



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال دوم ۹۸-۹۹  
تهیه و تنظیم: مهري رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
تمرینات ریاضی عمومی ۲- سری پنجم  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۱. (آدامز بخش ۴ - ۱۵ سوال ۱۰) فرض کنید  $F = (axy + z)\vec{i} + x^2\vec{j} + (bx + 2z)\vec{k}$  میدان نیروی پایستار باشد. الف)  $a, b$  و پتانسیلی برای  $F$  بیابید.

ب) کار انجام شده توسط میدان نیرو را بر  $C$ ، که خم گذرنده از نقاط  $(1, 1, 0)$  و  $(0, 0, 3)$  و فصل مشترک رویه های  $2x + y + z = 3$  و  $9x^2 + 9y^2 + 2z^2 = 18$  است و در یک هشتم اول قرار دارد، محاسبه کنید.

۲. (آدامز بخش ۴ - ۱۵ سوال ۱۲) کار انجام شده به وسیله میدان نیروی

$$F = (y^2 \cos x + z^2)\vec{i} + (2y \sin x - 4)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$$

در حرکت دادن ذره ای در امتداد خم  $x = \sin^{-1}t, y = 1 - 2t, z = 3t - 1, (0 \leq t \leq 1)$  را بیابید.

۳. (آدامز بخش ۵ - ۱۵ سوال ۹) مساحت آن قسمت از مخروط  $z^2 = x^2 + y^2$  را که درون استوانه  $2ay = x^2 + y^2$  قرار دارد بیابید.

۴. (آدامز بخش تمرینات دوره ای فصل ۱۵ سوال ۱۲) شار گذرنده از میدان نیروی  $F = (3xz^2, -x, -y)$  در عبور از  $S$ ، که قسمتی از استوانه  $y^2 + z^2 = 16$  است که در یک هشتم اول و بین صفحات  $x = 0$  و  $x = 5$  قرار دارد را در جهتی که از محور  $x$  دور می شود، محاسبه کنید.

۵. (پایانترم ۹۸ - ۹۷) فرض کنید  $S$  رویه پارامتری

$$r(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u), \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi.$$

باشد. انتگرال  $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS$  را محاسبه کنید.

۶. (آدامز بخش ۵ - ۱۵ سوال ۱۴) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\iint_S x dS$  که در آن  $S$  آن قسمت از مخروط  $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$  است که زیر صفحه  $z = 1 + y$  قرار دارد.

۷. (آدامز بخش ۳ - ۱۶ مثال ۳) فرض کنید  $C$  خم بسته ساده پادساعتگرد در صفحه  $xy$  باشد که ناحیه ای مانند  $R$  را احاطه کرده است و از مبدا نمی گذرد. نشان دهید

$$\oint_C -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \begin{cases} 0 & \text{اگر مبدا بیرون } C \text{ باشد} \\ 2\pi & \text{اگر مبدا درون } C \text{ باشد} \end{cases}$$

۸. (پایانترم ۹۷ - ۹۶) اگر  $F = (y + z \cos(xz), x, x \cos(xz))$  باشد، مقدار انتگرال  $\int_C F \cdot dr$  را محاسبه کنید که در آن  $C$  خم پارامتری زیر است:

$$\gamma(t) = (e^{\cos(\pi t)}, e^{\cos(\pi t) + \sin(\pi t)}, \cos(\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 1$$



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال دوم ۹۸-۹۹  
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
تمرینات ریاضی عمومی ۲- سری پنجم  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۹. (آدامز بخش ۳- ۱۶ سوال ۵) با استفاده از انتگرال خم، مساحت محصور به خم زیر را بیابید.

$$r = a \cos^2 t \vec{i} + b \sin^2 t \vec{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

۱۰. (پایانترم ۹۸-۹۷)

الف) فرض کنید  $C$  خم  $r(t) = (1-t)e^t \vec{i} + t \vec{j} + 2t \vec{k}$  باشد که در آن  $0 \leq t \leq 1$ . انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_C (1+x)e^{x+y} dx + (xe^{x+y} + 2y) dy - 2z dz$$

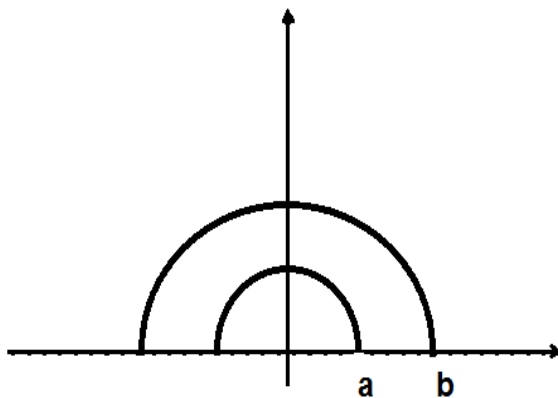
ب) مطلوبست محاسبه  $\oint_C x^2 y dx - xy^2 dy$  که در آن منحنی  $C$  متشکل از نیم دایره بالایی  $x^2 + y^2 = 9$  و پاره خط واصل بین  $(-3, 0)$  و  $(3, 0)$  است که در جهت مثلثاتی پیموده می شود.

۱۱. (پایانترم ۹۶-۹۵) میدان برداری  $F = (x - y^3, y^3 + x^3)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $D$  ناحیه محدود به  $x^2 + y^2 \leq a^2$

و  $x \geq 0, y \geq 0$  و  $C$  مرز ناحیه  $D$  باشد. انتگرال  $\int_C F \cdot dr$  را با استفاده از

الف) قضیه گرین ب) بطور مستقیم محاسبه کنید.

۱۲. در صورتی که  $C$  مرز ناحیه بین دو نیم دایره به شعاع های  $a$  و  $b$  و آن بخشی روی محور  $x$  که این دو مرز را به هم متصل کند و مطابق شکل زیر باشد. حاصل انتگرال زیر را بدست آورید



$$\oint_C (4x + \sin(x)) dx + (e^{\cos(y)} + 3x^2) dy.$$

۱۳. (آدامز بخش ۴- ۱۶ سوالات ۸, ۴) با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری

الف)  $F = (x^3, 3yz^2, 3y^2z + x^2)$  را در خروج از کره  $S$  به معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  که در آن  $a > 0$ ، محاسبه کنید.

ب)  $F = (x^2, y^2, z^2)$  را در خروج از مرز ناحیه محصور به استوانه  $2y$  و  $x^2 + y^2 \leq 4$  و  $0 \leq z \leq 4$  محاسبه کنید.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال دوم ۹۸-۹۹  
تهیه و تنظیم: مهري رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
تمرینات ریاضی عمومی ۲- سری پنجم  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۱۴. (آدامز بخش ۴ - ۱۶ سوال ۱۳) فرض کنیم  $D$  حجم محصور به  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$  و  $x^2 + y^2 \geq a^2$  باشد. مرز  $D$ ، یعنی  $S$ ، از یک قسمت استوانه ای به نام  $S_1$  و یک قسمت کروی به نام  $S_2$  تشکیل شده است. شار  $F = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$  را در خروج از  $D$  و عبور از رویه های زیر محاسبه کنید.

الف) کل رویه  $S$       ب) رویه  $S_1$       ج) رویه  $S_2$

۱۵. (آدامز بخش ۵ - ۱۶ سوال ۴) انتگرال  $\iint_S (\text{curl} F) \cdot N \, dS$  را محاسبه کنید که در آن  $S$  قسمتی از رویه  $x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6$  است که بالای صفحه  $xy$  قرار دارد و  $N$  قائم یکه بر  $S$  و به سمت خارج  $S$  است و

$$F = (xz - y^2 \cos z, x^2 e^z, xyze^{x^2+y^2+z^2})$$

۱۶. (پایانترم ۹۶ - ۹۵) فرض کنید  $f(x, y, z) = a_1 x^4 + a_2 y^4 + a_3 z^4 + 3a_4 x^2 y^2 + 3a_5 y^2 z^2 + 3a_6 x^2 z^2$  و  $S$  کره  $\rho = 1$  است. اگر  $N$  بردار قائم یکه روبه بیرون بر  $S$  باشد. در اینصورت

الف) میدان برداری  $F(x, y, z)$  را چنان بیابید که داشته باشیم  $F \cdot N = f(x, y, z)$ .

ب) با استفاده از قضیه دیورژانس نشان دهید:  $\iint_S f \, dS = \frac{4\pi}{5} \sum_{i=1}^6 a_i$

۱۷. (آدامز بخش ۵ - ۱۶ سوال ۸) فرض کنید  $F = ye^x \vec{i} + (x^2 + e^x) \vec{j} + z^2 e^z \vec{k}$  و  $C$  خم

$$r(t) = (1 + \cos t) \vec{i} + (1 + \sin t) \vec{j} + (1 - \cos t - \sin t) \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

است. راهنمایی: قضیه استوکس را بکار ببرید و توجه داشته باشید که  $C$  بر صفحه معینی قرار دارد و تصویر آن بر صفحه  $xy$  یک دایره است.

۱۸. (پایانترم ۹۸ - ۹۷)

الف)  $\iint_S (\text{curl} F) \cdot N \, dS$  را محاسبه کنید که در آن  $S$  قسمتی از رویه  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 17$  است که بالای صفحه  $xy$  قرار دارد و  $N$  قائم یکه بر  $S$  و به سمت خارج  $S$  است و  $F = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$ .

ب) فرض کنید  $D$  ناحیه خارج استوانه  $x^2 + y^2 = a^2$  و داخل کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  باشد و  $S$  مرز ناحیه  $D$  باشد. مطلوبست  $\iint_S F \cdot N \, dS$  که در آن

$$F = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$$

و  $N$  قائم یکه بر  $S$  و روبه خارج  $S$  است.

۱۹. (پایانترم ۹۷ - ۹۶) فرض کنید  $F = (x^2 + y + 2 + z^2, e^{x^2} + y^2, 3 + x)$ . اگر  $a > 0$  و  $S$  آن قسمت از رویه کروی  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az + 3a^2$  باشد که بالای صفحه  $xy$  قرار دارد و اگر  $N$  قائم یکه رو به بالا بر  $S$ ، (روبه خارج کره شامل  $S$ ) باشد، شار میدان برداری  $F$  را که از  $S$  در جهت  $N$  می گذرد حساب کنید.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
( پلی تکنیک تهران )

نیمسال دوم ۹۹-۹۸  
تهیه و تنظیم: مهري رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
تمرینات ریاضی عمومی ۲- سری پنجم  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۲۰. (آدامز بخش ۵ - ۱۶ سوال ۵) با استفاده از قضیه استوکس نشان دهید

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \sqrt{3}\pi a^2$$

که در آن  $C$  خم فصل مشترک رویه های  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  و  $x + y + z = 0$  با جهت دهی مناسب است.