آمار و احتمالات مهندسی

فصل: متغیرهای تصادفی گسسته

مدرس: مشکانی

تعریف متغیر تصادفی

- متغیرهای تصادفی تبدیل‌کننده‌ی عناصر فضای نمونه آزمایش‌های تصادفی به فضاهای عددی هستند.

- هر تابع حقیقی X بر فضای نمونه‌ی S به زیرمجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را یک متغیر تصادفی گوییم: $X : S \to \mathbb{R}$

- فضای R_X را که فضای مقادیر متغیر تصادفی X است، برد، مجموعه مقادیر ممکن و یا تکیه‌گاه X می‌نامند.

چند نکته:

- **علت نام‌گذاری:**
  - یک متغیر است (مقادیر مختلفی را اختیار می‌کند)
  - تصادفی است (مقادیر تحت یک آزمایش تصادفی به دست آمده)

➢ متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ لاتین مثل X و Y و Z و ... نمایش می‌دهیم.
➢ هر مقدار از متغیر تصادفی را با حروف کوچک لاتین نمایش می‌دهیم.

▪ متغیرهای تصادفی نقشی در تولید احتمالات ندارند. احتمالات همچنان در فضای نمونه رخ می‌دهند و به تکیه‌گاه انتقال می‌یابند.

مثال ۱

- سکه سالمی را دو مرتبه می‌ریزیم. اگر X نشانه‌ی تعداد خط‌های ظاهر شده باشد،
الف- اعضای فضای نمونه را بنویسید.

ب- اعضای برد تابع تعریف شده را همراه با احتمالات متناظرشان تعیین کنید.

- راه‌حل:

$$S=\left\{HH,HT,TH,TT\right\}$$

$$X:Number\ of\ Tails \qquad \Rightarrow \qquad R_X=\left\{۰\ ,\ ۱\ ,\ ۲\right\}$$

$$P\left(X=۰\right)=P\left\{HH\right\}=\frac{۱}{۴}$$

$$P\left(X=۱\right)=P\left\{HT,TH\right\}=\frac{۲}{۴}$$

$$P\left(X=۲\right)=P\left\{TT\right\}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۲

- دو تاس سالم را همزمان می‌ریزیم. اگر X نشانه‌ی ماکسیمم برآمد دو تاس باشد، اعضای تکیه‌گاه را همراه با احتمالات متناظرشان تعیین کنید.
- راه‌حل:

$$S = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),\ldots,(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

$$X : Maximum\ of\ two\ dice$$

$$R_X = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$P(X=۱) = P\{(۱,۱)\} = \frac{۱}{۳۶}$$

$$P(X=۲) = P\{(۱,۲)(۲,۱)(۲,۲)\} = \frac{۳}{۳۶}$$

$$P(X=۳) = P\{(۱,۳)(۲,۳)(۳,۱)(۳,۲)(۳,۳)\} = \frac{۵}{۳۶}$$

$$P(X=۴) = P\{(۱,۴)(۲,۴)(۳,۴)(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴)\} = \frac{۷}{۳۶}$$

$$P(X=۵) = \frac{۹}{۳۶} \qquad P(X=۶) = \frac{۱۱}{۳۶}$$

مثال ۳

- از داخل دایره‌ای به شعاع R نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی Y را برابر فاصله‌ی نقطه‌ی انتخاب شده تا مرکز دایره در نظر می‌گیریم. تکیه‌گاه Y را بنویسید.

- راه‌حل:

$$R_Y = [\,0\,,\,R\,]$$

انواع متغیرهای تصادفی

- براساس شمارا یا ناشمارا بودن تکیه‌گاه، متغیرهای تصادفی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

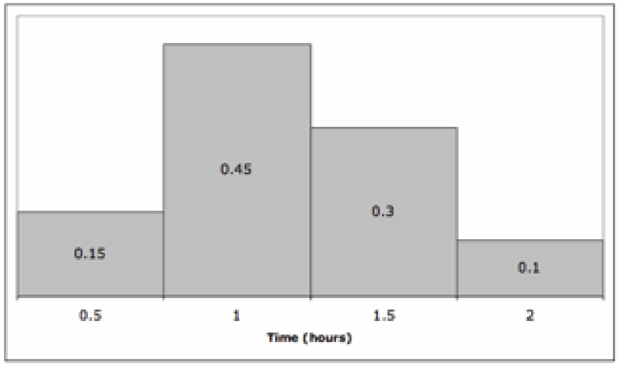
- الف- **متغیرهای تصادفی گسسته:** اگر تکیه‌گاه متغیر تصادفی X مجموعه‌ای شمارا باشد، X را یک متغیر تصادفی گسسته می‌نامند.

- ب- **متغیرهای تصادفی پیوسته:** اگر تکیه‌گاه متغیر تصادفی X مجموعه‌ای ناشمارا باشد، X را یک متغیر تصادفی پیوسته می‌نامند.

متغیرهای تصادفی گسسته

توزیع احتمالات متغیرهای گسسته

X = parking time (hours)	0.5	1.0	1.5	2.0
P(X)	0.15	0.45	0.30	0.10



توزیع احتمال

- **تابع چگالی احتمال:** نحوه‌ی توزیع احتمالات مقادیر و پیشامدهای متغیر تصادفی X به‌وسیله‌ی تابعی به نام تابع چگالی احتمال مشخص می‌شود.

- **جدول توزیع احتمال:** در حالت گسسته، توابع چگالی احتمال ممکن است به صورت جدول‌هایی از مقادیر X و احتمالات متناظر آنها ارائه شوند. این جدول را **جدول توزیع احتمال** می‌گویند.
  - هر گاه X گسسته با مقادیر ممکن $x_۱, x_۲, x_۳, \ldots$ و احتمالات متناظر $p_۱, p_۲, p_۳, \ldots$ باشند:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	...
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...

$$p_i > ۰$$

$$\sum p_i = ۱$$

مثال ۴

- فرض کنید از یک دست کارت ۵۲ تایی، ۳ کارت به تصادف یکی پس از دیگری و با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. اگر در این سه کارت X تعداد پیک‌ها باشد، تابع احتمال آن را به دست آورید.
- راه‌حل

$$R_X = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$$

$$P(X = ۰) = P\{(q, q, q)\} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۲۷}{۶۴}$$

$$P(X = ۱) = P\{(p, q, q)(q, p, q)(q, q, p)\} = \left[\frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴}\right] \times ۳ = \frac{۲۷}{۶۴}$$

$$P(X = ۲) = P\{(p, p, q)(p, q, p)(q, p, p)\} = \left[\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۴}\right] \times ۳ = \frac{۹}{۶۴}$$

$$P(X = ۳) = P\{(p, p, p)\} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۶۴}$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	27/64	27/64	9/64	1/64

مثال ۵

- سه مهره به شماره‌های ۱، ۲ و ۳ را در سه جعبه به شماره‌های ۱، ۲ و ۳ به طور تصادفی می‌ریزیم به گونه‌ای که هر جعبه تنها شامل یک مهره باشد. اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد جورها (تعداد مهره‌هایی که در جعبه با شماره متناظر خودشان قرار گیرند) باشد، مطلوب است:

الف- تابع جرم احتمال آن

ب- احتمال اینکه دقیقاً یک جور داشته باشیم.

ج- احتمال اینکه حداقل دو جور داشته باشیم.

راه‌حل

$$S = \left\{ \hat{۱}\hat{۲}\hat{۳} \,,\, \hat{۱}۳۲ \,,\, ۲۱\hat{۳} \,,\, ۲۳۱ \,,\, ۳۱۲ \,,\, ۳\hat{۲}۱ \right\} \qquad \Rightarrow R_X = \left\{ ۰, ۱, ۳ \right\}$$

$X = x_i$	۰	۱	۳
$P\left(X = x_i\right)$	۲/۶	۳/۶	۱/۶

$$P\left(X = ۱\right) = \frac{۳}{۶}$$

$$P\left(X \geq ۲\right) = P\left(X = ۳\right) = \frac{۱}{۶}$$

مثال ۶

- یک دستگاه از سه جزء مکانیکی تشکیل شده است. فرض کنید احتمال این‌که جـزء اول، دوم و سوم مشخصات لازم را داشته باشند، به ترتیب ۰/۹۵، ۰/۹۸ و ۰/۹۹ اسـت. با فرض آن‌که اجزا مستقل از یکدیگر کار می‌کنند، تابع جرم احتمـال تعـداد اجزایـی که مشخصات لازم را دارند، به دست آورید.

- راه‌حل

$$R_X = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$$

$$P(X = ۰) = ۰/۰۵ \times ۰/۰۲ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۰۰۱$$

$$P(X = ۱) = ۰/۹۵ \times ۰/۰۲ \times ۰/۰۱ + ۰/۰۵ \times ۰/۹۸ \times ۰/۰۱ + ۰/۰۵ \times ۰/۰۲ \times ۰/۹۹ = ۰/۰۰۱۶۷$$

$$P(X = ۲) = ۰/۹۵ \times ۰/۹۸ \times ۰/۰۱ + ۰/۰۵ \times ۰/۹۸ \times ۰/۹۹ + ۰/۹۵ \times ۰/۰۲ \times ۰/۹۹ = ۰/۰۷۶۶۳$$

$$P(X = ۳) = ۰/۹۵ \times ۰/۹۸ \times ۰/۹۹ = ۰/۹۲۱۶۹$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.00001	0.00167	0.07663	0.92169

مثال ۷

- سه توپ را به تصادف از ظرفی که شامل ۳ توپ سفید، ۳ توپ قرمز و ۵ توپ سیاه است، انتخاب می‌کنیم. فرض کنید برای هر توپ سفید انتخاب شده ۱ دلار جایزه و برای هر توپ قرمز انتخاب شده ۱ دلار جریمه شویم. اگر X نشان‌دهنده‌ی میزان برد در این آزمایش باشد، احتمال بردن در این بازی چقدر است؟

$$R_X = \left\{۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳\right\}$$

$$P\left(winning\right) = P\left(X = ۱\right) + P\left(X = ۲\right) + P\left(X = ۳\right)$$

$$P\left(X = ۱\right) = \frac{\binom{۳}{۱}^{W}\binom{۵}{۲}^{B}}{\binom{۱۱}{۳}} + \frac{\binom{۳}{۲}^{W}\binom{۳}{۱}^{R}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

$$P\left(X = ۲\right) = \frac{\binom{۳}{۲}^{W}\binom{۵}{۱}^{B}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

$$P\left(X = ۳\right) = \frac{\binom{۳}{۳}^{W}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

تابع چگالی احتمال (تابع جرم احتمال)

- برای هر متغیر تصادفی گسسته، تابع جرم احتمـال آن بـه صـورت زیـر تعریف می‌شود:

$$f_X\left(x\right) = P\left(X = x\right)$$

- این تابع دارای خصوصیات زیر است:

$$\begin{aligned} &۱- \quad f\left(x\right) > ۰ \qquad\qquad \forall x \in R_X \\ &۲- \quad \sum_{R_X} P\left(X = x\right) = ۱ \end{aligned}$$

مثال ۸ – الف

- مقدار k را چنان تعیین کنید که تابع زیر، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X باشد.

$$P\left(X = x\right) = k\left(۸ - x\right), \qquad x = ۰, ۱, ۲, ۳$$

- راه‌حل

$X = x_i$	0	1	2	3
$P\left(X = x_i\right)$	k(8-0)	K(8-1)	K(8-2)	K(8-3)

$$۱) \quad k > ۰$$

$$۲) \quad ۸k + ۷k + ۶k + ۵k = ۱ \quad \Rightarrow \quad ۲۶k = ۱ \quad \Rightarrow \quad k = \frac{۱}{۲۶}$$

مثال ۸ – ب

- …

$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+3}, & x=1,2,3 \\ k, & x=4,5,6 \\ 0, & OW. \end{cases}$$

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	1/4	2/7	3/12	k	k	k

$$۱)\quad k > ۰$$

$$۲)\quad \frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۷}+\frac{۳}{۱۲}+k+k+k=۱ \quad\Rightarrow\quad ۳k=\frac{۳}{۱۴} \quad\Rightarrow\quad k=\frac{۱}{۱۴}$$

مثال ۸ – ج و د

$$P\left(X=x\right)=kx, \qquad x=۱,۲,\ldots,n \qquad \therefore \sum_{x=۱}^{n} x=\frac{n\left(n+۱\right)}{۲} \therefore$$

$$Ans: \quad ۱) \quad k>۰$$

$$۲) \quad \sum_{x=۱}^{n} P\left(X=x\right)=\sum_{x=۱}^{n} kx=k\sum_{x=۱}^{n} x=k\,\frac{n\left(n+۱\right)}{۲}=۱ \quad \Rightarrow \quad k=\frac{۲}{n\left(n+۱\right)}$$

$$P\left(X=x\right)=kx^{۲}, \qquad x=۱,۲,\ldots,n \qquad \therefore \sum_{x=۱}^{n} x^{۲}=\frac{n\left(n+۱\right)\left(۲n+۱\right)}{۶} \therefore$$

$$Ans: \quad ۱) \quad k>۰$$

$$۲) \quad \sum_{x=۱}^{n} P\left(X=x\right)=\sum_{x=۱}^{n} kx^{۲}=k\sum_{x=۱}^{n} x^{۲}=k\,\frac{n\left(n+۱\right)\left(۲n+۱\right)}{۶}=۱ \quad \Rightarrow \quad k=\frac{۶}{n\left(n+۱\right)\left(۲n+۱\right)}$$

مثال ۹

- تابع مقابل را در نظر بگیرید.

الف- مقدار c را چنان تعیین کنید که f(y) تابع احتمال متغیر تصادفی Y باشد.

ب- احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$$f_Y\left(y\right)=c\left(\frac{۱}{۶}\right)^y \qquad y=۰,۱,۲,\ldots.$$

$$\because |q|<۱ \qquad \therefore \sum_{x=a}^{\infty} q^x=\frac{q^a}{۱-q}$$

- راه‌حل

$$۱) \quad c>۰$$

$$۲) \quad \sum_{R_Y} P\left(Y=y\right)=\sum_{y=۰}^{\infty} c\left(\frac{۱}{۶}\right)^y = c\,\frac{\left(\frac{۱}{۶}\right)^۰}{۱-\frac{۱}{۶}}=c\,\frac{۶}{۵}=۱ \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{۵}{۶}$$

$$P\left(Y\le\frac{۵}{۲}\right)=P\left(Y=۰\right)+P\left(Y=۱\right)+P\left(Y=۲\right)=\frac{۵}{۶}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۰+\frac{۵}{۶}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۱+\frac{۵}{۶}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۲$$

$$P\left(Y\ge\frac{۱۱}{۳}\right)=P\left(Y=۴\right)+P\left(Y=۵\right)+\ldots=\sum_{y=۴}^{\infty}\frac{۵}{۶}\left(\frac{۱}{۶}\right)^y=\frac{۵}{۶}\,\frac{\left(\frac{۱}{۶}\right)^۴}{۱-\frac{۱}{۶}}=\left(\frac{۱}{۶}\right)^۴$$

مثال ۱۰

- تابع احتمال متغیر تصادفی Z به صورت زیر است که در آن $\lambda > 0$

الف- مطلوبست تعیین مقدار c

ب- محاسبه احتمالات زیر

$$P\left(Z = z\right) = c\frac{\lambda^z}{Z\,!} \qquad z = ۰, ۱, ۲, \ldots \qquad \therefore \sum_{x=۰}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x\,!} = e^{\lambda} \because$$

راه‌حل

$$۱) \quad c > ۰$$

$$۲) \quad \sum_{R_Z} P\left(Z = z\right) = \sum_{z=۰}^{\infty} c\frac{\lambda^z}{Z\,!} = ce^{\lambda} = ۱ \qquad \Rightarrow \qquad c = e^{-\lambda}$$

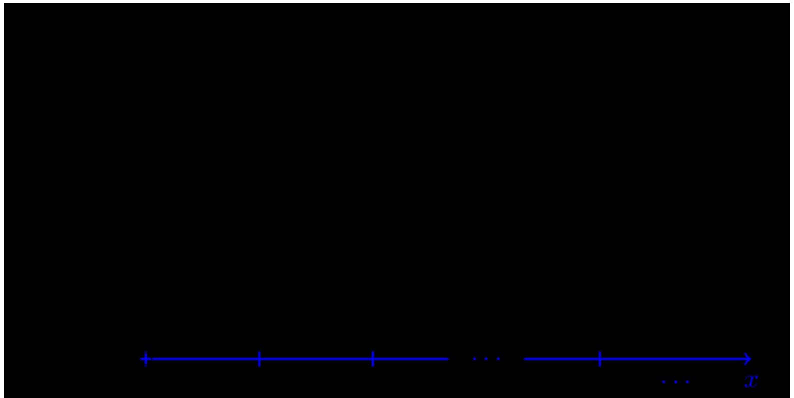
$$P\left(Z = ۰\right) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{۰}}{۰\,!} = e^{-\lambda}$$

$$P\left(Z > ۲\right) = ۱ - P\left(Z \le ۲\right) = ۱ - \left\{P\left(Z = ۰\right) + P\left(Z = ۱\right) + P\left(Z = ۲\right)\right\}$$

$$= ۱ - \left\{e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^{۲}}{۲}\right\}$$

تابع توزیع تجمعی

تعریف کلی



تعریف و ویژگی‌های تابع توزیع تجمعی

- تابع توزیع F برای متغیر تصادفی X در نقطه t بیان‌کننده‌ی احتمال ایـن پیشامد است که متغیر تصادفی X مقداری کمتر یا مساوی t داشته باشد.

$$F_X(t) = P(X \le t)$$

- **خصوصیات تابع توزیع تجمعی**

۱- تابعی غیر نزولی است

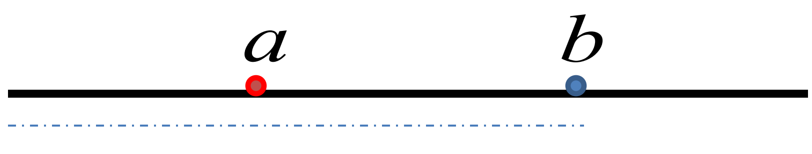
۲- $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = ۰$ $\qquad$ $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = ۱$

۳- از راست پیوسته است.

تعدادی رابطه‌ی کاربردی

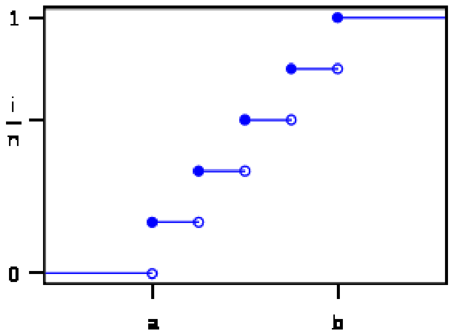
- زمانی که با استفاده از تابع توزیع تجمعی بخواهیم احتمال پیشامدی حساب کنیم:

- $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a^-)$
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \le a) = F_X(b^-) - F_X(a)$
- $P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F_X(a)$
- $P(X = a) = P(X \le a) - P(X < a) = F_X(a) - F_X(a^-)$



تابع توزیع تجمعی

برای متغیرهای تصادفی گسسته



تابع توزیع تجمعی برای متغیرهای گسسته

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد:

$$F_X(t) = P(X \le t) = \sum_{x=-\infty}^{t} P(X = x)$$

- توجه کنید که تابع توزیع تجمعی یک تابع احتمال است؛ پس همواره $0 \le F(t) \le 1$ است.

- در متغیرهای تصادفی گسسته، **تابع احتمال** به صورت نمودار میلـه‌ای و **تابع توزیع تجمعی** شکل تابع پله‌ای را دارد.

مثال ۱۱– الف

- فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است. تابع توزیع تجمعی X را به‌دست آورید.

$X = x_i$	1	2	3	4
$P\left(X = x_i\right)$	1/8	1/2	1/8	1/4

- راه‌حل

$$F_X\left(t\right) = \begin{cases} ۰, & t < ۱ \\ \frac{۱}{۸}, & ۱ \le t < ۲ \\ \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۸}, & ۲ \le t < ۳ \\ \frac{۵}{۸} + \frac{۱}{۸} = \frac{۶}{۸}, & ۳ \le t < ۴ \\ \frac{۶}{۸} + \frac{۱}{۴} = ۱, & t \ge ۴ \end{cases}$$

مثال ۱۱- ب

$X = x_i$	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{\theta}{4}$	$1-\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{4}$

راه‌حل

$$F_X(t) = \begin{cases} ۰, & t < -۱ \\ \frac{\theta}{۴}, & -۱ \leq t < ۰ \\ \frac{\theta}{۴} + ۱ - \frac{\theta}{۲} = ۱ - \frac{\theta}{۴}, & ۰ \leq t < ۱ \\ ۱ - \frac{\theta}{۴} + \frac{\theta}{۴} = ۱, & ۱ \leq t \end{cases}$$

مثال ۱۲

- فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است. تابع توزیع تجمعی X را به‌دست آورید.

$$P\left(X = x\right) = \left(۱ - p\right)^{x-۱} p, \qquad x = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

- راه‌حل:

$$F_X\left(t\right) = P\left(X \le t\right) = \sum_{x=-\infty}^{t} P\left(X = x\right) = \sum_{x=۱}^{t} \left(۱ - p\right)^{x-۱} p$$

$$\underline{\underline{y = x - ۱}} \quad p\sum_{y=۰}^{t-۱} \left(۱ - p\right)^{y} = p \times \frac{۱ - \left(۱ - p\right)^{t}}{۱ - \left(۱ - p\right)} = ۱ - \left(۱ - p\right)^{t}$$

$$\therefore \sum_{x=۰}^{k} q^{x} = \frac{۱ - q^{k+۱}}{۱ - q}$$

مثال ۱۳ (محاسبه‌ی تابع جرم احتمال با استفاده از تابع توزیع تجمعی)

- فرض کنید تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است. تابع جرم احتمال را به‌دست آورید.

$$F_X(t)=\begin{cases} ۰, & t<۱ \\ \frac{۶}{۱۹}, & ۱\le t<۳ \\ \frac{۱۰}{۱۹}, & ۳\le t<۵ \\ ۱, & t\ge ۵ \end{cases}$$

راه‌حل

$$P(X=۱)=F(۱)-F(۱^-)=\frac{۶}{۱۹}-۰=\frac{۶}{۱۹}$$

$$P(X=۳)=F(۳)-F(۳^-)=\frac{۱۰}{۱۹}-\frac{۶}{۱۹}=\frac{۴}{۱۹}$$

$$P(X=۵)=F(۵)-F(۵^-)=۱-\frac{۱۰}{۱۹}=\frac{۹}{۱۹}$$

$X=x_i$	1	3	5
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{19}$	$\frac{10}{19}-\frac{6}{19}=\frac{4}{19}$	$1-\frac{10}{19}=\frac{9}{19}$

مثال ۱۳ – ب

$$F_X(t) = \begin{cases} ۰, & t < ۳ \\ \frac{۱}{۳}, & ۳ \le t < ۴ \\ \frac{۱}{۲}, & ۴ \le t < ۵ \\ \frac{۲}{۳}, & ۵ \le t < ۶ \\ ۱, & t \ge ۶ \end{cases}$$

راه‌حل

$X = x_i$	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

مثال ۱۴

- در یک کانال انتقال آزمایشی خطاها زمانی پیدا می‌شوند که پالس‌های از دست رفته تشخیص داده شوند. تعداد خطاهای یافت شده در بایت هشت‌بیتی یک متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی زیر است:

$$F_X\left(x\right)=\begin{cases} ۰, & x<۱ \\ ۰/۷, & ۱\le x<۴ \\ ۰/۹, & ۴\le x<۷ \\ ۱, & x\ge ۷ \end{cases}$$

❖ مطلوب است:

$$P\left(X \le ۴\right)=F\left(۴\right)=۰/۹$$

$$P\left(X > ۷\right)=۱-F(۷)=۱-۱=۰$$

$$P\left(X < ۲\right)=F\left(۲^-\right)=۰/۷$$

$$P\left(X=۲\right)=F\left(۲\right)-F\left(۲^-\right)=۰/۷-۰/۷=۰$$