数学演習第4回

2022 10/18

微分積分

定積分

復習 (1) $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続のとき $[a,b]$ の分割

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対し 代表点 $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$

をとって作ったリーマン和

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

は 分割 Δ の幅 $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ を 0 に限りなく近づけるとき 分割 Δ や代表点のとり方によらない極限値 S に限りなく近づく。S を $f(x)$ の $[a,b]$ 上の定積分といい $S = \int_a^b f(x)dx$ で表す。

(2) 微分積分学の基本定理 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $(x \in [a,b])$ と上の $f(x)$ に対して定義すると $F'(x) = f(x)$ が成立つ。これより連続関数は原始関数を持つ。

定理から $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$ 右辺を $\left[G(x)\right]_a^b$ と表す。

(3) 置換積分法 $f(x)$ が区間 I で連続、$x = \varphi(t)$ は $\varphi'(t)$ が連続で $\varphi(t)$ の値域が I に含まれているとすると、I の2点 a, b に対し、α, β を $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ ととれば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(4) 部分積分法

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

練4.2 (A)

1. (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

解) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ より 与式 $= \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 1 = \frac{1}{2}\log 2$

$\square$

3. 定積分を利用して次の極限値を求めよ。

(5) $\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right\}$

解) 与式 $= \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{0}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right\}$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\tan^{-1}x\right]_0^1 = \tan^{-1}1-\tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}-0 = \frac{\pi}{4}$ □

4. (4) $\int_0^1 (\sin^{-1}x)^2 dx$

解) $x=\sin\theta$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{2}\end{array}$ $dx=\cos\theta\, d\theta$, $\sin^{-1}x=\theta$

与式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\cos\theta\, d\theta = \left[\theta^2\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta\sin\theta\, d\theta$

$= \frac{\pi^2}{4} - \left\{\left[2\theta(-\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(-\cos\theta)d\theta\right\} = \frac{\pi^2}{4} + 2\left[-\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}-2$ □

別 与式 $= \left[x(\sin^{-1}x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 x\, 2\sin^{-1}x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \frac{\pi^2}{4} + \int_0^1 (1-x^2)' \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin^{-1}x\, dx$

$= \frac{\pi^2}{4} + \left[2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x\right]_0^1 - \int_0^1 2\, dx$

$= \frac{\pi^2}{4} - 2$ □