تعیین توزیع تابعی از متغیر تصادفی
-آمار و احتمالات مهندسی-

مدرس: مشکانی فراهانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۴ آذر ۱۳۹۹

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تکیه‌گاه R_X و تابع چگالی احتمال معین $f_X(x)$ باشد.
- تابع $Y = g(X)$ متغیر تصادفی جدیدی با تکیه‌گاه R_Y است که تابع چگالی آن یعنی $f_Y(y)$ مشخص نیست.
- هدف این بخش تعیین چگالی متغیر جدید Y یعنی $f_Y(y)$ با استفاده از تابع چگالی $f_X(x)$ است.

متغیرهای تصادفی گسسته

تعیین تابع چگالی $g(X)$
تک متغیره

اگر X گسسته با تابع جرم احتمال $P(X=x)$ باشد، برای به دست آوردن تابع چگالی $Y=g(X)$ که یک تبدیل یک‌به‌یک بین مقادیر X و Y است، داریم:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P\left(Y=y\right) \\ &= P\left(g(X)=y\right) \\ &= P\left(X=g^{-۱}(y)\right) \\ &= f_X\left(g^{-۱}(y)\right) \end{aligned}$$

مثال ۱

فرض کنید جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد. مطلوب است توزیع $Y = ۲X$.

$X = x_i$	-۱	۰	۱
$P(X = x_i)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

راه‌حل:

$$R_Y = \{-۲, ۰, +۲\}$$

$$Y = ۲X \qquad \Rightarrow \qquad X = g^{-۱}(Y) = \frac{Y}{۲}$$

$$P(Y = -۲) = P(۲X = -۲) = P\left(X = \frac{-۲}{۲}\right) = \frac{۱}{۴}$$

$$P(Y = ۰) = P(۲X = ۰) = P\left(X = \frac{۰}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(Y = +۲) = P(۲X = +۲) = P\left(X = \frac{+۲}{۲}\right) = \frac{۱}{۴}$$

$Y = y_i$	-۲	۰	۲
$P(Y = y_i)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

مثال ۲

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد. مطلوب است تعیین توزیع $Y = ۲X + ۱$.

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n, \qquad x = ۰, ۱, \ldots, n.$$

راه‌حل:

$$R_Y = \{۱, ۳, ۵, \ldots, ۲n + ۱\}$$

$$Y = ۲X + ۱ \qquad \Rightarrow \qquad X = g^{-۱}(Y) = \frac{Y - ۱}{۲}$$

$$P(Y = y) = \binom{n}{\frac{y-۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n, \qquad y = ۱, ۳, \ldots, ۲n + ۱$$

مثال ۳

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد. مطلوب است تعیین توزیع $Y = X^۲$.

$$f(x) = \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right)^{x-۱}, \qquad x = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

راه‌حل:

$$R_Y = \{۱, ۴, ۹, \ldots\}$$

$$Y = X^۲ \qquad \Rightarrow \qquad X = g^{-۱}(Y) = \sqrt{Y}$$

$$P(Y = y) = \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right)^{\sqrt{y}-۱}, \qquad y = ۱, ۴, \ldots$$

تعیین تابع چگالی $g(X,Y)$
دو متغیره

فرض کنید (X,Y) دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $P(X=x,Y=y)$ باشند.

اگر $U=g_۱(X,Y)$ باشد، تابع $V=g_۲(X,Y)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که معکوس آن‌ها یعنی $X=g_۱^{-۱}(U,V)$ و $Y=g_۲^{-۱}(U,V)$ به طور منحصر به‌فرد وجود داشته باشد.

تابع احتمال توأم (U,V) عبارت است از:

$$f_{U,V}(u,v)=P\left(U=u,V=v\right)=P\left(X=g_۱^{-۱}(u,v),Y=g_۲^{-۱}(u,v)\right)$$

در نتیجه تابع احتمال حاشیه‌ای متغیر تصادفی U را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$f_U(u)=P\left(U=u\right)=\sum_{R_V}P\left(U=u,V=v\right)$$

دو نکته

- تبدیل $V = g_2(X,Y)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $U = g_1(X,Y)$ و $V = g_2(X,Y)$ یک تبدیل یک به یک بین نقاط $R_{X,Y}$ و $R_{U,V}$ باشد. چون تبدیل یک به یک است، پس توابع یکتای وارون وجود دارند.

- توجه داشته باشد که انتخاب تابع $V = g_2(X,Y)$ برای تشکیل یک تبدیل یک به یک یکتا نیست.

مثال ۴

اگر تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ به صورت زیر باشد، تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی مقابل را به دست آورید: $Y_۲ = X_۱ + X_۲ \qquad Y_۱ = X_۱ - X_۲$

$$f\left(x_۱, x_۲\right) = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{x_۱+x_۲}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲-x_۱-x_۲}, \qquad \left(x_۱, x_۲\right) \in \{(۰,۰)\,(۱,۰)\,(۰,۱)\,(۱,۱)\}$$

راه‌حل:

$$\begin{cases} Y_۱ = X_۱ - X_۲ \\ Y_۲ = X_۱ + X_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_۱ = \frac{Y_۱+Y_۲}{۲} \\ X_۲ = \frac{Y_۲-Y_۱}{۲} \end{cases}$$

$$f\left(y_۱, y_۲\right) = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{y_۲}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲-y_۲}, \qquad \left(y_۱, y_۲\right) \in \{(۰,۰)\,(۱,۱)\,(-۱,۱)\,(۰,۲)\}$$

مثال ۵

فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی گسسته با تابع احتمال توأم زیر باشند. تابع احتمال $Y = X_۱ X_۲$ را به دست آورید.

$$f\left(x_۱, x_۲\right) = \frac{x_۱ x_۲}{۱۸}, \qquad x_۱ = ۱, ۲ \qquad x_۲ = ۱, ۲, ۳$$

راه‌حل:

$$\begin{cases} Y_۱ = X_۱ X_۲ \\ Y_۲ = X_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_۱ = \frac{Y_۱}{Y_۲} \\ X_۲ = Y_۲ \end{cases}$$

$$f\left(y_۱, y_۲\right) = \frac{۱}{۱۸} \times \frac{y_۱}{y_۲} \times y_۲ = \frac{y_۱}{۱۸}, \qquad \left(y_۱, y_۲\right) \in \{(۱,۱)\,(۲,۲)\,(۳,۳)\,(۲,۱)\,(۴,۲)\,(۶,۳)\}$$

$$P\left(Y_۱ = ۱\right) = \frac{۱}{۱۸} \qquad P\left(Y_۱ = ۲\right) = \frac{۲}{۱۸} + \frac{۲}{۱۸} = \frac{۴}{۱۸}$$

$$P\left(Y_۱ = ۳\right) = \frac{۳}{۱۸} \qquad P\left(Y_۱ = ۴\right) = \frac{۴}{۱۸} \qquad P\left(Y_۱ = ۶\right) = \frac{۶}{۱۸}$$

$Y_۱ = y_۱$	۱	۲	۳	۴	۶
$P(Y_۱ = y_۱)$	$\frac{۱}{۱۸}$	$\frac{۴}{۱۸}$	$\frac{۳}{۱۸}$	$\frac{۴}{۱۸}$	$\frac{۶}{۱۸}$

مثال ۶

فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی گسسته با تابع احتمال توأم زیر باشد. تابع جرم احتمال $Y = \min(X_۱, X_۲)$ را تعیین کنید.

$X_۱ \downarrow, X_۲ \rightarrow$	۰	۱	۲	۳
-۱	۰/۱	۰/۱۵	۰/۰۵	۰/۲
۱	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۰۵

راه‌حل:

$$R_Y = \{-۱, ۰, +۱\}$$
$$P(Y = -۱) = P\{(-۱, ۰), (-۱, ۱), (-۱, ۲), (-۱, ۳)\} = ۰/۱ + ۰/۱۵ + ۰/۰۵ + ۰/۲ = ۰/۵$$
$$P(Y = ۰) = P\{(۱, ۰)\} = ۰/۱$$
$$P(Y = +۱) = P\{(۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳)\} = ۰/۱۵ + ۰/۲ + ۰/۰۵ = ۰/۴$$

$Y = y$	-۱	۰	۱
$P(Y = y)$	۰/۵	۰/۱	۰/۴

مثال ۷

اگر تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت زیر باشد، تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2$ را به دست آورید.

$$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}, \qquad x_1, x_2 = 0, 1, \ldots, n \quad , \quad 0 \leq x_1 + x_2 \leq n$$

راه‌حل:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 - Y_2 \\ X_2 = Y_2 \end{cases}$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{n!}{(y_1 - y_2)! y_2! (n - y_1)!} p_1^{y_1 - y_2} p_2^{y_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - y_1}, \qquad y_1 = 0, 1, \ldots, n \qquad y_2 = 0, 1, \ldots, y_1$$

$$\begin{aligned} f(y_1) = \sum_{y_2 = 0}^{y_1} f(y_1, y_2) &= \frac{n!}{y_1!\ (n - y_1)!} (1 - p_1 - p_2)^{n - y_1} \sum_{y_2 = 0}^{y_1} \frac{y_1!}{(y_1 - y_2)!\ y_2!} p_1^{y_1 - y_2}\ p_2^{y_2} \\ &= \binom{n}{y_1} (1 - p_1 - p_2)^{n - y_1} \sum_{y_2 = 0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} p_1^{y_1 - y_2}\ p_2^{y_2} \\ &= \binom{n}{y_1} (1 - (p_1 + p_2))^{n - y_1} (p_1 + p_2)^{y_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad Y_1 = X_1 + X_2 \sim Bin(n, p_1 + p_2)$$

بسط دوجمله‌ای

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}$$

مثال ۸

اگر تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت زیر باشد، تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2$ را به دست آورید.

$$f(x_1, x_2) = \frac{\lambda_1^{x_1}\,\lambda_2^{x_2}}{x_1!\,x_2!} e^{-\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad x_1, x_2 = 0, 1, 2, \ldots \quad , \quad \lambda_1\,,\, \lambda_2 > 0$$

راه‌حل:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1 = Y_1 - Y_2 \\ X_2 = Y_2 \end{cases}$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{\lambda_1^{y_1 - y_2}\,\lambda_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)!\,y_2!} e^{-\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad y_1 = 0, 1, 2, \ldots \qquad y_2 = 0, 1, \ldots, y_1$$

$$f(y_1) = \sum_{y_2=0}^{y_1} f(y_1, y_2) = \frac{e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{(y_1 - y_2)!\,y_2!} \lambda_1^{y_1 - y_2}\,\lambda_2^{y_2} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{y_1!} (\lambda_1 + \lambda_2)^{y_1}$$

$$\Rightarrow \qquad Y_1 = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

متغیرهای تصادفی پیوسته

تعیین تابع چگالی $g(X)$
تک متغیره - روش اول

اگر X پیوسته باشد، برای به دست آوردن توزیع $Y = g(X)$ می‌توان از دو روش استفاده کرد.

روش تابع توزیع تجمعی

در این روش ابتدا تابع توزیع تجمعی Y را به دست می‌آوریم سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left(Y \leq y\right) \\ &= P\left(g(X) \leq y\right) \\ &= P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) \\ &= F_X\left(g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad f_Y(y) = F'_Y(y)$$

مثال ۹

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد. مطلوب است تعیین توزیع $Y = -\ln(X)$

$$f(x) = ۲x, \qquad ۰ < x < ۱$$

راه‌حل:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left(Y \leq y\right) = P\left(-\ln(X) \leq y\right) \\ &= P\left(\ln(X) \geq -y\right) = P\left(X \geq e^{-y}\right) \\ &= \int_{e^{-y}}^{۱} ۲x dx = x^{۲}\Big|_{e^{-y}}^{۱} = ۱ - e^{-۲y} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad f(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = ۲e^{-۲y} \qquad y > ۰$$

$$\Rightarrow \qquad -\ln(X) \sim Exp(\beta = \frac{۱}{۲})$$

روش تغییر متغیر (روش تبدیل)

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد،

$Y = g(X)$ تابعی یکنوای اکید و مشتق‌پذیر روی R_X باشد،

آن‌گاه تابع چگالی $Y = g(X)$ عبارت است از:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

مثال ۱۰

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد. مطلوب است تعیین توزیع $Y = e^{-X}$

$$f(x) = ۲x, \qquad ۰ < x < ۱$$

راه‌حل:

$$y = e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad x = -\ln y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dy}(-\ln y) = \frac{-۱}{y}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(g^{-۱}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-۱}(y)\right| \\ &= ۲ \times -\ln y \times \left|\frac{-۱}{y}\right| = \frac{-۲\ln y}{y}, \qquad e^{-۱} < y < ۱ \end{aligned}$$

مثال ۱۱

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد. مطلوب است تعیین توزیع $Y = -\ln X$

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-۱}, \qquad ۰ < x < ۱$$

راه‌حل:

$$y = -\ln x \qquad \Rightarrow \qquad x = e^{-y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dy}e^{-y} = -e^{-y}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(g^{-۱}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-۱}(y)\right| \\ &= \alpha\left(e^{-y}\right)^{\alpha-۱} \times \left|-e^{-y}\right| = \alpha e^{-\alpha y}, \qquad y > ۰ \\ &\Rightarrow \qquad -\ln X \sim Exp(\beta = \frac{۱}{\alpha}) \end{aligned}$$

مثال ۱۲

سرعت مولکولی در گاز یکنواختی در حالت تعادل متغیر تصادفی V است که توزیع احتمال آن به صورت زیر است که در آن k عددی ثابت و b به دمای مطلق و m جرم مولکولی بستگی دارد. توزیع احتمال انرژی جنبشی مولکول W را پیدا کنید به طوری که $W = \frac{mV^۲}{۲}$.

$$f(v) = kv^۲ e^{-bv^۲}, \qquad v > ۰$$

راه‌حل:

$$w = \frac{mv^۲}{۲} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{۲w}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dw}\sqrt{\frac{۲w}{m}} = \frac{۱}{\sqrt{۲mw}}$$

$$f(w) = k \times \frac{۲w}{m} \times e^{-b\frac{۲w}{m}} \times \frac{۱}{\sqrt{۲mw}} = \frac{k\sqrt{۲}}{m^{۳/۲}} w^{\frac{۳}{۲}-۱} exp\left\{\frac{-w}{\frac{m}{۲b}}\right\}, \qquad w > ۰$$

تعیین تابع چگالی $g(X_۱, X_۲)$ دو متغیره

فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم $f(x_۱, x_۲)$ باشند.

اگر $U = g_۱(X_۱, X_۲)$ و $V = g_۲(X_۱, X_۲)$ یک تبدیل یک به یک از $R_{\underline{X}}$ به $A \subseteq \mathbb{R}^۲$ باشد،

آن‌گاه توابع یکتای وارون $g_۱$ و $g_۲$ وجود دارند و $x_۱ = g_۱^{-۱}(u, v)$ و $x_۲ = g_۲^{-۱}(u, v)$ برقرار است.

فرض کنید $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ و $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ وجود داشته و روی A پیوسته باشند و مقدار دترمینان J روی A مساوی صفر نباشد.

در این صورت **تابع چگالی توأم بردار تصادفی** $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ عبارت است از:

$$* \; f(u, v) = |J| f_{X_۱, X_۲}\left(g_۱^{-۱}(u, v), g_۲^{-۱}(u, v)\right) \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_۱}{\partial u} & \frac{\partial x_۱}{\partial v} \\ \frac{\partial x_۲}{\partial u} & \frac{\partial x_۲}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثال ۱۳ - الف

فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم با تابع چگالی یکسان $f(x) = e^{-x}, \quad x > ۰$ هستند. اگر $Y_۱ = X_۱ + X_۲$ و $Y_۲ = X_۱ - X_۲$ باشند.
الف- تابع چگالی توأم بردار تصادفی $(Y_۱, Y_۲)$ را به دست آورید.

راه‌حل:

$$f(x_۱, x_۲) = f(x_۱) f(x_۲) = e^{-x_۱} e^{-x_۲} = e^{-(x_۱+x_۲)}, \qquad x_۱, x_۲ > ۰$$

$$f(y_۱, y_۲) = |J| f\left(g_۱^{-۱}(y_۱, y_۲), g_۲^{-۱}(y_۱, y_۲)\right) = \frac{۱}{۲} \times e^{-y_۱}, \qquad |y_۲| < y_۱$$

$$\begin{cases} Y_۱ = X_۱ + X_۲ \\ Y_۲ = X_۱ - X_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_۱ = \frac{Y_۱+Y_۲}{۲} \\ X_۲ = \frac{Y_۱-Y_۲}{۲} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} \end{vmatrix} = \frac{-۱}{۲}$$

مثال ۱۳ - ب

ب- تابع چگالی حاشیه‌ای Y_1 و Y_2 را به دست آورید.

راه‌حل:

$$f\left(y_1\right)=\int_{-y_1}^{+y_1}\frac{1}{2}e^{-y_1}dy_2=y_1e^{-y_1},\qquad 0<y_1<\infty$$

$$f\left(y_2\right)=\int_{|y_2|}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-y_1}dy_1=\frac{1}{2}e^{-|y_2|},\qquad -\infty<y_2<\infty$$

مثال ۱۴ - الف

فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم $f(x_۱, x_۲) = ۴x_۱x_۲, \quad ۰ < x_۱, x_۲ < ۱$ هستند.

الف- تابع چگالی توأم $U = X_۱^۲$ و $V = X_۱X_۲$ را به دست آورید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} U = X_۱^۲ \\ V = X_۱X_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_۱ = \sqrt{U} \\ X_۲ = \frac{V}{\sqrt{U}} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲\sqrt{u}} & ۰ \\ \frac{-v}{۲u^{\frac{۳}{۲}}} & \frac{۱}{\sqrt{u}} \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲u}$$

$$f(u, v) = |J| f\left(g_۱^{-۱}(u, v), g_۲^{-۱}(u, v)\right) = \frac{۱}{۲u} \times ۴\sqrt{u}\frac{v}{\sqrt{u}} = \frac{۲v}{u}, \qquad ۰ < v < \sqrt{u} < ۱$$

مثال ۱۴ - ب

ب- تابع چگالی حاشیه‌ای v را به دست آورید.

راه‌حل:

$$
\begin{aligned}
f\left(v\right) &= \int_{v^{۲}}^{۱} \frac{۲v}{u} du \\
&= ۲v \ln u\Big|_{v^{۲}}^{۱} \\
&= -۴v \ln v, \qquad ۰ < v < ۱
\end{aligned}
$$

مثال ۱۵

فرض کنید تابع چگالی توأم بردار تصادفی (X_1, X_2) به صورت زیر باشد و $P(X_2 \neq 0) = 1$ توزیع $\frac{X_1}{X_2}$ را به دست آورید.

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

راه‌حل:

$$\begin{cases} u = \frac{x_1}{x_2} \\ v = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = uv \\ x_2 = v \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

$$f(u,v) = |v| \times \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-1}{2}(u^2 v^2 + v^2)} = \frac{|v|}{2\pi} e^{\frac{-v^2}{2}(u^2+1)}, \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|v|}{2\pi} e^{\frac{-v^2}{2}(u^2+1)} dv = \int_{-\infty}^{0} \frac{-v}{2\pi} e^{\frac{-v^2}{2}(u^2+1)} dv + \int_{0}^{+\infty} \frac{v}{2\pi} e^{\frac{-v^2}{2}(u^2+1)} dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \left[\frac{1}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1} \right] = \frac{1}{\pi(u^2+1)}, \qquad u \in \mathbb{R}$$