デジタル信号処理（K3）
第5回 フーリエ変換２

2023年5月9日

立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

(前回の復習) フーリエ変換

- 関数 $f(t)$ のフーリエ変換とそのフーリエ逆変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

と計算される.

(注: 逆変換が元の関数に戻るために，フーリエの積分定理の条件を満たし，
不連続点では $f(t) = \{f(t-0) + f(t+0)\}/2$ だと仮定している)

- フーリエ変換 $F(\omega)$ の絶対値と偏角は，元の関数 $f(t)$ に含まれる周波数 ω の振動の振幅と位相の情報を反映する

フーリエ変換とフーリエ級数の比較

- 共通点：信号を様々な正弦波の和で表現/分解

	フーリエ変換の文脈	フーリエ級数の文脈
信号の表現	フーリエ逆変換 $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$	フーリエ級数 $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{T}t}$$
信号の周波数分解 (スペクトル分析)	フーリエ変換 $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$	フーリエ係数 $$c_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\tau)e^{-i\frac{k\pi}{T}t}dt$$

- 相違点：(角)周波数の取り方
  - フーリエ変換：連続的 $\underline{\omega \in (-\infty, \infty)}$
    これは任意の実数という意味
  - フーリエ級数：離散的 $\omega = k\pi/T \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

もう一度，具体例のフーリエ変換を計算してみましょう！

フーリエ変換 例1（前回の例題の一般化）

- 関数 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq B \\ 0, & |t| > B \end{cases}$ （B は実定数）

  のフーリエ変換を求めてみよう！

フーリエ変換 例1【解答】

- 関数 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq B \\ 0, & |t| > B \end{cases}$ （B は実定数）のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(B\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 2B, & \omega = 0 \end{cases}$$

となる.

（導出）

1）$\omega \neq 0$ の場合は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-B}^{B} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-B}^{B}$$

$$= \frac{e^{-iB\omega}}{-i\omega} - \frac{e^{iB\omega}}{-i\omega} = \underbrace{\frac{e^{iB\omega} - e^{-iB\omega}}{i}}_{= 2\sin(B\omega)} \frac{1}{\omega} = \frac{2\sin(B\omega)}{\omega}$$

(オイラーの公式を利用)

2）$\omega = 0$ の場合は, $F(\omega) = \displaystyle\int_{-B}^{B} dt = [t]_{-B}^{B} = 2B$

フーリエ変換 例2

- 関数 $g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(Bt)}{t}, & t \neq 0 \\ B, & t = 0 \end{cases}$ のフーリエ変換を求めよ.

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(B\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 2B, & \omega = 0 \end{cases}$$

ヒント

- 関数 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq B \\ 0, & |t| > B \end{cases}$ はフーリエの積分定理の条件

を満たすから，フーリエ逆変換は (不連続点では中間を通るので)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \begin{cases} 1, & |t| < B \\ 1/2, & |t| = B \\ 0, & |t| > B \end{cases}$$

となる.

これを利用して $g(t)$ のフーリエ変換が求められないか？

よく似た計算をしていることに注目！

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

フーリエ変換 例2【解答】

- フーリエ変換 $G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt$ で $\omega=-u$ とすると，

$$G(-u)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{iut}dt=\pi\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2g(t)e^{iut}dt}\ =\begin{cases}\pi, & |u|<B\\ \pi/2, & |u|=B\\ 0, & |u|>B\end{cases}$$

$2g(t)=\begin{cases}\frac{2\sin(Bt)}{t}, & t\neq 0\\ 2B, & t=0\end{cases}$ で，t は積分変数なので，$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega u}d\omega$ と同じ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\begin{cases}1, & |t|<B\\ 1/2, & |t|=B\\ 0, & |t|>B\end{cases}$$

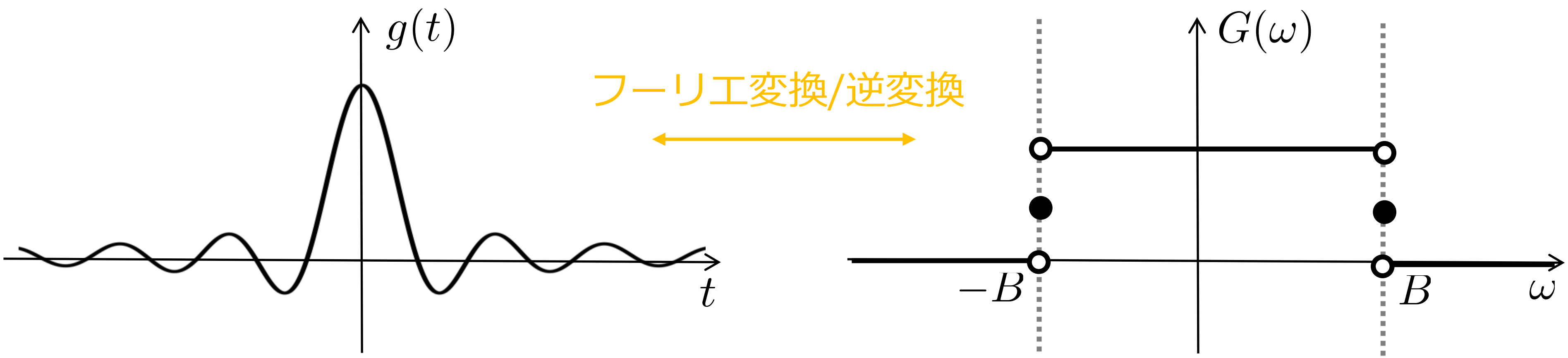
ここから，$G(\omega)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<B\\ \pi/2, & |\omega|=B\\ 0, & |\omega|>B\end{cases}$ を得る．

- このように，ある関数のフーリエ逆変換が分かれば，フーリエ変換もすぐに求められる．逆も同様．

フーリエ変換 例2 の関数について 1/2

- 関数 $g(t)$ は，フーリエ変換を見ると，
  $|\omega| > B$ の周波数成分を持たず(一定以上の高周波成分が0)，
  しかも $|\omega| < B$ の周波数成分が全て等しいことが分かる．

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(Bt)}{t}, & t \neq 0 \\ B, & t = 0 \end{cases} \qquad G(\omega) = \begin{cases} \pi, & |\omega| < B \\ \pi/2, & |\omega| = B \\ 0, & |\omega| > B \end{cases}$$



フーリエ変換 例2 の関数について 2/2

- sinc関数 $\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$ を用いると，

  前ページの $g(t)$ は $g(t) = B\mathrm{sinc}(Bt/\pi)$ と表せる．
  つまり，sinc関数をスケーリングしたものになっている．

- なお，前ページの結果により，sinc関数のフーリエ変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t) e^{-i\omega t} dt = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi \\ 1/2, & |\omega| = \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases}$$

となることが分かる．

- sinc関数はディジタル信号処理において
  重要な役割を務めます（今後の講義でまた登場します）

(注: $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 1$ なので，場合分けなしで $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ と表すことがある)

次に，フーリエ変換の性質
を学びます

フーリエ変換の性質 1/3

- 以下，$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,\ \ G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt$ とする.

（線形性）

$$\int_{-\infty}^{\infty} (af(t) + bg(t))e^{-i\omega t}dt = aF(\omega) + bG(\omega)$$

（ a, b は任意定数）

（これは，定数倍や和は周波数成分にも同じように反映されることを意味する）

（導出）

積分の線形性により，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (af(t) + bg(t))e^{-i\omega t}dt =& a\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt + b\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\ =& aF(\omega) + bG(\omega)\end{aligned}$$

フーリエ変換の性質 2/3

（相似性）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

（$a > 0$ は正の実定数）

（これは，時間軸のスケールを$1/a$倍に縮小すると，周波数成分の軸のスケールがa倍され，振幅が$1/a$になることを意味する）

（導出）

変数変換 $x = at$ を行うことで導出できる:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega\frac{x}{a}}\frac{1}{a}dx \\
&= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}dx \\
&= \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned}$$

フーリエ変換の性質 3/3

（移動性 1）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t}dt = e^{ia\omega}F(\omega)$$

（a は任意の実定数）

（これは，関数を $-a$ だけ時間方向にシフトすると，周波数ω の位相が $a\omega$ 分だけ移動することを意味する）

（導出） 変数変換 $x = t + a$ を行うことで導出できる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(x-a)}dx = e^{ia\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = e^{ia\omega}F(\omega)$$

（移動性 2）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega - a)$$

（a は任意の実定数）

（これは，関数に複素正弦波 e^{iat} をかけると，周波数成分は a だけシフトすることを意味する）

（導出） $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-a)t}dt = F(\omega - a)$$

畳み込み

- $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ の形の積分を，

  関数 f と g の畳み込みと呼ぶ.

- 変数変換 $x = t - \tau$ を行うと，

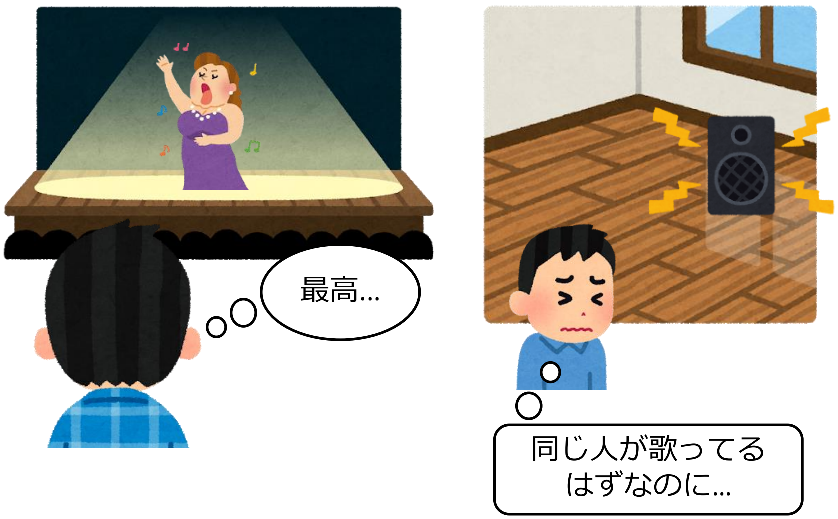
$$h(t) = \int_{\infty}^{-\infty} -f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$$

となるので，畳み込みは f と g に関して対称，つまり

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

畳み込みの例

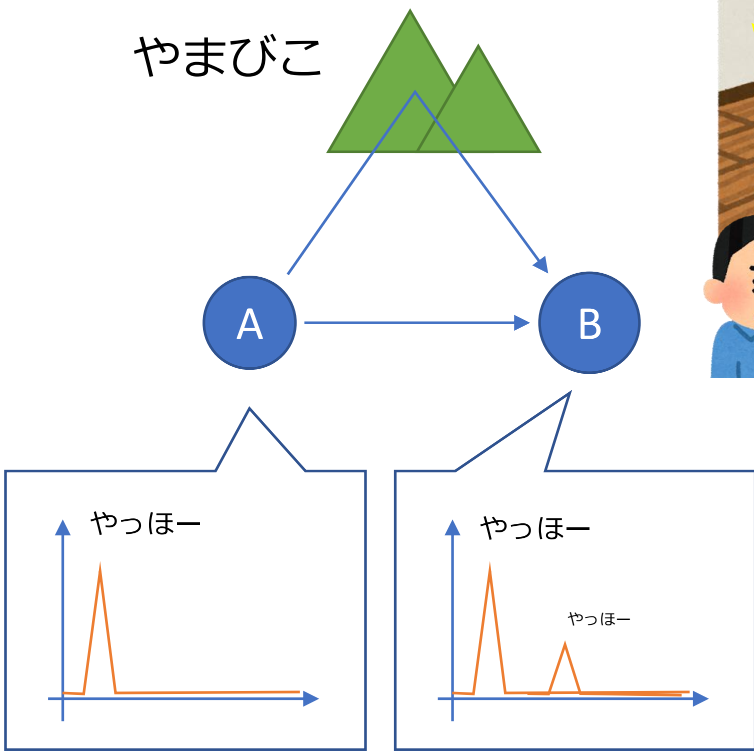
自室とステージで聞く音の違い

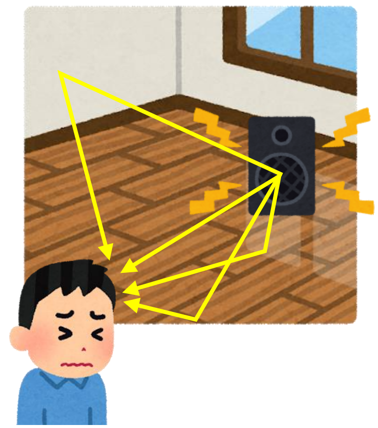


手ブレしてしまった写真

Photo credit: cnet.com

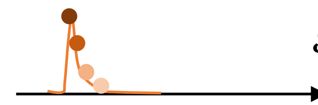
畳み込みの例





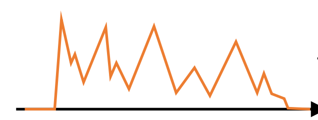
インパルス音を出すと…

音が広がって届く



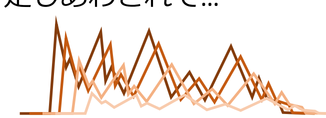
$g(t)$

音楽を流すと…



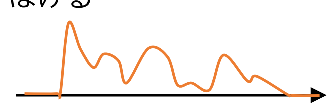
$f(t)$

音が足しあわされて…



$\int f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

音がぼける



$h(t)$

畳み込み

- $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ の形の積分を，

  関数 f と g の畳み込みと呼ぶ.

- 変数変換 $x = t - \tau$ を行うと，

$$h(t) = \int_{\infty}^{-\infty} -f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$$

  となるので，畳み込みは f と g に関して対称，つまり

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

畳み込みのフーリエ変換 1/2

- 畳み込み $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ のフーリエ変換は

$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$ となるため，畳み込みは周波数領域では周波数ごとに積を取る単純な操作になっている．

- 例えば, $g(t) = \frac{\sin(Bt)}{\pi t}$ とすると, $G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < B \\ 1/2, & |\omega| = B \\ 0, & |\omega| > B \end{cases}$ なので,

$H(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & |\omega| < B \\ F(\omega)/2, & |\omega| = B \\ 0, & |\omega| > B \end{cases}$ となる．すなわち, $g(t)$ との

畳み込みにより $f(t)$ に含まれる $|\omega| > B$ の高周波成分を除去できる．このように，畳み込みは所望の周波数特性を得るための基本的な方法として利用できる．

畳み込みのフーリエ変換 2/2

（畳み込みのフーリエ変換の導出）

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}e^{-i\omega(t-\tau)}e^{-i\omega\tau}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}dt\right\}g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau
\end{aligned}$$

積分順序の変更

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\
&= F(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\
&= F(\omega)G(\omega)
\end{aligned}$$

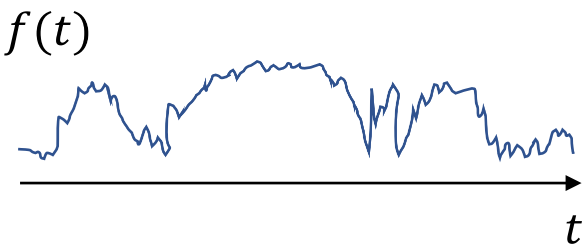
（導出完了）

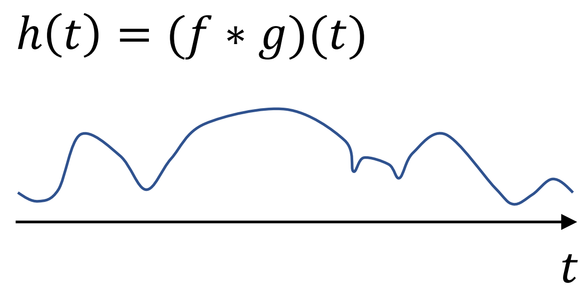
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)$$

を使う

畳み込みの計算例：高周波カット

時間領域信号

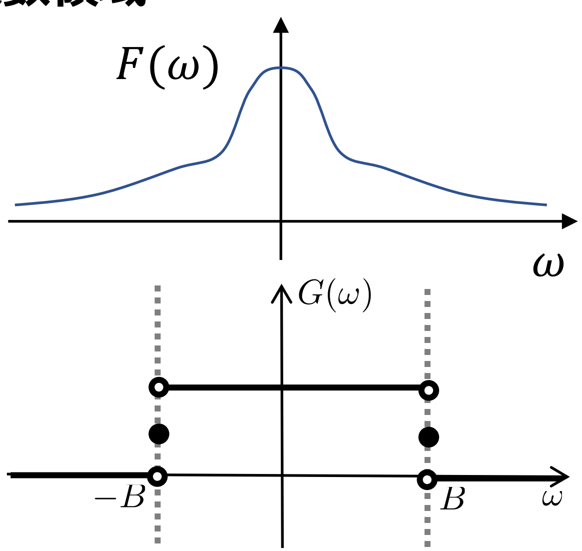


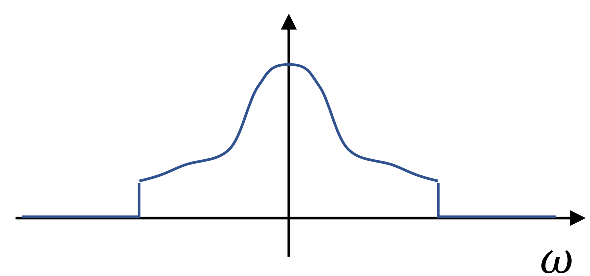


フーリエ変換　フーリエ逆変換

フーリエ変換　フーリエ逆変換

周波数領域





要素ごとの掛け算

どっちが簡単？

時間領域での畳み込み

数式：

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

プログラム：

```
for t in range(-N, N):
    for tau in range(-N, N):
        h(t) += f(t-tau)*g(t)
```

計算量：

$$O(N^2)$$

周波数領域（要素ごとの積）

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

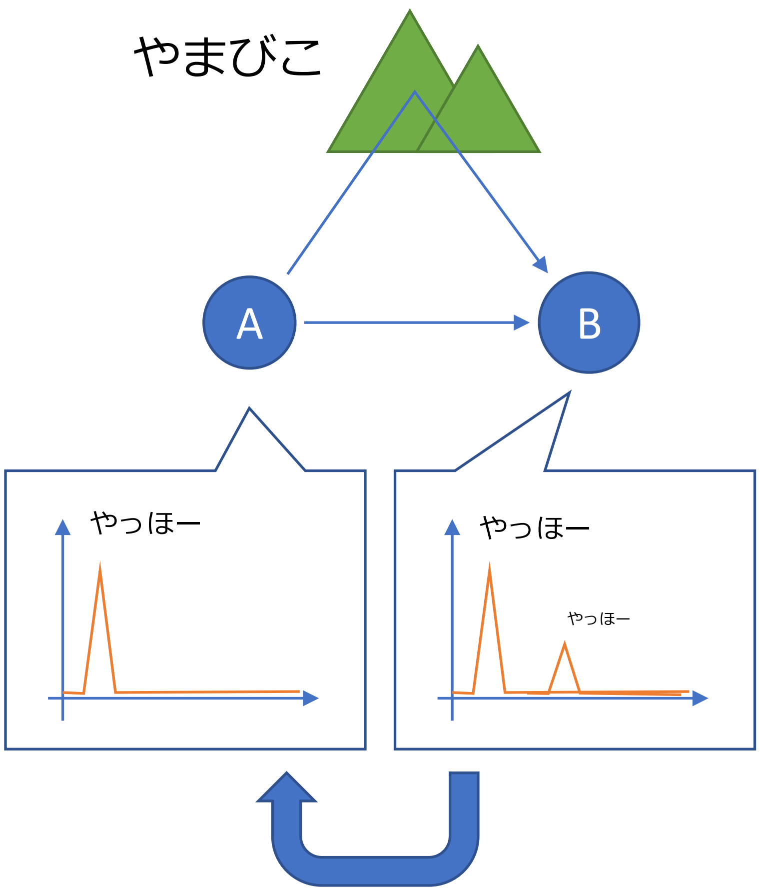
```
F = FFT(f)
G = FFT(g)
H = F * G

h = IFFT(H)
```

$$O(N \log N)$$

逆畳み込みの例

やまびこ



元に戻す = 逆畳み込み

計測信号

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

フーリエ変換

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

逆畳み込みは、要素ごとの割り算！

$$F(\omega) = \frac{H(\omega)}{G(\omega)}$$

今回のまとめ

- フーリエ変換の例を紹介した．特に，sinc関数をスケーリングした関数は，一様な低周波成分のみを持つことを示した.
- フーリエ変換の性質を説明した．特に，畳み込みと呼ばれる演算が，周波数成分の加工に適していることを紹介した.

理解度確認 小テスト

manaba +R にログインして，理解度確認小テストを行います．
制限時間は 10分間 です．

スライドを見返しながら，解いてよいです．
今回の問題は全て選択式の問題です．

宿題

- Manaba+R 小テスト にて出題。

- 期限：来週の授業開始時まで。