گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی- سری سوم
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

نیمسال اول ۹۹-۹۸
تهیه و تنظیم:مهری رشیدی

تدریس‌یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود بپردازید.

۱. فرض کنید f تابعی دوبار مشتق پذیر در $x=a$ باشد. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

۲. (آدامز) فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2 sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

آ) نشان دهید که $f'(0)=1$.

ب) نشان دهید که هر بازه‌ی حاوی $x=0$ حاوی x هایی نیز هستند به طوریکه $f'(x)<0$ و از این رو f بر این نوع بازه ها نمی‌تواند صعودی باشد.

۳. فرض کنید ریشه های چندجمله ای $p(x)$ از درجه $n\geq 2$ ، n عدد حقیقی متمایز هستند. ثابت کنید تمام ریشه های $p'(x)$ نیز حقیقی اند.

۴. (آدامز)اگر $f''(x)$ بر بازه ای مانند I وجود داشته باشد و f حداقل در سه نقطه متمایز I صفر شود، ثابت کنید که f'' حداقل در یک نقطه I صفر می شود.

۵. فرض کنید $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و برای هر $x,t\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(x)-f(t)|\leq|x-t|^{1+\alpha}$ که $\alpha>0$. ثابت کنید $f(x)$ تابع ثابت است.

۶. (آدامز) فرض کنید f بر بازه‌ای مانند I دو بار مشتق‌پذیر باشد (یعنی f'' بر I وجود داشته باشد)، نقاط 0 و 2 متعلق به I باشند و $f(0)=f(1)=0$ و $f(2)=1$ ثابت کنید که:

آ) به ازای نقطه‌ای مانند a متعلق به I داریم $f'(a)=\frac{1}{2}$.

ب) به ازای نقطه‌ای مانند b متعلق به I داریم $f''(a)>\frac{1}{2}$.

پ) به ازای نقطه‌ای مانند c متعلق به I داریم $f'(c)=\frac{1}{7}$.

۷. نشان دهید که معادله $x^{2n+1}+ax+b=0$ برای $a>0, n\in N$ فقط یک جواب دارد.

۸. نامساوی های زیر را ثابت کنید:

$$(a)\qquad \cos x > 1-\frac{x^2}{2};\qquad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

$$(b)\qquad |\sin a-\sin b| \ \le\ |b-a|;\qquad \forall a,b\in R.$$

$$(c)\qquad x+\frac{x^3}{3}\le \tan x;\qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

۹. فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته و ناصفر بوده و روی $(0,1)$ مشتق پذیر باشد. اگر $f(0)=1, f(1)=2$ نشان دهید معادله $(f(x))^2-2f'(x)=0$ در فاصله $(0,1)$ دارای یک ریشه است.

۱۰. فرض کنید $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ و $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$. اگر $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ ثابت کنید $p(x)$ دارای ریشه ای در $(0,1)$ است.
(راهنمایی: از تابع $f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+...+a_nx$ استفاده کنید.)

۱۱. فرض کنید $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته بوده و روی $(-1,1)$ سه بار مشتق پذیر باشد و داشته باشیم $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. ثابت کنید $c\in(-1,1)$ وجود دارد بطوریکه $f'''(c)=3$.

۱۲. فرض کنید $f(x),g(x)$ دو تابع مشتق پذیر روی $\mathbb{R}$ باشند و برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)\neq 0$. ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی از $f(x)$ دقیقا یک ریشه از $g(x)$ قرار دارد.

۱۳. فرض کنید $a>0$ و f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر باشد. ثابت کنید $c\in(a,b)$ وجود دارد بطوریکه :

$$\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(c)-cf'(c)$$

۱۴. فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده و $f(0)=0$ و $f(1)=1$. نشان دهید برای عدد طبیعی n، اعداد متمایز $x_1,\ldots,x_n$ در بازه‌ی $(0,1)$ وجود دارند که

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(x_i)}=n.$$