توزیع‌های شناخته شده‌ی گسسته
-آمار و احتمالات مهندسی-

مدرس: مشکانی فراهانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

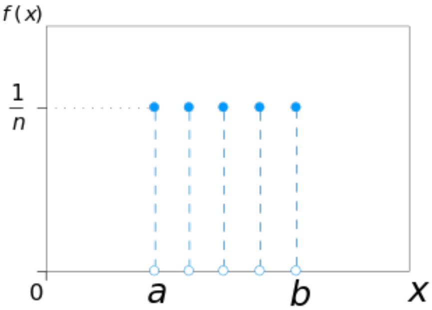
۱۳ آبان ۱۳۹۹

توزیع‌های شناخته شده (معروف)

بعضی از متغیرهای تصادفی دارای یک الگوی خاصی هستند به طوری که می‌توان برای آنها یک نوع توزیع احتمال را در نظر گرفت.

به عنوان مثال: اگر X تعداد مشاهده خال ۶ در ۷ بار پرتاب یک تاس و Y تعداد برخورد به هدف در ۵ بار پرتاب دارت باشند، این دو متغیر تصادفی دارای یک شکل هستند یعنی هر دو تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش مستقل را بیان می‌کند.

توزیع یکنواخت گسسته



توزیع یکنواخت گسسته

ساده‌ترین توزیع در بین توزیع‌های احتمالی گسسته است.

اگر متغیر تصادفی X مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_k$ را با احتمال‌های یکسان اختیار کند، آن‌گاه توزیع احتمال آن‌ها عبارت است از:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{k}, \qquad x = x_1, x_2, \ldots, x_k \tag{1}$$

این توزیع مقدار احتمال را بین تمامی مقادیر متغیر تصادفی به طور یکسان تقسیم می‌کند.

نمادی که برای توزیع یکنواخت گسسته استفاده می‌شود: $X \sim DU(k)$

میانگین و واریانس توزیع یکنواخت گسسته

میانگین و واریانس توزیع یکنواخت گسسته عبارت است از:

$$\mu = E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X_i - \mu)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k}$$

تعریف

- k را پارامتر توزیع می‌نامند. پارامترهای یک توزیع مقادیر ثابتی هستند که به‌ازای قرار دادن مقادیر مختلف برای آن‌ها توابع چگالی متفاوتی به دست می‌آید.

- به مجموعه تمام توزیع‌های احتمال برای مقادیر مختلف پارامترها، خانواده توزیع احتمال گفته می‌شود.

یک حالت خاص

اگر متغیر تصادفی X مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را با احتمالات $P(X = x) = \frac{1}{n}$ اختیار کند، می‌گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته بر $\{1, 2, \ldots, n\}$ است:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} xP(X = x) = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 P(X = x) = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

یک حالت خاص

اگر متغیر تصادفی X مقادیر متوالی $a, a+۱, \ldots, b$ را با احتمالات مساوی اختیار کند، می‌گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته است:

$$P(X=x)=\frac{۱}{b-a+۱}$$

$$E(X)=\sum_{x=a}^{b} xP(X=x)=\frac{a+b}{۲}$$

$$Var(X)=E(X^۲)-E^۲(X)=\frac{(b-a+۱)^۲-۱}{۱۲}$$

مثال ۱

یک صفحه‌ی هدف‌زنی دایره‌ای شکل به ۱۵ قطاع مساوی تقسیم شده و با شماره‌های ۱ تا ۱۵ متمایز شده است. فرض کنید متغیر تصادفی X برابر عددی باشد که سوزن در قطاع مربوط به آن اصابت می‌کند.
الف- تابع احتمال، امید ریاضی و واریانس X را به دست آورید.
ب- احتمال این که سوزن در قطاع با شماره‌ی کمتر از ۱۰ بخورد، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

الف-
$$P(X = x) = \frac{۱}{۱۵}, \qquad x = ۱, ۲, \ldots, ۱۵$$
$$E(X) = \frac{۱ + ۱۵}{۲} = ۸$$
$$Var(X) = \frac{۱۵^{۲} - ۱}{۱۲} = ۱۸/۷$$

ب-
$$P(X < ۱۰) = \frac{۹}{۱۵}$$

مثال ۲

اندازه‌گیری ضخامت از یک فرآیند روکش سیم‌ها به نزدیکترین صدم میلیمتر انجام می‌شود. اندازه‌گیری ضخامت به طور یکنواخت با مقادیر ۰/۱۵، ۰/۱۶، ۰/۱۷، ۰/۱۸ و ۰/۱۹ توزیع می‌شود. میانگین و واریانس ضخامت روکش برای این فرآیند را تعیین کنید.

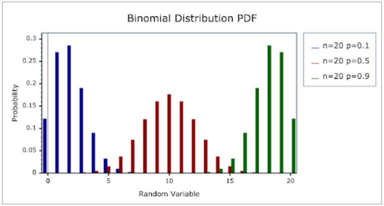
راه‌حل:

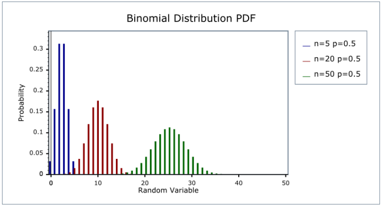
$$X = \frac{1}{100}Y, \qquad Y = 15, \quad 16, \quad 17, \quad 18, \quad 19$$

$$E(X) = E(\frac{1}{100}Y) = \frac{1}{100}E(Y) = \frac{1}{100} \times \frac{15+19}{2} = 0/17 \ \ mm$$

$$Var(X) = Var(\frac{1}{100}Y) = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \times \frac{(19-15+1)^2-1}{12} = 0/0002 \ \ mm^2$$

توزیع دوجمله‌ای





آزمایش برنولی

هر آزمایش تصادفی که تنها به دو برآمد ممکن مانند S و F منجر شود، را یک آزمایش برنولی گویند؛ مشروط بر آنکه بتواند در شرایط یکسان و مستقل از هم تکرار شوند.

معمولاً برآمدی را که بر آن تأکید بیشتری داریم را با S نمایش داده و آن را "موفقیت" (برآمد مد نظر سؤال) و در نتیجه برآمد دوم که F می‌باشد را "شکست" می‌خوانیم.

فضای نمونه‌ی این آزمایش برنولی $S^* = \{S, F\}$ است.

حال اگر $p = P(S)$ و $q = P(F)$ آنگاه p احتمال موفقیت و q احتمال شکست خواهد بود.

از آن‌جا که $P(S) + P(F) = ۱$ است، پس $p + q = ۱$ و در نتیجه: $q = ۱ - p$

فرآیند برنولی

فرآیند برنولی دارای ویژگی‌های زیر است:

۱- آزمایش شامل n امتحان تکراری است.

۲- هر آزمایش به برامدی منجر می‌شود که آن را می‌توان موفقیت یا شکست تعبیر کرد.

۳- احتمال موفقیت که آن را با p نشان می‌دهند، از آزمایشی به آزمایش دیگر ثابت است.

۴- آزمایش‌های تکراری مستقل هستند.

آزمایش برنولی

اکنون متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \begin{cases} ۱, & \text{اگر موفقیت رخ دهد} \\ ۰, & \text{اگر شکست رخ دهد} \end{cases}$$

در این صورت X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $R_X = \{۰, ۱\}$ است.

این متغیر تصادفی که به صورت تعداد پیروزی‌ها در یک آزمایش برنولی تعریف می‌شود را یک متغیر تصادفی برنولی می‌نامند.

توزیع دو جمله‌ای

تجربه‌ای را در نظر بگیرید که در آن یک آزمایش برنولی ثابت با احتمال موفقیت p، n بار مستقلاً تکرار شوند.
هدف از انجام چنین آزمایشی تعیین توزیع X تعداد موفقیت‌ها در n بار تکرار یک آزمایش برنولی باشد.
مثل پرتاب ۱۰ بار یک سکه سالم و تعیین توزیع تعداد شیرها.

این متغیر تصادفی را با $X \sim Bin(n,p)$ نمایش داده و تابع احتمال، میانگین و واریانس آن به صورت زیر هستند:

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p) = npq$$

n: تعداد دفعات تکرار آزمایش $\qquad$ p: احتمال موفقیت $\qquad$ هر دو پارامترهای توزیع هستند.

یک نکته و یک تذکر

توزیع برنولی حالت خاصی از توزیع دو جمله‌ای است، در حالت $X \sim Bin(n = ۱, p)$.

اگر $X \sim Bin(n, p)$ آنگاه $P(X = x)$ بدین معنی است که در n آزمایش مستقل برنولی ما x موفقیت و $n - x$ شکست داشته باشیم.

مثال ۳

سکه سالمی را چهار بار به هوا پرتاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه سه بار خط ظاهر شود.

راه‌حل:

X: تعداد دفعاتی که خط ظاهر می‌شود، در ۴ بار پرتاب سکه.

$$n = ۴ \qquad\qquad x = ۳$$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{ظاهر شدن خط}) = \frac{۱}{۲}$$

$$q = ۱ - p = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$P(X = ۳) = \binom{۴}{۳} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱} = \frac{۱}{۴}$$

یک تاس سالم را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه خال ۶ حداکثر ۲ بار مشاهده شود را بیابید.

راه‌حل:

X: تعداد دفعاتی که خال ۶ ظاهر می‌شود، در ۵ بار پرتاب تاس. $\quad X \sim Bin(n,p)$

$$n = ۵ \qquad\qquad x = ۰, ۱, ۲$$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{ظاهر شدن خال ۶}) = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow q = ۱ - p = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

$$P(X \leq ۲) = P(X = ۰) + P(X = ۱) + P(X = ۲)$$

$$= \binom{۵}{۰}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۰}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵} + \binom{۵}{۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۱}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴} + \binom{۵}{۲}\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۲}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳} \simeq ۰/۹۴$$

مثال ۵

آزمونی چهار جوابی که تنها یک گزینه آن صحیح است داده شده است. اگر تعداد سوال‌های آزمون ۲۵ عدد باشد و دانشجو هر سوال را به طور تصادفی و مستقل از یکدیگر پاسخ دهد

الف- احتمال اینکه دقیقاً ۱۰ سوال را پاسخ صحیح دهد چقدر است؟

ب- انتظار دارید به طور متوسط دانشجو چه تعدادی از سوالات را صحیح پاسخ دهد؟

راه‌حل:

X: تعداد سوالاتی که صحیح پاسخ می‌دهد، در بین ۲۵ سوال تستی. $\quad X \sim Bin(n,p)$

$$n = ۲۵ \qquad x = ۱۰$$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{صحیح پاسخ دادن}) = \frac{۱}{۴} \quad \Rightarrow \quad q = ۱ - p = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

الف- $\quad P(X = ۱۰) = \binom{۲۵}{۱۰} \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۰} \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۵}$

ب- $\quad E(X) = np = ۲۵ \times \frac{۱}{۴} = ۶/۲۵$

مثال ۶

ویزیتوری برای فروش کالای خاصی به درب منازل مراجعه می‌کند. وی ۱۰ درصد شانس دارد که بتواند کالای خود را به خانم خانه‌دار آن منزل بفروشد. اگر او در روز به ۲۰ منزل مراجعه کند، مطلوبست احتمال اینکه

الف- یک فروش داشته باشد.

ب- بیش از یک فروش داشته باشد.

راه‌حل:

X: تعداد کالاهایی که به ۲۰ خانه فروخته می‌شود. $\quad X \sim Bin(n=۲۰, p=۰/۱)$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{فروختن کالا}) = ۰/۱ \quad \Rightarrow \quad q = ۱ - p = ۱ - ۰/۱ = ۰/۹$$

$$\text{الف-} \quad P(X=۱) = \binom{۲۰}{۱} (۰/۱)^{۱} (۰/۹)^{۱۹}$$

$$\text{ب-} \quad P(X>۱) = ۱ - P(X \leq ۱) = ۱ - \{P(X=۰) + P(X=۱)\}$$

$$= ۱ - \left\{ \binom{۲۰}{۰} (۰/۱)^{۰} (۰/۹)^{۲۰} + \binom{۲۰}{۱} (۰/۱)^{۱} (۰/۹)^{۱۹} \right\} = ۰/۶۱$$

مثال ۷

هر نمونه آب ۱۰ درصد احتمال دارد که آلاینده آلی خاصی را داشته باشد. فرض کنید که نمونه‌ها با توجه به وجود آلاینده مستقل هستند. این احتمال را پیدا کنید که در ۱۸ نمونه بعدی، دقیقاً ۲ نمونه حاوی آلاینده باشد.

راه‌حل:

X: تعداد نمونه‌هایی که آلاینده دارند، در بین ۱۸ نمونه. $\quad X \sim Bin(n,p)$

$$n = ۱۸ \qquad\qquad x = ۲$$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{داشتن آلاینده}) = ۰/۱$$

$$q = ۱ - p = ۱ - ۰/۱ = ۰/۹$$

$$P(X = ۲) = \binom{۱۸}{۲} (۰/۱)^{۲} (۰/۹)^{۱۶}$$

مثال ۸

از آنجا که همه مسافران هواپیمایی برای صندلی‌های رزرو شده خود حضور ندارند، یک شرکت هواپیمایی برای بلیط پرواز که فقط ۱۲۰ مسافر در آن قرار دارد، ۱۲۵ بلیط می‌فروشد. احتمال عدم حضور مسافر ۰/۱۰ است و مسافران به طور مستقل رفتار می کنند.

الف) این احتمال که هر مسافری که حاضر شود می‌تواند پرواز داشته باشد، چقدر است؟

ب) احتمال پرواز با صندلی‌های خالی چه‌قدر است؟

راه‌حل:

X: تعداد مسافرانی که در پرواز حضور ندارند، در بین ۱۲۵ مسافر. $\quad X \sim Bin(n,p)$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{عدم حضور مسافر}) = ۰/۱ \quad \Rightarrow \quad q = ۱ - p = ۱ - ۰/۱ = ۰/۹$$

$$P(X \geq ۵) = ۱ - P(X \leq ۴)$$

$$= ۱ - \left\{ \binom{۱۲۵}{۰} (۰/۱)^{۰} (۰/۹)^{۱۲۵} + \cdots + \binom{۱۲۵}{۴} (۰/۱)^{۴} (۰/۹)^{۱۲۱} \right\}$$

توزیع چندجمله‌ای

اگر آزمایشی بیش از دو برامد ممکن داشته باشد، آن‌گاه آزمایش دوجمله‌ای به آزمایش چندجمله‌ای تبدیل می‌شود. مثل دسته‌بندی محصولات یک کارخانه به سبک، سنگین و وزن قابل قبول.

اگر آزمایشی به k برامد $E_1, E_2, \ldots, E_k$ با احتمال‌های $p_1, p_2, \ldots, p_k$ منجر شود، و اگر متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_k$ نشان‌دهنده‌ی تعداد وقوع $E_1, E_2, \ldots, E_k$ در n امتحان باشند، آن‌گاه توزیع احتمال آن‌ها عبارت است از:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots, p_k^{x_k}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

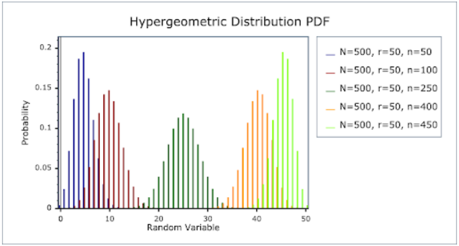
مثال ۹

احتمال این‌که شرکت‌کننده در کنفرانسی با هواپیما، اتوبوس، اتومبیل یا قطار وارد شهر محل کنفرانس شود، به ترتیب ۰/۴، ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۱ است. احتمال این‌که از بین ۹ شرکت‌کننده که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، ۳ نفر با هواپیما، ۳ نفر با اتوبوس، یک نفر با اتومبیل و ۲ نفر با قطار وارد این شهر شده باشند، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

$$P(۳,۳,۱,۲) = \binom{۹}{۳,۳,۱,۲} ۰/۴^۳ \times ۰/۲^۳ \times ۰/۳^۱ \times ۰/۱^۲ = ۰/۰۰۷۷$$

توزیع فوق‌هندسی



توزیع فوق‌هندسی

در توزیع دوجمله‌ای متغیر تصادفی X تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش برنولی مستقل تعریف شد؛ حال چنان‌چه استقلال بین آزمایش‌ها نقض شود (مثلاً نمونه‌گیری بدون جایگذاری صورت گیرد) با توزیع فوق‌هندسی روبرو هستیم.

وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن از جامعه‌ای به اندازه‌ی N که در آن K عضو مشخصه‌ای خاص دارند یک نمونه تصادفی به حجم n بدون جایگذاری استخراج شود.

حال اگر X تعداد موفقیت‌هایی که در این نمونه‌ی n تایی (بدون جایگذاری) رخ می‌دهد باشد، داریم:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

$$E(X) = n.\frac{K}{N} \qquad\qquad Var(X) = \frac{N-n}{N-1}.n.\frac{K}{N}.(1 - \frac{K}{N})$$

تذکر

برای نمایش توزیع فوق‌هندسی از نماد $X \sim HG(N,K,n)$ استفاده می‌شود که در آن:
N: تعداد اعضای جامعه
K: تعداد اعضای جامعه موفقیت
n: تعداد اعضای نمونه‌ی انتخابی

در توزیع فوق‌هندسی $P(X=x)$ بدین معنی است که در انتخاب n عضو از جامعه Nتایی ما می‌خواهیم x عضو از جامعه موفقیت Kتایی و مابقی از جامعه شکست باشد.

مثال ۱۰

از انبار کارخانه‌ای با ۱۰۰ لامپ که تعداد ۲۰ عدد آنها معیوب هستند نمونه‌ای تصادفی و بدون جایگذاری به حجم ۵ انتخاب می‌کنیم:

الف- احتمال اینکه ۲ عدد از این ۵ لامپ معیوب باشند، چقدر است؟

ب- انتظار دارید در این نمونه ۵ تایی چند لامپ معیوب موجود باشد؟

راه‌حل:

X: تعداد لامپ‌های معیوب در بین ۵ لامپ انتخاب شده

الف- $$P(X=۲)=\frac{\binom{۲۰}{۲}\binom{۸۰}{۳}}{\binom{۱۰۰}{۵}}$$

ب- $$E(X)=n\frac{K}{N}=۵\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=۱$$

در بین ۱۲ باطری خورشیدی در ویترین یک فروشگاه، ۹ باطری صفحه تخت کانونی و بقیه متمرکز هستند. اگر شخصی به طور تصادفی ۴ عدد از این باطری‌ها را برای بررسی انتخاب کند، احتمال اینکه ۳ عدد از آن‌ها صفحه تخت باشند را بیابید.

راه‌حل:

X: تعداد باطری‌های صفحه تخت در بین ۴ باطری انتخاب شده

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۹}{۳}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۲}{۴}}$$

مثال ۱۲

در بین ۱۶ متقاضی کار، ۱۰ نفر از آن‌ها دارای مدرک دانشگاهی هستند. اگر ۳ نفر را به طور تصادفی انتخاب کرده و با آن‌ها مصاحبه کنیم، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه

الف-هیچ‌کدام دارای مدرک دانشگاهی نباشند.

ب- حداقل دو نفر از آن‌ها دارای مدرک دانشگاهی باشند.

راه‌حل:

X: تعداد متقاضیانی که مدرک دانشگاهی دارند در بین ۳ نفر انتخاب شده

الف- $$P(X=۰)=\frac{\binom{۱۰}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۶}{۳}}=\frac{۱}{۲۸}$$

ب- $$P(X\geq ۲)=P(X=۲)+P(X=۳)=\frac{\binom{۱۰}{۲}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۶}{۳}}+\frac{\binom{۱۰}{۳}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۶}{۳}}$$

مثال ۱۳

از بین اعداد ۱ تا ۹، چهار عدد را به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X عددی باشد که از کوچک‌ترین عدد بزرگ‌تر و از دو تای دیگر کوچک‌تر باشد. $P(X=۴)$ چه‌قدر است؟

راه‌حل:

$$P(X=۴)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۵}{۲۱}$$

مثال ۱۴

فرض کنید جامعه‌ای به حجم M وجود دارد. می‌دانیم که k تا از اعضای این جامعه مشخصه‌ی خاصی دارند. اگر نمونه‌ای به حجم n از این جامعه استخراج کنیم، مطلوبست احتمال این‌که x تا از اعضای نمونه خاصیت مذکور را داشته باشند:

الف- در حالت نمونه‌گیری بدون جایگذاری

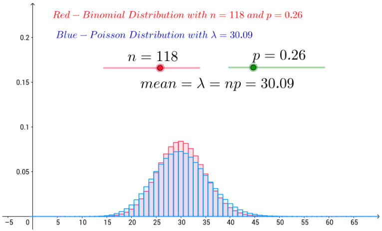
ب- در حالت نمونه‌گیری با جایگذاری

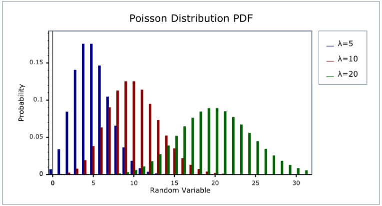
راه‌حل:

$$\text{الف} - \quad P(X=x) = \frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix}}, \qquad x = ۰, ۱, \ldots, n$$

$$\text{ب} - \quad P(X=x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}\left(\frac{k}{M}\right)^{x}\left(۱ - \frac{k}{M}\right)^{n-x}$$

توزیع پواسون





یک بازه از اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. فرض کنید که پیشامدها به طور تصادفی در طول این بازه اتفاق می‌افتند. اگر این بازه را بتوان به زیر فاصله‌هایی با طول کوچک تقسیم کرد به طوری که

۱- احتمال بیش از یک پیشامد در هر زیر فاصله صفر است،

۲- احتمال وقوع یک پیشامد در یک زیر فاصله برای همه زیر فاصله‌ها یکسان بوده و متناسب با طول زیر فاصله است،

۳- رخداد پیشامد در هر زیر فاصله مستقل از سایر زیر فاصله‌ها است،

این آزمایش تصادفی یک فرآیند پواسون نامیده می‌شود.

متغیر تصادفی X که برابر با تعداد پیشامدها در یک بازه است، یک متغیر تصادفی پواسون نامیده می‌شود.

فرض کنید دنباله‌ای از آزمایش‌های برنولی مستقل با پارامتر ثابت p در واحدی از زمان یا مکان در حال انجام‌اند. آنگاه زمانی که n بسیار بزرگ و p کوچک $(p < ۰/۱)$ باشد به قسمی که np مقداری کوچک‌تر از ۱۰ باشد، توزیع دوجمله‌ای به وسیله‌ی توزیع پواسون تقریب زده می‌شود.

در واقع زمانی که با پیشامدهای کمیاب (نادر) سروکار داریم، توزیع پواسون به جای توزیع دوجمله‌ای به کار می‌رود؛ در این صورت قرار می‌دهیم $\lambda = np$.

متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است $X \sim P(\lambda)$ هرگاه برای $\lambda > ۰$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

$$E(X) = \lambda \qquad\qquad Var(X) = \lambda$$

تقریب توزیع دوجمله‌ای

$$X \sim Bin(n,p) \qquad\qquad \lambda = np$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(۱-p)^{n-k} = \binom{n}{k} (\frac{\lambda}{n})^k(۱-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times (۱-\frac{\lambda}{n})^n(۱-\frac{\lambda}{n})^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-۱}{n} \times \frac{n-۲}{n} \cdots \frac{n-k+۱}{n}(۱-\frac{\lambda}{n})^n(۱-\frac{\lambda}{n})^{-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-۱}{n} \times \frac{n-۲}{n} \cdots \frac{n-k+۱}{n}(۱-\frac{\lambda}{n})^n(۱-\frac{\lambda}{n})^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \times ۱ \times \cdots \times ۱ \times e^{-\lambda} \times (۱-۰)^{-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

مثال ۱۵

فرض کنید تعداد غلط‌های تایپی در یک صفحه از کتاب دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = ۰/۵$ باشد. احتمال اینکه الف- دقیقاً یک غلط و ب- حداقل یک غلط در این صفحه باشد را محاسبه کنید.

راه‌حل:

$$\text{الف-}\quad P(X = ۱) = \frac{e^{-۰/۵} \times ۰/۵^{۱}}{۱!} = ۰/۳۰۳۳$$

$$\text{ب-}\quad P(X \geq ۱) = ۱ - P(X < ۱) = ۱ - P(X = ۰)$$

$$= ۱ - \frac{e^{-۰/۵} \times ۰/۵^{۰}}{۰!} = ۰/۳۹۳۵$$

مثال ۱۶

فرض کنید یک نفر به طور متوسط ۵ بار در سال مبتلا به سرماخوردگی می‌شود. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه او در سال آینده

الف- چهار بار مبتلا به سرماخوردگی شود.

ب- حداکثر دو بار مبتلا به سرماخوردگی شود.

راه‌حل:

$$E(X) = \lambda = ۵$$

الف- $$P(X = ۴) = \frac{e^{-۵} \times ۵^{۴}}{۴!} = ۰/۱۷۵۵$$

ب- $$P(X \leq ۲) = P(X = ۰) + P(X = ۱) + P(X = ۲)$$

$$= e^{-۵} + \frac{e^{-۵} \times ۵^{۱}}{۱!} + \frac{e^{-۵} \times ۵^{۲}}{۲!} = ۰/۱۲۴۷$$

مثال ۱۷

در یک سیم مسی نازک فرض کنید به طور متوسط ۲/۳ عیب در هر میلی‌متر وجود داشته باشد. احتمال وجود ۲ عیب در ۱ میلی‌متر از این سیم چه‌قدر است؟

راه‌حل:

$$E(X) = \lambda = ۲/۳$$

$$P(X = ۲) = \frac{e^{-۲/۳} \times ۲/۳^{۲}}{۲!} = ۰/۲۶۵$$

مثال ۱۸

نرخ خودکشی در یک ایالت آمریکا برابر با ۱ خودکشی در هر ۱ میلیون نفر در ماه گزارش شده است.
احتمال این‌که در یک شهر ۴ میلیون نفری از آن ایالت، حداقل ۴ خودکشی در ماه رخ دهد، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

$$\lambda = np = ۴۰۰۰۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰} = ۴$$

$$\begin{aligned} P(X \geq ۴) &= ۱ - P(X < ۴) \\ &= ۱ - \{P(X = ۰) + P(X = ۱) + P(X = ۲) + P(X = ۳)\} \\ &= ۱ - \left\{ e^{-۴} + \frac{e^{-۴} \times ۴^{۱}}{۱!} + \frac{e^{-۴} \times ۴^{۲}}{۲!} + \frac{e^{-۴} \times ۴^{۳}}{۳!} \right\} = ۰/۵۶۶ \end{aligned}$$

مثال ۱۹

اگر X دارای توزیع پواسون و $P(X=\circ)=\circ/۲$ باشد، $E(X)$ چقدر است؟

راه‌حل:

$$
\begin{aligned}
&P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\\
&P(X=\circ)=\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^{\circ}}{\circ!}=e^{-\lambda}=\circ/۲\\
&\Rightarrow\quad -\lambda=ln(\circ/۲)\quad\Rightarrow\quad \lambda=ln(۵)\\
&\Rightarrow\quad E(X)=\lambda=ln(۵)
\end{aligned}
$$

نکته بسیار مهم

فرض کنید که متوسط تعداد اتفاق‌هایی که در مدت زمان ثابت t رخ می‌دهد، برابر λ باشد $X \sim P(\lambda)$، آنگاه تعداد اتفاق‌هایی که در مدت زمان ثابت mt رخ می‌دهد از توزیع پواسون با پارامتر $m\lambda$ پیروی می‌کند $Y \sim P(m\lambda)$.

افراد با نرخ ۱ نفر در هر دو دقیقه وارد یک فروشگاه می‌شوند. احتمال این‌که هیچ‌کس در بازه‌ی زمانی ۱۲:۰۰ تا ۱۲:۰۵ وارد فروشگاه نشود، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

$$t = ۲ \ \ min \qquad \lambda = ۱$$

$$t = ۵ \ \ min \qquad \lambda_{New} = ۲/۵$$

$$P(X = ۰) = \frac{e^{-۲/۵} \times (۲/۵)^{۰}}{۰!} = e^{-۲/۵} = ۰/۰۸۲۱$$

مثال ۲۱

تعداد اتومبیل‌هایی که برای زدن بنزین سوپر به پمپ بنزین معینی مراجعه می‌کنند کاملاً تصادفی بوده و به طور متوسط ۲۴ اتومبیل در ساعت است. اگر برق به مدت ۱۰ دقیقه قطع شود، احتمال اینکه این پمپ بنزین حداقل دو مشتری را در این فاصله از دست بدهد را بیابید.

راه‌حل:

$$t = ۶۰ \quad min \qquad \lambda = ۲۴$$
$$t = ۱۰ \quad min \qquad \lambda_{New} = ۴$$
$$P(X \geq ۲) = ۱ - P(X < ۲) = ۱ - \{P(X = ۰) + P(X = ۱)\}$$
$$= ۱ - \left\{ \frac{e^{-۴} \times (۴)^{۰}}{۰!} + \frac{e^{-۴} \times (۴)^{۱}}{۱!} \right\} = ۰/۹۰۸۴$$

مثال ۲۲

اگر متغیر تصادفی X را تعداد تماس‌های اشتباه در روز برای شرکتی تعریف کنیم که در آن به طور متوسط شش تماس اشتباه در روز صورت می‌پذیرد، مطلوبست احتمال اینکه در یک روز معین:

الف– سه تلفن اشتباه زده شود.

ب– ده تلفن اشتباه در دو روز متوالی دریافت شود.

راه‌حل:

الف– $$E(X) = \lambda = ۶ \qquad \Rightarrow P(X = ۳) = \frac{e^{-۶} \times (۶)^{۳}}{۳!} = ۰/۰۰۱۸$$

ب– $$t = ۱ \ \ day \qquad \lambda = ۶$$

$$t = ۲ \ \ day \qquad \lambda_{New} = ۱۲$$

$$P(X = ۱۰) = \frac{e^{-۱۲} \times (۱۲)^{۱۰}}{۱۰!} = ۰/۱۰۴۸$$

مثال ۲۳

تعداد نقص‌های موجود در سطحِ پنل‌های پلاستیکی مورد استفاده در فضای داخلی خودرو دارای توزیع پواسون با میانگین ۰/۰۵ عیب در هر فوت مربع از پنل‌های پلاستیکی است. فرض کنید فضای داخلی یک خودرو دارای ۱۰ فوت مربع پنل پلاستیکی باشد.

(الف) احتمال عدم وجود نقص سطح در فضای داخلی اتومبیل چقدر است؟

(ب) اگر ۱۰ اتومبیل به یک شرکت فروخته شود، احتمال این‌که هیچکدام از ۱۰ خودرو دارای نقص سطحی نباشند، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

الف- $\lambda_{New} = ۰/۰۵ \times ۱۰ = ۰/۵ \quad \Rightarrow \quad P(X=۰) = e^{-۰/۵} = ۰/۶۰۶۵$

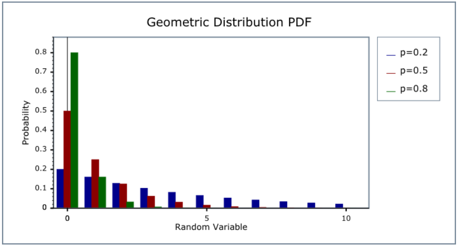
ب- Y : تعداد اتومبیل‌هایی که دارای نقص نیستند $\quad Y \sim B\,(n=۱۰, p=۰/۶۰۶۵)$

$$P(Y=۰) = \begin{pmatrix} ۱۰ \\ ۱۰ \end{pmatrix} (۰/۶۰۶۵)^{۱۰} (۱-۰/۶۰۶۵)^{۰} = ۰/۰۰۷$$

اگر $X \sim P(\lambda)$ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی بازگشتی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}\lambda}{x(x-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{x}P(X=x-1) \end{aligned}$$

توزیع هندسی



Geometric Distribution PDF
Probability
Random Variable
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
p=0.2
p=0.5
p=0.8

توزیع هندسی

یک آزمایش برنولی ثابت با احتمال موفقیت p را در نظر بگیرید.
فرض کنید این آزمایش را به تعداد نامعینی بار آن‌قدر تکرار کنیم تا به اولین موفقیت دست یابیم؛ سپس آزمایش را متوقف کنیم.
در این صورت اگر $x - ۱$ بار اوّل شکست و بار آخر پیروزی داشته باشیم و با توجه به استقلال آزمایش‌ها داریم:

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-۱}p, \qquad x = ۱, ۲, \ldots$$

$$E(X) = \frac{۱}{p} \qquad Var(X) = \frac{q}{p^۲} \qquad P(X \leq r) = ۱ - q^r$$

X: تعداد آزمایش‌های لازم تا رسیدن به اولین موفقیت $\qquad X \sim G(p)$

مثال ۲۴

احتمال این که فردی در کنکور قبول شود ۰/۹ است. احتمال اینکه این فرد در دومین سالی که کنکور می‌دهد قبول شود، چقدر است؟

راه‌حل:

X: تعداد آزمون‌ها تا قبول شدن در کنکور $\qquad X \sim G(p = ۰/۹)$

$$P(X = ۲) = qp = (۰/۱) \times ۰/۹ = ۰/۰۹$$

مثال ۲۵

یادداشت‌های یک باشگاه شنا نشان می‌دهد که ۰/۲ استخرهای تازه تأسیس آن‌ها ظرف یک سال احتیاج به تعمیر دارد. احتمال اینکه ششمین استخری که در یک سال می‌سازند، اولین استخری باشد که در ظرف یک سال احتیاج به تعمیر داشته باشد را بیابید.

راه‌حل:

X: تعداد استخرهای ساخته شده تا اولین استخری که احتیاج به تعمیر دارد $\quad X \sim G(p = ۰/۲)$

$$P(X = ۶) = q^{۵}p = (۰/۸)^{۵} \times ۰/۲ = ۰/۰۶۵۵$$

مثال ۲۶

فرض کنید که هر یک از تماس‌های شما به یک ایستگاه رادیویی محبوب با احتمال ۰/۰۲ متصل می‌شود، یعنی عدم دستیابی به سیگنال شلوغ. فرض کنید تماسهای شما مستقل است.
الف- احتمال این‌که اولین تماس موفق شما دهمین تماس شما باشد، چه‌قدر است؟
ب- احتمال اینکه به بیش از چهار تماس برای برقراری ارتباط احتیاج داشته باشید، چه‌قدر است؟
ج- میانگین تعداد تماس‌های لازم برای برقراری ارتباط چه‌قدر است؟

راه‌حل:
X: تعداد تماس‌ها تا برقراری اولین تماس موفق $\qquad X \sim G(p = ۰/۰۲)$

الف- $P(X = ۱۰) = q^{۹}p = (۰/۹۸)^{۹} \times ۰/۰۲ = ۰/۰۱۶۷$

ب- $P(X > ۴) = ۱ - P(X \leq ۴) = ۱ - \left[۱ - q^{۴}\right]$
$= ۱ - \left[۱ - (۰/۹۸)^{۴}\right] = ۰/۹۲۲۴$

ج- $E(X) = \frac{۱}{p} = \frac{۱}{۰/۰۲} = ۵۰$

مثال ۲۷

شخص فراموش‌کاری به خاطر نمی‌آورد که کدام‌یک از ۱۲ کلیدی که در دست دارد مربوط به دفتر کار اوست. اگر این شخص کلیدها را به تصادف و با جایگذاری امتحان کند، به طور متوسط باید چند کلید را برای باز شدن در دفتر کارش امتحان کند؟

راه‌حل:

X: تعداد کلیدهای امتحان شده تا اولین کلیدی که در را باز کند $\quad X \sim G(p = \frac{۱}{۱۲})$

$$E(X) = \frac{۱}{p} = ۱۲$$

مثال ۲۸

سه نفر با هم در یک قهوه‌خانه سکه پرتاب می‌کنند. آن یکی که در اقلیت باشد، پول چای را می‌دهد. اگر سه سکه یک جور بیایند، پرتاب سکه دوباره تکرار می‌شود. احتمال این‌که کمتر از ۴ بار پرتاب سکه لازم باشد، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

X: تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به اولین غیرهم‌جور $\qquad X \sim G(p)$

$$p = P(\text{ظاهر شدن غیرهم‌جور}) = ۱ - P\{HHH, TTT\} = ۱ - \frac{۲}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

$$q = ۱ - p = \frac{۱}{۴}$$

$$P(X < ۴) = P(X \leq ۳) = ۱ - q^۳ = ۱ - (\frac{۱}{۴})^۳ = \frac{۶۳}{۶۴}$$

رابطه‌ی بازگشتی در توزیع هندسی

اگر $X \sim G(p)$ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی بازگشتی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} P(X = x + ۱) &= q^x p \\ &= q q^{x-۱} p \\ &= q P(X = x) \end{aligned}$$

خاصیت بی‌حافظگی توزیع هندسی

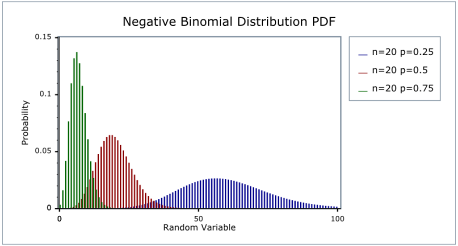
اگر $X \sim G(p)$ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر که به خاصیت بی‌حافظگی شناخته می‌شود، برقرار است:

$$P(X = x + n | X > n) = P(X = x)$$

در بین توزیع‌های گسسته فقط توزیع هندسی این خاصیت را دارد.
اگر آزمایشی را n بار تکرار کرده باشید و به پیروزی نرسیده باشید، احتمال این‌که در $x+n$-امین بار به پیروزی برسید با احتمال این‌که در x-امین بار به پیروزی می‌رسیدید، برابر است.
توزیع هندسی شکست‌ها را در حافظه‌ی خود ثبت نمی‌کند. به بیان ساده، تعداد شکست‌های گذشته، احتمال پیروز شدن در آزمایش‌های بعدی را افزایش نمی‌دهد.

$$\begin{aligned} P(X = x + n | X > n) &= \frac{P(X = x+n, X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X = x+n)}{P(X > n)} \\ &= \frac{q^{x+n-1} p}{q^n} = q^{x-1} p = P(X = x) \end{aligned}$$

توزیع دوجمله‌ای منفی (پاسکال)



توزیع دو جمله‌ای منفی (پاسکال)

یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را به تعداد نامعین بار مستقلاً تکرار می‌کنیم.

فرض کنید این بار X نشان‌دهنده‌ی تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به r -امین موفقیت باشد؛ که در آن r یک عدد صحیح مثبت است.

اگر r -امین موفقیت در x-امین آزمایش حاصل شود: در x آزمایش دارای r موفقیت و $x-r$ شکست هستیم. احتمال انجام x آزمایش برای حصول r موفقیت برابر است با: $X \sim NB(r,p)$

$$f(x) = P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \qquad x = r, r+1, \ldots$$

$$E(X) = \frac{r}{p} \qquad\qquad Var(X) = r\frac{q}{p^2}$$

مثال ۲۹

احتمال اینکه در پرتاب متوالی یک سکه‌ی سالم، دومین شیر در پنجمین آزمایش به دست آید، چقدر است؟

راه‌حل:

X: تعداد پرتاب‌ها تا مشاهده‌ی دومین شیر $\qquad X \sim NB(r=۲, p=\frac{۱}{۲})$

$$P(X=۵) = \binom{۴}{۱} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}$$

مثال ۳۰

فرض کنید ۲۰ درصد انسان‌ها چپ دست باشند. احتمال اینکه هشتمین مسافری که به یک هواپیما سوار می‌شود، سومین نفری باشد که چپ دست است، چقدر است؟

راه‌حل:
X: تعداد مسافران سوار شده تا سومین شخصی که چپ دست است
$X \sim NB(r = ۳, p = ۰/۲)$

$$P(X = ۸) = \binom{۷}{۲} (۰/۲)^{۳} (۰/۸)^{۵}$$

مثال ۳۱

احتمال اینکه تیراندازی به هدف بزند برابر ۰/۸ است. مطلوبست احتمال اینکه حداقل ۵ بار لازم باشد تا سومین تیر به هدف بخورد.

راه‌حل:

$$P(X \geq ۵) = ۱ - P(X < ۵) = ۱ - [P(X = ۴) + P(X = ۳)]$$
$$= ۱ - \left\{ \binom{۳}{۲} (۰/۸)^{۳} (۰/۲)^{۱} + \binom{۲}{۲} (۰/۸)^{۳} (۰/۲)^{۰} \right\}$$

مثال ۳۲

میانگین و واریانس تعداد دفعاتی که یک تاس سالم باید به صورت مستقل پرتاب شود تا به چهار نتیجه‌ی یک برسیم، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{۴}{\frac{۱}{۶}} = ۲۴$$

$$\sigma^{۲} = \frac{rq}{p^{۲}} = \frac{۴ \times \frac{۵}{۶}}{(\frac{۱}{۶})^{۲}} = ۱۲۰$$

مثال آخر

سکه‌ی سالمی را متوالیاً می‌اندازیم. احتمال این‌که پنجمین خط قبل از دهمین شیر مشاهده شود، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

X: تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به دهمین شیر $\qquad X \sim NB(r = ۱۰, p = \frac{۱}{۲})$

$$P(X = ۱۵) = \binom{۱۴}{۹} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵} = ۰/۰۶۱۱$$