デジタル信号処理（K3）
第6回 帯域制限信号

2023年5月16日

立命館大学 情報理工学部
画像・音メディアコース
櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

今回の概要

- 信号に含まれる周波数成分の分析にフーリエ変換が有用であることを勉強してきた
- ただ，フーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$ の計算には $f(t)$ のすべての点における関数値が必要
(アナログ信号処理)
- 間隔 T の離散標本値 $\{f(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ のみを使って(デジタル信号処理)，フーリエ変換が計算できるか？

高周波成分を持たない帯域制限信号
に対してはできる！

フーリエ変換と逆変換の意味

フーリエ変換　$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = < f, e^{\mathrm{i}\omega t} >$

時間信号とあらゆる周波数成分の内積を計算することで、
各周波数成分の情報(振幅、位相)を抽出する

フーリエ逆変換　$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{2\pi} e^{\mathrm{i}\theta(\omega)} e^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

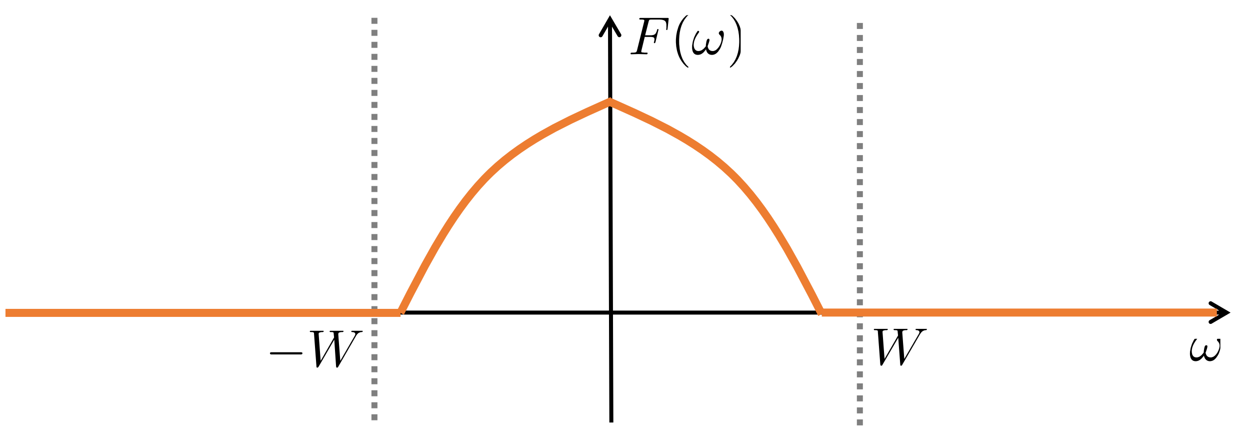
周波数ωの成分$e^{\mathrm{i}\omega t}$に振幅$\frac{A(\omega)}{2\pi}$と位相$e^{\mathrm{i}\theta(\omega)}$を与え、
あらゆる周波数成分を足し合わせて、時間信号を復元する

時間信号を復元するには、
どうしても無限大までの周波数が必要なのか?
一定の周波数で打ち切ることは可能でしょうか?

帯域制限信号

- 信号(≒関数)$f(t)$ は，そのフーリエ変換が $F(\omega) = 0 \ (|\omega| \geq W)$ を満たすとき，帯域制限信号と呼ばれる．（$W > 0$ は定数）
  つまり，帯域制限信号は角周波数 W 以上の高周波数成分を持たない信号である．

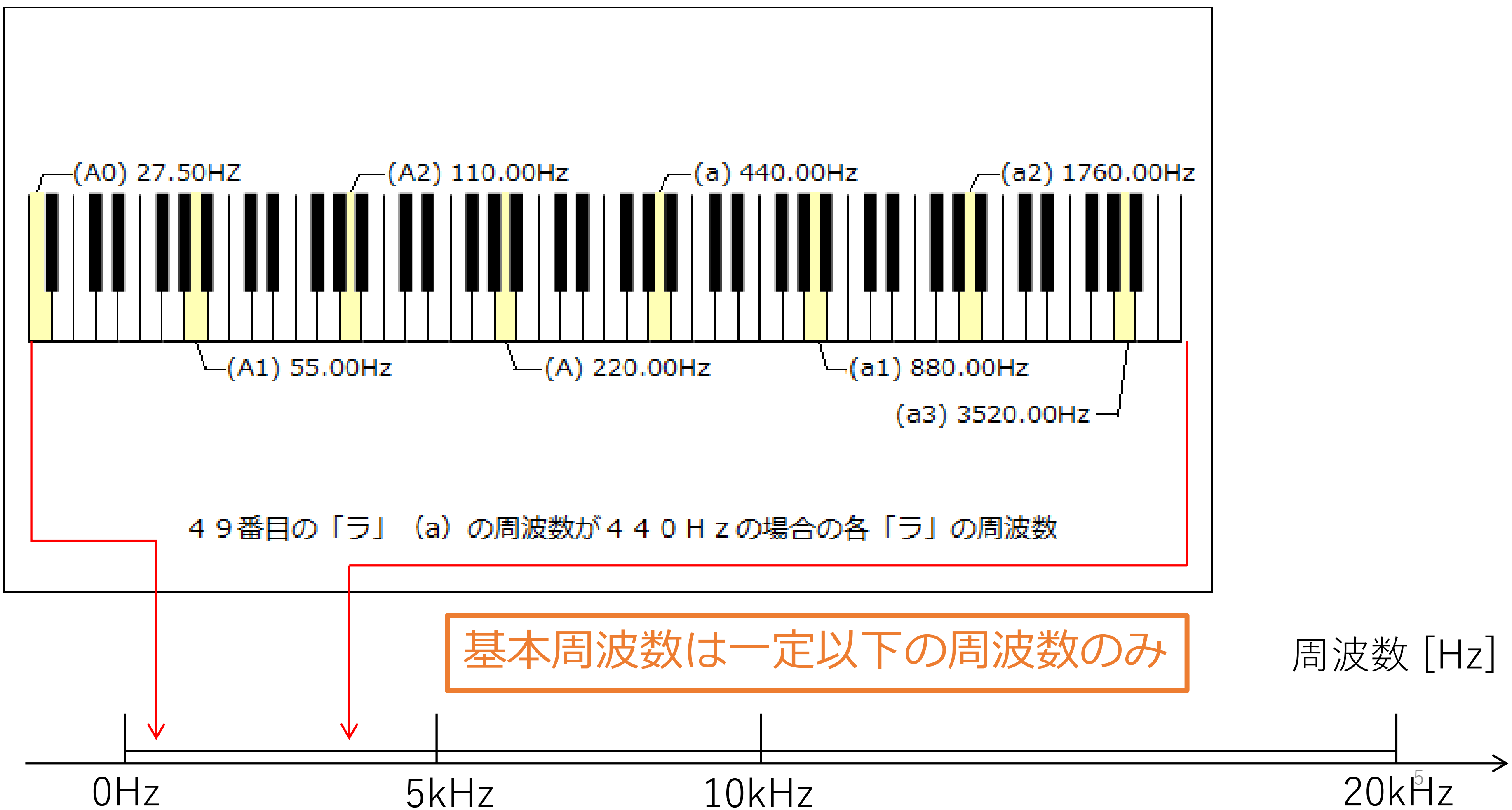
- 帯域制限仮定はデジタル信号処理の基礎になっている．



帯域制限仮定の妥当性 1/2

- 音を例にして，帯域制限という仮定が妥当か検証する．

例1) ピアノ音 http://pianolabo-sugiura.com/



(例) 様々な周波数の正弦波音

$$x(t) = a_k \cos(2\pi f t + \theta)$$

- f=220Hz
- f=440Hz
- f=880Hz
- f=1,760Hz
- f=5,000Hz
- f=10,000Hz
- f=15,000Hz
- f=20,000Hz

周波数が高くなるほど聞き取りづらくなる → 除去しても問題ない

帯域制限仮定の妥当性 2/2

- 音を例にして，帯域制限という仮定が妥当か検証する.

例2) 人間の可聴域音

- 人間はおよそ20,000Hzまでの鼓膜振動を音として聞く事ができる

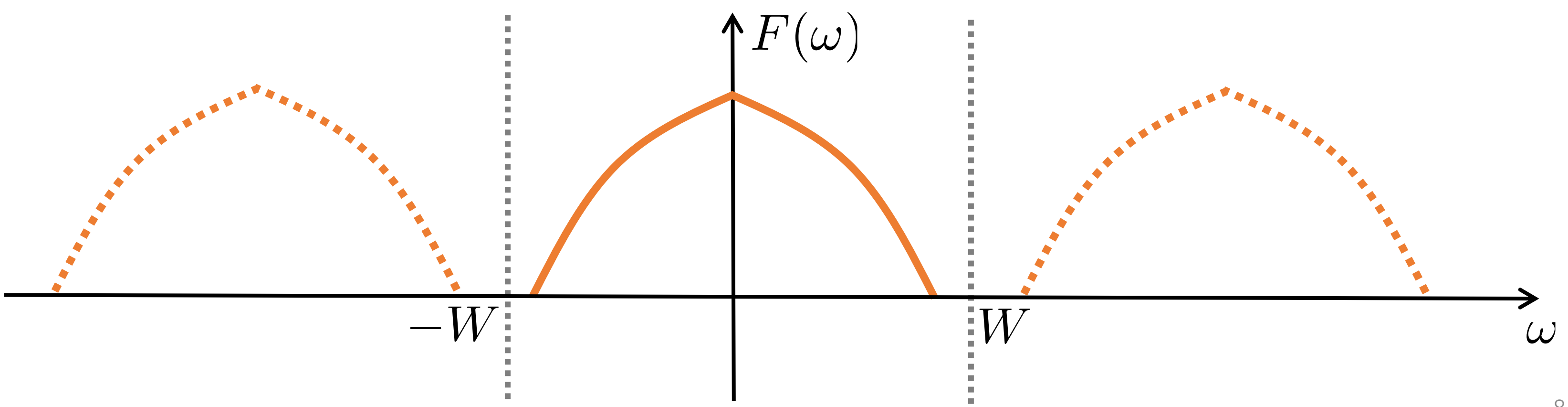
（この範囲には個人差および年齢差がある）

- 人間が聞き取れない周波数の音は除去しても問題ないので，帯域制限は自然な仮定である

（ただし，レコーディング時の音に帯域制限以上の高周波数成分が含まれる場合には，標本値を取り出す前に高周波数成分を予め除去する必要がある）

帯域制限信号のフーリエ変換 1/4

- 帯域制限の仮定 $F(\omega) = 0$ $(|\omega| \geq W)$ から，
  今計算したいのは$|\omega| < W$の範囲だけ.
- そのため，$F(\omega)$を区間 $[-W, W]$ 以外では周期 $2W$ で繰り返していると考えても問題ない．周期 $2W$ で $F(\omega)$を繰り返した関数を$F_d(\omega)$ とする.
- $F_d(\omega)$ は周期関数なので，フーリエ級数展開を適用してみる.



帯域制限信号のフーリエ変換 2/4

- 周期 $2L$ の関数 $g(t)$の(複素)フーリエ級数展開は

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi t}{L}}$$

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(t)e^{-i\frac{k\pi t}{L}}\mathrm{d}t \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

だった.

- これを周期 $2W$ として拡張した関数 $F_d(\omega)$ に当てはめると,

$$F_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\frac{k\pi\omega}{W}}$$

$$a_k = \frac{1}{2W}\int_{-W}^{W} F_d(\omega)e^{-i\frac{k\pi\omega}{W}}\mathrm{d}\omega \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

帯域制限信号のフーリエ変換 3/4

- 帯域制限の仮定 $F(\omega) = 0\ (|\omega| \geq W)$ と $F(\omega) = F_d(\omega)\ (|\omega| < W)$ の関係から,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} F_d(\omega) e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$ となる.

前ページの $a_k = \frac{1}{2W}\int_{-W}^{W} F_d(\omega) e^{-i\frac{k\pi\omega}{W}}\mathrm{d}\omega$

とよく似た計算であることに注目！

- 上式に$t = -\frac{k\pi}{W}$ を代入すると,

$$f\left(-\frac{k\pi}{W}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} F_d(\omega) e^{-i\omega\frac{k\pi}{W}}\mathrm{d}\omega = \frac{W}{\pi} a_k$$ が得られる.

$F_d(\omega)$のフーリエ係数a_kが標本値$f\left(-\frac{k\pi}{W}\right)$に対応する！

帯域制限信号のフーリエ変換 4/4

- $F_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\frac{k\pi\omega}{W}}$ に $a_k = \frac{\pi}{W} f\left(-\frac{k\pi}{W}\right)$ を代入して，

$$F_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{W} f\left(-\frac{k\pi}{W}\right) e^{i\frac{k\pi\omega}{W}}$$

を得る．

- 式の見栄えを良くするために変形する． $T = \frac{\pi}{W}$ と置き，kを$-k$に置き換えると，

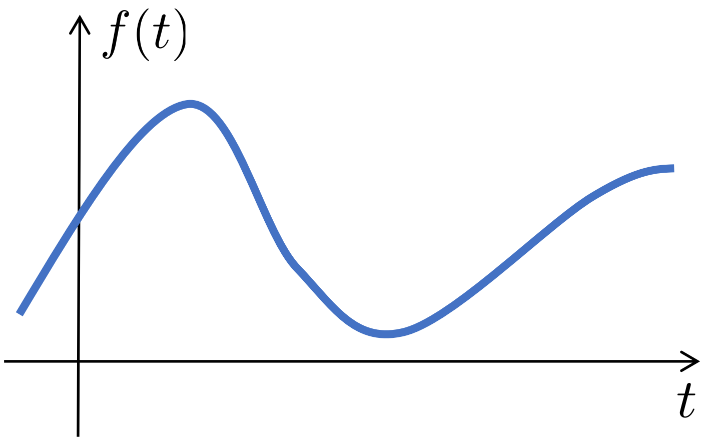
$$F_d(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-ikT\omega}$$

となる．

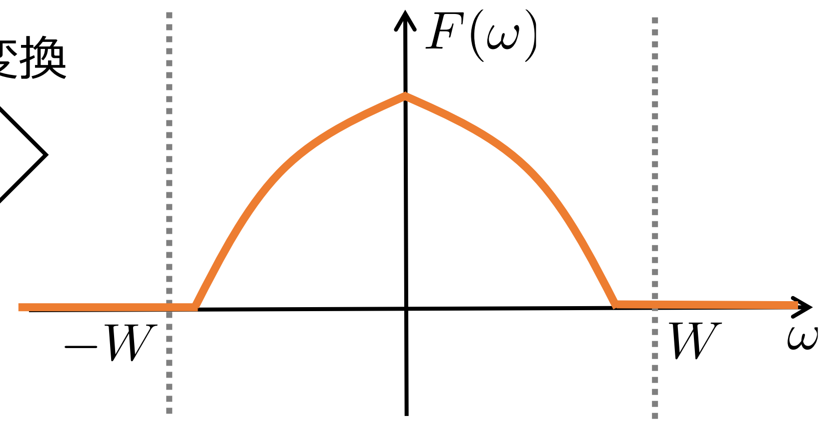
- $F(\omega) = F_d(\omega)$ $(|\omega| < W)$と $F(\omega) = 0$ $(|\omega| \geq W)$ により，

フーリエ変換が間隔 $T = \frac{\pi}{W}$ の標本値のみで計算できる

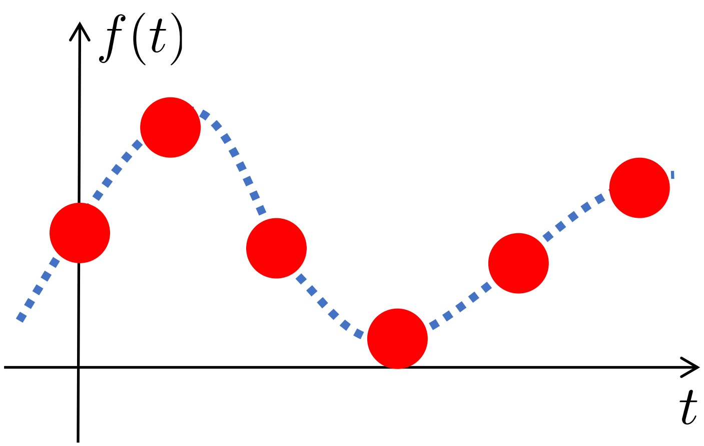
結果のイメージ図



フーリエ変換



サンプリング
(標本値の取得)



$$F(\omega) = \begin{cases} T \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{ikT\omega} & (|\omega| < W) \\ 0 & (|\omega| \geq W) \end{cases}$$

離散時間フーリエ変換

- 帯域制限信号のフーリエ変換について導出した式

$$F_d(\omega) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-ikT\omega}$$

を離散時間フーリエ変換と呼ぶ.
このとき，$F(\omega) = F_d(\omega)\ \ (|\omega| < W)$が成立する.

- 標本値を$f[k] = f(kT)$と置き，$\Omega = T\omega$ 置いて T で割った式

$$\tilde{F}_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]e^{-ik\Omega}$$

を離散時間フーリエ変換とすることも多い.
なお，このとき，$F_d(\omega) = T\tilde{F}_d(T\omega)$である.

※離散時間フーリエ変換(Discrete-time Fourier transform: DTFT)と
離散フーリエ変換(Discrete Fourier transform: DFT)は異なります.
離散フーリエ変換は第9回の授業で勉強します.

離散時間フーリエ変換の逆変換

- 帯域制限の仮定$F(\omega) = 0 \ (|\omega| \geq W)$をフーリエ逆変換の式に代入すると，

$$f[k] = f(kT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_d(\omega)e^{-i\omega kT}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} F_d(\omega)e^{-i\omega kT}\mathrm{d}\omega$$

フーリエ逆変換と比較すると，積分区間のみが異なる．

標本間隔について 1/2

- $W_0 \geq W$とすれば，帯域制限仮定から $F(\omega) = 0\ (|\omega| \geq W_0)$ が成立する．したがって， $T_0 = \pi/\ W_0 (\leq \pi/W)$ として，

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0 f(kT_0) e^{-ikT_0\omega} \qquad (|\omega| < W_0)$$

が成り立つ． （ $|\omega| < W < W_0$であることに注意）

つまり， $T \leq \pi/W$ を満たす標本間隔 Tで

標本値を取得（サンプリング）すれば，

標本値からフーリエ変換が計算できる．

（つまり，標本間隔が π/Wよりも細かくなるのは大丈夫）

標本間隔について 2/2

- $F(\omega) = 0$ $(|\omega| \geq W)$の仮定で，W は角周波数(単位は[rad/s])

  であり，$B = \dfrac{W}{2\pi}$ が周波数 (単位は[1/s]) になる.

- ここから，$T \leq \dfrac{\pi}{W} = \dfrac{1}{2B}$の間隔でサンプリングすることは，

  信号の「最大周波数の逆数の半分以下」の間隔でサンプリングすることに対応している.

フーリエ変換と離散時間フーリエ変換

- フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

時間信号$f(t)$は連続信号

スペクトル$F(\omega)$は連続スペクトル

- 離散時間フーリエ変換

$$F_d(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-ikT\omega} \qquad f[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} F_d(\omega) e^{-i\omega kT} \mathrm{d}\omega$$

時間信号$f[k]$は離散信号
(連続信号$f(t)$に対しT間隔でサンプリング)

スペクトル$F(\omega)$は連続スペクトル

今回のまとめ

- 帯域制限信号を定義し，そのフーリエ変換は離散標本値のみを用いて計算(デジタル信号処理)できることを示した.
- このとき，標本間隔を信号の最大周波数の逆数の半分以下にする必要がある.

理解度確認 小テスト

manaba +R にログインして，第3回小テストを行います。
制限時間は 10分間 です。

スライドを見返しながら，解いてよいです.
今回の問題は全て選択式の問題です.

宿題

Manaba+R 小テストにて出題。

期限：来週の授業開始時まで。