/ /

۱- مثال هندسی نقاطی از صفحه‌ی مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق کند.

الف) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}+1\right) > 2$

$$\frac{1}{\bar{z}}+1 = \frac{1}{\bar{z}}+\frac{z}{z} = \frac{z+|z|^2}{|z|^2} = \frac{x+iy+(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}+1\right) = \frac{y}{x^2+y^2} > 2$$

$$2x^2+2y^2-y > 0 \rightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 < 1/16$$

⇐ دایره به مرکز $(0, 1/4)$ و شعاع $1/4$

ب) $\operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{\bar{z}-2i} - 3i\right) = \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)^2$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{x}{x-iy-2i} - 3i\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x(x+(y+2)i)}{x^2+(y+2)^2} - 3i\right) = \frac{x^2}{x^2+(y+2)^2}$$

$$\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} \longrightarrow \frac{x^2}{x^2+(y+2)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = (y+2)^2 \Rightarrow y^2 = y^2+4y+4$$

$$\Rightarrow y = -1$$

اردی‌بهشت

/ /

ج) $\operatorname{Re}\left(1+i+\frac{1}{1+z}\right)+\operatorname{Im}\left(2i+\frac{1}{1+z}\right)=4$

$\operatorname{Re}\left(1+i+\frac{1+\bar{z}}{|1+z|^2}\right)+\operatorname{Im}\left(2i+\frac{1+\bar{z}}{|1+z|^2}\right)=4$

$\operatorname{Re}\left(1+i+\frac{(1+x)+iy}{(1+x)^2+y^2}\right)+\operatorname{Im}\left(2i+\frac{(1+x)-iy}{(1+x)^2+y^2}\right)=4$

$1+\frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}+2-\frac{y}{(1+x)^2+y^2}=\frac{3(1+x)^2+3y^2+(1+x)-y}{(1+x)^2+y^2}=4$

$4(1+x)^2+4y^2=3(1+x)^2+3y^2+(1+x)-y$

$(1+x)^2+y^2=(1+x)-y \Rightarrow 1+2x+x^2+y^2=1+x-y$

$x^2+x+y^2+y=0 \Rightarrow (x+1/2)^2+(y+1/2)^2=1/2$

دایره به مرکز $(-1/2,-1/2)$ و شعاع $\sqrt{2}/2$

د) $z\bar{z}+\underbrace{(1+i)z+\overline{(1+i)z}}_{}+1=0$

$2\operatorname{Re}((1+i)z)=2\operatorname{Re}((1+i)(x+iy))$

$=2\operatorname{Re}((x+iy)+ix-y)$

$=2(x-y)$

$|z|^2+2x-2y+1=x^2+y^2+2x-2y-1=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

اسدی رشت

/ /

۲- مکان هندسی تمام نقاطی مانند z که $|z|=1$ از صفحه‌ی مختلط را بیابید که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند.

$$\left|\frac{z}{\bar z}+\frac{\bar z}{z}\right|=1 \qquad (z=re^{i\theta} \to \bar z=re^{-i\theta})$$

$$|z|=1 \Rightarrow z=e^{i\theta},\ \bar z=e^{-i\theta} \longrightarrow \underbrace{\left|e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right|}_{2\mathrm{Re}(z)}=|2\cos(2\theta)|=1$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 1/2,\ -1/2 \Rightarrow 2\theta = \pi/3,\ 5\pi/3,\ 7\pi/3,\ 11\pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3,\ 8\pi/3,\ 10\pi/3$$

۳- فرض کنید $z=\frac{1+i\sqrt3}{2}$ ابتدا شکل قطبی z را به دست آورید و سپس مقدار $z^{1999}-z^{1998}+z^{1997}+1$ را مشخص کنید.

$$z=\frac{1+i\sqrt3}{2} \qquad \operatorname{tg}\theta=\sqrt3 \Rightarrow \theta=\pi/3$$

$$r=|z|=\sqrt{1/4+3/4}=1 \Rightarrow z=e^{\pi/3\, i}=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$$

$$z^n=r^n e^{in\theta}$$

$$1+z^{1997}-z^{1998}+z^{1999}=1+z^{1997}(1-z+z^2)$$

$$=1+\operatorname{cis}\frac{1997\pi}{3}\left(1-\operatorname{cis}\pi/3+\operatorname{cis}2\pi/3\right)$$

$$=1+\left(1/2-\sqrt3/2\, i\right)\left(1-1/2-\sqrt3/2\, i-1/2+\sqrt3/2\, i\right)$$

$$=1.$$

انرژی بهشت

/ /

۴- با کمک اعداد مختلط $tg(\frac{3\pi}{8})$ را مشخص کنید (از $1, e^{i\pi/4}, e^{i\pi/2}$ کمک بگیرید)

راه حل:
$e^{i\theta} + e^{i\alpha} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\alpha + i\sin\alpha$

$= \cos\theta + \cos\alpha + i(\sin\theta + \sin\alpha) \xrightarrow[\text{به ضرب}]{\text{فرمول تبدیل}} 2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}$

$+ i\left(2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\theta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\theta+\alpha}{2} + i(\sin\frac{\theta+\alpha}{2})\right)$

$= 2\cos\frac{\theta-\alpha}{2}\left(e^{i\frac{\theta+\alpha}{2}}\right) \Rightarrow tg\frac{\theta+\alpha}{2} = \frac{\sin\theta+\sin\alpha}{\cos\theta+\cos\alpha}$

$$\Rightarrow tg\frac{3\pi}{8} = tg\frac{\pi/2+\pi/4}{2} = \frac{\sin\pi/2 + \sin\pi/4}{\cos\pi/2 + \cos\pi/4} = \frac{1+\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}+1$$

۵- اگر w, z اعداد مختلط باشند که $\left|\frac{z+\bar{w}}{\bar{z}-w}\right| = 1$ باشد نشان دهید

$(*)\ |z|^2 = z\bar{z}$

$Re(zw) = 0$

$$\left|\frac{z+\bar{w}}{\bar{z}-w}\right|^2 \text{ (توان ۲)}$$

$(*)$

$$\left(\frac{z+\bar{w}}{\bar{z}-w}\right)\left(\frac{\bar{z}+w}{z-\bar{w}}\right) = 1 \Rightarrow \frac{z\bar{z}+zw+\bar{w}\bar{z}+\bar{w}w}{z\bar{z}-\bar{z}\bar{w}-zw+w\bar{w}} = 1$$

$$\cancel{z\bar{z}} - \bar{z}\bar{w} - zw + \cancel{w\bar{w}} = \cancel{z\bar{z}} + zw + \bar{w}\bar{z} + \cancel{\bar{w}w}$$

$$2(zw + \bar{z}\bar{w}) = 0$$

$$\Rightarrow Re(zw) = 0$$

ادبی‌مشت

/ /

۶- تمام اعداد مختلط متمایز z را بیابید که در معادله زیر صدق کنند.

$$|z|^2 z^3 - \bar{z} = 0$$

حالت ۱ ← $z = 0$

حالت ۲ ← $z \neq 0$

$$|z|^2 z^4 - |z|^2 = 0 \xrightarrow[\text{چون}]{|z| \neq 0} z^4 = 1 \overset{(*)}{=} e^{i 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$(*)$ $r = 1$ ، $\theta = 0$

$$\Rightarrow z = e^{i k\pi/2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad k = 0, 1, 2, 3 \text{ متمایز}$$

ها تا جواب

۷- تمام اعداد مختلط α، β را بیابید که $|\alpha| = |\beta| = 1$ ، $\alpha + \beta = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = x + iy \\ \beta = a + ib \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta = x + a + i(y + b) = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + a = -1 \\ y + b = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{array}{l} |\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ |\beta| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

$$x + a = -1 \rightarrow 2a = -1 \rightarrow a = -1/2 \Rightarrow x = -1/2$$

$$1/4 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 3/4 \longrightarrow y = \pm\sqrt{3}/2$$

$$y + b = 0 \longrightarrow b = \pm\sqrt{3}/2$$

/ /

۸- اگر z_1, z_2, z_3 ، ۳ عدد مختلط باشند که $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ و $z_1+z_2+z_3=0$ آن‌گاه

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$$

$$z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow \frac{|z_1|^2}{\bar{z}_1}+\frac{|z_2|^2}{\bar{z}_2}+\frac{|z_3|^2}{\bar{z}_3}=0$$

$$\Rightarrow \overset{\neq 0}{|z_1|^2}\left(\frac{1}{\bar{z}_1}+\frac{1}{\bar{z}_2}+\frac{1}{\bar{z}_3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{z_2z_3}+\overline{z_1z_3}+\overline{z_1z_2}}{\overline{z_1z_2z_3}}=0 \Rightarrow \overline{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}=0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow (z_1+z_2+z_3)^2=0 \Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2\underbrace{(*)}_{0}=0$$

۹_ فرض کنید z عددی مختلط باشد به طوریکه $\pi/2 < \arg z < 2\pi/3$ باشد.
اگر $z^3 + \frac{1}{z^3} = \sqrt{3}$ ، مقدار $z^2 + \frac{1}{z^2}$ را محاسبه کنید.

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \sqrt{3} \Longrightarrow z^6 + 1 = \sqrt{3}\, z^3 \qquad z^3 = w$$

$$w^2 - \sqrt{3}\, w + 1 = 0 \longrightarrow w = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

$$\Longrightarrow r = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1 \ , \ \tan\theta = \frac{\pm 1/2}{\sqrt{3}/2} = \pm\sqrt{3}/3$$

$$\Longrightarrow z^3 = e^{\pm i\pi/6 + 2k\pi} \xrightarrow{\text{دموآور}} z = e^{\pm i\pi/18 + \frac{2k\pi}{3}}$$

فرض $\Leftarrow$ تنها z قابل قبول برابر است با $z = e^{-i\pi/18 + 2\pi/3}$.

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \underbrace{e^{i(-\pi/9) + \frac{4\pi}{3}}}_{z} + \underbrace{e^{i(\pi/9 + 4\pi/3)}}_{\bar z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

۱۰- معادله $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. اگر $z_1 \dots z_6$ ریشه های معادله باشند، آنگاه مقادیر $\mathrm{Im}(z_1 \dots z_6)$ و $\mathrm{Im}(z_1 + \dots + z_6)$ را بیابید.

$$z^6 - 7z^3 - 8 = 0 \longrightarrow (z^3+1)(z^3-8) = 0$$

$$\longrightarrow z^3 = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)} \Longrightarrow z = e^{i(\pi/3 + 2k\pi/3)} \quad k=0,1,2$$

$$\longrightarrow z^3 = 8 = 8e^{i(2k\pi)} \Longrightarrow z = 2\, e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad k=0,1,2$$

$$z_1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2 \qquad z_2 = -1 \qquad z_3 = \frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2$$

$$z_4 = 2(1) \qquad z_5 = 2(-1/2 + i\sqrt{3}/2) \qquad z_6 = 2(-1/2 - i\sqrt{3}/2)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Im}(z_1 + z_2 + \dots + z_6) = \sqrt{3}/2 + 0 - \sqrt{3}/2 + 2\sqrt{3}/2 - 2\sqrt{3}/2 + 0 = 0$$

$$(z_1 \dots z_6) = 8\, e^{i(0 + 2\pi/3 + 4\pi/3 + \pi/3 + \frac{3\pi}{3} + \frac{5\pi}{3})}$$

$$= 8 e^{i\frac{15\pi}{3}} = 8 e^{i5\pi}$$

$$\mathrm{Im}(z_1 \dots z_6) = 0.$$

/ /

۱۱ـ فرض کنید $k>0$ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 رابطه زیر برقرار است.

$$|z_1-z_2|^2 \leq (1+k)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{k}\right)|z_2|^2$$

$$|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1\bar{z}_2)$$

$$\leq |z_1|^2+|z_2|^2+2\sqrt{|z_1|^2\underbrace{|\bar{z}_2|^2}_{|z_2|^2}} \qquad Re(z)\leq\sqrt{|z|^2}$$

$$\leq |z_1|^2+|z_2|^2+2\sqrt{k|z_1|^2\frac{1}{k}|z_2|^2}$$

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$$

$$\leq |z_1|^2+|z_2|^2+k|z_1|^2+\frac{1}{k}|z_2|^2$$

۱۲ـ فرض کنید z_1, z_2, z_3 سه عدد مختلط هستند که در رابطه‌ی $|z_1|=|z_2+z_3|$ و $|z_2|=|z_1+z_3|$ و $|z_3|=|z_1+z_2|$ صدق می‌کنند. نشان دهید

$$z_1+z_2+z_3=0$$

$$|z_1|^2=|z_2+z_3|^2=|z_2|^2+|z_3|^2+2Re(\bar{z}_2z_3)$$

$$|z_2|^2=|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_3|^2+2Re(\bar{z}_1z_3)$$

$$|z_3|^2=|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(\bar{z}_1z_2)$$

$$\Rightarrow |z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+\cdots=|z_1+z_2+z_3|^2=0$$

$$\Longrightarrow z_1+z_2+z_3=0$$

۱۳- نشان دهید دو عدد مختلط ناصفر z_1 و z_2 اندازه یکسان دارند اگر و تنها اگر اعداد مختلط c_1 , c_2 موجود باشند به طوری که

$$z_2 = c_1\overline{c_2} \quad , \quad z_1 = c_1 c_2$$

⟸) ابتدا فرض کنیم که اعداد c_1 و c_2 موجودند که

$$z_1 = c_1 c_2 \quad , \quad z_2 = c_1\overline{c_2}$$

در این صورت واضح است که

$$|z_1| = |c_1||c_2| \quad , \quad |z_2| = |c_1||\overline{c_2}| = |c_1||c_2| .$$

⟹) فرض کنیم $|z_1| = |z_2|$ است پس داریم:

$$z_1 = r e^{i\theta_1} \quad , \quad z_2 = r e^{i\theta_2}$$

حال اعداد c_1 , c_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_1 = r e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \quad , \quad c_2 = e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}$$

در این صورت:

$$c_1 c_2 = r e^{i\theta_1} = z_1$$

و همچنین

$$c_1\overline{c_2} = r e^{i\theta_2} = z_2 \quad \blacksquare$$

۱۴- اگر داشته باشیم $q \in \mathbb{R}$ ، $q(1+i) = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1+3i)}$

الف) مقدار q را بیابید.

ب) مقدار $\operatorname{arctg} 3$ _ $\operatorname{arctg} 2$ + $\operatorname{arctg} 4/3$ را برحسب π بنویسید

الف)
$$q(1+i) = \frac{\overset{-5+10i}{3+6i+4i-8}}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{-5+10i+15i+30}{10}$$

$$= \frac{25+25i}{10} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}}(1+i)}{\cancel{10}\,2} = 5/2(1+i) = q(1+i)$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 5/2}$$

ب)
$$z_1 = 3+4i \Rightarrow r = \sqrt{9+16} = 5 \qquad tg\theta_1 = \frac{4}{3}$$

$$z_1 = 5e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = 1+2i \Rightarrow r = \sqrt{5} \qquad tg\theta_2 = 2 \qquad z_2 = \sqrt{5}e^{i\theta_2}$$

$$z_3 = (1+3i) \Rightarrow r = \sqrt{10} \qquad tg\theta_3 = 3 \qquad z_3 = \sqrt{10}e^{i\theta_3}$$

$$\Rightarrow \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1+3i)} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{10}} e^{i(\theta_1+\theta_2-\theta_3)} = \frac{5}{2}\underbrace{(1+i)}_{r=\sqrt{2}\quad \theta=\pi/4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\cancel{\sqrt{2}}} e^{i(\theta_1+\theta_2-\theta_3)} = \frac{5}{2} \times \cancel{\sqrt{2}}\, e^{i\pi/4}$$

$$\Rightarrow \theta_1+\theta_2-\theta_3 = \operatorname{arctg} 4/3 + \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 3 = \pi/4$$

Scanned with CamScanner

/ /

۱۵- با توجه به این که $z=i$ ریشه معادله $z^4+2z^3+3z^2+2z+2=0$ است، ریشه های دیگر آن را بیابید.

چون $z=i$ جواب معادله است، $\bar{z}=-i$ نیز یک جواب است.

$$f(z)=(z-i)(z+i)(Az^2+Bz+C)$$
$$=z^4+2z^3+3z^2+2$$

$$\Rightarrow Az^4=z^4 \Rightarrow A=1$$
$$\Rightarrow Bz^3=2z^3 \Rightarrow B=2$$
$$\Rightarrow (\underset{1}{A}+C)z^2=3z^2 \Rightarrow C=2$$

$$(z^2+1)(z^2+2z+2)=z^4+2z^3+3z^2+2z+2$$

$$\Rightarrow z=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$$

$z_1=i \quad z_2=-i \quad z_3=-1+i \quad z_4=-1-i$