問題 2.1 (Lv.2)

次の関数の値の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log(x+1)-\log x\}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{|x+1|-|x-1|}{x}$

問題 2.2 (Lv.2)

次の関数の値の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{2x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$

問題 2.3 (Lv.3)

次の関数の値の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{\sin x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$

問題 2.4 (Lv.3)

次の関数 $f(x)$ が原点 $x=0$ で連続かどうか調べよ.

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{2x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

問題 2.5 (Lv.4)

(1) 三角関数 $\cos\theta$ が連続関数であることを示せ.

(2) 中間値の定理を用いて, $\cos\theta=\theta$ をみたす θ が存在することを示せ.

問題 2.6 (Lv.4)

$\displaystyle\lim_{x\to c}f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to c}g(x)$ は収束するとする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$ が成り立つことを ε-δ 論法で示せ.

(2) $f(x), g(x)$ が連続関数のとき, 和 $f(x)+g(x)$ も連続関数になることを示せ.

問題 2.1 (解答)

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+2}=\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}$

(2) $\displaystyle \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$

よって, $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\{\log(x+1)-\log x\}=\lim_{x\to\infty}\log\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\log 1=0$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{(e^x-1)(e^x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$

(5) $\displaystyle \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}=\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}=1+\sin x$

よって, $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)=1+1=2$

(6) $-1<x<1$ のとき (x が 0 に近いとき), $x+1>0$ かつ $x-1<0$ より,

$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{|x+1|-|x-1|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-\{-(x-1)\}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to 0}2=2$

問題 2.2 (解答)

$\sin X$ $(X\to 0)$ の項 (0 に収束の項) は, 公式 $\displaystyle \lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$ (§2 - 3) の形に持ち込む.

$\sin X$ $(X\to\infty)$ の項 (振動する項) は, $|\sin X|\leqq 1$ から, はさみうちの原理で処理する.

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\quad\left(3x\to 0 \text{ と } \lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1\right)$

(2) $\displaystyle \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq 1$ より, $\displaystyle 0\leqq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|\quad\left(-|x|\leqq x\sin\frac{1}{x}\leqq|x|\right)$

$\displaystyle \lim_{x\to 0}|x|=0$ だから, はさみうちの原理より, $\displaystyle \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

(3) $\displaystyle \frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ より,

$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(4) $|\sin 3x|\leqq 1$ より, $\displaystyle 0\leqq\left|\frac{\sin 3x}{2x}\right|\leqq\frac{1}{|2x|}\quad\left(-\frac{1}{|2x|}\leqq\frac{\sin 3x}{2x}\leqq\frac{1}{|2x|}\right)$

$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{1}{|2x|}=0$ だから, はさみうちの原理より, $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{2x}=0$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\quad\left(\frac{1}{x}\to 0 \text{ と } \lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1\right)$

(6) $\displaystyle \frac{\tan 3x}{\sin 2x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{\sin 2x}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2\cos 3x}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{3}{2\cos 3x}$ より,

$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{3}{2\cos 3x}=1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\quad\left(2x, 3x\to 0\right)$

問題 2.3 (解答)

公式 $\displaystyle\lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^{X}=e$ または $\displaystyle\lim_{X\to 0}\left(1+X\right)^{\frac{1}{X}}=e$ (§2 - 3) の形に持ち込む.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^{2}=e^{2}\ \left(\frac{x}{2}\to\infty \text{ と } \lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^{X}=e\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{x}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}\ \left(\frac{x}{2}\to 0 \text{ と } \lim_{X\to 0}\left(1+X\right)^{\frac{1}{X}}=e\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2}\right\}^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=e\ \left(2x\to\infty\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{x}\log(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}\log e=1$

(5) $y=e^{3x}-1$ とおくと, $e^{3x}=1+y$ より, $3x=\log(1+y)$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{3}\log(1+y)$

$$\frac{e^{3x}-1}{2x}=\frac{y}{2\cdot\frac{1}{3}\log(1+y)}=\frac{3}{2\cdot\frac{1}{y}\log(1+y)}=\frac{3}{2\log(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$ だから, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{y\to 0}\frac{3}{2\log(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{3}{2\log e}=\frac{3}{2}$

(6) $\displaystyle\log\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\log\left\{\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\sin x}{x}\log\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$\sin x\xrightarrow{x\to 0}0$ より, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e$, また, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ だから,

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\log\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\log\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}=1\cdot\log e=1$

よって, $e^{\log A}=A$ より, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\log(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}}=e^{1}=e$

[指数・対数関数の連続性 $\left(\displaystyle\lim_{x\to a}e^{x}=e^{a},\ \lim_{x\to a}\log x=\log a\right)$ を用いている.
上記を踏まえれば, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{\frac{\sin x}{x}}=e^{1}=e$ も可]

問題 2.4 (解答)

(1) 原点 $x=0$ での $f(x)$ の値は 0 $\big(f(0)=0\big)$, $x\neq 0$ の範囲では $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{2x}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2}=0\cdot 1^2=0$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ が成り立つので, $f(x)$ は原点 $x=0$ で連続になる.

(2) 原点 $x=0$ での $f(x)$ の値は 0 $\big(f(0)=0\big)$, $x\neq 0$ の範囲では $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to +0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ より, $\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}e^{-\frac{1}{x}}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to -0}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ より, $\displaystyle\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$

右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)$ と左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to -0}f(x)$ が異なるので, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ は発散

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ が成り立たないので, $f(x)$ は原点 $x=0$ で連続でない.

問題 2.5 (解答)

(1) 任意の点 α において $\lim_{\theta\to\alpha}\cos\theta=\cos\alpha$ を示せば, $\cos\theta$ は連続関数といえる.
原点中心の単位円で点 $(1,0)$ から左回りに角度 θ,α に対応する点を P,A とする.
θ は α に近いとき, 弧度法の定義から, $|\theta-\alpha|$ は 2 点 P,A 間の円弧の長さ,
$|\cos\theta-\cos\alpha|$ は 2 点 P,A の x 座標の差より, $0\leqq|\cos\theta-\cos\alpha|\leqq|\theta-\alpha|$
$\lim_{\theta\to\alpha}|\theta-\alpha|=0$ だから, はさみうちの原理より, $\lim_{\theta\to\alpha}\cos\theta=\cos\alpha$

(2) $f(\theta)=\cos\theta-\theta$ とおくと, 連続関数 $\cos\theta$ と θ の差より, $f(\theta)$ は連続関数になる.
閉区間 $\left[0\ \ \frac{\pi}{2}\right]$ において, $f(0)=1>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$ だから,
中間値の定理 (Th.2.6) より, $f(\theta)=0$ つまり $\cos\theta=\theta$ をみたす θ が存在する.

問題 2.6 (解答)

(1) 極限値 $\lim_{x\to c}f(x),\ \lim_{x\to c}g(x)$ が存在するので, その値を A,B とする.
任意に選んだ (小さな) 正の数 ε に対し, (十分小さな) 正の数 δ が存在して,
点 $x\,(\neq c)$ が点 c から (十分近い) 距離 δ 内 ($0\neq|x-c|<\delta$) にあるならば,
$f(x)+g(x)$ は $A+B$ から誤差 ε 内 $\Big(\big|\big(f(x)+g(x)\big)-(A+B)\big|<\varepsilon\Big)$ を示す.
そこで $\varepsilon>0$ とし, $\lim_{x\to c}f(x)=A$ と $\lim_{x\to c}g(x)=B$ に ε - δ 論法の式を適用すると,
正の数 $\frac{\varepsilon}{2}$ に対して, $f(x)$ では正の数 δ_1 が, $g(x)$ では正の数 δ_2 が存在して,
$0\neq|x-c|<\delta_1$ なら $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2},\ 0\neq|x-c|<\delta_2$ なら $|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$
$\Big($ ε - δ 論法の ε の部分は任意なので, 最初に選んだ ε の半分の値に対して適用 $\Big)$
$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ とおくと, $0\neq|x-c|<\delta\,(\leqq\delta_1,\delta_2)$ のとき,
$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2},\ |g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$ より, $|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
三角不等式より, $\big|\big(f(x)-A\big)+\big(g(x)-B\big)\big|\leqq|f(x)-A|+|g(x)-B|<\varepsilon$
ゆえに, $\big|\big(f(x)+g(x)\big)-(A+B)\big|=\big|\big(f(x)-A\big)+\big(g(x)-B\big)\big|<\varepsilon$
よって, ε - δ 論法より, $\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=A+B=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$

(2) (定義域内の) 任意の点 c において $\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=f(c)+g(c)$ を示せばよい.
$f(x),g(x)$ は連続関数だから, $\lim_{x\to c}f(x)=f(c),\ \lim_{x\to c}g(x)=g(c)$ が成り立つ.
極限値が存在するので, 極限操作と四則演算を交換することができる.
$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)=f(c)+g(c)$ となり, 連続関数といえる.