به نام خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تمرین هاي ریاضی 1

سری دوم

بخش حد و پیوستگی و مشتق

میترا احمدی

تمرین‌های سری دوم
بخش حد و پیوستگی

۱. فرض کنید تابع f بر بازه‌ی $[-۱,۱]$ پیوسته باشد و به ازای هر $x \in [-۱.۱]$ داشته باشیم:

$$| f(x) | \leq ۱ .$$

همچنین فرض کنید تابع g بر بازه‌ی $[-۱,۱]$ پیوسته باشد و $g(-۱) = -۱$ و $g(۱) = ۱$ باشد. ثابت کنید مقداری مانند $x_۰ \in [-۱,۱]$ موجود است که

$$f(x_۰) = g(x_۰) .$$

پاسخ :

تابع کمکی $h(x) = f(x) - g(x)$ را در نظر بگیرید که روی بازه $[-۱,۱]$ پیوسته است. داریم:

$$h(-۱) = f(-۱) - g(-۱) = f(-۱) + ۱ \geq ۰$$

و

$$h(۱) = f(۱) - g(۱) = f(۱) - ۱ \leq ۰$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $h(-۱)h(۱) \leq ۰$.

پس با توجه به قضیه مقدار میانی وجود دارد $x_۰ \in [-۱,۱]$ به طوری که $h(x_۰) = ۰$ و در نتیجه:

$$f(x_۰) = g(x_۰) .$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تهیه و تنظیم : میترا احمدی
نیمسال دوم ۹۹-۹۸

۲. فرض کنید:

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$$

که در ان a_i ها اعداد حقیقی ثابتی هستند و $n \in \mathbb{N}$ می‌دانیم که برای هر x حقیقی $| f(x) | \leq | \sin x |$ نشان دهید که:

$$| a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n | \leq 1 .$$

پاسخ :

چون همواره داریم $| \sin x | \leq 1$ پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$| f(x) | \leq | \sin x | \leq 1 \quad \longrightarrow \quad | f(x) | \leq 1$$

همچنین می‌توان گفت که:

$$\lim_{x \to 0^+} | \frac{f(x)}{x} | \leq \lim_{x \to 0^+} | \frac{\sin x}{x} | = 1$$

پس در نتیجه

$$lim_{x \to 0^+} | \frac{f(x)}{x} | \leq 1$$

حال می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{x \to 0^+} | \frac{f(x)}{x} | = \lim_{x \to 0^+} | a_1 \frac{\sin x}{x} + a_2 \frac{\sin 2x}{x} + \ldots + a_n \frac{\sin nx}{x} | \leq 1$$

پس:

$$| a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n | \leq 1 .$$

۳. فرض کنید $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند و داشته باشیم:

$$f(a)<g(a) \quad , \quad f(b)>g(b)$$

نشان دهید وجود دارد $c\in(a,b)$ به طوری که

$$f(c)=g(c)\ .$$

پاسخ :
تابع کمکی $h(x)$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x)=f(x)-g(x)\ .$$

در این صورت طبق فرض مسئله داریم:

$$h(a)=f(a)-g(a)<0$$
$$h(b)=f(b)-g(b)>0$$

پس طبق قضیه مقدار میانی می‌توان نتبجه گرفت که $c\in(a,b)$ موجود است که $h(c)=0$ و همچنین:

$$f(c)=g(c)\ .$$

۴. اگر تابع فرد f در $x = 0$ از راست پیوسته باشد، آن گاه نشان دهید که در این نقطه پیوسته است و

$$f(0) = 0 \ .$$

پاسخ :

می‌دانیم که یک تابع فرد است هرگاه $f(-x) = -f(x)$. همچنین طبق فرض مسئله، تابع f پیوسته از راست است پس:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \ .$$

حال قرار می‌دهیم $t = -x$. داریم:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(-t) = \lim_{t \to 0^+} -f(t) = -f(0) = f(-0) = 0$$

پس در نتیجه:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

لذا f در صفر پیوسته است.

۵. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$fof(x)=x$$

ثابت کنید $c\in\mathbb{R}$ موجود است که:

$$f(c)=c\ .$$

پاسخ :

تابع پیوسته $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=f(x)-x$$

حال برای هر نقطه دلخواه $a\in\mathbb{R}$ مقدار $g(a)$ برابر با $f(a)-a$ است. اگر $f(a)=a$ باشد که مسئله حل است پس برای حالت $f(a)\neq a$ مقدار تابع $g(x)$ را برای $f(a)$ نیز محاسبه می‌کنیم:

$$g(f(a))=f(f(a))-f(a)=a-f(a)$$

پس در نتیجه

$$g(a)g(f(a))<0$$

پس طبق قضیه‌ی مقدار میانی می‌توان نتیجه گرفت که وجود دارد c به طوری که $g(c)=0$ و در نتیجه:

$$f(c)=c\ .$$

۶. فرض کنید تابع $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x = ۰$ پیوسته باشند و $g(۰) = ۱$ و $f(۰) = ۰$ باشد و همچنین فرض کنید برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \ .$$

نشان دهید تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

پاسخ :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to ۰} f(a+h) = \lim_{h\to ۰} \big(f(a)g(h) + f(h)g(a)\big)$$

$$= f(a) \lim_{h\to ۰} g(h) + g(a) \lim_{h\to ۰} f(h)$$

$$= f(a)g(۰) + g(a)f(۰) = f(a) \ .$$

پس تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۷. درستی و نادرستی موارد زیر را بررسی کنید. اگر درست است، دلیل بیاورید و اگر نا درست است، مثال نقض بزنید.

(آ) اگر f در a پیوسته باشد، آن‌گاه $\mid f \mid$ نیز در a پیوسته است.

(ب) اگر $\mid f \mid$ در a پیوسته باشد، آن‌گاه f نیز در a پیوسته است.

(ج) اگر به ازای هر x متعلق به بازه‌ای حول a داشته باشیم $f(x) < g(x)$ و هر دو حد $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود داشته باشند، آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$.

پاسخ آ :

این گزاره درست است.

فرض کنیم تابع h به صورت زیر تعریف شده است:

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \mid x \mid$$

این یک تابع پیوسته است. از طرفی می‌دانیم که $\mid f \mid = hof$.

حال چون تابع f پیوسته است پس می‌توان گفت که تابع $\mid f \mid$ نیز که ترکیب دو تابع پیوسته فوق است نیز پیوسته است.

پاسخ ب :

این گزاره نادرست است.

به مثال زیر توجه کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۱ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

این تابع ناپیوسته است ولی $\mid f \mid$ یک تابع کلاً پیوسته است.(یعنی در تمام نقاط ناپیوسته است)

پاسخ ج :

این گزاره نادرست است.

به توابع زیر توجه کنیم:

$$g(x) = \mid x + a \mid \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = -g(x) = - \mid x+a \mid \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

در این صورت به ازای هر $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ داریم:

$$f(x) < g(x)$$

ولی از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 .$$

۸. فرض کنید تابع $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد و به ازای هر عضو از دامنه، داشته باشیم:

$$f(x)=xf(x^2)\ .$$

ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابید.

پاسخ :

$$f(x)=xf(x^2)=x^3f(x^4)=x^3(x^4f(x^8))=x^7f(x^8)=\ldots=x^{(2^n-1)}f(x^{2^n})$$

پس به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$f(x^{\frac{1}{2^n}})=xf(x)\qquad(*)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که به ازای هر $x\in(0,+\infty)$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$$

حال طبق فرض مسئله چون تابع f پیوسته است، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$f(1)=f(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}})=\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})\ .$$

حال با توجه به (*) می‌توان گفت که $f(1)=xf(x)$ است و در نتیجه به ازای هر $x\in(0,+\infty)$ داریم:

$$f(x)=\frac{f(1)}{x}\ .$$

۹. فرض کنید تابع $f:[۰,۱]\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد. نشا ن دهید وجود دارد c به طوری که:

$$f(c)=\frac{۱}{۳}\big(f(\frac{۱}{۴})+f(\frac{۱}{۲})+f(\frac{۳}{۴})\big)\ .$$

پاسخ :

تابع f بر بازه $[۰,۱]$ پیوسته است پس طبق قضیه اکسترمم $p,q\in[۰,۱]$ موجودند به طوری که به ازای هر $x\in[۰,۱]$ داریم:

$$f(p)\le f(x)\le f(q)\ .$$

بنابراین:

$$f(p)\le f(\frac{۱}{۴})\le f(q)$$

$$f(p)\le f(\frac{۱}{۲})\le f(q)$$

$$f(p)\le f(\frac{۳}{۴})\le f(q)$$

پس در نتیجه می‌توان گفت:

$$f(p)\le\frac{۱}{۳}(f(\frac{۱}{۴})+\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴})\le f(q)$$

پس طبق قضیه مقدار میانی، عدد c بین p,q موجود است که:

$$f(c)=\frac{۱}{۳}\big(f(\frac{۱}{۴})+f(\frac{۱}{۲})+f(\frac{۳}{۴})\big)\ .$$

۱۰. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر دو عدد گویا داده شده q_1, q_2 ، اگر $q_1 < q_2$ آن‌گاه $f(q_1) < f(q_2)$ باشد. نشان دهید تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

پاسخ :

برای حل این سوال از مفهوم دنباله‌ها و خواص آن‌ها استفاده می‌کنیم. بدین منظور ابتدا حد دنباله $\frac{[nx]}{x}$ را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x - 1 < [x] \leq x$$

پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$nx - 1 < [nx] \leq nx \quad \longrightarrow \quad x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leq n$$

و همچنین

$$x = \lim_{n\to\infty} x - \frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{n} \leq \lim_{n\to\infty} x = x$$

پس طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{n} = x \ .$$

حال دو دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را برای هر $x \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{[nx]}{n}$$

$$\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n}$$

که این دو دنباله، دنباله‌هایی از اعداد گویا هستند و هر دو همگرا به x هستند و همچنین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$x_n \leq x < x'_n$$

حال به اثبات خود مسئله می‌پردازیم. به ازای هر عدد حقیقی $x < y$ می‌توان اعداد گویا q_1, q_2 را طوری پیدا کرد که:

$$x < q_1 < q_2 < y$$

و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\frac{[nx]}{n} = x_n \leq x \leq q_1 < q_2 < y < y_n' = \frac{[ny]}{n} + \frac{1}{n}$$

و حال چون جملات دو دنباله گویا هستند و طبق خاصیت تابع f برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$f(x_n) < f(q_1) < f(q_2) < f(y_n')$$

هم‌چنین چون این تابع پیوسته است، می‌توان گفت:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(q_1) = f(q_1) < f(q_2) = \lim_{n\to\infty} f(q_2) \leq \lim_{n\to\infty} f(y_n') = f(y)$$

پس به ازای هر x, y حقیقی دلخواه داریم:

$$x < y \quad \longrightarrow \quad f(x) < f(y)$$

که نتیجه می‌دهد که تابع f یک تابع صعودی است.

۱۱. فرض کنید $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0)=f(1)$.

(آ) ثابت کنید عددی مانند x وجود دارد که $0 \leq x \leq x+\frac{1}{2} \leq 1$ و $f(x)=f(x+\frac{1}{2})$.

(ب) ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n نقطه‌ای مانند x وجود دارد که $0 \leq x < x+\frac{1}{n} \leq 1$ و

$$f(x)=f(x+\frac{1}{n}) .$$

پاسخ آ :

قرار دهید:

$$h(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x) .$$

پس داریم:

$$h(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$$

و

$$h(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$$

و طبق فرض مسئله

$$f(0)=f(1) .$$

پس می‌توان گفت:

$$h(0)=-h(\frac{1}{2}) \quad \longrightarrow \quad h(0)h(\frac{1}{2}) \leq 0 .$$

پس طبق قضیه مقدار میانی نتیجه می‌گیریم که $a \in [0,1]$ موجود است که $h(a)=0$ که این بدان معناست که:

$$f(a+\frac{1}{2})=f(a) .$$

پاسخ ب :

همانند بالا تابع کمکی $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x) .$$

پس به ازای هر $i = \circ, ۱, \ldots, n-۱$ داریم:

$$h(\frac{i}{n}) = f(\frac{i+۱}{n}) - f(\frac{۱}{n})$$

و طبق $f(\circ) = f(۱)$ نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} h(\frac{i}{n}) = \circ \ .$$

پس i, j موجودند که $i < j$ و

$$h(\frac{i}{n})h(\frac{j}{n}) \leq \circ$$

پس طبق قضیه مقدار میانی $c \in [\frac{i}{n}, \frac{j}{n}]$ موجود است که $h(c) = \circ$ و در نتیجه:

$$f(a + \frac{۱}{n}) = f(a) \ .$$

ادامه تمرین‌های سری دوم
بخش مشتق

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تهیه و تنظیم : میترا احمدی
نیم‌سال دوم ۹۹-۹۸

---

۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر باشد همچنین داشته باشیم:

$$f(0)=f(1)=0 \quad , \quad f'(1)>0 \quad , \quad f'(0)>0\,.$$

نشان دهید معادله $f'(c)>0$ در $[0,1]$ حداقل دو ریشه حقیقی دارد.

پاسخ :

چون طبق فرض مسئله $f(0)=f(1)$ است و همچنین تابع f مشتق‌پذیر است، پس با توجه به قضیه مقدار میانگین، می‌توان گفت که $c\in(0,1)$ موجود است به طوری که: $f'(c)=0$.

به برهان خلف فرض می‌کنیم که به ازای هر $x\in(0,1)-\{c\}$ داشته باشیم:

$$f'(x)\neq 0\,.$$

حال از فرض مسئله، کمک می‌گیریم. چون $f'(1),f'(0)>0$ هستند و تابع f مشتق‌پذیر است، طبق قضیه مقدار میانی مشتق نتیجه می‌شود که به ازای هر $x\in(0,1)-\{c\}$ داریم:

$$f'(x)>0\,.$$

پس تابع f در بازه $(0,c)$ و $(c,1)$ صعودی اکید است پس داریم:

$$f(0)<f(c)<f(1)$$

که این نتیجه را می‌دهد که $f(0)\neq f(1)$ که این تناقض با فرض ماست. پس فرض خلف غلط است و معادله فوق حداقل دارای ۲ جواب است.

---

۲. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بوده و $f(۱) = ۱$ و $f(۰) = ۰$ باشد.آن‌گاه نشان دهید اگر حداقل یک مقدار مانند $۰ < x_۰ < ۱$ وجود داشته باشد که $f(x_۰) \neq x_۰$ باشد، در این صورت عددی مانند $۰ < c < ۱$ موجود است به طوری که $f'(c) > ۱$ باشد.

پاسخ :

چون طبق فرض مسئله $f(x_۰) \neq x_۰$ است، پس دو حالت داریم:

حالت اول :

$$f(x_۰) > x_۰ \quad \longrightarrow \quad \frac{f(x_۰)}{x_۰} > ۱ .$$

در این صورت طبق قضیه مقدار میانگین می‌توان گفت که $c \in (۰, x_۰)$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(x_۰) - f(۰)}{x_۰ - ۰} > ۱ .$$

و مسئله حل است.

حالت دوم :

$$f(x_۰) < x_۰ \quad \longrightarrow \quad \frac{f(x_۰)}{x_۰} < ۱ .$$

در این صورت طبق قضیه مقدار میانگین می‌توان گفت که $c \in (۰, x_۰)$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(۱) - f(x_۰)}{۱ - x_۰} = \frac{۱ - f(x_۰)}{۱ - x_۰} .$$

از طرفی چون $f(x_۰) < x_۰$ است پس $۱ - f(x_۰) > ۱ - x_۰ \quad \longrightarrow \quad \frac{۱ - f(x_۰)}{۱ - x} > ۱$ و در نتیجه:

$$f'(c) > ۱ .$$

۳. اگر $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ باشد، نشان دهید معادله زیر حداقل یک جواب در $[0,1]$ دارد:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \, .$$

پاسخ :

چند جمله‌ای $p(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_0}{2} x \, .$$

طبق فرض مسئله:

$$p(0) = 0$$

و

$$p(1) = \frac{a_n}{n+1} + \ldots + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{1} = 0 \, .$$

پس طبق قضیه مقدار میانگین می‌توان نتیجه گرفت که $c \in (0,1)$ موجود است که $p'(c) = 0$ است. پس در نتیجه چون

$$p'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

است پس معادله ذکر شده حتماً یک جواب در $(0,1)$ دارد.

۴. فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,b]$ و f'' در فاصله (a,b) همواره موجود و مثبت باشد، نشان دهید به ازای هر $x,y\in[a,b]$ داریم:

$$f(\frac{x+y}{2})\leq\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\ .$$

پاسخ :

طبق قضیه مقدار میانگین $c_1\in(a,\frac{a+b}{2})$ موجود است که:

$$f(\frac{a+b}{2})-f(a)=(\frac{a+b}{2}-a)f'(c_1)=\frac{b-a}{2}f'(c_1)$$

و همچنین $c_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ موجود است که:

$$f(b)-f(\frac{a+b}{2})=(b-\frac{a+b}{2})f'(c_2)=\frac{b-a}{2}f'(c_2)$$

حال با تفاضل مقادیر فوق داریم:

$$2f(\frac{a+b}{2})-f(a)-f(b)=\frac{b-a}{2}(f'(c_1)-f'(c_2))\qquad(*)$$

حال چون $f''\geq 0$ است پس تابع f' صعودی است یعنی ازای هر c_1,c_2 داریم:

$$c_1<c_2\quad\longrightarrow\quad f(c_1)<f(c_2)\ .$$

پس عبارت $\frac{b-a}{2}(f'(c_1)-f'(c_2))$ دارای یک مقدار منفی است که طبق $(*)$ این نتیجه را می‌گیریم که:

$$2f(\frac{a+b}{2})-f(a)-f(b)<0\quad\longrightarrow\quad f(\frac{x+y}{2})\leq\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\ .$$

۵. تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر است و مشتق دوم دارد. پاره خط واصل بین نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ نمودار f را در نقطه سومی چون $c \in (a,b)$ قطع می‌کند. ثابت کنید به ازای حداقل یک نقطه مانند t در (a,b) داریم:

$$f''(t) = 0 .$$

پاسخ :

۳ نقطه‌ی $A=(a,f(a))$ و $B=(b,f(b))$ و $C=(c,f(c))$ را در نظر می‌گیریم.

شیب خط AB برابر است با:

$$m = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(b)-f(c)}{b-c} .$$

طبق قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌گیریم که $d_1 \in (a,c)$ موجود است که:

$$f'(d_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

و همچنین $d_2 \in (c,b)$ موجود است که:

$$f'(d_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

پس در نتیجه:

$$f'(d_1) = f'(d_2) .$$

حال طبق قضیه رول $e \in (d_1,d_2)$ موجود است که $f''(e) = 0$ که این نتیجه را به ما می‌دهد که $f''(t)$ دارای حداقل یک جواب است.

۶. اگر تابع f با دامنه اعداد حقیقی در رابطه $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{1+\alpha}$ صدق کند، نشان دهید f تابع ثابت است.

پاسخ :

برای نشان دادن این که تابع f یک تابع ثابت است باید نشان دهیم که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f'(x) = 0 .$$

به عبارتی باید نشان دهیم مقدار رابطه زیر برابر با صفر است:

$$f'(t) = \lim_{x\to t} \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

یا به عبارتی نشان دهیم:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad st \quad |x-t| < \delta \quad \longrightarrow \quad \frac{|f(x)-f(t)|}{|x-t|} < \varepsilon .$$

طبق فرض مسئله داریم:

$$|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{1+\alpha}$$

پس:

$$\frac{|f(x)-f(t)|}{|x-t|} \leq |x-t|^{\alpha} .$$

حال با انتخاب $\delta < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{|f(x)-f(t)|}{|x-t|} < |x-t|^{\alpha} < \varepsilon .$$

۷. فرض کنید f تابع مشتق‌پذیر بوده و $f''(t) < 0$ ثابت کنید هرگاه $f'(y) + x < f(y+1)$ باشد آن‌گاه $x < f(y)$.

پاسخ :

چون طبق فرض مسئله به ازای هر $t \in (a,b)$ مقدار $f''(t)$ کمتر از صفر است، می‌توان نتیجه گرفت که f' در بازه‌ی (a,b) نزولی است و همچنین:

$$f'(y) + x < f(y+1)$$

پس داریم:

$$f'(y) + x - f(y) < f(y+1) - f(y) .$$

حال چون تابع f مشتق‌پذیر است، طبق قضیه مقدار میانگین می‌توان نتیجه گرفت که $c \in (y, y+1) \subseteq (a,b)$ موجود است که:

$$f'(y) + x - f(y) < f(y+1) - f(y) = (y+1-y)f'(c) = f'(c)$$

حال چون $y < c$ است و تابع f' نزولی است پس:

$$x - f(y) < f'(c) - f'(y) < 0 \quad \longrightarrow \quad x < f(y) .$$

۸. فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است و $a>0$ است. نشان دهید $c_1,c_2\in(a,b)$ موجودند که:

$$\frac{f'(c_1)}{a+b}=\frac{f'(c_2)}{2c_2}\ .$$

پاسخ :

توابع $f(x)$ و $g(x)=x^2$ را روی بازه (a,b) در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه مقدار میانگین می‌توان نتیجه گرفت که $c_2\in(a,b)$ موجود است که:

$$\frac{f'(c_2)}{g'(c_2)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

در نتیجه:

$$\frac{f'(c_2)}{2c_2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$$

پس:

$$(a+b)\frac{f'(c_2)}{2c_2}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

و هم‌چنین می‌توان گفت که $c_1\in(a,b)$ موجود است که:

$$f'(c_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و در نتیجه داریم:

$$f'(c_1)=(a+b)\frac{f'(c_2)}{2c_2}$$

پس:

$$\frac{f'(c_1)}{a+b}=\frac{f'(c_2)}{2c_2}\ .$$

۹. نشان دهید $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ در $(0, \infty)$ صعودی و $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ در $(0, \infty)$ نزولی است.

پاسخ :

برای این که نشان دهیم تابع $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ در بازه‌ی ذکر شده صعودی است، کافی است نشان دهیم تابع

$$h(x) = \ln(f(x)) = x\ln(1 + \frac{1}{x})$$

صعودی است. پس به محاسبه $h'(x)$ می‌پردازیم:

$$h'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1} > 0$$

پس تابع $h(x)$ صعودی است.

حال نیز همانند بالا برای نشان دادن نزولی بودن تابع $g(x)$ کافی است نشان دهیم که تابع

$$k(x) = \ln(g(x)) = (x+1)\ln(1 + \frac{1}{x})$$

نزولی است. داریم:

$$k'(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) + (x+1)\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x} < 0$$

پس تابع $k(x)$ نزولی است.

۱۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر $x\in\mathbb{R}$ حداقل یکی از دو مقدار $f(x)$ یا $f'(x)$ برابر صفر است. نشان دهید f روی $\mathbb{R}$ ثابت است.

پاسخ :

طبق فرض مسئله می‌توان گفت که:

$$(f^{۲})'(x)=۲f(x)f'(x)=۰\ .$$

که از آن می‌توان نتیجه گرفت که تابع $f^{۲}$ روی $\mathbb{R}$ تابع ثابت است.

مثلا فرض کنیم که به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم:

$$f^{۲}(x)=c\ .$$

(که $c\geq ۰$ است.)

اگر $c=۰$ باشد که واضح است $f(x)$ نیز تابع ثابت ۰ است.

پس فرض می‌کنیم که $c>۰$ باشد. در این صورت به هزای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم:

$$f(x)=^{+}_{-}\sqrt{c}$$

اگر به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ این تابع برابر با مقدار ثابت $\sqrt{c}$ یا $-\sqrt{c}$ باشد نیز مسئله حل است و فقط حالتی باقی می‌ماند که به ازای مقادیری از $\mathbb{R}$ تابع f برابر با $\sqrt{c}$ و به ازای مقادیر دیگری برابر با $-\sqrt{c}$ باشد.

در این حالت نیز با توجه به قضیه مقدار میانی می‌توان نتیجه گرفت که $d\in(-\sqrt{c},\sqrt{c})$ موجود است که:

$$f(d)=۰$$

که این نیز خلاف فرض است. پس می‌توان نتیجه گرفت که تابع f یک تابع ثابت روی $\mathbb{R}$ است.

۱۱. نشان دهید که معادله $x^{2n+1} + ax + b = 0$ که $n \in \mathbb{N}$ و $a > 0$ است، فقط یک جواب دارد.

پاسخ :

فرض کنیم:

$$f(x) = x^{2n+1} + ax + b = 0$$

باشد که این تابع یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم: $f(0) = b$ و

$$f(-b^{\frac{1}{1+2n}}) = -b - ab^{\frac{1}{1+2n}} + b = -ab^{\frac{1}{2n+1}} .$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$f(0)f(b^{\frac{1}{1+2n}}) = -ab^{1+\frac{1}{2n+1}} = -ab^{\frac{2n+2}{2n+1}} < 0 .$$

که با توجه به قضیه مقدار میانی می‌توان گفت که c موجود است که $f(c) = 0$ است. پس معادله فوق حداقل یک جواب دارد. حال نشان می‌دهیم که دقیقاً یک جواب دارد.

بدین منظور به برهان خلف فرض کنیم که جواب دیگری نیز مانند c_1 داشته باشد. داریم:

$$f(c) = f(c_1) = 0 .$$

حال بنا بر قضیه مقدار میانگین می‌توان نتیجه گرفت که c_2 نیز موجود است که $f'(c_2) = 0$.

از طرفی دیگر داریم:

$$f'(x) = (2n+1)x^{2n} + a$$

که مقدار فوق همواره مثبت است. پس $f(x)$ دقیقاً یک جواب دارد.

۱۲. نامساوی زیر را برای هر $x \geq ۲$ اثبات کنید:

$$(x+۱)\cos\frac{\pi}{x+۱} - x\cos\frac{\pi}{x} > ۱ \ .$$

پاسخ :

تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = t\cos\frac{\pi}{t}$$

قضیه مقدار میانگین را در بازه $[x, x+۱]$ را برای این تابع استفاده می‌کنیم. پس می‌توان گفت که $c \in (x, x+۱)$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(x+۱) - f(x)}{(x+۱) - x}$$

و در نتیجه:

$$f'(x+۱) - f(x) = f'(c) \ .$$

حال باید نشان دهیم که به ازای هر $x \geq ۲$ مقدار $f'(x) > ۱$ است.

مشتق تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x} \ .$$

و مشتق دوم $f(x)$ برابر است با:

$$f''(x) = \frac{\pi}{x^۲}\sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x^۲}\sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi^۲}{x^۳}\cos\frac{\pi}{x} = -\frac{\pi^۲}{x^۳}\,cos\frac{\pi}{x} \ .$$

حال چون f'' در بازه $[۲, \infty)$ منفی است، پس $f'(x)$ در این بازه نزولی است پس:

$$f'(x) > \lim_{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right) = ۱ \ .$$

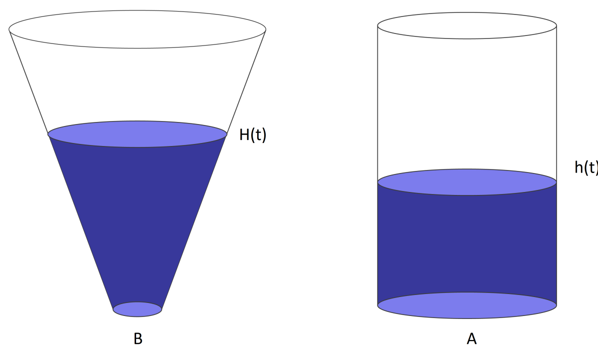
در نتیجه داریم:

$$(x+۱)\cos\frac{\pi}{x+۱} - x\cos\frac{\pi}{x} = f(x+۱) - f(x) = f'(x) > ۱ \ .$$

۱۳. به دو مخزن که شکل آن‌ها در زیر نمایش داده شده است و ارتفاع آن‌ها به اندازه کافی بزرگ است به طور همزمان آب وارد می‌کنیم. اگر سرعت آب ورودی در هر دو مخزن برابر باشد و تابع ارتفاع را در زمان t در مخزن A و B به ترتیب با $h(t)$ و $H(t)$ نمایش می‌دهیم. آن‌گاه:

(آ) با استدلال ریاضی ثابت کنید فقط در یک لحظه مانند $t_\circ \neq \circ$ مقدار $h(t_\circ)$ با $H(t_\circ)$ برابر است.

(ب) نمودار تقریبی $h(t)$ و $H(t)$ را رسم کنید.



پاسخ آ :

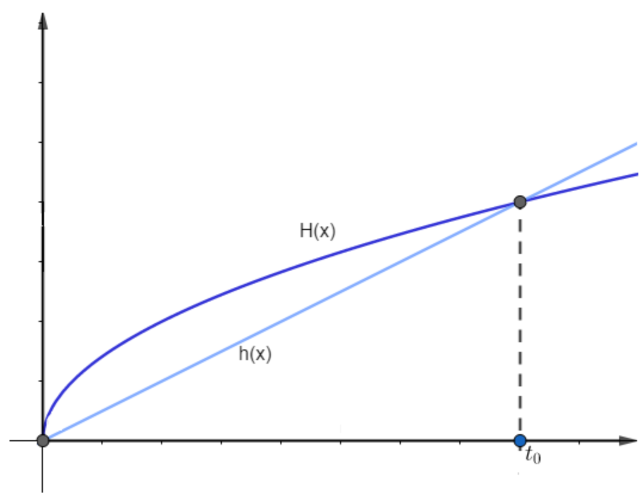
چون ظرف A استوانه‌ای شکل و در نتیجه دارای سطح مقطع ثابت است پس $\frac{dh}{dt}$ عددی ثابت خواهد بود، بنابر این $h(t) = at + b$ و چون $h(\circ) = \circ$ است، پس:

$$h(t) = at \ .$$

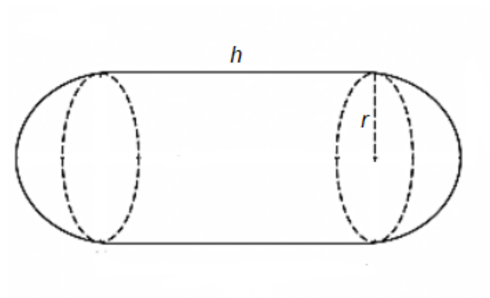
حال چون ظرف B دارای سطح مقطعی کوچکتر از A است، پس تا مدتی $H(t)$ از $h(t)$ بزرگ‌تر است.
از طرفی دیگر هر چه سطح قاعده بزرگ‌تر می‌شود، نرخ افزایش ارتفاع آب کمتر می‌شود پس $\frac{dH}{dt}$ نزولی و بنابراین $\frac{d^۲H}{dt^۲}$ منفی می‌شود.
پس واضح است که دو تابع با مشخصات گفته شده به جز در نقطه $(\circ,\circ)$ فقط در یک نقطه دیگر یکدیگر را قطع می‌کنند.

پاسخ ب :

با توجه به جواب قسمت (آ) و این‌که هر دو تابع از نقطه $(0,0)$ شروع می‌شوند، خواهیم داشت:



۱۴. یک تانک سوخت شامل یک استوانه و دو نیم‌کره که در انتهای آن استوانه می‌باشد را در نظر بگیریم. قیمت هر واحد مساحت نیم‌کره‌ها دو برابر قیمت مساحت واحد استوانه است. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری بیابید که هزینه کل حداقل شود.



پاسخ :

فرض کنیم h, r به ترتیب ارتفاع و شعاع قسمت استوانه‌ای تانک باشند. حجم تانک برابر است با:

$$V = \pi 2h + \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

اگر برای قسمت استوانه‌ای تانک قیمت هر واحد K باشد، طبق فرض مسئله، قیمت هر واحد برای قسمت نیم‌کره‌ی چپ و راست برابر با $2k$ است.

پس هزینه کل این تانک برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} C &= 2\pi rhk + 8\pi r^2 k \\ &= 2\pi rk \frac{V - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} + 8\pi r^2 k \\ &= \frac{2Vk}{r} + \frac{16}{3}\pi r^2 k \qquad (0 < r < \infty) \end{aligned}$$

با توجه به معادله فوق کمترین هزینه در نقطه بحرانی اتفاق می‌افتد. پس داریم:

$$\frac{dC}{dr} = -2Vkr^{-2} + \frac{32}{3}\pi rk = 0 \quad \longleftrightarrow \quad r = (\frac{3V}{16\pi})^{\frac{1}{3}} .$$

حال چون داشتیم:

$$V = \pi 2h + \frac{4}{3}\pi r^3$$

پس:

$$r^{3} = \frac{3}{16\pi}(\pi r^{2}h + \frac{4}{3}\pi r^{3} \quad \longrightarrow \quad r = \frac{1}{4}h)$$

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$h = 4r = 4(\frac{3V}{16\pi})^{\frac{1}{3}} \ .$$

پس برای مینیمم کردن قیمت، مقدار شعاع باید برابر با $(\frac{3V}{16\pi})^{\frac{1}{3}}$ و ارتفاع قسمت استوانه‌ای باید $4(\frac{3V}{16\pi})^{\frac{1}{3}}$ باشد.

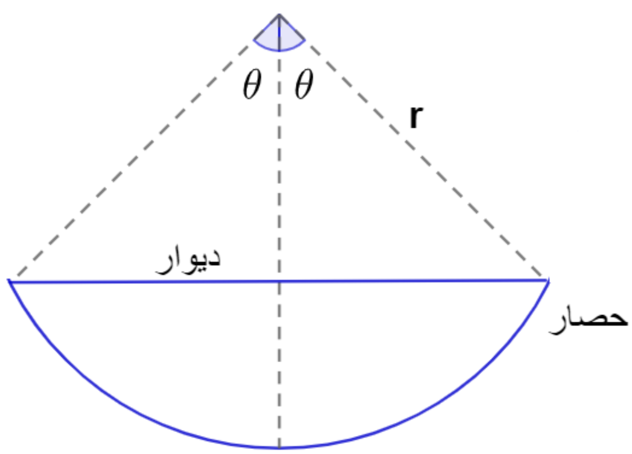
۱۵. قرار است محوطه‌ای طوری ساخته شود که بخشی از مرز آن را دیوار راستی که موجود است تشکیل دهد. بخش دیگر مرز را می‌خواهیم به شکل کمانی از دایره نرده گذاری کنیم. اگر ۱۰۰ متر نرده در اختیار داشته باشیم:

(آ) مساحت بزرگ‌ترین محوطه ممکن کدام است؟

(ب) این قسمت خمیده مرز، چه کسری از دایره است؟

پاسخ آ :

به شکل زیر توجه کنیم:



چون ۱۰۰ متر نرده داریم پس زاویه‌ی θ ایجاد شده برابر است با:

$$۲r\theta = ۱۰۰ \quad \longrightarrow \quad r = \frac{۵۰}{\theta} \, .$$

از طرفی دیگر مساحت محوطه برابر است با:

$$A = \frac{۲\theta}{۲\pi}\pi r^۲ = (r\cos\theta)(r\sin\theta)$$

$$= \frac{(۵۰)^۲}{\theta} - \frac{(۵۰)^۲}{\theta^۲}\frac{\sin ۲\theta}{۲}$$

$$= (۵۰)^۲\left(\frac{۱}{\theta} - \frac{\sin ۲\theta}{۲\theta^۲}\right) \quad (۰ < \theta < \pi) \, .$$

دقت کنیم که اگر $\theta \to \infty$ آن‌گاه $A \to \infty$ و اگر $\theta = \pi$ باشد، آن‌گاه کل محوطه دایره می‌شود و نیازی به دیوار نیست.

پس ماکزیمم مساحت با استفاده از نقطه بحرانی به دست می‌آید. پس داریم:

$$\frac{dA}{d\theta} = 5\theta^2 \Big(- \frac{1}{\theta^2} - \frac{2\theta^{20}(2\cos 2\theta) - \sin 2\theta(4\theta)}{4\theta^4} = 0\Big)$$

پس

$$\frac{1}{\theta^2} + \frac{\cos 2\theta}{\theta^2} = \frac{\sin 2\theta}{\theta^2} \quad \longleftrightarrow \quad 2\theta\cos^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

و در نتیجه:

$$\cos\theta = 0 \qquad \text{یا} \qquad \tan\theta = 0\ .$$

واضح است که اگر $\tan\theta = 0$ باشد، جوابی در $(0, \pi)$ نداریم. (زیرا که نمودار $y = x$ و $y = \tan x$ در این بازه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.)

در نتیجه مقدار ماکزیمم جایی رخ می‌دهد که $\cos\theta = 0$ باشد و در نتیجه $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد. پس بیشترین مساحت برابر است با:

$$\frac{2}{\pi}(50)^2 = \frac{5000}{\pi}\ .$$

پاسخ ب :

با توجه به قسمت قبل، مقدار θ برابر با $\frac{\pi}{2}$ است پس قسمت خمیده $\frac{1}{2}$ مساحت کل است.