

آزمون فرض آماری - آمار و احتمال مهندسی -

مدرس: مشکانی فراهانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۴ دی ۱۳۹۹

آزمون فرض آماری

یک فرض آماری ادعایی در مورد یک یا چند جامعه مورد بررسی است که ممکن است درست یا نادرست باشد؛

به عبارت دیگر فرض آماری یک ادعا یا گزاره در مورد توزیع یک جامعه یا توزیع یک متغیر تصادفی است.

به طور کلی **هدف آزمون فرض آماری** تعیین این موضوع است که با توجه به اطلاعات به دست آمده از داده‌های نمونه، حدسی که درباره‌ی خصوصیتی از جامعه می‌زنیم به‌طور قوی تأیید می‌شود یا خیر.

فرضیه‌ها

چون ادعا ممکن است صحیح یا غلط باشد، بنابراین دو فرض مکمل در ذهن به وجود می‌آید؛ یکی را فرض صفر نامیده و آن را با H_0 نشان داده و دیگری را فرض مقابل گفته و با H_1 نمایش می‌دهیم.

هرگاه بخواهیم یک ادعا را از طریق اطلاعات حاصل از نمونه‌ی جمع‌آوری شده از جامعه تأیید کنیم، خلاف آن ادعا را در فرض H_0 و خود آن ادعا را در فرض مقابل H_1 قرار می‌دهیم (جز در یک حالت خاص!).

نکته: فرضی که در آن علامت $=$ وجود دارد را در H_0 قرار می‌دهیم؛ و فرض مخالف آن را در H_1 .

در یک مسئله‌ی آزمون فرض، اگر اطلاعات به دست آمده از نمونه با فرض H_0 ناسازگار باشد در این صورت فرض H_0 را رد می‌کنیم و در مقابل فرض H_1 را می‌پذیریم.

اگر اطلاعات به دست آمده از نمونه با فرض H_0 سازگار باشد، در این صورت می‌گوییم که اطلاعات به دست آمده از نمونه دلیلی بر رد فرض H_0 ندارد و در حقیقت فرض H_0 را می‌پذیریم.

روش انجام آزمون فرضیه

روش کار چنین است که:

- ابتدا نمونه‌ای از جامعه گرفته
- سپس با توجه به نوع فرض، آماره (ملاک) مناسبی برای فرض انتخاب می‌کنیم
- براساس نتایج حاصل از نمونه مقدار آن را محاسبه می‌کنیم؛
- با توجه به سطح اطمینان مشخص شده، تصمیم‌گیری می‌کنیم که فرض H_0 را بپذیریم یا رد کنیم.

آماره آزمون و ناحیه بحرانی

تعریف آماره آزمون: آماره $T(x_1, \dots, x_n)$ که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن، یک فرض را رد یا قبول می‌کنیم، آماره آزمون گویند.

تعریف ناحیه بحرانی: به مجموعه مقادیری از آماره آزمون که به ازای آن فرض H_0 را باید رد کنیم ناحیه بحرانی آزمون گویند و آن را با نماد C نمایش می‌دهند.

متمم ناحیه بحرانی را ناحیه پذیرش می‌نامند.

اگر ناحیه بحرانی C یک آزمون مشخص شود، در این صورت با جمع‌آوری نمونه و محاسبه $T(x_1, \dots, x_n)$ می‌توان آزمون آماری را بدین صورت انجام داد:

اگر $T(x_1, \dots, x_n) \in C$ آن‌گاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت آن را می‌پذیریم.

خطاهای آزمون

۱- ممکن است فرض H_0 درست باشد و ما آن را به اشتباه رد کنیم. این خطا را **خطای نوع اول** می‌نامند.

۲- ممکن است فرض H_0 نادرست باشد و ما آن را به اشتباه قبول کنیم. این خطا را **خطای نوع دوم** می‌نامند.

۳- احتمال خطای نوع اول را با α نشان داده و آن را سطح معنی‌داری آزمون می‌گویند:

$$\alpha = P(H_0 \text{ درست باشد} \mid \text{رد } H_0) = P(\text{خطای نوع اول})$$

۴- احتمال خطای نوع دوم را با β نشان می‌دهند:

$$\beta = P(H_1 \text{ درست باشد} \mid \text{قبول } H_0) = P(\text{خطای نوع دوم})$$

توان آزمون

احتمال رد کردن فرض H_0 در صورتی که فرض H_1 درست باشد؛ یعنی احتمال رد کردن فرض H_0 به حق را توان آزمون می‌نامند و آن را با β^* نشان می‌دهند:

$$\beta^* = P(H_1 \text{ درست باشد} \mid H_0 \text{ پذیرش}) = 1 - P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درست باشد}) = 1 - \beta$$

نکته:

۱- α و β با هم رابطه معکوس دارند.

۲- با افزایش حجم نمونه n ، هم α و هم β هر دو کاهش می‌یابند.

* با تغییر دادن ناحیه‌ی بحرانی نمی‌توان هم‌زمان هم خطای نوع اول و هم خطای نوع دوم را کاهش داد. زمانی که یکی را کاهش می‌دهیم، دیگری افزایش می‌یابد. بنابراین باید آن ناحیه‌ای را به عنوان ناحیه بحرانی انتخاب کنیم که با قرار دادن یک حداکثر مقدار برای α بتوان β را تا جایی که ممکن است کاهش داد؛ یا به عبارتی توان آزمون را ماکسیمم کرد.

مثال ۱

فرض کنید $X \sim N(\mu, 4)$ باشد و فرض‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 1 \end{cases}$$

یک نمونه X_1, \dots, X_{25} جمع‌آوری شده است. اگر در آزمون H_0 در مقابل H_1 ناحیه بحرانی به صورت $\{\bar{X} > 0.4\}$ باشد، احتمال خطای نوع اول، دوم و توان آزمون را به دست آورید.

راه‌حل:

$$\alpha = P(\text{فرض صفر درست باشد} \mid \text{رد فرض صفر}) = P(\bar{X} > 0.4 \mid \mu = 0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{0.4 - 0}{\frac{2}{5}}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$\beta = P(\text{فرض مقابل درست باشد} \mid \text{پذیرش فرض صفر}) = P(\bar{X} \leq 0.4 \mid \mu = 1)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{0.4 - 1}{\frac{2}{5}}\right) = P(Z \leq -1.5) = 0.0668 \Rightarrow \beta^* = 1 - 0.0668 = 0.9332$$

مثال ۲

در مثال قبل اگر ناحیه بحرانی به صورت $\{X_1, \dots, X_{25} \mid \bar{X} > c\}$ باشد، مقدار c را چنان تعیین کنید که $\alpha = 0.1$ باشد. سپس خطای نوع دوم را به دست آورید.

راه حل:

$$0.1 = \alpha = P(\text{فرض صفر درست باشد} \mid \text{رد فرض صفر}) = P(\bar{X} > c \mid \mu = 0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c - 0}{\frac{2}{5}}\right) = P(Z > 2.5c)$$

$$\Rightarrow P(Z \leq 2.5c) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$\Rightarrow 2.5c = z_{0.9} = 1.28$$

$$\Rightarrow c = 0.512$$

$$\beta = P(\text{فرض مقابل درست باشد} \mid \text{پذیرش فرض صفر}) = P(\bar{X} \leq 0.512 \mid \mu = 1)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{0.512 - 1}{\frac{2}{5}}\right) = P(Z \leq -1.22) = 0.1112$$

مثال ۳

برای نوع معینی بتن، طرح جدیدی در نظر گرفته شده است که منجر به افزایش مقاومت آن تا ۵۰۰۰ کیلوگرم در هر سانتی متر مربع با انحراف معیار ۱۲۰ می شود. برای آزمون فرض $\mu = ۵۰۰۰$ در برابر فرض مقابل $\mu < ۵۰۰۰$ ، یک نمونه تصادفی از ۵۰ قطعه بتن آزمایش می شود. ناحیه بحرانی با $\bar{x} < ۴۹۷۰$ تعریف می شود. احتمال ارتکاب خطای نوع اول را پیدا کنید.

راه حل:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{فرض صفر درست باشد} \mid \text{رد فرض صفر}) \\ &= P(\bar{X} < ۴۹۷۰ \mid \mu = ۵۰۰۰) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{۴۹۷۰ - ۵۰۰۰}{\frac{۱۲۰}{\sqrt{۵۰}}}\right) \\ &= P(Z < -۱/۷۷) = ۰/۰۳۸۴\end{aligned}$$

مثال ۴

نسبت خانواده‌های ساکن در شهری که از برند A شیر می‌خرند، $۰/۶$ است. اگر از یک نمونه‌ی تصادفی ۱۰ خانواری، ۳ خانوار یا کمتر از از برند A شیر بخرند، فرضیه $p = ۰/۶$ را به نفع فرضیه‌ی مقابل $p < ۰/۶$ رد می‌کنیم. احتمال ارتکاب خطای نوع اول را پیدا کنید.

راه‌حل:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{فرض صفر درست باشد} \mid \text{رد فرض صفر}) \\ &= P(X \leq 3 \mid p = ۰/۶) \\ &= ۰/۰۵۴۸\end{aligned}$$

آزمون‌های یک طرفه و دو طرفه

فرض کنید θ پارامتر مجهول جامعه باشد و بخواهیم آزمون‌هایی در مورد این پارامتر انجام دهیم.

آزمون هر فرض آماری که در آن فرض مقابل یک طرفه باشد، آزمون یک طرفه نامیده می‌شود. مثل:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

آزمون هر فرض آماری که در آن فرض مقابل دو طرفه باشد را یک آزمون دو طرفه می‌نامند:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

مراحل انجام یک آزمون آماری

۱- تعیین فرض‌های H_0 و H_1

۲- تعیین آماره آزمون مناسب و محاسبه مقدار آن: تعیین آماره بر اساس برآورد نقطه‌ای پارامتر مجهول θ انجام می‌شود و محاسبه‌ی مقدار آن بر اساس نمونه‌ی تصادفی مشاهده شده.

۳- تعیین ناحیه بحرانی C : که بر اساس آماره آزمون، فرض مقابل و سطح معنی‌داری α تعیین می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری: اگر مقدار محاسبه شده آماره آزمون در ناحیه بحرانی C قرار گرفت، آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم.

نمادها

○ μ : میانگین جامعه

● \bar{X} : میانگین نمونه

○ σ^2 : واریانس جامعه

● S^2 : واریانس نمونه

○ σ : انحراف استاندارد جامعه

● S : انحراف استاندارد نمونه

● ○ n : حجم نمونه

آزمون فرض برای میانگین جامعه نرمال

$$\mu$$

آزمون فرض برای میانگین یک جامعه نرمال حالت الف- واریانس جامعه معلوم باشد

آزمون فرض برای میانگین یک جامعه نرمال زمانی که واریانس جامعه معلوم باشد

فرض کنید از یک جامعه با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 یک نمونه‌ی تصادفی X_1, \dots, X_n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی میانگین μ انجام دهیم.

ابتدا آزمون زیر را برای یادگیری نحوه‌ی به‌دست آوردن آماره‌ی آزمون و تعیین ناحیه‌ی بحرانی در نظر بگیرید:
فرض کنید بخواهیم فرض زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

در عبارت بالا μ_0 مقداری معلوم است (با توجه به مسئله‌ی مورد نظر مشخص می‌شود).

می‌دانیم بهترین برآوردگر نقطه‌ای برای μ عبارتست از: \bar{X}

۱- آماره آزمون و ناحیه بحرانی

برای آزمون مورد نظر اگر برآورده \bar{X} مقادیر بزرگ را اختیار کند، یعنی $\bar{X} > c$ آن گاه فرض H_0 را رد می‌کنیم. بنابراین ناحیه بحرانی آزمون به صورت $\bar{X} > c$ است که در آن c به گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌داری آزمون برابر مقدار مشخص شده α باشد؛ یعنی

$$\alpha = P(\bar{X} > c \mid \mu = \mu_0)$$

حال اگر جامعه نرمال باشد، یا آنکه نرمال نبوده اما $n \geq 30$ باشد، آن گاه

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

برای تعیین c داریم:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\bar{X} > c \mid \mu = \mu_0) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ \Rightarrow 1 - \alpha &= P\left(Z \leq \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

۱- آماره آزمون و ناحیه بحرانی

$$\Rightarrow \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha} \Rightarrow c = \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \alpha = P\left(\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \mid \mu = \mu_0\right)$$

$$\Rightarrow C : Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

آزمون فرضیه میانگین جامعه حالت الف- واریانس جامعه معلوم

الف- ۱ اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه σ^2 معلوم است،
۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ را محاسبه کرده
۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \Rightarrow C : Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم. در این مرحله مقدار آماره به دست آمده را با مقادیر بحرانی به دست آمده از جدول مقایسه می‌کنیم؛ اگر در ناحیه بحرانی قرار گرفت H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم.

مثال ۵

متوسط قد دانشجویان مرد سال اول یک دانشکده ۶۸/۵ اینچ با انحراف معیار ۲/۷ اینچ گزارش شده است. اگر یک نمونه‌ی تصادفی ۵۰ تایی از دانشجویان مرد سال اول فعلی دارای حد متوسط قد ۶۹/۷ اینچ باشد، آیا در سطح معنی‌داری ۰/۰۲ دلیلی برای تصور افزایش در حد متوسط قد وجود دارد؟

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 68/5 \\ H_1 : \mu > 68/5 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{69/7 - 68/5}{\frac{2/7}{\sqrt{50}}} = 3/14$$

$$C : Z_0 > z_{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad C : 3/14 > 2/0.5$$

$$\alpha = 0/0.2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha = 0/98 \quad \Rightarrow \quad z_{0/98} = 2/0.5$$

فرض صفر رد می‌شود. یعنی حد متوسط قد تغییر پیدا کرده است.

۲- آماره آزمون و ناحیه بحرانی

حال می‌خواهیم برای فرضیه زیر آماره آزمون و ناحیه بحرانی بسازیم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\alpha = P(\bar{X} < c \mid \mu = \mu_0) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha = -z_{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad c = \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \alpha = P\left(\bar{X} < \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha} \mid \mu = \mu_0\right)$$

$$\Rightarrow C : Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$$

آزمون فرضیه میانگین جامعه حالت الف- واریانس جامعه معلوم

الف-۲ اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه σ^2 معلوم است،
۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ را محاسبه کرده
۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \Rightarrow C : Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{1-\alpha}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم. در این مرحله مقدار آماره به دست آمده را با مقادیر بحرانی به دست آمده از جدول مقایسه می‌کنیم؛ اگر در ناحیه بحرانی قرار گرفت H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم.

مثال ۶

وزارت کار و امور اجتماعی مزد روزانه‌ی کارگران کارخانه‌ای را به طور متوسط ۱۳۲ هزار تومان با انحراف معیار ۲۵ هزار تومان تعیین کرده است. اگر کارخانه‌ای به ۴۰ کارگر خود روزانه به طور متوسط ۱۲۲ هزار تومان پرداخت کند، آیا می‌توان این کارخانه را متهم کرد که کمتر از مزد تعیین شده‌ی وزارت کار و امور اجتماعی پرداخت می‌کند؟ (سطح معنی‌داری ۰/۰۵)

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 132 \\ H_1 : \mu < 132 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{122 - 132}{\frac{25}{\sqrt{40}}} = -2/53$$

$$C : Z_0 < -z_{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad C : -2/53 < -1/645$$

$$\alpha = 0/05 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha = 0/95 \quad \Rightarrow \quad z_{0/95} = 1/645$$

فرض صفر رد می‌شود. یعنی می‌توان این کارخانه را متهم کرد که کمتر از مزد تعیین شده‌ی وزارت کار پرداخت می‌کند.

۳- آماره آزمون و ناحیه بحرانی

حال می‌خواهیم برای فرضیه زیر آماره آزمون و ناحیه بحرانی بسازیم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$\alpha = P(\bar{X} < c_1 \text{ یا } \bar{X} > c_2 \mid \mu = \mu_0)$$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(c_1 \leq \bar{X} \leq c_2 \mid \mu = \mu_0) = P\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \Rightarrow -\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ &\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ c_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X} < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases} \\ &\Rightarrow C : Z_0 = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

آزمون فرضیه میانگین جامعه حالت الف- واریانس جامعه معلوم

الف-۳ اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه σ^2 معلوم است،
۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ را محاسبه کرده
۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \Rightarrow C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم. در این مرحله مقدار آماره به دست آمده را با مقادیر بحرانی به دست آمده از جدول مقایسه می‌کنیم؛ اگر در ناحیه بحرانی قرار گرفت H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم.

مثال ۷

یک کارخانه‌ی تولید کننده‌ی لامپ‌های روشنایی لامپ‌هایی تولید می‌کند که طول عمر آن‌ها از توزیع نرمال با متوسط عمر ۸۰۰ ساعت و انحراف معیار ۴۰ ساعت پیروی می‌کند. می‌خواهیم آزمون $\mu = ۸۰۰$ را در مقابل $\mu \neq ۸۰۰$ انجام دهیم. اگر یک نمونه‌ی تصادفی ۲۵ تایی از آن لامپ‌ها دارای حد متوسط عمر ۷۸۸ ساعت باشند، آزمون گفته شده را در سطح معنی‌داری ۰/۰۴ انجام دهید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = ۸۰۰ \\ H_1 : \mu \neq ۸۰۰ \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{۷۸۸ - ۸۰۰}{\frac{۴۰}{\sqrt{۲۵}}} = -۱/۵$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow C : |-۱/۵| \not> ۲/۰۵$$

$$\alpha = ۰/۰۴ \Rightarrow ۱ - \frac{\alpha}{2} = ۰/۹۸ \Rightarrow z_{۰/۹۸} = ۲/۰۵$$

فرض صفر رد نمی‌شود.

آزمون فرضیه میانگین جامعه

حالت الف- واریانس جامعه معلوم (همه فرضیه‌ها)

اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه σ^2 معلوم است،

۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array} \right.$$

۲- آماره‌ی آزمون $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ را محاسبه کرده

۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array} \right.$$

$$C : Z_0 > z_{1-\alpha}$$

$$C : Z_0 < -z_{1-\alpha}$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم.

مثال ۸

لامپ‌های تلویزیون موجود در بازار دارای میانگین طول عمر ۱۲۰۰ ساعت با انحراف معیار ۳۰۰ ساعت هستند. کارخانه‌ای لامپ جدیدی تولید کرده و مدعی شده که میانگین عمر لامپ‌های ساخت کارخانه‌اش بیشتر از ۱۲۰۰ ساعت است. برای بررسی این ادعا یک نمونه ۱۰۰ تایی را انتخاب کرده و میانگین طول عمر ۱۲۶۵ ساعت به دست آمده است. آیا با ادعای صاحب کارخانه موافق هستید؟ (سطح معنی‌داری ۰/۰۱)

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1200 \\ H_1 : \mu > 1200 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{1265 - 1200}{\frac{300}{\sqrt{100}}} = 2/17$$

$$C : Z_0 > z_{1-\alpha} \Rightarrow C : 2/17 \not> 2/33$$

$$\alpha = 0/01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0/99 \Rightarrow z_{0/99} = 2/33$$

فرض صفر رد نمی‌شود. یعنی ادعای صاحب کارخانه رد می‌شود.

مثال ۹

تعداد زیادی از بیماران مبتلا به یک بیماری خاص را گردآوری کرده و گزارش کرده‌اند که مدت زمان درمان بیماری به روش استاندارد دارای میانگین ۱۵ روز و انحراف معیار ۳ روز است. ادعا شده که یک روش جدید می‌تواند مدت زمان درمان را کاهش دهد؛ در حالی که انحراف معیار درمان همان ۳ روز است. برای روش جدید درمان را روی ۷۰ بیمار آزمایش کرده و میانگین مدت درمان ۱۴ روز شده است. آیا روش جدید روش بهتری است؟ (سطح معنی‌داری ۰/۰۲۵)

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu < 15 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{14 - 15}{\frac{3}{\sqrt{70}}} = -2/789$$

$$C : Z_0 < -z_{1-\alpha} \Rightarrow C : -2/789 < -1/96$$

$$\alpha = 0/025 \Rightarrow 1 - \alpha = 0/975 \Rightarrow z_{0/975} = 1/96$$

فرض صفر رد می‌شود. یعنی می‌توان نتیجه گرفت که روش درمان جدید روش بهتری است.

آزمون فرض میانگین جامعه حالت ب- واریانس جامعه نامعلوم باشد

فرض کنید از یک جامعه با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 یک نمونه‌ی تصادفی X_1, \dots, X_n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی میانگین μ انجام دهیم.

از آنجا که توزیع t -ستودنت یک توزیع متقارن است، نحوه‌ی به دست آوردن آماره‌ی آزمون و تعیین ناحیه‌ی بحرانی شبیه به حالت الف است؛ با این تفاوت که

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

بنابراین آماره‌ی آزمون برابر است با:

$$T_* = \frac{\bar{X} - \mu_*}{s/\sqrt{n}}$$

آزمون فرض میانگین جامعه حالت ب- واریانس جامعه نامعلوم باشد

اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه σ^2 نامعلوم است،

۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array} \right.$$

۲- آماره‌ی آزمون $T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ را محاسبه کرده
۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array} \right.$$

$$C : T_0 > t_{1-\alpha, (n-1)} \quad C : T_0 < -t_{1-\alpha, (n-1)} \quad C : |T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم.

مثال ۱۰

اداره بهداشت یک شهر می خواهد تعیین کند که آیا میانگین تعداد باکتری ها در واحد حجم آب شهر از سطح ایمنی یعنی ۲۰۰ بیشتر است یا خیر. برای این منظور پژوهش گران ۱۰ نمونه از آب را گردآوری کرده و مشاهده کرده اند که میانگین تعداد باکتری ها ۱۹۴/۸ و انحراف معیار آن ها ۱۳/۱۴ بوده است. با فرض اینکه این داده ها از جامعه ای با توزیع نرمال به دست آمده اند، در سطح معنی داری ۰/۰۱ آزمون کنید آیا داده ها دلیلی بر نگرانی است؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 200 \\ H_1 : \mu > 200 \end{cases}$$

$$T_* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{194/8 - 200}{\frac{13/14}{\sqrt{10}}} = -1/25$$

$$C : T_* > t_{1-\alpha, (n-1)} \Rightarrow C : -1/25 \not> 2/12$$

$$\alpha = 0/01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0/99 \Rightarrow t_{0/99, (10-1)} = 2/12$$

فرض صفر رد نمی شود. یعنی نگرانی اداره بهداشت بی مورد است.

مثال ۱۱

یک ماشین خودکار قطعات یدکی را به قطر متوسط ۲۵ میلیمتر بر طبق توزیع نرمال می‌سازد. برای اینکه معلوم شود ماشین کار خود را به خوبی انجام می‌دهد یا خیر، نمونه‌ای به حجم ۱۰ قطعه انتخاب شده است که میانگین قطر قطعات نمونه ۲۵/۰۲ با انحراف معیار ۰/۰۲۴ میلیمتر به دست آمده است. **درستی کار ماشین را در سطح معنی‌داری ۱۰ درصد آزمون نمایید.**

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 25 \\ H_1 : \mu \neq 25 \end{cases}$$

$$T_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{25/0.2 - 25}{0.024/\sqrt{10}} = 2/64$$

$$C : |T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)} \Rightarrow C : |2/64| > 1/83$$

$$\alpha = 0/1 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/95 \Rightarrow t_{0/95, (10-1)} = 1/83$$

فرض صفر رد می‌شود؛ یعنی ماشین درست کار نمی‌کند.

مثال ۱۲

یک کارخانه‌ی مواد شیمیایی به گونه‌ای طراحی شده که روزانه به طور متوسط ۸۰۰ تن محصول داشته باشد. در ۵ روز متوالی این کارخانه به ترتیب ۷۹۳، ۷۹۰، ۸۰۵، ۷۸۵ و ۸۰۲ تن محصول داشته است. با فرض نرمال بودن میزان محصول، آیا این داده‌ها نشان دهنده‌ی کاهش در حد متوسط میزان محصول کارخانه است؟ ($\alpha = ۰/۰۵$)
راه حل: حد متوسط میزان محصول کارخانه کاهش نیافته است، زیرا:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 800 \\ H_1 : \mu < 800 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{793 + \dots + 802}{5} = 795$$

$$s^2 = \frac{1}{5-1} [(793 - 795)^2 + \dots + (802 - 795)^2] = 69/5$$

$$T_* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{795 - 800}{\sqrt{\frac{69/5}{5}}} = -1/34$$

$$C : T_* < -t_{1-\alpha, (n-1)} \Rightarrow C : -1/34 \not< -2/13$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0/95 \Rightarrow t_{0/95, (5-1)} = 2/13$$

آزمون فرض برای تفاضل میانگین‌های دو جامعه مستقل

آزمون فرض برای تفاضل میانگین دو جامعه

فرض کنید دو جامعه داشته باشیم.

جامعه‌ی اول دارای میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 باشد.

جامعه‌ی دوم دارای میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشد.

یک نمونه‌ی تصادفی n تایی X_1, \dots, X_n از جامعه‌ی اول انتخاب کرده و میانگین این نمونه را با \bar{X} و واریانس آن را با S_1^2 نمایش می‌دهیم.

یک نمونه‌ی تصادفی m تایی Y_1, \dots, Y_m از جامعه‌ی دوم انتخاب کرده و میانگین این نمونه را با \bar{Y} و واریانس آن را با S_2^2 نشان می‌دهیم.

فرض کنید نمونه‌گیری از دو جامعه مستقل از یکدیگر باشد.

می‌خواهیم برای اختلاف میانگین دو جامعه یعنی $\mu_1 - \mu_2$ فرضیه‌ای را آزمون کنیم.

بهترین برآوردگر نقطه‌ای برای $\mu_1 - \mu_2$ عبارت است از: $\bar{X} - \bar{Y}$

برای آزمون فرضیه‌های مربوط به $\mu_1 - \mu_2$ دو حالت را در نظر می‌گیریم:

آزمون فرض برای تفاضل میانگین دو جامعه حالت الف- واریانس دو جامعه معلوم باشد

آزمون فرض برای $\mu_1 - \mu_2$ زمانی که واریانس دو جامعه معلوم باشد
در حالت کلی فرض کنید بخواهیم یکی از فرض های زیر را بر اساس دو نمونه تصادفی به اندازه های n و m که از جامعه های نرمال با میانگین های به ترتیب μ_1 و μ_2 و انحراف معیارهای σ_1 و σ_2 استخراج شده اند، در سطح معنی داری α آزمون کنیم. حال با فرض اینکه انحراف معیارهای جامعه های مورد بررسی معلوم باشند، آماره آزمون برای فرضیه های فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$Z_0 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

فرضیه ها و نواحی بحرانی برای آزمون ها به صورت زیر است:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$$

$$C : Z_0 > z_{1-\alpha}$$

$$C : Z_0 < -z_{1-\alpha}$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

مثال ۱۳

یک نمونه تصادفی به اندازه ۳۶ از یک جامعه با انحراف معیار $۵/۲$ دارای میانگین ۸۱ است. یک نمونه تصادفی دیگر به اندازه ۴۹ از یک جامعه دیگر با انحراف معیار $۳/۴$ دارای میانگین ۷۶ است. آیا در سطح معنی داری $۰/۰۶$ میانگین این دو جامعه با هم برابر هستند؟

راه حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \quad \equiv \quad \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{(81 - 76) - 0}{\sqrt{\frac{(5/2)^2}{36} + \frac{(3/4)^2}{49}}} = 5/0.33$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 5/0.33 > 1/88$$

$$\alpha = 0/06 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/97 \Rightarrow z_{0/97} = 1/88$$

فرض صفر رد می شود؛ یعنی میانگین دو جامعه با هم برابر نیستند.

مثال ۱۴

تحلیل گری می‌خواهد میانگین طول عمر عاج یک نوع لاستیک اتومبیل را در حالتی که فشار باد لاستیک بیشتر از حد استاندارد است، با هم مقایسه کند. او دو نمونه‌ی تصادفی مستقل مرکب از ۱۵ لاستیک را از خط تولید انتخاب کرده است. لاستیک‌های نمونه‌ی ۱ را با فشار باد استاندارد و لاستیک‌های نوع ۲ را با فشار باد بیش از حد استاندارد تنظیم کرده و میانگین طول عمر عاج لاستیک‌ها بر حسب هزار کیلومتر به ترتیب $\bar{x} = 43$ و $\bar{y} = 40/7$ به دست آمده است. اگر هر دو جامعه دارای توزیع نرمال با واریانس‌های مساوی $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1/2$ باشند، آیا در سطح معنی‌داری $\alpha = 0/01$ می‌توان وجود اختلاف بین میانگین طول عمر لاستیک‌ها را در شرایط گفته شده پذیرفت؟

راه‌حل: میانگین عمر لاستیک در دو شرایط گفته شده با هم برابر نیستند، زیرا:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{(43 - 40/7) - 0}{\sqrt{\frac{1/2}{15} + \frac{1/2}{15}}} = 5/75$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow |5/75| > 2/575$$

$$\alpha = 0/01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/995 \Rightarrow z_{0/995} = 2/575$$

آزمون فرض برای تفاضل میانگین دو جامعه حالت ب- واریانس دو جامعه مجهول اما مساوی باشند

آزمون فرض برای $\mu_1 - \mu_2$ زمانی که واریانس‌های دو جامعه مجهول ولی مساوی باشند
در حالتی که واریانس دو جامعه مجهول باشند ولی مقدار آن‌ها با هم برابر هستند $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ، آماره آزمون
به صورت زیر خواهد بود:

$$T_* = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_*}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

نواحی بحرانی برای آزمون فرضیه‌های زیر به صورت زیر است:

$$\begin{cases} H_* : \mu_1 - \mu_2 = d_* \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_* \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_* : \mu_1 - \mu_2 = d_* \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_* \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_* : \mu_1 - \mu_2 = d_* \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_* \end{cases}$$

$$C : T_* > t_{1-\alpha, (n+m-2)}$$

$$C : T_* < -t_{1-\alpha, (n+m-2)}$$

$$C : |T_*| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, (n+m-2)}$$

مثال ۱۵

هدف یک تحقیق مقایسه نرخ بازده سالانه دو صنعت دارویی و شیمیایی است. بدین منظور اطلاعات زیر توسط یک تحلیل گر گردآوری شده است. با فرض نرمال بودن نرخ بازده سالانه دو صنعت، در سطح ۱ درصد آزمون کنید آیا

صنعت دارویی	صنعت شیمیایی
$n = ۱۳$	$m = ۱۳$
$\bar{X} = ۲/۵۱$	$\bar{Y} = ۳/۴۷$
$S_1 = ۶$	$S_2 = ۴$

میانگین نرخ بازده سالانه در صنعت دارویی کمتر از صنعت شیمیایی است؟

راه حل:

$$\begin{aligned} \begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} &\equiv \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases} \\ T. = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - d.}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{(2/51 - 3/47) - 0}{5/1 \times \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{13}}} = -0/48 \\ s_p^2 = \frac{(13-1) \times 36 + (13-1) \times 16}{13 + 13 - 2} = 26 \Rightarrow s_p = 5/1 \\ C : T. < -t_{1-\alpha, (n+m-2)} \Rightarrow -0/48 \not< -2/49 \\ \alpha = 0/01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0/99 \Rightarrow t_{0/99, (13+13-2)} = 2/49 \end{aligned}$$

فرض صفر رد نمی شود؛ یعنی میانگین نرخ بازده در صنعت دارویی کمتر از صنعت شیمیایی نیست.

مثال ۱۶

ادعا شده است که حد متوسط زمان نمایش فیلم‌های تولیدی شرکت ۲ به مدت بیش از ۱۰ دقیقه از حد متوسط زمان نمایش فیلم‌های تولیدی توسط شرکت ۱ بیشتر است. برای بررسی این ادعا زمان نمایش دو نمونه از فیلم این شرکت‌ها جمع‌آوری شده و نتایج زیر به دست آمده است. اگر زمان نمایش فیلم‌ها تقریباً نرمال با واریانس‌های برابر باشند، این ادعا را در سطح معنی‌داری ۰/۰۱ آزمون کنید.

شرکت ۱	۱۰۲	۸۶	۹۸	۱۰۹	۹۲
شرکت ۲	۸۱	۱۶۵	۹۷	۱۳۴	۹۲
	۱۱۴	۸۷			

راه‌حل:

$$\begin{aligned} \begin{cases} H_0: \mu_1 + 10 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 + 10 < \mu_2 \end{cases} &\equiv \begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = -10 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < -10 \end{cases} \\ \bar{x} = \frac{102 + \dots + 92}{5} = 97/4 & \quad s_1^2 = \frac{1}{5-1} [(102 - 97/4)^2 + \dots + (92 - 97/4)^2] = 78/8 \\ \bar{y} = \frac{81 + \dots + 114}{7} = 110 & \quad s_2^2 = \frac{1}{7-1} [(81 - 110)^2 + \dots + (114 - 110)^2] = 913/12 \\ s_p^2 = \frac{(\delta - 1) \times 78/8 + (\gamma - 1) \times 913/12}{\delta + \gamma - 2} = 579/4 & \Rightarrow s_p = 24/0.7 \\ T_* = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - d_*}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{(97/4 - 110) - (-10)}{24/0.7 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}} = -0.185 \\ C: T_* < -t_{1-\alpha, (n+m-2)} & \Rightarrow -0.185 \not< -2/76 \\ \alpha = 0.01 & \Rightarrow 1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow t_{0.99, (5+7-2)} = 2/76 \end{aligned}$$

فرض صفر رد نمی‌شود؛ یعنی ادعا درست نیست.

مثال ۱۷

تولید کننده‌ای ادعا می‌کند که متوسط قدرت کشش نخ A از متوسط قدرت کشش نخ B حداقل ۱۲ کیلوگرم بیشتر است. برای آزمون ادعای وی، ۵۰ قطعه از هر دو نوع نخ تحت شرایط یکسان آزمایش می‌شوند. نخ نوع A دارای متوسط قدرت کشش ۸۶/۷ کیلوگرم با انحراف معیار ۶/۲۸ کیلوگرم است. در حالی که نخ نوع B دارای متوسط قدرت کشش ۷۷/۸ کیلوگرم با انحراف معیار ۵/۶۱ کیلوگرم است. ادعای تولید کننده را با به کار بردن سطح معنی‌داری ۰/۰۵ آزمون کنید.

راه‌حل: ادعا درست نیست، زیرا:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = 12 + \mu_B \\ H_1 : \mu_A > 12 + \mu_B \end{cases} \quad \equiv \quad \begin{cases} H_0 : \mu_A - \mu_B = 12 \\ H_1 : \mu_A - \mu_B > 12 \end{cases}$$

$$s_p^2 = \frac{(50-1) \times 6/28^2 + (50-1) \times 5/61^2}{50 + 50 - 2} = 35/455 \quad \Rightarrow \quad s_p = 5/95$$

$$T_0 = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - d_0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{(86/7 - 77/8) - (12)}{5/95 \times \sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}}} = -2/60.5$$

$$C : T_0 > z_{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad -2/60.5 \not> 1/645$$

$$\alpha = 0/05 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha = 0/95 \quad \Rightarrow \quad z_{0/95} = 1/645$$

آزمون فرض برای تفاضل میانگین مشاهدات زوجی

آزمون فرض برای تفاضل میانگین مشاهدات زوجی

آزمون دو میانگین را می‌خواهیم برای مشاهدات جفت شده (زوجی) انجام دهیم:
۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D > d_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D < d_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D \neq d_0 \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $T_0 = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}}$ را محاسبه کرده

۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D > d_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D < d_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = d_0 \\ H_1 : \mu_D \neq d_0 \end{cases}$$

$$C : T_0 > t_{1-\alpha, (n-1)}$$

$$C : T_0 < -t_{1-\alpha, (n-1)}$$

$$C : |T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم.

$$*** \quad d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2 \quad ***$$

مثال ۱۸

امتیازهای یک تیم قبل و بعد از تعویض مربی آن به صورت زیر بوده است. در سطح معنی داری ۰/۰۵ آیا می توان ادعا کرد که عملکرد تیم بعد از تعویض مربی بهتر شده است؟

قبل از تعویض مربی	۵۸	۴۶	۵۹	۳۸	۶۳	۵۸
بعد از تعویض مربی	۶۰	۵۲	۶۸	۵۲	۶۳	۷۰
d_i	-۲	-۶	-۹	-۱۴	۰	-۱۲

راه حل: عملکرد تیم بعد از تعویض مربی بهتر شده، زیرا:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{\text{قبل}} = \mu_{\text{بعد}} \\ H_1 : \mu_{\text{قبل}} < \mu_{\text{بعد}} \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_1 : \mu_D < 0 \end{cases}$$

$$\bar{d} = \frac{-2 + \dots - 12}{6} = -7/17$$

$$s_d^2 = \frac{1}{6-1} \left[(-2 + 7/17)^2 + \dots + (-12 + 7/17)^2 \right] = 30/6$$

$$T_* = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{-7/17 - 0}{\sqrt{30/6}/6} = -3/14$$

$$C : T_* < -t_{1-\alpha, (n-1)} \Rightarrow C : -3/14 < -2/0.15$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0/95 \Rightarrow t_{0/95, (6-1)} = 2/0.15$$

مثال ۱۹

یک نمونه تصادفی ۵ تایی از یک نوع آلیاژ خاص انتخاب کرده و می‌خواهیم تعیین کنیم آیا در تجزیه و تحلیل میزان آهن موجود در آن به روش شیمیایی و روش استفاده از اشعه اکس اختلافی وجود دارد یا خیر. با فرض نرمال بودن دو جامعه، در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ آزمون کنید که آیا در تجزیه و تحلیل میزان آهن موجود در آلیاژها

۲/۴	۲/۱	۲/۳	۲	۲	اشعه اکس
۲/۴	۲/۳	۲/۵	۱/۹	۲/۲	شیمیایی
۰	-۰/۲	-۰/۲	۰/۱	-۰/۲	d_i

اختلافی وجود دارد؟

راه‌حل: دو روش به کار برده شده در تجزیه و تحلیل میزان آهن موجود در آلیاژها اختلافی وجود ندارد، زیرا:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{\text{اکس}} = \mu_{\text{شیمیایی}} \\ H_1 : \mu_{\text{اکس}} \neq \mu_{\text{شیمیایی}} \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_1 : \mu_D \neq 0 \end{cases}$$

$$\bar{d} = \frac{-0/2 + \dots + 0}{5} = -0/1$$

$$s_d^2 = \frac{1}{5-1} [(-0/2 + 0/1)^2 + \dots + (0 + 0/1)^2] = 0/19999$$

$$T_* = \frac{\bar{d} - d_*}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{-0/1 - 0}{\sqrt{0/19999/5}} = -1/6$$

$$C : |T_*| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)} \Rightarrow C : |-1/6| \not> 2/776$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/975 \Rightarrow t_{0/975, (5-1)} = 2/776$$

آزمون فرض روی نسبت در یک جامعه

آزمون فرض روی نسبت موفقیت‌ها

در برخی از بررسی‌های آماری نسبتی از اعضای جامعه p که دارای خصوصیت معینی هستند، مد نظر است.

این مطالعات مشاهده‌ای بر روی یک متغیر دو ارزشی (مثل: زن و مرد - شهری و روستایی - موافق و مخالف) انجام می‌شود.

از آن‌جا که متغیر مورد مطالعه تنها دو ارزش دارد، هر یک از اعضای جامعه در یکی از دو ارزش قرار می‌گیرند.

نسبت موفقیت‌ها (افراد/اشیاء مورد نظر و سوال شده) را با p و نسبت افراد/اشیائی که در موفقیت قرار نمی‌گیرند را با q نشان می‌دهیم.

برای بررسی این نسبت p نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n را از جامعه جمع‌آوری می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر عضو } i\text{-ام نمونه دارای خصوصیت معین باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قرار می‌دهیم: $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ؛ که در آن X تعدادی اعضای نمونه است که دارای خصوصیت معین هستند؛ پس $X \sim \text{Bin}(n, p)$

آزمون فرض روی نسبت موفقیت‌ها

بهترین برآوردگر نقطه‌ای برای p عبارت است از: $\frac{X}{n}$

اگر حجم نمونه n بزرگ باشد، آن‌گاه با توجه به قضیه حد مرکزی توزیع $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

فرض کنید بخواهیم یکی از فرض‌های زیر را بر اساس یافته‌های یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n که از یک جامعه با نسبت موفقیت p استخراج شده است، در سطح معنی‌داری α آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

آزمون فرض روی نسبت در یک جامعه

مراحل انجام آزمون فرضیه‌های مربوط به نسبت واریانس دو جامعه نرمال به صورت زیر است:

۱- نوشتن فرضیه‌های آزمون (شبیه به مرحله ۳)

۲- محاسبه آماره آزمون $Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$

۳- تعیین ناحیه بحرانی (دقیقاً شبیه نواحی بحرانی آزمون‌های مربوط به μ)

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

$$C : Z_0 > z_{1-\alpha}$$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

$$C : Z_0 < -z_{1-\alpha}$$

۴- نتیجه‌گیری بر مبنای مرحله ۳

مثال ۲۰

پزشکی مدعی شده است که بیش از ۷۰ درصد از بیماران قلبی با دارویی که اخیراً کشف شده است، بهبود می‌یابند. اگر در یک نمونه ۱۵۰ تایی از بیماران قلبی، ۸۰ بیمار با این دارو بهبود یابند، در سطح معنی‌داری ۱ درصد ادعای پزشک را آزمون کنید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.7 \\ H_1 : p > 0.7 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = \frac{80 - (150 \times 0.7)}{\sqrt{150 \times 0.7 \times 0.3}} = -4/45$$

$$C : Z_0 > z_{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad -4/45 \not> 2/33$$

$$\alpha = 0.01 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha = 0.99 \quad \Rightarrow \quad z_{0.99} = 2/33$$

فرض صفر رد نمی‌شود؛ یعنی ادعای پزشک رد می‌شود.

مثال ۲۱

در کالاجی برآورد شده است که کمتر از ۲۵ درصد دانشجویان با دوچرخه به کلاس می‌آیند. اگر در یک نمونه‌ی تصادفی از ۹۰ دانشجوی کالج، ۲۸ نفر با دوچرخه به کلاس بیایند، آیا می‌توان گفت که این برآورد معتبر است؟ سطح معنی‌داری ۰/۰۵ را به کار ببرید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0/25 \\ H_1 : p < 0/25 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = \frac{28 - (90 \times 0/25)}{\sqrt{90 \times 0/25 \times 0/75}} = 1/34$$

$$C : Z_0 < -z_{1-\alpha} \Rightarrow 1/34 \not< -1/645$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0/95 \Rightarrow z_{0/95} = 1/645$$

فرض صفر رد نمی‌شود؛ یعنی درصد دانشجویانی که با دوچرخه به کالج می‌آیند کمتر از ۰/۲۵ نیست.

مثال ۲۲

اعتقاد بر این است که ۶۰ درصد از ساکنان ناحیه‌ای موافق با لایحه‌ی ضمیمه‌سازی آن به شهر مجاور هستند. اگر ۱۱۰ نفر از یک نمونه ۲۰۰ نفری موافق با لایحه‌ی مزبور باشند، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ سطح معنی‌داری ۰/۰۵ را به کار بگیرید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0/6 \\ H_1 : p \neq 0/6 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} = \frac{110 - (200 \times 0/6)}{\sqrt{200 \times 0/6 \times 0/4}} = -1/44$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow |-1/44| \not> 1/96$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/975 \Rightarrow z_{0/975} = 1/96$$

فرض صفر رد نمی‌شود؛ یعنی درصد افرادی که با لایحه موافق هستند، با ۰/۶ اختلافی ندارد.

آزمون تفاضل دو نسبت در دو جامعه مستقل

آزمون فرض برای تفاضل نسبت‌های موفقیت در دو جامعه‌ی مستقل

اغلب پیش می‌آید که بخواهیم فرض برابری دو نسبت را آزمایش کنیم.
فرض کنید بخواهیم یکی از فرض‌های زیر را بر اساس مشاهدات دو نمونه تصادفی به اندازه‌های n و m در سطح معنی‌داری α آزمون نماییم:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 < 0 \end{array} \right.$$

برای این منظور دو نمونه‌ی تصادفی n و m تایی به ترتیب از دو جامعه انتخاب کرده و تعداد اعضایی از نمونه‌ها را که دارای خصوصیت معین هستند به ترتیب با X و Y نشان می‌دهیم.

بهترین برآوردگر نقطه‌ای برای $p_1 - p_2$ عبارتست از: $\frac{X}{n} - \frac{Y}{m}$

اگر n و m به اندازه کافی بزرگ باشند:

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1 q_1}{n}\right) \quad \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2 q_2}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1 q_1}{n} + \frac{p_2 q_2}{m}\right) \Rightarrow Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n} + \frac{p_2 q_2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

آزمون فرض برای تفاضل نسبت‌های موفقیت در دو جامعه‌ی مستقل

آماره آزمون مناسب که تحت شرط $p_1 = p_2 = p$ به دست می‌آید، به صورت زیر است:

$$Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \quad \begin{cases} \hat{p}_1 = \frac{X}{n} \\ \hat{p}_2 = \frac{Y}{m} \\ \hat{p} = \frac{X+Y}{n+m}, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} \end{cases}$$

نواحی بحرانی برای آزمون فرضیه‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 < 0 \end{cases}$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$C : Z_0 > z_{1-\alpha}$$

$$C : Z_0 < -z_{1-\alpha}$$

مثال ۲۳

نماینده‌ای معتقد است که طرفداران او از بین طبقه کارگر بیش از طبقه کارمند است. برای بررسی این ادعا دو نمونه ۵۰ نفری از هر گروه انتخاب و مورد پرسش قرار دادیم؛ ۴۰ نفر از کارگران و ۳۵ نفر از کارمندان طرفداری خود را اعلام کردند. در سطح معنی‌داری ۲ درصد آیا می‌توان این ادعا را پذیرفت؟
راه‌حل:

$$\begin{aligned} \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases} &\equiv \begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 > 0 \end{cases} \\ \hat{p}_1 = \frac{40}{50} = 0.8 &\quad \hat{p}_2 = \frac{35}{50} = 0.7 \\ \hat{p} = \frac{X + Y}{n + m} = \frac{40 + 35}{50 + 50} = 0.75 \\ Z_{\alpha} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{0.8 - 0.7}{\sqrt{0.75 \times 0.25\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right)}} = 1/155 \\ \alpha = 0.02 \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2/05 \\ C : Z_{\alpha} > z_{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad 1/155 \not> 2/05 \end{aligned}$$

فرض صفر رد نمی‌شود؛ طرفداران این نماینده از بین طبقه کارگر بیش از طبقه کارمند نیست.

مثال ۲۴

یک سازمان بازاریابی سلیقه‌ی مصرف‌کنندگان را در مورد مزه‌ی یک فراورده‌ی جدید در دو ناحیه مطالعه می‌کند. اگر در یک نمونه‌ی ۴۰۰ تایی از ناحیه‌ی اول ۵۵ درصد و از یک نمونه‌ی ۳۰۰ تایی از ناحیه‌ی دوم ۶۵ درصد افراد مزه‌ی فراورده‌ی جدید را بیسندند، در سطح معنی‌داری ۰/۱ آیا دو ناحیه نظر یکسان درباره‌ی مزه‌ی فراورده‌ی جدید دارند؟
راه‌حل:

$$\begin{aligned} \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases} &\equiv \begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \end{cases} \\ X = np_1 = 400 \times 0/55 = 220 & \quad Y = mp_2 = 300 \times 0/65 = 195 \\ \hat{p} = \frac{X + Y}{n + m} = \frac{220 + 195}{400 + 300} = 0/59 & \\ Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{0/55 - 0/65}{\sqrt{0/59 \times 0/41\left(\frac{1}{400} + \frac{1}{300}\right)}} = -2/66 & \\ \alpha = 0/1 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/95 \Rightarrow z_{0/95} = 1/645 & \\ C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow |-2/66| > 1/645 & \end{aligned}$$

فرض صفر رد می‌شود؛ دو ناحیه نظر یکسانی ندارند.

آزمون فرض برای واریانس جامعه‌ی نرمال

$$\sigma^2$$

آزمون فرض برای واریانس جامعه

فرض کنید از یک جامعه‌ی نرمال با میانگین نامعلوم μ و واریانس نامعلوم σ^2 نمونه‌ی تصادفی X_1, \dots, X_n به اندازه‌ی n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی σ^2 انجام دهیم.

فرض کنید بخواهیم فرض زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

می‌دانیم که برآوردگر مناسب برای σ^2 عبارت است از: S^2

با توجه به فرض مقابل، ناحیه‌ی بحرانی به صورت $S^2 < c$ است که در آن c به گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌داری آزمون α باشد: $\alpha = P(S^2 < c \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad \text{از طرفی می‌دانیم:}$$

آماره آزمون و ناحیه بحرانی

ب

$$\begin{aligned}\alpha &= P(S^r < c \mid \sigma^r = \sigma_*^r) \\&= P\left(\frac{(n-1)S^r}{\sigma^r} < \frac{(n-1)c}{\sigma_*^r} \mid \sigma^r = \sigma_*^r\right) = P\left(\chi_{(n-1)}^r < \frac{(n-1)c}{\sigma_*^r}\right) \\&\Rightarrow \frac{(n-1)c}{\sigma_*^r} = \chi_{\alpha, (n-1)}^r \\&\Rightarrow c = \frac{\sigma_*^r}{n-1} \chi_{\alpha, (n-1)}^r \\&\Rightarrow C: X_*^r = \frac{(n-1)S^r}{\sigma_*^r} < \chi_{\alpha, (n-1)}^r\end{aligned}$$

آماره آزمون و ناحیه بحرانی

ج

فرضیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی به صورت $S^2 < c_1$ یا $S^2 > c_2$ است:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(S^2 < c_1 \text{ یا } S^2 > c_2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2) \\ &= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} \text{ یا } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\ &= P\left(\chi_{(n-1)}^2 < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} \text{ یا } \chi_{(n-1)}^2 > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\ \Rightarrow 1 - \alpha &= P\left(\frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} < \chi_{(n-1)}^2 < \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2}\right) \end{aligned}$$

آماره آزمون و ناحیه بحرانی

ج

$$\Rightarrow \frac{(n-1)c_1}{\sigma_*^2} = \chi_{\frac{\alpha}{r}, (n-1)}^2$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\sigma_*^2}{n-1} \chi_{\frac{\alpha}{r}, (n-1)}^2$$

$$\Rightarrow C: X_*^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_*^2} < \chi_{\frac{\alpha}{r}, (n-1)}^2$$

$$\frac{(n-1)c_r}{\sigma_*^2} = \chi_{1-\frac{\alpha}{r}, (n-1)}^2$$

$$c_r = \frac{\sigma_*^2}{n-1} \chi_{1-\frac{\alpha}{r}, (n-1)}^2$$

$$\Rightarrow X_*^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_*^2} > \chi_{1-\frac{\alpha}{r}, (n-1)}^2$$

آزمون فرض برای واریانس جامعه

مراحل انجام آزمون فرضیه‌های مربوط به واریانس یک جامعه‌ی نرمال به ترتیب زیر است:

۱- نوشتن فرضیه‌ی آزمون (شبیه به مرحله‌ی ۳)

۲- محاسبه‌ی آماره‌ی آزمون $X_*^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

۳- تعیین ناحیه‌ی بحرانی

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$C : X_*^2 < \chi_{\alpha, (n-1)}^2$$

$$C : X_*^2 > \chi_{1-\alpha, (n-1)}^2$$

$$C : X_*^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2 \text{ یا } X_*^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2$$

۴- نتیجه‌گیری بر مبنای مرحله‌ی ۳

مثال ۲۵

یک تولید کننده‌ی قطعات پیش‌ساخته مدعی است که انحراف معیار مقاومت محصولات او برابر ۱۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع است. یک نمونه‌ی تصادفی ۱۰ تایی از این محصولات نتایج $\bar{x} = ۳۱۲$ و $s^2 = ۱۹۵$ را داده است. اگر اندازه‌ی مقاومت این محصولات دارای توزیع نرمال باشند، آیا نتایج به دست آمده با ادعای تولید کننده سازگار است؟ سطح معنی‌داری را ۰/۰۵ در نظر بگیرید.

راه‌حل: نتایج با ادعای تولیدکننده سازگار است، زیرا:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = ۱۰۰ \\ H_1 : \sigma^2 \neq ۱۰۰ \end{cases}$$

$$X_{\sigma^2}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1) \times 195}{100} = 17/55$$

$$C : X_{\sigma^2}^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2 \text{ یا } X_{\sigma^2}^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2 \Rightarrow 17/55 \not< 2/7 \text{ یا } 17/55 \not> 19$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0/025 \Rightarrow \chi_{0/025, (9)}^2 = 2/7$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0/975 \Rightarrow \chi_{0/975, (9)}^2 = 19$$

مثال ۲۶

یک مدرس ریاضی آزمون جدیدی را پیشنهاد داده است که برای تعیین میزان دانش ریاضی دانشجویان تازه وارد به کار می‌رود. آزمون‌های قدیمی دارای واریانس حداقل ۱۰۰ هستند و این مدرس ادعا دارد روش او مؤثر است (یعنی واریانس را کاهش می‌دهد). اگر ۲۰ دانشجو به روش جدید امتحان دهند و نمره‌های زیر را بیاورند، ادعای این مدرس را در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ آزمون کنید. فرض کنید نمره‌ها دارای توزیع نرمال هستند.

۷۰ ۸۰ ۷۳ ۶۴ ۹۱ ۵۲ ۴۸ ۹۲ ۷۵ ۶۷ ۸۸ ۵۰ ۷۰ ۶۵ ۷۵ ۵۰ ۹۰ ۵۳ ۶۸ ۸۹

راه‌حل: فرض H_0 رد نمی‌شود. به عبارتی روش جدید روش مؤثری نیست، زیرا:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 100 \\ H_1 : \sigma^2 < 100 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{70 + \dots + 89}{20} = 70/5$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{20-1} \left\{ (70 - 70/5)^2 + \dots + (89 - 70/5)^2 \right\} = 217/63$$

$$X_{\alpha}^2 = \frac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1) \times 217/63}{100} = 41/35$$

$$C : X_{\alpha}^2 < \chi_{\alpha, (n-1)}^2 \Rightarrow 41/35 \not< 10/1$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow \chi_{0/05, (19)}^2 = 10/1$$

مثال ۲۷

متوسط درجه حرارت سالانه یک شهر از میانگین متوسط درجه حرارت پانزدهمین روز هر سال اندازه گیری می شود. انحراف معیار درجه حرارت سالانه شهری در یک دوره صد ساله ۱۶ درجه فارنهایت بوده است. در مدت ۱۵ سال گذشته انحراف استاندارد درجه حرارت سالانه را محاسبه کرده اند که برابر ۱۸ درجه فارنهایت بوده است. آیا این اطلاعات دلیلی بر این دارد انحراف معیار درجه حرارت سالانه این شهر از انحراف معیار درجه حرارت سابق شهر بیشتر است؟ $\alpha = 0.01$

راه حل:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 16^2 \\ H_1 : \sigma^2 > 16^2 \end{cases}$$

$$X^2_* = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0} = \frac{(15-1) \times 18^2}{16^2} = 17.72$$

$$C : X^2_* > \chi^2_{1-\alpha, (n-1)} \Rightarrow 17.72 \not> 29.1$$

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow \chi^2_{0.99, (14)} = 29.1$$

پس فرض صفر رد نمی شود؛ یعنی انحراف معیار درجه حرارت سالانه این شهر نسبت به سابق بیشتر نشده است.

آزمون فرض برای نسبت واریانس دو جامعه‌ی نرمال

آزمون نسبت واریانس دو جامعه نرمال

فرض کنید دو جامعه داشته باشیم.

جامعه‌ی اول دارای میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 باشد.

جامعه‌ی دوم دارای میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشد.

یک نمونه‌ی تصادفی n تایی X_1, \dots, X_n از جامعه‌ی اول انتخاب کرده و واریانس آن را با S_1^2 نمایش می‌دهیم.

یک نمونه‌ی تصادفی m تایی Y_1, \dots, Y_m از جامعه‌ی دوم انتخاب کرده و واریانس آن را با S_2^2 نمایش می‌دهیم.

فرض کنید نمونه گیری از دو جامعه مستقل از یکدیگر باشد.

بهترین برآوردگر نقطه‌ای برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عبارت است از: $\frac{S_1^2}{S_2^2}$

برای به دست آوردن آماره آزمون و ساختن ناحیه بحرانی برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ داریم: $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{(n-1, m-1)}$

آزمون نسبت واریانس دو جامعه نرمال

مراحل انجام آزمون فرضیه‌های مربوط به نسبت واریانس دو جامعه نرمال به صورت زیر است:

۱- نوشتن فرضیه‌های آزمون (شبه به مرحله ۳)

۲- محاسبه آماره آزمون $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

۳- تعیین ناحیه بحرانی

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$C : F_0 > F_{1-\alpha, (n-1, m-1)}$$

$$C : F_0 < F_{\alpha, (n-1, m-1)}$$

$$C : F_0 > F_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1, m-1)} \\ \text{یا } F_0 < F_{\frac{\alpha}{2}, (n-1, m-1)}$$

۴- نتیجه‌گیری بر مبنای مرحله ۳

مثال ۲۸

گروه ریاضی یک دانشگاه دو نوع امتحان ریاضی برای تعیین میزان معلومات دانشجویان ورودی برگزار می‌کند. دو گروه از دانشجویان را که در این دو نوع امتحان شرکت کرده‌اند در نظر گرفته و اطلاعات زیر به دست آمده است. آیا در سطح معنی‌داری ۰/۰۲ دو امتحان دارای واریانس یکسان هستند؟

$$n = ۲۱ \quad s_1^2 = ۱۲۱ \quad m = ۱۶ \quad s_2^2 = ۶۴$$

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$F_* = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{۱۲۱}{۶۴} = ۱/۸۹$$

$$C : F_* < F_{\frac{\alpha}{2}, (n-1), (m-1)} \text{ یا } F_* > F_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1), (m-1)} \Rightarrow ۱/۸۹ \not< ۰/۳۲۴ \text{ یا } ۱/۸۹ \not> ۳/۳۷$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}, (n-1), (m-1)} = \frac{۱}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, (m-1), (n-1)}} \Rightarrow F_{۰/۰۱, (۲۱-۱), (۱۶-۱)} = \frac{۱}{F_{۰/۹۹, (۱۵), (۲۰)}} = \frac{۱}{۳/۰۹} = ۰/۳۲۴$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1), (m-1)} = F_{۰/۹۹, (۲۰), (۱۵)} = ۳/۳۷$$

پس فرض صفر رد نمی‌شود؛ یعنی واریانس نمرات در امتحان یکسان است.

مثال ۲۹

در مطالعه‌ی جریان ترافیک در دو تقاطع شلوغ بین ساعت ۴ تا ۶ بعدازظهر دیده شده که در ۴۱ روز از روزهای معمولی هفته به طور متوسط $۲۴۷/۳$ با انحراف استاندارد $۱۵/۲$ ماشین از سمت جنوب به تقاطع اول می‌رسند و گردش به چپ دارند در حالی که در ۳۱ روز از روزهای معمولی هفته به طور متوسط $۲۵۴/۱$ با انحراف استاندارد $۱۸/۷$ ماشین از سمت جنوب به تقاطع دوم می‌رسند و گردش به چپ دارند. آیا در سطح معنی‌داری $۰/۰۵$ می‌توان ادعا کرد که تغییرپذیری بزرگ‌تری در تقاطع دوم در تعداد ماشین‌هایی که از سمت جنوب می‌آیند و گردش به چپ دارند، وجود دارد؟
راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$F_* = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(15/2)^2}{(18/7)^2} = 0/66$$

$$C : F_* < F_{\alpha, (n-1, m-1)} \Rightarrow 0/66 \not< 0/575$$

$$F_{\alpha, (n-1, m-1)} = \frac{1}{F_{1-\alpha, (m-1, n-1)}} \Rightarrow F_{0/05, (41-1, 31-1)} = \frac{1}{F_{0/95, (30, 40)}} = \frac{1}{1/74} = 0/575$$

پس فرض صفر رد نمی‌شود؛ تغییرپذیری در تقاطع دوم در تعداد ماشین‌هایی که از سمت جنوب می‌آیند و گردش به چپ دارند، بزرگ‌تر نیست.

رابطه آزمون فرض و فاصله اطمینان

در آزمون فرضیه زیر ناحیه رد فرض صفر به صورت $C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تعریف شد؛ که در آن $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

پس ناحیه پذیرش فرض صفر به صورت $C' : |Z_0| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تعریف می‌شود:

$$C' : |Z_0| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad C' : \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$C' : -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$C' : \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

این همان فاصله اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ برای μ است که در فصل قبل داشتیم.

• ناحیه پذیرش فرض صفر همان فاصله اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ درصدی است.

• اگر μ_0 در داخل فاصله اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ قرار گیرد، فرد صفر را می‌پذیریم؛ در غیراین صورت آن را رد

$p - value$

کمترین مقدار از سطح معنی داری α که مقدار مشاهده شده‌ی آماره آزمون موجب رد فرض صفر می‌شود را $p - value$ می‌گویند.

طریقه محاسبه‌ی $p - value$
فرض کنید $t = T(x_1, \dots, x_n)$ مقدار مشاهده شده‌ی آماره آزمون باشد:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \quad p - value = P_{\theta=\theta_0}(T(X) < t)$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} \quad p - value = P_{\theta=\theta_0}(T(X) > t)$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases} \quad p - value = \min\{P_{\theta=\theta_0}(T(X) < t), P_{\theta=\theta_0}(T(X) > t)\}$$
$$= \begin{cases} P(T(X) < t) & t < t_0 \\ P(T(X) > t) & t > t_0 \end{cases}$$

$p - value$

در انجام یک آزمون آماری

اگر $p - value > 0.05$ باشد، فرض H_0 را می‌پذیریم.

اگر $p - value \leq 0.05$ باشد، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

توجه کنید در خروجی‌های نرم‌افزارها $p - value$ با نماد Sig ظاهر می‌شود.

مثال ۳۰

مثال ۵ وزارت کار و امور اجتماعی مزد روزانه‌ی کارگران کارخانه‌ای را به طور متوسط ۱۳۲ هزار تومان با انحراف معیار ۲۵ هزار تومان تعیین کرده است. اگر کارخانه‌ای به ۴۰ کارگر خود روزانه به طور متوسط ۱۲۲ هزار تومان پرداخت کند، آیا می‌توان این کارخانه را متهم کرد که کمتر از مزد تعیین شده‌ی وزارت کار و امور اجتماعی پرداخت می‌کند؟

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 132 \\ H_1 : \mu < 132 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p - value &= P_{\mu=132} (\bar{X} < \bar{x}) \\ &= P \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{122 - 132}{\frac{25}{\sqrt{40}}} \right) \\ &= P(Z < -2.53) = 0.0057 \end{aligned}$$

چون $0.0057 < 0.05$ پس فرض صفر رد می‌شود. یعنی می‌توان این کارخانه را متهم کرد که کمتر از مزد تعیین شده‌ی وزارت کار پرداخت می‌کند.

مثال ۳۱

یک تولید کننده‌ی بستنی ادعا دارد که محصولش در هر لیوان به طور متوسط ۵۰۰ کالری دارد. برای آزمون این ادعا، نمونه‌ای تصادفی ۲۵ تایی از لیوان‌های بستنی انتخاب کرده و مشاهده کردیم که $\bar{x} = ۵۱۰$ و $s = ۲۳$ است. ادعای این شخص را آزمون کنید.

راه حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = ۵۰۰ \\ H_1 : \mu \neq ۵۰۰ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= ۲P_{\mu=۵۰۰}(\bar{X} > \bar{x}) \\ &= ۲P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > \frac{۵۱۰ - ۵۰۰}{\frac{۲۳}{\sqrt{۲۵}}}\right) \\ &= ۲P(t_{(۲۴)} > ۲/۱۷) = ۲[۱ - ۰/۹۸] = ۰/۰۴ \end{aligned}$$

چون $p\text{-value} = ۰/۰۴ < ۰/۰۵$ پس فرض صفر رد می‌شود.

مثال ۳۲

میخ‌ها به منظور قرار گرفتن در سوراخی ساخته می‌شوند. اگر انحراف استاندارد قطر سوراخ‌ها بیش از 0.01 میلی‌متر باشد، احتمال زیادی وجود دارد که میخ مناسب نبوده و غیر قابل قبول باشد. نمونه تصادفی از $n = 15$ قسمت انتخاب شده و قطر سوراخ‌ها اندازه‌گیری شده است. با فرض آن که $s = 0.008$ میلی‌متر است، آیا شواهد محکمی وجود دارد که نشان دهد انحراف استاندارد قطر سوراخ بیش از 0.01 میلی‌متر است؟

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 0.01^2 \\ H_1 : \sigma^2 > 0.01^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P_{\sigma^2=0.01^2} (S^2 > s^2) \\ &= P \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \frac{(15-1) \times 0.008^2}{0.01^2} \right) \\ &= P \left(\chi_{(14)}^2 > 8.96 \right) \simeq 1 - 0.15 \simeq 0.85 \end{aligned}$$

چون $p\text{-value} = 0.85 > 0.05$ پس فرض صفر رد نمی‌شود.

مثال آخر

ادعای تبلیغاتی یک شرکت در مورد باتری‌های تلفن‌های همراه تولیدی‌اش آن است که در صورت شارژ صحیح، باتری‌ها ۴۸ ساعت کار می‌کنند. مطالعه‌ی ۵۰۰۰ باتری انجام شده و کارکرد ۱۵ باتری قبل از ۴۸ ساعت متوقف شده است. آیا این نتایج تجربی از این ادعا حمایت می‌کنند که کمتر از ۰/۲ درصد باتری‌های شرکت در طی مدت زمان تبلیغ و با روش‌های مناسب شارژ از بین می‌روند؟

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.002 \\ H_1 : p < 0.002 \end{cases}$$

$$p - value = P_{p=0.002} (X \leq 15)$$

$$= P \left(\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} \leq \frac{15 - (5000 \times 0.002)}{\sqrt{5000 \times 0.002 \times 0.998}} \right)$$

$$= P (Z \leq 1/58) = 0.9429$$

چون $p - value = 0.9429 > 0.05$ پس فرض صفر رد نمی‌شود؛ درصد باتری‌هایی که با ادعای شرکت تناقض دارد کمتر از ۰/۰۰۲ نیست.