گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی ۲ ـ سری چهارم

نیمسال دوم ۹۹-۹۸
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

---

۱. (آدامز بخش ۲ – ۱۴ سوالات ۱۶,۱۷) در هر یک از انتگرال های زیر قلمرو انتگرالگیری را رسم کنید و انتگرال مکرر مفروض را محاسبه کنید.

(آ)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy$$

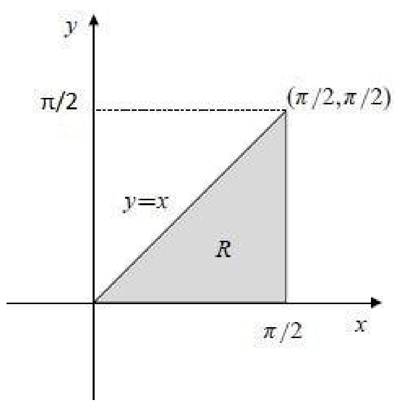
(ب)

$$I=\int_0^1\int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}\, dy\, dx \ (\lambda>0)$$

حل (الف): در این تکرار نمی‌توان برای محاسبه انتگرال داخلی از $\frac{\sin x}{x}$ پادمشتق گرفت. بنابراین I را به عنوان یک انتگرال مضاعف بیان نموده و ناحیه انتگرال را شناسایی می‌کنیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy=\int\int_R \frac{\sin x}{x} dA$$

که ناحیه R در شکل زیر رسم شده است.



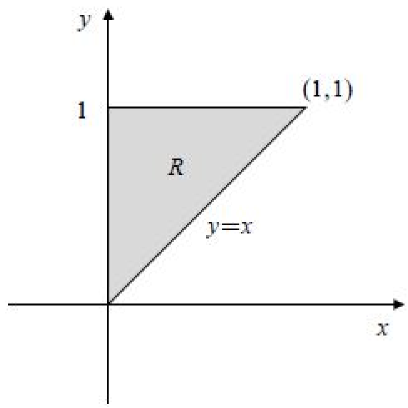
اگر ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر دهیم، داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy=\int\int_R \frac{\sin x}{x}\, dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\int_0^x dy\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \ =1$$

حل (ب): در این تکرار نمی‌توان برای محاسبه انتگرال داخلی از $\frac{y^\lambda}{x^2+y^2}$ پادمشتق گرفت. بنابراین I را به عنوان یک انتگرال مضاعف بیان نموده و ناحیه انتگرال را شناسایی می‌کنیم:

$$I=\int_0^1\int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}\, dy\, dx=\int\int_R \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}\, dA$$

که ناحیه R در شکل زیر رسم شده است.



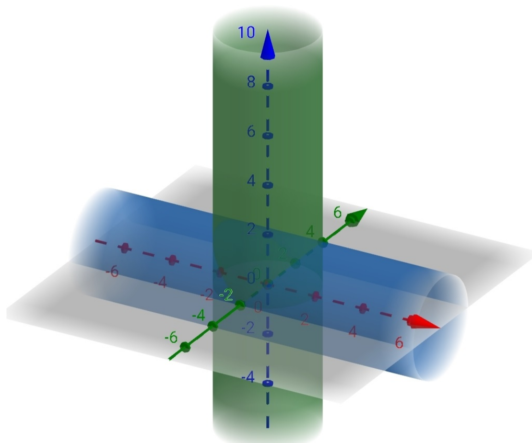
اگر ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر دهیم، داریم:

$$I = \int_{۰}^{۱} \int_{x}^{۱} \frac{y^{\lambda}}{x^{۲}+y^{۲}}\ dy\, dx = \int\int_{R} \frac{y^{\lambda}}{x^{۲}+y^{۲}}\ dA = \int_{۰}^{۱} y^{\lambda} \int_{۰}^{y} \frac{dx}{x^{۲}+y^{۲}}\, dy = \int_{۰}^{۱} y^{\lambda} \int_{۰}^{y} \frac{۱}{y^{۲}}\Big(\frac{۱}{\left(\frac{x}{y}\right)^{۲}+۱}\Big)\, dx\, dy$$

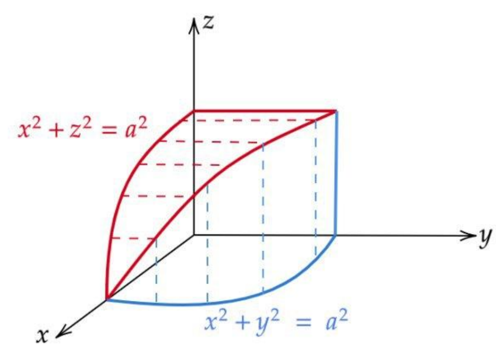
$$= \int_{۰}^{۱} y^{\lambda}\, \frac{۱}{y}\left(\tan^{-۱}\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{x=۰}^{x=y} dy = \frac{\pi}{۴}\int_{۰}^{۱} y^{\lambda-۱}\, dy = \frac{\pi y^{\lambda}}{۴\lambda}\Bigg|_{۰}^{۱} = \frac{\pi}{۴\lambda}$$

۲. (آدامز بخش ۲-۱۴ سوال ۲۷) با استفاده از انتگرال دوگانه حجم محصور به دو استوانه $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ را بیابید.

حل: با رسم دو استوانه می‌توان دید که ناحیه انتگرال‌گیری تقاطع دو استوانه زیر است.



با توجه به شکل دو تابع، تقاطعشان در ۸ ناحیه کاملا متقارن هستند، بنابراین ناحیه انتگرال‌گیری را در یک هشتم (مانند شکل زیر) محاسبه و حاصل را ۸ برابر می‌کنیم.



$$Vol = 8\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\, dy\, dx = 8\int_0^a (a^2-x^2)\, dx = 8\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{16}{3}a^3$$

۳. (آدامز بخش ۳ – ۱۴ سوالات ۷,۹) تعیین کنید انتگرال های زیر همگراست یا واگرا و مقدار انتگرال های همگرا را محاسبه کنید.

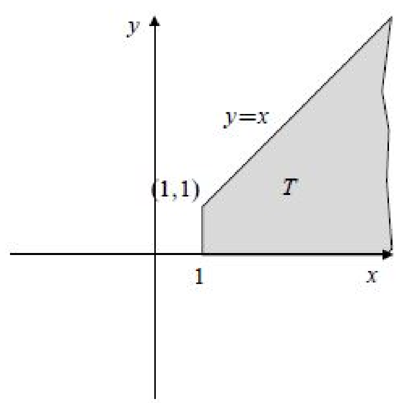
(آ) $\iint e^{-(|x|+|y|)}dA$ روی ناحیه $\mathbb{R}^۲$

(ب) $\iint \frac{۱}{x^۳}e^{-\frac{y}{x}}dA$ روی ناحیه ای که در رابطه های $x \geq ۱$ و $۰ \leq y \leq x$ صدق کند.

حل (الف): انتگرال همگراست، زیرا

$$\iint_{\mathbb{R}^۲} e^{-(|x|+|y|)}dA = ۴\iint_{\substack{x\geq ۰\\ y\geq ۰}} e^{-(x+y)}\, dA = ۴\int_۰^\infty e^{-x}dx\int_۰^\infty e^{-y}\, dy = ۴\Big(\lim_{R\to\infty} -e^{-x}\Big|_۰^R\Big)^۲ = ۴$$

حل (ب): با رسم ناحیه داده شده، انتگرال را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:



$$\iint_T \frac{۱}{x^۳}e^{-\frac{y}{x}}dA = \int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳}\int_۰^x e^{-\frac{y}{x}}\, dydx = \int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳}\Big(-xe^{-\frac{y}{x}}\Big|_{y=۰}^{y=x}\Big)dx = (۱-\frac{۱}{e})\int_۱^\infty \frac{dx}{x^۲}$$
$$= (۱-\frac{۱}{e})\lim_{R\to\infty}\Big(-\frac{۱}{x}\Big|_۱^R\Big) = ۱-\frac{۱}{e}$$

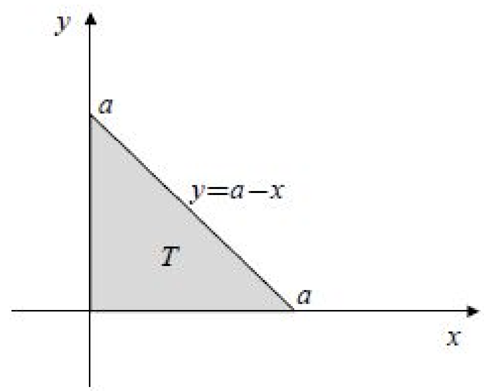
بنابراین انتگرال همگراست.

۴. (آدامز بخش ۳ – ۱۴ سوال ۲۳) مقدار متوسط تابع $x^{۲} + y^{۲}$ بر مثلث $a \leq x \leq ۰$ و $۰ \leq y \leq a - x$ را بیابید.

حل: مقدار متوسط تابع انتگرال‌پذیر $f(x,y)$ روی مجموعه D با $\overline{f}$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{f} = \frac{۱}{\text{مساحت } D} \iint_D f(x,y)\, dA$$

ابتدا ناحیه موردنظر را رسم می‌کنیم:



بنابراین مساحت $\frac{a^{۲}}{۲}$ است. با توجه به رابطه بالا داریم:

$$\overline{f} = \frac{۲}{a^{۲}} \iint_T (x^{۲}+y^{۲})\, dA = \frac{۲}{a^{۲}} \int_{۰}^{a} \int_{۰}^{a-x} (x^{۲}+y^{۲})\, dy\, dx = \frac{۲}{a^{۲}} \int_{۰}^{a} \left(x^{۲}y + \frac{۱}{۳}y^{۳}\right)\Big|_{y=۰}^{y=a-x} dx$$

$$= \frac{۲}{۳a^{۲}} \int_{۰}^{a} \left[۳x^{۲}(a-x) + (a-x)^{۳}\right] dx = \frac{۲}{۳a^{۲}} \left[۳(\frac{ax^{۳}}{۳} - \frac{x^{۴}}{۴}) - \frac{(a-x)^{۴}}{۴}\right]\Big|_{۰}^{a} = \frac{a^{۲}}{۳}$$

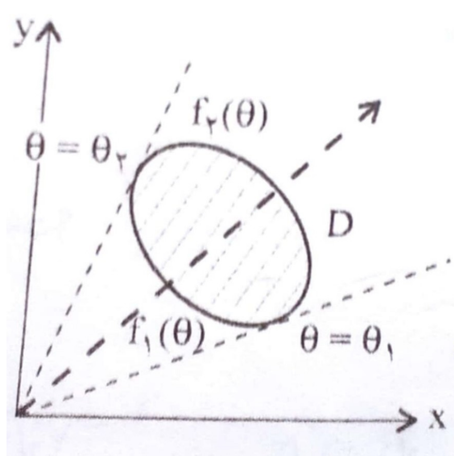
۵. (آدامز بخش ۴ – ۱۴ سوال ۱۱) مطلوبست محاسبه $\iint (x+y)dA$ روی ناحیه S که در ربع اول، درون قرص $x^۲+y^۲ \leq a^۲$ و زیر خط $y=\sqrt{۳}x$ قرار گرفته است.

حل:

یادآوری:

تبدیل قطبی $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$ را وقتی به کار می بریم که محاسبه انتگرال در این دستگاه مختصات ساده تر باشد. مثلا زمانی که تابع زیر انتگرال در این دستگاه مختصات به شکل ساده تر بیان گردد و یا بخشی از مرزهای ناحیه به شکل دایره باشد، از این تبدیل استفاده می کنیم. ژاکوبی در این دستگاه مختصات برابر است با: $j = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = r$ برای تعیین حدود انتگرال در مختصات قطبی نیم خطی از مبدا چنان رسم می کنیم که شکل ناحیه را در روی منحنی های $r = f_۱(\theta)$ و $r = f_۲(\theta)$ قطع کند، اگر $\theta_۱ \leq \theta \leq \theta_۲$ آن گاه برای انتگرال روی ناحیه D داریم:

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_{\theta_۱}^{\theta_۲}\int_{f_۱(\theta)}^{f_۲(\theta)} F(r,\theta)r \text{ d}r \text{ d}\theta$$

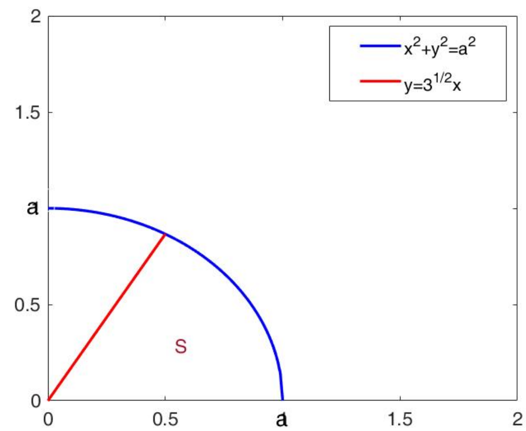


حال سراغ حل مساله می رویم:

چون تانژنت وارون زاویه مساوی شیب خط است. خط $y = ۰$ شیب آن ۰ است. و خط $y = \sqrt{۳}x$ شیب آن $\sqrt{۳}$ است. بنابراین $۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۳}$ است.

$$\iint\limits_S (x+y)dA = \int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\int_۰^a (r\cos\theta + r\sin\theta)r \text{ d}rd\theta = \int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(\cos\theta+\sin\theta)\text{ d}\theta \int_۰^a r^۲ \text{ d}r = \frac{a^۳}{۳}(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$= [(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲}) - (-۱)]\frac{a^۲}{۳} = \frac{(\sqrt{۳}+۱)a^۲}{۶}$$



شکل ۱:

۶. (آدامز بخش ۴ – ۱۴ سوال ۲۲) حجم ناحیه ای را که درون کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و استوانه $x^2+y^2=ax$ قرار گرفته است بیابید.

حل: با استاندارد کردن معادله استوانه به صورت $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$ مرکز آن $(\frac{a}{2},0)$ است. یک چهارم حجم مورد نظر در یک هشتم اول قرار می گیرد. مختصات قطبی معادله استوانه $x^2+y^2=ax$ به صورت $r=a\cos\theta$ تبدیل می شود. بنابراین حجم موردنظر برابر است با:

$$V=4\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dA=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}(\sqrt{a^2-r^2})r\,\mathrm{d}rd\theta$$

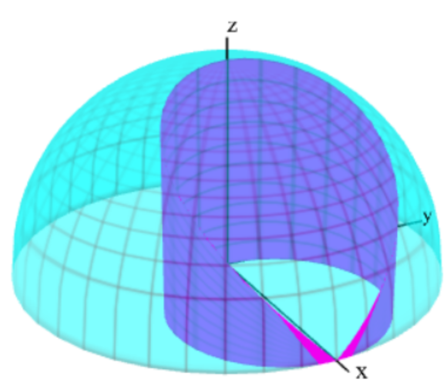
فرض کنید $u=a^2-r^2$ و $du=-2rdr$ در این صورت:

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a^2\sin^2\theta}^{a^2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}ud\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(u^{\frac{3}{2}}\Big|_{a^2\sin^2\theta}^{a^2})d\theta=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta)$$

با فرض $v=\cos\theta$ و $dv=-\sin\theta d\theta$ در این صورت:

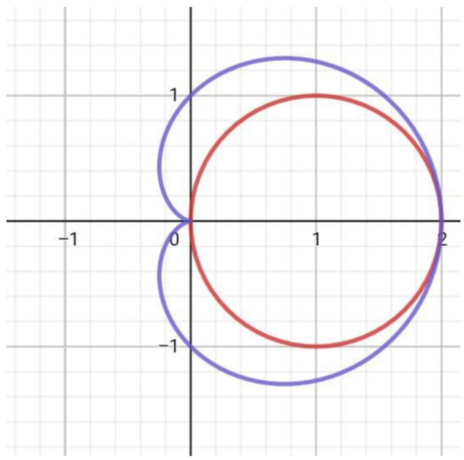
$$V=\frac{2\pi a^3}{3}-\frac{4a^3}{3}\int_0^1(1-v^2)\,\mathrm{d}v=\frac{2\pi a^3}{3}-\frac{4a^3}{3}(v-\frac{v^3}{3})\Big|_0^1=\frac{2\pi a^3}{3}-\frac{8a^3}{9}=\frac{2}{9}a^3(3\pi-4)$$



شکل ۲:

۷. مساحت خارج دایره به معادله $r = ۲a cos(\theta)$ و داخل کاردیوئید $r = a(۱ + cos(\theta))$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

حل(روش اول):



$$\begin{aligned}
A =& ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۲a\cos\theta}^{a(۱+\cos\theta)} r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta + ۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\int_{۰}^{a(۱+\cos\theta)} r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \\
&= ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{r^۲}{۲})\Big|_{۲a\cos\theta}^{a(۱+\cos\theta)} d\theta + ۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} (\frac{r^۲}{۲})\Big|_{۰}^{a(۱+\cos\theta)} d\theta \\
&= a^۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۱+\cos^۲\theta + ۲\cos\theta - ۴\cos^۲\theta)\ \mathrm{d}\theta + a^۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} (۱+\cos^۲\theta+۲\cos\theta)\ \mathrm{d}\theta \\
&= a^۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} ۱\ \mathrm{d}\theta - ۳a^۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲\theta\ \mathrm{d}\theta + ۲a^۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos\theta\ \mathrm{d}\theta + a^۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} ۱\ \mathrm{d}\theta + a^۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\cos^۲\theta\ \mathrm{d}\theta + a^۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} ۲\cos\theta\ \mathrm{d}\theta \\
&= (a^۲\theta)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} - ۳(a^۲(\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin ۲\theta))\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} + ۲a^۲(\sin\theta)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} + (a^۲\theta)\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} + (a^۲(\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin ۲\theta))\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} + ۲a^۲(\sin\theta)\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \\
&= a^۲\frac{\pi}{۲} - ۳a^۲\frac{\pi}{۴} + ۲a^۲ + a^۲\pi - a^۲\frac{\pi}{۲} + a^۲\frac{\pi}{۲} - a^۲\frac{\pi}{۴} - ۲a^۲ = \frac{\pi a^۲}{۲}
\end{aligned}$$

روش دوم :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{a(۱+\cos\theta)} r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta = \int_{۰}^{۲\pi} (\frac{r^۲}{۲})\Big|_{۰}^{a(۱+\cos\theta)} d\theta = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi} a^۲(۱+۲\cos\theta+\cos^۲\theta)\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{۱}{۲}a^۲\int_{۰}^{۲\pi}(۱+۲\cos\theta+\cos^۲\theta)\ \mathrm{d}\theta = \frac{a^۲}{۲}(۲\pi + ۲(\sin\theta))\Big|_{۰}^{۲\pi} + \int_{۰}^{۲\pi}(\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲})\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^۲}{۲}[۲\pi + \int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}(\sin ۲\theta)\Big|_{۰}^{۲\pi}] = \frac{a^۲}{۲}[۲\pi+\pi] = \frac{۳}{۲}\pi a^۲
\end{aligned}$$

مساحت دایره برابر است با $\pi a^۲$ بنابراین مساحت خارج دایره و درون دلگون برابر است با $\frac{۳}{۲}\pi a^۲ - \pi a^۲ = \frac{۱}{۲}\pi a^۲$

۸. (آدامز بخش ۴ – ۱۴ سوال ۳۱) مطلوب است محاسبه $\iint e^{x+y}\, dA$ روی ناحیه $|x|+|y| \leq a$.

حل:

یادآوری(جانشینی در انتگرال های دوگانه): در برخی انتگرال ها با توجه به شکل ناحیه D یا شکل تابع $f(x,y)$ در زیر انتگرال، ترجیح می دهیم که از یک تبدیل یک به یک:

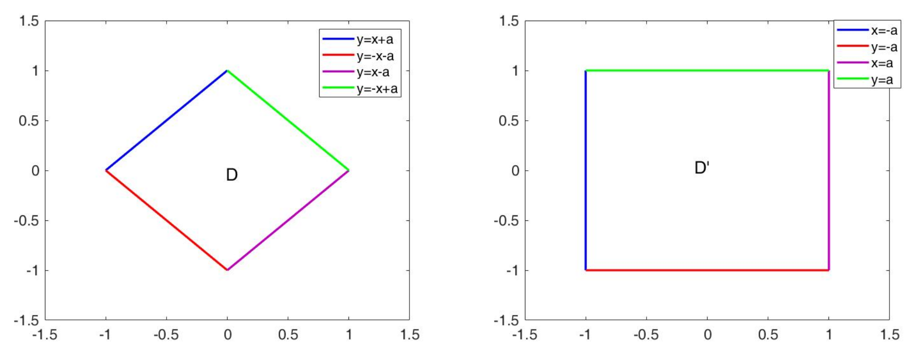
$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v)$$

استفاده کنیم. درنتیجه تحت این تبدیل ناحیه D در صفحه xy به ناحیه D' در صفحه ی uv نقش می شود. اگر dA یک عنصر مساحت در صفحه xy و dA' یک عنصر مساحت در صفحه uv باشد، آن گاه:

$$dA = |j|dA' = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dA'$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \iint\limits_{D'} F(u,v)dA'$$



شکل ۳:

حال سراغ حل مساله می رویم:

فرض کنید $x = \frac{u+v}{۲}$ و $y = \frac{u-v}{۲}$ در این صورت داریم $x+y=u$ و $x-y=v$ بنابراین خواهیم داشت:

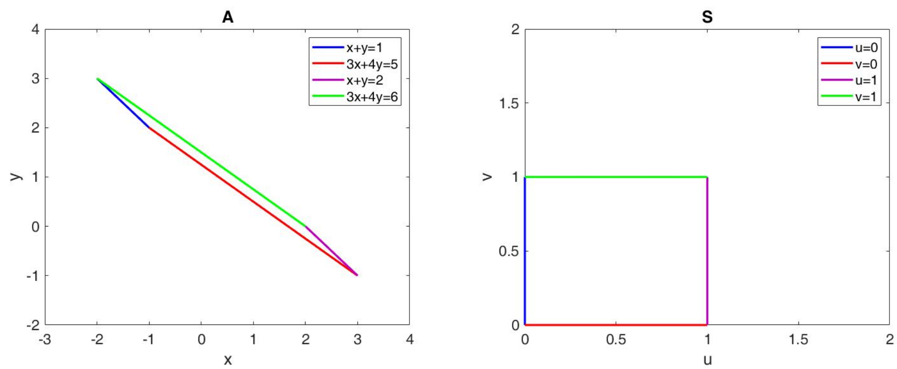
$$dxdy = |\begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{vmatrix}|dudv = \frac{۱}{۲}dudv$$

بنابراین با تبدیل بالا، مربع $|x|+|y| \leq a$ متناظر با مربع $-a \leq u \leq a$ و $-a \leq v \leq a$ می باشد. بنابراین

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leq a} e^{x+y}dA = \frac{۱}{۲}\iint\limits_{D'} e^{u}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \frac{۱}{۲}\int_{-a}^{a} e^{u}\, \mathrm{d}u \int_{-a}^{a} \mathrm{d}v = a(e^{a}-e^{-a}) = ۲a\sinh a$$

۹. (آدامز بخش ۴ − ۱۴ سوال ۳۲) مطلوبست محاسبه $\iint x^{۲}+y^{۲}\ dA$ روی ناحیه متوازی الاضلاع محصور به خط های $x+y=۱, x+y=۲, ۳x+۴y=۵, ۳x+۴y=۶$.

حل: برای این‌گونه مسائل ابتدا ناحیه چهارضلعی کلی را با استفاده از تغییر متغیر مناسب به چهارضلعی منظم مانند مستطیل یا مربع واحد تبدیل نموده و سپس به محاسبه انتگرال می‌پردازیم. ابتدا تعریف می‌کنیم



شکل ۴:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}\ \middle|\ ۱\leq x+y\leq ۲,\ \ ۵\leq ۳x+۴y\leq ۶\right\},\qquad S=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^{۲}\ \middle|\ ۰\leq u\leq ۱,\ \ ۰\leq v\leq ۱\right\}.$$

در اینجا نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} u=x+y-۱, \\ v=۳x+۴y-۵, \end{cases}\qquad \text{یا معادلات} \qquad \begin{cases} x=۴u-v-۱, \\ y=v-۳u+۲. \end{cases}$$

تحت نگاشت فوق متوازی‌الاضلاع A به مربع واحد S تبدیل می‌شود (شکل ۴ را ببینید).
بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{vmatrix}=۱,\qquad dx\ dy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\ dy=du\ dv, \tag{۱}$$

و

$$\begin{aligned} x^{۲}+y^{۲} &= (۴u-v-۱)^{۲}+(v+۲-۳u)^{۲} \\ &= \big((۴u)^{۲}-۲(۴u)(v+۱)+v^{۲}+۲v+۱\big)+\big(v^{۲}+۴v+۴-۲(v+۲)(۳u)+(۳u)^{۲}\big) \\ &= ۲۵u^{۲}+۲v^{۲}-۱۴uv-۲۰u+۶v+۵. \end{aligned} \tag{۲}$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم

$$
\begin{aligned}
\iint_A \left(x^۲+y^۲\right)\ dx\ dy &= \iint_S \left(۲۵u^۲+۲v^۲-۱۴uv-۲۰u+۶v+۵\right)\ du\ dv \\
&= \int_۰^۱\int_۰^۱ \left(۲۵u^۲+۲v^۲-۱۴uv-۲۰u+۶v+۵\right)\ du\ dv \\
&= \int_۰^۱ \left(\frac{۲۵}{۳}u^۳+۲v^۲u-\frac{۱۴}{۲}u^۲v-\frac{۲۰}{۲}u^۲+۶vu+۵u\right)\Big|_{u=۰}^{u=۱} dv \\
&= \int_۰^۱ \left(\frac{۲۵}{۳}+۲v^۲-\frac{۱۴}{۲}v-\frac{۲۰}{۲}+۶v+۵\right) dv \\
&= \left(\frac{۲۵}{۳}v+\frac{۲}{۳}v^۳-\frac{۱۴}{۴}v^۲-\frac{۲۰}{۲}v+\frac{۶}{۲}v^۲+۵v\right)\Big|_{v=۰}^{v=۱} \\
&= \frac{۷}{۲}.
\end{aligned}
$$

۱۰. (آدامز بخش ۴ – ۱۴ سوال ۳۵) فرض کنیم T مثلث دارای راس های $(\circ,\circ),(۱,\circ),(\circ,۱)$ باشد. انتگرال $\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dA$ را

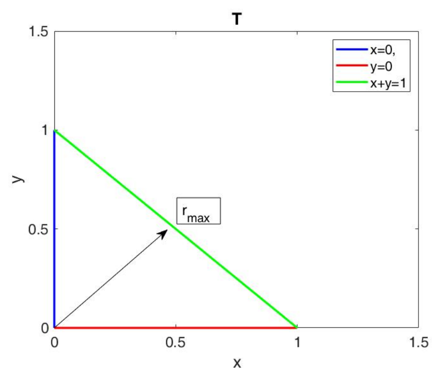
(آ) با تبدیل به مختصات قطبی و

(ب) با تغییر متغیرهای $u=y-x$ و $v=y+x$ محاسبه کنید.

حل: (آ). به‌خوبی می‌دانیم که وتر مثلث T بخشی از خط زیر واقع در ربع اول دستگاه مختصات است (شکل ۵ را ببینید)

$$x+y=۱.$$

حال با درنظر گرفتن مختصات قطبی به صورت $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ در رابطه فوق بدست می‌آوریم



شکل ۵:

$$r_{max}=\frac{۱}{\cos\theta+\sin\theta}. \tag{۳}$$

از طرفی چون این مثلث در ربع اول واقع شده است لذا

$$\circ\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}. \tag{۴}$$

اکنون با استفاده از روابط (۳) و (۴) داریم

$$\begin{aligned}
\iint_T e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}dA &= \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\int_\circ^{۱/(\cos\theta+\sin\theta)} e^{\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)}r\ dr\ d\theta\\
&= \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} e^{\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)}\int_\circ^{۱/(\cos\theta+\sin\theta)} r\ dr\ d\theta\\
&= \frac{۱}{۲}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} e^{\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)}\frac{۱}{(\cos\theta+\sin\theta)^۲}d\theta
\end{aligned} \tag{۵}$$

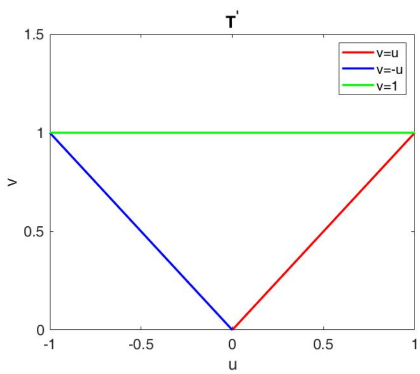
برای محاسبه انتگرال فوق تغییر متغیر زیر بکار می‌گیریم

$$u=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} du=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^۲+(\cos\theta-\sin\theta)^۲}{(\sin\theta+\cos\theta)^۲}d\theta=\dfrac{۲d\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^۲}, \\ -۱\le u\le ۱, \end{cases}$$

پس رابطه (۵) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است

$$\iint_T e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}dA \;=\; \frac{۱}{۴}\int_{-۱}^{۱} e^u\,du=\frac{e-e^{-۱}}{۴}.$$

(ب). مثلث واحد T در صورت مسئله محصور به خطوط $x=۰$، $y=۰$ و $x+y=۱$ می‌باشد (شکل ۵) که با



شکل ۶:

انتقال تحت نگاشت معرفی شده یعنی

$$\begin{cases} u=y-x, \\ v=y+x, \end{cases} \qquad \text{یا معادلات} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{v-u}{۲}, \\ y=\dfrac{u+v}{۲}, \end{cases}$$

به مثلث T' محصور به خطوط $u=v$، $u=-v$ و $v=۱$ نگاشته می‌شود (شکل ۶ را ببینید). پس داریم

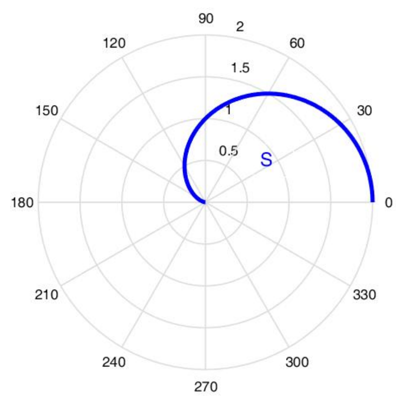
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -۱/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{vmatrix}=-\frac{۱}{۲}, \qquad dx\,dy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dy=\frac{۱}{۲}\,du\,dv,$$

و

$$\iint_T e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}dA=\frac{۱}{۲}\int_۰^۱\int_{-v}^{v} e^{\left(\frac{u}{v}\right)}du\,dv=\frac{۱}{۲}\int_۰^۱\left(ve^{\left(\frac{u}{v}\right)}\right)\Big|_{u=-v}^{u=v}dv=\frac{۱}{۲}\left(e-e^{-۱}\right)\int_۰^۱ v\,dv=\frac{e-e^{-۱}}{۴}.$$

۱۱. (میانترم ۹۸-۹۷) انتگرال $\iint_S \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dxdy$ که در آن S ناحیه بالای محور x و زیر منحنی قطبی $r=۱+\cos\theta$ است را بصورت انتگرال مکرر در مختصات قطبی بنویسید و حدود انتگرال را بطور دقیق در مختصات قطبی تعیین کنید. (محاسبه انتگرال لازم نیست.)

حل: ابتدا حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنیم. با توجه به نامنفی بودن r داریم $۰ \le r \le ۱+\cos\theta$ و از طرفی چون



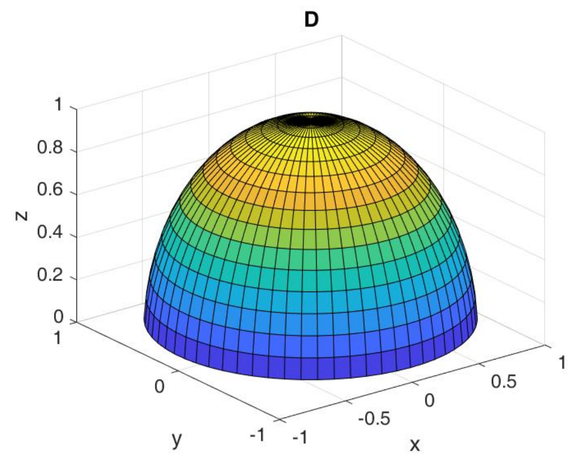
شکل ۷:

ناحیه محصور بالای محور x است لذا $۰ \le \theta \le \pi$. حال با جایگذاری $x=r\cos(\theta)$ ، $y=r\sin(\theta)$ و $dx\ dy = r\ dr\ d\theta$ به‌دست می‌آوریم

$$\iint_S \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dx\ dy = \int_۰^\pi \int_۰^{۱+\cos\theta} \frac{r\sin(\theta)}{\sqrt{r^۲}} r\ dr\ d\theta = \int_۰^\pi \int_۰^{۱+\cos\theta} \sin(\theta) r\ dr\ d\theta.$$

۱۲. (آدامز بخش ۵ – ۱۴ سوال ۳) مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint_D(۳+۲xy)dV$ بر حجم محصور به نیمکره $x^۲+y^۲+z^۲\leq ۴$ و $z\geq ۰$.

حل: ابتدا تعریف می‌کنیم



شکل ۸:

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳\;\middle|\; x^۲+y^۲+z^۲\leq ۴,\quad z\geq ۰\right\}. \tag{۶}$$

داریم

$$\iiint_D(۳+۲xy)dV=۳\iiint_D dV+۲\iiint_D xydV:=I+II.$$

راه ۱: توجه داریم که حجم نیمکره به صورت $\frac{۲}{۳}\pi r^۳$ بدست می‌آید که r شعاع نیمکره می‌باشد. پس $I=۳(\frac{۲}{۳}\pi ۲^۳)=۱۶\pi$. از طرفی چون این نیمکره بر صفحات $x=۰$ و $y=۰$ متقارن است لذا $II=۰$.

راه ۲: با استفاده از مختصات کروی داریم

$$\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲, \tag{۷}$$

$$x=\rho\sin(\phi)\cos(\theta),\quad y=\rho\sin(\phi)\sin(\theta),\quad z=\rho\cos(\phi). \tag{۸}$$

با توجه به اینکه $x^۲+y^۲+z^۲\leq ۴$ لذا از رابطه (۷) بدست می‌آوریم.

$$۰\leq\rho\leq ۲ \tag{۹}$$

همچنین شرط $z \geq 0$ ایجاب می‌کند $\rho\cos(\phi) \geq 0$ که با توجه به نامنفی بودن ρ نتیجه می‌شود که باید $\cos(\phi) \geq 0$ برقرار باشد و از آنجایی که بخوبی می‌دانیم تابع $\cos$ در بازه $[0,\pi]$ تنها در ربع اول مثبت است پس داریم

$$0 \leq \phi \leq \pi/2. \tag{10}$$

بعلاوه چون در ناحیه D هیچ محدودیتی روی متغیرهای x و y نداریم لذا داریم

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{11}$$

اکنون با بکارگیری روابط (۸)ـ(۱۱) بدست می‌آوریم:

$$\iiint_D (3 + 2xy)dV = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(3 + 2\rho^2 \sin(\phi)^2 \cos(\theta)\sin(\theta)\right) \rho^2 \sin(\phi)\ d\theta\ d\phi\ d\rho := I + II,$$

که

$$\begin{aligned} I &= 3\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin(\phi)\ d\theta\ d\phi\ d\rho = 3\int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin(\phi)d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 3(\frac{\rho^3}{3})\Big|_{\rho=0}^{\rho=2}[-\cos(\phi)]\Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}(\theta)\Big|_{\theta=0}^{2\pi} = 2\pi(8) = 16\pi, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} II &= 2\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 \sin(\phi)^2 \cos(\theta)\sin(\theta)\right) \rho^2 \sin(\phi)\ d\theta\ d\phi\ d\rho \\ &= 2\int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin(\phi)^3 d\phi \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = 0, \end{aligned}$$

چون

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)d\theta = -\frac{1}{4}\cos(2\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0.$$

۱۳. (آدامز بخش ۵ – ۱۴ سوال ۱۳) مطلوبست محاسبه $\int\int\int e^{-x^2-2y^2-3z^2}dV$ روی $\mathbb{R}^3$.
حل: ابتدا باید از قبل بدانیم (طبق مثال ۴٫۵ کتاب آدامز)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$$

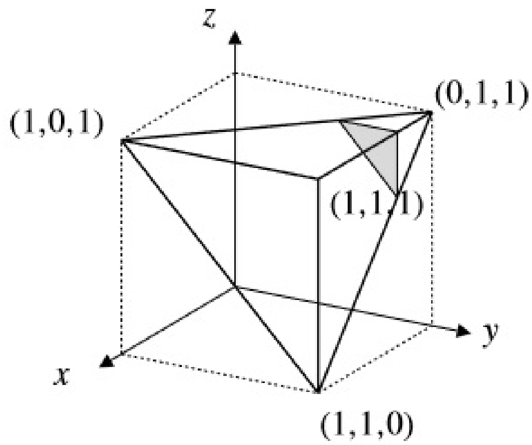
به کمک روش تغییر متغیرو با فرض $k > 0$ قرار می دهیم $u = \sqrt{k}t$ ، $du = \sqrt{k}dt$ بنابراین داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kt^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

می دانیم طبق قضیه ی کتاب آدامز، اگر تابع مفروض بر دامنه اش پیوسته باشد، می توانیم انتگرال چند گانه را به فرم انتگرال مکرر بنویسیم. حال با دانستن این قضیه و به کمک رابطه فوق داریم:

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-2y^2-3z^2}dV = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2}dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3z^2}dz = \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6}}$$

۱۴. (آدامز بخش ۵-۱۴ سوال ۱۵) مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint xdV$ روی چهاروجهی محصور به صفحات $x = 1, y = 1, z = 1, x + y + z = 2$.



حل: اگر دامنه ی انتگرال گیری را T بنامیم. (چنانکه می دانیم در واقع تعبیر انتگرال مفروض معادل است با یافتن حجم یک شی چهار بعدی که T قاعده ی آن در فضای سه بعدی است).

$$\int\int\int_T xdV = \int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_{2-x-y}^1 xdzdydx = \int_0^1 \int_{1-x}^1 (x^2 + xy - x)dydx = \int_0^1 x \int_{1-x}^1 (x + y - 1)dydx =$$

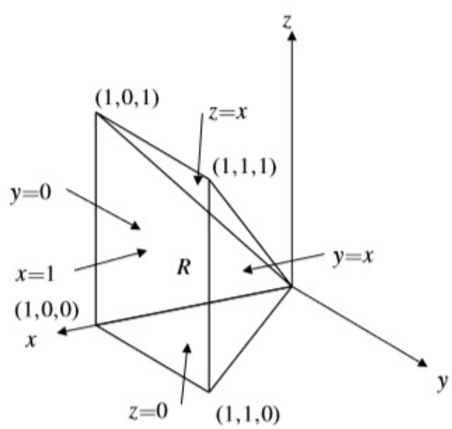
$$\int_0^1 x[(x-1)y + \frac{y^2}{2}]\Big|_{1-x}^1 = \int_0^1 x[\frac{(x-1)^2}{2} + x - \frac{1}{2}]dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{8}$$

۱۵. (آدامز بخش ۵ – ۱۴ سوالات ۲۷,۲۸) در هر یک از انتگرال های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرالگیری، محاسبه کنید.

(آ) $I = \int_{۰}^{۱} \int_{z}^{۱} \int_{۰}^{x} e^{x^{۳}}\, dy\, dx\, dz$

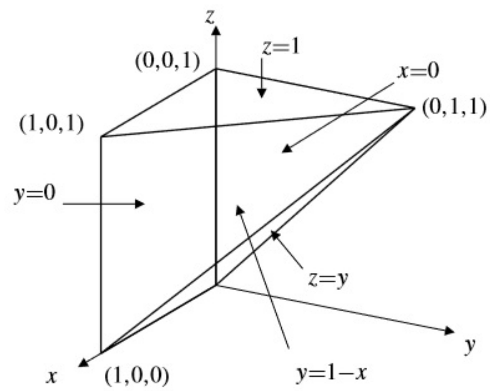
(ب) $\int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{۱-x} \int_{y}^{۱} \frac{\sin(\pi z)}{z\,(۲-z)}\, dz dy dx$

حل قسمت الف: ناحیه انتگرال گیری را R می نامیم. توجه کنید که R در واقع حجم سه بعدی حاصل از تقاطع صفحاتی است که در حدود هر یک از انتگرال های صورت مساله ظاهر شده اند.



$$\int_{۰}^{۱} \int_{z}^{۱} \int_{۰}^{x} e^{x^{۳}} dy dx dz = \int\int\int_{R} e^{x^{۳}} dV = \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{x} \int_{۰}^{x} e^{x^{۳}} dz dy dx = \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{x} x e^{x^{۳}} dy dx = \int_{۰}^{۱} x^{۲} e^{x^{۳}} dx = \frac{۱}{۳} e^{x^{۳}}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{e-۱}{۳}$$

حل قسمت ب: فرض کنید ناحیه انتگرال گیری روی شکل R باشد.



$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_y^1 \frac{sin(\pi z)}{z(2-z)} dzdydx = \int\int\int_R \frac{sin(\pi z)}{z(2-z)} dV = \int_0^1 \int_0^z \int_0^{1-y} \frac{sin(\pi z)}{z(2-z)} dxdydz = \int_0^1 \int_0^z \frac{sin(\pi z)}{z(2-z)} (1-y) dydz$$

قبل از انتگرال گیری نسبت به y برای راحتی بهتر است عبارت کسری را از انتگرال خارج کنید. بنابراین

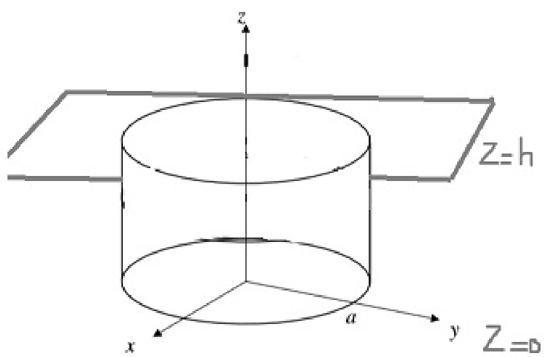
$$\int_0^1 \frac{sin(\pi z)}{z(2-z)} \int_0^z (1-y) dydz = \int_0^1 \frac{sin(\pi z)}{z(2-z)} (y - \frac{y^2}{2})\Big|_0^z dz = \int_0^1 \frac{sin(\pi z)}{z(2-z)} (z - \frac{z^2}{2}) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 sin(\pi z) dz = \frac{1}{\pi}$$

۱۶. (آدامز بخش ۶ − ۱۴ سوال ۲۴) مطلوبست محاسبه $\int\int\int_R (x^2+y^2+z^2)dV$ که در آن، R عبارتست از استوانه $0 \le x^2+y^2 \le a^2$ و $0 \le z \le h$.

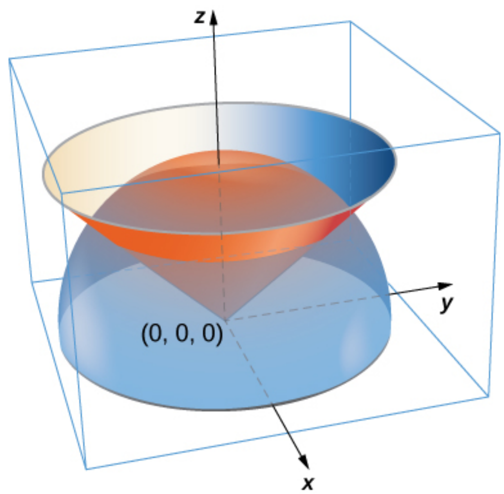
حل: دامنه ی انتگرال گیری R ، در واقع حجمی است که بوسیله ی استوانه و صفحات $z=h$ و $z=0$ محصور شده است. با انتخاب مختصات استوانه ای داریم :

$$\int\int\int_R (x^2+y^2+z^2)dV = \int_0^a \int_0^h \int_0^{2\pi} r(x^2+y^2+z^2)d\theta dz dr = 2\pi \int_0^a \int_0^h r(r^2+z^2)dzdr = 2\pi \int_0^a r(r^2 z+\frac{z^3}{3})\Big|_0^h dr =$$

$$2\pi \int_0^a (r^3 h + \frac{1}{3} r h^3)dr = 2\pi(\frac{r^4}{4}h + \frac{1}{3}\frac{r^2}{2}h^3)\Big|_0^a = 2\pi(\frac{a^4 h}{4} + \frac{a^2 h^3}{6}) = \pi(\frac{a^4 h}{2} + \frac{a^2 h^3}{3})$$



۱۷. (آدامز بخش ۶ − ۱۴ سوال ۲۷) مطلوبست محاسبه $\iiint_R (x^۲+y^۲+z^۲)dV$ که در آن، R ناحیه ای است که بالای مخروط $z=c\sqrt{x^۲+y^۲}$ و درون کره $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ قرار دارد.
حل:



مختصات کروی:

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\varphi,\quad \rho=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲},\quad \theta=\arctan\frac{y}{x},\quad \varphi=\arccos\frac{z}{\rho},$$

$$\circ\le\theta\le ۲\pi,\qquad \circ\le\varphi\le\pi,\qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\rho^۲\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$x^۲+y^۲+z^۲=a^۲ \implies \circ\le\rho\le a$$

$$z=c\sqrt{x^۲+y^۲} \implies \rho\cos\varphi=c\sqrt{\rho^۲\sin^۲\varphi} \implies \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{۱}{c}\implies \circ\le\varphi\le\arctan\frac{۱}{c}$$

$$I=\iiint_R (x^۲+y^۲+z^۲)\,\mathrm{d}V=\int_\circ^{۲\pi}\mathrm{d}\theta\int_\circ^{\arctan\frac{۱}{c}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_\circ^a\rho^۴\,\mathrm{d}\rho=\frac{۲\pi a^۵}{۵}[-\cos\phi|_\circ^{\arctan\frac{۱}{c}}]$$

$$=\frac{۲\pi a^۵}{۵}\Big(۱-\cos\big(\arctan\frac{۱}{c}\big)\Big)=\frac{۲\pi a^۵}{۵}\Big(۱-\frac{c}{\sqrt{۱+c^۲}}\Big)$$

۱۸. (آدامز بخش ۶ – ۱۴ سوال ۳۳) نشان دهید معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}=۰$$

در دستگاه مختصات استوانه ای بصورت

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲}+\frac{۱}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial \theta^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}=۰$$

در می آید.

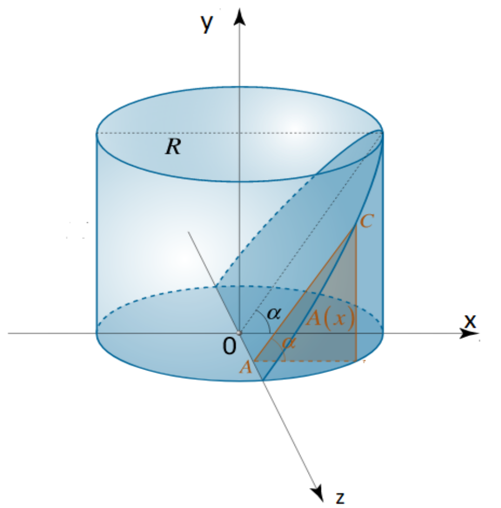
حل:
می‌دانیم **مختصات استوانه‌ای** به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad z=z.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
u_r &= u_x x_r+u_y y_r+u_z z_r=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta\\
u_{rr} &= (u_{xx}x_r+u_{xy}y_r)\cos\theta+(u_{yy}y_r+u_{yx}x_r)\sin\theta=u_{xx}\cos^۲\theta+۲u_{xy}\sin\theta\cos\theta+u_{yy}\sin^۲\theta\\
u_\theta &= u_x x_\theta+u_y y_\theta+u_z z_\theta=(-r\sin\theta)u_x+(r\cos\theta)u_y\\
u_{\theta\theta} &= (-r\cos\theta)u_x+(-r\sin\theta)(u_{xx}x_\theta+u_{xy}y_\theta)+(-r\sin\theta)u_y+(r\cos\theta)(u_{yy}y_\theta+u_{yx}x_\theta)\\
&= (-r\cos\theta)u_x+(-r\sin^۲\theta)u_{xx}+(۲r\sin\theta\cos\theta)u_{xy}+(-r\cos^۲\theta)u_{yy}+(-r\sin\theta)u_y\\
u_{zz} &= u_{zz}\\
&\implies \frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta}+u_{rr}+u_{zz}+\frac{۱}{r}u_r=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=۰
\end{aligned}$$

۱۹. (آدامز بخش ۷ – ۱۴ سوال ۹) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت آن قسمت از رویه استوانه ای $x^۲ + z^۲ = ۴$ که بالای ناحیه $۰ \le x \le ۲$ و $۰ \le y \le x$ قرار دارد را بیابید.
حل:



با توجه به معادله‌ی استوانه داریم؛ $z^۲ = ۴ - x^۲$. از دو طرف این معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم؛ $۲z\frac{\partial z}{\partial x} = -۲x$، در نتیجه، $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$. برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی محصور، با توجه به رابطه‌ی $\mathrm{d}S = \sqrt{۱ + (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲}\,\mathrm{d}A$ داریم:

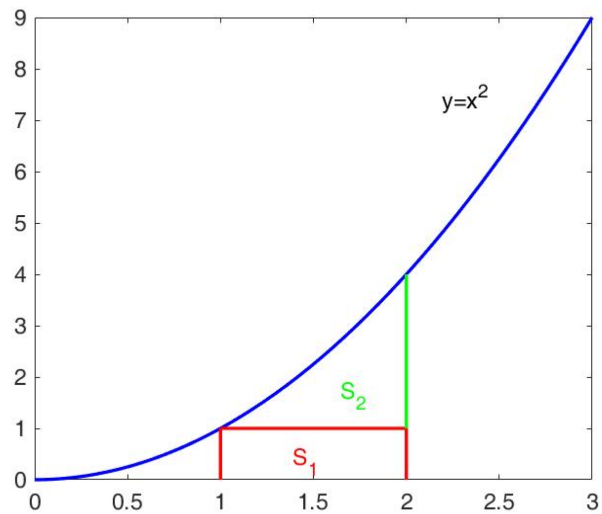
$$\mathrm{d}S = \sqrt{۱ + (\frac{x}{z})^۲}\,\mathrm{d}A = \sqrt{۱ + \frac{x^۲}{۴ - x^۲}}\,\mathrm{d}A = \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲}}\,\mathrm{d}A$$

$$S = \int_۰^۲ \int_۰^x \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_۰^۲ \frac{۲x}{\sqrt{۴ - x^۲}}\,\mathrm{d}x = -۲\sqrt{۴ - x^۲}\Big|_۰^۲ = ۴$$

۲۰. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

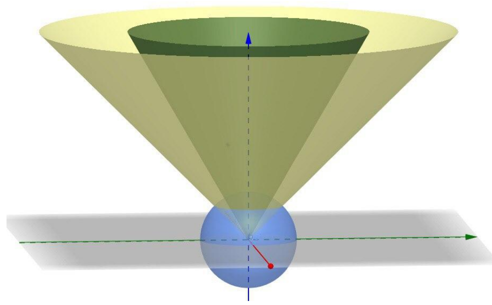
$$\int_{۰}^{۱}\int_{۱}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)dxdy+\int_{۱}^{۴}\int_{\sqrt{y}}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)dxdy$$

حل:



$$I=\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{x^{۲}}\frac{\sin(\pi x/۲)}{x^{۴}}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{۱}^{۲}\frac{\sin(\pi x/۲)}{x^{۴}}\left(\frac{y^{۲}}{۲}\Big|_{۰}^{x^{۲}}\right)\mathrm{d}x=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)\mathrm{d}x=\frac{-۱}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{۲}\right)\Big|_{۱}^{۲}=\frac{۱}{\pi}$$

۲۱. (میانترم ۹۷) حجم ناحیه محصور به مخروط های $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و $z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}$ و کره های $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را محاسبه کنید.



حل: با استفاده از دستگاه مختصات کروی می دانیم $\rho=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$. بنابراین، با توجه به کره های ذکر شده در صورت سوال داریم:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۱\Longrightarrow\ \ \rho=۱\ \ \&\ \ x^۲+y^۲+z^۲=۳\Longrightarrow\ \ \rho=\sqrt{۳}$$

$$\Longrightarrow$$

$$۱\leq\rho\leq\sqrt{۳}$$

بعلاوه، در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$z=\rho\cos\phi,\quad x=\rho\sin\phi\cos\theta,\quad y=\rho\sin\phi\sin\theta$$

بنابراین، با استفاده از معادله ذکر شده برای مخروط اول در سوال، داریم:

$$\rho\cos\phi=z=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{\rho^۲\sin^۲\phi\cos^۲\theta+\rho^۲\sin^۲\phi\sin^۲\theta}=\rho\sin\phi\Longrightarrow\cos\phi=\sin\phi\Longrightarrow\quad\phi=\frac{\pi}{۴}$$

به صورت مشابه با استفاده از مخروط دوم خواهیم داشت:

$$\rho\cos\phi=z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}=\sqrt{۳(\rho^۲\sin^۲\phi\cos^۲\theta+\rho^۲\sin^۲\phi\sin^۲\theta)}=\sqrt{۳}\rho\sin\phi\Longrightarrow\phi=\frac{\pi}{۶}\Longrightarrow\quad\frac{\pi}{۶}\leq\phi\leq\frac{\pi}{۴}$$

اکنون با توجه به روابط زیر به محاسبه حجم مورد نظر می پردازیم:

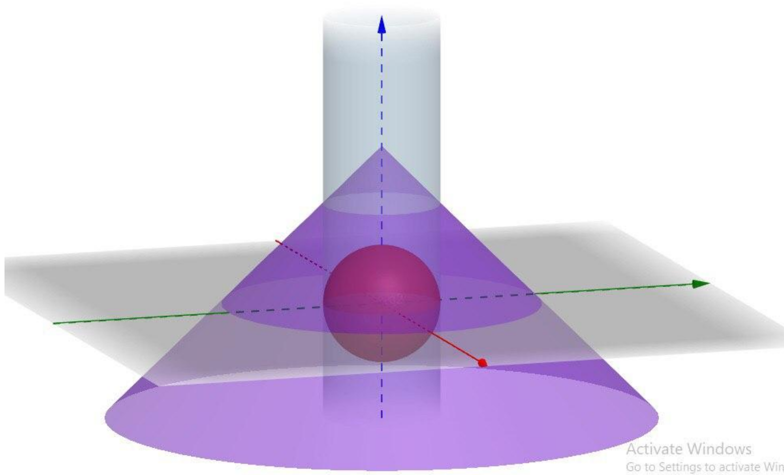
$$V=\iiint_D dV\ \ \&\ \ dV=\rho^۲\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi\ \ \Rightarrow$$

$$V=\iiint_D dV=\int_۰^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\int_۱^{\sqrt{۳}}\rho^۲\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\rho^۳}{۳}\Big|_۱^{\sqrt{۳}}\sin\phi\,d\phi\,d\theta=\frac{۱}{۳}(۳\sqrt{۳}-۱)\int_۰^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=-\frac{۱}{۳}(۳\sqrt{۳}-۱)\int_۰^{۲\pi}\cos\phi\,\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\,d\theta=-\frac{۲\pi}{۳}(۳\sqrt{۳}-۱)(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}).$$

۲۲. اگر D ناحیه خارج $x^2+y^2+z^2=1$ و داخل استوانه $x^2+y^2=1$ و زیر مخروط $z=(\sqrt{3}+1)-\sqrt{x^2+y^2}$ و بالای صفحه $z=0$ باشد، کران های $\iiint_V dV$ را در مختصات کروی بنویسید. (محاسبه انتگرال لازم نیست.)

حل: با استفاده از شکل، می دانیم برای محاسبه حجم محصور، ابتدا بایستی زاویه ای (ϕ_0) که در آن تقاطع مخروط و استوانه صورت گرفته را یافت. چرا که با استفاده از شکل، به راحتی میتوان دید در نقاط محصور با زاویه کمتر از زاویه مورد نظر (ϕ_0)، مخروط تعیین کننده مقدار شعاع (در مختصات کروی) برای محاسبه انتگرال مورد نظر بوده، در حالیکه در نقاط محصور با زاویه بیشتر از زاویه مورد نظر (ϕ_0)، استوانه تعیین کننده مقدار شعاع می باشد.



گام اول. محاسبه زاویه ϕ_0.

با استفاده از توضیحات بالا، ϕ_0 زاویه ای است که در آن برخورد استوانه و مخروط صورت گرفته. بنابراین، با استفاده از معادله های استوانه و مخروط ذکر شده در سوال خواهیم داشت:

$$x^2+y^2=1$$

$$z=(\sqrt{3}+1)-\sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow z=(\sqrt{3}+1)-\sqrt{1}=\sqrt{3}$$

بعلاوه، در مختصات کروی داریم:

$$z=\rho\cos\phi, \qquad x=\rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\phi\sin\theta$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\rho\cos\phi=z=\sqrt{3}$$

$$x^2+y^2=1 \Longrightarrow \rho\sin\phi=1$$

در نتیجه داریم:

$$\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6}$$

گام دوم. محاسبه شعاع.

با استفاده از دستگاه مختصات کروی می دانیم $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. بنابراین، با توجه به کره ذکر شده در سوال داریم:

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \Longrightarrow \rho = 1$$

همچنین، در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta$$

بنابراین، با استفاده از استوانه ذکر شده در سوال، داریم:

$$x^2+y^2 = 1 \Longrightarrow \rho^2\sin^2\phi = 1 \Longrightarrow \rho = \frac{1}{\sin\phi}$$

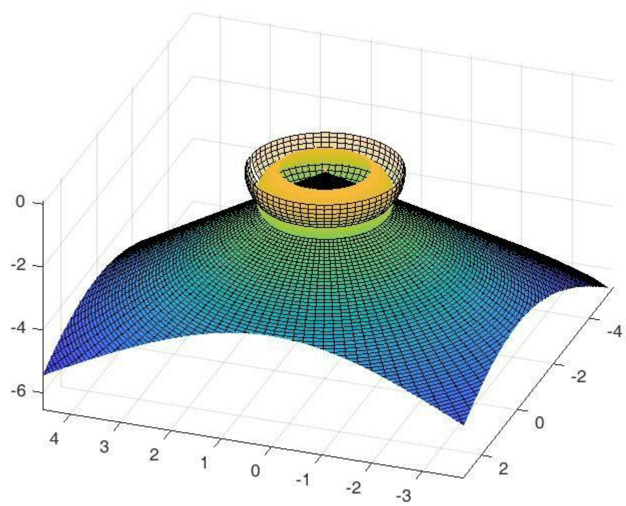
همچنین با استفاده از مخروط ذکر شده در صورت سوال و رابطه z در مختصات کروی، داریم:

$$\rho\cos\phi = z = (\sqrt{3}+1) - \sqrt{x^2+y^2} = (\sqrt{3}+1) - \rho\sin\phi \Longrightarrow \rho = \frac{\sqrt{3}+1}{\cos\phi+\sin\phi}$$

در نتیجه

$$V = \iiint_D dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_1^{\frac{\sqrt{3}+1}{\cos\phi+\sin\phi}} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\frac{1}{\sin\phi}} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

۲۳. فرض کنید V درون مخروط $\varphi = \frac{۲\pi}{۳}$ و رویه $\rho = ۱ - \cos\varphi$ و خارج کره $\rho = \frac{۳}{۲}$ باشد. مطلوبست محاسبه انتگرال زیر $\iiint_V \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}dV$.



حل: می دانیم در مختصات کروی داریم:

$$\rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}, \qquad dV = \rho^۲ \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \ \Rightarrow$$

$$\iiint_V \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}dV = \iiint_V \rho\rho^۲ \sin\phi d\rho d\theta d\phi = \iiint_V \rho^۳ \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

دقت می کنیم در صورت سوال ذکر شده است که حجم درون مخروط، درون رویه و خارج از کره مد نظر است. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$\frac{۲\pi}{۳} \leq \phi \leq \pi, \qquad \frac{۳}{۲} \leq \rho \leq ۱ - \cos\phi$$

بنابراین کافی است قرار دهیم:

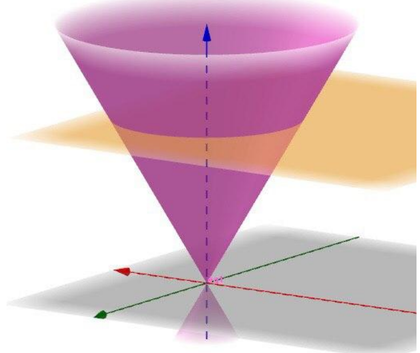
$$\circ \leq \theta \leq ۲\pi, \quad \frac{۲\pi}{۳} \leq \phi \leq \pi, \quad \frac{۳}{۲} \leq \rho \leq ۱ - \cos\phi \ \Rightarrow$$

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV = \iiint_V \rho^3 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \int_{\frac{3}{2}}^{1-\cos\phi} \rho^3 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\frac{3}{2}}^{1-\cos\phi} \sin\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} [(1-\cos\phi)^4 \sin\phi - (\frac{3}{2})^4 \sin\phi]\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [\frac{1}{5}(1-\cos\phi)^5 + (\frac{3}{2})^4 \cos\phi] \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\, d\theta = \frac{2\pi}{4} [\frac{1}{5}(1-\cos\phi)^5 + (\frac{3}{2})^4 \cos\phi] \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = 1{,}175\pi.$$

۲۴. مطلوبست محاسبه حجم محصور به صفحه $z = \cos\alpha$ و مخروط $x^2+y^2 = z^2\tan^2\alpha$ با استفاده از دستگاه مختصات کروی.



حل: با استفاده از دستگاه مختصات کروی می دانیم $z = \rho\cos\phi$. بنابراین، با استفاده از فرض سوال، خواهیم داشت:

$$\cos\alpha = z = \rho\cos\phi \;\Rightarrow\; \rho = \frac{\cos\alpha}{\cos\phi} \;\Rightarrow\; 0 \le \rho \le \frac{\cos\alpha}{\cos\phi}$$

همچنین، در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta$$

پس خواهیم داشت:

$$\rho^2\sin^2\phi = x^2+y^2 = z^2\tan^2\alpha = \rho^2\cos^2\phi\tan^2\alpha \Rightarrow \tan^2\phi = \tan^2\alpha \Rightarrow \tan\phi = \pm\tan\alpha \Rightarrow \phi \in \{\alpha, -\alpha, \pi-\alpha, \pi+\alpha\}$$

دقت می کنیم اگر $0 \le \alpha \le \pi$ آنگاه $\phi = \alpha$ یا $\phi = \pi - \alpha$.

همچنین، اگر $\pi \le \alpha \le 2\pi$ آنگاه $\phi = 2\pi - \alpha$ یا $\phi = \alpha - \pi$.

بنابراین، خواهیم داشت:

$$V = \iiint_D dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{\frac{\cos\alpha}{\cos\phi}} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\frac{\cos\alpha}{\cos\phi}} \sin\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\phi}\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= \frac{\cos^3\alpha}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}d\phi\, d\theta = \frac{\cos^3\alpha}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\frac{1}{\cos^2\phi}d\phi\, d\theta = \frac{\cos^3\alpha}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\tan\phi(1+\tan^2\phi)d\phi\, d\theta$$
$$= \frac{\cos^3\alpha}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\tan^2\phi\,\Big|_0^{\alpha}\, d\theta = \frac{\cos^3\alpha}{6}\tan^2\alpha\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi\frac{\cos^3\alpha}{6}\tan^2\alpha = \frac{\pi}{3}\cos^3\alpha\,\tan^2\alpha.$$

اگر سایر مقادیر ممکن را برای کران بالای ϕ در نظر بگیریم، استدلال‌های مشابهی خواهیم داشت و دقیقاً به همین مقدار می‌رسیم.