۱. (آدامز بخش ۴ − ۱۵ سوال ۱۰) فرض کنید $F = (axy + z)\vec{i} + x^{۲}\vec{j} + (bx + ۲z)\vec{k}$ میدان نیروی پایستار باشد.
الف) a, b و پتانسیلی برای F بیابید.
ب) کار انجام شده توسط میدان نیرو را بر خم C که فصل مشترک رویه های $۲x + y + z = ۳$ و $۹x^{۲} + ۹y^{۲} + ۲z^{۲} = ۱۸$ است و نقطه $(۱, ۱, ۰)$ را به $(۰, ۰, ۳)$ متصل می کند و در یک هشتم اول قرار دارد ، محاسبه کنید.

حل: الف) میدان F پایستار است پس کرل آن صفر است.

$$F = (axy + z)\vec{i} + x^{۲}\vec{j} + (bx + ۲z)\vec{k}$$

$$P(x, y, z) = axy + z$$

$$Q(x, y, z) = x^{۲}$$

$$R(x, y, z) = bx + ۲z$$

$$curl\left(\vec{F}\right) = \vec{o} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow ax = ۲x \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \Longrightarrow ۱ = b \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \Longrightarrow ۰ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow a = ۲\ , b = ۱$$

فرض کنیم φ تابع پتانسیل باشد، داریم:

$$F = \nabla\varphi \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R \end{cases}$$

$$\varphi = \int (۲xy + z)dx \Longrightarrow \varphi = x^{۲}y + xz + g(y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \Longrightarrow x^{۲} + \frac{\partial g}{\partial y} = x^{۲} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow g(y, z) = h(z)$$

$$\varphi = x^{۲}y + xz + h(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R \Longrightarrow x + h'(z) = x + ۲z \Longrightarrow h'(z) = ۲z \Longrightarrow h(z) = z^{۲} + c$$

$$\varphi(x, y, z) = x^{۲}y + xz + z^{۲} + c$$

ب) کار میدان پایستار مستقل از مسیر حرکت است و فقط به نقاط ابتدا و انتهای خم بستگی دارد.

$$\int_C F \cdot dr = \varphi(\text{انتها}) - \varphi(\text{ابتدا}) = \varphi(۰, ۰, ۳) - \varphi(۱, ۱, ۰) = ۹ - ۱ = ۸$$

۲. (آدامز بخش ۴ – ۱۵ سوال ۱۲) کار انجام شده به وسیله میدان نیروی

$$F = \left(y^2 \cos x + z^3\right) \vec{i} + (2y \sin x - 4)\, \vec{j} + \left(3xz^2 + 2\right) \vec{k}$$

در حرکت دادن ذره ای در امتداد خم $x = \sin^{-1} t, y = 1 - 2t, z = 3t - 1, (0 \leq t \leq 1)$ را بیابید.

حل: ابتدا کرل میدان F را محاسبه می‌کنیم.

$$F = \left(y^2 \cos x \ + z^3\right) \vec{i} + (2y \sin x \ - 4)\, \vec{j} + \left(3xz^2 + 2\right) \vec{k}$$

$$P\,(x,y,z) = y^2 \cos x \ + z^3$$

$$Q\,(x,y,z) = 2y \sin x \ - 4$$

$$R\,(x,y,z) = 3xz^2 + 2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 3z^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

پس $curl\left(\vec{F}\right) = \vec{o}$ درنتیجه میدان F پایستار است. فرض کنیم φ تابع پتانسیل باشد، داریم:

$$F = \nabla\varphi \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R \end{cases}$$

$$\varphi = \int \left(y^2 \cos x \ + z^3\right) dx \Longrightarrow \varphi = y^2 sinx + xz^3 + g\,(y,z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \Longrightarrow 2y\sin x \ + \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \sin x \ - 4 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = -4 \Longrightarrow g\,(y,z) = -4y + h\,(z)$$

$$\varphi = y^2 \sin x \ + xz^3 - 4y + h\,(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R \Longrightarrow 3xz^2 + h'(z) = 3xz^2 + 2 \Longrightarrow h'(z) = 2 \Longrightarrow h\,(z) = 2z + c$$

$$\varphi(x,y,z) = y^2 \sin x \ + xz^3 - 4y + 2z + c$$

$$x\,(0) = 0\ ,\ y\,(0) = 1\ , z\,(0) = -1$$

$$x\,(1) = \frac{\pi}{2}\ , y\,(1) = -1\ , z\,(1) = 2$$

$$\int_C F \cdot dr = \varphi(\text{انتها}) - \varphi(\text{ابتدا}) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}, -1, 2\right) - \varphi\,(0, 1, -1) = 1 + 4\pi + 4 + 4 - 0 - 0 + 4 + 2 = 15 + 4\pi$$

۳. (آدامز بخش ۵ – ۱۵ سوال ۹) مساحت آن قسمت از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ را که درون استوانه $x^2 + y^2 = 2ay$ قرار دارد بیابید.

حل: ابتدا عنصر سطح را بدست می‌آوریم.

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$dS = \frac{|\overrightarrow{\nabla g}|}{|g_z|}dxdy = \frac{|(2x, 2y, -2z)|}{|-2z|}dxdy = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{|-2z|}dxdy = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + x^2 + y^2}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

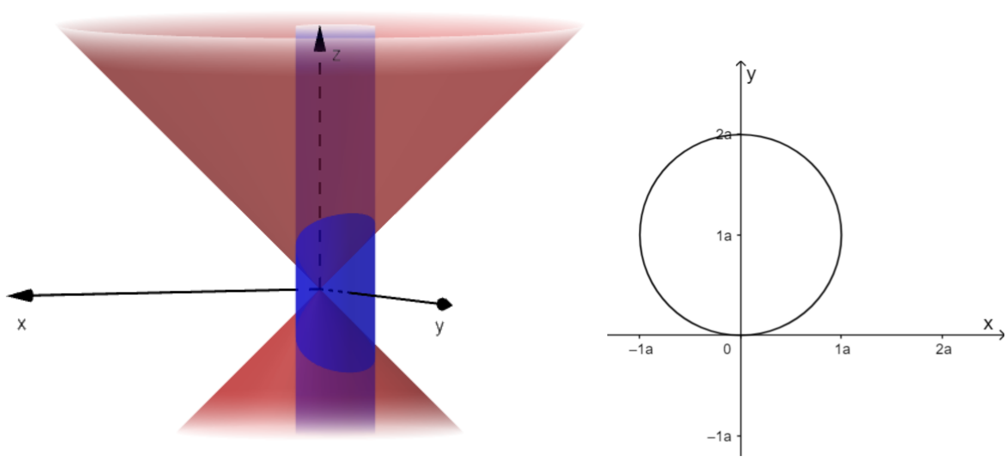
تصویر رویه مورد نظر روی صفحه XoY ناحیه D است که این ناحیه همان قاعده استوانه است. لذا مطابق شکل زیر برای محاسبه نیمه بالایی مخروط داریم:

$$x^2 + y^2 \leq 2ay \Rightarrow r^2 \leq 2ar\sin\theta \Rightarrow 0 \leq r \leq 2a\sin\theta$$

$$S = \iint\limits_D \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_0^\pi \int_0^{2a\sin\theta} rdrd\theta = \sqrt{2}\int_0^\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2a\sin\theta} d\theta = \sqrt{2}\int_0^\pi \frac{4a^2\sin^2\theta}{2}d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}a^2\int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta = 2\sqrt{2}a^2\int_0^\pi \frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta = \sqrt{2}a^2\left(\theta - \frac{\sin2\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi = \sqrt{2}\pi a^2$$

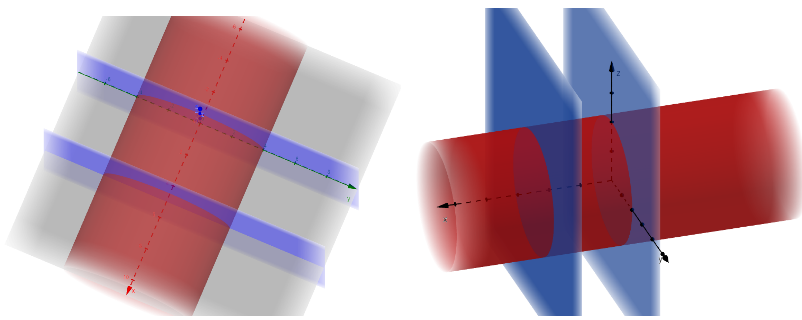
پس مساحت کل برابر است با: $2\sqrt{2}\pi a^2$



شکل ۱:

۴. (آدامز بخش تمرینات دوره ای فصل ۱۵ سوال ۱۲) شار گذرنده از میدان نیروی $F = (3xz^2, -x, -y)$ در عبور از S، که قسمتی از استوانه $y^2 + z^2 = 16$ است که در یک هشتم اول و بین صفحات $x = 0$ و $x = 5$ قرار دارد را در جهتی که از محور x دور می شود، محاسبه کنید .

حل:



شکل ۲:

$$F = \left(3xz^2, -x, -y\right)$$

$$g\left(x, y, z\right) = y^2 + z^2 - 16 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\nabla g}}{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}$$

$$dS = \frac{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}{|g_z|}dxdy$$

$$\vec{n}dS = \frac{\overrightarrow{\nabla g}}{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}\frac{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}{|g_z|}dxdy = \frac{\overrightarrow{\nabla g}}{|g_z|}dxdy$$

$$\vec{n}dS = \frac{(0, 2y, 2z)}{|2z|}dxdy$$

با توجه به شکل سمت چپ، ناحیه D یک هشتم استوانه روی صفحه xoy یک مستطیل است که $0 \le x \le 5, 0 \le y \le 4$.

$$\iint_S F \cdot \vec{n}dS = \iint_D \left(3xz^2, -x, -y\right) \cdot \frac{(0, 2y, 2z)}{2z}dxdy = \iint_D \left(\frac{-xy}{z} - y\right)dxdy = \int_0^5 \int_0^4 \left(\frac{-xy}{\sqrt{16 - y^2}} - y\right)dydx$$

$$u = 16 - y^2 \Longrightarrow du = -2ydy \Longrightarrow \int \frac{-xydy}{\sqrt{16 - y^2}} = \int \frac{xdu}{2\sqrt{u}} = x\sqrt{u} = x\sqrt{16 - y^2}$$

$$\int_0^5 \int_0^4 \left(\frac{-xy}{\sqrt{16 - y^2}} - y\right)dydx = \int_0^5 x\sqrt{16 - y^2} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 dx = \int_0^5 (-8 - 4x)dx = -8x - 2x^2\big|_0^5 = -40 - 50 = -90$$

۵. (پایانترم ۹۸ – ۹۷) فرض کنید S رویه پارامتری

$$r\left(u,v\right)=\left(e^{u}\cos v,e^{u}\sin v,u\right),\qquad 0\leq u\leq 1, 0\leq v\leq \pi.$$

باشد. انتگرال $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا عنصر سطح را به دست می‌آوریم.

$$r\left(u,v\right)=\left(e^{u}\cos v\ ,e^{u}\sin v\ ,u\right)$$

$$dS=\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|dudv$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}=\left(e^{u}\cos v\ ,e^{u}\sin v\ ,1\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}=\left(-e^{u}\sin v\ ,e^{u}\cos v\ ,0\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ e^{u}\cos v&e^{u}\sin v&1\\ -e^{u}\sin v&e^{u}\cos v&0\end{vmatrix}=\left(-e^{u}\cos v\ ,-e^{u}\sin v\ ,e^{2u}\right)$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|=\sqrt{e^{2u}\cos^{2}v\ +e^{2u}\sin^{2}v\ +e^{4u}}=\sqrt{e^{2u}+e^{4u}}=e^{u}\sqrt{1+e^{2u}}$$

$$\sqrt{1+x^{2}+y^{2}}=\sqrt{1+e^{2u}\cos^{2}v\ +e^{2u}\sin^{2}v\ }=\sqrt{1+e^{2u}}$$

$$\iint\limits_{S}\sqrt{1+x^{2}+y^{2}}dS=\iint\limits_{D}e^{u}\sqrt{1+e^{2u}}\sqrt{1+e^{2u}}dudv=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1}e^{u}\left(1+e^{2u}\right)dudv$$

$$=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1}\left(e^{u}+e^{3u}\right)dudv=\int_{0}^{\pi}\left(e^{u}+\frac{1}{3}e^{3u}\right)\Big|_{0}^{1}dv=\pi\left(e+\frac{1}{3}e^{3}-\frac{4}{3}\right)$$

۶. (آدامز بخش ۵ − ۱۵ سوال ۱۴) مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_S x\,dS$ که در آن S آن قسمت از مخروط $z=\sqrt{۲(x^۲+y^۲)}$ است که زیر صفحه $z=۱+y$ قرار دارد.

حل:

$$\begin{cases} z=۱+y \\ z=\sqrt{۲(x^۲+y^۲)} \end{cases} \longrightarrow ۱+y=\sqrt{۲(x^۲+y^۲)} \longrightarrow (۱+y)^۲=۲x^۲+۲y^۲$$

$$\longrightarrow x^۲+\frac{(y-۱)^۲}{۲}=۱ \quad \text{یک بیضی به مرکز } (۰,۱)$$

در اصل این بیضی در صفحه‌ی $z=۱+y$ قرار دارد، پس برای این‌که تغییرات سطح مابین صفحه‌ی $z=۱+y$ و $z=\sqrt{۲(x^۲+y^۲)}$ را بتوانیم محاسبه کنیم کافی است تغییرات x و y را مابین دوصفحه‌ی xy و صفحه‌ی $z=۱+y$ بدانیم. اکنون ds را برای مخروط به دست می‌آوریم

$$ds=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^۲+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^۲+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^۲}dxdy=\sqrt{۱+\frac{۴x^۲+۴y^۲}{۲x^۲+۲y^۲}}dxdy=\sqrt{۳}dxdy$$

$$\iint_S x\;dS=\sqrt{۳}\int_{۱-\sqrt{۲}}^{۱+\sqrt{۲}}\int_{-\sqrt{۱-\frac{(y-۱)^۲}{۲}}}^{\sqrt{۱-\frac{(y-۱)^۲}{۲}}} xdxdy=۰$$

۷. (آدامز بخش ۳ – ۱۶ مثال ۳) فرض کنید C خم بسته ساده پادساعتگرد در صفحه xy باشد که ناحیه ای مانند R را احاطه کرده است و از مبدا نمی گذرد. نشان دهید

$$\oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \begin{cases} 0 & \text{اگر مبدا بیرون } C \text{ باشد} \\ 2\pi & \text{اگر مبدا درون } C \text{ باشد} \end{cases}$$

حل:

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

ابتدا فرض می‌کنیم که مبدأ بیرون C است؛ در این صورت P و Q روی R پیوسته هستند و لذا بنابر قضیه‌ی گرین، انتگرال داده شده برابر است با:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R \left(\underbrace{\frac{x^2+y^2-2x^2}{x^2+y^2} - \frac{-x^2-y^2+2y^2}{x^2+y^2}}_{\frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{x^2+y^2}=0}\right) dxdy = 0$$

حال فرض می‌کنیم که مبدأ داخل C است. اگر بخواهیم از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم باید ناحیه‌ای که در آن مبدأ وجود دارد را جدا کنیم. پس داریم

$$\int_C F.dr = \int_{C_1} F.dr - \int_{C_2} F.dr + \int_{C_2} F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy + \int_{C_2} F.dr$$

که D مساحت بین دو منحنی C_1 و C_2 است و انتگرال دوگانه بالا، روی D برابر با صفر است.

$$x = acost, y = asint \Longrightarrow dr = dx\vec{i} + dy\vec{j} = (dx, dy) = (-a\sin t, a\cos t)dt$$

بنابراین

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{-a\sin t}{a^2}, \frac{a\cos t}{a^2}\right) = \frac{1}{a}(-\sin t, \cos t)$$

$$\int_{C_2} F.dr = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \boxed{2\pi}$$

۸. (پایانترم ۹۷ – ۹۶) اگر $F = (y + z\cos(xz), x, x\cos(xz))$ باشد، مقدار انتگرال $\int_C F.\,dr$ را محاسبه کنید که در آن C خم پارامتری زیر است:

$$\gamma(t) = \left(e^{\cos\left(\pi t^{۲}\right)}, e^{\cos(\pi t)+\sin(\pi t)}, \cos(\pi t)\right), \quad ۰ \le t \le ۱$$

حل:

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_۳}{\partial y} - \frac{\partial F_۲}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_۱}{\partial z} - \frac{\partial F_۳}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$= (۰ - ۰)\hat{i} + (\cos xz - xz\sin xz - \cos xz + xz\sin xz)\hat{j} + (۱ - ۱)\hat{k} = ۰$$

پس میدان F پایستار است و داریم:

$$\int_C F.dr = \int \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$$

در اصل تابع f تابع پتانسیل F است. حال f را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z\cos xz \Rightarrow f(x,y,z) = xy + \sin xz + g(y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow x + \frac{\partial g}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ۰$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\cos xz \Rightarrow x\cos xz + \frac{\partial g}{\partial z} = x\cos xz \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = ۰$$

تابع پتانسیل F به صورت بالا در آمد.

$$f(x,y,z) = xy + \sin xz$$

$$\gamma(۱) = (e^{-۱}, e^{-۱}, -۱) \qquad \gamma(۰) = (e, e, ۱)$$

$$\int_C F.dr = \int_{t=۰}^{t=۱} \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = f(\gamma(۱)) - f(\gamma(۰))$$
$$= e^{\cos\pi}.e^{\cos\pi} + \sin(-۱.e^{\cos\pi}) - (e^{۲} + \sin e)$$
$$= \boxed{e^{-۲} - \sin e^{-۱} - e^{۲} - \sin e}$$

۹. (آدامز بخش ۳ – ۱۶ سوال ۵) با استفاده از انتگرال خم، مساحت محصور به خم زیر را بیابید.

$$r = a\cos^{۳} t\ \vec{i} + b\sin^{۳} t\ \vec{j}, ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

حل: اگر D ناحیه‌ی محصورشده‌ای به‌وسیله‌ی خم C باشد و شرایط قضیه‌ی گرین برقرار باشد، آن‌گاه داریم:

$$\int_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

حال F را به صورت زیر در نظر گرفته تا از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم:

$$F = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

$$\int_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dxdy = ۲\iint_D dxdy$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \iint_D dxdy &= \frac{۱}{۲}\int_C F.dr = \frac{۱}{۲}\oint_C (-y, x)\cdot(dx, dy) = \frac{۱}{۲}\oint_C -ydx + xdy \\
&= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi} \big(-(b\sin^{۳} t)(-۳a\cos^{۲} t)(\sin t) + (a\cos^{۳} t)(۳b\sin^{۲} t)(\cos t)\big) dt \\
&= \frac{۳ab}{۲}\int_{۰}^{۲\pi} \sin^{۲} t\cos^{۲} t dt = \frac{۳ab}{۸}\int_{۰}^{۲\pi} \sin^{۲} ۲t dt \\
&= \frac{۳ab}{۸}\int_{۰}^{۲\pi} \left(\frac{۱ - \cos ۴t}{۲}\right) dt \\
&= \frac{۳ab}{۸}\left(\frac{t}{۲}\Big|_{۰}^{۲\pi} \right) = \boxed{\frac{۳ab\pi}{۸}}
\end{aligned}$$

هم‌چنین دقت شود که انتگرال‌های $\sin kt$ و $\cos kt$ از ۰ تا ۲π، که k صحیح است، صفر هستند.

۱۰. (پایانترم ۹۸ – ۹۷)

الف) فرض کنید C خم $r(t) = (1-t)e^t\vec{i} + t\vec{j} + 2t\vec{k}$ باشد که در آن $0 \leq t \leq 1$. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_C (1+x)\,e^{x+y}dx + (xe^{x+y} + 2y)dy - 2zdz$$

ب) مطلوبست محاسبه $\oint_C x^2ydx - xy^2dy$ که در آن منحنی C متشکل از نیم دایره بالایی $x^2 + y^2 = 9$ و پاره خط واصل بین $(-3,0)$ و $(3,0)$ است که در جهت مثلثاتی پیموده می شود.

حل الف:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} - (0-0)\vec{j} + \Big(e^{x+y} + xe^{x+y} - (1+x)e^{x+y}\Big)\vec{k} = 0$$

پس F پایستار است. حال تابع پتانسیل F که f باشد را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} = (1+x)e^{x+y} \Longrightarrow f(x,y,z) &= \int (1+x)e^{x+y}\mathrm{d}x + g(y,z) \\ &= e^y \int (1+x)e^x\mathrm{d}x + g(y,z) = e^y\Big(e^x(1+x) - e^x\Big) + g(y,z) \\ &= xe^{x+y} + g(y,z)\end{aligned}$$

که در این‌جا از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء، به صورت زیر استفاده کرده‌ایم:

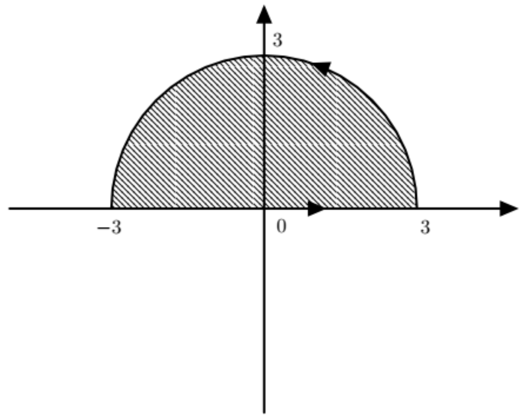
$$\begin{cases} u = 1 + x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{x+y} + 2y \Rightarrow xe^{x+y} + \frac{\partial g}{\partial y} = xe^{x+y} + 2y \Rightarrow g(y,z) = y^2 + h(z) \\ &\frac{\partial f}{\partial z} = -2z \Rightarrow h'(z) = -2z \Rightarrow h(z) = -z^2 \\ &f(x,y,z) = xe^{x+y} + y^2 - z^2 + c\end{aligned}$$

$$\int_C F.dr = \int \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t).dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f((0,1,2)) - f((1,0,0)) = 1 - 4 - e = -3 - e$$

حل ب: شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است، لذا داریم:



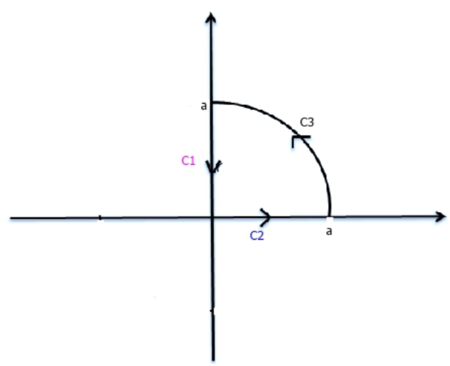
شکل ۳:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y}\right) dxdy \qquad dxdy = rdrd\theta$$
$$= \iint (-y^۲ - x^۲) dxdy = \int_۰^\pi \int_۰^۳ -r^۲ rdrd\theta$$
$$= -\int_۰^\pi \int_۰^۳ r^۳ drd\theta = \frac{-r^۴}{۴}\Big|_۰^۳ \times \theta|_۰^\pi = \boxed{\frac{-۸۱\pi}{۴}}$$

۱۱. (پایانترم ۹۶-۹۵)میدان برداری $F = (x - y^۳, y^۳ + x^۳)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^۲+y^۲ \leq a^۲$ و $x \geq ۰, y \geq ۰$ و C مرز ناحیه D باشد. انتگرال $\int_C F.dr$ را با استفاده از
الف)قضیه گرین
ب) بطور مستقیم محاسبه کنید.
حل (الف) طبق قضیه گرین داریم

$$\oint_C F.dr = \iint \left(\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y} \right) dxdy = \iint (۳x^۲ + ۳y^۲) = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \int_۰^a ۳r^۳ drd\theta = \frac{۳\pi}{۸} a^۴.$$

(ب) مسیرهای زیر را جداگانه بررسی میکنیم



$$C_۱ : r(t) = (۰, a - t) \qquad ۰ \leq t \leq a,$$

$$\int_{C_۱} F.dr = \int F(r(t)).r(t)'dt = \int_۰^a \left(-(a-t)^۳, (a-t)^۳\right).(۰, -۱)dt = \int_۰^a -(a-t)^۳ dt = -\frac{a^۴}{۴}.$$

$$C_۲ : r(t) = (t, ۰) \qquad ۰ \leq t \leq a,$$

$$\int_{C_۲} F.dr = \int F(r(t)).r(t)'dt = \int_۰^a \left(t, t^۳\right).(۱, ۰)dt = \int_۰^a tdt = \frac{a^۲}{۲}.$$

$$C_۳ : r(t) = (a\cos t, a\sin t) \qquad ۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲},$$

$$
\begin{aligned}
\int_{C_3} F.dr &= \int F(r(t)).r(t)'dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a\cos t - a^3\sin^3 t, a^3\sin^3 t + a^3\cos^3 t\right).(-a\sin t, a\cos t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a^2\sin t\cos t + a^4\sin^4 t + a^4\cos^4 t + a^4\sin^3 t\cos t\right) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -a^2\sin t\cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\left(\sin^4 t + \cos^4 t\right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\sin^3 t\cos t dt \\
&= -\frac{a^2}{2} + \frac{3\pi}{8}a^4 + \frac{a^4}{4}
\end{aligned}
$$

در نهایت

$$
\int_C F.dr = \int_{C_1} F.dr + \int_{C_2} F.dr + \int_{C_3} F.dr = \frac{3\pi}{8}a^4.
$$

$$
u = \sin t \to du = \cos t dt \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}.
$$

$$
u = \sin t \to du = \cos t dt \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t dt = \int_0^1 u^3 du = \frac{1}{4}.
$$

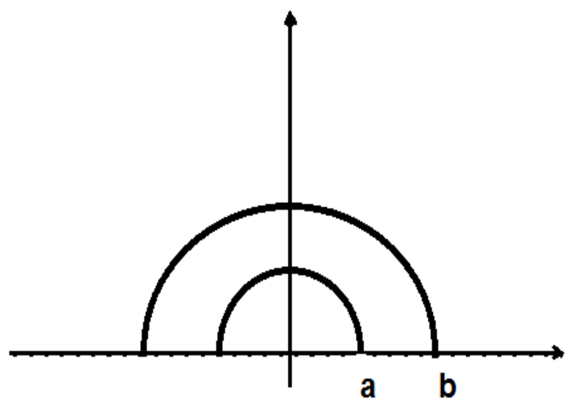
$$
\sin^2 t = \frac{1 - 2\cos 2t}{2},\ \cos^2 t = \frac{2\cos 2t - 1}{2},
$$

$$
\sin^4 t = (\sin^2 t)^2 = (\frac{1 - \cos 2t}{2})^2 = \frac{1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t}{4} = \frac{1 - 2\cos 2t + (\frac{1+\cos 4t}{2})}{4} = \frac{3 - 4\cos 2t + \cos 4t}{8}.
$$

$$
\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = (\frac{1 + \cos 2t}{2})^2 = \frac{1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t}{4} = \frac{1 + 2\cos 2t + (\frac{1+\cos 4t}{2})}{4} = \frac{3 + 4\cos 2t + \cos 4t}{8}.
$$

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t + \cos^4 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 + \cos 4t}{4} dt = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4tdt = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{16}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{3}{8}\pi.
$$

۱۲. در صورتی که C مرز ناحیه بین دو نیم دایره به شعاع های a و b و آن بخشی روی محور x که این دو مرز را به هم متصل کند و مطابق شکل زیر باشد. حاصل انتگرال زیر را بدست آورید



$$\oint_C (۴x+\sin(x))dx + (e^{\cos(y)} + ۳x^۲)dy.$$

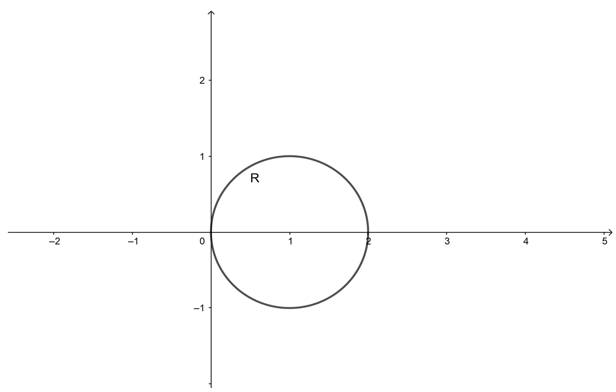
حل: چون خم C قطعه قطعه هموار، ناحیه داخل آن بسته و میدان برداری $F = (۴x+\sin(x), +e^{\cos(y)} + ۳x^۲)$ هموار است، لذا بنابه قضیه گرین داریم

$$\oint_C F.dr = \iint \left(\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R (۶x)\, dA = \int_۰^\pi \int_a^b ۶r^۲ \cos\theta dr d\theta = ۶\int_۰^\pi \cos\theta d\theta \int_a^b r^۲ dr = ۰$$

۱۳. (آدامز بخش ۴ – ۱۶ سوالات ۴,۸) با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری

الف) $F=(x^3, 3yz^2, 3y^2z+x^2)$ را در خروج از کره S به معادله $x^2+y^2+z^2=a^2$ که در آن $a>0$، محاسبه کنید.

ب) $F=(x^2, y^2, z^2)$ را در خروج از مرز ناحیه محصور به استوانه $x^2+y^2\leq 2y$ و $0\leq z\leq 4$ محاسبه کنید.



حل (الف) داریم $divF=3x^2+3z^2+3y^2$، فرض کنیم D گویی به مرکز مبدا و شعاع a باشد، سپس بنابه قضیه دیورژانس شار میدان برداری را محاسبه میکنیم:

$$\oiint_S F.\hat{N}dS=\iiint_D divFdV=3\iiint_D(x^2+y^2+z^2)dV=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\Phi\int_0^a\rho^4d\rho=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

(ب) داریم $divF=2x+2y+2z$، فرض کنیم D ناحیه داخل استوانه باشد، حال با قضیه دیورژانس شار میدان برداری را محاسبه میکنیم

$$\oiint_S F.\hat{N}dS=\iiint_D divFdV=2\iiint_D(x+y+z)dV=2\iiint_D xdV+2\iiint_D ydV+2\iiint_D zdV,$$

چون ناحیه D نسبت به x متقارن است و x تابعی فرد است پس $\iiint_D xdV=0$ و

$$\begin{aligned}\iiint_D ydV &= \int_0^4\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta drd\theta dz=\int_0^4\int_0^{\pi}\sin\theta\frac{(2\sin\theta)^3}{3}d\theta dz\\ &= \frac{8}{3}\int_0^4dz\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta=\frac{8}{3}\int_0^4dz\int_0^{\pi}\frac{3-4\cos 2t+\cos 4t}{8}d\theta=4\pi.\end{aligned}$$

و از طرف دیگر

$$\iiint_D zdV=\int_0^4 zdz\iint_R dS=(\frac{z^2}{2})|_0^4\,\pi=8\pi,$$

که R دایره $x^2+(y-1)^2=1$ هست. در نتیجه

$$\oiint_S F.\hat{N}dS=24\pi.$$

۱۴. (آدامز بخش ۴ – ۱۶ سوال۱۳) فرض کنیم D حجم محصور به $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴a^۲$ و $x^۲ + y^۲ \geq a^۲$ باشد. مرز D، یعنی S، از یک قسمت استوانه ای به نام $S_۱$ و یک قسمت کروی به نام $S_۲$ تشکیل شده است. شار $F = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$ را در خروج از D و عبور از رویه های زیر محاسبه کنید.

الف) کل رویه S ب) رویه $S_۱$ ج) رویه $S_۲$

حل (الف): $divF = ۱+۱+۱ = ۳$. شرایط قضیه دیورژانس برقرار است. لذا داریم:

$$\begin{aligned}\oiint_S F.NdS &= \iiint_D divFdV = ۳\int_۰^{۲\pi}\int_a^{۲a}\int_{-\sqrt{۴a^۲-r^۲}}^{\sqrt{۴a^۲-r^۲}} rdzdrd\theta \\ &= ۶\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_a^{۲a} r\sqrt{۴a^۲ - r^۲}dr = ۱۲\sqrt{۳}\pi a^۳.\end{aligned}$$

(ب) در ابتدا فصل مشترک $S_۱$ و $S_۲$ را پیدا می کنیم. در مختصات استوانه ای داریم

$$x^۲ + y^۲ = r^۲, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

لذا معادله استوانه $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴a^۲$ در مختصات استوانه ای به ترتیب به فرم $r = a$ و $r^۲ + z^۲ = ۴a^۲$ می شود. اگر $\alpha = (r, \theta, z)$ یک نقطه بر فصل مشترک $S_۱$ و $S_۲$ باشد آنگاه $\alpha = (a, \theta, \pm\sqrt{۳}a)$.
فرض کنیم

$$f(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z).$$

ناحیه $T = \{(\theta, z);\ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi,\ -\sqrt{۳}a \leq z \leq \sqrt{۳}a\} \subset \mathrm{R}^۲$ را در نظر گرفته، واضح است که

$$S_۱ = \{f(\theta, z);\ (\theta, z) \in T\}.$$

حال المان سطح $S_۱$ را حساب میکنیم.

$$f_\theta = (-a\sin\theta, a\cos\theta, ۰), \qquad f_z = (۰, ۰, ۱)$$

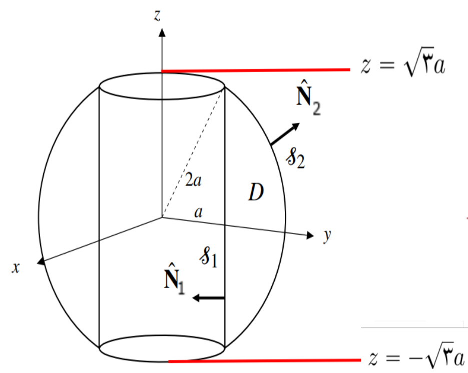
$$f_\theta \times f_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = a\cos\theta i + a\sin\theta j$$

$$|f_\theta \times f_z| = a,$$

$$dS = |f_\theta \times f_z| d\theta dz = ad\theta dz, \qquad N_۱ = -\frac{f_\theta \times f_z}{|f_\theta \times f_z|} = \frac{-۱}{a}(x, y, ۰).$$

حال داریم

$$\iint_{S_۱} F.N_۱dS = \iint_T \frac{-x^۲ - xyz - y^۲ + xyz}{a} ad\theta dz = -a^۲\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_{-\sqrt{۳}a}^{\sqrt{۳}a} dz = -۴\sqrt{۳}\pi a^۳.$$

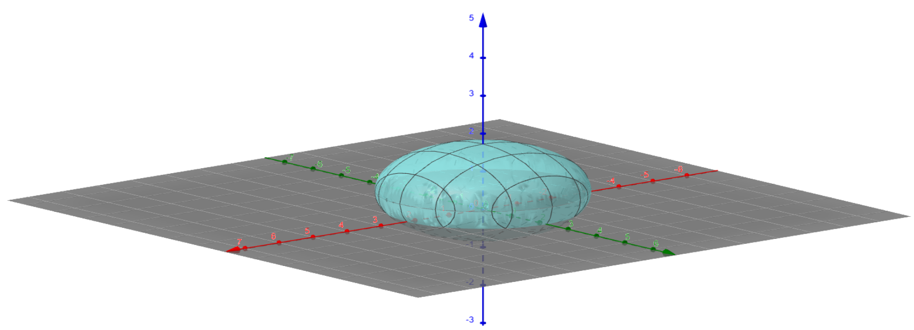


(ج) حال شار خروجی از بخش کروی یعنی S_2 به صورت زیر است

$$\oiint_{S_2} F.NdS = \oiint_{S} F.NdS - \oiint_{S_1} F.N_1dS = 12\sqrt{3}\pi a^3 + 4\sqrt{3}\pi a^3 = 16\sqrt{3}\pi a^3.$$

۱۵. (آدامز بخش ۵ – ۱۶ سوال ۴) انتگرال $\iint_S (curlF).N\ dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه $x^۲ + y^۲ + ۲(z-۱)^۲ = ۶$ است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F = \left(xz - y^۳ cosz, x^۳ e^z, xyze^{x^۲+y^۲+z^۲}\right)$$



حل: بیضیگون $D : x^۲+y^۲+۲(z-۱)^۲ = ۶$ را در نظر میگیریم. رویه S بخشی از بیضیگون D است که بالای صفحه $z = ۰$ قرار دارد. فرض کنیم C خم حاصل از فصل مشترک بیضیگون D و صفحه $z = ۰$ باشد. واضح است که خم C مرز رویه S هست.

$$z = ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲ = ۶ \Rightarrow C : \begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۴, \\ z = ۰. \end{cases}$$

واضح است که رویه S جهت دار است و خم C که یک دایره است هموار است. از طرفی میدان برداری F نیز به وضوح هموار است. لذا شرایط قضیه استوکس برقرار است و داریم:

$$\iint_S (curlF).N\ dS = \oint_C F.dr$$

از طرفی خم C مرز قرص T به مرکز مبدا و شعاع ۲ در صفحه $z = ۰$ نیز هست.

$$T : \begin{cases} x^۲ + y^۲ \leq ۴, \\ z = ۰. \end{cases}$$

که T سطحی جهت پذیر و ساده تر از S هست زیرا میدان برداری قائم آن N_T ثابت $k = (۰,۰,۱)$ است. حال با استفاده دوباره از قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_T (curlF).k\ dA$$

قرار دهید

$$F=\left(xz-y^{3}cosz,x^{3}e^{z},xyze^{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\right)=(P,Q,R)$$

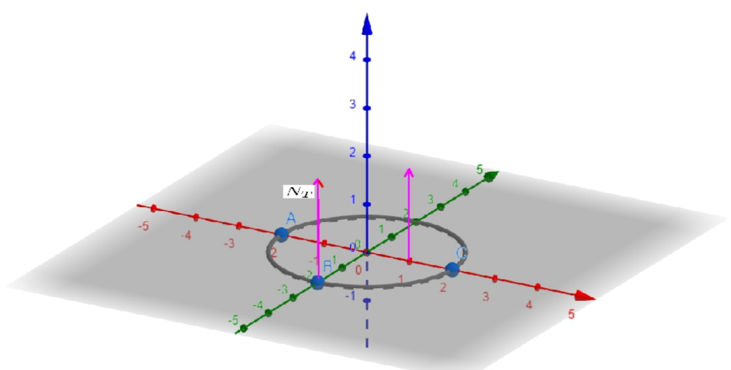
سپس

$$curlF=\left(h,g,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=(h,g,3x^{2}e^{z}+3y^{2}\cos z.)$$

بر سطح T داریم:

$$curlF.k=(3x^{2}e^{z})\big|_{z=0}+(3y^{2}\cos z)\big|_{z=0}=3(x^{2}+y^{2})$$

$$\oint_{C}F.dr=\iint_{T}3(x^{2}+y^{2})dA=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}3r^{2}rdrd\theta=24\pi.$$



۱۶. (پایانترم ۹۶ – ۹۵) فرض کنید $f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$ و S کره $\rho=1$ است.
اگر N بردار قائم یکه روبه بیرون بر S باشد. در اینصورت
الف) میدان برداری $F(x,y,z)$ را چنان بیابید که داشته باشیم $F.N=f(x,y,z)$.
ب) با استفاده از قضیه دیورژانس نشان دهید: $\int\int_S f\ dS=\frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6}a_i$
حل (الف) برای کره $x^2+y^2+z^2=1$ داریم:

$$N=(x,y,z)$$

اگر فرض کنیم

$$F=(a_1x^3+3a_4xy^2,a_2y^3+3a_5yz^2,a_3z^3+3a_6zx^2)$$

داریم

$$F\cdot N=f(x,y,z)$$

حل ب)

$$\int\int_S fdS\quad=\int\int_S F\cdot NdS=\int\int\int_S divFdV=\int\int\int_S(3(a_1+a_6)x^2+3(a_4+a_2)y^2+3(a_3+a_5)z^2)dV$$

با توجه به تقارون نسبت به x و y و z داریم:

$$\begin{aligned}\int\int\int_S x^2dV=\int\int\int_S y^2dV=\int\int\int_S z^2dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^2\cos(\varphi)\rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\theta\\ &= 2\pi(\int_0^1\rho^4d\rho)(\int_0^{\pi}\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi)\\ &= 2\pi\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4\pi}{15}\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\int\int_S fdS &= (3(a_1+a_6)\int\int\int_S x^2dV+3(a_4+a_2)\int\int\int_S y^2dV+3(a_3+a_5)\int\int\int_S z^2dV\\ &= \frac{4\pi}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\end{aligned}$$

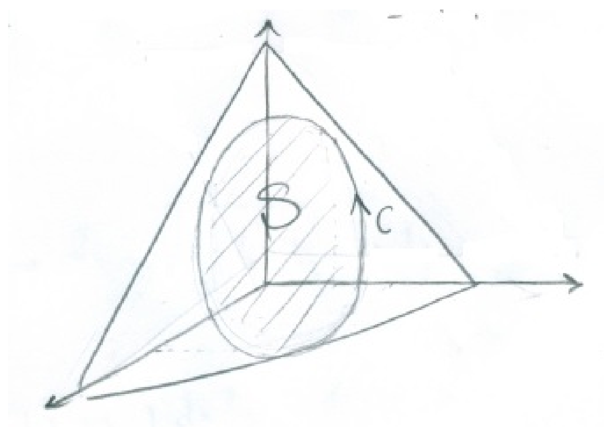
۱۷. (آدامز بخش ۵ – ۱۶ سوال ۸) فرض کنید $F = ye^x\vec{i} + \left(x^۲ + e^x\right)\vec{j} + z^۲e^z\vec{k}$. مطلوبست محاسبه $\oint_C F.dr$ که C خم

$$r(t) = (۱+\cos t)\,\vec{i} + (۱+\sin t)\,\vec{j} + (۱-\cos t-\sin t)\,\vec{k}, \quad ۰ \le t \le ۲\pi$$

است. راهنمایی: قضیه استوکس را بکار ببرید و توجه داشته باشید که Cبر صفحه معینی قرار دارد و تصویر آن بر صفحه xy یک دایره است.

حل: از اینکه $r(۰) = r(۲\pi)$، C یک منحنی بسته است، و همچنین از $x(t)+y(t)+z(t) = ۳$، نتیجه می‌شود که خم C روی صفحه $x(t)+y(t)+z(t) = ۳$ قرار دارد. با توجه به این‌که $۰ \le t \le ۲\pi$ است می‌توان دید که منحنی در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود.

D: تصویر S در صفحه xy تغییر متغیر: $x-۱ = u$ و $y-۱ = v$. $D^+ : u^۲+v^۲ \le ۱$



$$x(t)+y(t)+z(t) = ۳ \Rightarrow f(x,y,z) = x+y+z-۳ = ۰$$

$$ds = \sqrt{۱+z_x^۲+z_y^۲}dxdy = \sqrt{۳}dxdy \quad \text{و} \quad n = \frac{(۱,۱,۱)}{\sqrt{۳}}$$

$$curlF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ye^x & x^۲+e^x & z^۲e^z \end{vmatrix} = (۰,۰,۲x+e^x-e^x) = (۰,۰,۲x) \Rightarrow curlF\cdot n = \frac{۲x}{\sqrt{۳}}$$

$$\begin{aligned}\oint_C F\cdot dr = \int\int_S curlF\cdot nds &= \int\int_D \frac{۲x}{\sqrt{۳}}(\sqrt{۳}dxdy) \\ &= \int\int_D ۲xdxdy = \int\int_{D^+} ۲(u+۱)dudv \\ &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۲(r^۲\cos\theta + r)drd\theta = ۲\pi\end{aligned}$$

۱۸. (پایانترم ۹۸ – ۹۷)
الف) $\int\int_S (curlF).N\ dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه $x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۴ = ۱۷$ است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و $F = (x^۲ - y^۲, y^۲ - z^۲, z^۲ - x^۲)$.
ب) فرض کنید D ناحیه خارج استوانه $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و داخل کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴a^۲$ باشد و S مرز ناحیه D باشد.
مطلوبست $\int\int_S F.N\,dS$ که در آن

$$F = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$$

و N قائم یکه بر S و روبه خارج S است.
حل: الف) با دو بار استفاده از قضیه‌ی استوکس، داریم:

$$\int\int_S curlF \cdot NdS = \int_C F \cdot dr = \int\int_D curlF \cdot NdS$$

S رویه داده شده، C مرز S و D رویه $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ می‌باشند.
N روی رویه D برابر است با $N = (۰, ۰, ۱)$.

$$curlF = (۲z, ۲x, ۲y)$$

محاسبه انتگرال:

$$\int\int_{x^۲+y^۲\leq ۱} ۲ydxdy = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۲r^۲ \sin\theta drd\theta = ۰$$

ب) فرض کنید D ناحیه خارج استوانه $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و داخل کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴a^۲$ باشد و S مرز ناحیه D باشد.
مطلوبست $\int\int_S F \cdot NdS$ که در آن

$$F = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$$

و N قائم یکه بر S و روبه خارج S است.

$$divF = ۳$$

$$\begin{aligned}
\int\int_S F \cdot NdS = \int\int\int_D divFdV &= ۳\int\int\int_D dV \\
&= ۳\int_a^{۲a} r\int_۰^{۲\pi}\int_{-\sqrt{۴a^۲-r^۲}}^{\sqrt{۴a^۲-r^۲}} dzd\theta dr \\
&= -۴\pi(۴a^۲ - r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_a^{۲a} \\
&= ۴\pi(۳a^۲)^{\frac{۳}{۲}}
\end{aligned}$$

۱۹. (پایانترم ۹۷ – ۹۶) فرض کنید $F = \left(x^۲ + y + ۲ + z^۲, e^{x^۲} + y^۲, ۳ + x\right)$. اگر $a > ۰$ و S آن قسمت از رویه کروی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲az + ۳a^۲$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و اگر N قائم یکه رو به بالا بر S ، (روبه خارج کره شامل S) باشد، شار میدان برداری F را که از S در جهت N می گذرد حساب کنید.

حل: سطح S قسمتی از کره $x^۲ + y^۲ + (z - a)^۲ = ۴a^۲$ است که بالای صفحه xy قرار دارد. برای استفاده از قضیه دیورژانس سطح $S_۱$، قسمتی از صفحه $z = ۰$ که به کره محدود شده است، را اضافه می‌کنیم. از طرفی برای استفاده از قضیه دیورژانس قائم یکه باید رو به خارج سطح بسته‌ی مورد نظر باشد. بردار N روی S که طبق فرض این گونه است. بنابراین بردار $N_۱$ را روی سطح $S_۱$ رو به پایین می‌گیریم، در واقع داریم: $N_۱ = -k$ به علاوه ناحیه مشخص شده توسط $S_۱$ عبارت است از تمام نقاط صفحه ی xy در $\mathcal{R}^۲$ که $x^۲ + y^۲ \leq ۳a^۲$ (در واقع قرار می‌دهیم $z = ۰$ و از رابطه $x^۲ + y^۲ + (z - a)^۲ = ۴a^۲$ استفاده می‌کنیم.)

حال برای میدان برداری F روی ناحیه D (محدود شده به سطح $S \cup S_۱$) از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\int\int_S F \cdot N ds + \int\int_{S_۱} F \cdot N ds = \int\int\int_D div(F) dV$$

داریم:

$$F = \left(x^۲ + y + ۲ + z^۲, e^{x^۲} + y^۲, ۳ + x\right) = (F_۱, F_۲, F_۳) \Rightarrow div(F) = \frac{\partial F_۱}{\partial x} + \frac{\partial F_۲}{\partial y} + \frac{\partial F_۳}{\partial z} = ۲x + ۲y$$

$$\int\int\int_D div(F) dV = \int\int\int_D (۲x + ۲y) dV = ۲\int\int\int_D x dV + \int\int\int_D y dV = ۰$$

زیرا هر دو انتگرال هایی از توابع فرد روی دامنه متقارن هستند.

$$\begin{aligned} \int\int_S F \cdot N ds = -\int\int_{S_۱} F \cdot N ds &= -\int\int_{x^۲+y^۲\leq ۳a^۲} F \cdot (-k) ds \\ &= \int\int_{x^۲+y^۲\leq ۳a^۲} (۳ + x) dx dy \\ &= ۳\int\int_{x^۲+y^۲\leq ۳a^۲} dx dy + \int\int_{x^۲+y^۲\leq ۳a^۲} x dx dy = ۳(۳\pi a^۲) = ۹\pi a^۲ \end{aligned}$$

زیرا انتگرال اول سه برابر مساحت دایره $x^۲ + y^۲ = ۳a^۲$ و دومی انتگرال یک تابع فرد روی دامنه متقارن است.

۲۰. (آدامز بخش ۵ – ۱۶سوال ۵) با استفاده از قضیه استوکس نشان دهید

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \sqrt{3}\pi a^2$$

که در آن C خم فصل مشترک رویه های $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $x + y + z = 0$ با جهت دهی مناسب است.

حل: S را قسمتی از صفحه $x+y+z=0$ در نظر می‌گیریم که به منحنی فصل مشترک محدود شده است. با فرض اینکه معادله این رویه را g بنامیم می توان قائم یکه بر S را $\vec{n} = -\frac{\overrightarrow{\nabla g}}{|\overrightarrow{\nabla g}|} = -\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ در نظر گرفت. تصویر محل تلاقی در صفحه xy دایره $x^2 + y^2 + xy = a^2/2$ است.

$$dS = \frac{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}{|g_z|}dxdy = \sqrt{3}dxdy$$

$$F = (y,z,x) \Rightarrow Curl(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$$

$$\oint_C F.dr = \int\int_S curl(F).nds = \frac{3}{\sqrt{3}}\int\int_S ds = 3\int\int_{x^2+y^2+xy\leq a^2/2} dxdy$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v), y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1$$

با این تغییر متغیر محل تلاقی بیضی $\frac{v^2}{a^2/3} + \frac{u^2}{a^2} = 1$ است. بنابراین

$$\oint_C F\cdot dr = 3\int\int_{\frac{v^2}{a^2/3}+\frac{u^2}{a^2}\leq 1} dudv = 3\pi(\frac{a}{\sqrt{3}}a) = \sqrt{3}\pi a^2$$

نکته: مساحت بیضی به معادله $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ برابر πab است.