デジタル信号処理 第13回
線形フィルタ

2023年7月4日

立命館大学 情報理工学部

画像・音メディアコース

櫛田 貴弘 tkushida@fc.ritsumei.ac.jp

今回の概要

- 前回の講義では，線形時不変システムの周波数応答がインパルス応答の逆フーリエ変換により得られることを勉強した. また, 周波数応答からインパルス応答を逆算できることも勉強した. さらに, リアルタイム処理可能なシステムである因果的なシステムとして, FIRフィルタとIIRフィルタがあることを勉強した.

- 今回の講義では, 線形フィルタとして，FIRフィルタ, IIRフィルタについて少し詳しく勉強し, 両フィルタの一般表現である定係数差分方程式, フィルタ実装で重要なブロック図, z変換, フィルタの具体的な設計方法を紹介していく.

(復習)リアルタイム処理可能＝因果的なシステム

$$\underbrace{g[k]}_{\text{現在の出力}} = (f * h)[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]\, h[k-l] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[k-l]\, h[l]$$

$$= \cdots + \underbrace{f[k-2]}_{\text{過去に弾いた音}}h[2] + \underbrace{f[k-1]}_{\text{過去に弾いた音}}h[1] + \underbrace{f[k]}_{\text{現在の入力}}h[0]$$

$$+ \underbrace{f[k+1]}_{\text{未来の音（未確定）}}h[-1] + \underbrace{f[k+2]}_{\text{未来の音（未確定）}}h[-2] + \cdots$$

$h[k] = 0 \quad (k = -1, -2, \ldots)$ とすれば，未来の情報は使われない

$$= \cdots + f[k-2]h[2] + f[k-1]h[1] + f[k]h[0]$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} f[k-l]\, h[l]$$

$h[k] = 0 \quad (k = -1, -2, \ldots)$を満たすシステムは**因果的である**という.

(復習) FIRフィルタとIIRフィルタ (2種類の因果的システム)

因果的システム　$g[k] = \sum_{l=0}^{\infty} f[k-l]\, h[l]$　に関して，

インパルス応答 $h[k]$ がある正整数 M に対して，$h[k] = 0 \quad (k > M)$ を満たすとき，このシステムはFIR (Finite Impulse Response) フィルタと

呼ばれ，　$g[k] = \sum_{l=0}^{M} f[k-l]\, h[l]$　と表すことができる.

一方で，上記のような正整数 M が存在せず，インパルス応答が無限に続くシステムをIIR (Infinite Impulse Response) フィルタと呼ぶ.

FIRフィルタは，正整数 M が大きすぎない限り，簡単に実装可能.

IIRフィルタは，　$\frac{1}{T} H_d(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, e^{-ikT\omega} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, e^{-ikT\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-ikT\omega}}$　と表現できるものは実装可能.

(復習) 線形時不変システム＝畳み込み

$\{f[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を入力して $\{g[k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を出力する線形時不変システムは

$$g[k] = (f * h)[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]\, h[k-l]$$

のように，デジタル信号 $f[k]$ と $h[k]$ の畳み込み $f * h$ として表現可能

$h[k]$ はインパルス応答と呼ばれ，
システムの性質を決定する数列である

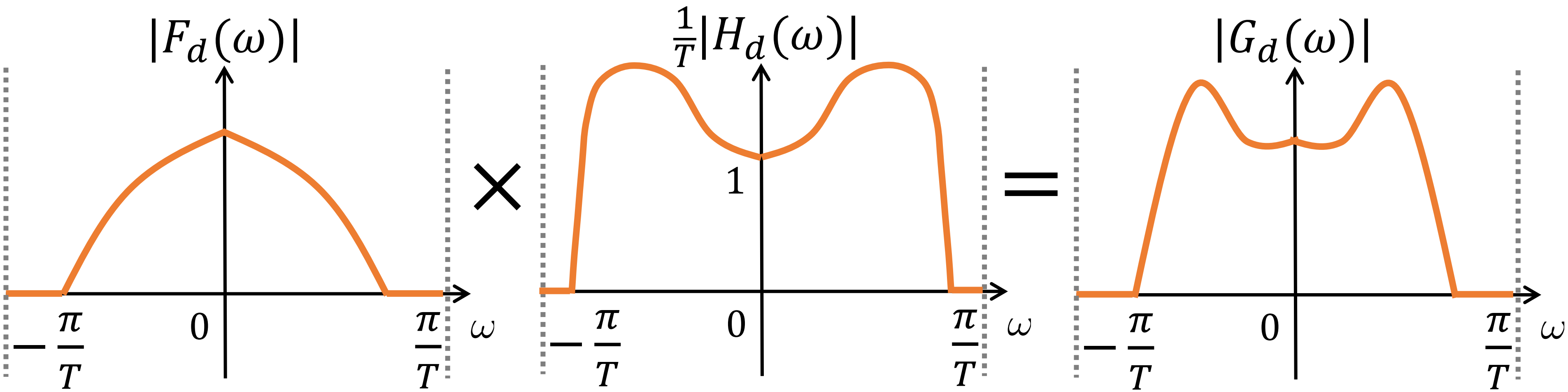
(復習) 線形時不変システムの周波数応答

線形時不変システムの入力信号 $f[k]$ と出力信号 $g[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]\, h[k-l]$

の周波数成分の変化率 $$\frac{G_d(\omega)}{F_d(\omega)} = \frac{1}{T} H_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-ikT\omega}$$

のことを，線形時不変システムの「周波数応答」と呼ぶ．

入力信号のスペクトル × システムの周波数応答 ＝ 出力信号のスペクトル



FIRフィルタとIIRフィルタの実装

FIRフィルタとIIRフィルタの式を再掲すると

FIRフィルタ: $g[k] = \sum_{l=0}^{M} h[l]f[k-l]$

IIRフィルタ: $g[k] = \sum_{l=0}^{\infty} h[l]f[k-l]$

・FIRフィルタは有限回の乗算・加算をそのままハードウェアで実装すればよい

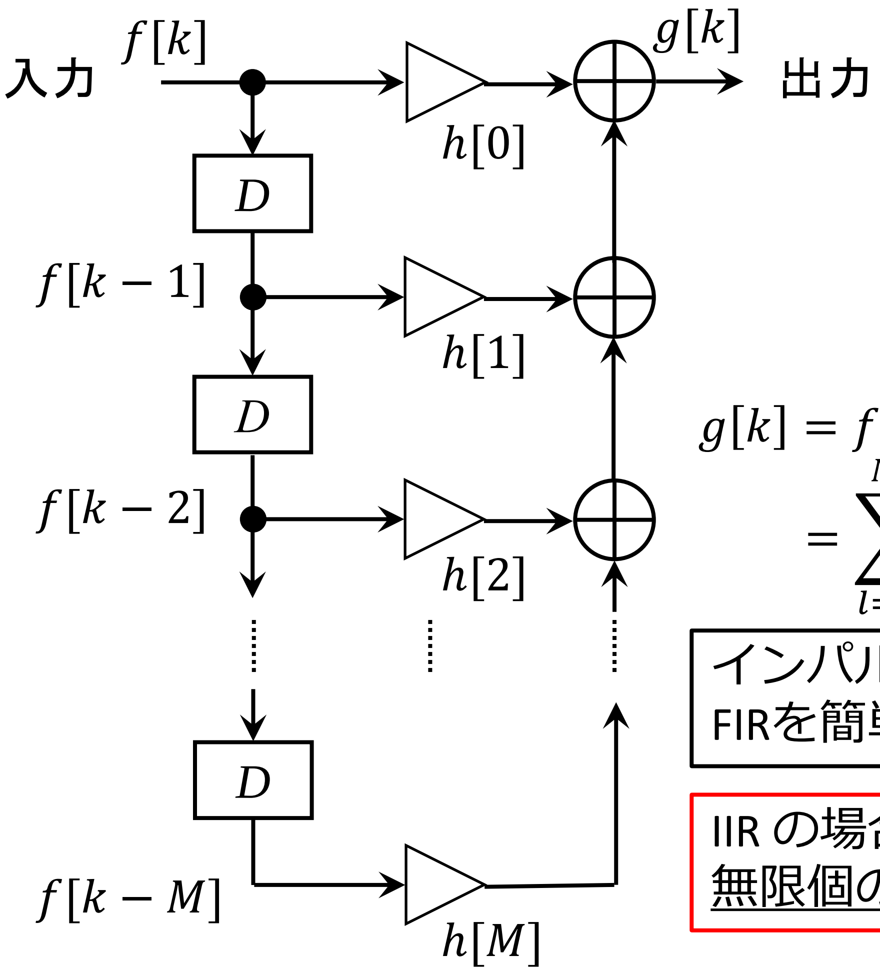
・IIRフィルタは無限回の乗算・加算を有限回の計算で表せないとハードウェアで実装できない

まずは，簡単なFIR の実装を見ていく.

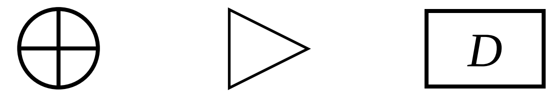
その後，IIR の実装を考える.

FIRフィルタのブロック図表現

<u>M次のFIRフィルタのブロック図</u>



ブロック図 … 線形時不変システムをプロセッサに実装する際の設計図



加算器（足し算を行う） 乗算器（掛け算を行う） 遅延器（1サンプル(T秒分)出力を遅らせる）

$$g[k] = f[k]h[0] + f[k-1]h[1] + \cdots + f[k-M]h[M]$$
$$= \sum_{l=0}^{M} h[l]f[k-l]$$

インパルス応答 $h[l]$ ($l = 0,1,\ldots,M$) が決まっていれば，FIRを簡単にハードウェアで実装できる．

IIR の場合，インパルス応答 $h[l]$ が無限に続くため，<u>無限個の回路が必要になってしまう．．．</u>

次数(M)：遅延器の数，　フィルタ長($M+1$)：遅延器の数+1 (=乗算器の数)

IIRフィルタの実装

IIRフィルタ: $g[k] = \sum_{l=0}^{\infty} h[l] f[k-l]$

・IIRフィルタは**無限回の乗算・加算**を有限回の計算で表せないとハードウェアで実装できない

一部の IIR フィルタは、下記の形式（**定係数差分方程式**）で書き直すことができる

$$g[k] = \underbrace{\sum_{l=0}^{M} b[l] f[k-l]}_{} - \underbrace{\sum_{l=1}^{N} a[l] g[k-l]}_{}$$

FIRと同じ形式

FIRと同じ形式だが
出力をもう一度入力する
= 再帰構造

IIRフィルタの再帰型システム表現

なぜ, IIRフィルタを再帰型システムで表現できるのか?
その理由を以下の次数1の簡単なシステムから考えてみる.

$$g[k] = f[k] + ag[k-1]$$

これは, 出力$g[k]$の1サンプル遅れ分を戻しているので, 再帰型システムである.

このシステムに単位インパルス信号$\delta[k]$を入力し, 各時刻の出力$g[k]$を計算すると,

$$g[0] = \delta[0] + a \times 0 = \delta[0] = 1$$

$$g[1] = \delta[1] + ag[0] = a$$

$$g[2] = \delta[2] + ag[1] = a^2$$

$$g[3] = \delta[3] + ag[2] = a^3$$

⋮

$$g[k] = \delta[k] + ag[k-1] = a^k$$

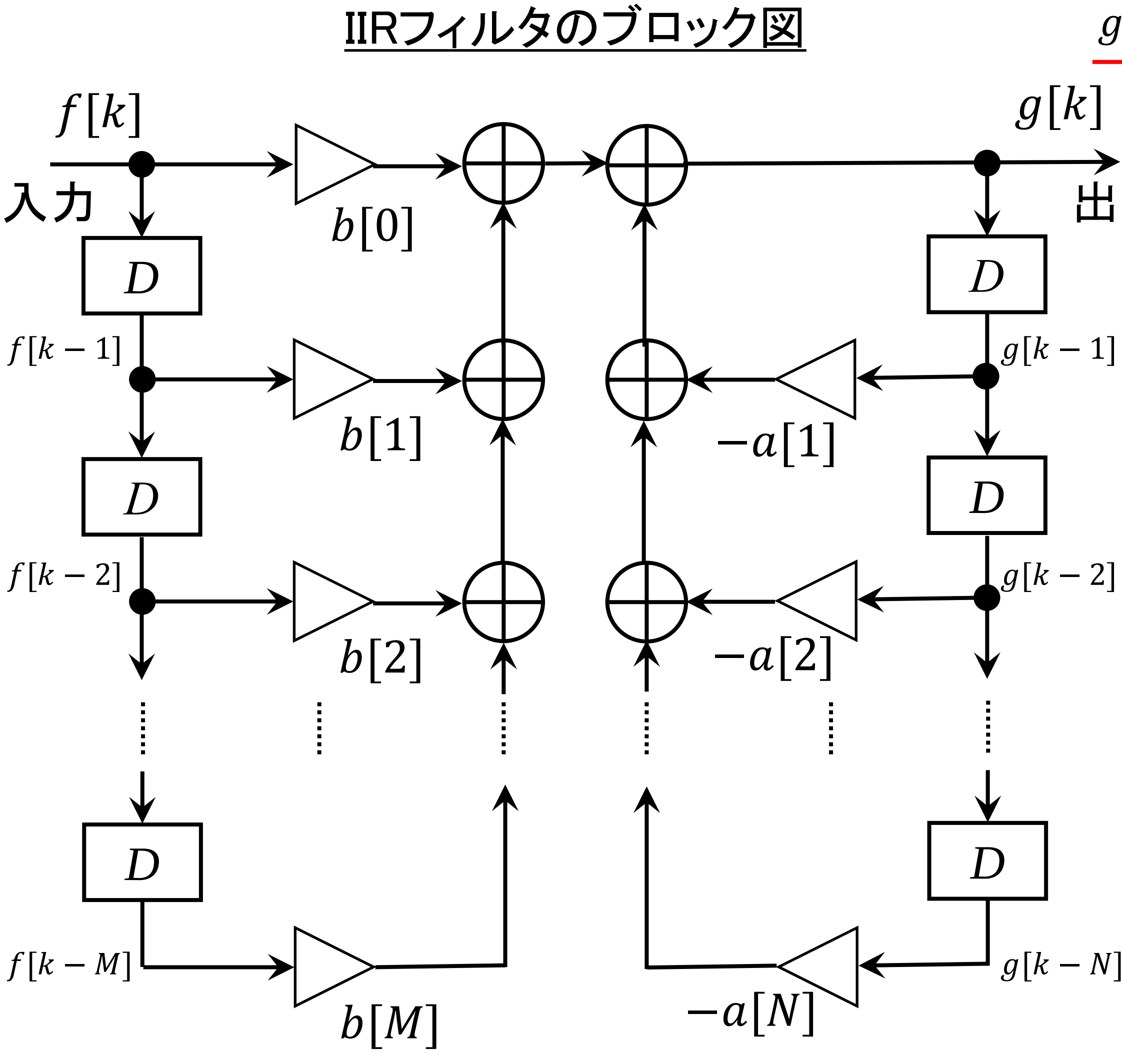
⋮

再帰型システムの次数が1でも,
インパルス応答は無限に続くので,

$$g[k] = \sum_{l=0}^{\infty} a^l f[k-l]$$

と表現できる.

IIRフィルタのブロック図表現



$$g[k] = f[k]b[0] + \cdots + f[k-M]b[M] - g[k-1]a[1] - \cdots - g[k-N]a[N]$$

$$= \sum_{l=0}^{M} b[l]f[k-l] - \sum_{l=1}^{N} a[l]g[k-l]$$

$M+1$個の入力 $f[k-l]$ と
直前のN個の出力 $g[k-l]$ を
用いて現在の出力 $g[k]$ 計算する.
(**定係数差分方程式**とも呼ばれる)

過去の出力を再び利用するため,
再帰型のハードウェア構造になる.

➡なぜ，再帰構造を入れると,
無限に続くインパルス応答 $h[l]$
を表現できるのか？

次数：$\max(M,N)$，フィルタ長：$\max(M,N)$ +1

再帰型フィルタの場合, 再帰部, 非再帰部
のうち**大きい方の次数**を取る.

IIRフィルタの周波数応答 1

もう一度復習すると，一般的な線形時不変システム $g[k]=\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]f[k-l]$ の周波数応答は，（＊一般論なので，非因果的なシステムも含んでいる）

$$\underbrace{\frac{G_d(\omega)}{F_d(\omega)}}_{\text{入力と出力の周波数成分の変化率}}=\frac{1}{T}H_d(\omega)=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,e^{-ikT\omega}}_{\text{インパルス応答}h[k]\text{の離散時間フーリエ変換}\times\frac{1}{T}}$$

である．

入力と出力の
周波数成分の変化率

インパルス応答$h[k]$の
離散時間フーリエ変換 $\times\frac{1}{T}$

「z変換」という変換を以下で定義すれば，システムの周波数応答は $H(e^{iT\omega})$ である．

z 変換

$$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

（z 変換 = 多項式への変換）

また，$\boxed{H(z)=\frac{G(z)}{F(z)}}$ が成立し，この$H(z)$ を

伝達関数と呼ぶ．インパルス応答 $h[k]$ そのものよりも伝達関数 $H(z)$ や周波数応答 $H(e^{iT\omega})$ が重要!!

伝達関数から周波数応答への変換

伝達関数

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$$

インパルス応答$h[k]$
のz変換

$z = e^{i\omega}$とおくと

周波数応答

$$H(\omega) = \frac{G_d(\omega)}{F_d(\omega)}$$

インパルス応答$h[k]$の
離散時間フーリエ変換 $\times \frac{1}{T}$

z 変換

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

$z = e^{\sigma} e^{i\omega}$

離散時間フーリエ変換

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-ik\omega}$$

$z = e^{i\omega}$

z変換と離散時間フーリエ変換は非常によく似た変換だとわかる.
また, 離散時間フーリエ変換が有する性質 (線形性, 時間移動性, 畳み込みなど) がz変換でも成立する.

(簡単に証明できるので, 本資料では証明を割愛する)

IIRフィルタの周波数応答 2

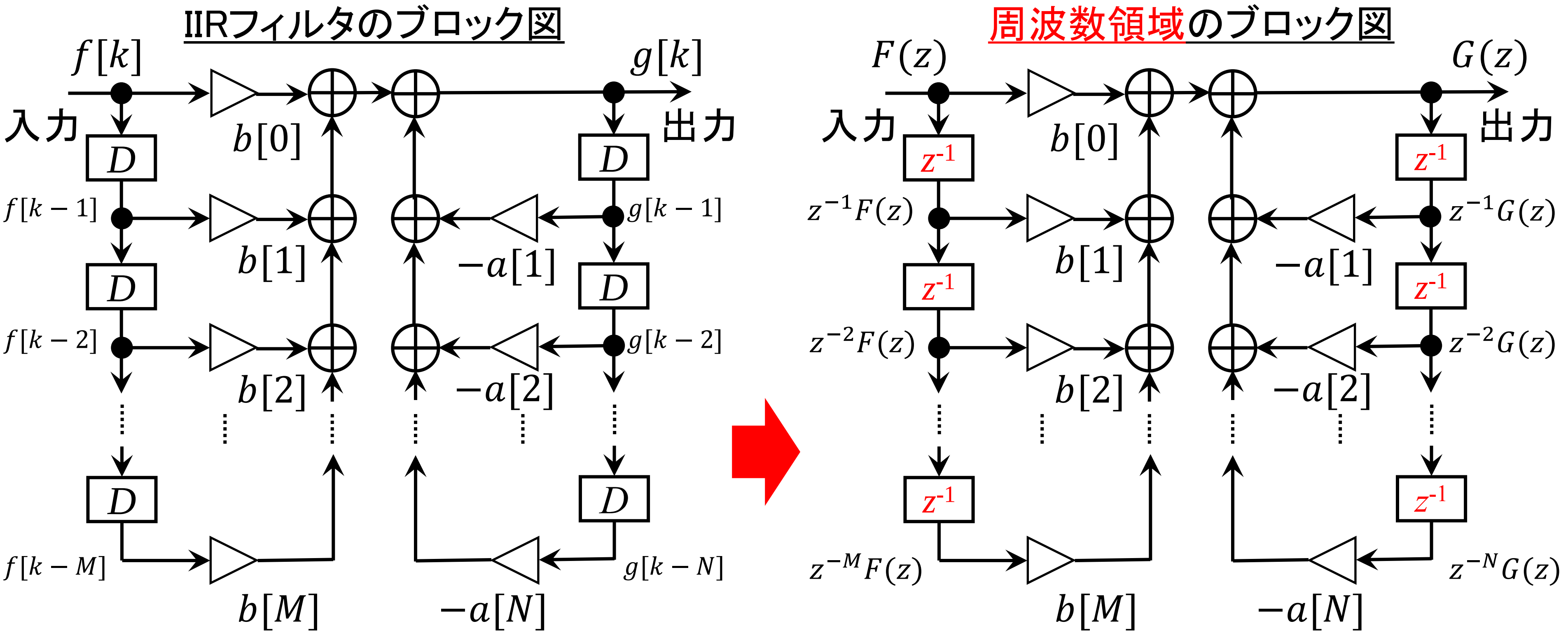
IIR フィルタの伝達関数 $H(z)$ を求めるために，**ブロック図を周波数領域で表現する**.

$f[k]$ を1サンプルだけ遅延させた信号 $\tilde{f}[k] = f[k-1]$ の z 変換は

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}[k] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k-1] z^{-k} = z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] z^{-k} = \underline{z^{-1}}\, F(z)}$$

であることを利用する.

1サンプルの遅れを表す.

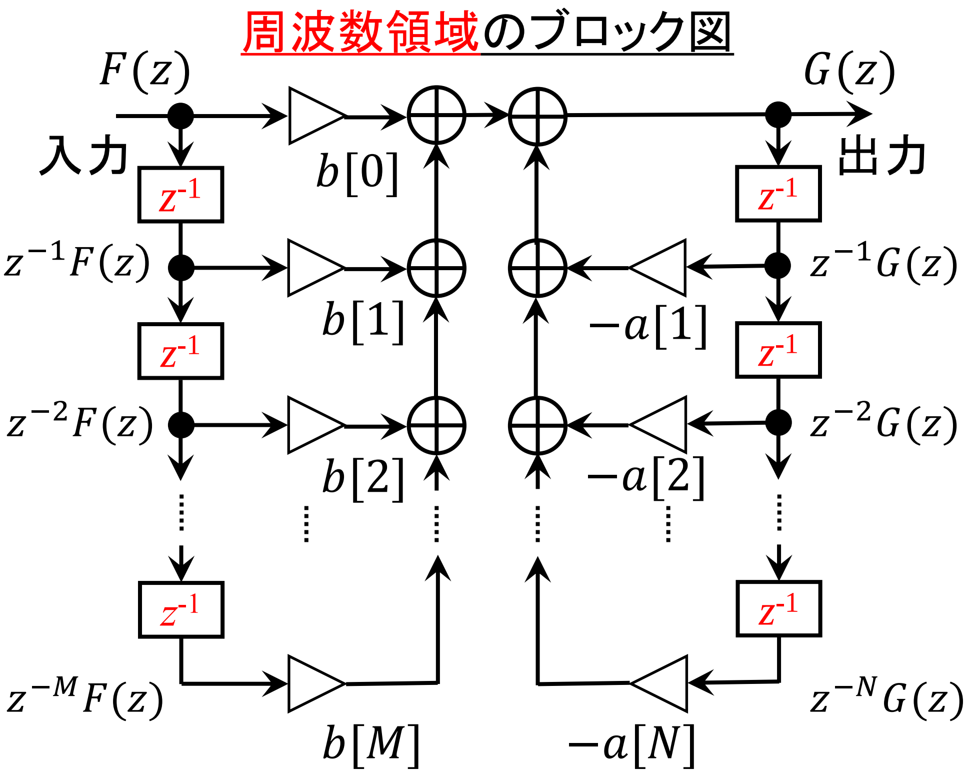


IIRフィルタの周波数応答３

ブロック図から出力は $G(z) = b[0]F(z) + b[1]z^{-1}F(z) + \cdots + b[M]z^{-M}F(z)$
$-a[1]z^{-1}G(z) - \cdots - a[N]z^{-N}G(z)$

であり，整理すると

$$\boxed{(1 + a[1]z^{-1} + \cdots + a[N]z^{-N})G(z) = (b[0] + b[1]z^{-1} + \cdots + b[M]z^{-M})F(z)}$$



したがって，IIRフィルタの伝達関数は

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b[k]\, z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a[k] z^{-k}}$$

周波数応答は

$$H(e^{iT\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b[k]\, e^{-ikT\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a[k] e^{-ikT\omega}}$$

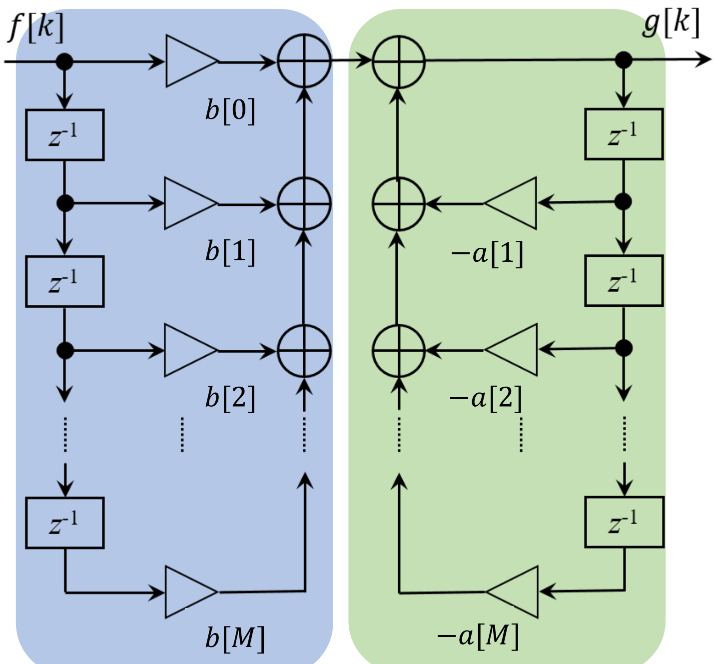
IIRフィルタのブロック図の変形１

IIRフィルタの伝達関数 $\dfrac{G(z)}{F(z)} = \dfrac{B(z)}{1+A(z)}$ を以下のように変形する.

$$\frac{G(z)}{F(z)} = B(z)\frac{1}{1+A(z)} = \frac{1}{1+A(z)}B(z)$$

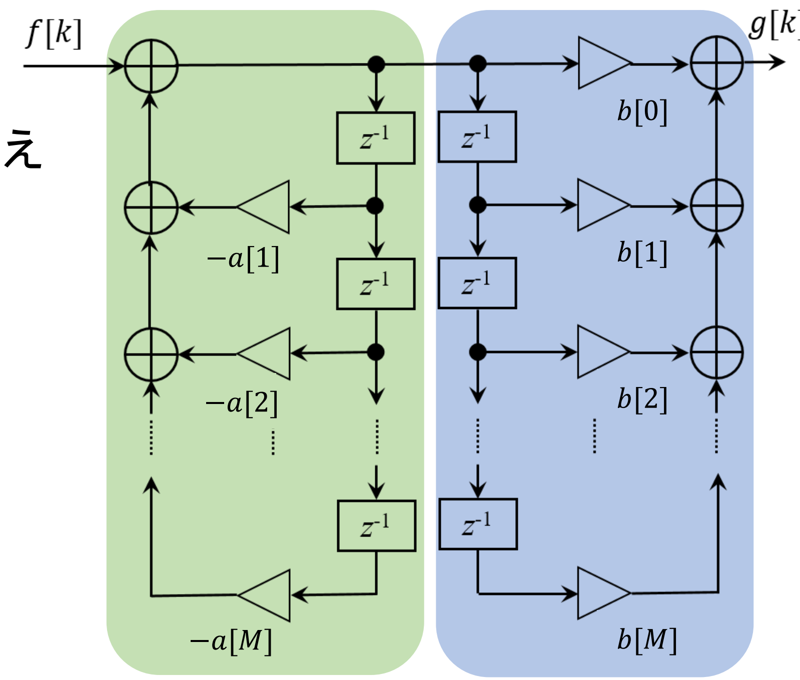
乗算なので, 順序の入れ替えが可能

M次IIRフィルタのブロック図



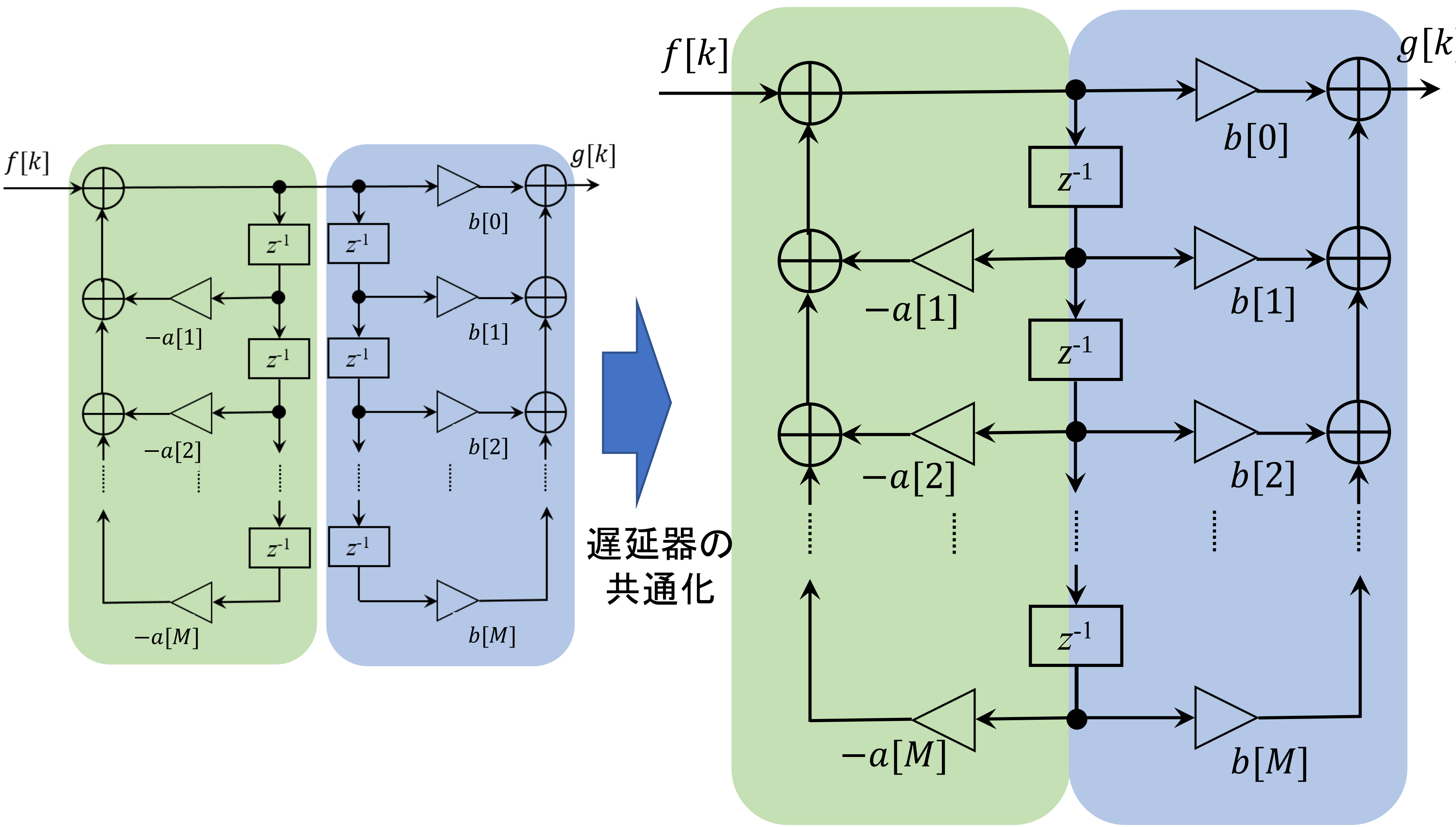
順序を入れ替え

順序を入れ替えても伝達関数は同じ



IIRフィルタのブロック図の変形２

さらに，遅延器が共通化できるので，最終的なフィルタは以下のようになる．



メモリを節約できるため，この構造がよく利用される．

manaba+R の小テスト

manaba +R にログインして，第13回小テストを行います。
制限時間は 10分間 です。

スライドを見返しながら，解いてよいです.

13週目の宿題内容

- 位相スペクトル

信号$f[k]$のスペクトル$F[n]$（複素数）は振幅スペクトルと位相スペクトルで分解できる：

$$F[n] = |F[n]|e^{-i\theta[n]}$$

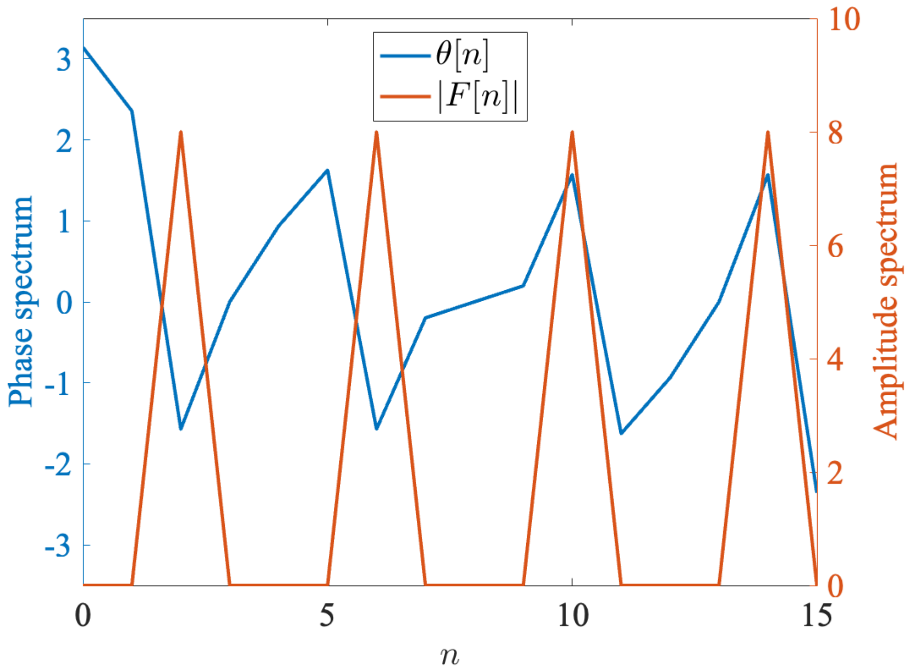
$$e^{-i\theta[n]} = \frac{F[n]}{|F[n]|} = \cos(\theta[n]) + i\sin(\theta[n])$$

(4-1)信号$f[k]$の位相スペクトル$\theta[n]$を計算し、描画してください。
＊関数atan2を活用することで、複素数$e^{-i\theta[n]}$から角度$\theta[n]$を計算できる。

(4-2) フィルタ$h[k]$の位相特性$\Phi[n]$を計算し、描画してください。

結果例

(4-1)信号$f[k]$の位相スペクトル$\theta[n]$を計算し、描画してください。



※正解の目安：

$$\theta[2] \approx \frac{\pi}{2} \qquad \theta[6] \approx \frac{\pi}{2}$$

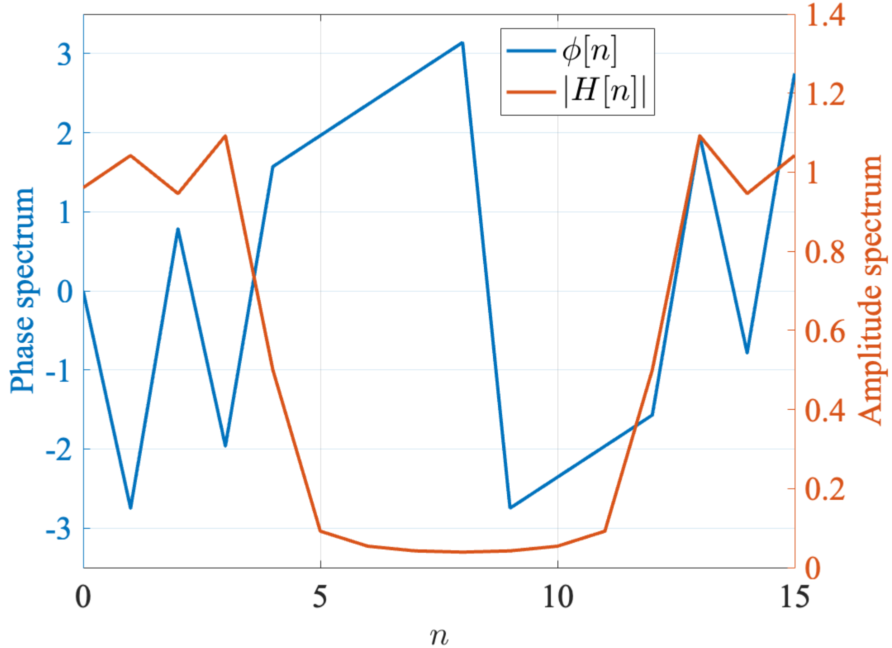
$$\theta[10] \approx -\frac{\pi}{2} \qquad \theta[14] \approx -\frac{\pi}{2}$$

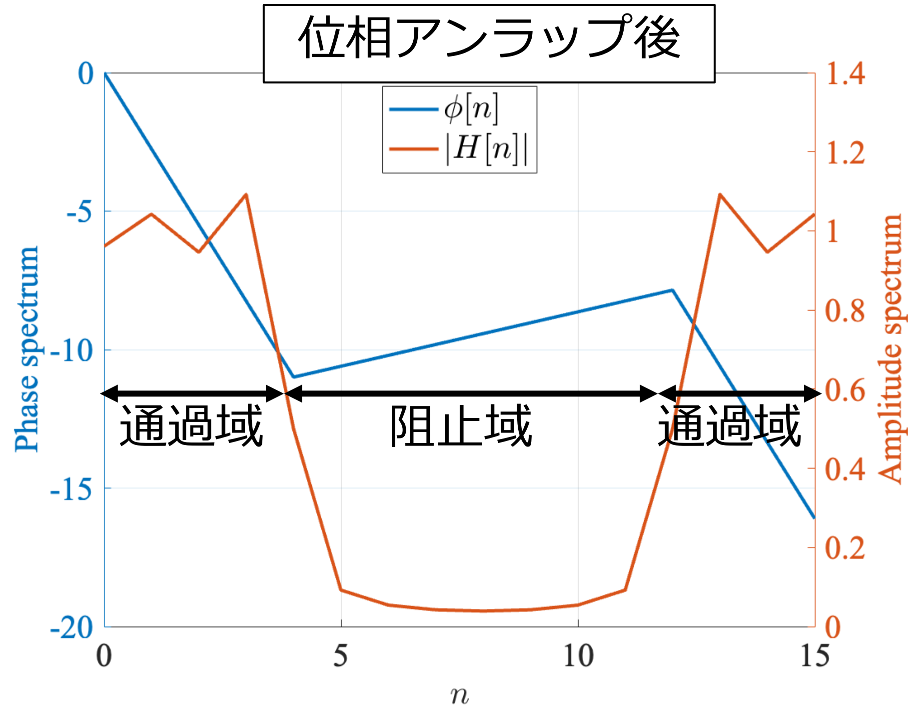
※$|F[2]| = |F[14]|$および$|\theta[2]| = -|\theta[14]|$から、オイラーの数式を利用して、$F[2]$と$F[14]$が複素共役の関係を持つことがわかる。
同様に、$F[6]$と$F[10]$が複素共役の関係を持つことがわかる。

※デジタル信号$f[k]$の定義から、アナログ信号$f(t)$の式が得られる。
$f(t)$に対してフーリエ級数展開もしくはフーリエ変換を計算し、その計算値と今回の結果が一致するか検証してみてください。

結果例

(4-2) フィルタ$h[k]$の位相特性$\Phi[n]$を計算し、描画してください。





※左がatan2関数を利用して計算した結果($-\pi$~π)である。
右が位相をアンラップ後の結果である。
アンラップ後の位相特性は、通過域で直線状になること（直線位相）が確認できる。

※位相アンラップについて、以下などを参照してください。
https://jp.mathworks.com/help/matlab/ref/unwrap.html
https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.unwrap.html