(حل همه‌ی مثال‌ها در کانال)

$W \leq V \Longleftrightarrow$ زیرفضا برای هر $w_1, w_2 \in W$ و هر $r \in \mathbb{R}$ داشته باشیم: $rw_1 + w_2 \in W$

مثال: فرض کنید: $W = \{(x+y, 2y-x, 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ نشان دهید که W یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^3$ است. $V = \mathbb{R}^3$

$$rw_1 + w_2 = r(x_1+y_1, 2y_1-x_1, 3y_1) + (x_2+y_2, 2y_2-x_2, 3y_2) =$$

دلخواه $r \in \mathbb{R}$

دلخواه
$$w_1 = (x_1+y_1, 2y_1-x_1, 3y_1) \in W$$
$$w_2 = (x_2+y_2, 2y_2-x_2, 3y_2) \in W$$

$$(\underbrace{rx_1+ry_1+x_2+y_2}, 2ry_1-rx_1+2y_2-x_2, \underbrace{3ry_1+3y_2}_{3(ry_1+y_2)}) \in W$$

$X = rx_1+x_2$، $Y = ry_1+y_2$

تعریف (استقلال خطی): فرض کنید که V یک فضای برداری باشد و $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ که $S \subseteq V$، در این صورت S را مستقل خطی گوییم هرگاه داشته باشیم: به ازای $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

$$t_1 s_1 + \dots + t_n s_n = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_n = 0$$

اگر مستقل خطی نباشد اصطلاحاً آن را وابسته‌ی خطی گوییم. $(1,2), (3,4), (2,4)$ چون $(-2)(1,2) + 0(3,4) + (2,4) = 0$
پس وابسته‌ی خطی هستند.

مثال: $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ برای $1 \leq i \leq n$ آیا $e_1, e_2, \dots, e_n$ مستقل خطی‌اند؟ $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$t_i \in \mathbb{R} \quad t_1 e_1 + \dots + t_n e_n = \vec{0} \quad (t_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, t_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, t_n) = \vec{0} \Longrightarrow$$

$$(t_1, t_2, \dots, t_n) = (0, \dots, 0) \Longrightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$$

مثال: بردارهای $\alpha = (1,1,1)$ ، $\beta = (1,-1,1)$ ، $\gamma = (2,1,-1)$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. آیا $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی است؟
(حل در کانال)

مثال: فرض کنید $v_1 = (1,1,2,1)$ و $v_2 = (1,1,1,1)$ و $v_3 = (2,2,3,2)$. آیا $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی است؟

جنبه‌ی وابسته کامل خطی است.

مثال: فرض کنید منحنی C دارای پارامتری $\begin{cases} r(t)=(0,2+2\cos t,2+2\sin t) \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$ مطلوب است $I=\oint e^{5z}dx+\cos(y^3)dy+3ydz$ «حل در کلاس»

«حل تمرین»

مثال: فرض کنید $S=S_1\cup S_2$ که در آن S_1 رویه‌ی جانبی استوانه $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ -3\le z\le 3 \end{cases}$ و S_2 نیمه‌ی بالایی کره $x^2+y^2+(z-3)^2=4$

مطلوب است $I=\iint_S (0,2yz,-z^2)\cdot N\,ds$ که در آن قائم N رو به خارج رویه S است؟ «حل در کلاس»

جبر خطی:

تعریف فضای برداری روی IR: مجموعه‌ی $(V,+,\cdot)$ را یک فضای برداری روی IR گوییم، هرگاه خواص زیر برقرار باشد:

عمل جمع — عمل ضرب اسکالر

خواص جمع: برای هر $\alpha,\beta,\gamma\in V$

(1) $\alpha+\beta\in V$ (2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(3) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (4) $\exists\, 0\in V\ \ \alpha+0=\alpha$ (5) $\exists\,\theta\in V:\alpha+\theta=0\to\theta=-\alpha$

عضو قرینه‌ی α

خواص ضرب اسکالر: برای هر $a,b\in IR$ و هر $\alpha,\beta\in V$

(1) $a\cdot\alpha\in V$ (2) $(ab)\cdot\alpha=a\cdot(\underbrace{b\cdot\alpha}_{\in V})$

ضرب معمولی اعداد حقیقی

(3) $(a+b)\cdot\alpha=(a\cdot\alpha)+(b\cdot\alpha)$ (4) $a\cdot(\alpha+\beta)=(a\cdot\alpha)+(a\cdot\beta)$ (5) $1\cdot\alpha=\alpha$

مثال: $V=IR$ یک فضای برداری روی IR است. $r\cdot s$ ، + جمع معمولی

ضرب معمولی IR

مثال: $V=IR^n$ با عمل جمع و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری روی IR است:

$(a_1,a_2,\dots,a_n)+(b_1,b_2,\dots,b_n):=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$ ، $r\in IR,\ (a_1,a_2,\dots,a_n)\in IR^n$ ، $r\cdot(a_1,a_2,\dots,a_n)=(ra_1,ra_2,\dots,ra_n)$

جمع عادی IR

تعریف: فرض کنید $(V,+,\cdot)$ یک فضای برداری روی IR باشد، $W\subseteq V$ ، W را یک زیرفضای V گوییم هرگاه W با همان عمل جمع و ضرب اسکالر V، تشکیل یک فضای برداری دهد و معمولاً آن را با $W\le V$ نمایش می‌دهیم.

زیرمجموعه

گزاره: فرض کنید V یک فضای برداری باشد و فرض کنید $W\subseteq V$ باشد. در این صورت داریم:

قضیه دیورژانس: فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^3$ که مرز آن سطح بسته مانند S است و S سطحی جهت‌دار با میدان بردار قائم یکه N است که رو به خارج ناحیه D می‌باشد هرگاه F یک میدان برداری هموار روی D باشد. آنگاه داریم:

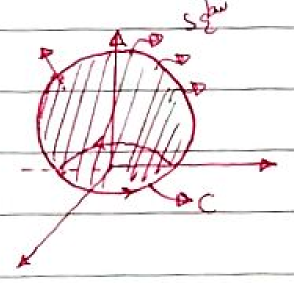
$$\oiint_S F\cdot N\,dS=\iiint_D \operatorname{div} F\,dv_{x,y,z}$$

مثال: فرض کنید $F=(bxy^2,\ bx^2y,\ (x^2+y^2)z^2)$ و S سطح بسته‌ای استوانه‌ای توپر R باشد که مرز آن $x^2+y^2\le a^2$, $0\le z\le b$ و N قائم یکه رو به خارج استوانه است. مطلوب است محاسبه $\oiint_S F\cdot N\,ds$ «حل در کلاس»

قضیه استوکس: فرض کنید S سطحی جهت‌دار و تکه تکه هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد و دارای میدان بردار قائم یکه N باشد و مرز آن، C، یک خم بسته تکه تکه هموار با جهت القا شده باشد که تشکیل شده باشد. هرگاه F یک میدان برداری هموار بر یک مجموعه باز شامل S در $\mathbb{R}^3$ باشد، داریم:

$$\oint_C F\cdot T\,ds=\iint_S (\operatorname{curl}F)\cdot N\,ds$$

مثال: $\iint \operatorname{curl}F\cdot N\,ds$ را با ناحیه‌ای که در آن S کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ بالای صفحه xy است و بردار قائم N رو به خارج است و F به صورت زیر باشد:

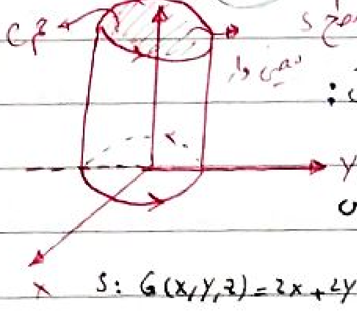


$$F=\left(y^2\cos(xz),\ x^3e^{yz},\ -e^{-xyz}\right)$$

$$I=\oint_C F\cdot dr \underset{\text{استوکس}}{\overset{\text{ق استوکس}}{=}} \iint_{S'} \operatorname{curl} F\cdot N\,ds=\iint_{S'} \operatorname{curl}(F)\,k\,ds=\iint_{S'}\left(3x^2e^{yz}-2y\cos(xz)\right)ds$$

$$=\iint_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ z=0}}(3x^2-2y)\,dx\,dy$$

مثال: مطلوب است محاسبه $\oint F\cdot dr$ که در آن $F=(-y^3,x^3,-z^3)$ و C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $2x+2y+z=3$ است و جهت منحنی طوری است که تصویر آن روی صفحه xy پادساعتگرد است:



$$\overset{\text{ق استوکس}}{=}\iint \operatorname{curl}F\cdot N\,ds \qquad N\,ds=\pm\frac{\nabla G}{|G_z|}\,dA_{x,y}=\pm\frac{(2,2,1)}{1}\,dx\,dy$$

$S:\ G(x,y,z)=2x+2y+z-3=0$

$$\operatorname{curl}F=(0,0,3x^2+3y^2)\longrightarrow \iint_{x^2+y^2\le 1}3(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\,r\,dr\,d\theta$$

$$ds = |r_u \times r_v|\, du\,dv \qquad d\sigma = N\, ds = \pm (r_u \times r_v)\, \underbrace{du\,dv}_{dA_{u,v}}$$

مثال: شار میدان برداری $F=(z,0,x^2)$ رو به بالا در برون سطح $z=x^2+y^2$ به $-1\le x\le 1$ و $-1\le y\le 1$ را بیابید

(جواب در کتاب)

مثال: الف) شار رو به بیرون گذرا از سطح S را بیابید برای F داده شده $F=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right)$

$$\begin{cases} S: r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2) \\ D: \begin{cases} 0\le u\le 1 \\ 0\le v\le 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$d\sigma = N\,ds = \pm (r_u\times r_v)\,du\,dv \qquad r_u = (\cos v, \sin v, 2u) \qquad r_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$

$$\Rightarrow r_u \times r_v = (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)$$

$$d\sigma = \pm(-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)\,du\,dv \Rightarrow \iint_S F\cdot N\,ds = \iint \left(\frac{2u\cos v}{u^2}, \frac{2u\sin v}{u^2}, 1\right)\cdot(2u^2\cos v, 2u^2\sin v, -u)\,du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3u\,du\,dv = \dots$$

عملگر دیفرانسیل یا نابلا یا دل $\vec{\nabla}$

اگر F یک میدان برداری باشد $F=(P,Q,R)$: دیورژانس: $\operatorname{div} F := \nabla\cdot F = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

$$\operatorname{curl} F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

کرل $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

* فرض کنید F میدانی پتانسیل باشد (یعنی $F=\nabla\phi$: $\exists\phi$) و مولفه‌های F دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند در این صورت داریم:

$$\operatorname{curl} F = 0$$

$$\operatorname{curl}\nabla\phi = \operatorname{curl}(\underbrace{\phi_x}_{P}, \underbrace{\phi_y}_{Q}, \underbrace{\phi_z}_{R})$$

مولفه‌ی اول $= \phi_{zy}-\phi_{yz}=0$ مولفه‌ی اول و دوم هم به طور مشابه صفر می‌شود

* فرض کنید F میدانی برداری است که $\operatorname{curl} F=0$. اگر مولفه‌های F دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند و قلمرو F همبند ساده باشد، آنگاه F پایستار است.

اگر مولفه‌های F مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشند داریم:

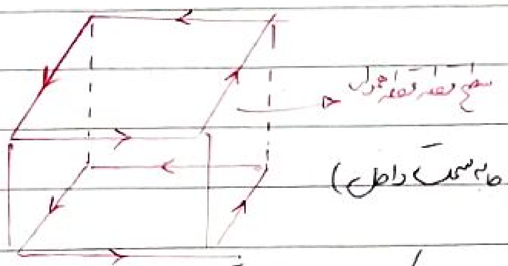
$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$$

$$(\cancel{R_{yx}} - \cancel{Q_{zx}}) + (\cancel{P_{zy}} - \cancel{R_{xy}}) + (\cancel{Q_{xz}} - \cancel{P_{yz}}) = 0$$

سطح‌های جهت‌دار: سطح هموار S را جهت‌پذیر گوییم هرگاه میدان برداری قائم یکه $N(P)$ بر S موجود باشد. بطوریکه با تغییر P بر S بردار $N(P)$ حرکت پیوسته بر S داشته باشد.

نوار موبیوس جهت‌پذیر نیست.

سطح قطعه‌قطعه هموار S را جهت‌پذیر گوییم، هرگاه جهت القاء‌شده به میدان‌های برداری یکه بر هر یک از مولفه‌های هموار S، روی مرزهای مشترک، مخالف هم باشد.



سطح قطعه قطعه هموار

جهت یکه (N یا همه جا به سمت بیرون یا همه جا به سمت داخل)

انتگرال میدان برداری روی سطح: (یا شار میدان برداری F): فرض کنید F یک میدان برداری پیوسته در $\mathbb{R}^3$ باشد. شار میدان برداری F روی S یا

انتگرال مولفه‌ی قائم میدان برداری F روی S عبارت است از

$$\iint_S F\cdot \underbrace{N\,dS}_{d\sigma} = \iint_S F\cdot d\sigma$$

بردار قائم یکه

اگر S سطحی بسته باشد از علامت‌های بالا استفاده می‌کنیم

اگر سطح S به صورت $G(x,y,z)=0$ ، $(x,y)\in D$

$$N=\pm\frac{\{\nabla G\}}{|\nabla G|} \qquad dS=\frac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dA_{x,y}\ ;\ G_z\neq 0$$

$$d\sigma = N\,dS=\pm\frac{\nabla G}{|G_z|}\,dA_{x,y}\ ;\ G_z\neq 0$$

اگر شار رو به بالا باشد (یعنی طرف مثبت S رو به بالا) $\rightarrow$ $G_z>0 \rightarrow +$ ، $G_z<0 \rightarrow -$

اگر شار رو به پایین باشد (یعنی طرف مثبت S رو به پایین) $\rightarrow$ $G_z>0 \rightarrow -$ ، $G_z<0 \rightarrow +$

به طور مشابه:

$$d\sigma = N\,dS=\pm\frac{\nabla G}{|G_x|}\,dA_{x,z}\ ;\ G_x\neq 0 \qquad d\sigma = N\,dS=\pm\frac{\nabla G}{|G_y|}\,dA_{x,z}\ ;\ G_y\neq 0$$

اگر S سطحی با معادله تابع $z=f(x,y)$ است. داریم:

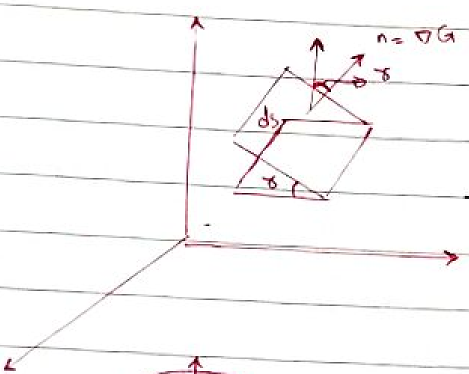
$$G(x,y,z)=z-f(x,y)=0 \qquad N=\pm\frac{(-f_1,-f_2,1)}{\sqrt{f_1^2+f_2^2+1}} \rightarrow d\sigma = N\,dS$$

اگر S سطحی پارامتری باشد $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ داریم:

$$N=\pm r_u\times r_v\times\frac{1}{|r_u\times r_v|}$$

$n = \nabla G$

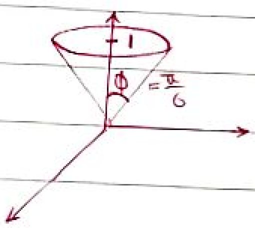
② اگر رویه S به صورت $G(x,y,z)=0$ باشد که G دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشد، $\nabla G \neq 0$



$ds\cos\gamma = dx\,dy \qquad |G_z| = |\nabla G \cdot k| = |\nabla G|\underbrace{|k|}_{1}\cos\gamma = |\nabla G|\cos\gamma$

$\longrightarrow \dfrac{1}{\cos\gamma} = \dfrac{|\nabla G|}{|G_z|}\ ;\ G_z \neq 0 \Rightarrow ds = \dfrac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dx\,dy\ ;\ G_z \neq 0$

به طور مشابه: $ds = \dfrac{|\nabla G|}{|G_x|}\,dy\,dz\ ;\ G_x \neq 0$



مثال: $\iint_S z\,ds$ را روی سطح مخروط $\phi = \pi/6$ است بیابید $0<z<1$

راه اول: نقاط روی سطح مخروط: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\ \gamma(\rho,\theta) =$

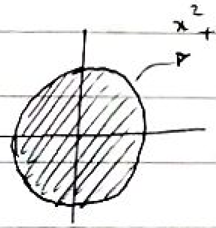
$(\tfrac{1}{2}\rho\cos\theta, \tfrac{1}{2}\rho\sin\theta, \tfrac{\sqrt3}{2}\rho) \qquad 0<\theta<2\pi \qquad 0 \le \rho \le 2/\sqrt3 \qquad tg\,\phi = r/z \xrightarrow{\phi=\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt3} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$z = \sqrt3\,(\sqrt{x^2+y^2}) \xrightarrow{z=1} x^2+y^2 = 1/3 \quad \rho^2 = x^2+y^2+z^2 = 1/3+1 = 4/3 \quad \rho = 2/\sqrt3$

$\begin{cases} r_\rho \\ r_\theta \end{cases} \longrightarrow \times \longrightarrow |\times|\,d\rho\,d\theta$

راه دوم: $\iint_S z\,ds = \iint 2\sqrt3\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

$z = \underbrace{\sqrt3\sqrt{x^2+y^2}}_{g(x,y)} \quad ds = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt3\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt3\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\ dx\,dy = 2\,dx\,dy$



$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt3} 2\sqrt3\,r\,r\,dr\,d\theta$

مثال: المان یا عنصر سطح کره $\rho = a$ را بیابید

$\bullet\ r(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi)$

$ds = \underbrace{|r_\phi \times r_\theta|}_{a^2\sin\phi}\,d\phi\,d\theta$

$ds = a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$

انتگرال روی سطح: سطح S را هموار گوییم هرگاه در هر نقطه آن یک صفحه مماس منحصر به فرد موجود باشد و به ویژه در هر نقطه P از S، بردار قائم ناصفر $n(p)$ را داشته باشیم. فرض کنید γ مثل بالا و فرض کنید

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad Im\,\gamma \subseteq U$$

اگر حد بوده و موجود باشد آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم.

$$\lim_{|R|} \sum f\left(x(u_i^*, v_j^*), Y(u_i^*, v_j^*), Z(u_i^*, v_j^*)\right) \Delta S_{ij}$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds$$

مساحت متوازی الاضلاع = (مساحت) ds تولید شده توسط دو بردار در شکل = $|r_u \times r_v|\,du\,dv$

$$n = r_u \times r_v \rightarrow ds = |n|\,du\,dv$$

$$r = (x,y,z) \quad \begin{cases} r_u = (x_u, y_u, z_u) \\ r_v = (x_v, y_v, z_v) \end{cases} \quad r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,du\,dv$$

گزاره: فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^3$ یک سطح پارامتری با $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ باشد به $\gamma(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$

به علاوه فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ به $S \subseteq U$ در این صورت

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|r_u \times r_v|\,du\,dv$$

مثال: مساحت چنبره دوار با پارامترهای a, b به $0 < b < a$ را بیابید که در آن $r(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$

مطلوب است I؟ $I = \iint_{S \text{ چنبره}} ds = ?$

$$\begin{cases} 0 < u < 2\pi \\ 0 < v < 2\pi \end{cases} \quad r_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$$

$$r_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0) \quad |r_u \times r_v| = b(a+b\cos u) \quad I = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a+b\cos u)\,du$$

تمرین: ① الف) فرض کنید S سطح هموار و ... در $\mathbb{R}^3$ باشد $Z = g(x,y)$ و g تابعی با مشتقات جزئی اول پیوسته است. $r(u,v) = (u, v, g(u,v))$

پارامتری برای S

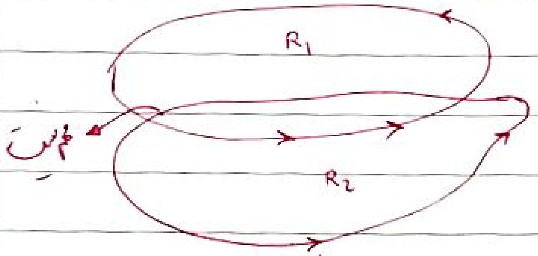
$$\begin{cases} r_u = (1, 0, g_1) \\ r_v = (0, 1, g_2) \end{cases} \quad r_u \times r_v = (-g_1, -g_2, 1)$$

$$\int_C F\cdot dr = \int_C \nabla\phi \cdot dr = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

۳) ویژه: اگر مسیر C بسته باشد، داریم:

$$\int_C F\, dr = 0$$

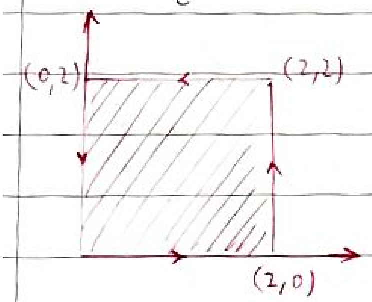
جهت مثبت: ناحیه‌ی بسته‌ی R در $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید، مرز ناحیه‌ی R را طوری جهت می‌گذاریم که با حرکت روی مرز، همواره درون R سمت چپ ما باشد.



قضیه گرین: فرض کنید R ناحیه‌ای بسته در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ با مرز C، تکه‌تکه هموار است خودش را قطع نمی‌کند باشد، اگر جهت C مثبت باشد و $F=(P,Q)$

یک میدان برداری هموار روی R باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C F\cdot dr = \oint P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$



مثال: فرض کنید C مربعی با رئوس $(0,0)$ و $(0,2)$، $(2,0)$، $(2,2)$ باشد. مطلوب است انتگرال

$$I = \oint_C \underbrace{(2xy + e^{\cos y^2})}_{P}\,dx + \underbrace{(4x^2 + e^{\sin y^2})}_{Q}\,dy \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 8x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 6\int_0^2\int_0^2 x\,dy\,dx = 6\int_0^2 2x\,dx = 12\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 24$$

$F = (0,x)$ ، $F := (-y, 0)$

$F := (-y/2, x/2)$

$$\text{مساحت ناحیه } R = \iint_R dA \overset{\text{ق. گرین}}{=} \oint F\cdot dr \qquad F = P(Q,R) \quad (*):\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

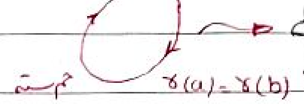
مثال: مساحت محدود به $C = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را بیابید.

$$\text{مساحت } R = \iint_R dA \ \underset{F(x,y)=(0,x)}{\overset{\text{ط. ق. گرین}}{=\!=\!=}}\ \oint_C F\cdot dr = \oint_C x\,dy$$

$$\Longrightarrow W=\int dw=\int_C F.dr=\int_C F.T\,ds \qquad \cancel{T=\frac{dr}{dt}}\quad T=\frac{dr}{ds}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right) \qquad T\,ds=\left(\frac{dx}{ds}ds,\frac{dy}{ds}ds,\frac{dz}{ds}ds\right)$$

$$=(dx,dy,dz)\longrightarrow \int_C F.dr=\int_C F.T\,ds=\int_C F_1dx+F_2dy+F_3dz$$

توجه :

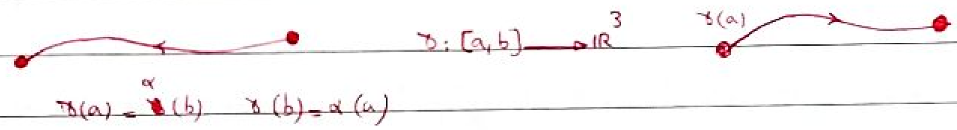


$\longrightarrow \oint F.dr$

مثال: اگر $F(x,y)=(y^2,2xy)$ و اگر C از $(0,0)$ به $(1,1)$ در امتداد: (الف) خط $y=x$ باشد؛ (ب) منحنی $y=x^2$ باشد،

(ج) مسیر مرکب از پاره خط واصل $(0,0)$، $(0,1)$ و پاره خط واصل $(0,1)$، $(1,1)$ باشد؛ مطلوب است $\int_C F.dr$ (راه حل در تابلو)

در حالت کلی: $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ $\qquad \alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$



$\gamma(a)=\alpha(b) \qquad \gamma(b)=\alpha(a)$

تعریف: تابع اسکالر $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ را هموار نامیم هرگاه تمام مشتقات جزئی آن پیوسته باشند. میدان برداری $F=(F_1,\dots,F_n):U\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را

هموار نامیم هرگاه مولفه‌های آن، یعنی $F_1,F_2,\dots,F_n$، توابعی هموار باشند.

تعریف: مجموعه‌ی $U\subseteq\mathbb{R}^n$ را باز نامیم، هرگاه برای هر $x\in U$ $\quad \exists\varepsilon>0: B_\varepsilon(x)\subseteq U$

قضیه: فرض کنید D یک ناحیه‌ی باز و همبند در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ و F یک میدان برداری هموار بر ناحیه‌ی D باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(1) F روی D پایستار است.

(2) به ازای هر منحنی قطعه قطعه هموار بسته مانند C در D، $\oint_C F.dr=0$

(3) به ازای هر 2 نقطه‌ی P_0، P_1 در D، انتگرال $\int_C F.dr$ برای همه‌ی منحنی‌های قطعه قطعه هموار C که از P_0 شروع و به P_1 ختم می‌شود مقدار

یکسانی دارد.

نتیجه: (مهم) با شرایط قضیه‌ی قبل، فرض کنید $F=\nabla\phi$، $\phi:D\subseteq\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ و فرض کنید C خمی هموار بین نقاط P_0، P_1 با ابتدا[ی P_0 و انتهای P_1] باشد،

* شرط لازم برای پایستار بودن میدان های برداری: فرض کنید $\left\{\begin{array}{l} F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ F=(F_1,\dots,F_n) \end{array}\right.$ یک میدان برداری باشد که در آن، مشتقات جزئی

اول $F_1,\dots,F_n$ پیوسته باشند اگر F پایستار باشد آنگاه $\quad \forall\, i,j=1,\dots,n \quad \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$

در حالت خاص 2 بعدی: $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}=\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}$

$\quad (F_1,F_2)$

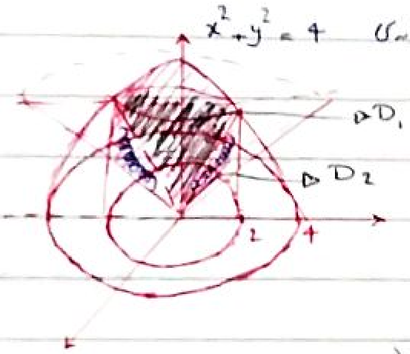
مثال: $F(x,y)=(\overset{F_1}{-y},\overset{F_2}{x})$ $\quad \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\overset{?}{=}\dfrac{\partial F_2}{\partial x} \to -1 \neq 1 \to$ پایستار نیست

در حالت خاص 3 بعدی: $F=(F_1,F_2,F_3):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial y}=\dfrac{\partial F_2}{\partial x} \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial z}=\dfrac{\partial F_3}{\partial x} \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial z}=\dfrac{\partial F_3}{\partial y}$

-* لزوما شرط لازم مذکور، شرط کافی نمی‌باشد ← اگر دامنه F، همبند ساده باشد، شرط لازم گفته شده، شرط کافی نیز می‌باشد

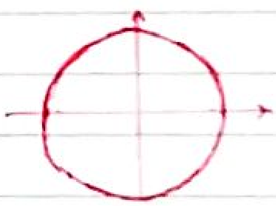
مثال: مطلوب است حجم ناحیه‌ی محدود شده بین مخروط $\phi=\pi/4$ و کره $x^2+y^2+z^2=16$ و استوانه‌ی $x^2+y^2=4$

$\phi=\pi/4 \to z=\sqrt{x^2+y^2}$



دکارتی: $\iiint dz\,dy\,dx = \displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

استوانه‌ای: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$



کروی: $I_1=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{4}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

D_1

D_2 $\quad I_2=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^{\frac{2}{\sin\phi}}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad r^2=4 \to r^2=\rho^2\sin^2\phi=4 \to \rho=\dfrac{2}{\sin\phi}$

انتگرال میدان برداری روی خم: فرض کنید $F: S\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ میدان برداری باشد

خم C: $\gamma(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \to \gamma'(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$، $\int F.T\,ds$ را انتگرال میدان برداری F روی خم C گوییم $\quad W=F.r$

$dW=F.dr \quad dr=r'(t)dt \to F.r'(t)dt \quad T=\dfrac{r'(t)}{|r'(t)|} \to F.T\,|r'(t)|\,dt \xrightarrow{|r'(t)|=\frac{ds}{dt}} F.T\,ds=|F||T|\cos\theta\, ds$

$=|F|\cos\theta\, ds$

$$\text{ادامه}^{*}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}\right)dt = a\int_{-a}^{a} dt = a\,(t)_{-a}^{a} = 2a^2$$

$$\int_{C=\gamma_2} y\,ds = \int_{-a}^{a} f(\gamma_2(t))\,|\gamma_2'(t)|\,dt = \int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^2-t^2}\right)^{*} \qquad \gamma_2'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}}\right) \quad |\gamma_2'(t)| = \sqrt{1+\frac{t^2}{a^2-t^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2-t^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

برخی خواص: C_1 , C_2 دو منحنی ① نقطه مشترک داشته باشند

① $\int_C ds = C$ طول خم

② $\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds \qquad C = C_1 \cup C_2$

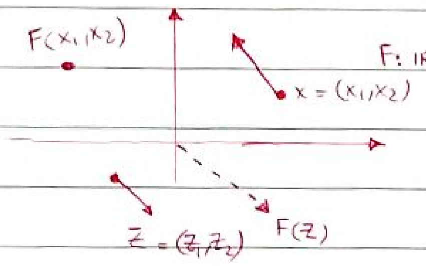
③ $\int_C (af+bg)\,ds = a\int_C f\,ds + b\int_C g\,ds$

④ اگر $f \leq g \Rightarrow \int_C f\,ds \leq \int_C g\,ds$

⑤ $\left|\int f\,ds\right| \leq \int |f|\,ds$

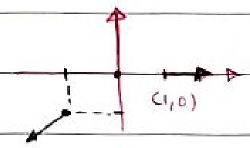
⑥ اگر $M = \max\{f(x,y,z) : (x,y,z)\}$ روی خم C هست $\Rightarrow \int_C f\,ds \leq M \times$ (طول خم C)

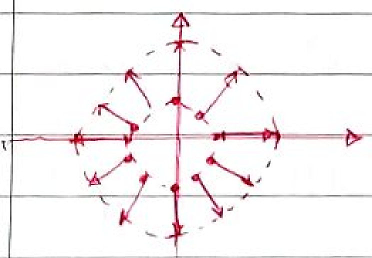
میدان های برداری: تابعی مانند $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را که $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$ را یک میدان برداری گوییم.



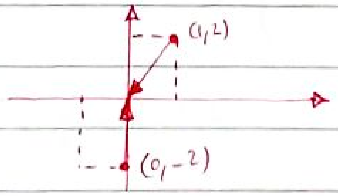
مثال: فرض کنید $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$F = \nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad F(x,y) = (x,y)$

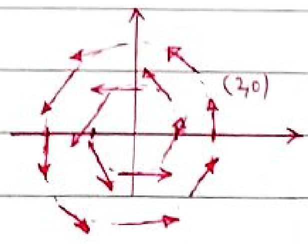




میدان برداری $F(x,y) = \nabla g(x,y) = (-x,-y) \qquad g(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)}{2} \qquad x^2+y^2 = 2c$



مثال: $\begin{cases} F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = (-y,x) \end{cases}$



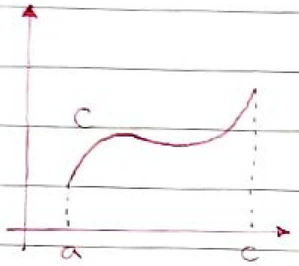
$\exists \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\nabla\varphi \overset{?}{=} F$

تعریف: اگر $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ میدان برداری باشد و $F = \nabla\varphi$ که در آن $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی اسکالر است. در این صورت F را یک میدان

برداری پایستار یا پایسته یا بقا گوییم.

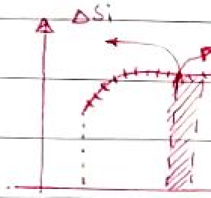
$$I=\iiint_D dv_{x,y,z} \overset{\text{روی}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4} \rho^2\sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$



انتگرال روی خم : طول خم C $=\int_a^b |\gamma'(t)|dt=\int_a^b \frac{ds}{dt}dt=\int_C ds$

$$\begin{cases}\gamma: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\\ \gamma(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))\end{cases}$$

فرض کنید $f: U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ تابعی اسکالر باشد و $\gamma: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ ،



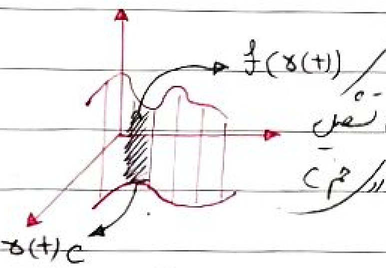
$\gamma(t)=(x(t_i^*),y(t_i^*),z(t_i^*))$

$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ ، به طوری که $\operatorname{Im}\gamma\subseteq U$ ، $\gamma(t)$ یک پارامتری سازی از خم C است.

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_i f(\gamma(t_i^*))\Delta S_i =: \int_C f(x,y,z)ds \qquad \|P\|=\max\{\Delta S_i\}$$

در صورت وجود

* فرض کنید f تابع چگالی سیمی با معادله‌ی $\gamma(t)$ باشد. جرم سیم $m=\int_C f ds$



* فرض کنید C خمی باشد که در یک صفحه قرار می‌گیرد.

مساحت دیواره‌ی تشکیل شده توسط f روی خم C $=\int_C f(x,y,z)ds$

گزاره: فرض کنید $f: U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ و C خمی با معادله‌ی پارامتری

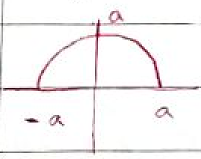
$$\begin{cases}\gamma: I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\\ \gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))\end{cases}, \quad \operatorname{Im}\gamma\subseteq U$$

در این صورت، در صورت وجود $\int_C f ds$ ، داریم:

$$\int_C f ds=\int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

* توجه کنید $\int_C f ds$ به نحوه‌ی پارامتری سازی خم C بستگی ندارد.

مثال: فرض کنید C نیم دایره‌ی بالایی $x^2+y^2=a^2$ باشد. دو پارامتری سازی زیر را برای C $(a>0)$ در نظر بگیرید و سپس $\int_C y\,ds$ را تو



$$(f(x,y)=y \ \text{در واقع داریم})\begin{cases}\gamma_1(t)=(a\cos t, a\sin t);\ 0\le t\le\pi\\ \gamma_2(t)=(t,\sqrt{a^2-t^2});\ -a\le t\le a\end{cases}$$

به هر دو پارامتری سازی، به دست آورید.

$$\gamma_1'(t)=(-a\sin t, a\cos t) \to |\gamma_1'(t)|=a$$

$$\int_{C=\gamma_1} f(x,y) = \int_{C=\gamma_2} y\,ds=\int_0^{\pi} f(\gamma_1(t))\,|\gamma_1'(t)|\,dt=\int_0^{\pi} a\sin t = a^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt=$$

$$a^2(-\cos t)\Big|_0^{\pi}=2a^2$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc > 0 \neq 0 \quad I = \iiint_S abc\, du\,dv\,dw = abc \iiint_S du\,dv\,dw = abc\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)$$

مثال: حجم ناحیه‌ی محصور درون $(5x-2y+z)^2+(y-3z+2)^2+(3+5z)^2=\overset{64}{\cancel{\ }}$ را بیابید؟

$D: < 64$

حل معادلات سوال

$$\begin{cases} u = 5x-2y+z \\ v = y-3z+2 \\ w = 3+5z \end{cases} \longrightarrow S: u^2+v^2+w^2 < 64$$

$$I = \iiint_S \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 25$$

8 شعاع کره

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \tfrac{1}{25} \neq 0 \Rightarrow I = \iiint_S \tfrac{1}{25}\, du\,dv\,dw = \tfrac{1}{25}\left(\text{حجم کره } S\right) = \tfrac{1}{25}\left(\tfrac{4}{3}\pi(8)^3\right)$$

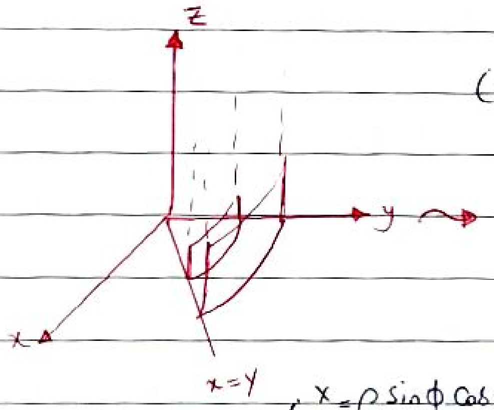
المان حجم در مختصات استوانه‌ای:

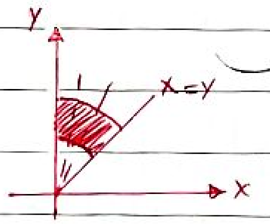
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad z = z$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \Longrightarrow dv_{\text{استوانه‌ای}} = r\,dr\,d\theta\,dz$$

مثال: مطلوب است محاسبه $I = \iiint_D (x^2+y^2)\,dv$ که در آن D محدود به استوانه‌های $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ و صفحات

$z=0$, $z=1$, $x=0$, $x=y$ در 1/8 اول مختصات است. $(x,y,z \geq 0)$





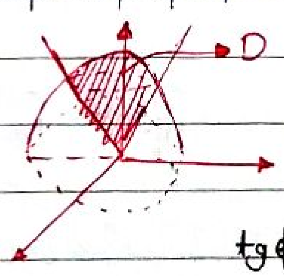
استوانه‌ای

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^2\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

المان حجم در مختصات کروی:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2\sin\phi$$

$$dv_{\text{کروی}} = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$



مثال: مطلوب است حجم ناحیه‌ی بین مخروط $\phi = \pi/4$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=16$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{r}{z} \xrightarrow{\phi=\frac{\pi}{4}} 1 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \longrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$$

معادله‌ی دکارتی مخروط مورد نظر

انتگرال سه‌گانه: اگر حد مجموع های ریمان را، از افرازی بسازیم که به سمت صفر میل کند موجود باشد آنگاه می‌گوییم انتگرال سه گانه $f(x,y,z)$ روی ناحیه D موجود است و آن را با

نماد: $\iiint f(x,y,z)\, dv$ ، $dv = dxdydz$ ، نکته: اگر حجم D صفر باشد آنگاه $\iiint_D f\,dv = 0$ ، اگر $f(x,y,z)=1$ آنگاه حجم ناحیه D $= \iiint_D 1\,dv$

* اگر f روی ناحیه بسته و کراندار D پیوسته باشد آنگاه $\iiint_D f(x,y,z)\,dv$ موجود است

قضیه (فوبینی): فرض کنید D ناحیه بسته و کراندار باشد و f بر D پیوسته باشد

$$\iiint_D f\,dv = \int_a^b \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} \int_{g(y,z)}^{h(y,z)} dxdydz$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx$$

مثال: $I = \iiint (x^3 + \sin z^5 + 3)\,dv \quad x^2+y^2+z^2 \leq r^2$ (r: cte)

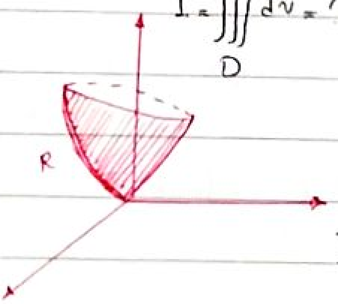
(صفر) (صفر است زیرا فرد است)

$$= \iiint_D x^3\,dv + \iiint_D \sin z^5\,dv + \underbrace{\iiint_D 3\,dv}_{3\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)} = (4\pi r^3)$$

$$\underbrace{\iiint_{-\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }} x^3\,dx\,dydz}_{\text{صفر}} \quad -\sqrt{r^2-y^2-z^2} \leq x \leq \sqrt{r^2-y^2-z^2}$$

مثال: حجم ناحیه R واقع درون صفحه $z = 3-2y$ و بالای سهمی گون $z = x^2+y^2$ را بیابید.

$I = \iiint_D dv = ?$



$$I = \iiint dzdydx \quad x^2+y^2 = 3-y^2 \Rightarrow x^2+(y+1)^2 = 4$$

$$I = \int_{-2}^{+2} \int_{-1-\sqrt{4-x^2}}^{-1+\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz\,dy\,dx$$

قضیه تغییر متغیر: (در انتگرال سه گانه) فرض کنید $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ یک تبدیل یک به یک و مشتق‌پذیر از x,y,z به u,v,w

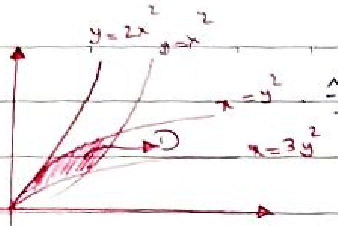
مشتقات جزئی اول پیوسته باشد آنگاه داریم: $dv = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$ اگر f روی D انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ روی S انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv_{x,y,z} = \iiint_S g(u,v,w) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

مثال: حجم بیضی گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ را که $a,b,c > 0$ بیابید؟

$$I = \iiint_D dv = ? \quad \begin{cases} u = \frac{x}{a} \\ v = \frac{y}{b} \\ w = \frac{z}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$



مثال: مساحت ناحیه محدود به 4 منحنی $y=x^2$ ، $y=2x^2$ ، $x=y^2$ ، $x=3y^2$ را بیابید.

$$I=\iint_D dx\,dy \Rightarrow S:\begin{cases}1\le u\le 2\\ 1\le v\le 3\end{cases} \qquad \begin{cases}u=y/x^2\\ v=x/y^2\end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix}\frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3}\end{pmatrix}=\frac{4xy}{x^3y^3}-\frac{1}{x^2y^2}=\frac{3xy}{x^3y^3}=\frac{3}{x^2y^2}=3u^2v^2 \qquad uv=\frac{xy}{x^2y^2}\to u^2v^2=\frac{1}{x^2y^2}$$

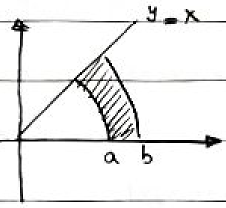
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{3u^2v^2}\Rightarrow I=\iint_S\frac{1}{3u^2v^2}\,du\,dv=\left(\int_1^2\frac{dv}{v^2}\right)\left(\int_1^3\frac{du}{u^2}\right)$$

تغییر متغیر قطبی در انتگرال دوگانه:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r \qquad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_S f(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

مثال: مطلوب است $I=\iint_R\frac{y^2}{x^2}\,dA$ که در آن R ناحیه‌ای است به $a^2\le x^2+y^2\le b^2$ $(a,b>0)$ و در ربع اول زیر خط $y=x$ است.

$a^2\le x^2+y^2\le b^2 \quad a\le r\le b$



$$I=\int_0^{\pi/4}\int_a^b tg^2\theta\, r\,dr\,d\theta \qquad y/x=tg\theta$$

$$=\left(\int_0^{\pi/4}tg^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_a^b r\,dr\right)$$

مثال: نشان دهید $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

حل: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}e^{-x^2}dx+\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx}_{\text{همگرا (مشابه)}}=\int_0^{+\infty}=\int_0^1 e^{-x^2}dx+$

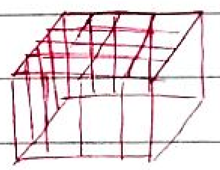
$$\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx \quad x\ge1\to x^2\ge x\to -x^2\le -x\to e^{-x^2}\le e^{-x} \quad \int_1^{\infty}e^{-x}dx \to \text{همگرا}$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\to I^2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)}_{I\ \text{عدد ثابت}}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}I\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)$$

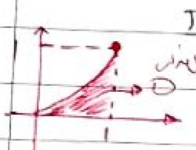
$$\underset{\text{فوبینی}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dy\right)dx=\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\xrightarrow[\text{قطبی}]{\text{تغییر متغیر}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr\right)$$

$=2\pi\times 1/2=\pi\to I^2=\pi\to I=\sqrt{\pi}$ یا $-\sqrt{\pi}$ ← چون عبارت انتگرال (e^{-x^2}) مثبت است

انتگرال 3 گانه:



$$R(P,f)=\sum_i\sum_j\sum_k f(x_i^*,y_j^*,z_k^*)\underbrace{\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k}_{\text{حجم المان}}$$

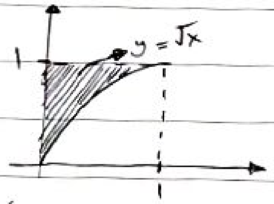


مثال: فرض کنید D ناحیه‌ای است که در آن $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$ ، مطلوبست $I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dA$

$(x,y) \to (0,0)$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+y} \right)_0^{x^2} dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{-1+x+1}{x(x+1)}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \operatorname{Ln}(x+1) \Big)_0^1 = \operatorname{Ln}(2)$$



مطلوبست محاسبه $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{y^3} dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^3} \underbrace{\left(\int_0^{y^2} dx \right)}_{y^2} dy$$

$$= \left(\tfrac{1}{3} e^{y^3} \right)_0^1 = \dots$$

قضیه (مقدار میانگین برای انتگرال دوگانه) فرض کنید f تابعی پیوسته بر ناحیه‌ای بسته، کراندار و همبند D باشد. در این صورت $(x_0, y_0) \in D$ موجود است که

$$\iint_D f(x,y)\, dA = f(x_0, y_0) \times D \qquad D: \text{مساحت}$$

f پیوسته $\exists c \in [a,b]$ $\int_a^b f = f(c)(b-a)$

قضیه (تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه): فرض کنید $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ یک تبدیل یک به یک از ناحیه S در صفحه uv به روی ناحیه D در صفحه xy باشد، همچنین فرض کنید مشتقات جزئی اول توابع x , y نسبت به u , v در S پیوسته باشند. هرگاه $f(x,y)$ بر D انتگرال‌پذیر باشد و $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ آنگاه $g(u,v)$ و نیز بر ناحیه S انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_S g(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \neq 0$$

مثال: مطلوب است محاسبه $I = \iint_R \underbrace{(x-y)^2}_{v} \sin^2 \underbrace{(x+y)}_{u}\, dx\, dy$ ، که در آن R متوازی الاضلاع به رئوس $(0,\pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 0)$

$$\begin{cases} \pi \leq u \leq 3\pi \\ -\pi \leq v \leq \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\tfrac{1}{2}$$

$$I = \tfrac{1}{2} \iint_S v^2 \sin^2(u)\, du\, dv = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\pi}^{3\pi} v^2 \sin^2(u)\, du \right) dv = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 \left(\int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 u\, du \right) dv = \tfrac{1}{2} \left(\int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 u\, du \right)$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} v^2\, dv \right)$$

قضیه فوبینی: ① فرض کنید $z=f(x,y)$ در ناحیه بسته و کراندار D پیوسته باشد، به علاوه فرض کنید $a\le x\le b$، $c(x)\le y\le d(x)$

داریم:

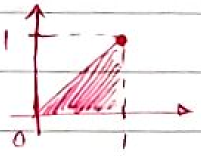
$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint f(x,y)\,dy\,dx=\int_a^b\left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dx\right)dx$$

② فرض کنید $z=f(x,y)$ در ناحیه بسته و کراندار D پیوسته باشد به علاوه فرض کنید $c\le y\le d$، $a(y)\le x\le b(y)$ داریم

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_c^d\left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

مثال: فرض کنید D مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$ باشد. مطلوب است:

$$I=\iint_D xy\,dA$$



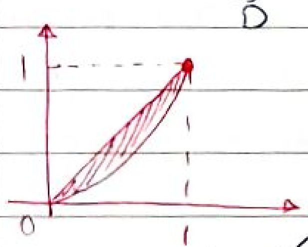
$$=\int_0^1\left(\int_0^x xy\,dy\right)dx=\int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^x dx=\int_0^1 x\left(x^2/2\right)dx$$

$$\int x^3/2=1/8\,x^4$$

$$=\int_0^1 x\left(x^2/2\right)dx \qquad \int_0^1\int_y^1 xy\,dx\,dy=1/8$$

مثال: اگر D ناحیه محصور بین $x=y$ ، $x\sqrt{y}$ باشد، آنگاه مطلوبست محاسبه

$$I=\iint_D \cos\left(x^3/3-x^2/2\right)dx\,dy$$



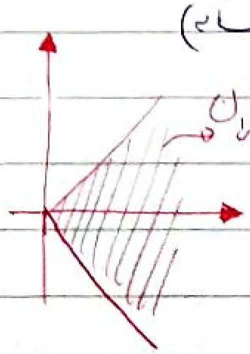
$$I=\int_0^1\left(\int \cos\left(x^3/3-x^2/2\right)dy\right)dx=\int_0^1\cos\left(x^3/3-x^2/2\right)\underbrace{\left(\int_{x^2}^{x} dy\right)}_{x-x^2}dx=$$

$$\int_0^1 (x-x^2)\cos\left(x^3/3-x^2/2\right)dx=-\sin(-1/6)=\sin(1/6)$$

انتگرال های ناسره: اگر f در مجاورت نقطه ای از ناحیه D یا مرز آن بی کران باشد یا ناحیه D بی کران باشد، آنگاه انتگرال دوگانه را انتگرال

ناسره گوییم.

اگر $f(x,y)\ge 0$، آنگاه انتگرال ناسره یا همگرا به عددی متناهی است یا واگرا به $+\infty$ (حالت $f(x,y)\le 0$ مشابه)



ناحیه D بی کران

مثال: فرض کنید D ناحیه ای باشد $x\ge 0$ ، $-x\le y\le x$ مطلوب است

$$I=\iint_D e^{-x^2}dA$$

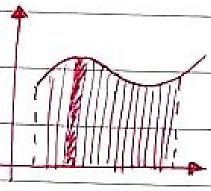
$$I=\int_0^{+\infty}\left(\int_{-x}^{+x} e^{-x^2}dy\right)dx=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\underbrace{(y)_{-x}^{x}}_{2x}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_0^R 2xe^{-x^2}dx=$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left(-e^{-x^2}\right)_0^R=\lim_{R\to+\infty}\left(-e^{-R^2}+1\right)=1$$

انتگرال:

انتگرال دوگانه:

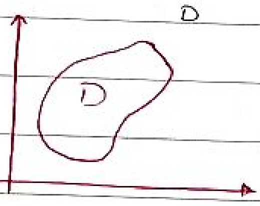
$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



$\sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$

مجموع ریمان: $R(P,f) = \sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$

اگر $\lim_{|P| \to 0} R(P,f)$ موجود باشد. آنگاه گوییم f بر ناحیه D انتگرال‌پذیر است و مقدار حد را با $\iint_D f(x,y)\,dA$ نمایش می‌دهیم.



f کراندار، D بسته و کراندار

قضیه: اگر D بسته و کراندار باشد و $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه f در D انتگرال‌پذیر است.

قضیه: فرض کنید D یک ناحیه بسته و کراندار باشد و $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ توابعی انتگرال‌پذیر در D باشند، $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ آنگاه داریم

1) اگر مساحت D برابر صفر باشد آنگاه $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$

2) اگر $f(x,y) = 1$ آنگاه مساحت $D = \iint_D dA$

3) اگر برای هر $(x,y) \in D$، $f(x,y) \geq 0$ آنگاه $V = \iint_D f(x,y) \geq 0$ حجم جسمی است که به طور قائم بالای ناحیه D زیر $z = f(x,y)$ قرار دارد.

4) اگر برای هر $(x,y) \in D$، $f(x,y) \leq 0$ آنگاه $\iint_D f(x,y)\,dA \leq 0 = -V$ که V حجم جسمی است که زیر ناحیه D و بالای $z = f(x,y)$ است.

5) $\iint_D (c_1 f + c_2 g)\,dA = c_1 \iint_D f\,dA + c_2 \iint_D g\,dA$

6) اگر برای هر $(x,y) \in D$، داشته باشیم $f(x,y) \leq g(x,y)$ آنگاه $\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$

7) $\left| \iint_D f(x,y)\,dA \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA$

8) اگر $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ناحیه‌هایی به صورت دو به دو غیرمتداخل (در مرز مشترک) انتگرال‌پذیر داشته باشند آنگاه داریم

$$\iint_{D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i} f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)\,dA$$