



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹-۹۸
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی - سری اول دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تدریس یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود پردازید.

۱. عبارت های زیر را ساده کنید.

$$(a) \frac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \frac{3-i}{1+i},$$

$$(b) 2i(i-1) + (\sqrt{3}+i)^3 + (1+i)(1+i).$$

۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در معادلات زیر صدق می کنند.

$$(a) \operatorname{Re}(z(1+i)) + z\bar{z} = 0,$$

$$(b) \operatorname{Re}(z^2) + i\operatorname{Im}(\bar{z}(1+2i)) = -3,$$

$$(c) \operatorname{Im}((2-i)z) = 1.$$

۳. روابط زیر را ثابت کنید.

$$(a) |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|,$$

$$(b) |z_1 - z_2| = |1 - \bar{z}_1 z_2| \Leftrightarrow |z_1| = 1, |z_2| = 1,$$

$$(c) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

۴. فرض کنید z_1, z_2 دو عدد مختلط باشند بطوریکه $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. در اینصورت اگر $\theta_1 \in \arg(z_1), \theta_2 \in \arg(z_2)$ نشان دهید $\theta_1 - \theta_2$ مضربی از 2π است.

۵. اگر z_1, z_2, z_3 اعداد مختلطی باشند که

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = 1$$

مقدار $|z_1 + z_2 + z_3|$ را محاسبه کنید.

۶. مقدار k را طوری بیابید که برای دو عدد مختلط z_1, z_2 داشته باشیم:

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = k(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹-۹۸
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی - سری اول
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۷. معادلات زیر را در مجموعه اعداد مختلط حل کنید.

$$(A) \bar{z}^2 = z^4,$$

$$(B) z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

۸. اگر z_1, z_2 در رابطه $Arg(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$, $z + \bar{z} = 2|z - 1|$ صدق کنند، در اینصورت مقدار $Im(z_1 + z_2)$ را محاسبه کنید.

۹. نشان دهید که اگر $|z| = 1$ آنگاه برای هر دو عدد مختلط a, b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد داریم:

$$\left| \frac{az + b}{bz + a} \right| = 1.$$

۱۰. معادله $(x + i)^n - (x - i)^n = 0$ را حل کنید که در آن x عدد حقیقی است.

۱۱. معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $1 + i, 2i, 1 - i$ می گذرد.

۱۲. اگر $z = x + iy$ یک عدد مختلط باشد و $1 + z^2 \neq 0$, $y \neq 0$ و $w = \frac{z}{1 + z^2}$ حقیقی باشد آنگاه $|z| = 1$.

۱۳. فرض کنید z, w دو عدد مختلط باشند ثابت کنید:

$$|z + w|^2 - |z - \bar{w}|^2 = 4\operatorname{Re}z\operatorname{Re}w.$$

۱۴. عدد مختلط z در معادله $z^2 = 3 + 4i$ صدق می کند. مقادیر z^3, z را بیابید. سپس همه ریشه های معادله $w^6 + 4w^3 - 125 = 0, w \in \mathbb{C}$ را بیابید.

۱۵. اگر $z = (\cos \theta + i \sin \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ نشان دهید:

$$\frac{2}{1 + z} = 1 - i \tan \frac{\theta}{2}$$

۱۶. اگر داشته باشیم $\frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 + 3i)} = q(1 + i), q \in \mathbb{R}$ الف) مقدار q را بیابید.

ب) مقدار $3 - \arctan 2 + \arctan \frac{4}{3}$ را بر حسب π بنویسید.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹-۹۸
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی - سری اول
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۱۷. نشان دهید

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin((n+1)\theta/2) \sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

۱۸. اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = -1$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

۱۹. نشان دهید $z = (a + bi)^n + (b + ai)^n$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, یک عدد حقیقی است.

تمرینات چالشی

۲۰. فرض کنید z_1, z_2 دو عدد مختلط باشند بطوریکه $|z_1| = |z_2| = r \neq 0$ نشان دهید $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ موهومی محض است.

۲۱. الف) فرض کنید عدد مختلط z در رابطه $(z + i)^n = (4 + 3i)(1 + iz)^n, n \in \mathbb{R}$ صدق کند. نشان دهید که z یک عدد حقیقی است.

ب) فرض کنید اعداد مختلط z, w در رابطه $|z| = |w| = 1$ صدق کنند. نشان دهید که $\frac{z+w}{1+zw}$ یک عدد حقیقی است.

۲۲. فرض کنید عدد مختلط z در رابطه $z + 1 + 8i = |z|(1 + i)$ صدق کند. نشان دهید که رابطه $|z|^2 - 18|z| + 65 = 0$ برقرار است و ریشه های معادله را بیابید.

۲۳. الف) فرض کنید اعداد $z = \frac{1+i}{1-i}, w = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ داده شده باشند. اندازه و آرگومان z, w را محاسبه کنید.
ب) متوازی الاضلاعی با رئوس $z, z+w, w$ و مبدا مختصات را رسم کنید. با استفاده از اندازه $z+w$ نشان دهید

$$\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

۲۴. الف) فرض کنید f چندجمله ای با ضرایب حقیقی باشد. نشان دهید اگر z ریشه f باشد، \bar{z} نیز ریشه f است.

ب) معادله درجه سه زیر را حل کنید. نشان دهید همه ریشه های معادله مختلط هستند.

$$z^3 - (1 + 4i)z^2 - 3(1 - 3i)z + 14 - 2i = 0$$



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۸-۹۹
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی - سری اول
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

سوالات ماهانه اول نیمسال اول ۹۸-۹۷

۲۵. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در معادله زیر صدق کنند.

$$\operatorname{Re}\left(2i + \frac{1}{1+z}\right) + \operatorname{Im}\left(1 + i + \frac{1}{1+z}\right) = 1$$

۲۶. اگر اعداد مختلط z_1, z_2, \dots, z_n طوری باشند که $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ ، ثابت کنید w عددی حقیقی است.

$$w = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \dots (z_1 + z_n)}{z_1 z_2 \dots z_n}$$