دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی- سری دوم
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

نیمسال اول ۹۹-۹۸
تهیه و تنظیم:مهری رشیدی

تدریس‌یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود بپردازید.

۱. فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ یکنوا باشد. فرض کنید $x_0\in(0,1)$ و $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)$ وجود داشته باشد. نشان دهید $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

۲. (آدامز)فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید $|f|$ نیز روی $[a,b]$ تابعی پیوسته است. آیا عکس این گزاره برقرار است؟ یعنی اگر $|f|$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد، f نیز روی $[a,b]$ پیوسته است؟

۳. (آدامز) نشان دهید که تابع $F(x)=(x-a)^2(x-b)^2+x$ مقدار $\frac{(a+b)}{2}$ را در نقطه ای مانند x_0 اختیار می کند.

۴. فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $x=0$ پیوسته باشند، $f(0)=0$ و $g(0)=1$. فرض کنید برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$. نشان دهید f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۵. فرض کنید تابع f و g بر بازه $[-1,1]$ پیوسته باشند و به ازاي هر $x\in[-1,1]$ داشته باشیم $|f(x)|\leq 1$. همچنین داشته باشیم $g(-1)=-1$ و $g(1)=1$ ثابت کنید $x_0\in[-1,1]$ وجود دارد که $f(x_0)=g(x_0)$.

۶. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد. ثابت کنید $g(x)=f(x-[x])$ در تمامی نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر $f(0)=f(1)$.

۷. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته متناوب با دوره تناوب T باشد، یعنی برای هر x در اعداد حقیقی داریم $f(x+T)=f(x)$. ثابت کنید $c\in\mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه $f(c+\frac{T}{2})=f\left(c\right)$.

۸. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$ صدق کند. نیز فرض کنید $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=f\left(0\right)$. نشان دهید

الف) $f(nx)=nf\left(x\right)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$.

ب) f در یک نقطه پیوسته است اگر و تنها اگر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

ج) f پیوسته است اگر و تنها اگر برای عددی مانند $m\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=mx$.

۹. اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ اعداد مثبت باشند و $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. چنانچه $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ ، نشان دهید $c \in [a,b]$ موجود است به طوریکه

$$f(c) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

مشابه: اگر $c_1, \dots, c_n$ مقادیری در $[a,b]$ باشند و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، نشان دهید $c \in [a,b]$ وجود دارد به طوریکه

$$f(c_1) + 2f(c_2) + \dots + nf(c_n) = \frac{n(n+1)}{2} f(c).$$

۱۰. (آدامز)الف) فرض کنید f تابعی پیوسته بر بازه‌ی $[0,1]$ باشد و $f(0) = f(1)$ ، نشان دهید نقطه‌ای مانند $a \in [0, \frac{1}{2}]$ وجود دارد به طوریکه $f(a + \frac{1}{2}) = f(a)$.

ب) اگر n عدد صحیحی بزرگتر از ۲ باشد، نشان دهید نقطه‌ای مانند $a \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ وجود دارد به طوریکه $f(a + \frac{1}{n}) = f(a)$.

۱۱. (ماهانه اول ۹۷–۹۶)فرض کنید $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ تابعی پیوسته باشد و $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ داده شده اند. نشان دهید $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه

$$\frac{1}{5f(x_1)} + \frac{1}{5f(x_2)} + \dots + \frac{1}{5f(x_5)} = \frac{1}{f(c)}$$

۱۲. (ماهانه اول ۹۷–۹۶)فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد و $f(a) = f(b)$. اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، نشان دهید عددی مانند $c \in \left[a, b - \frac{b-a}{n}\right]$ وجود دارد که $f(c) = f\left(c + \frac{b-a}{n}\right)$.

تمرینات اضافه

۱۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای هر دو عدد گویای $q_1 < q_2$ داشته باشیم $f(q_1) < f(q_2)$. نشان دهید f تابعی صعودی است.

۱۴. n عدد $a_1, \dots, a_n$ را به طور دلخواه از بازه‌ی $[0,1]$ انتخاب می‌کنیم. نشان دهید عددی مانند c در بازه‌ی $[0,1]$ وجود دارد که

$$\frac{|c - a_1| + \dots + |c - a_n|}{n} = \frac{1}{2}.$$

۱۵. دو تابع پیوسته $f,g:[0,1]\to[0,1]$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $x,y\in[0,1]$ وجود دارند بطوریکه $f(x)=y, g(y)=x$.

۱۶. توابع پیوسته $f,g:[0,1]\to[0,1]$ را در نظر بگیرید که $fog=gof$.

الف)ثابت کنید $x_0\in[0,1]$ وجود دارد بطوریکه $f(x_0)=g(x_0)$.

ب)اگر تابع g غیر نزولی باشد نشان دهید $x_0\in[0,1]$ وجود دارد بطوریکه $f(x_0)=g(x_0)=x_0$.

توجه:

۱. دانشجویان محترم می توانند کلید سوالات ماهانه را از سایت دانشکده ریاضی دریافت نمایند.

۲. الزامی به حل تمرینات اضافه در ساعت کلاس نیست و تدریس یاران محترم در صورت داشتن وقت اضافه به حل این سوالات بپردازند.