数学演習2第1回

2022 9/27

不定積分の計算

公式　原始関数の等式は定数を除いて成立つものとする。

(1) $\int\{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)dx$

(2) $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha\int f(x)dx$, αは定数

(3)（置換積分法）

$F(x)=\int f(x)dx$ とし、$x=\varphi(t)$ が微分可能とすると

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

このことを

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,\ x=\varphi(t) \qquad (1)$$

と表す。これは(1)の右辺が左辺を求めて $x=\varphi(t)$ を代入すれば求まることを意味する。また、$x=\varphi(t)$ の逆関数 $t=\varphi^{-1}(x)$ が存在すれば(1)の左辺が(1)の右辺を求めて $t=\varphi^{-1}(x)$ を代入すれば求まることを意味する。

(4)（部分積分法）

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

練4.1 (A)

1. (3) $\int x^2\sin 3x\,dx$

解) $\int x^2\sin 3x\,dx = \frac{-1}{3}x^2\cos 3x - \int\left(\frac{-1}{3}\right)2x\cos 3x\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x - \left\{-\frac{1}{9}2x\sin 3x - \int\left(-\frac{2}{9}\right)\sin 3x\,dx\right\}$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C$

$= \left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{27}\right)\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + C$ □

2. (2) $\int x(x^2-2)^4 dx$

解) $\int x(x^2-2)^4 dx = \int \frac{1}{2}(x^2-2)'(x^2-2)^4 dx = \frac{1}{10}(x^2-2)^5 + C$ □

4. (1) $\int \cot x\, dx$　　(2) $\int \sin^{-1} x\, dx$　　$\cot x \underset{定義}{=} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

解) 解) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx$

ここで $t = \sin x$ とおくと　上式 $= \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|\sin x| + C$

(2) $\int \sin^{-1} x\, dx = \int (x)' \sin^{-1} x\, dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x\sin^{-1} x - \int \frac{-1}{2} \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sin^{-1} x - (-\sqrt{1-x^2}) + C$

$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$ □

線形代数

ベクトル空間　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。$\mathbb{R}$=実数全体, $\mathbb{C}$=複素数全体

集合 V に対し、V の任意の2元 u, v に V の元 $u+v$ (u, v の和という) を対応させる演算と V の任意の元 u, $\mathbb{K}$ の任意の元 c に対し V の元 cu (u の c 倍という) を対応させる演算が定義され以下の条件を満たすとき V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間という。

(1) $u+v = v+u$　　(2) $(u+v)+w = u+(v+w)$

(3) V の元 0 が存在して 任意の $u \in V$ に対し $u + 0 = u$

0 を V の零ベクトルという。

(4) 任意の $u \in V$ に対し V の元 $v \in V$ が存在して $u+v = 0$

v を $-u$ と表す。

(5) $1u = u$　　(6) $(cd)u = c(du)$

(7) $c(u+v) = cu + cv$　(8) $(c+d)u = cu + du$

V の元を V のベクトルという。

ベクトル空間の例

1. $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{R}^n$ は n 次元列ベクトルの和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上の ベクトル空間になる。

2. $\mathbb{R}[x]_n = \{ a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \mid a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \}$

(x の実係数 n 次以下の多項式全体)

$\mathbb{R}[x]_n$ は多項式の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

3. $C^n([a,b]) = [a,b]$ 上の C^n 級 実数値 関数全体

$C^n([a,b])$ は関数の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

部分空間

ベクトル空間 V の部分集合 W が V の和とスカラー倍を和とスカラー倍としてベクトル空間になるとき W を V の部分空間という。

定理 V が $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし $W \subset V$ のとき W が V の部分空間であるためには次の3条件が成立つことが必要十分である。

(1) $\mathbf{0} \in W$

(2) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ のとき $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$

(3) $c \in \mathbb{K}$, $\mathbf{u} \in W$ のとき $c\mathbf{u} \in W$