۱. (آدامز بخش ۳ – ۱۲سوال۳۶) نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در $(0,0)$ پیوسته نیست. بنابراین نمودار تابع در این نقطه هموار نیست. با وجود این نشان دهید $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ هر دو وجود دارند. پس وجود مشتقات جزیی تابعی چند متغیره، مستلزم پیوستگی آن نیست. این امر با حالت تک متغیره تفاوت دارد.

حل:

$$I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}$$

باید دو مسیر دلخواه و متفاوت ارائه دهیم که مقادیر حد برای این دو مسیر متفاوت باشد.
مسیر اول را $x=0$ وقتی $y\to 0$ در نظر می‌گیریم، داریم

$$l_1=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0.$$

مسیر دوم را $x=y$ در نظر می‌گیریم، داریم

$$l_2=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1.$$

$l_1\neq l_2$ بنابراین تابع در $(0,0)$ حد ندارد، در نتیجه پیوسته نیست.
برای محاسبه $f_1(x,y)$ در $(x,y)\neq(0,0)$ از ضابطه تابع نسبت به $x$ مشتق می‌گیریم و برای نقطه $(x,y)=(0,0)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f_1(x,y)|_{(x,y)\neq(0,0)}=\frac{2y(x^2+y^2)-2x(2xy)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2yx^2+2y^3-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

در نتیجه

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

به همین صورت $f_2(x,y)$ را بدست می‌آوریم.

$$f_2(x,y)|_{(x,y)\neq(0,0)}=\frac{2x(x^2+y^2)-2y(2xy)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^2+2x^3-4y^2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^3-2y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_2(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

در نتیجه

$$f_2\,(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3-2y^2x}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

پس وجود مشتقات جزئی، پیوستگی تابع را نتیجه نمی‌دهد.

۲. (آدامز بخش ۳ – ۱۲سوال۳۷) اگر

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^3+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مطلوبست تعیین $f_1(0,0)$ و $f_2(0,0)$ در صورت وجود.

حل:

$$f_1(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_2(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

حال برای نقطه $(x_0,y_0)=(0,0)$ داریم

$$\begin{aligned}f_1(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(h^3+0)\sin(\frac{1}{h^2})-0}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h^3\sin(\frac{1}{h^2})}{h}\\&=\lim_{h\to 0}h^2\sin(\frac{1}{h^2})=0\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}f_2(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin(\frac{1}{h^2})}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\sin(\frac{1}{h^2})\end{aligned}$$

حد بالا وجود ندارد. (دنباله‌های $a_n=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ و $b_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}$ در نظر بگیرید. روی دنباله $a_n$ تابع به صفر و روی دنباله $b_n$ به یک میل می‌کند)

۳. نشان دهید که تابع با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases} x & |x|\le |y| \\ -x & |x|>|y| \end{cases}$ در $(0,0)$ پیوسته است و مشتقات جزیی در این نقطه وجود دارند اما تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. درباره $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\,,\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ چه می توان گفت؟

حل:

برای اثبات پیوستگی: با توجه به ضابطه تابع داریم $|f(x,y)|=|x|$،

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$$

بنا بر قضیه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ و چون مقدار حد تابع در $(0,0)$ برابر با مقدار تابع در این نقطه است، پس تابع در $(0,0)$ پیوسته است. حال مشتقات جزئی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

می‌دانیم تابع $f(x,y)$ در $(0,0)$ مشتق پذیر است اگر و تنها اگر

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

حال حد بالا را برای تابع مورد نظر محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-0-h(-1)-k(0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)+h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

مسیر اول را $h=0$ وقتی $k\to 0$ در نظر می‌گیریم

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)+0}{\sqrt{k^2}}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{|k|}=0$$

مسیر دوم را $h=k, h>0$ در نظر می‌گیریم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,h)+h}{\sqrt{2h^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{\sqrt{2}h}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

روی دو مسیر مختلف مقدار حد ها با هم برابر نبودند پس حد بالا موجود نیست و در نتیجه تابع در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

برای بدست آوردن $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\,,\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ باید تابع $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ را بدست آوریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 1 & |x|<|y| \\ -1 & |x|>|y| \;\; or \;\; x=y=0 \end{cases}$$

برای حالت $x = y \neq 0$ مشتق جزئی نسبت به $x$ وجود ندارد زیرا:

**۱)** $x = y = a > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h}$$

$$1) \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-a-h-a}{h} = -\infty$$

$$2) \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a+h-a}{h} = 1$$

**۲)** $x = y = a < 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h}$$

$$1) \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a+h-a}{h} = 1$$

$$2) \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-a-h-a}{h} = \infty$$

برای حالت $x = -y \neq 0$ نیز مشتق جزئی نسبت به $x$ وجود ندارد زیرا

**۱)** $y = -a, x = a, a > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h}$$

$$1) \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-a-h-a}{h} = \infty$$

$$2) \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a+h-a}{h} = 1$$

**۲)** $y = -a, x = a, a < 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,-a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h}$$

$$1) \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a+h-a}{h} = 1$$

$$2) \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-a-h-a}{h} = -\infty$$

مشابه قسمت قبل می توان نشان داد برای نقاطی که $|y| = |x|$ و $(x,y) \neq (\circ,\circ)$ مشتق دوم وجود ندارد. بنابراین داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \text{وجود ندارد} & x = y \neq \circ \\ \circ & x \neq y, x = y = \circ \end{cases}$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}(\circ,\circ) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \lim_{h\to\circ} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\circ+h,\circ) - \frac{\partial f}{\partial y}(\circ,\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ} \frac{\circ-\circ}{h} = \circ$$

و

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(\circ,\circ) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \lim_{h\to\circ} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(\circ,\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ} \frac{۱-(-۱)}{h} = \infty$$

۴. (آدامز بخش ۳ – ۱۲ سوال ۲۱)معادله صفحه مماس و خط قائم بر نمودار تابع $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ را در نقطه $(1,-1)$ بیابید.

حل:

معادله نمودار تابع برابر است با $z=\arctan(\frac{y}{x})$، پس در نقطه‌ی $(1,-1)$، $z=-\frac{\pi}{4}$ است. پس نقطه‌ی مورد نظر $p=(1,-1,-\frac{\pi}{4})$ است. برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی مماس، بردار نرمال صفحه را لازم داریم، که می‌توانیم از بردار گرادیان رویه $F(x,y,z)=z-\arctan(\frac{y}{x})$ در نقطه $p$ استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}\nabla F(1,-1,-\frac{\pi}{4}) &= (\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})|_{(1,-1,-\frac{\pi}{4})}\\ &= (-\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}},-\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}},1)|_{(1,-1,-\frac{\pi}{4})}\\ &= (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)\end{aligned}$$

بنابراین معادله صفحه مماس برابر است با

$$-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y+1)+(z+\frac{\pi}{4})=0,$$

همچنین بردار گرادیان، بردار هادی خط قائم در نقطه‌ی $p$ است. بنابراین معادله خط قائم برابر است با

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y+1}{-\frac{1}{2}}=\frac{z+\frac{\pi}{4}}{1}.$$

یادآوری:

$$(\arctan u)'=\frac{u'}{1+u^2}.$$

۵. (آدامز بخش ۳ − ۱۲سوال۲۳) مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ را بیابید که در آنها این رویه دارای صفحه مماس افقی هست.

حل:

باید نقاطی را بیابیم که مولفه اول و دوم بردار گرادیان در آن نقطه‌ها برابر با صفر باشد زیرا در این صورت معادله صفحه مماس به صورت $z = c$ است که $c$ عددی ثابت است.

بردار گرادیان رویه $F(x,y,z) = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2 - z$ برابر است با

$$\begin{aligned}\nabla F(x,y,z) &= (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) = (4x^3 - 4y^3, -12xy^2 + 12y, -1)\\ &= (4(x-y)(x^2+xy+y^2), 12y(1-xy), -1)\end{aligned}$$

صفحه مماس در نقاطی که $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ صفر هستند افقی است. پس باید معادله های زیر را حل کنیم:

$$4(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0, \qquad 12y(1-xy) = 0$$

از صفر بودن معادله دوم داریم $y = 0$ یا $1 - xy = 0$

۱. اگر $y = 0$ باشد، از معادله اول نتیجه می‌شود $x = 0$ است بنابراین نقطه $(0,0)$ را داریم.

۲. اگر $xy = 1$ باشد از معادله اول داریم $x^2 + x(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2} = 0$ یا $x - \frac{1}{x} = 0$ . عبارت $x^2+1+\frac{1}{x^2}$ همواره ناصفر است. بنابراین باید $x - \frac{1}{x} = 0$ باشد. درنتیجه $x^2 = 1$ یعنی $x = \pm 1$ پس نقاط $(1,1)$ و $(-1,-1)$ را داریم.

بنابراین صفحه مماس در نقاط $(0,0)$ ، $(1,1)$ و $(-1,-1)$ افقی است.

۶. (آدامز بخش ۳ – ۱۲سوال۲۶، ۲۹) نشان دهید هر یک از توابع زیر در معادله دیفرانسیل جزیی داده شده صدق می کند.

$$z = \frac{x+y}{x-y}; \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
$$w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}; \quad x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = -2w.$$

حل:
ابتدا تابع $z = \frac{x+y}{x-y}$ را در نظر می‌گیریم. حال، با توجه به قواعد مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x-y)(1)-(x+y)(1)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x-y)(1)-(x+y)(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{-2y}{(x-y)^2} + y\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{-2xy}{(x-y)^2} + \frac{2xy}{(x-y)^2} = 0.$$

اکنون تابع $w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ را در نظر می‌گیریم. برای این تابع داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

در نتیجه داریم:

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = x\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + y\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + z\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$= \frac{-2x^2-2y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2w.$$

۷. (آدامز بخش ۳ – ۱۲سوال ۳۰) اگر $z = f\left(x^۲ + y^۲\right)$ که در آن $f$ یک تابع یک متغیره مشتق پذیر دلخواه است، نشان دهیددر معادله دیفرانسیل جزیی داده شده زیر صدق می کند.

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

حل:
با توجه به رابطه‌ی $z = f\left(x^۲ + y^۲\right)$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۲x\ f'(x^۲ + y^۲),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = ۲y\ f'(x^۲ + y^۲).$$

در نتیجه با توجه روابط بالا، داریم:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = ۲xy\ f'(x^۲ + y^۲) - ۲xy\ f'(x^۲ + y^۲) = ۰$$

۸. (آدامز بخش ۳ – ۱۲سوال۳۴) فاصله نقطه $(1,1,0)$ از سهمی‌وار دایره ای به معادله $z = x^2 + y^2$ را بیابید.
راه حل اول:
فرض کنیم نقطه‌ی $Q = (u_0, v_0, w_0)$ ، نقطه‌ای روی سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ باشد که نسبت به نقاط دیگر، کم‌ترین فاصله را از این سهمی‌وار تا نقطه‌ی $P = (1,1,0)$ دارد. (یعنی کم‌ترین فاصله‌ی $P$ تا سهمی‌وار، در نقطه‌ی $Q$ ایجاد می‌شود.) در این‌صورت، بردارِ $\vec{PQ} = (u_0 - 1)\vec{i} + (v_0 - 1)\vec{j} + w_0\vec{k}$ باید در نقطه $Q$ بر سهمی‌وارِ مذکور عمود باشد. به عبارتی دیگر، بردار $\vec{PQ}$ باید با بردار نرمالِ سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ در نقطه‌ی $Q$، یعنی بردار $\vec{n} = 2u_0\vec{i} + 2v_0\vec{j} - \vec{k}$ ، موازی باشد. در این صورت، به ازای عدد حقیقی $\lambda$ داریم:

$$\vec{PQ} = \lambda\vec{n}$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$u_0 - 1 = 2\lambda u_0, \quad v_0 - 1 = 2\lambda v_0, \quad w_0 = -\lambda.$$

در نتیجه بدیهی است که $u_0 = v_0 = \frac{1}{1-2\lambda}$. از طرفی دیگر، چون نقطه $Q$ روی سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ قرار دارد، پس $w_0 = u_0^2 + v_0^2$. حال از رابطه‌ای که برای $u_0$ و $v_0$ بدست آمد داریم $w_0 = \frac{2}{(1-2\lambda)^2}$. از طرفی داشتیم $w_0 = -\lambda$، پس نتیجه می‌شود:

$$-\lambda = \frac{2}{(1-2\lambda)^2}$$

از رابطه‌ی بالا داریم:

$$-\lambda(1-2\lambda)^2 = 2 \Longrightarrow 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \Longrightarrow (\lambda + \frac{1}{2})(4\lambda^2 - 6\lambda + 4) = 0$$

از آن جا که برای معادله‌ی $4\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$ داریم $\Delta < 0$، تنها جواب ممکن برای معادله‌ی بالا عبارت است از $\lambda = -\frac{1}{2}$ و بنابراین $u_0 = v_0 = w_0 = \frac{1}{2}$. در نتیجه، فاصله‌ی نقطه‌ی $P = (1,1,0)$ تا سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$، برابر است با فاصله‌ی این نقطه تا نقطه‌ی $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$، که این فاصله نیز برابر است با

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(1-\frac{1}{2})^2 + (1-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

راه حل دوم:
این سوال را با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ نیز می‌توان حل کرد. اگر قرار دهیم:

$$d(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

آنگاه تابع $d$ با تعریف بالا، فاصله نقطه‌ی دل‌خواه $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ را از نقطه $(1,1,0)$ به دست می‌آورد. حال در این سوال می‌خواهیم نقطه‌ای روی رویه‌ی $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ پیدا کنیم، که تابع $d$ را مینیمم کند (یعنی کم‌ترین

فاصله را با $(1,1,0)$ داشته باشد. پس کافیست مسئله زیر را با روش ضرایب لاگرانژ حل کنیم:

$$\begin{array}{ll} \min & d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2} \\ s.t. & \left\{ g=0: \quad x^2+y^2-z=0 \right. \end{array}$$

از آن جا که تابع رادیکال با فرجه‌ی زوج یک تابع صعودی است، برای سهولت در محاسبه‌ی مشتق، $d$ را بدون رادیکال در نظر گرفته و ادامه می‌دهیم. یعنی قرار می‌دهیم $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+z^2$. با توجه به روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z) \\ g=0 \end{cases}$$

داریم:

$$\nabla f=(2x-2,2y-2,2z)$$
$$\nabla g=(2x,2y,-1)$$

پس از این که $\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$ نتیجه می‌شود $(2x-2,2y-2,2z)=\lambda(2x,2y,-1)$. حال داریم:

$$\begin{cases} 2x-2=2\lambda x & (1) \\ 2y-2=2\lambda y & (2) \\ 2z=-\lambda & (3) \\ x^2+y^2-z=0 & (4) \end{cases}$$

با کم کردن (۲) از (۱) داریم $2(x-y)=2\lambda(x-y)$ و در این صورت یا $\lambda=1$ یا $x=y$.
اگر $\lambda=1$ آنگاه از (۳) نتیجه می‌شود $z=-\frac{1}{2}$ که با (۴) در تناقض است ((۴) می‌گوید $z$ باید مثبت باشد).
پس باید $x=y$. از رابطه‌های $(1,2)$ نتیجه می‌شود $x=y=\frac{1}{1-\lambda}$. از طرفی از رابطه‌ی (۳) داریم $z=-\frac{\lambda}{2}$ و در نتیجه از رابطه‌ی (۴) خواهیم داشت $\frac{-\lambda}{2}=\frac{2}{(1-\lambda)^2}$. یعنی $-\lambda(1-\lambda)^2=4$ که در این‌صورت می توان بسادگی دید که یکی از ریشه های معادله $\lambda=-1$ است. با تقسیم چندجمله ای $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+4$ بر عامل $(\lambda+1)$ داریم $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+4=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda+4)$. با توجه به اینکه معادله $\lambda^2-3\lambda+4=0$ فاقد ریشه است، تنها ریشه معادله $\lambda=-1$ است. در نتیجه $x=y=z=\frac{1}{2}$ و لذا

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(\frac{1}{2}-1)^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

۹. (آدامز بخش ۳ – ۱۲سوال۴۰) فرض کنیم

$$f\left(x,y,z\right)=\begin{cases}\frac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

$f_1\left(0,0,0\right), f_2\left(0,0,0\right), f_3\left(0,0,0\right)$ را بیابید. آیا $f_1, f_2, f_3$ در $(0,0,0)$ پیوسته هستند؟

حل:

برای محاسبه‌ی $f_1$ و $f_2$ و $f_3$ در نقطه‌ی $(0,0,0)$، از رابطه‌ی حدی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم:

$$f_1(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^4}-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^5}=0$$

$$f_2(0,0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k,0)-f(0,0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{k^4}-f(0,0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k^5}=0$$

$$f_3(0,0,0)=\lim_{l\to 0}\frac{f(0,0,l)-f(0,0,0)}{l}=\lim_{l\to 0}\frac{\frac{0}{l^4}-f(0,0,0)}{l}=\lim_{l\to 0}\frac{0}{l^5}=0$$

برای بررسی پیوستگی $f_1$ و $f_2$ و $f_3$ در نقطه‌ی $(0,0,0)$، ابتدا ضابطه‌ی آن‌ها را بدست می‌آوریم. برای $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ داریم:

$$f_1(x,y,z)=\frac{(y^2z)(x^4+y^4+z^4)-(xy^2z)(4x^3)}{(x^4+y^4+z^4)^2}=\frac{(y^2z)(x^4+y^4+z^4)-(y^2z)(4x^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2}=\frac{(y^2z)(-3x^4+y^4+z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2},$$

$$f_2(x,y,z)=\frac{(2xyz)(x^4+y^4+z^4)-(xy^2z)(4y^3)}{(x^4+y^4+z^4)^2}=\frac{(2xyz)(x^4+y^4+z^4)-(2xyz)(2y^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2}=\frac{(2xyz)(x^4-y^4+z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2},$$

$$f_3(x,y,z)=\frac{(xy^2)(x^4+y^4+z^4)-(xy^2z)(4z^3)}{(x^4+y^4+z^4)^2}=\frac{(xy^2)(x^4+y^4+z^4)-(xy^2)(4z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2}=\frac{(xy^2)(x^4+y^4-3z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2}.$$

می‌دانیم به ازای $i=1,2,3$، تابع $f_i$ در $(0,0,0)$ پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f_i(x,y,z)=f_i(0,0,0).$$

برای محاسبه‌ی حد $f_i$ در $(0,0,0)$ ، در گام اول، باید مقدار $f_i$ را به ازای $i=1,2,3$ در $(0,0,0)$ محاسبه کنیم. داریم:

$$f_1(0,0,0)=\frac{0}{0},$$

$$f_2(0,0,0)=\frac{0}{0},$$

$$f_3(0,0,0)=\frac{0}{0}.$$

با توجه به ضابطه‌ی بدست آمده برای $f_1$ و $f_2$ و $f_3$، در هر سه حالت به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. در گام دوم، برای هر یک حدهای خواسته شده، مسیر $x=y=z$ را به عنوان مثال نقضِ وجود حد در نظر می‌گیریم. برای $f_1$ داریم:

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2x)(-3x^4+x^4+x^4)}{(x^4+x^4+x^4)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^7}{9x^8}=\text{حد وجود ندارد},$$

برای $f_2$ داریم:

$$I_2 = \lim_{x\to 0} \frac{(2x^3)((x^4 - x^4 + x^4))}{(x^4 + x^4 + x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^7}{9x^8} = \text{حد وجود ندارد},$$

برای $f_3$ داریم:

$$I_3 = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)(x^4 + x^4 - 3x^4)}{(x^4 + x^4 + x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^7}{9x^8} = \text{حد وجود ندارد}.$$

همان‌طور که دیده می‌شود، در این مسیر، هیچ‌کدام از حدها وجود ندارند. در نتیجه $f_1$ و $f_2$ و $f_3$ در $(0,0,0)$ پیوسته نیستند.

۱۰. (آدامز بخش ۵ – ۱۲سوال۱۵)فرض کنید $f$ دارای مشتقات جزیی مرتبه دوم پیوسته باشد.

**الف)** اگر $y = ۳s - ۲t, x = ۲s + ۳t, z = f(x,y)$ **مطلوبست محاسبه** $\frac{\partial^۲ z}{\partial s \partial t}$.

**ب)** اگر $y = t\cos s, x = t\sin s$ **مطلوبست محاسبه** $\frac{\partial^۲}{\partial s \partial t} f\left(x,y\right)$.

حل (الف):

با استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^۲ z}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial z}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(۳f_۱(x,y) - ۲f_۲(x,y)) = ۳\frac{\partial f_۱}{\partial s} - ۲\frac{\partial f_۲}{\partial s} \\
&= ۳(\frac{\partial f_۱}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۱}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}) - ۲(\frac{\partial f_۲}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۲}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}) \\
&= ۳(۲f_{۱۱} + ۳f_{۱۲}) - ۲(۲f_{۲۱} + ۳f_{۲۲}) = ۶f_{۱۱} + ۵f_{۱۲} - ۶f_{۲۲}
\end{aligned}$$

حل قسمت (ب) :

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^۲ z}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial z}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(\sin s f_۱(x,y) + \cos s f_۲(x,y)) \\
&= \cos s f_۱(x,y) + \sin s\frac{\partial f_۱}{\partial s} - \sin s f_۲(x,y) + \cos s\frac{\partial f_۲}{\partial s} \\
&= \cos s f_۱(x,y) + \sin s(\frac{\partial f_۱}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۱}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}) - \sin s f_۲(x,y) + \cos s(\frac{\partial f_۲}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۲}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}) \\
&= \cos s f_۱ + \sin s(t\cos s f_{۱۱} - t\sin s f_{۱۲}) - \sin s f_۲ + \cos s(t\cos s f_{۲۱} - t\sin s f_{۲۲}) \\
&= \cos s f_۱ + t\sin s\cos s f_{۱۱} - t\sin^۲ s f_{۱۲} - \sin s f_۲ + t\cos^۲ s f_{۲۱} - t\cos s\sin s f_{۲۲} \\
&= \cos s f_۱ - \sin s f_۲ + t\sin s\cos s(f_{۱۱} - f_{۲۲}) + t(\cos^۲ s - \sin^۲ s)f_{۲۱}
\end{aligned}$$

۱۱. (آدامز بخش ۵ – ۱۲سوال۲۳) اگر $x=e^s\cos t, y=e^s\sin t$ و $z=u(x,y)=v(s,t)$ نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

حل : $x=e^s\cos t$ و$y=e^s\sin t$ توابعی بر حسب $s$ و $t$ هستند. در نتیجه :

$$\frac{\partial x}{\partial s}=e^s\cos t,\quad \frac{\partial x}{\partial t}=-e^s\sin t,\quad \frac{\partial y}{\partial s}=e^s\sin t,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=e^s\cos t$$

از $z$ نسبت $s$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s}=e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب $s$ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^s\cos t\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}+e^s\sin t\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}+e^s\cos t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial s}\right)+e^s\sin t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)\\&=e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}+e^s\cos t\left(e^s\cos t\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+e^s\sin t\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)+e^s\sin t\left(e^s\sin t\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+e^s\cos t\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\end{aligned}$$

از $z$ نسبت $t$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t}=-e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب $t$ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=-e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial x}-e^s\sin t\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}+e^s\cos t\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=-e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial x}-e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}-e^s\sin t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial t}\right)+e^s\cos t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial t}\right)\\&=-e^s\cos t\,\frac{\partial z}{\partial x}-e^s\sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}-e^s\sin t\left(-e^s\sin t\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+e^s\cos t\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)+e^s\cos t\left(e^s\cos t\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-e^s\sin t\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=e^{2s}(\sin^2 t+\cos^2 t)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

۱۲. (آدامز بخش ۵ – ۱۲سوال۲۵) اگر $u(x,y)=r^{۲}\ln r$ و $r^{۲}=x^{۲}+y^{۲}$ ، نشان دهید

$$\left(\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}\right)\left(\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}\right)=۰$$

حل:

طبق فرض مسئله $r^{۲}=x^{۲}+y^{۲}$ و $u(x,y)=r^{۲}\ln r$، با مشتق گیری از طرفین رابطه‌ی $r^{۲}=x^{۲}+y^{۲}$ نسبت به $x$ و $y$ داریم:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$$

حال از $u$ نسبت به $x$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x}=(۲r\ \ln r+r)\frac{x}{r}=x(۱+۲\ln r)$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب $x$ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,(۱+۲\ln r)\right)\\&=(۱+۲\ln r)+x\,\frac{\partial}{\partial x}(۱+۲\ln r)\\&=(۱+۲\ln r)+۲x\left(\frac{\partial \ln r}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x}\right)\\&=۱+۲\ln r+\frac{۲x^{۲}}{r^{۲}}\end{aligned}$$

حال از $u$ نسبت به $y$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y}=(۲r\ \ln r+r)\frac{y}{r}=y(۱+۲\ln r)$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب $y$ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\,(۱+۲\ln r)\right)\\&=(۱+۲\ln r)+y\,\frac{\partial}{\partial y}(۱+۲\ln r)\\&=(۱+۲\ln r)+۲y\left(\frac{\partial \ln r}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y}\right)\\&=۱+۲\ln r+\frac{۲y^{۲}}{r^{۲}}\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۲+۴\ln r+۲\left(\frac{x^{۲}+y^{۲}}{r^{۲}}\right)=۴+۴\ln r=۴+۲\ln(x^{۲}+y^{۲})$$

برای سادگی محاسبات قرار دهید:

$$f(x,y)=\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=۴+۲\ln(x^۲+y^۲)$$

در نتیجه:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۴x}{x^۲+y^۲}\qquad\longrightarrow\qquad f_{xx}=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=۴\big(\frac{x^۲+y^۲-۲x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}\big)=۴\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۴y}{x^۲+y^۲}\qquad\longrightarrow\qquad f_{yy}=\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=۴\big(\frac{x^۲+y^۲-۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}\big)=۴\frac{x^۲-y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

در نتیجه با توجه به خواسته‌ی مسئله داریم:

$$\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\right)=\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)\big(f(x,y)\big)=f_{xx}+f_{yy}=۴\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}+۴\frac{x^۲-y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=۰$$

۱۳. (آدامز بخش ۷ − ۱۲سوال۱۹)اگر برای تابع دیفرانسیل پذیر $f\left(x,y\right)$ داشته باشیم:

$$D_{(i+j)/\sqrt{۲}}f\left(a,b\right) = ۳\sqrt{۲},$$
$$D_{(۳i-۴j)/۵}f\left(a,b\right) = ۵,$$

مطلوبست محاسبه $\nabla f\left(a,b\right)$.

حل :

چون تابع مورد نظر دیفرانسیل‌پذیر است لذا:

$$D_u\ f(a,b) = u\ .\ \nabla f(a,b) \qquad (*)$$

فرض کنید $\nabla f(a,b) = (s,t)$.

ابتدا با توجه به فرض اول بردار جهت را $u = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}})$ در نظر می‌گیریم. لذا با توجه به $(*)$ داریم:

$$D_{(i+j)/\sqrt{۲}}f\left(a,b\right) = ۳\sqrt{۲} = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}})\ .\ (s,t) = \frac{s+t}{\sqrt{۲}} \quad \rightarrow \quad s+t = ۶$$

حال با توجه به فرض دوم بردار جهت را $u = (\frac{۳}{۵}, \frac{-۴}{۵})$ در نظر می‌گیریم. لذا با توجه به $(*)$ داریم:

$$D_{(۳i-۴j)/۵}f\left(a,b\right) = ۵ = (\frac{۳}{۵}, \frac{-۴}{۵})\ .\ (s,t) = \frac{۳s-۴t}{۵} \quad \rightarrow \quad ۳s-۴t = ۲۵$$

با حل دستگاه داریم $s = ۷$ و $t = -۱$ در نتیجه $\nabla f(a,b) = ۷i - j$.

۱۴. (آدامز بخش ۷ − ۱۲سوال۲۶) بردار مماس بر خم مشترک بین دو استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲$ و $y^۲ + z^۲ = ۲$ را در نقطه $(۱, -۱, ۱)$ بیابید.

حل : ابتدا باید بردار قائم هر دو منحنی را پیدا کنیم.

بردار قائم سطح استوانه‌ای $x^۲ + y^۲ = ۲$ برابر است با:

$$n_۱ = \nabla(x^۲ + y^۲ - ۲) = (۲x, ۲y, ۰) \xrightarrow{(x,y,z)=(۱,-۱,۱)} n_۱ = (۲, -۲, ۰)$$

و بردار قائم سطح استوانه‌ای $y^۲ + z^۲ = ۲$ برابر است با:

$$n_۲ = \nabla(y^۲ + z^۲ - ۲) = (۰, ۲y, ۲z) \xrightarrow{(x,y,z)=(۱,-۱,۱)} n_۲ = (۰, -۲, ۲)$$

بردار مماس بر خم مشترک هر دو منحنی، بر هر دو بردار قائم فوق عمود است. در نتیجه:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} = i + j + k$$

لذا بردار $i + j + k$ یا هر مضرب اسکالر دیگری از آن در نقطه‌ی داده شده بر منحنی‌ها مماس است.

۱۵. (آدامز بخش ۷ – ۱۲سوال۳۶) فرض کنیم

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) مطلوبست محاسبه $\nabla f(0,0)$ .

ب) با استفاده از تعریف مشتق سویی، $D_u f(0,0)$ را که در آن $u=(i+j)/\sqrt{2}$ را محاسبه کنید.

ج) آیا $f(x,y)$ در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر است؟

حل:

الف) برای محاسبه‌ی $\nabla f(0,0)$ باید مشتقات جزئی را از تعریف مشتق محاسبه کنیم:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

لذا

$$\nabla f(0,0)=\big(f_x(0,0),f_y(0,0)\big)=(0,0).$$

ب) می‌خواهیم مشتق سویی را با استفاده از تعریف در جهت بردار $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ در نقطه‌ی $(0,0)$ بیابیم.

با توجه به تعریف مشتق سویی که به صورت $D_u f(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+hu)-f(a)}{h}$ تعریف می‌شود داریم:

$$D_u f(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+\frac{h}{\sqrt{2}},0+\frac{h}{\sqrt{2}})-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin(\frac{h^2}{2})}{h\sqrt{\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{2}}}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin(\frac{h^2}{2})}{h^2}=\frac{1}{2}$$

ج) خیر. زیرا

$$\frac{1}{2}=D_u\ f(0,0)\neq u\ .\ \nabla f(0,0)=0$$

نکته: اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه $D_u\ f(a,b)=u\ .\ \nabla f(a,b)$ . اما عکس آن لزوما برقرار نیست.

۱۶. فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{|y|}\sqrt{x^{2}+y^{2}}, & y \neq 0, \\ \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

(آ) نشان دهید برای هر بردار یکه $u = (u_1, u_2)$ در صفحه، $D_u f(0,0)$ وجود دارد.

(ب) آیا تابع $f$ در $(0,0)$ مشتق پذیر است؟

حل: الف) دو حالت در نظر می گیریم:

اگر $u_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} D_u f(0,0) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{tu_2}{|tu_2|}\sqrt{(tu_1)^2 + (tu_2)^2}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{tu_2}{|tu_2|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{u_2}{|u_2|} = \pm 1 \end{aligned}$$

اگر $u_2 = 0$

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t} = 0$$

ب) خیر، اگر $f(x,y)$ در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر باشد در آن صورت $D_u f(0,0) = \nabla f(0,0).u$ اما همان طور که در زیر مشاهده می کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k}{|k|}|k|}{k} = 1$$

$$\nabla f(0,0).u = (0,1).(u_1, u_2) = u_2$$

اما از آنجا که $u = (u_1, u_2)$ بردار یکه است داریم $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$. بنابراین بردار $u$ می تواند هر یک از نقاط روی دایره واحد به مرکز مبدا و شعاع یک باشد. پس با توجه به قسمت الف لزوما $u_2$ صفر یا $\pm 1$ نیست پس لزوماً $D_u f(0,0) = \nabla f(0,0).u$ برقرار نیست.

۱۷. (آدامز بخش ۸ – ۱۲سوال۱۰)در هر یک از حالت های زیر، با توجه به معادلات مفروض، مشتق خواسته شده را محاسبه کنید. کدام شرط بر متغیر ها وجود جوابی را تضمین می کند که دارای مشتق مشخص شده است؟

الف) $x^۲+y^۲+z^۲+w^۲=۱ , x+۲y+۳z+۴w=۲$ ، $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ .

حل: الف)

$$\begin{cases} x=x(y,z) \\ w=w(y,z) \end{cases}$$

با مشتق گرفتن از معادله نسبت به $y$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۲x\frac{\partial x}{\partial y}+۲y+۲w\frac{\partial w}{\partial y}=۰ \\ \frac{\partial x}{\partial y}+۲+۴\frac{\partial w}{\partial y}=۰ \end{cases}$$

در نتیجه با ضرب معادله اول در ۲ و ضرب معادله دوم در $w$ خواهیم داشت:

$$(۴x-w)\frac{\partial x}{\partial y}+۴y-۲w=۰$$

$$(\frac{\partial x}{\partial y})_z=\frac{۲w-۴y}{۴x-w}$$

اگر $w\neq ۴x$ باشد معادله جواب دارد.

ب) $xyuv=۱ , x+y+u+v=۰$, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$ .

حل: ب)

$$\begin{cases} y=y(x,u) \\ v=v(x,u) \end{cases}$$

با مشتق گرفتن از معادله نسبت به $x$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} yuv+xuv\frac{\partial y}{\partial x}+xyu\frac{\partial v}{\partial x}=۰ \\ ۱+\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=۰ \end{cases}$$

در نتیجه با ضرب معادله دوم در $xyu$ خواهیم داشت:

$$yuv-xyu+(xuv-xyu)\frac{\partial y}{\partial x}=۰$$

$$(\frac{\partial y}{\partial x})_u=\frac{y(x-v)}{x(v-y)}$$

اگر $x\neq ۰, v\neq y, u\neq ۰$ باشد معادله جواب دارد.

۱۸. (آدامز بخش ۸ – ۱۲سوال ۱۷)نشان دهید که می توان معادله های

$$\begin{cases} xy^۲ + zu + v^۲ = ۳ \\ x^۳ z + ۲y - uv = ۲ \\ xu + yv - xyz = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x, y, z, u, v) = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱)$ نسبت به مجهولات $x, y, z$ به عنوان توابعی از $u, v$ حل کرد و سپس $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$ را به ازای $(u, v) = (۱, ۱)$ بیابید.

حل:

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = xy^۲ + zu + v^۲ - ۳ \\ G(x, y, z, u, v) = x^۳ z + ۲y - uv - ۲ \\ H(x, y, z, u, v) = xu + yv - xyz - ۱ \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}_{p_۰} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix}_{p_۰} = \begin{vmatrix} y^۲ & ۲xy & u \\ ۳x^۲ z & ۲ & x^۳ \\ u - yz & v - xz & -xy \end{vmatrix}_{p_۰} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۴ \neq ۰$$

بنابر قضیه تابع ضمنی می‌توان $x, y, z$ را به صورت توابعی از $u, v$ نوشت.
برای محاسبه $\frac{\partial y}{\partial u}$ می‌توان از دو روش استفاده کرد.
روش اول: از معادلات دستگاه داده شده نسبت به $u$ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} y^۲ \frac{\partial x}{\partial u} + ۲xy \frac{\partial y}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial u} + z = ۰ \\ ۳x^۲ z \frac{\partial x}{\partial u} + x^۳ \frac{\partial z}{\partial u} + ۲ \frac{\partial y}{\partial u} - v = ۰ \\ u \frac{\partial x}{\partial u} + x + v \frac{\partial y}{\partial u} - yz \frac{\partial x}{\partial u} - xz \frac{\partial y}{\partial u} - xy \frac{\partial z}{\partial u} = ۰ \end{cases}$$

با جایگذاری نقطه $p_۰$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} + ۲ \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} + ۱ = ۰ \\ ۳ \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} + ۲ \frac{\partial y}{\partial u} - ۱ = ۰ \\ \frac{\partial x}{\partial u} + ۱ + \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u} = ۰ \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا ، $\frac{\partial y}{\partial u}|_{p_۰} = -\frac{۳}{۲}$.
روش دوم: استفاده از فرمول:

$$\frac{\partial y}{\partial u}|_{p_۰} = -\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, u, z)} / \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}|_{p_۰} = -\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}\Big|_{p_\circ} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix}_{p_\circ} = \begin{vmatrix} y^۲ & z & u \\ ۳x^۲z & -v & x^۳ \\ u-yz & x & -xy \end{vmatrix}_{p_\circ} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۶$$

۱۹. (آدامز بخش ۸ – ۱۲سوال۱۸)نشان دهید که می توان معادله های

$$\begin{cases} xe^y + uz - \cos v = ۲ \\ u\cos y + x^۲y - yz^۲ = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x, y, z, u, v) = (۲, ۰, ۱, ۱, ۰)$ نسبت به مجهولات $u, v$ به عنوان توابعی از $x, y, z$ حل کرد و سپس $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y}$ را به ازای $(x, y, z) = (۲, ۰, ۱)$ بیابید.

حل: قرار می دهیم:

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = xe^y + uz - \cos v - ۲ \\ G(x, y, z, u, v) = u\cos y + x^۲v - yz^۲ - ۱ \end{cases}$$

از طرفی در نقطه $p_۰ = (۲, ۰, ۱, ۱, ۰)$ داریم:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}|_{p_۰} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_{p_۰} = \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^۲ \end{vmatrix}_{p_۰} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۴$$

از آنجا که $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}|_{p_۰} \neq ۰$ بنابر قضیه تابع ضمنی می‌توان $u, v$ را به صورت توابعی از $x, y, z$ نوشت. با استفاده از فرمول داریم

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{p_۰} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, v)} / \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}|_{p_۰} = -\frac{۱}{۴}\begin{vmatrix} u & \sin v \\ -۲yz & x^۲ \end{vmatrix}_{p_۰} = -\frac{۱}{۴}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix} = -۱$$

۲۰. (آدامز بخش ۸ – ۱۲سوال۲۲)اگر رابطه $F(x,y,z)=0$ متغیر $z$ را به عنوان تابعی از $x,y$ به دست دهد، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ بر حسب مشتق های جزیی $F$ . (فرض کنید مشتقات جزیی مرتبه دوم $F$ پیوسته باشند. نیز فرض کنید $F_3, F_{33}$ در هیچ نقطه ای صفر نباشند.)

حل: از آنجا که اگر رابطه $F(x,y,z)=0$ متغیر $z$ را به عنوان تابعی از $x,y$ بدست می دهد به عبارتی $z=z(x,y)$ ، بنابراین از دو طرف رابطه $f(x,y,z(x,y))=0$ یکبار نسبت به $x$ و یکبار نسبت به $y$ مشتق میگیریم.

$$F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

از دو طرف معادله (۱) نسبت به $x$ مشتق میگیریم.

$$[F_{11} + F_{13}\frac{\partial z}{\partial x}] + [F_{31} + F_{33}(\frac{\partial z}{\partial x})]\frac{\partial z}{\partial x} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

در نتیجه از رابطه بالا و همچنین روابط (۱)و (۲)داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{F_3}[F_{11} + 2F_{13}(-\frac{F_1}{F_3}) + F_{33}(-\frac{F_1}{F_3})^2] \\ &= -\frac{1}{F_3^3}[F_{11}F_3^2 - 2F_{13}F_1F_3 + F_{33}F_1^2]\end{aligned}$$

به صورت مشابه با مشتق گیری از دو طرف معادله (۲) نسبت به $y$داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{F_3^3}[F_{22}F_3^2 - 2F_{23}F_2F_3 + F_{33}F_2^2]$$

همچنین با مشتق گیری از دو طرف معادله (۱) نسبت به $y$داریم:

$$[F_{12} + F_{13}\frac{\partial z}{\partial y}] + (F_{32} + F_{33}\frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial z}{\partial x} + F_{33}(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}) = 0$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -\frac{1}{F_{33}}[F_{12} + F_{13}(-\frac{F_2}{F_3}) + F_{32}(-\frac{F_1}{F_3}) + F_{33}(\frac{F_1F_2}{F_3^2})] \\ &= -\frac{1}{F_{33}^3}[F_{12}F_3^2 - F_{13}F_2F_3 - F_{32}F_1F_3 + F_{33}F_1F_2]\end{aligned}$$

۲۱. (آدامز بخش ۸ – ۱۲ سوال ۲۵)اگر $F(x,y,z)=0$ و $F_x, F_y, F_z$ در هیچ نقطه ای صفر نباشند، نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1.$$

فرمول‌های مشابهی برای $F(x,y,z,u)=0$ و $F(x,y,z,u,v)=0$ بدست آورید. حالت کلی چیست؟

پاسخ. با مشتق گرفتن از رابطه $F(x,y,z)=0$ نسبت به $x$ و $y$ و $z$ داریم:

$$\begin{cases} F_x\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z+F_y=0 \\ F_y\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x+F_z=0 \\ F_z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y+F_x=0 \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=\frac{-F_y}{F_x}$$

و

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=\frac{-F_z}{F_y}$$

و

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=\frac{-F_x}{F_z}$$

پس داریم:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{-F_y}{F_x}\right)\left(\frac{-F_z}{F_y}\right)\left(\frac{-F_x}{F_z}\right)=(-1)^3=-1.$$

حال فرض کنید $F(x,y,z,u)=0$. مشابه قسمت قبل، با مشتق‌گیری از $F$ نسبت به $x$ و $y$ و $z$ و $u$، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,u}=\frac{-F_y}{F_x}$$

و

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{u,x}=\frac{-F_z}{F_y}$$

و

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{x,y} = \frac{-F_u}{F_z}$$

و

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{-F_x}{F_u}$$

لذا

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,u}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{u,x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z} = (-1)^4 = 1.$$

حال مشابهاً، اگر داشته باشیم $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$، داریم:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3,\ldots,x_n}\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right)_{x_4,\ldots,x_n,x_1}\cdots\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)_{x_2,\ldots,x_{n-1}} = (-1)^n.$$

۲۲. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u^4v^4+(u+x)^3+y+3w-4=0, \\ \sin(uv)+e^{v+y^2-1}+v-1=0, \\ x^2-4y^2+4w=v-u, \end{cases}$$

(آ) نشان دهید در یک همسایگی نقطه $p_0=(u,v,w,x,y)=(0,0,1,0,1)$ می توان این دستگاه را نسبت به مجهولات $u$، $v$ و $w$ به عنوان تابعی از $x$ و $y$ حل کرد.

(ب) مقادیر $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y)=(0,1)$ بیابید.

(ج) اگر $f(x,y)=e^{wv}$ باشد مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y)=(0,1)$ بیابید.

پاسخ. الف) قرار دهید:

$$\begin{cases} F=u^4v^4+(u+x)^3+y+3w-4, \\ G=\sin(uv)+e^{v+y^2-1}+v-1, \\ H=x^2-4y^2+4w+u-v. \end{cases}$$

حال به راحتی می‌توان بررسی کرد که $F(p_0)=G(p_0)=H(p_0)=0$. همچنین، $F$ و $G$ و $H$ در یک همسایگی از $p_0$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. حال داریم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} 4u^3v^4+3(u+x)^2 & 4u^4v^3 & 3 \\ v\cos(uv) & u\cos(uv)+e^{v+y^2-1}+1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

پس داریم:

$$\left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}\right|_{p_0}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-6\neq 0$$

لذا طبق قضیه تابع ضمنی، میتوان $u$ و $v$ و $w$ را حول $p_0$، نسبت به $x$ و $y$ حل نمود.

ب) داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

از طرفی

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)} = \begin{vmatrix} ۴u^۳v^۴+۳(u+x)^۲ & ۱ & ۳ \\ v\cos(uv) & ۲ye^{v+y^۲-۱} & ۰ \\ ۱ & -۸y & ۴ \end{vmatrix}.$$

لذا

$$\left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}\right|_{p_۰} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۸ & ۴ \end{vmatrix} = -۶.$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{p_۰} = \frac{-۶}{۶} = -۱$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

اما

$$\left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}\right|_{p_۰} = \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۱ & -۱ & -۸ \end{vmatrix} = -۲$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{p_۰} = \frac{-۲}{۶} = \frac{-۱}{۳}$$

ج) داریم: $f(x,y) = e^{vw}$. لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= f_v v_y + f_w w_y \\ &= we^{vw}v_y + ve^{vw}w_y\end{aligned}$$

حال طبق قسمت ب، خواهیم داشت:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{p_۰} = -۱$$

۲۳. (آدامز بخش ۱ − ۱۳ سوالات ۹,۱۸) نقاط بحرانی توابع مفروض زیر را بیابید و نوع آنها را مشخص کنید.

$$(a)\quad f(x,y)=x^{2}ye^{-(x^{2}+y^{2})}$$
$$(b)\quad f(x,y,z)=4xyz-x^{4}-y^{4}-z^{4}$$

پاسخ. الف) داریم $f(x,y)=x^{2}ye^{-(x^{2}+y^{2})}$. لذا خواهیم داشت

$$\nabla f=(2xy(1-x^{2})e^{-(x^{2}+y^{2})},x^{2}(1-2y^{2})e^{-(x^{2}+y^{2})}).$$

قرار می‌دهیم $\nabla f=(0,0)$. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} xy(1-x^{2})=0\\ \text{و}\\ x^{2}(1-2y^{2})=0\end{cases}$$

لذا نقاط $\left(\pm1,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\left(\pm1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $(0,y)$ که $y\in\mathbb{R}$ نقاط بحرانی تابع است.
حال قرار می‌دهیم:

$$A=f_{11}(x,y)=2y(1-5x^{2}+2x^{4})e^{-(x^{2}+y^{2})},$$
$$B=f_{12}(x,y)=2x(1-x^{2})(1-2y^{2})e^{-(x^{2}+y^{2})},$$
$$C=f_{22}(x,y)=2x^{2}y(2y^{2}-3)e^{-(x^{2}+y^{2})}.$$

حال برای $\left(\pm1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ داریم:

$$A=C=-2\sqrt{2}e^{\frac{-3}{2}}\quad \text{و}\quad B=0$$

حال چون $AC>B^{2}$ و $A<0$، طبق آزمون مشتق دوم $f$ در این نقاط ماکسیمم نسبی دارد.
همچنین برای $(\pm1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ داریم:

$$A=C=2\sqrt{2}e^{\frac{-3}{2}}\quad ,\quad B=0$$

لذا چون $AC>B^{2}$ و $A>0$، طبق آزمون مشتق دوم $f$ در این نقاط مینیمم نسبی دارد.
برای نقاط $(0,y)$ آزمون مشتق دوم ساکت است و نمی توان نوع نقاط را تعیین کرد. برای این دسته نقاط داریم $f(0,y)=0$. همچنین برای هر $x\neq0$ داریم:

**(I)** اگر $y>0$، آنگاه $f(x,y)>0$.

**(II)** اگر $y<0$، آنگاه $f(x,y)<0$.

لذا نقطه $(0,0)$ نقطه زینی $f$ است و برای هر $y\in\mathbb{R}$، اگر $y>0$، نقطه $(0,y)$ نقطه مینیمم نسبی و اگر $y<0$، نقطه $(0,y)$ ماکسیمم نسبی برای $f$ است.

ب) راه حل اول:
$f(x,y,z)=4xyz-x^4-y^4-z^4$. داریم $\nabla f=(4yz-4x^3,4xz-4y^3,4xy-4z^3)$. لذا

$$\nabla f=(0,0,0)\longrightarrow\begin{cases}4yz-4x^3=0\\4xz-4y^3=0\\4xy-4z^3=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}yz-x^3=0\\xz-y^3=0\\xy-z^3=0\end{cases}$$

حال داریم $x=0\Longleftrightarrow y=0\Longleftrightarrow z=0$. از طرفی $(0,0,0)$ یک نقطه بحرانی $f$ است. حال فرض می‌کنیم $x\neq0$ و $y\neq0$ و $z\neq0$. خواهیم داشت:

$$x^2y^2z^2=x^3y^3z^3$$

حال چون $xyz\neq0$ است داریم $xyz=1$. حال $yz=x^3$ نتیجه می‌دهد $x^4=1$. پس $x=1$ یا $x=-1$.
حال اگر $x=1$ باشد داریم $z=y^3$ و $y=z^3$. لذا داریم $z=z^9$. پس $z=\pm1$. اگر $z=1$ باشد، داریم $y=1$ و اگر $z=-1$ داریم $y=-1$. پس $(1,-1,-1)$ و $(1,1,1)$ نقاط بحرانی $f$ هستند.
حال اگر $x=-1$ باشد، داریم $-z=y^3$ و $-y=z^3$. پس $z=z^9$. پس $z=1$ یا $z=-1$. اگر $z=1$ باشد داریم $y=-1$ و اگر $z=-1$ باشد داریم $y=1$. لذا نقاط $(-1,-1,1)$ و $(-1,1,-1)$ نیز نقاط بحرانی $f$ هستند.
حال با تشکیل ماتریس هسین $H$ وابسته به تابع $f$ داریم:

$$H=\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}&f_{13}\\f_{21}&f_{22}&f_{23}\\f_{31}&f_{32}&f_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12x^2&4z&4y\\4z&-12y^2&4x\\4y&4x&-12z^2\end{pmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $P_1=(0,0,0)$ و $P_2=(1,-1,-1)$ و $P_3=(1,1,1)$ و $P_4=(-1,-1,1)$ و $P_5=(-1,1,-1)$. حال به دلیل تقارنی که تابع $f$ دارد، نوع نقاط بحرانی $P_2,P_4,P_5$ یکی هستند. لذا کافی است تنها نوع نقاط بحرانی $P_1$ و $P_2$ و $P_3$ را مشخص کنیم. داریم

$$H(P_3)=\begin{pmatrix}-12&4&4\\4&-12&4\\4&4&-12\end{pmatrix}.$$

به سادگی می‌توان دید $H(P_4)$ معین منفی است. پس طبق آزمون مشتق دوم، $f$ در $P_4$ ماکسیمم نسبی دارد.
همچنین داریم

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} -12 & -4 & -4 \\ -4 & -12 & 4 \\ -4 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

باز هم به سادگی می‌توان دید $H(P_2)$ نیز معین منفی است. پس طبق آزمون مشتق دوم، $f$ در $P_2$ نیز ماکسیمم نسبی دارد. پس $f$ در $P_4$ و $P_5$ هم ماکسیمم نسبی دارد.
حال فرض کنید $N_\epsilon(P_1)$، یک همسایگی حول $P_1$ به شعاع دلخواه $\epsilon$ باشد. حال به وضوح نقطه ای مثل $t = (x_0, y_0, z_0)$ در این همسایگی وجود دارد به طوریکه $x_0y_0z_0 < 0$. لذا طبق ضابطه تابع $f$ خواهیم داشت $f(t) < 0$. از طرفی، طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $t' \in \mathbb{N}$ وجود خواهد داشت به طوریکه $t'' = (1/t', 1/t', 1/t') \in N_\epsilon(P_1)$. حال به راحتی میتوان بررسی کرد که $f(t'') > 0$. لذا $P_1$ یک نقطه زینی برای $f$ خواهد بود. توجه کنید که چون

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

آزمون مشتق دوم در مورد نوع نقطه بحرانی $P_1$ اطلاعاتی نمی دهد.
ب راه حل دوم (جزییات بیشتر ):

$$\nabla f\,(x, y, z) = \left(4yz - 4x^3, 4xz - 4y^3, 4xy - 4z^3\right)$$

$$\nabla f = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} yz = x^3\;(I) \\ xz = y^3\;(II) \\ xy = z^3 (III) \end{cases}$$

اگر $x = 0$ ، آنگاه از معادلات $II, III$ نتیجه می شود $y = z = 0$ . بطور مشابه اگر $y = 0$ ، آنگاه از معادلات $I, III$ نتیجه میشود $x = z = 0$ .بعلاوه اگر $z = 0$ ، آنگاه از معادلات $I, II$ نتیجه میشود $x = y = 0$ . پس یک نقطه بحرانی بدست می آید : یعنی $P_1 = (0, 0, 0)$ .
بنابر استدلال بالا فرض کنید هیچ کدام از $x, y, z$ صفر نیستند. اگر $I, II, III$ را در هم ضرب کنیم نتیجه می شود: $x^2y^2z^2 = x^3y^3z^3$ . حال چون $xyz \neq 0$ با تقسیم بر طرفین رابطه داریم: $xyz = 1$ . جای $yz$ با توجه به $I$ قرار دهید $x^3$ ، آنگاه می رسیم به $x^4 = x.x^3 = 1$ . بطور مشابه اگر بجای $xz$ از $II$ قرار دهیم $y^3$ می رسیم به $y^4 = 1$ . بطور مشابه خواهیم داشت $z^4 = 1$ . بنابراین به جواب های $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ می رسیم.
اگر $x = 1$، آنگاه با توجه به $I$ حالت $y = 1, z = -1$ قابل قبول نیست و فقط دو حالت $y = 1, z = 1$ و $y = -1, z = -1$ قابل قبول است . پس به دو نقطه بحرانی دیگر می رسیم $P_2 = (1, -1, -1)$ و $P_3 = (1, 1, 1)$ .

با توجه به تقارن مسئله نسبت به $x, y, z$ ، دو نقطه بحرانی دیگر خواهیم داشت $P_4 = (-1, -1, 1)$ و $P_5 = (-1, 1, -1)$ .
حال با توجه به آزمون مشتق دوم باید تکلیف این ۵ نقطه را تعیین کنیم.
نقطه $P_3$:

$$H(p_3) = \begin{bmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -12 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 128 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{vmatrix} = -1024 < 0,$$

بنابراین $H(p_3)$ معین منفی است و $p_3$ نقطه ماکزیمم نسبی است.
نقطه $P_2$:

$$H(p_2) = \begin{bmatrix} -12 & -4 & -4 \\ -4 & -12 & 4 \\ -4 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -12 < 0,\ \Delta_2 = 128 > 0,\ \Delta_3 = \det(H(p_2)) = -1024 < 0.$$

بنابراین $H(p_2)$ نیز معین منفی است و $p_2$ نیز نقطه ماکزیمم نسبی است.
نقاط $P_4, P_5$ نیز وضعیت مشابه با نقاط $P_2, P_3$ دارند. بنابراین نقاط ماکزیمم نسبی هستند.
نقطه $P_1$:
آزمون ساکت است و اطلاعاتی در اختیار ما نمی گذارد.
ادعا می کنیم $P_1$ نقطه مینیمم نسبی $f$ نیست. برای این منظور باید نشان دهیم هیچ همسایگی مانند $\{x \in R^3 \mid \|x - P_1\| < \varepsilon\} = B_\varepsilon(P_1)$ وجود ندارد بطوریکه $f$ روی این گوی باز (همسایگی باز) حول $P_1$ مینیمم مطلق باشد. توجه داریم که $f(P_1) = f(0,0,0) = 0$ . پس باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon > 0$ حداقل یک نقطه مانند $Q = (x_0, y_0, z_0) \in B_\varepsilon(P_1)$ وجود دارد بطوریکه $f(Q) < f(P_1) = 0$ .
بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی وجود دارد $n_0 \in \mathbb{N}$ بطوریکه $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . حال قرار دهید $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}, \frac{1}{\sqrt{3}n_0}, \frac{-1}{\sqrt{3}n_0}\right)$
در اینصورت داریم:

$$\|Q - P_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow Q \in B_\varepsilon(P_1)$$

بعلاوه

$$f(Q) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{1}{n_0^3} - 3\frac{1}{n_0^4} < 0$$

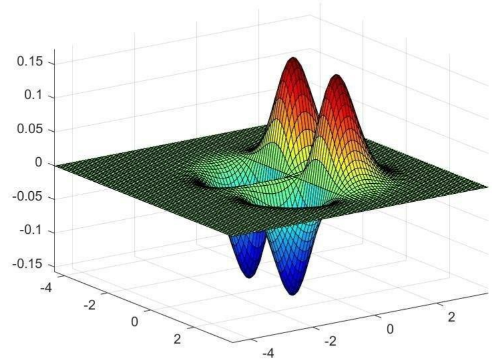
بنابراین نقطه $P_1$ نقطه مینیمم نسبی $f$ نیست.
حال ادعا میکنیم نقطه $P_1$ نقطه ماکزیمم نسبی $f$ نیست. برای این منظور باید نشان دهیم هیچ همسایگی مانند $B_\varepsilon(P_1)$ وجود ندارد بطوریکه $f$ روی آن ماکزیمم مطلق باشد. مجددا چون $f(P_1)=0$ باید نشان دهیم به ازای هر $\varepsilon>0$ حداقل یک نقطه مانند $S=(x_1,y_1,z_1)\in B_\varepsilon(P_1)$ وجود دارد بطوریکه $f(P_1)<f(S)$ . برای اثبات وجود چنین نقطه ای، روی خط $\alpha(t)=(t,t,t)$ شروع به نزدیک شدن به مبدا یعنی نقطه $P_1$ می کنیم.

$$\forall t\geq 0 \quad f(\alpha(t))=4t^3-3t^4=t^3(4-3t),$$

پس اگر $4-3t>0$ یا بطور معادل $0<t<\frac{4}{3}$ آنگاه $f$ در نقطه $(t,t,t)$ مقدار مثبت اختیار می کند. اما الزاما این نقطه در $B_\varepsilon(P_1)$ قرار ندارد. توجه داریم که

$$\|\alpha(t)-P_1\|=\sqrt{t^2+t^2+t^2}=\sqrt{3}t$$

بنابراین باید شرط $\sqrt{3}t<\varepsilon$ نیز روی $t$ گذاشته شود. بنابراین اگر $0<t_0<\min\left\{\frac{4}{3},\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right\}$ آنگاه نقطه $S=(t_0,t_0,t_0)$ در شرط های $S\in B_\varepsilon(P_1)$ و $f(S)>0$ صدق می کند. پس نقطه $P_1$ نقطه ماکزیمم نسبی $f$ نیز نمی باشد. بنابراین




نقطه $P_1$ یک نقطه زینی $f$ است. نمودار تابع در شکل زیر نشان داده شده است.

۲۴. (آدامز بخش۲ – ۱۳ سوالات ۳,۶)
الف) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=xy-y^{۲}$ را بر قرص $x^{۲}+y^{۲}\leq ۱$ بیابید.
ب) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=xy(۱-x-y)$ را بر مثلثی که راس هایش عبارت اند از $(۰,۰),(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ بیابید.
پاسخ. الف) $f(x,y)=xy-y^{۲};\quad x^{۲}+y^{۲}\leq ۱$. داریم:

$$\nabla f=(y,x-۲y)$$

$$\longrightarrow \nabla f=(۰,۰)\longrightarrow \begin{cases} y=۰ \\ \text{و} \\ x-۲y=۰ \end{cases} \longrightarrow (x,y)=(۰,۰)$$

لذا $(۰,۰)$ نقطه بحرانی $f$ است. همچنین داریم $f(۰,۰)=۰$. حال قرار می‌دهیم $D=\{(x,y):x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\}$. به بررسی نقاطی روی مرز $D$ می پردازیم که تابع $f$ را اکسترمم نمایند.
روش اول:
با استفاده از قضیه ضرایب لاگرانژ این کار را انجام میدهیم. قرار می دهیم $g(x,y)=x^{۲}+y^{۲}-۱$. به دنبال یافتن نقاطی مثل $(x,y)$ هستیم به طوریکه تابع $f$ را اکسترمم نمایند با این شرط که $g(x,y)=۰$. قرار می دهیم

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=xy-y^{۲}+\lambda(x^{۲}+y^{۲}-۱).$$

داریم

$$\nabla L=(L_x,L_y,L_\lambda)=(y+۲\lambda x,x-۲y+۲\lambda y,x^{۲}+y^{۲}-۱).$$

لذا

$$\nabla f=(۰,۰,۰)\longrightarrow \begin{cases} y+۲\lambda x=۰ \\ x-۲y+۲\lambda y=۰ \\ x^{۲}+y^{۲}-۱=۰ \end{cases}$$

از معادله اول داریم $y=-۲\lambda x$. لذا با جایگذاری در دو معادله دیگر داریم:

$$\begin{cases} x+۴\lambda x-۴\lambda^{۲}x=۰ \\ x^{۲}(۱+۴\lambda^{۲})=۱ \end{cases}$$

حال از معادله دوم نتیجه میشود $x\neq ۰$. لذا از معادله اول داریم:

$$۱+۴\lambda-۴\lambda^{۲}=۰\Rightarrow \lambda=\frac{۱\pm\sqrt{۲}}{۲}.$$

حال اگر $\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ باشد، از $x^2(1+4\lambda^2) = 1$ نتیجه میشود

$$x = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

حال اگر داشته باشیم $x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$، از $y = -2\lambda x$ خواهیم داشت:

$$y = -(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})(\frac{1+\sqrt{2}}{2}).$$

اگر داشته باشیم $x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$، باز هم از $y = -2\lambda x$ خواهیم داشت:

$$y = (\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})(\frac{1+\sqrt{2}}{2}).$$

لذا نقاط

$$(x,y) = (\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})(\frac{1+\sqrt{2}}{2}))$$

و

$$(x,y) = (-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, (\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})(\frac{1+\sqrt{2}}{2}))$$

را خواهیم داشت.
حال اگر $\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ باشد، با محاسباتی مشابه آنچه انجام شد، نقاط

$$(x,y) = (\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})(\frac{1-\sqrt{2}}{2}))$$

و

$$(x,y) = (-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, (\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})(\frac{1-\sqrt{2}}{2}))$$

را به دست خواهیم آورد.
حال داریم

$$f(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})(\frac{1+\sqrt{2}}{2})) = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

و

$$f(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, (\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})(\frac{1+\sqrt{2}}{2})) = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$f(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})(\frac{1-\sqrt{2}}{2})) = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

و

$$f\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}.$$

لذا $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ و $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f$ روی ناحیه $D$ خواهند بود.

روش دوم:

به وضوح هر نقطه $(x,y)$ روی مرز ناحیه $D$ به شکل $(x,y)=(cost, sint)$، به ازای یک $0\leq t\leq 2\pi$ خواهد بود. لذا روی مرز $D$ خواهیم داشت:

$$f(x,y)=f(\cos t,\sin t)=\cos t\sin t-\sin^2 t=g(t).$$

لذا داریم:

$$g'(t)=\cos 2t-\sin 2t$$

حال $g'(t)=0$ نتیجه می‌دهد $2t=\frac{\pi}{4}$ یا $2t=\frac{5\pi}{4}$. لذا خواهیم داشت $t=\frac{\pi}{8}$ یا $t=\frac{5\pi}{8}$. داریم:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}>0$$

و

$$g\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}<0$$

لذا $\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$ بیشترین و $-\frac{1}{2}-\frac{-1}{\sqrt{2}}$ کمترین مقدار $f$ روی $D$ خواهد بود.

ب) داریم:

$$f(x,y)=xy(1-x-y)$$

لذا خواهیم داشت:

$$\nabla f=(y-2xy-y^2,x-x^2-2xy)$$

حال $\nabla f=(0,0)$ نتیجه می‌دهد $y-y^2=x-x^2$. لذا خواهیم داشت:

$$y^2-x^2+x-y=0$$
$$\longrightarrow (y-x)(y+x)-(y-x)=0\longrightarrow (y-x)(y+x-1)=0$$

حال با جایگذاری $y=x$ در معادله $x-x^2-2xy=0$ نقاط $(\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(0,0)$ را بدست می آوریم. این نقاط در معادله $y-2xy-y^2=0$ نیز صدق می کنند. حال داریم $f(0,0)=0$ و $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$. از طرفی به ازای تمام نقاط روی مرز ناحیه(نقاط روی خط $y+x-1=0$ روی مرز ناحیه قرار دارند)، به راحتی داریم $f(x,y)=0$. لذا روی ناحیه مورد نظر، بیشترین مقدار تابع $\frac{1}{27}$ و کمترین مقدار آن صفر خواهد بود.

۲۵. (آدامز بخش ۲ – ۱۳ سوال ۱۱)ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=xy^{۲}+yz^{۲}$ را بر گوی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\leq ۱$ بیابید.
حل( روش اول):

$$f(x,y,z)=xy^{۲}+yz^{۲}$$

$$g(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۱$$

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

$$\nabla f=(y^{۲},۲xy+z^{۲},۲yz)$$

$$\nabla g=(۲x,۲y,۲z)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y^{۲}=۲\lambda x & (۱)\\ ۲xy+z^{۲}=۲\lambda y & (۲)\\ ۲yz=۲\lambda z & (۳)\\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱ & (۴)\end{cases}$$

$$(۳)\quad\Rightarrow\quad z=\circ\ \ or\ \ y=\lambda$$

$$IF\quad z=\circ\quad\overset{(۲)}{\Rightarrow}\quad ۲xy=۲\lambda y\quad\Rightarrow\quad y=\circ\ \ or\ \ x=\lambda$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y=\circ\ \overset{(۴)}{\Rightarrow}\ x=\pm ۱\ \Rightarrow\ p_{۱}=(۱,\circ,\circ),\quad p_{۲}=(-۱,\circ,\circ)\\ x=\lambda\ \overset{(۱)}{\Rightarrow}\ y^{۲}=۲x^{۲}\ \Rightarrow\ y=\pm\sqrt{۲}\,x\quad\overset{(۴)}{\Rightarrow}\quad ۳x^{۲}=۱\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow p_{۳}=(\tfrac{\sqrt{۳}}{۳},\pm\tfrac{\sqrt{۶}}{۳},\circ),\quad p_{۴}=(-\tfrac{\sqrt{۳}}{۳},\pm\tfrac{\sqrt{۶}}{۳},\circ)$$

$$IF\quad y=\lambda\quad\overset{(۱)}{\Rightarrow}\quad y^{۲}=۲xy\quad\Rightarrow\quad y=\circ\ \ or\ \ y=۲x$$

$$\begin{cases} y=\circ\ \overset{(۲)}{\Rightarrow}\ z=\circ\ \overset{(۴)}{\Rightarrow}\ x=\pm ۱\\ y=۲x\ \overset{(۲)}{\Rightarrow}\ z^{۲}=۴x^{۲}\ \overset{(۴)}{\Rightarrow}\ ۹x^{۲}=۱\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow p_{۵}=(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\pm\frac{۲}{۳})$$

$$\Rightarrow p_{۶}=(-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},\pm\frac{۲}{۳})$$

حال به بررسی نقاط بحرانی f می پردازیم:

$$\nabla f = (y^2, 2xy + z^2, 2yz) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow y = 0,\ z = 0$$

پس به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $(x,0,0)$ نقطه بحرانی f است.
درگام آخر مقادیر بدست آمده را مقایسه می کنیم:

$$f(x,0,0) = 0$$
$$f(p_1) = f(p_2) = 0$$
$$f(p_3) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$
$$f(p_4) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$
$$f(p_5) = \frac{4}{9} \qquad \rightarrow \quad \max\ in\ D$$
$$f(p_6) = -\frac{4}{9} \qquad \rightarrow \quad \min\ in\ D$$

روش دوم: داریم $x^{2}+y^{2}+z^{2}\leq 1 \quad f(x,y,z)=xy^{2}+yz^{2};$.
داریم:

$$\nabla f=(y^{2},2xy+z^{2},2yz)$$

حال اگر $\nabla f=(0,0,0)$، خواهیم داشت به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $(x,0,0)$ یک نقطه بحرانی برای $f$ است. همچنین برای این نقاط داریم $f(x,0,0)=0$. حال قرار دهید $D=\{(x,y,z):x^{2}+y^{2}+z^{2}\leq 1\}$. حال برای پیدا کردن نقاط اکسترمم تابع $f$، کافی است مرز ناحیه $D$ را بررسی کنیم. حال برای هر نقطه $(x,y,z)$ روی مرز $D$ داریم $z^{2}=1-x^{2}-y^{2}$. لذا روی مرز ناحیه $D$ خواهیم داشت:

$$f(x,y,z)=xy^{2}+y(1-x^{2}-y^{2})=xy^{2}+y-yx^{2}-y^{3}=g(x,y).$$

از طرفی تصویر کره‌ی $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$ روی صفحه $xy$، ناحیه‌ی $D':x^{2}+y^{2}\leq 1$ می‌باشد. لذا برای پیدا کردن نقاط اکسترمم $g$، کافی است نقاط بحرانی $g$ و همین طور نقاط روی مرز $D'$ را بررسی کنیم. داریم:

$$\nabla g=(y^{2}-2yx,2xy+1-x^{2}-3y^{2})$$

$$\longrightarrow \nabla g=(0,0)\longrightarrow\begin{cases}y^{2}-2yx=0\\ \text{و}\\ 2xy+1-x^{2}-3y^{2}=0\end{cases}$$

حال از $y^{2}-2yx=0$ داریم $y=0$ یا $y=2x$. اگر $y=0$ باشد، خواهیم داشت $g=0$. پس $f=0$.
اگر $y=2x$ باشد، داریم $2x(2x)+1-x^{2}-3(2x)^{2}=0$. پس خواهیم داشت $4x^{2}+1-x^{2}-12x^{2}=0$. لذا داریم $9x^{2}=1$.
پس $x=\frac{\pm 1}{3}$.
اگر $x=\frac{1}{3}$ باشد داریم $y=\frac{2}{3}$ و داریم $g\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$.
اگر $x=\frac{-1}{3}$ باشد، داریم $y=\frac{-2}{3}$ و داریم: $g(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3})=\frac{-4}{9}$
حال روی مرز $D'$ داریم $x^{2}+y^{2}=1$. پس

$$g(x,y)=xy^{2}=x(1-x^{2})=x-x^{3}=h(x)$$

حال اگر $h'(x)=1-3x^{2}=0$، داریم $x=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}$ پس $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. حال

$$h\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{-2\sqrt{3}}{9}>\frac{-4}{9},$$

و

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}<\frac{4}{9}$$

همچنین تصویر دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ روی محور $x$ها، نقاط $-۱ \leq x \leq ۱$ است و داریم $h(-۱) = h(۱) = ۰$. لذا بیشترین و کمترین مقدار $f$ روی کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$، برابر $\frac{۴}{۹}$ و $\frac{-۴}{۹}$ است. پس بیشترین و کمترین مقدار $f$ روی $D$، $\frac{۴}{۹}$ و $\frac{-۴}{۹}$ خواهد بود.

۲۶. (آدامز بخش ۳ – ۱۳ سوال ۱۲)کوتاهترین فاصله مبدا از خم حاصل از فصل مشترک رویه های $x^2+y^2-z^2=0$ و $x-2z=3$ را بیابید.

حل. تابع فاصله از مبدأ مختصات عبارتست از $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

همچنین می دانیم به دلیل صعودی بودن تابع رادیکال با فرجه زوج، می توانیم رادیکال را در نظر نگرفته و تنها عبارت زیر رادیکال را مینیمم یا ماکزیمم کنیم.

$$\begin{array}{ll} \min \ or \ \max & f=x^2+y^2+z^2 \\ s.t. & \begin{cases} g_1=0: & x^2+y^2-z^2=0 \\ g_2=0: & x-2z=3 \end{cases} \end{array}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2 \\ g_1=0 \\ g_2=0 \end{cases}$$

داریم:

$$\nabla f=(2x,2y,2z)$$
$$\nabla g_1=(2x,2y,-2z)$$
$$\nabla g_2=(1,0,-2)$$

پس

$$\begin{cases} 2x=2\lambda x+\mu & (1) \\ 2y=2\lambda y & (2) \\ 2z=-2\lambda z-2\mu & (3) \\ x^2+y^2-z^2=0 & (4) \\ x-2z=3 & (5) \end{cases}$$

از معادله (۲) داریم $y=0$ یا $\lambda=1$.

اگر $y=0$ از معادله (۴) نتیجه می شود $x=\pm z$ و با توجه به معادله (۵) نقاط بحرانی زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} x=z & \Rightarrow z=-3 & \Rightarrow p_1=(-3,0,-3) \\ x=-z & \Rightarrow z=-1 & \Rightarrow p_2=(1,0,-1) \end{cases}$$

$f(p_1) = 18, \ \ f(p_2) = 2$

اگر $\lambda = 1$ ، از معادله (۱) بدست می آید $\mu = 0$ . پس از معادله (۳) داریم $z = 0$ و از معادله (۴) بدست می آید $x = y = 0$ و این در تناقض با $x = 3$ است که از معادله (۵) بدست می آید. پس این حالت اتفاق نمی افتد. لذا نقطه $p_2$ کمترین فاصله را از مبدأ دارد.

۲۷. (آدامز بخش ۳ − ۱۳ سوال ۱۴) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=x+y^{2}z$ را مقید به قیدهای $y^{2}+z^{2}=2$ و $z=x$ بیابید. حل.

$$\begin{array}{lc} \min or \max & f=x+y^{2}z \\ s.t. & \begin{cases} g_{1}=0: & y^{2}+z^{2}-2=0 \\ g_{2}=0: & x-z=0 \end{cases} \end{array}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g_{1}+\mu\nabla g_{2} \\ g_{1}=0 \\ g_{2}=0 \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \nabla f &= (1,2yz,y^{2}) \\ \nabla g_{1} &= (0,2y,2z) \\ \nabla g_{2} &= (1,0,-1) \end{aligned}$$

پس

$$\begin{cases} 1=\mu & (1) \\ 2yz=2\lambda y & (2) \\ y^{2}=2\lambda z-\mu & (3) \\ y^{2}+z^{2}-2=0 & (4) \\ x-z=0 & (5) \end{cases}$$

از معادله دوم دو حالت پیش می آید $y=0$ یا $z=\lambda$.
اگر $y=0$ از معادله (۴) بدست می آید $z=\pm\sqrt{2}$. با توجه به معادله (۵) نقاط بحرانی زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} p_{1}&=(\sqrt{2},0,\sqrt{2}), & f(p_{1})&=\sqrt{2} \\ p_{2}&=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2}), & f(p_{2})&=-\sqrt{2} \end{aligned}$$

اگر $z=\lambda$ از معادله (۳) داریم $y^{2}-2z^{2}+1=0$، پس از معادله (۴) بدست می آید:

$$2-z^{2}=2z^{2}-1 \Rightarrow z=\pm 1.$$

پس نقاط بحرانی زیر را داریم:

$$p_{۳,۴} = (۱, \pm۱, ۱), \qquad f(p_۳) = f(p_۴) = ۲$$
$$p_{۵,۶} = (-۱, \pm۱, -۱), \quad f(p_۵) = f(p_۶) = -۲$$

لذا ماکزیمم و مینیمم به ترتیب در نقاط $p_۳$ و $p_۵$ خواهد بود.

۲۸. مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ بوسیله صفحه $z = y + x + 1$ در طول منحنی $C$ قطع شده است. بر $C$ نزدیکترین نقطه به مبدا را تعیین کنید.

حل. تابع فاصله از مبدأ مختصات عبارتست از $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

همچنین می دانیم به دلیل صعودی بودن تابع رادیکال با فرجه زوج، می توانیم رادیکال را در نظر نگرفته و تنها عبارت زیر رادیکال را مینیمم یا ماکزیمم کنیم.

$$\begin{array}{ll} \min \ or \ \max & f = x^2 + y^2 + z^2 \\ s.t. & \begin{cases} g_1 = 0: & x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ g_2 = 0: & 1 + x + y - z = 0 \end{cases} \end{array}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

داریم:

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$
$$\nabla g_1 = (2x, 2y, -2z)$$
$$\nabla g_2 = (1, 1, -1)$$

پس

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu & (1) \\ 2y = 2\lambda y + \mu & (2) \\ 2z = -2\lambda z - \mu & (3) \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 & (4) \\ 1 + x + y - z = 0 & (5) \end{cases}$$

از معادله اول و دوم می توان نتیجه گرفت

$$x - y = \lambda(x - y) \Rightarrow \lambda = 1 \ or \ x = y.$$

با فرض $\lambda = 1$ نتیجه می شود $\mu = 0$. از معادله سوم داریم $z = 0$ و از معادله چهارم داریم $x = y = 0$. در این حالت با جایگذاری در معادله پنجم به تناقض $1 = 0$ می رسیم.
با فرض $x = y$ از معادله پنجم بدست می آید:

$$z = 2y + 1$$

حال با جایگذاری در معادله چهارم، متغیر $y$ را محاسبه می کنیم.

$$2y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

پس متغیرهای $z$ و $x$ بدست می آید. در نهایت حاصل دو نقطه زیر خواهد بود:

$$y = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, z = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$$p_1 = (-1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}) \Rightarrow f(p_1) = 6 - 4\sqrt{2}$$
$$p_2 = (-1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}) \Rightarrow f(p_2) = 6 + 4\sqrt{2}$$

که مقادیر مینیمم و ماکزیمم را دارند.

۲۹. هر صفحه مماس بر سطح $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{\pi}$ محورهای مختصات را در نقاط $A$، $B$ و $C$ قطع میکند. ثابت کنید

$$\left\|\overrightarrow{oA}\right\|+\left\|\overrightarrow{oB}\right\|+\left\|\overrightarrow{oC}\right\|=\pi$$

حل. فرض کنید $f(x,y,z)=0$ معادله رویه مورد نظر باشد.

$$f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{\pi}$$

داریم:

$$\nabla f=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}).$$

معادله صفحه مماس بر رویه ی مورد نظر در یک نقطه دلخواه مانند $(x_0,y_0,z_0)$ به صورت زیر است.

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}z=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x_0+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}y_0+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}z_0,$$

که نتیجه می دهد:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z)=\frac{1}{2}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}),$$

حال چون $(x_0,y_0,z_0)$ نقطه ای از رویه مورد نظر است، داریم:

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{\pi}.$$

نقاط $A,B,C$ که محل برخورد صفحه مماس با محورهای مختصات می باشند در معادله صفحه صدق می کنند. لذا داریم:

$$A=(a,0,0)\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{x_0}}+0+0=\sqrt{\pi}\Rightarrow a=\sqrt{x_0}\sqrt{\pi}$$

$$B=(0,b,0)\Rightarrow 0+\frac{b}{\sqrt{y_0}}+0=\sqrt{\pi}\Rightarrow b=\sqrt{y_0}\sqrt{\pi}$$

$$C=(a,0,0)\Rightarrow 0+0+\frac{c}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{\pi}\Rightarrow c=\sqrt{z_0}\sqrt{\pi}$$

$$\|oA\|+\|oB\|+\|oC\|=a+b+c=\sqrt{\pi}(\underbrace{\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}}_{\sqrt{\pi}})=\pi.$$

۳۰. اگر $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ توابعی مشتق پذیر و $f(x,y)=h(g(x,y))$ باشد، دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

حل. فرض کنید $u=g(x,y)$ در این صورت $f(x,y)=h(u)$ که در آن $u=g(x,y)$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=h'(u)\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=h'(u)\frac{\partial g}{\partial y}$$

لذا

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} h'(u)\frac{\partial g}{\partial x} & h'(u)\frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}=h'(u)\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}-h'(u)\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}=۰.$$