デジタル信号処理 (K3)
第3回 フーリエ級数の複素表現

2023年4月25日

立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

本日の内容：
フーリエ級数の複素表現

今回と次回の講義では，フーリエ級数展開を**複素数の世界で表現しなおす**

実表現

$$f(t)\ \sim f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t)$$

近似式 $f_k(t)$ は複素数を用いると以下のようのも表現できる.

複素表現

$$f(t)\ \sim f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i2k\pi t}$$

←ここで，　$i = \sqrt{-1}$　とする.
この式変形が正しいことを確認していく.

$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-i2k\pi t}\,\mathrm{dt}\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

複素数を勉強する理由

高校のときに，**二乗すると -1 になる**，虚数と呼ばれる**謎の数字 i** を習ったと思います（正確には虚数単位という）．
しかし，我々が現実世界で目にする数字（実数）は，どれも**二乗すると 0 以上になります**.
$i^2 = -1$ を満たすような虚数 i は，現実生活では存在しないはずなのに，なぜ長い時間をかけて勉強する必要があるのか？ と多くの学生が疑問に思っているのではないでしょうか.

複素数を勉強する理由は，「実数の世界の現象であっても，複素数の世界で議論をした方が現象をより簡潔に記述できたり，理論を理解・説明しやすくなったりする場合が多々ある」ことが，数百年に渡る議論・研究の結果，明らかになったからだと考えられます.
皆さんも，過去の先人たちの知恵の結晶である複素数を使いこなせるようになりましょう！

複素数で表現が簡単になる例： 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解（ただし，$a \neq 0$）

実数しか知らない人	複素数も知っている人
$D = b^2 - 4ac \geq 0$　のとき，解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $D = b^2 - 4ac < 0$　のとき，解なし	解は常に $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

複素数の基本演算

$$\begin{cases} x = a + \mathrm{i}b \\ y = c + \mathrm{i}d \end{cases}$$

$$x + y = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$$

$$x - y = (a + c) - \mathrm{i}(b + d)$$

$$x * y = (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{(a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d)}{c^2 + d^2}$$

オイラーの公式

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位，e は自然対数の底，θ は任意の実数
＊ 虚数単位を$j = \sqrt{-1}$で表記する教科書・文献も多数あります

指数関数 e^z と三角関数 $\cos x$, $\sin x$ の関係式

- 実数の世界では全く別物： x を実数として，$z = x$ とすると，指数関数 e^x は単調増加，三角関数 $\cos x$, $\sin x$ は振動現象
- 複素数の世界では両者が指数関数 e^z として統合される！
  x と y を実数として，$z = x + iy$ とすると，$e^z = e^x e^{iy}$となり，
  x が増えると，複素数 e^z の絶対値 $|e^z| = e^x$ が単調増加，
  y が増えると，複素数 e^z が複素平面上で反時計回りに回転.

とにかく重要な関係式，絶対に覚えること！

（補足）オイラーの公式の証明1/2

テイラー展開を使って証明：

テイラー展開 … 微分可能な関数を多項式で表現または近似するときに用いる，大学数学の最重要テクニックの一つ!（詳しくは微積の講義を参照）

$f(x)$ を無限回微分可能とし，
k 階導関数を $f^{(k)}(x)$ とする．
$f(x)$ を $x=0$ の周りでテイラー展開すると，
右式が得られる．

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)}$$

e^x，$\cos x$，$\sin x$ を $x=0$ の周りでテイラー展開すると，

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}e^0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\cos 0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(-1)^k\sin 0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\sin 0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(-1)^{k-1}\cos 0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

（補足）オイラーの公式の証明2/2

e^x, $\cos x$, $\sin x$ を $x=0$ の周りでテイラー展開した結果

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\qquad \sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

e^x のテイラー展開に $x=i\theta$ を代入すると,
(厳密には複素数を代入してもよい証明が必要)

$$e^{i\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}i\theta^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=\cos\theta+i\sin\theta$$

証明完了

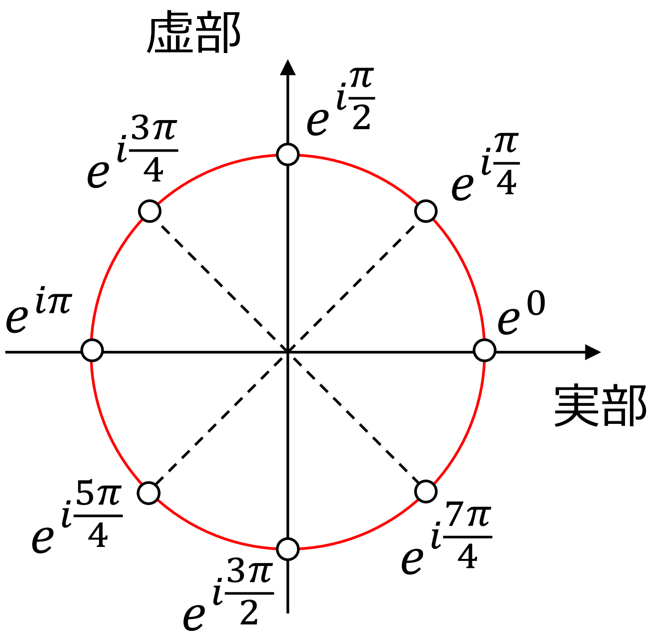
複素平面上のオイラーの公式

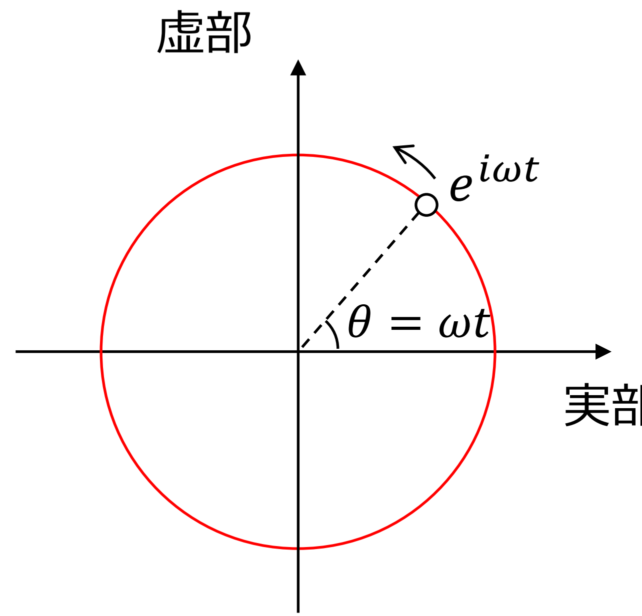
θが$0 \sim 2\pi$で変化すると、 $e^{i\theta}$の複素平面上の軌跡が円になる

- その軌跡が実軸への写像が$\cos(\theta)$になる
  （高校数学で学んだ三角関数と同じ）

もしθの変化が$\theta = \omega t\,(\omega > 0)$で表せる場合、

- $e^{i\theta}$が反時計回りに回転、実軸への写像が$\cos(\omega t)$になる　→　振動現象





三角関数の複素表現1/2

- オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

- 角度を$-\theta$ にすれば,

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

- 両者を足して 2 で割れば

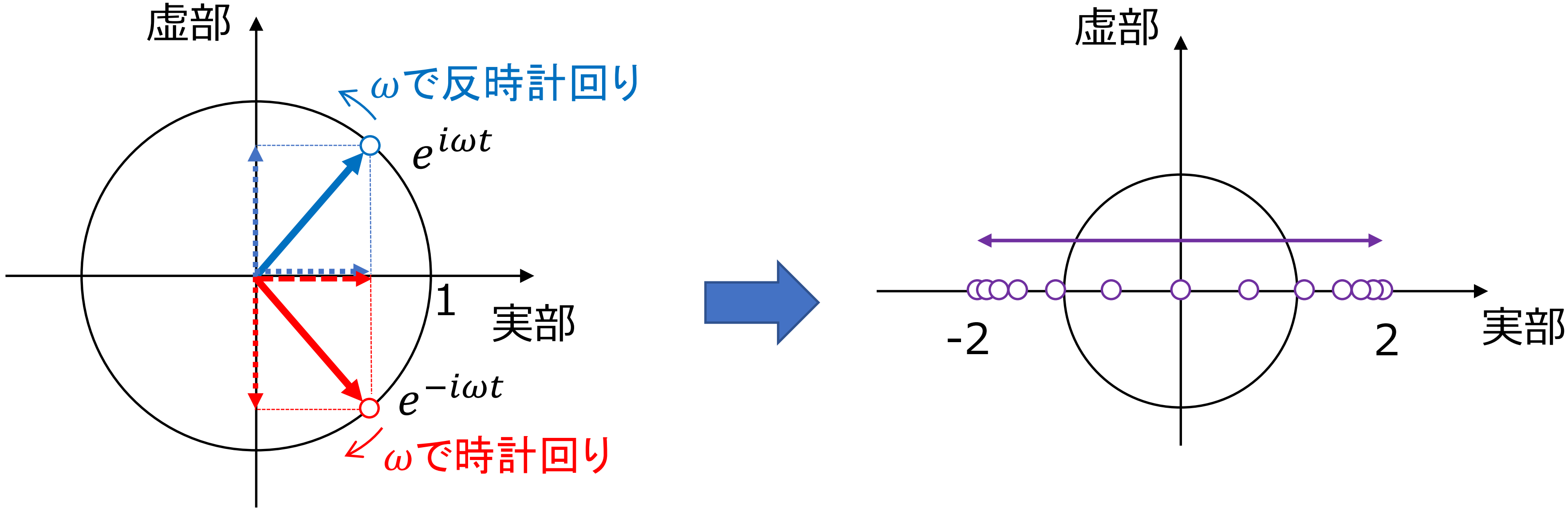
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

- 両者を引いて $i2$ で割れば

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i2} = i\frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2}$$

三角関数の複素表現2/2

$e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ は常に実軸で相加、虚軸で相殺するので、
$e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}$ 複素平面上の軌跡は常に実軸上にある



振動現象などの実信号を一対の複素信号（実信号と同じ周波数、かつ複素共役の関係を持つ）で表現可能：

$$\cos(\omega t)=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$$

フーリエ級数の複素表現の導出

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ と $\sin\theta = -i\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$ を用いれば

フーリエ級数展開は以下のように変形できる.

$$f(t) \sim f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \frac{e^{i2k\pi t} + e^{-i2k\pi t}}{2} - \sum_{k=1}^{K} ib_k \frac{e^{i2k\pi t} - e^{-i2k\pi t}}{2}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i2k\pi t} + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i2k\pi t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i2k\pi t} + \sum_{k=-K}^{-1} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} e^{i2k\pi t}$$

$$= \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i2k\pi t}$$

ただし, $c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k - ib_k}{2} & k = 1,2,\ldots,K \\ \dfrac{a_0}{2} & k = 0 \\ \dfrac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k = -1,-2,\ldots,-K \end{cases}$

フーリエ級数の複素表現

フーリエ級数の複素表現
基底関数が正弦，余弦関数から，指数関数のみになっている.
その結果，係数が2つの実数 a_k, b_kから1つの複素数 c_k に統合された.

$$\boxed{f(t) \sim f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i2k\pi t}}$$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k - ib_k}{2}, & k = 1,2,\ldots,K \\ \dfrac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \dfrac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & k = -1,-2,\ldots,-K \end{cases}$$

$$a_k = 2\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$b_k = 2\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t \quad (k = 1,2,\ldots)$$

$\Rightarrow$

複素フーリエ係数 c_k が場合分け無しでも表せる.

$$\boxed{\begin{aligned} &c_k = \int_0^1 f(t)e^{-i2k\pi t}\,\mathrm{d}t \\ &k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}}$$

注意: e の指数部分にマイナスあり！

（補足）複素フーリエ係数の証明

1.$k=0$ のとき

$$c_0=\int_0^1 f(t)e^{-i2\cdot 0\cdot\pi t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\cdot 1\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}$$

2.k が正の整数のとき，オイラーの公式 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ を用いて

$$c_k=\int_0^1 f(t)e^{-i2k\pi t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)[\cos(2k\pi t)-i\sin(2k\pi t)]\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t-i\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t=\frac{a_k-ib_k}{2}$$

3.k が負の整数のとき，$k'=-k$ は正の整数になることに注意すれば，

$$c_k=\int_0^1 f(t)e^{-i2k\pi t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)e^{i2k'\pi t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 f(t)[\cos(2k'\pi t)+i\sin(2k'\pi t)]\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 f(t)\cos(2k'\pi t)\,\mathrm{d}t+i\int_0^1 f(t)\sin(2k'\pi t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a_{k'}+ib_{k'}}{2}=\frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2}$$

証明完了

また，任意の正の整数 k に対して，実数値関数 $f(t)$ の複素フーリエ係数 c_k と c_{-k} は互いに複素共役の関係であり， c_0 （$k=0$ のときの c_k）は，必ず実数 $\frac{a_0}{2}$ になることも分かった．

フーリエ級数の複素表現の注意点

一般に，(複素)フーリエ級数展開というと，
以下の <u>$K \to \infty$ とした式のことを指す場合が多い</u>

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2k\pi t}$$

注意１． k が $-\infty$ から ∞まで
（実表現では k が 0 から ∞ まで）

ここでは，数学的厳密性のために近似の記号（ ~ ）を使ったが，工学の分野で用いられる関数に対しては，$K \to \infty$ のときは実表現と全く同じように二乗誤差 $\int_0^1 |f_K(t) - f(t)|^2\, dt$ が 0 に収束し， イコール（ = ）が成り立っていると見なしてもほとんどの場合は問題ない．

$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-i2k\pi t}\, dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

なぜ， $e^{i2k\pi t}$ ではなく， $e^{-i2k\pi t}$ なのか?

⇨ 注意２． 係数の計算が一つに統合されている

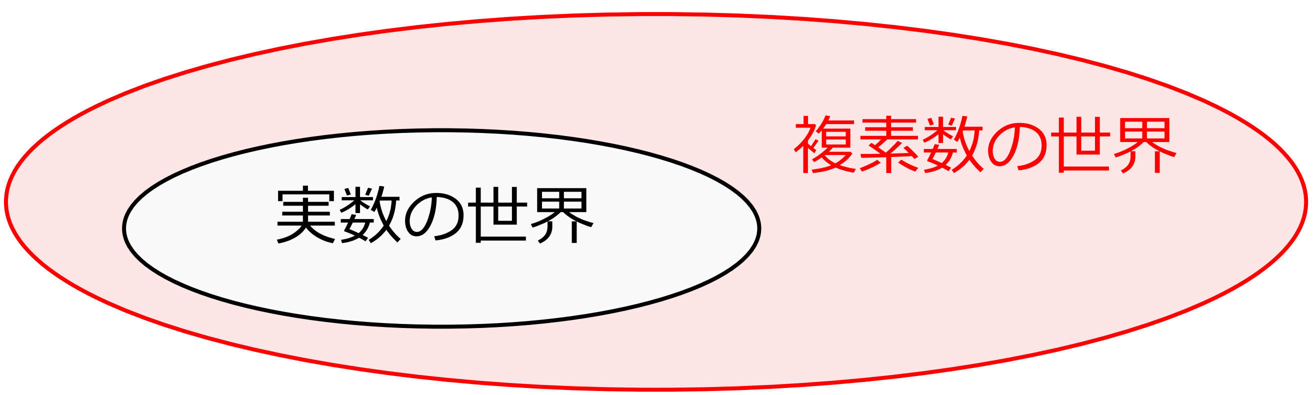
注意３． e の指数部分にマイナスあり！

級数と係数の計算で符号が違う理由1/3

- 級数本体では指数部分はプラス：$c_k e^{i2k\pi t}$
- 係数計算では指数部分はマイナス：$\int_0^1 f(t)e^{-i2k\pi t}\,dt$

フーリエ級数展開を「**複素数の世界**」で表現し直しました.

実は，「実数の世界」から「**複素数の世界**」に移る際に，**内積**などの計算が変化しています!! 指数部分の符号が反転するのは，これに起因しています.



複素数の世界では，
内積や絶対値の
計算方法を修正する
必要がある

級数と係数の計算で符号が違う理由2/3

成分表示された N 次元ベクトルの内積は以下のようになる.

- $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$の内積：

実 $$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_N y_N = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$$

複素 $$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_N \overline{y_N} = \sum_{n=1}^{N} x_n \overline{y_n}$$

複素共役の形にする!!

上記を発展させると，関数の内積は以下のようになる.

- 周期１の周期関数 $x(t)$ と $y(t)$ の内積：

実 $$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) y(t)\, dt$$

複素 $$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)}\, dt$$

(補足)複素数の絶対値の計算

実数xの絶対値 $|x| = \sqrt{x^2}$

複素数$z = a + \mathrm{i}b$の絶対値は$\sqrt{a^2 + b^2}$

$b \neq 0$の場合， $z^2 = (a + \mathrm{i}b)(a + \mathrm{i}b) = a^2 - b^2$

$z\bar{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$

$\bar{z}$ は z の複素共役

※$z\bar{z} \neq z^2$

$b = 0$の場合， $z\bar{z} = z^2 = a^2$

複素数zの絶対値は $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ で計算

複素共役!!

(補足)複素ベクトルの内積の計算

実数ベクトル$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots x_N)$と自身の内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \cdots x_N x_N = \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

$\|\boldsymbol{x}\|$はベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルム

複素ベクトル$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots z_N) = (a_1 + \mathrm{i}b_1, a_2 + \mathrm{i}b_2, \dots, a_N + \mathrm{i}b_N)$の場合,

$$\sum_{n=1}^{N} z_n z_n = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 - b_n^2$$

0ベクトル以外でも、結果が0になってしまう可能性がある．一度$\boldsymbol{z} = (1, \mathrm{i})$で計算してみると分かる！

$$\sum_{n=1}^{N} z_n \overline{z_n} = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 = \sum_{n=1}^{N} |z_n|^2 = \|\boldsymbol{z}\|^2$$

ベクトル自身の内積とノルムの関係$\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = \|\boldsymbol{z}\|^2$を満たしている

複素ベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の内積は$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n \overline{y_n}$ で計算

複素共役!!

級数と係数の計算で符号が違う理由3/3

$$f(t) \sim f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i2k\pi t}$$

$e^{i2k\pi t}$は，関数系 $\left\{e^{i2k\pi t}\right\}_{k=-K}^{K}$ の基底関数である．

$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-i2k\pi t}\, dt \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$ であることを用いると，

$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-i2k\pi t}\, dt = \int_0^1 f(t)\overline{e^{i2k\pi t}}\, dt = < f, e^{i2k\pi t} >$$

内積の表現に戻せば，符号は反転されていないことが分かる！

基底関数 $e^{i2k\pi t}$ に対する係数 c_k は，関数 $f(t)$ と基底関数 $e^{i2k\pi t}$ の複素内積そのもの

（補足）内積計算を変えてもよいの?

思慮深い学生は，「そんなに簡単に内積を変更してもよいのか？」と疑問に思っているかもしれません．以下の図のように，我々は最初は左の「実数の世界」だけを考えていました．
その後，二乗すると -1 になる，虚数と呼ばれる謎の数字 i を加えて右の「複素数の世界」を構築しました．すると，「実数の世界」は「複素数の世界の中の一部分」として表現されます．

しかし，我々は「複素数の世界」を構築する際に，**内積**などの計算を修正しました．この修正のせいで，右の「複素数の世界の一部である実数の世界」は，左の「元々考えていた実数の世界」とは，少し性質が変わってしまうのではないか？と心配してしまいます．ですが安心してください．実数は，その複素共役も同じ実数値となるため，絶対値は $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{z^2}$，
内積は $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$ と $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\, dt = \int_0^1 x(t)y(t)dt$ となり，「複素数の世界の一部である実数の世界」は，「元々の実数の世界」と完全に一致しています．

指数関数 $e^{i2k\pi t}$ の正規直交性1/2

勘のいい学生は，関数系 $\left\{e^{i2k\pi t}\right\}_{k=-K}^{K}$ の基底関数 $e^{i2k\pi t}$ の係数 c_k が $f(t)$ と $e^{i2k\pi t}$ 自身の(複素)内積によって求まるということは， $\left\{e^{i2k\pi t}\right\}_{k=-K}^{K}$ は「直交関数系」なのでは？　と勘付いていることでしょう．正解です．

$\{1, \cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t)\}_{k=1}^{K}$ が「実数の世界の直交関数系」であったように，

$\left\{e^{i2k\pi t}\right\}_{k=-K}^{K}$ は「複素数の世界の直交関数系」となります．

しかも， $\left\{e^{i2k\pi t}\right\}_{k=-K}^{K}$ はただの直交関数系ではく，より性質の良い「正規直交関数系」です．

まず，直交性を確認します． $k \neq l$ を満たす整数（負の値も含む） k と l に対して，

$e^{i2k\pi t}$ と $e^{i2l\pi t}$の内積は， $< e^{i2k\pi t}, e^{i2l\pi t} > = \int_0^1 e^{i2k\pi t}\, e^{-i2l\pi t} dt = \int_0^1 e^{i2(k-l)\pi t}\, dt$

$$= \underline{\frac{1}{i2(k-l)\pi}\left[e^{i2(k-l)\pi t}\right]_0^1} = \frac{1}{i2(k-l)\pi}\left(\underline{e^{i2(k-l)\pi}} - e^0\right) = \frac{1}{i2(k-l)\pi}(1-1) = 0$$

任意の複素数 zと実数 t に対して，
$\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^t$ であることを利用

※ 任意の整数 nに対して，
$e^{i2n\pi} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1$

したがって，内積 $< e^{i2k\pi t}, e^{i2l\pi t} >$ が 0 なので， $e^{i2k\pi t}$ と $e^{i2l\pi t}$ は直交する．

指数関数 $e^{i2k\pi t}$ の正規直交性2/2

次に，正規性を確認します．ここで，以下で定義される関数 $x(t)$ のノルム

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

が $\|x\| = 1$ を満たすとき，関数 $x(t)$ は「正規性」を持つといいます．

任意の整数（負の値も含む）k に対して，$e^{i2k\pi t}$ のノルムは,

$$\left\|e^{i2k\pi t}\right\| = \sqrt{< e^{i2k\pi t}, e^{i2k\pi t} >} = \sqrt{\int_0^1 e^{i2k\pi t}\, e^{-i2k\pi t} dt} = \sqrt{\int_0^1 e^{i2(k-k)\pi t}\, dt}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 e^0\, dt} = \sqrt{\int_0^1 1\, dt} = \sqrt{1} = 1$$

したがって，ノルム $\left\|e^{i2k\pi t}\right\|$ が 1 なので， $e^{i2k\pi t}$ は正規性を持つ.

以上から $\left\{e^{i2k\pi t}\right\}_{k=-K}^{K}$ は「正規直交関数系」であることが確認できた.

※ちなみに，$k \neq 0$のとき $\cos(2k\pi t)$ や $\sin(2k\pi t)$ のノルムは, $\|\cos(2k\pi t)\| = \|\sin(2k\pi t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1$

直交展開としてのフーリエ級数展開

実表現　　　　　　複素表現

$$f(t) \sim f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2k\pi t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2k\pi t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i2k\pi t}$$

実フーリエ係数

$$a_k = 2\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\,dt = 2 < f, \cos(2k\pi t) >$$

$$b_k = 2\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\,dt = 2 < f, \sin(2k\pi t) >$$

「実数の世界の直交関数系」である

$\{1, \cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t)\}_{k=1}^{K}$ を使って，$f(t)$ を直交展開している．直交性から，基底関数の係数 a_k, b_k は，$f(t)$ と $\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t)$ の内積から簡単に計算できるが，正規性は満たされないため，‘2’という定数が必要となってしまう．

複素フーリエ係数

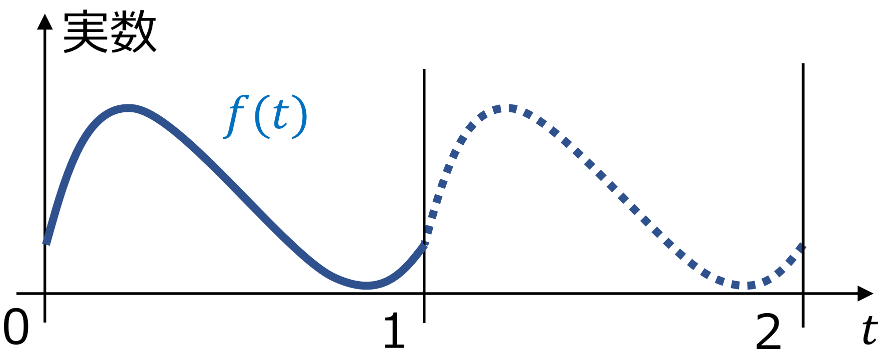
$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-i2k\pi t}\,dt = < f, e^{i2k\pi t} >$$

「複素数の世界の正規直交関数系」である

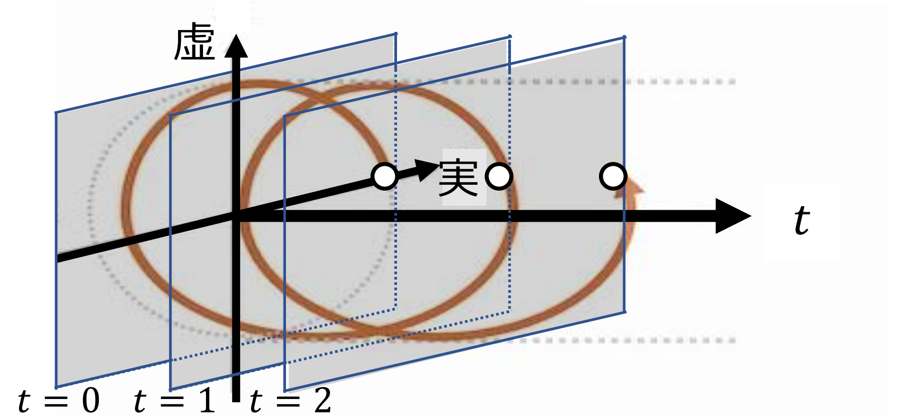
$\{e^{i2k\pi t}\}_{k=-K}^{K}$ を使って，$f(t)$ を直交展開している．直交性のみならず，正規性も満たすため，基底関数$e^{i2k\pi t}$の係数 c_k は $f(t)$ と $e^{i2k\pi t}$ の複素内積そのもの．

（補足）複素数の世界の直交関数系ということは複素数値関数にも対応可能

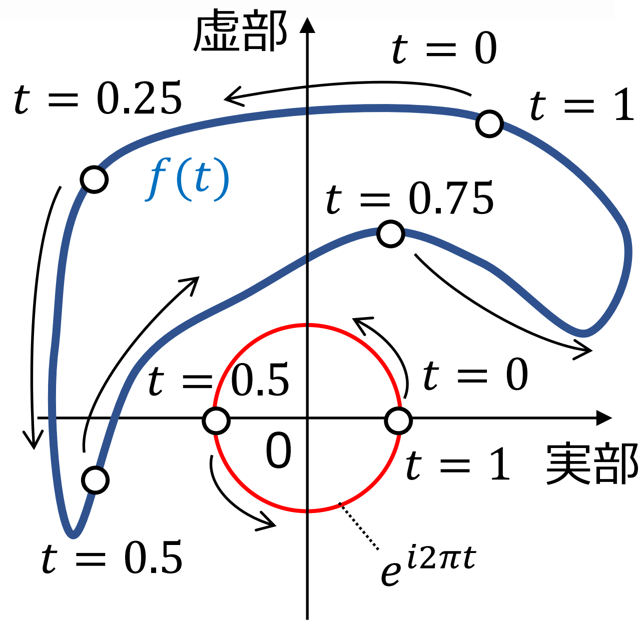
今までは，周期1の関数 $f(t)$ として暗に下のような実数値関数を仮定していました．



$e^{i2\pi t}$ は下のように，らせん状に進んでいく周期1の複素数値関数と考えられます．

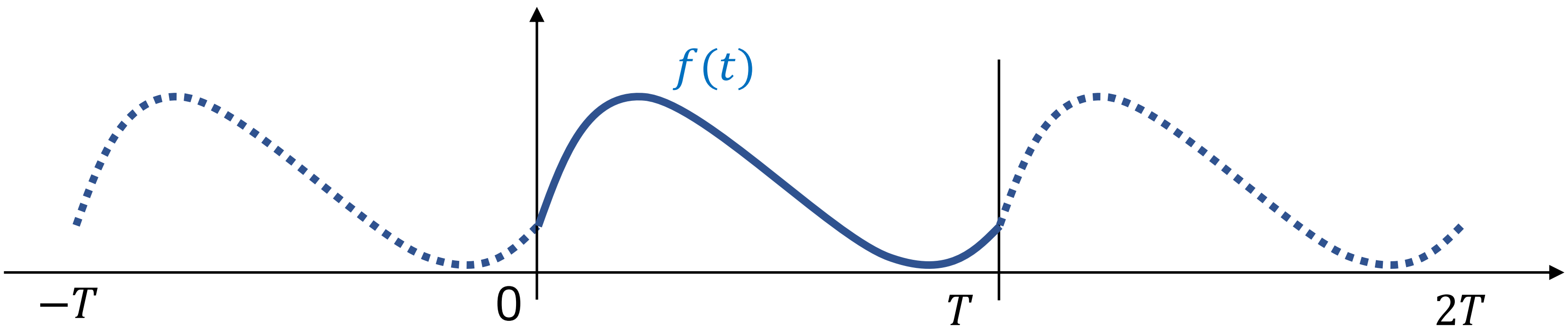


実際には，$\{e^{i2k\pi t}\}_{k=-K}^{K}$ は複素数の世界の直交関数系であるため，右図のように複素平面上を移動していく周期1の複素数値関数に対しても，フーリエ級数展開が可能です！
ただしこの場合は，一般に c_k と c_{-k} は互いに複素共役にはならないですし，c_0 も複素数になるので注意が必要です．



周期 T の関数のフーリエ級数展開

一般化のために，任意の周期 T （T は正実数）を持つ関数に対する
フーリエ級数を考える．



関数系を $\{e^{i2k\pi t}\}_{k=-K}^{K}$ から $\{e^{i\frac{2k\pi t}{T}}\}_{k=-K}^{K}$ に修正

周期 1 の関数　　　周期 T の関数

$\{e^{i\frac{2k\pi t}{T}}\}_{k=-K}^{K}$ は「直交関数系」だが，

$$\left\|e^{i\frac{2k\pi t}{T}}\right\| = \sqrt{\int_0^T e^{i\frac{2k\pi t}{T}} e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} dt} = \sqrt{T}$$

であり，正規性は満たされないため，
$1/T$ という定数が必要となってしまう

フーリエ級数展開

$$f(t) \sim f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$$

複素フーリエ係数 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} dt = \frac{1}{T} < f, e^{i\frac{2k\pi t}{T}} >$$

周期数と角周波数

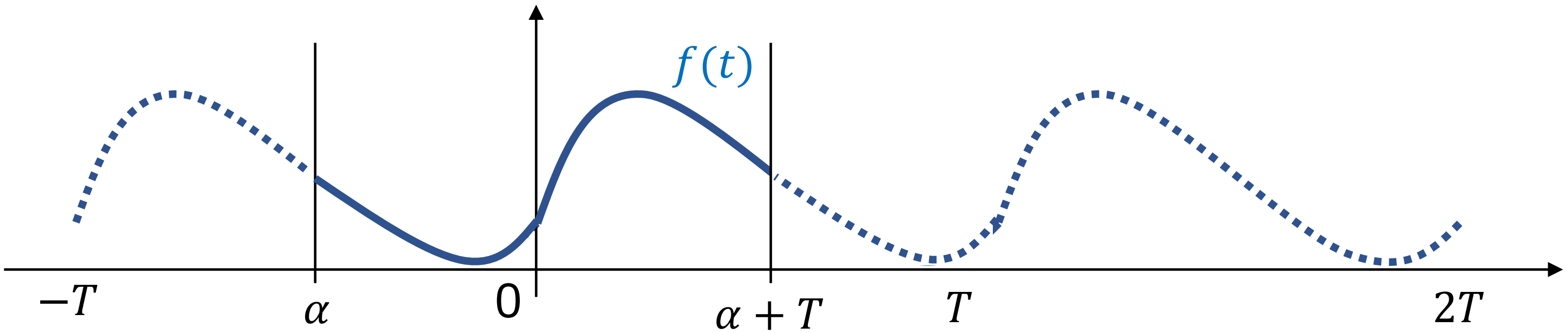
フーリエ級数展開

$$f(t) \sim f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$$

- 複素正弦波 $e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$ の基本周期は $\frac{T}{k}$ だから、
  周波数は $\frac{k}{T}$ 。
  なお、角周波数は周波数の 2π倍の$\frac{2k\pi}{T}$ 。
  （基本周期：周期条件を満たす最小の周期のこと）

周期性を利用した積分区間の移動

今まで区間 $[0, T]$ のみを考えていたが，長さ T の区間 $[\alpha, \alpha+T]$ なら
どこを切り取ってもよい



フーリエ級数展開

$$f(t) \sim f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$$

特に， $\alpha = -\frac{T}{2}$ として，積分区間を
$[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ とする形式が良く用いられる.

複素フーリエ係数　$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} dt$$

周期 $2T$ の関数のフーリエ級数展開

周期 T ではなく，周期 $2T$ として，積分区間を $[-T,T]$ にする形式も良く用いられる.

フーリエ級数展開

$$f(t) \sim f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{2T}} = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i\frac{k\pi t}{T}}$$

複素フーリエ係数　$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$c_k = \frac{1}{2T}\int_{\alpha}^{\alpha+2T} f(t) e^{-i\frac{2k\pi t}{2T}} dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\frac{k\pi t}{T}} dt$$

積分区間は $[-T,T]$ となって綺麗になるが，指数部分は$2k\pi t$ から $k\pi t$ に変わるので注意

フーリエ級数展開の線形性

関数$f(t)$と$g(t)$は以下の形でフーリエ級数展開できるとする

$$f(t) \sim f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}}, g(t) \sim g_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} d_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$$

関数$h(t) = m \cdot f(t) + n \cdot g(t)$に対してフーリエ級数展開すると,

$$h(t) \sim h_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} (mc_k + nd_k) e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$$

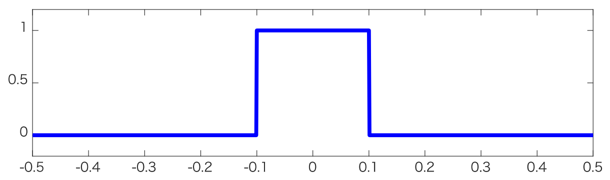
（導出）積分の線形性で導出できる

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(m \cdot f(t) + n \cdot g(t)\right) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} dt$$

$$= \frac{m}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} dt + \frac{n}{T}\int_0^T g(t) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} dt$$

$$= mc_k + nd_k$$

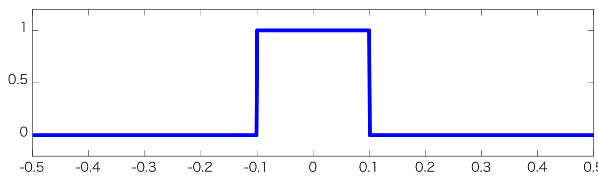
例題



以下の式で表記される周期が1の矩形波に対し、
フーリエ係数（複素表現）を計算せよ.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 0.1,\ \ 0.9 < t < 1) \\ 0 & (0.1 \leq t \leq 0.9) \end{cases}$$

例題



以下の式で表記される周期が1の矩形波に対し，
フーリエ係数（複素表現）を計算せよ．

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 0.1,\ \ 0.9 < t < 1) \\ 0 & (0.1 \leq t \leq 0.9) \end{cases}$$

$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} dt$に$T = 1$と$f(t)$の定義式を代入すると，

$$c_k = \frac{1}{1}\left(\int_0^{0.1} e^{-i\frac{2k\pi t}{1}} dt + \int_{0.9}^{1} e^{-i\frac{2k\pi t}{1}} dt\right) = \int_0^{0.1} e^{-i2k\pi t} dt + \int_{0.9}^{1} e^{-i2k\pi t} dt$$

$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$のとき，

$$= \left[\frac{e^{-i2k\pi t}}{-i2k\pi}\right]_0^{0.1} + \left[\frac{e^{-i2k\pi t}}{-i2k\pi}\right]_{0.9}^{1} = \frac{i}{2k\pi}\left(e^{-i0.2k\pi} - e^{-i0k\pi} + e^{-i2k\pi} - e^{-i1.8k\pi}\right)$$

$$= \frac{i}{2k\pi}\left(e^{-i0.2k\pi} - e^{i0.2k\pi}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} & e^{-i0k\pi} = e^{-i2k\pi} = 1 \\ & e^{-i1.8k\pi} = e^{-i1.8k\pi} e^{i2k\pi} = e^{i0.2k\pi} \end{aligned}}$$

ただし，$k = 0$のとき，

$$c_0 = \frac{1}{1}\left(\int_0^{0.1} 1 dt + \int_{0.9}^{1} 1 dt\right) = 0.2$$

例題

さらに，$\sin\theta = i\frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2}$を利用すると，　$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$のとき，

$$c_k = \frac{i}{2k\pi}\left(e^{-i0.2k\pi} - e^{i0.2k\pi}\right) = \frac{\sin(0.2k\pi)}{k\pi}$$

以上より，$$f(t) = \sum_{k=-K}^{-1}\frac{\sin(0.2k\pi)}{k\pi}e^{i2k\pi t} + 0.2 + \sum_{k=1}^{K}\frac{\sin(0.2k\pi)}{k\pi}e^{i2k\pi t}$$

ちなみに，　$k = -K, -K+1, \ldots$の範囲で kを $-k$で置き換えると，

$$f(t) = \sum_{k=1}^{K}\frac{\sin(-0.2k\pi)}{-k\pi}e^{-i2k\pi t} + 0.2 + \sum_{k=1}^{K}\frac{\sin(0.2k\pi)}{k\pi}e^{i2k\pi t}$$

$$f(t) = 0.2 + \sum_{k=1}^{K}\frac{\sin(0.2k\pi)}{k\pi}\left(e^{i2k\pi t} + e^{-i2k\pi t}\right)$$

$$= 0.2 + \sum_{k=1}^{K}\frac{\sin(0.2k\pi)}{k\pi}(2\cos(2k\pi t))$$

で第2回の例題の答えと一致していることも証明できる

フーリエ級数（複素表現）のまとめ

複素数を使うとフーリエ級数展開をより簡潔に表現できる!!

実表現　　　　複素表現

$$f(t) \sim f_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$$

実フーリエ係数

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\mathrm{dt} \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\mathrm{dt} \quad (k = 1,2,\dots)$$

実表現と複素表現がイコールであることは,

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ から証明

$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位，e は自然対数の底，θ は任意の実数

複素フーリエ係数

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k - ib_k}{2} & k = 1,2,\dots,K \\ \dfrac{a_0}{2} & k = 0 \\ \dfrac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k = -1,-2,\dots,-K \end{cases}$$

c_k は以下の式で統一的に計算できる

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i2k\pi t}\,dt \quad (k = 0,\pm1,\pm2,\dots)$$

manaba+R の小テスト

manaba +R にログインして，第3回小テストを行います。
制限時間は 10分間 です。

スライドを見返しながら，解いてよいです.
今回の問題は全て選択式の問題です.