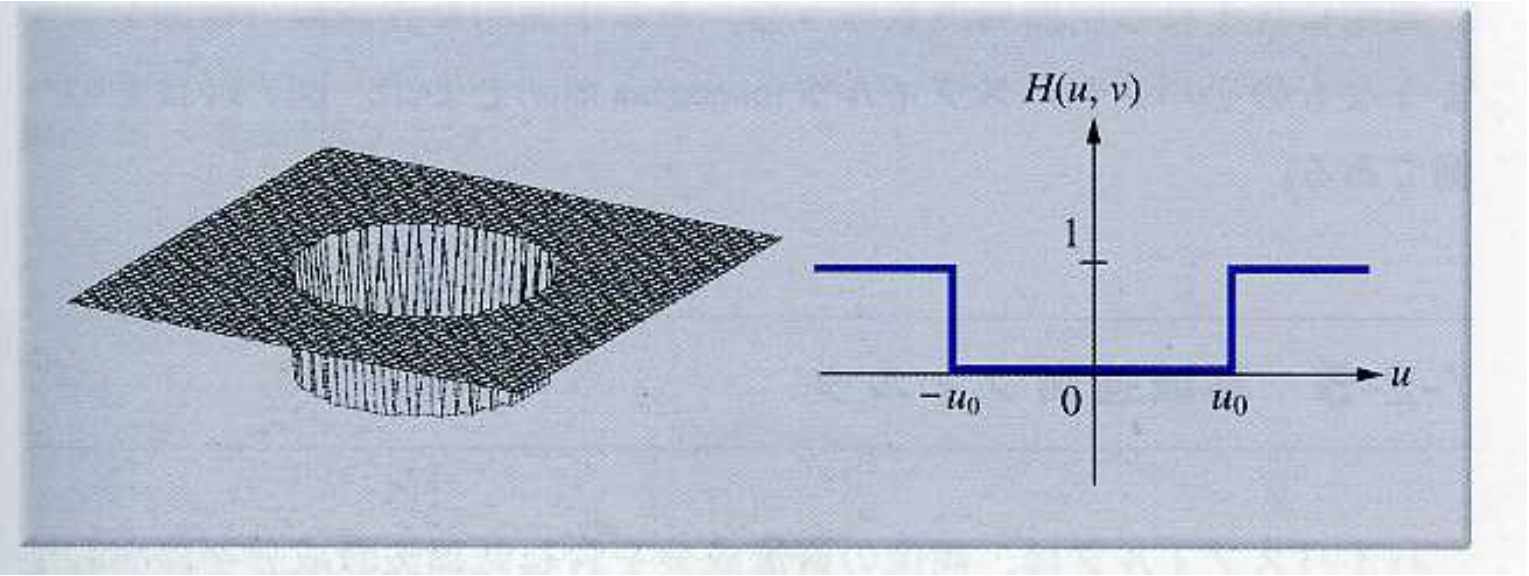




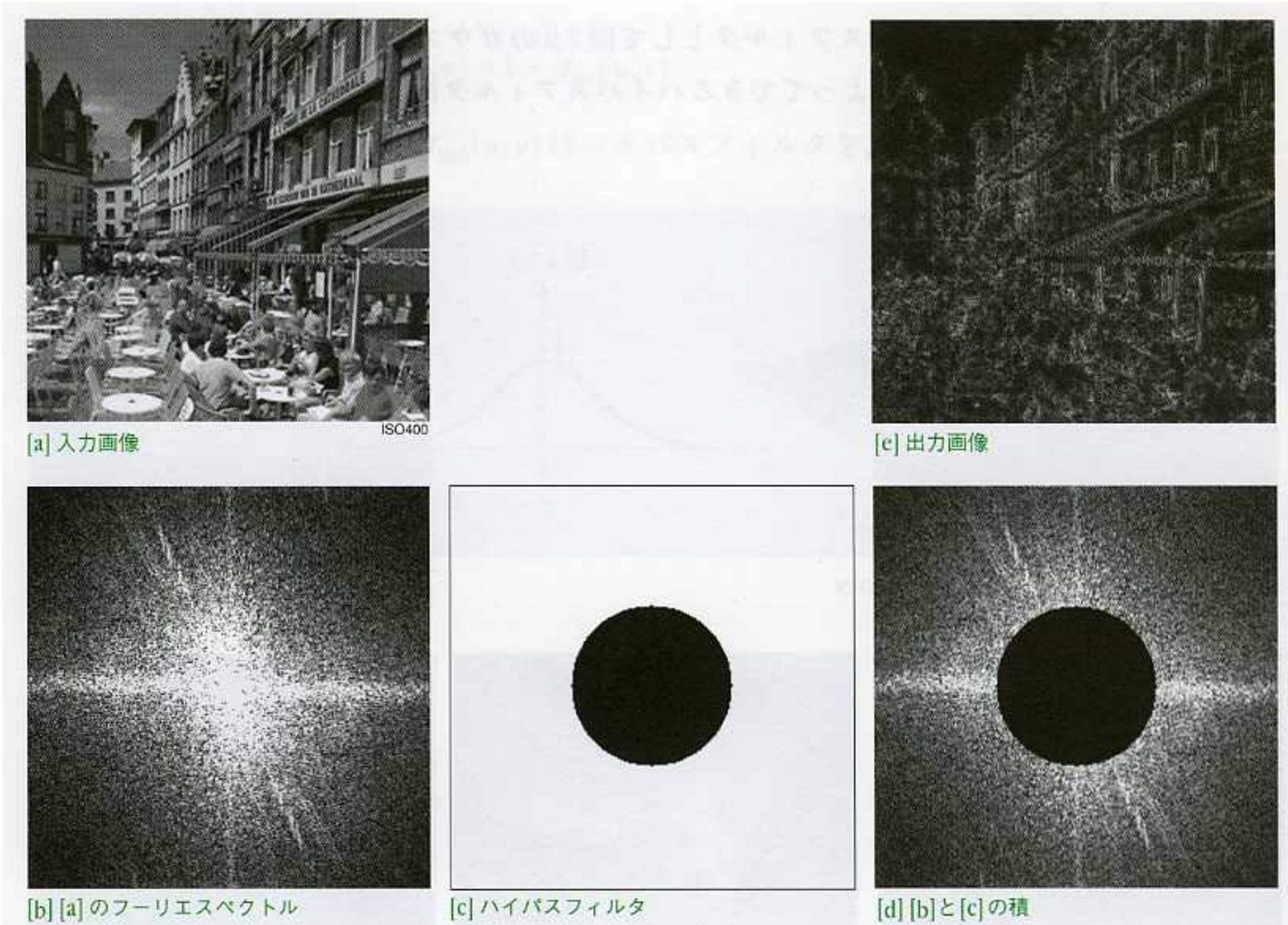


ハイパスフィルタ（Highpass filter）

- ローパスフィルタとは逆に、画像の高周波数成分を残し、低周波数成分を除去するフィルタを**ハイパスフィルタ**という。



High-pass filter例



[a] 入力画像

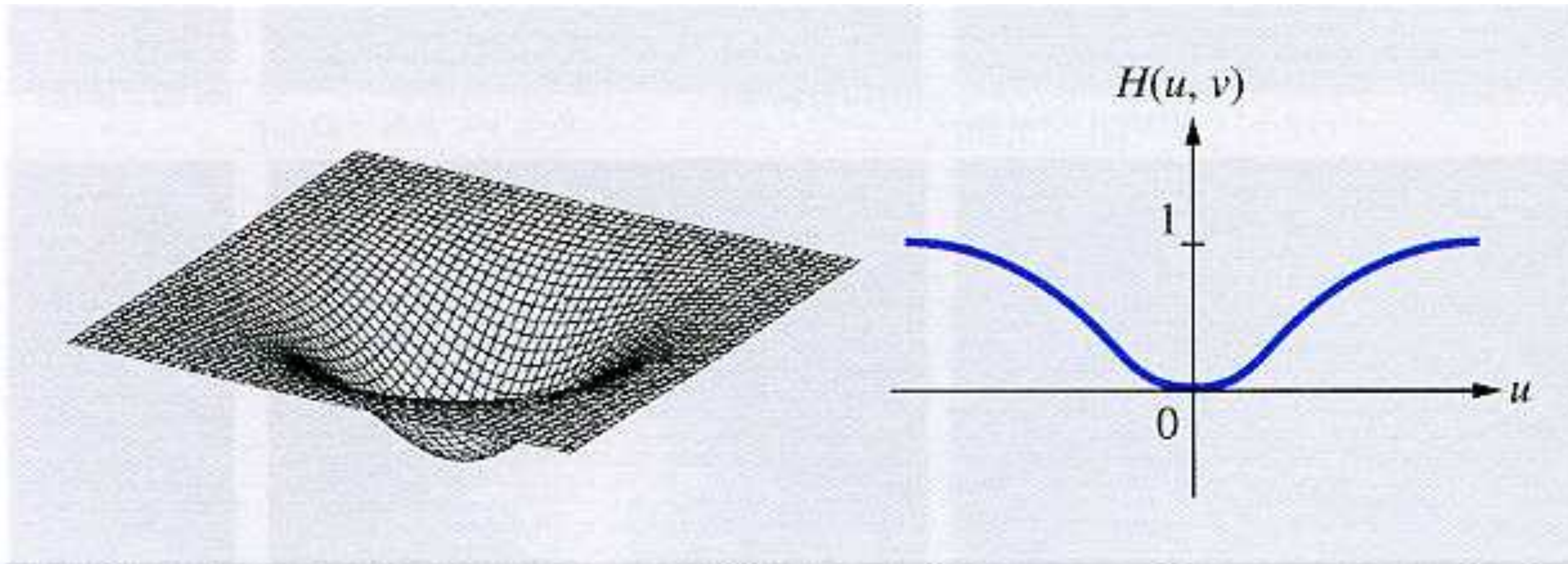
[e] 出力画像

[b] [a] のフーリエスペクトル

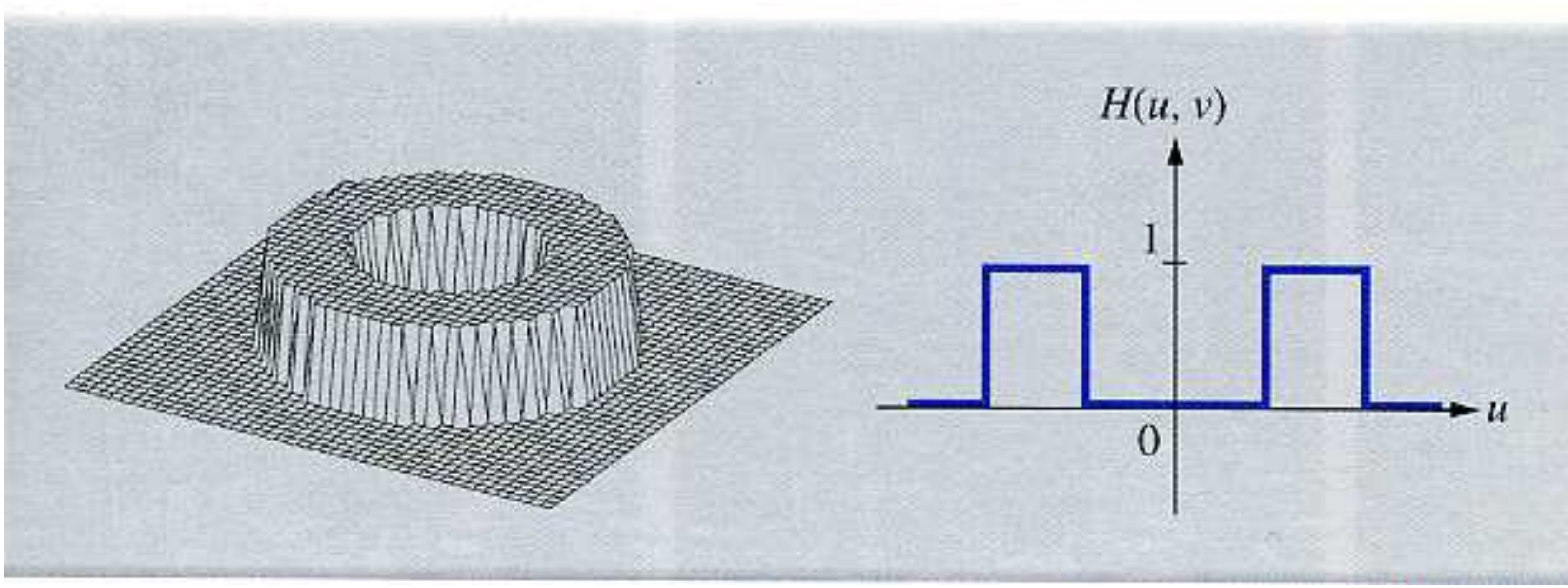
[c] ハイパスフィルタ

[d] [b]と[c]の積

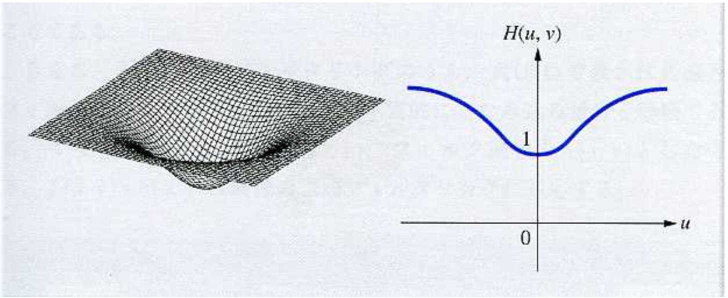
ガウス分布型ハイパスフィルタ

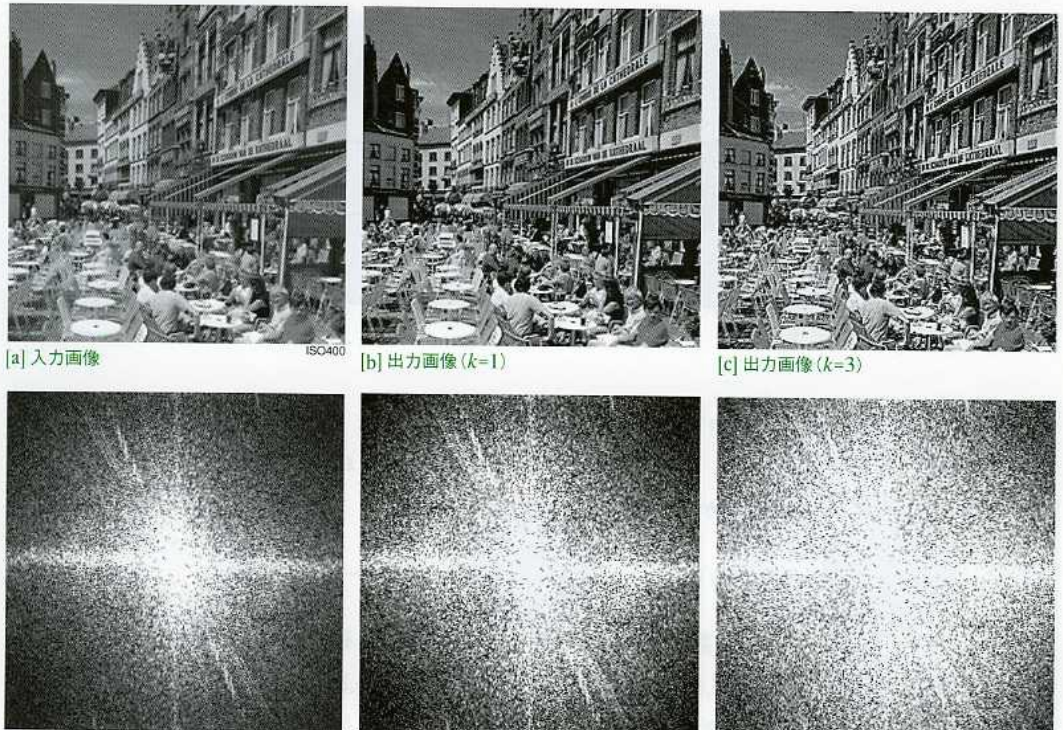


バンドパスフィルタ(bandpass filter)



高域強調フィルタ





[a] 入力画像　[b] 出力画像 (k=1)　[c] 出力画像 (k=3)

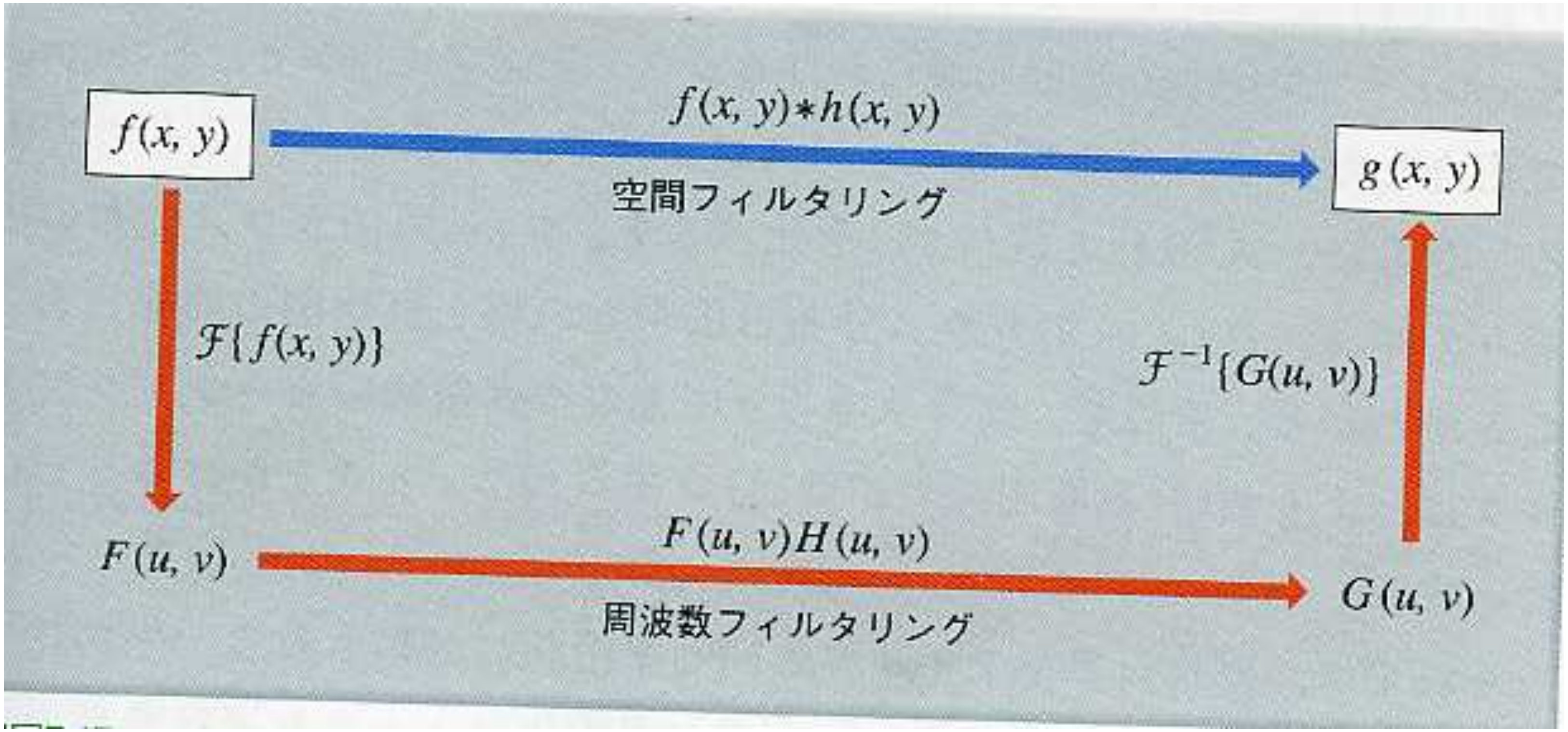
[d] [a] のフーリエスペクトル　[e] [b] のフーリエスペクトル　[f] [c] のフーリエスペクトル

空間フィルタリングと周波数フィルタリングとの関係

空間フィルタリング $g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$ 畳込み積分

フーリエ変換

周波数フィルタリング $G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$ 掛け算



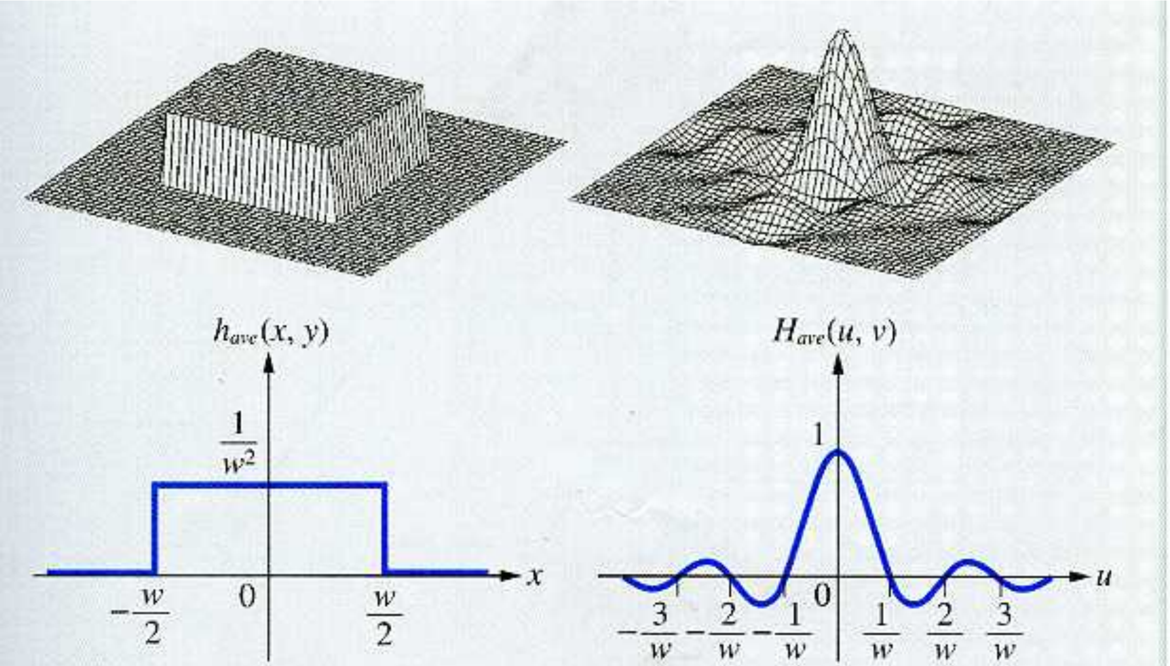
平均値フィルタ

$$h_{ave}(x,y)=\frac{1}{w^2}rect(\frac{x}{w},\frac{y}{w})$$

$$where\quad rect(x,y)=\begin{cases}1 & |x|\le 1/2\text{かつ}|y|\le 1/2\text{のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

そのフーリエ変換

$$H_{ave}(u,v)=\frac{\sin\pi wu}{\pi wu}\frac{\sin\pi wv}{\pi wv}$$



[a] 平均化フィルタ

[b] [a]のフーリエ変換