به نام خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تمرین ریاضی 1

سری سوم

بخش کاربرد مشتق

تمرین‌های سری سوم
بخش کاربرد مشتق

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۱. با استفاده از دستور تجزیه‌ی تفاضل سوم یعنی $a^{۳} - b^{۳} = (a-b)(a^{۲} + ab + b^{۲})$ مشتق $f(x) = x^{\frac{۱}{۳}}$ را مستقیماً با به کارگیری تعریف مشتق محاسبه کنید.

پاسخ :

با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to ۰} \frac{(x+h)^{\frac{۱}{۳}} - x^{\frac{۱}{۳}}}{h}$$

این مقدار برابر است با:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{(x+h)^{\frac{۱}{۳}} - x^{\frac{۱}{۳}}}{h} \times \frac{(x+h)^{\frac{۲}{۳}} + (x+h)^{\frac{۱}{۳}} x^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}}}{(x+h)^{\frac{۲}{۳}} + (x+h)^{\frac{۱}{۳}} x^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}}}$$

پس با ضرب این مقدار در صورت و مخرج داریم:

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{x+h-x}{h[(x+h)^{\frac{۲}{۳}} + (x+h)^{\frac{۱}{۳}} x^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}}]}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{(x+h)^{\frac{۲}{۳}} + (x+h)^{\frac{۱}{۳}} x^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}}}$$

$$= \frac{۱}{۳x^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۱}{۳} x^{-\frac{۲}{۳}} .$$

۲. نشان دهید خم $y=x^{2}$ خم $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ را در زاویه قائمه قطع می‌کند.

پاسخ :

ابتدا نشان می‌دهیم در چه نقطه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند:

$$y=x^{2}=\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \longrightarrow \quad x=1\,.$$

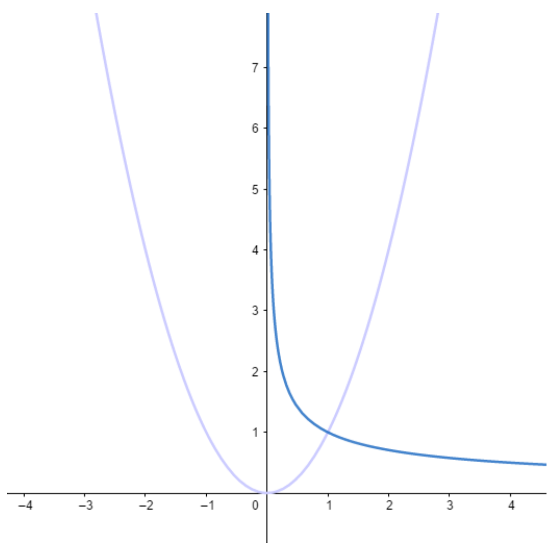
حال شیب خط $y=x^{2}$ در این نقطه برابر است با:

$$\frac{dy}{dx}=2x=2\times 1=2\,.$$

و شیب منحنی $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ در این نقطه برابر است با:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$$

ضرب این دو مقدار برابر با -1 است پس در زاویه قائمه یکدیگر را قطع می‌کنند.



تهیه و تنظیم : میترا احمدی
نیمسال دوم ۹۹-۹۸

۳. اگر $f(x)$ بر بازه‌ای مانند I مشتق‌پذیر باشد و در n نقطه‌ی متمایز I که $n \geq ۲$ است، صفر شود. ثابت کنید که $f'(x)$ باید در حداقل $n - ۱$ نقطه‌ی متعلق به I صفر شود.

پاسخ :

فرض کنیم $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n$ متعلق به بازه I باشد و $f(x_i) = ۰$.

پس با توجه به قضیه مقدار میانگین می‌توان گفت که $y_i \in (x_i, x_{i+۱})$ موجود است که:

$$f'(y_i) = ۰ \,.$$

۴. فرض کنیم:

$$\begin{cases} x + ۲x^۲ \sin(\frac{۱}{x}) & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

(آ) با تعریف مشتق نشان دهید $f'(۰) = ۱$.

(ب) نشان دهید که هر بازه‌ی حاوی $x = ۰$ حاوی x هایی نیز است به طوری که $f'(x) < ۰$ و از این رو f بر این نوع بازه‌ها نمی‌توانند صعودی باشند.

پاسخ :

(آ)

داریم:

$$f'(۰) = \lim_{h\to۰} \frac{f(۰+h) - f(۰)}{h} = \lim_{h\to۰} \frac{h + ۲h^۲ \sin\frac{۱}{h}}{h} = \lim_{h\to۰} ۱ + ۲h \sin\frac{۱}{h} = ۱$$

(ب)

در جاهایی که $x \neq ۰$ است داریم:

$$f'(x) = ۱ + ۴x \sin\frac{۱}{x} - ۲\cos\frac{۱}{x}$$

به دنبال نقاطی هستیم که در آن مشتق کمتر از صفر شود یعنی:

$$f'(x) = ۱ + ۴x \sin\frac{۱}{x} - ۲\cos\frac{۱}{x} < ۰$$

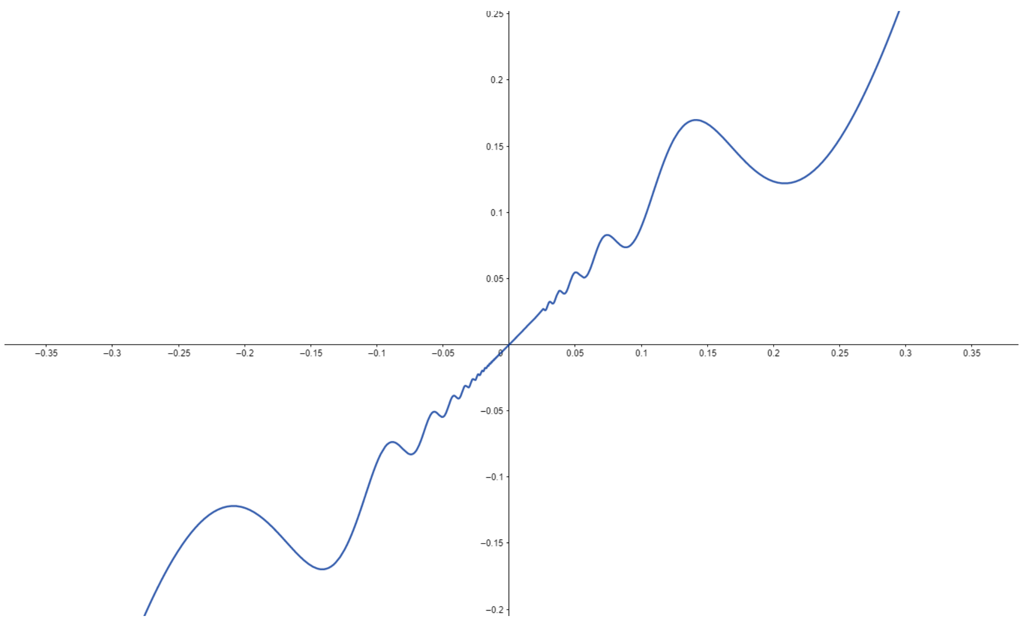
در این‌جا اعدادی مانند x نزدیک به ۰ وجود دارند که $f'(x) = -۱$. که این اعداد برابراند با:

$$x = \frac{\pm۱}{۲n\pi}$$

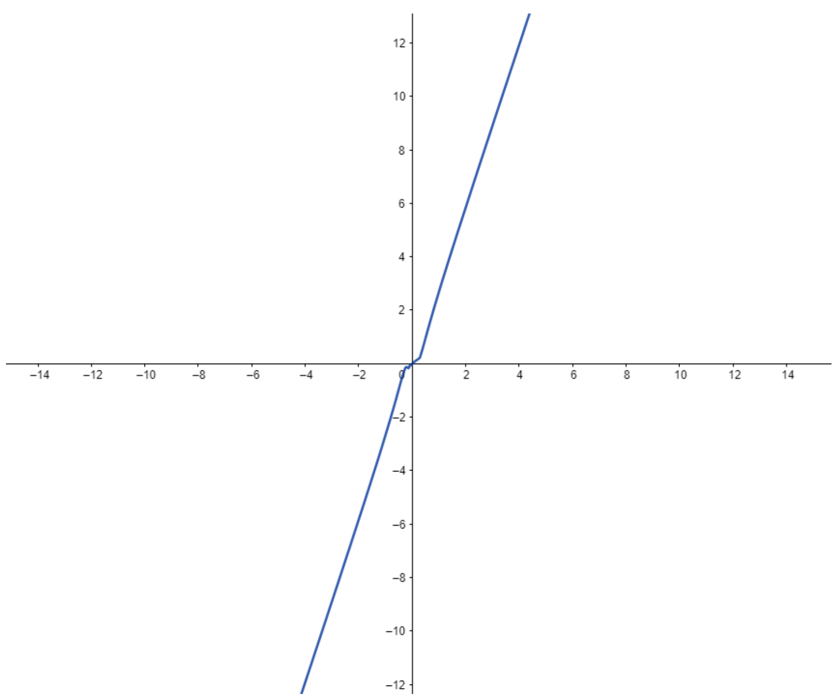
که $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$.

حال از آن‌جایی که در هر نقطه به جز ۰ پیوسته است، در بازه‌های کوچک شامل این نقاط منفی است. پس تابع f نمی‌تواند در بازه‌هایی شامل ۰ صعودی باشد.

نمایی از تابع $f(x)$ در بازه‌ای کوچک و نزدیک به صفر:



نمایی از تابع $f(x)$ در حالت کلی:



۵. فرض کنیم $f(x)$ بر بازه‌ای مانند I دوبار مشتق‌پذیر باشد، نقاط ۰ و ۲ متعلق به I باشد و همچنین داشته باشیم $f(۲) = ۱$ و $f(۰) = f(۱) = ۰$ ، ثابت کنید:

(آ) به ازای نقطه‌ای مانند a متعلق به I داریم $f'(a) = \frac{۱}{۲}$

(ب) به ازای نقطه‌ای مانند b متعلق به I داریم: $f''(b) > \frac{۱}{۲}$

(ج) به ازای نقطه‌ای مانند c متعلق به I داریم: $f'(c) = \frac{۱}{۷}$

پاسخ :

(آ)

طبق فرض داریم:

$$f(۰) = f(۱) = ۰ \text{ و } f(۲) = ۱$$

با توجه به قضیه مقدار میانگین $a \in (۰, ۲)$ موجود است که:

$$f'(a) = \frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۱ - ۰}{۲ - ۰} = \frac{۱}{۲} .$$

(ب)

در این‌جا نیز با توجه به قضیه مقدار میانگین می‌توان گفت $r \in (۰, ۱)$ موجود است که:

$$f'(r) = \frac{f(۱) - f(۰)}{۱ - ۰} = \frac{۰ - ۰}{۱ - ۰} = ۰$$

هم‌چنین $s \in (۱, ۲)$ موجود است که:

$$f'(s) = \frac{f(۲) - f(۱)}{۲ - ۱} = \frac{۱ - ۰}{۲ - ۱} = ۱$$

حال قضیه مقدار میانگین را برای تابع f' اعمال می‌کنیم. پس می‌توان گفت $b \in (r, s)$ موجود است که:

$$f''(b) = \frac{f'(s) - f'(r)}{s - r} = \frac{۱ - ۰}{s - r} = \frac{۱}{s - r} > \frac{۱}{۲}$$

(ج)

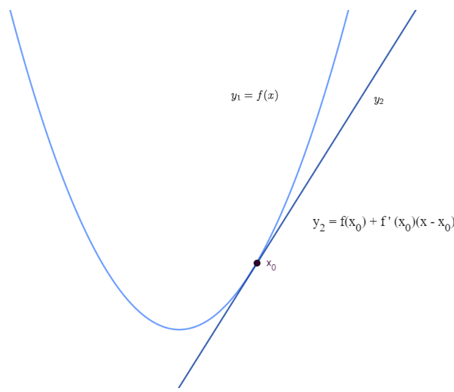
چون تابع $f''(x)$ روی بازه $(۰, ۲)$ موجود است پس تابع f' در این بازه پیوسته است. حال چون $f'(r) = ۰$ و $f'(s) = ۱$ است و $۰ < \frac{۱}{۷} < ۱$ است، با توجه به قضیه مقدار میانی، می‌توان گفت که $c \in (r, s)$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{۱}{۷} .$$

۶. ثابت کنید که اگر f بر بازه‌ای به طرف بالا مقعر باشد، آنگاه نمودار تابع بر این بازه بالای خطوط مماس خود قرار دارد.

پاسخ :

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای مثل (a,b) به سمت بالا مقعر باشد. (به این معنی که برای مقدار $x \in (a,b)$ $f''(x) \geq 0$ باشد .) به شکل زیر دقت کنید.



برای اثبات سوال کافی است ثابت کنیم که برای هر $x \in (a,b)$ داریم:

$$y_1 \geq y_2 \,.$$

حال تابع $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: (که تفاضل همان y_1 و y_2 است.)

$$h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

مشتق این تابع برابر است با:

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

که در نقطه $x = x_0$ برابر است با 0 .

سپس مشتق دوم این تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$h''(x) = f''(x)$$

حال چون طبق فرض مسئله $f''(x) \geq 0$ است پس تابع h' بر بازه (a,b) صعودی است و چون $h'(x_0) = 0$ است پس h' در بازه (a,x_0) نامثبت و در بازه (x_0,b) نامنفی است پس تابع h در بازه (a,x_0) نزولی و در بازه (x_0,b) صعودی است پس h در نقطه x_0 مقدار مینیمم خود را اختیار می‌کند. پس داریم:

$$h(x) \geq h(x_0) = 0 \,.$$

۷. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید اگر $g(x) = xf(x)$ و به ازای هر عدد صحیح مثبت k داشته باشیم:

$$g^{(k)}(0) = 0$$

آن‌گاه نشان دهید $x = 0$ یک نقطه‌ی عطف تابع g است.

پاسخ :

اگر $g(x) = xf(x)$ باشد، در این صورت داریم:

$$g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

و

$$g''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$$

پس در حالت کلی :

$$g^{(n)}(x) = nf^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(x)$$

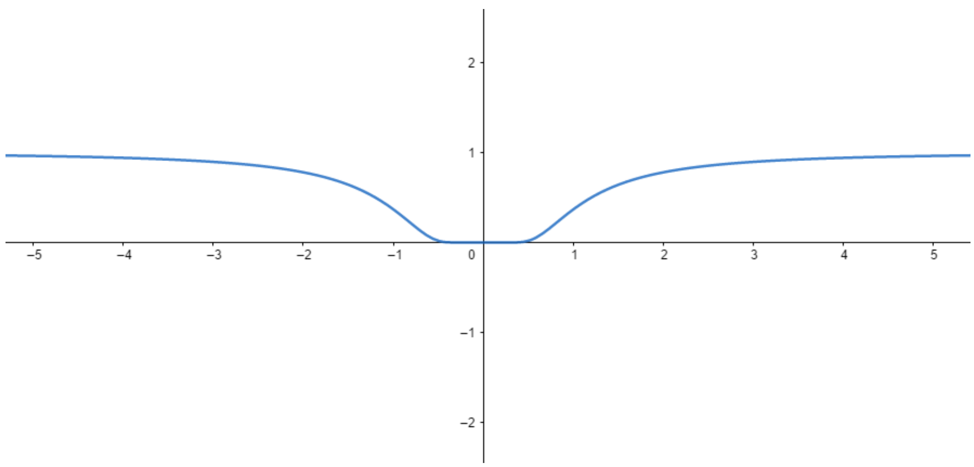
و با توجه به فرض مسئله برای هر k داریم:

$$g^{(k)} = 0$$

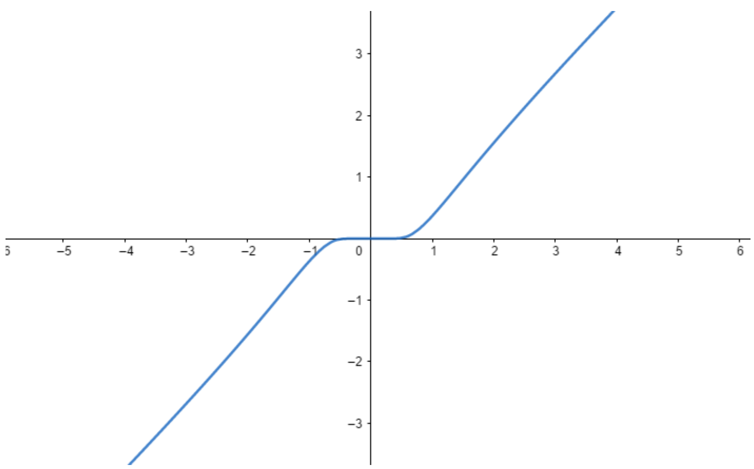
حال می‌توان گفت اگر $x < 0$ باشد، $g(x) < 0$ است و اگر $x > 0$ باشد، $g(x) > 0$ است.

پس در نقطه 0 تابع g نمی‌تواند هم مقدار ماکسیمم داشته باشد و هم مقدار مینیمم پس می‌توان نتیجه گرفت که نقطه $x = 0$ نقطه عطف تابع g است.

نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:



و نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر است:



۸. فرض کنید تابع f در شرایط زیر صدق کند:

اولاً $f(0) = 0$ و به ازای هر x داریم:

$$| f(x) | > \sqrt{| x |}$$

نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد.

پاسخ :

اگر $h \neq 0$ باشد، در این صورت زمانی که $h \to 0$ داریم:

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(h) - f(0)}{| h |} \right| = \lim_{h\to 0} \frac{| f(h) |}{h} > \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{| h |}}{| h |} \to \infty$$

پس $f'(0)$ وجود ندارد.

۹. فرض کنید تابع g طوری باشد که $g'(0) = k$ و به ازای هر x, y داشته باشیم:

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

حال نشان دهید:

(آ) $g(0) = 0$

(ب) به ازای هر x تابع $g'(x) = k$

(ج) به ازای هر x تابع $g(x) = kx$

پاسخ :

فرض کنیم $g'(0) = k$ و به ازای هر x, y داشته باشیم:

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

(آ)

در این صورت داریم:

$$g(0) = g(0 + 0) = g(0) + g(0) \quad \longrightarrow \quad g(0) = 0 \ .$$

(ب)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x) + g(h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = k \ .$$

(ج)

تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = g(x) - kx \ .$$

در این صورت

$$h'(x) = g'(x) - k = 0 \ .$$

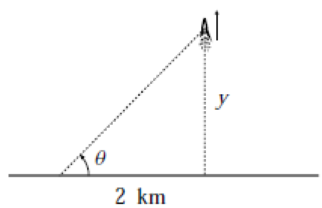
پس تابع $h(x)$ یک تابع ثابت است. حال از طرف دیگر داریم:

$$h(0) = g(0) = 0$$

پس برای هر x از دامنه داریم:

$$h(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad g(x) = kx$$

۱۰. موشکی در لحظه‌ی $t=0$ پرتاب می‌شود و با شتاب $10\frac{m}{s^2}$ به طور قائم بالا می‌رود. از طریق یک ایستگاه رهگیری که به طور افقی در فاصله‌ی ۲ کیلومتری سکوی پرتاب قرار گرفته است، حرکت موشک کنترل می‌شود. آنتن ایستگاه رهگیری، ۱۰ ثانیه بعد از پرتاب با چه آهنگی به طرف بالا می‌چرخد.



پاسخ :

فرض کنیم $y(t)$ ارتفاع موشک بعد از t ثانیه پرواز باشد. در این صورت در نقطه $t=0$ داریم:

$$\frac{dy}{dt}=y=0 \qquad \text{و} \qquad \frac{d^2(y)}{dt^2}=10$$

پس

$$y=5t^2$$

و

$$tg\theta=\frac{y}{2000}$$

پس

$$sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}}{2000}$$

و

$$(1+(\frac{y}{2000})^2)\frac{d\theta}{dt}\frac{10t}{2000}=\frac{t}{200}$$

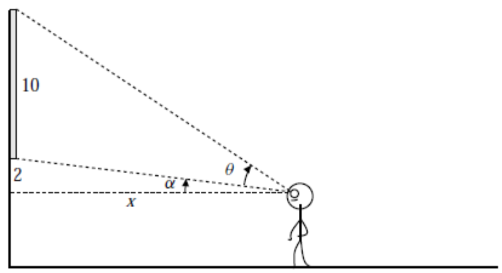
پس

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{t}{200}.\frac{1}{1+\frac{25t^4}{2000^2}}=\frac{t}{200}.\frac{1}{1+\frac{t^4}{400^2}}=\frac{800t}{400^2+t^4}$$

پس در نقطه $t=10$ داریم:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{8000}{400^2+100^2}$$

۱۱. برای بهترین دید از یک نقاشی دیواری، چقدر باید از آن فاصله گرفت در صورتی که ارتفاع آن $۱۰ft$ و پایین آن $۲ft$ بالاتر از سطح چشم است.



پاسخ :
به شکل بالا دقت کنید. در این صورت داریم:

$$tg(\alpha+\Theta)=\frac{۱۲}{x} \qquad \text{و} \qquad tg(\alpha)=\frac{۲}{x}$$

پس:

$$tg(\alpha+\Theta)=\frac{۱۲}{x}=\frac{tg(\alpha)+tg(\Theta)}{۱-tg(\alpha)tg(\Theta)}=\frac{tg(\Theta)+\frac{۲}{x}}{۱-\frac{۲}{x}tg(\Theta)}$$

در نتیجه:

$$\frac{۱۲}{x}-\frac{۲۴}{x^{۲}}tg(\Theta)=tg(\Theta)+\frac{۲}{x}$$

$$tg(\Theta)(۱+\frac{۲۴}{x^{۲}})=\frac{۱۰}{x}$$

پس:

$$tg(\Theta)=\frac{۱۰x}{x^{۲}+۲۴}=f(x)$$

برای بهترین دید باید Θ را ماکسیمم کنیم و یا به عبارتی $tg(\Theta)$ را ماکزیمم کنیم پس به دنبال نقطه بحرانی می‌گردیم:

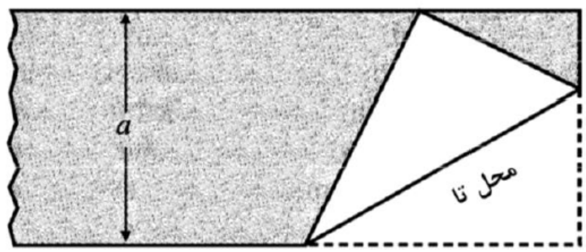
$$f'(x)=۱۰[\frac{x^{۲}+۲۴-۲x^{۲}}{(x^{۲}+۲۴)^{۲}}]=۰$$

که به دست می‌آید:

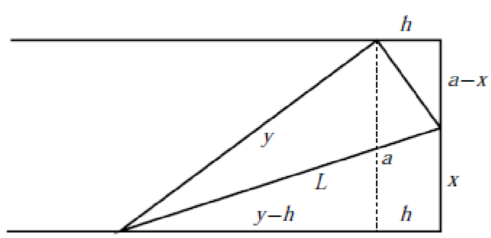
$$x^{۲}=۲۴ \quad \longrightarrow \quad x=۲\sqrt{۶}$$

پس باید $۲\sqrt{۶}ft$ عقب بایستد که بهترین دید را داشته باشد.

۱۲. گوشه‌ای از یک نوار کاغذی به عرض a سانتی‌متر را طوری تا می‌کنیم که روی لبه‌ی مقابل قرار گیرد. کمترین طول ممکن برای خط تا را بیابید.



پاسخ :
شکل زیر را در نظر بگیریم:



داریم:

$$x^۲ = h^۲ + (a-x)^۲ \quad \longrightarrow \quad h^۲ = ۲ax - a^۲$$

$$y^۲ = a^۲ + (y-h)^۲ \quad \longrightarrow \quad h^۲ = ۲hy - a^۲$$

پس

$$hy = ax$$

در این صورت برای $\frac{a}{۲} < x \leq a$ داریم:

$$L^۲ = x^۲ + y^۲ = x^۲ + \frac{a^۲x^۲}{h^۲} = x^۲ + \frac{a^۲x^۲}{۲ax - a^۲} = \frac{۲ax^۳}{۲ax - a^۲}$$

حال به دنبال پیدا کردن نقطه بحرانی $L^۲$ هستیم:

$$\frac{dL^۲}{dx} = \frac{(۲ax - a^۲)(۶ax^۲) - (۲ax^۳)(۲a)}{(۲ax - a^۲)^۲} = \frac{۲a^۲x^۲(۴x - ۳a)}{(۲ax - a^۲)^۲} = ۰ \; .$$

در بازه $(\frac{a}{۲}, a]$ تنها نقطه بحرانی $x = \frac{۳a}{۴}$ است.

چون $L(\frac{۳a}{۴}) = \frac{۳\sqrt{۳}a}{۴} < L(a)$ پس کمترین طول ممکن برای خط برابر است با :

$$\frac{۳\sqrt{۳}a}{۴} cm \; .$$