جواب تمرینات سری اول

سوال اول: یک شیء با تندی قائم ثابت $\frac{dz}{dt} = 3$ روی خم $y = x^2$ و $z = x^3$ در حرکت است. سرعت و شتاب این شیء را وقتی در نقطه $(2,4,8)$ است، بیابید.

$$r = xi + x^2j + x^3k \to v = \frac{dx}{dt}[i + 2xj + 3x^2k]$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}(i + 2xj + 3x^2k) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2(2j + 6xk)$$

$$\frac{dz}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} \overset{x=2}{\Longrightarrow} 3 = 12\frac{dx}{dt} \to \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}(3x^2) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2(6x) \overset{x=2}{\Longrightarrow} 0 = 12\frac{d^2x}{dt^2} + 12\left(\frac{1}{16}\right) \to \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-1}{16}$$

$$v = \frac{1}{4}[i + 4j + 12k] = \frac{1}{4}i + j + 3k$$

$$a = \frac{-1}{16}(i + 4j + 12k) + \frac{1}{16}(2j + 12k) = \frac{-1}{16}(i + 2j)$$

سوال دوم: ذره‌ای با تندی ثابت 6 روی خم $r = 3ui + 3u^2j + 2u^3k$ در جهت متناظر با u های صعودی در حرکت است. سرعت و شتاب این ذره را وقتی در نقطه $(3,3,2)$ است، بیابید.

$$v = \frac{du}{dt}(3i + 6uj + 6u^2k)$$

$$a = \frac{d^2u}{dt^2}(3i + 6uj + 6u^2k) + \left(\frac{du}{dt}\right)^2(6j + 12uk)$$

$$6 = |v| = 3\frac{du}{dt}\sqrt{1 + 4u^2 + 4u^4} = 3(1 + 2u^2)\frac{du}{dt} \to \frac{du}{dt} = \frac{2}{1 + 2u^2}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{-8u}{(1 + 2u^2)^2}\frac{du}{dt} = \frac{-16u}{(1 + 2u^2)^3}$$

$$(3,3,2) \to u = 1 \quad \to \quad \frac{du}{dt} = \frac{2}{3}\ , \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{-16}{27}$$

$$\to \mathrm{v} = \frac{2}{3}(3i + 6j + 6k) = 2i + 4j + 4k$$

$$a = \frac{-16}{27}(3i + 6j + 6k) + \left(\frac{2}{3}\right)^2(6j + 12k) = \frac{8}{9}(-2i - j + 2k)$$

سوال سوم: ذره‌ای روی فصل مشترک استوانه‌های $y=-x^2$ و $z=x^2$ در جهتی که x افزایش می‌یابد در حال حرکت است(همه فاصله‌ها بر حسب سانتی متر است). تندی این ذره در لحظه‌ای که در نقطه $(1,-1,1)$ است برابر با $9\frac{cm}{s}$ و این تندی با آهنگ $3\frac{cm}{s^2}$ افزایش می‌یابد. سرعت و شتاب ذره را در لحظه یاد شده بیابید.

$$r = xi - x^2j + x^2k \to v = \frac{dx}{dt}(i - 2xj + 2xk)$$

$$\to a = \frac{d^2x}{dt^2}(i - 2xj + 2xk) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2(-2j + 2k)$$

$$9 = |v| = \left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1 + 4x^2 + 4x^2} \overset{x=1}{\Longrightarrow} 9 = 3\frac{dx}{dt} \to \frac{dx}{dt} = 3$$

سوال چهارم: سرعت، تندی و شتاب ذره‌ای را بیابید که مکانش در لحظه t عبارت است از $r(t)$ ، مسیر حرکت ذره را توصیف کنید.

$$\boldsymbol{r = 3cost\ i + 4cost\ j + 5sint\ k}$$

$$v = -3sinti - 4sintj + 5costk$$

$$|v| = \sqrt{9\sin^2 t + 16\sin^2 t + 25\cos^2 t} = \sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t} = 5$$

$$a = -3costi - 4costj - 5sintk$$

تصویر نمودار روی صفحه xoz بیضی $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ است که روی محور y در بازه $[-4,4]$ است و تصویر نمودار روی صفحه yoz بیضی $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$ است که روی محور x در بازه $[-3,3]$ است، لذا مسیر حرکت ذره روی تقاطع دو استوانه‌ی بیضوی است.

$$\boldsymbol{r = t^2i - t^2j + k}$$

$$v = 2ti - 2tj \to |v| = 2\sqrt{t^2 + t^2} = 2\sqrt{2}t \quad , \quad a = 2i - 2j$$

تصویر نمودار روی صفحه xoy نیم خط $y = -x$ به ازای $x \geq 0$ است که مولفه سوم آن مقدار $z = 1$ را اخذ می‌کند لذا مسیر حرکت ذره روی یک نیم‌خط است.

$$\boldsymbol{r = acostsint\ i + asin^2 t\ j + acost\ k}$$

$$r = \frac{a}{2}sin2ti + \frac{a}{2}(1 - cos2t)j + acostk$$

$$v = acos2ti + asin2tj - asintk$$

$$|v| = a\sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t + \sin^2 t} = a\sqrt{1 + \sin^2 t}$$

$a = -2asin2ti + 2acos2tj - acostk$

تصویر نمودار روی صفحه xoy دایره $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ است که روی محور z در بازه $[-a, a]$ است (با فرض $a > 0$) و تصویر نمودار روی صفحه yoz سهمی $y = \frac{-1}{a}z^2 + \frac{1}{a}$ است که روی محور x در بازه $[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}]$ است، لذا مسیر حرکت ذره روی اشتراک یک استوانه و یک سهمی‌گون است.

سوال پنجم: محاسبه و ساده کنید.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(u \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2}\right)\right)}$$

$$= \frac{du}{dt} \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2}\right) + u \times \left(\frac{d^2u}{dt^2} \times \frac{d^2u}{dt^2}\right) + u \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^3u}{dt^3}\right)$$

$$= \frac{du}{dt} \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2}\right) + u \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^3u}{dt^3}\right)$$

سوال ششم: استوانه‌های $\boldsymbol{z = x^2}$ و $\boldsymbol{z = 4y^2}$ ، یکدیگر را در دو خم قطع می‌کنند که یکی از آن‌ها از نقطه $\boldsymbol{(2, -1, 4)}$ می‌گذرد. با استفاده از $\boldsymbol{t = y}$ به عنوان یک پارامتر، یک پارامترسازی برای این خم بیابید.

$y = t \to z = 4t^2 \to 4t^2 = x^2 \to x = \pm 2t$

لذا دو خم $(2t, t.4t^2)$ و $(-2t, t, 4t^2)$ به دست می‌آید. که با قرار دادن $t = 1$ به دست می‌آید $-2(-1) = 2$ لذا معادله پارامتری مورد نظر مربوط به خم دوم یعنی $r = -2ti + tj + 4t^2k$ است.

سوال هفتم: صفحه $\boldsymbol{x + y + z = 1}$ استوانه $\boldsymbol{z = x^2}$ را در یک سهمی قطع می‌کند. با استفاده از $\boldsymbol{t = x}$ به عنوان پارامتر، این سهمی را پارامتری کنید.

$x = t \to z = t^2 \to y = 1 - t - 4t^2$

$r = ti + (1 - t - 4t^2)j + t^2k$

سوال هشتم: طول قسمتی از پیچ دایره‌ای $\boldsymbol{r = acosti + asintj + btk}$ را که بین نقاط $\boldsymbol{(a, 0, 0)}$ و $\boldsymbol{(a, 0, 2\pi b)}$ قرار دارد، بیابید.

$(a, 0,0) \to t = 0 \quad , \quad (a, 0,2\pi b) \to t = 2\pi$

$v = -asinti + acostj + bk \to |v| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$

سوال نهم: صفحه $x+y+z=1$ کره $x^2+y^2+z^2=1$ را در دایره‌ای مانند c قطع می‌کند. مرکز c یعنی r_0 و شعاع c یعنی r را بیابید. همچنین دو بردار یکه عمود بر هم $\hat{v}_1$ و $\hat{v}_2$ و موازی c بیابید.

به دلیل تقارن صفحه و کره نسبت به محورهای مختصات داریم:

$$r=\frac{1}{3}(i+j+k)$$

چون کره از نقطه $(0,0,1)$ می‌گذرد، داریم:

$$r=\sqrt{\left(0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

بردار $(1,1,1)$ ، بردار نرمال صفحه $x+y+z=1$ است در نتیجه این بردار بر c عمود است. حال کافی است بردار v_1را طوری بیابیم که $\hat{v}_1.(i+j+k)=0$ و قرار می‌دهیم $v_1=i-j$ و بردار v_2 را از ضرب خارجی بردار نرمال و بردار v_1 به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$v_2=(i+j+k)\times(i-j)=i+j-2k$$

حال برای یکه کردن این دو بردار، از اندازه آن‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\hat{v}_1=\frac{i-j}{\sqrt{2}}\quad,\quad \hat{v}_2=\frac{i+j-2k}{\sqrt{6}}$$

سوال دهم: منجنی‌های زیر را پارامتری کنید.

$$\begin{cases}\boldsymbol{yz+x=1}\\ \boldsymbol{xz-x=1}\end{cases}$$

$$x(z-1)=1\rightarrow x=t\,,\qquad z-1=\frac{1}{t}\rightarrow z=\frac{1}{t}+1=\frac{t+1}{t}$$

$$y=\frac{1-x}{z}=\frac{t(1-t)}{t+1}=\frac{t-t^2}{t+1}\rightarrow r(t)=ti+\frac{t-t^2}{t+1}j+\frac{t+1}{t}k\qquad t\neq-1,0$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{4x^2+9y^2=3}\\ \boldsymbol{1-z=x^2+y^2}\end{cases}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}cost\quad,\qquad y=\frac{\sqrt{3}}{3}sint$$

$$z=1-x^2-y^2=1-\frac{3}{4}\cos^2 t-\frac{1}{3}\sin^2 t$$

$$r(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}costi+\frac{\sqrt{3}}{3}sintj+\left(1-\frac{3}{4}\cos^2 t-\frac{1}{3}\sin^2 t\right)k$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{x^2+y^2=1}\\ \boldsymbol{x^2-y^2=z}\end{cases}$$

$$x=cost\ ,\qquad y=sint\ \ \rightarrow\ \ z=\cos^2 t-\sin^2 t=cos2t$$

$$r(t)=costi+sintj+cos2tk$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{xy+z=1}\\ \boldsymbol{x^2+y+z=2}\end{cases}$$

$$xy-1=x^2+y-2\rightarrow xy-y=x^2-1\rightarrow y(x-1)=x^2-1$$

$$x=t\ \rightarrow y=\frac{t^2-1}{t-1}=t+1\ ,\ \ z=1-t(t+1)=1-t^2-t$$

$$r(t)=ti+(t+1)j+(1-t^2-t)k\qquad t\neq 1$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{x^2+4y^2=4}\\ \boldsymbol{x+2y+4z=4}\end{cases}$$

$$x=2cost\ ,\qquad y=sint$$

$$z=1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1-\frac{cost}{2}-\frac{sint}{2}$$

$$r(t)=2costi+sintj+\left(1-\frac{cost}{2}-\frac{sint}{2}\right)k$$

سوال یازدهم: خم پارامتری c را که با معادله‌های $\boldsymbol{x=acostsint\ ,y=asin^2t\ ,z=bt}$ مشخص شده است، توصیف کنید. طول c بین $\boldsymbol{t=0}$ و $\boldsymbol{t=T>0}$ بیابید.

$$r=\frac{a}{2}sin2ti+\frac{a}{2}(1-cos2t)j+btk$$

لذا خم داده شده یک مارپیچ دوار روی دایره $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$ است.

$$v=acos2ti+asin2tj+bk\rightarrow |v|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$L=\int_0^T\sqrt{a^2+b^2}dt=T\sqrt{a^2+b^2}$$

سوال دوازدهم: طول پیچ مخروطی $\boldsymbol{r=tcosti+tsintj+tk}$، $\boldsymbol{0\leq t\leq 2\pi}$ بیابید.

$$v=(cost-tsint)i+(sint+tcost)j+k$$

$$|v| = \sqrt{1+t^2+1} = \sqrt{2+t^2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}dt \qquad t = \sqrt{2}tg\theta \rightarrow dt = \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$L = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec^3\theta\, d\theta$$

$$\begin{cases} u = sec\theta & \rightarrow \quad du = sec\theta tg\theta \\ dv = \sec^2\theta & \rightarrow \qquad v = tg\theta \end{cases}$$

$$L = 2[(sec\theta tg\theta)_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} tg^2\theta sec\theta d\theta]$$

$$= 2[(sec\theta tg\theta)_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sec^2\theta - 1)sec\theta d\theta]$$

$$= 2\left[(sec\theta tg\theta)_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec^3\theta\, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} sec\theta d\theta\right] = \frac{1}{2}[(sec\theta tg\theta)_{\theta_1}^{\theta_2} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} sec\theta d\theta]$$

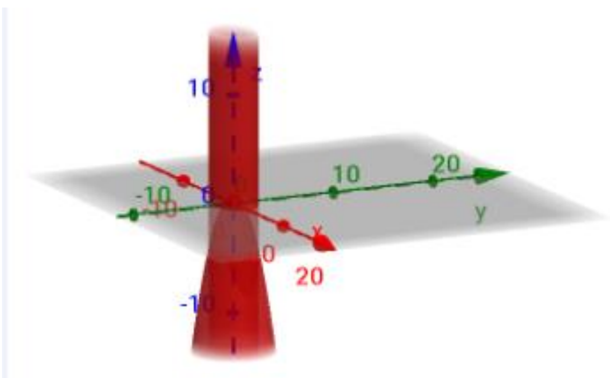
$$\frac{1}{2}[sec\theta tg\theta + ln|sec\theta + tg\theta|]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

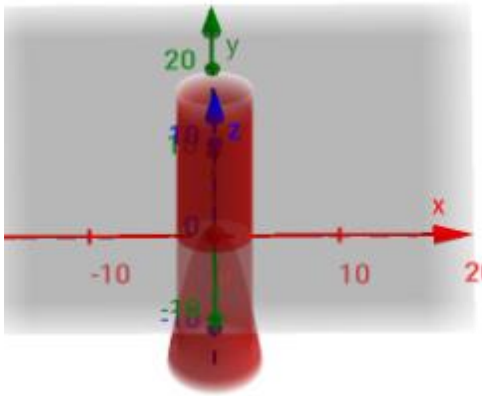
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{t^2}{2}}\frac{t}{\sqrt{2}} + ln\left|\sqrt{1+\frac{t^2}{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right|\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(\pi\sqrt{2+4\pi^2} + \ln\left(\sqrt{1+2\pi^2} + \pi\sqrt{2}\right))$$

سوال سیزدهم: رویه $\begin{cases} \mathbf{4x^2 + 9y^2 = 36} \\ \mathbf{1 - z = x^2 + y^2} \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) این رویه‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.





ب) خم حاصل از فصل مشترک این دو رویه را پارامتری کنید.

$x = 3cost\,, y = 2sint\,, z = 1 - 9\cos^2 t - 4\sin^2 t$

$r(t) = 3costi + 2sintj + (1 - 9\cos^2 t - 4\sin^2 t)k$

ج) T, N, K, τ را در نقطه $(3, 0, -8)$ بیابید.

نقطه مورد نظر معادل $t = 0$ است.

$r'(t) = -3sinti + 2costj + (18sintcost - 8sintcost)k$

$r'(t) = -3sinti + 2costj + 5sint2tk \rightarrow r'(0) = 2j$

$$T(0) = \frac{r'(0)}{|r'(0)|} = \frac{2j}{2} = j$$

$r''(t) = -3costi - 2sintj + 10cos2tk \rightarrow r''(0) = -3i + 10k$

$r'(0) \times r''(0) = 20i + 6k$

$$B(0) = \frac{r'(0) \times r''(0)}{|r'(0) \times r''(0)|} = \frac{20i + 6k}{2\sqrt{109}} = \frac{10i + 3k}{\sqrt{109}}$$

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \frac{-3i + 10k}{\sqrt{109}}$$

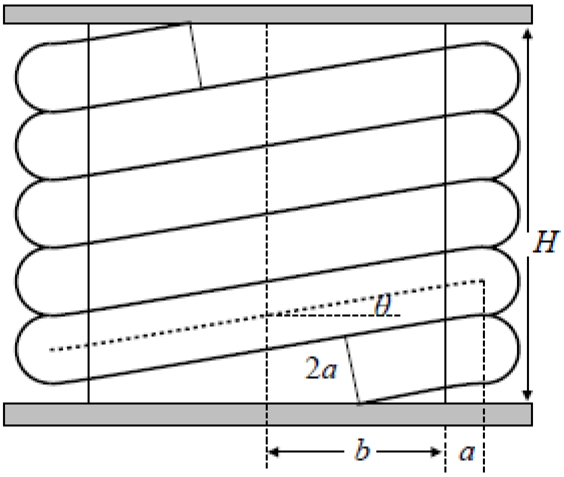
$$k(0) = \frac{|r'(0) \times r''(0)|}{|r'(0)|^3} = \frac{2\sqrt{109}}{8} = \frac{\sqrt{109}}{4}$$

$r'''(t) = 3sinti - 2costj - 20sin2tk \rightarrow r'''(0) = -2j$

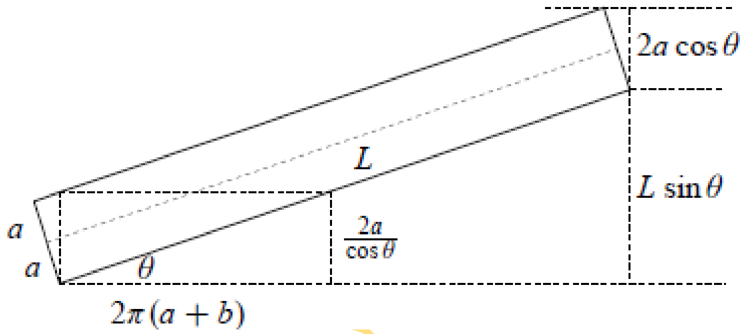
$$\tau(0) = \frac{(r'(0) \times r''(0)).r'''(0)}{|r'(0) \times r''(0)|^2} = \frac{0}{(4)(109)} = 0$$

سوال چهاردهم: سیمی به طول L را که دارای مقطع عرضی دایره‌ای به شعاع a است، حول قرقره‌ای استوانه‌ای به شعاع b طوری می‌پیچانیم که همپوشی روی ندهد ولی هر دو پیچش مجاور به هم چسبیده باشند. چه طولی از قرقره به وسیله این سیم پوشانده می‌شود.

فرض کنید سیم را با زاویه θ به فرم شکل زیر دور قرقره بپیچانیم:



لذا نحوه پوشانده شدن قرقره در هر پیچش را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:



میزان طولی از قرقره که در هر پیچش پوشانده می‌شود، برابر $H = Lsin\theta + 2acos\theta$ است که برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ داریم:

$$tg\theta = \frac{\frac{2a}{cos\theta}}{2\pi(a+b)} \rightarrow \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{a}{\pi(a+b)cos\theta} \rightarrow sin\theta = \frac{a}{\pi(a+b)}$$

$$\rightarrow cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{\pi(a+b)}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi^2(a+b)^2 - a^2}}{\pi(a+b)}$$

لذا در هر پیچش طول زیر را از قرقره می‌پوشاند:

$$H = \frac{a}{\pi(a+b)}(L + 2\sqrt{\pi^2(a+b)^2 - a^2})$$

سوال پانزدهم: نشان دهید اگر به ازای هر s، $k(s)$ برابر با ثابت مثبت c و $\tau(s)$ برابر صفر باشد، آن‌گاه خم $r = r(s)$ یک دایره است.

چون $\tau(s)=0$ است لذا خم روی یک صفحه قرار می‌گیرد و از طرفی چون $k(s)=c$ ثابت است خم مورد نظر روی صفحه، یک دایره است که شعاع آن $\frac{1}{c}$ است و به فرم زیر است:

$$r(s)=\frac{1}{c}\cos(cs)\,i+\frac{1}{c}\sin(cs)\,j$$

سوال شانزدهم: ذره‌ای رو خم مسطح $y=sinx$ و در جهت صعود x با سرعت افقی ثابت $\frac{dx}{dt}=k$ در حرکت است. مولفه‌های مماسی و قائم شتاب این ذره را وقتی در مکان x قرار دارد، بیابید.

$$r=xi+sinxj\to v=\frac{dx}{dt}(i+cosxj)=k(i+cosxj)$$

$$\to a=\frac{d^2x}{dt^2}(i+cosxj)+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2(-sinxj)=-k^2sinxj$$

$$|v|=k\sqrt{1+\cos^2x}\quad ,\quad v\times a=-k^3sinxk$$

$$a_T=\frac{d}{dt}|v|=\frac{d}{dt}\left(k\sqrt{1+\cos^2x}\right)=\frac{-k^2cosxsinx}{\sqrt{1+\cos^2x}}$$

$$a_N=|v|^2k=|v|^2\frac{|v\times a|}{|v|^3}=\frac{|v\times a|}{|v|}=\frac{k^3|sinx|}{k\sqrt{1+\cos^2x}}=\frac{k^2|sinx|}{\sqrt{1+\cos^2x}}$$

سوال هفدهم: خم $\gamma(t)=(4cos3t,4sin3t,3cos2t)$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $\tau(0)$، $k(0)$، $B(0)$، $N(0)$ و $T(0)$.

$$\gamma'(t)=(-12sin3t,12cos3t,-6sin2t)$$

$$|\gamma'(t)|=6\sqrt{4\sin^2 3t+4\cos^2 3t+\sin^2 2t}=6\sqrt{4+\sin^2 2t}$$

$$T(t)=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}=\frac{-12sin3ti+12cos3tj-6sin2tk}{6\sqrt{4+\sin^2 2t}}\to T(0)=j$$

$$\gamma''(t)=(-36cos3t,-36sin3t,-18cos2t)$$

$$\gamma'(0)\times\gamma''(0)=(0,12,0)\times(-36,0,-18)=(12)(18)(-i-2k)$$

$$|\gamma'(0)\times\gamma''(0)|=(12)(18)\sqrt{1+4}=(12)(18)\sqrt{5}$$

$$B(0)=\frac{\gamma'(0)\times\gamma''(0)}{|\gamma'(0)\times\gamma''(0)|}=\frac{(12)(18)(-i-2k)}{(12)(18)\sqrt{5}}=\frac{-i-2k}{\sqrt{5}}$$

$$N(0)=B(0)\times T(0)=\frac{2i-k}{\sqrt{5}}$$

$$k(0) = \frac{|\gamma'(0) \times \gamma''(0)|}{|\gamma'(0)|^3} = \frac{(12)(18)\sqrt{5}}{12} = 18\sqrt{5}$$

$$\gamma'''(t) = (108sin3t, -108cos3t, 36sin2t) \rightarrow \gamma'''(0) = (0, -108, 0)$$

$$\big(\gamma'(0) \times \gamma''(0)\big).\gamma'''(0) = 0$$

$$\tau(0) = \frac{\big(\gamma'(0) \times \gamma''(0)\big).\gamma'''(0)}{|\gamma'(0) \times \gamma''(0)|^2} = 0$$

سوال هجدهم: انحنا و تاب خم $\boldsymbol{r(t) = e^t i + \sqrt{2}tj + e^{-t}k}$ را در نقاط دلخواه بیابید.

$$r'(t) = e^t i + \sqrt{2}j - e^{-t}k \rightarrow r''(t) = e^t i + e^{-t}k$$

$$r'(t) \times r''(t) = \sqrt{2}e^{-t}i - 2j - \sqrt{2}e^t k$$

$$k(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2e^{-2t} + 4 + 2e^{2t}}}{(e^{2t} + 2 + e^{-2t})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{(e^{2t} + 2 + e^{-2t})^2}$$

$$r'''(t) = e^t i - e^{-t}k \rightarrow \big(r'(t) \times r''(t)\big).r'''(t) = 2\sqrt{2}$$

$$\tau(t) = \frac{\big(r'(t) \times r''(t)\big).r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2e^{-2t} + 4 + 2e^{2t}} = \frac{\sqrt{2}}{e^{-2t} + 2 + e^{2t}}$$

سوال نوزدهم: ذره‌ای روی مسیر بیضوی در صفحه $\boldsymbol{xy}$ به گونه‌ای حرکت می‌کند که مکان ان در لحظه $\boldsymbol{t}$ عبارت است از $\boldsymbol{r(t) = acosti + bsintj}$ مولفه‌های مماسی و قائم شتاب این ذره را در لحظه $\boldsymbol{t}$ بیابید. در کدام نقاط، شتاب مماسی صفر می‌شود.

$$v = -asinti + bcostj \rightarrow a = -acosti - bsintj$$

$$|v| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} \quad , \quad v \times a = abk$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|v| = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right) = \frac{(a^2 - b^2)sintcost}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

$$a_N = |v|^2 k = |v|^2\frac{|v \times a|}{|v|^3} = \frac{|v \times a|}{|v|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

$$a_T = 0 \rightarrow \frac{(a^2 - b^2)sintcost}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} = 0 \rightarrow (a^2 - b^2)sintcost$$

$$\rightarrow sintcost = 0 \rightarrow sin2t = 0 \rightarrow 2t = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \ \rightarrow \ t = \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

سوال بیستم: ماکزیمم و مینیمم خمیدگی بیضی $x = acost$ و $y = bsint$ را که $a > b > 0$ است، بیابید.

$$r(t) = acosti + bsintj \to r'(t) = -asinti + bcostj$$

$$\to r''(t) = -acosti - bsintj \to r'(t) \times r''(t) = abk$$

$$k(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

چون $a > b > 0$ است ماکزیمم وقتی رخ می‌دهد که $sint = 0$ و مقدار آن برابر $\frac{a}{b^2}$ است و مینیمم وقتی رخ می‌دهد که $sint = \pm 1$ و مقدار آن برابر $\frac{b}{a^2}$ است.

سوال بیست و یکم: $\gamma(t) = (t^2, t, \frac{1}{2}t^2)$ را در نظر بگیرید:

الف) مطلوب است کنج فرنه در لحظه $t = 0$.

ب) معادله صفحه بوسان در لحظه $t = 0$.

پ) طول قوس منحنی در فاصله $t = 0$ تا $t = 1$ و $k(0)$.

الف)

$$\gamma'(t) = (2t, 1, t) \to \gamma''(t) = (2,0,1)$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{2ti + j + tk}{\sqrt{5t^2 + 1}} \to T(0) = j$$

$$\gamma'(0) \times \gamma''(0) = i - 2k$$

$$B(0) = \frac{\gamma'(0) \times \gamma''(0)}{|\gamma'(0) \times \gamma''(0)|} = \frac{i - 2k}{\sqrt{5}}$$

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \frac{2i + k}{\sqrt{5}}$$

ب) بردار نرمال صفحه $B = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}})$ و شامل نقطه $\gamma(0) = (0,0,0)$ است. لذا داریم:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(x - 0) + (0)(y - 0) + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)(z - 0) = 0 \to \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}z = 0$$

پ)

$$L=\int_0^1 |\gamma'(t)|dt=\int_0^1 \sqrt{5t^2+1}dt$$

$$\sqrt{5}t=tgu \to \sqrt{5}dt=\sec^2 u\, du$$

$$L=\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{tg^2u+1}\sec^2 u\, du=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_{u_1}^{u_2} \sec^3 u\, du$$

$$=\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}(secutgu+ln|secu+tgu|)\right]_{u_1}^{u_2}$$

$$=\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\sqrt{1+5t^2}\sqrt{5}t+ln\left|\sqrt{1+5t^2}+\sqrt{5}t\right|\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{30}+\ln(\sqrt{6}+\sqrt{5}))$$

$$k(0)=\frac{|\gamma'(0)\times\gamma''(0)|}{|\gamma'(0)|^3}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$$

جواب تمرینات سری دوم

سوال اول: حدهای خواسته شده را محاسبه کنید یا توضیح دهید چرا وجود ندارند.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$$

مسیر $y=0$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

حال مسیر $x=0$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

لذا چون روی دو مسیر، مقدار حد متفاوت است، پس حد وجود ندارد.

$$\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y} = \frac{\cos(\pi)}{1-1-\cos(\pi)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$0 \le \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \le |y|$$

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (0) \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

$$\xRightarrow{\text{بنا بر قضیه فشردگی}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = 0 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x(2x-y)}{(2x-y)(2x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x}{2x+y} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$$

مسیر $y = x$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^2+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1+x^6} = 0$$

حال مسیر $x = y^4$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^8}{y^8+y^8} = \frac{1}{2}$$

لذا چون روی دو مسیر، مقدار حد متفاوت است، پس حد وجود ندارد.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{|x|+|y|+|z|}$$

$$0 \le \left|\frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{|x|+|y|+|z|}\right| \le \frac{x^2+y^2+z^2}{|x|+|y|+|z|} \le \frac{(|x|+|y|+|z|)^2}{|x|+|y|+|z|} = |x|+|y|+|z|$$

$$0 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0.0)} (0) \le \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left|\frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{|x|+|y|+|z|}\right| \le \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (|x|+|y|+|z|) = 0$$

$$\xRightarrow{\text{بنا بر قضیه فشردگی}} \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left|\frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{|x|+|y|+|z|}\right| = 0 \to \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{|x|+|y|+|z|} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$$

مسیر $y = x$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

حال مسیر $y = x^3$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3-x^3} = \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \infty$$

لذا چون روی دو مسیر، مقدار حد متفاوت است، پس حد وجود ندارد.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$$

$$0 \leq \left|\frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}\right| = \frac{(y-1)^2}{x^2+y^2}x^2 \leq x^2$$

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(0) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$$

$$\xRightarrow{\text{بنا بر قضیه فشردگی}} \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}\right| = 0 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{(x,y)\to(1,2)} xy}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} xy = 2$$

مقدار این حد را اثبات می‌کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta \quad \to \quad |xy-2| < \varepsilon$$

$$|xy-2| = |xy-2+y-y| = |(x-1)y+(y-2)| \leq |y||x-1|+|y-2|$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک باشد که منجربه $\delta \leq 1$ شود، لذا داریم:

$$|y-2| \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < 1 \to -1 < y-2 < 1 \to 1 < y < 3$$

لذا داریم:

$$|y||x-1|+|y-2| < 3|x-1|+|y-2| \leq 4\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \varepsilon$$

لذا کافی است $\delta < \min\{1,\frac{\varepsilon}{4}\}$ انتخاب شود.

سوال دوم: تابع $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ به شکل زیر تعریف شده است:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\ln(y^2+1)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

ثابت کنید f در همه نقاط پیوسته است.

تابع f در همه نقاط $(x,y) \neq (0,0)$ پیوسته است و فقط کافی است پیوستگی آن در $(0,0)$ بررسی شود.

چون به ازای هر $x \geq 0$ داریم $\ln(x+1) \leq x$ ، خواهیم داشت:

$$0 \leq \left|\frac{y\ln(y^2+1)}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{(y)(y^2)}{x^2+y^2}\right| = \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|$$

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(0)\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{yln(y^2+1)}{x^2+y^2}\right|\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$$

$$\xrightarrow{\text{بنا بر قضیه فشردگی}}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{yln(y^2+1)}{x^2+y^2}\right|=0\to\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{yln(y^2+1)}{x^2+y^2}=0$$

سوال سوم: ثابت کنید توابع زیر در $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ پیوسته هستند.

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}}$$

چون به ازای هر $x\ge 0$ داریم $sinx\le x$ ، خواهیم داشت:

$$0\le\left|\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{y^2}{x^2+y^2}|x|\le|x|$$

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(0)\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}\right|\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$$

$$\xrightarrow{\text{بنا بر قضیه فشردگی}}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}\right|=0\to\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}=0$$

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy^4}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}}$$

$$0\le\left|\frac{3xy^4}{x^4+y^4}\right|=\frac{y^4}{x^4+y^4}|3x|\le|3x|$$

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(0)\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{3xy^4}{x^4+y^4}\right|\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}|3x|=0$$

$$\xrightarrow{\text{بنا بر قضیه فشردگی}}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{3xy^4}{x^4+y^4}\right|=0\to\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3xy^4}{x^4+y^4}=0$$

سوال چهارم: فرض کنید $\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}xy^2\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)(2+x^2+y^2)} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}}$ ،

نشان دهید تابع $\boldsymbol{f}$ در مبدا پیوسته است.

می‌بایست نشان دهیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \to \quad |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

$$0 \le \left| xy^2 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)(2+x^2+y^2)} \right| = \left| \frac{xy^2}{2+x^2+y^2} \right| \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} \right|$$

$$\le \left| \frac{xy^2}{2+x^2+y^2} \right| = \left| \frac{y^2}{2+x^2+y^2} \right| |x| \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \varepsilon$$

لذا کافی است $\delta < \varepsilon$ انتخاب شود.

سوال پنجم: نشان دهید حد $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|yx^{\frac{4}{3}}\right|}{x^2+|y^3|}$ موجود نیست.

مسیر $y = x^{\frac{4}{3}}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left|x^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}\right|}{x^2+|x^4|} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|x^{\frac{8}{3}}\right|}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|x^{\frac{2}{3}}\right|}{1+x^2} = 0$$

حال مسیر $y = x^{\frac{2}{3}}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left|x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}\right|}{x^2+|x^2|} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

لذا چون روی دو مسیر، مقدار حد متفاوت است، پس حد وجو ندارد.

سوال ششم: تابع $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2+1}$ را در نظر بگیرید. برای این که $|f(x,y,z)| < 0.001$ برقرار باشد. نقطه (x,y,z) حداکثر چقدر می‌تواند از $(0,0,0)$ دور باشد.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta \quad \to \quad |f(x,y,z) - f(0,0,0)| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = 0.001: \ |x| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}, |y| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}, |z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\to |xyz| \le (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left| \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2+1} \right| \le \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \varepsilon$$

لذا $\delta < \varepsilon = 0.001$ بنابراین حداکثر فاصله برابر 0.001 است.

سوال هفتم: کره واحد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در نظر بگیرید. به ازای هر نقطه p روی این کره نقطه p را به مبدا وصل کنید و از طرف p امتداد دهید تا استوانه قائم $x^2 + y^2 = 1$ را در نقطه‌ای که آن را $f(p)$ می‌نامیم، قطع کند.

الف) ضابطه f را بیابید. و نشان دهید f در $(0,0,1)$ و $(0,0,-1)$ تعریف نشده است.

نقطه (x,y,z) را روی کره در نظر بگیرید که به نقطه (tx,ty,tz) روی استوانه انتقال می‌یابد، داریم:

$$t^2x^2 + t^2y^2 = 1 \rightarrow t^2(x^2+y^2) = 1 \rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

لذا ضابطه تابع f به فرم زیر است:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

نقاط $(0,0,1)$ و $(0,0,-1)$ مخرج کسرهای فوق را صفر می‌کنند، لذا تابع در این نقاط تعریف نشده است.

ب) اگر نقطه q به اندازه کافی به نقطه p نزدیک باشد، آنگاه آیا نقطه $f(q)$ نیز به قدر کافی به نقطه $f(p)$ نزدیک خواهد بود؟ چرا؟ (نیازی به اثبات دقیق نیست و به طور شهودی استدلال کنید.)

چون سه ضابطه تابع فوق در همه نقاط (به جز نقاط تعریف نشده) پیوسته هستند این نتیجه حاصل می‌شود.

سوال هشتم: رویه سهمیگون $z = x^2 + y^2$ را در نظر بگیرید. هر نقطه p روی آن را به مبدا وصل کرده و از طرف مبدا امتداد می‌دهیم تا صفحه $z = -1$ را قطع کند. این نقطه تقاطع را $f(p)$ می‌نامیم.

الف) ضابطه f را بیابیدو نشان دهید f در مبدا تعریف نشده است.

نقطه (x,y,z) را روی سهمیگون در نظر بگیرید که به نقطه (tx,ty,tz) روی صفحه انتقال می‌یابد:

$$tz = -1 \rightarrow t = \frac{-1}{z}$$

لذا ضابطه تابع f به فرم زیر است:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{-x}{z}, \frac{-y}{z}, -1\right)$$

نقطه مبدا مخرج کسرهای دو ضابطه اول را صفر می‌کند، لذا تابع در این نقطه تعریف نشده است.

ب) اگر نقطه q به اندازه کافی به نقطه p نزدیک باشد، آن‌گاه آیا نقطه $f(q)$ نیز به قدر کافی به نقطه $f(p)$ نزدیک خواهد بود؟ چرا؟ (نیازی به اثبات دقیق نیست و به طور شهودی استدلال کنید.)

چون سه ضابطه تابع فوق در همه نقاط (به جز نقطه تعریف نشده) پیوسته هستند این نتیجه حاصل می‌شود.

سوال نهم: نمودار تابع $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y) = [y]$ را رسم کنید و در مورد پیوستگی یا عدم پیوستگی f در نقطه $(0,0)$ بحث کنید.

تصویر تابع در صفحه yoz تابع $z = [y]$ است که یک تابع چند ضابطه‌ای است و در راستای محور x این پاره‌خط‌ها امتداد می‌یابند و در نقطه $(0,0)$ پیوسته نیست.

سوال دهم: نشان دهید برای محاسبه حد $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **نمی‌توان از مختصات قطبی استفاده کرد. سپس نشان دهید این تابع در $(0,0)$ حد ندارد.**

با استفاده از مختصات قطبی قرار می‌دهیم $x = rcos\theta$ و $y = rsin\theta$ لذا داریم:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\, sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^3\sin^3\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2\theta\, sin\theta}{\cos^2\theta + r\sin^3\theta}$$

چون حد فوق به θ وابسته است، نمی‌توان از مختصات قطبی برای محاسبه حد استفاده کرد.

مسیر $x = 0$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{0 + y^3} = 0$$

حال مسیر $y = -x^{\frac{2}{3}}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^{\frac{8}{3}}}{x^2 - x^2} = \infty$$

لذا چون روی دو مسیر، مقدار حد متفاوت است، پس حد وجود ندارد.

سوال یازدهم: تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **را در نظر بگیرید. نشان دهید:**

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$$

اما تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$$

برای اثبات عدم وجود حد، ابتدا مسیر $x = 0$ را در نظر بگیرید:

$$\lim_{y\to 0}\frac{0}{0+y^2}=0$$

حال مسیر $y=x$ را در نظر بگیرید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

لذا چون روی دو مسیر، مقدار حد متفاوت است، پس حد وجود ندارد.