

آمار و احتمال مهندسی

فصل: احتمال

مدرس: مشکانی

احتمال و آزمایش

- در احتمال با یک اقدام یا دنباله‌ای از اقدام‌های متوالی برای اجرای آزمایشی که نتیجه آن از قبل معلوم نیست، سر و کار داریم.
- "آزمایش" به معنی عام ممکن است فرآیندهای ساده مانند اندازه‌گیری مشخصات قطعه‌ای ساخته شده باشد؛ یا عملیاتی پیچیده مانند سنجش تأثیر افزودنی‌های خاص بر مقاومت یک آلیاژ.
- معمولاً ما برای یافتن پاسخ درباره ناسناخته‌ها اقدام به تجربه یا آزمایش می‌کنیم.
- "آزمایش" مجموعه اقدامات و عملیاتی است که برای کشف امری ناسناخته توسط آزمایشگر صورت می‌گیرد.
- در مسائل علمی اغلب اوقات با آزمایش‌هایی مواجه می‌شویم که اگر تحت شرایط مشابهی تکرار شوند، نتایج مختلفی را به دست می‌دهند که نشان‌گر یک عامل اتفاقی در نتیجه آزمایش است.

تعاریف اولیه

- **برآمد:** هر آزمایش پس از اجرا به نتیجه‌ای می‌انجامد که به آن برآمد گویند.
- **آزمایش تصادفی:** آزمایشی است که نتیجه آن بر حسب تصادف یکی از چند برآمد ممکن است، اما از پیش نمی‌توان گفت که کدام برآمد رخ می‌دهد.
- **فضای نمونه:** مجموعه تمام نتایج (برآمدهای) ممکن یک آزمایش تصادفی است. آن را با نماد S نشان می‌دهند.

مثال ۱

- برای آزمایش‌های زیر فضای نمونه را بنویسید.

الف- پرتاب یک سکه

$$S = \{H, T\}$$

ب- پرتاب دو سکه

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ج- تعداد خال‌ها در پرتاب دو تاس

$$S = \{(1,1)(1,2)(1,3)\dots(6,4)(6,5)(6,6)\}$$

مثال ۱

د- پرتاب یک سکه و سپس یک تاس

$$S = \{(H, 1)(H, 2) \dots (H, 6)(T, 1)(T, 2) \dots (T, 6)\}$$

ه- پرتاب متوالی یک سکه تا مشاهده یک شیر

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \dots\}$$

و- اندازه‌گیری طول عمر یک لامپ (اگر طول عمر حداکثر ۱۰۰۰۰ ساعت باشد)

$$S = [0, 10000]$$

دسته‌بندی فضای نمونه

۱- فضای نمونه گسسته

○ تعداد اعضای آن شمارش‌پذیر است.

- الف- متناهی (تعداد اعضای آن متناهی است) - مثال قسمت ۱ الف، ب، ج، د
- ب- نامتناهی و شمارش‌پذیر - مثال ۱ قسمت هـ

۲- فضای نمونه پیوسته

○ اعضای آن به صورت یک فاصله از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای دو بعدی یا ... است. - مثال ۱ قسمت و

پیشامد

- **تعریف:** هر زیر مجموعه مناسب از فضای نمونه را یک پیشامد گویند و آن را با حروف بزرگ لاتین نمایش می‌دهند.
- **رخداد پیشامد:** هر پیشامد زمانی رخ می‌دهد که یکی از برآمدهای متعلق به زیر مجموعه‌ی برآمدهایش رخ دهد.
- S پیشامدی حتمی است که در هر آزمایش حتما رخ می‌دهد.
- \emptyset پیشامدی ناممکن است که هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

روابط بین پیشامدها

- \bar{A} یا A' پیشامدی شامل همه‌ی برآمدهایی است که در A نیستند.
- اجتماع دو پیشامد به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد است. (یا) \cup
- اشتراک دو پیشامد به معنای وقوع همزمان هر دو پیشامد است. (و) \cap
- اگر A و B دارای اشتراک تهی باشند، به معنی آن است که هیچ عضوی وجود ندارد که در هر دو پیشامد باشد. بنابراین هیچ‌گاه آن دو نمی‌توانند با هم رخ دهند. اگر یکی رخ دهد دیگری نمی‌تواند اتفاق بیفتد. چنین پیشامدهایی را "متقابلاً ناسازگار" یا "مجزا" گویند.
- وقوع $A-B$ به معنای وقوع "فقط A و نه B " است.

روابط بین پیشامدها

- قانون توزیع پذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- قانون دمورگان

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

قواعد شمارش

- روش مستقیم برای تعیین تعداد عضوهای یک مجموعه فهرست کردن و شمارش آنهاست.
- زمانی که تعداد اعضای مجموعه زیاد باشد، این روش عملی و امکان پذیر نیست.
- **موضوع آنالیز ترکیبی:** یافتن روش مناسب برای تعیین تعداد عضوهای یک مجموعه

قاعده ضرب (اصل اساسی شمارش)

- فرض کنید n عمل به صورت پی‌درپی انجام شود.
- اگر اولین عمل را بتوان به یکی از m_1 راه متمایز انجام داد، برای هر راه انجام عمل اول، عمل دوم را بتوان به یکی از m_2 راه متمایز انجام داد و الی آخر...
- یعنی برای هر $i = 2, 3, \dots, n$ تعداد راه‌های انجام i -امین عمل m_i بستگی به راه انجام $i-1$ عمل قبلی نداشته باشد، در آن صورت n عمل مزبور با هم را به $m_1 m_2 \dots m_n$ راه متمایز می‌توان انجام داد.

مثال ۲

- تحت هر یک از شرایط زیر، تعداد اعداد سه رقمی که با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ می‌توان ساخت، تعیین کنید:

الف- بدون تکرار ارقام

$$\underline{5} \times \underline{5} \times \underline{4}$$

ب- فرد و بدون تکرار ارقام

$$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3}$$

ج- بزرگ‌تر از ۳۳۰ و بدون تکرار ارقام

$$\underline{1} \times \underline{2} \times \underline{4} + \underline{2} \times \underline{5} \times \underline{4}$$

مثال ۳

- اعضای شورای دانشجویی یک دانشگاه متشکل از ۳ دانشجوی سال اول، ۴ دانشجوی سال دوم، ۵ دانشجوی سال سوم و ۲ دانشجوی سال چهارم هستند. اگر بخواهیم یک شورای فرعی چهار نفری که دانشجویان سال‌های مختلف در آن هستند تشکیل دهیم، چند شورای فرعی می‌توان انتخاب کرد؟

• راه حل:

$$\underline{3} \times \underline{4} \times \underline{5} \times \underline{2}$$

مثال ۴

- به چند طریق می‌توان از بین ۴ دانشجوی کامپیوتر و ۵ دانشجوی ریاضی، دو دانشجو را انتخاب کرد به طوری که نفر اول به عنوان سرگروه و نفر دوم به عنوان دستیار باشد و هر دو از یک رشته باشند؟

• راه حل:

$$\left(\underline{4} \times \underline{3} \right) + \left(\underline{5} \times \underline{4} \right)$$

جایگشت

- اگر n شیء مختلف داشته باشیم، می‌توانیم این اشیاء را به صورت‌های مختلف آرایش دهیم.
- هر آرایش یک جایگشت نامیده می‌شود.
- اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، تعداد جایگشت‌ها برابر $n!$ خواهد بود.

مثال ۵

- یک کلاس نظریه احتمال شامل ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر است. پس از برگزاری یک امتحان نمرات آنها مرتب می‌شوند. با فرض این که هیچ دو دانشجویی نمره یکسان کسب نکنند. چند حالت ممکن برای مرتب کردن نمرات وجود دارد؟

• راه حل:

۱۰!

مثال ۶

- شخصی ۱۰ کتاب دارد و می‌خواهد آن‌ها را در قفسه کتابخانه خود قرار دهد. از ۱۰ کتاب، تعداد ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب شیمی، ۲ کتاب تاریخ و یک کتاب زبان است. اگر این شخص بخواهد کتاب‌های با موضوع یکسان را کنار هم قرار دهد، چند ترتیب ممکن برای قرار دادن کتاب‌ها وجود دارد؟
* احتمال پیشامد خواسته شده چه قدر است؟

• راه حل:

$$n(A) = (4! \times 3! \times 2! \times 1!) \times 4!$$

$$P(A) = \frac{(4! \times 3! \times 2! \times 1!) \times 4!}{10!}$$

مثال ۷

- چهار پزشک و پنج مهندس می‌خواهند در یک صف کنار یکدیگر قرار گیرند. مطلوبست تعداد حالاتی که:

الف- مهندس‌ها در یک طرف صف و پزشک‌ها در طرف دیگر صف قرار گیرند.

$$2! \times (5! \times 4!)$$

ب- پزشک‌ها و مهندس‌ها یک در میان در صف قرار گیرند.

$$(5! \times 4!)$$

ج- دو مهندس بخصوص همواره کنار یکدیگر قرار گیرند.

$$2! \times 8!$$

د- دو مهندس بخصوص هیچگاه کنار یکدیگر قرار نگیرند.

$$9! - 2! \times 8!$$

مثال ۸

- یک دست ورق ۵۲ تایی کامل بر زده شده است. در چه تعدادی از حالات ۴ تا آس پشت سر هم قرار می گیرند؟

• راه حل:

$$n(A) = 49! \times 4!$$

قاعده‌ی تعداد جایگشت‌های متمایز

- تعداد جایگشت‌های n شیء که n_1 تای آنها مثل هم، n_2 تا از آنها مثل هم و ... و n_r تای آنها مثل هم هستند، برابر است با

$$\frac{n!}{n_1! \, n_2! \, \dots \, n_r!}$$

مثال ۹

- الف- چند ترتیب متفاوت از حروف کلمه statistics می توان نوشت؟
- ب- در چه تعداد از این کلمه ها هر سه حرف t پشت سر هم هستند؟

• راه حل:

$$n(A) = \frac{10!}{3!3!2!}$$

$$n(B) = \frac{8!}{3!2!}$$

ترکیب و ترتیب

- اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم از این n شیء فقط r شیء را **بدون جایگذاری** انتخاب کنیم، به طوری که
- الف- اگر ترتیب انتخاب r شیء مهم نباشد، تعداد نمونه‌ها برابر است با

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- ب- اگر ترتیب انتخاب r شیء مهم باشد، برابر است با

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)$$

مثال ۱۰

- می‌خواهیم از میان یک گروه ۲۰ نفری یک شورای سه نفره تشکیل دهیم. به چند حالت مختلف این کار امکان‌پذیر است؟

• راه‌حل:

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3!} = 1140.$$

مثال ۱۱

- الف- از یک گروه متشکل از ۵ زن و ۷ مرد چند شورای مختلف ۵ عضوی شامل ۲ زن و ۳ مرد می‌توان انتخاب نمود؟
- ب- اگر دو نفر از مردها با یکدیگر خصومت داشته و نخواهند با هم در شورا انتخاب شوند، آنگاه چند شورا می‌توان انتخاب نمود؟

• راه حل:

$$\binom{5}{2} \binom{7}{3} = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{7!}{3!4!} = 10 \times 35 = 350.$$

$$\binom{5}{2} \binom{2}{0} \binom{5}{3} + \binom{5}{2} \binom{2}{1} \binom{5}{2} = (10 \times 1 \times 10) + (10 \times 2 \times 10) = 300.$$

مثال ۱۲

- می‌خواهیم از فهرست اسامی ۱۱ بازیکن فوتبال به ترتیب برای انتخاب دروازه‌بان، بک و هاف بک ۳ نام را خارج کنیم، به چند صورت این انتخاب انجام می‌شود؟

- راه حل:

$$\begin{array}{ccc} 11 & \times & 10 & \times & 9 \\ \hline & & & & \\ \text{Goaler} & & \text{Back} & & \text{HalfBack} \end{array}$$

قاعده‌ی افراز:

- اگر بخواهیم n شیء را در k طبقه پخش کنیم به طوری که i -امین طبقه، $i = 1, 2, \dots, k$ ، n_i شیء داشته باشد، که در آن $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ این عمل به

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

صورت امکان پذیر است.

مثال ۱۳

- الف- به چند روش می‌توان ۵ کتاب درسی و ۱۵ کتاب غیر درسی را بین چهار نفر به طور مساوی تقسیم کرد؟
- ب- در چند حالت هر نفر دست‌کم یک کتاب درسی دریافت می‌کند؟
- راه‌حل:

$$n(A) = \frac{20!}{5! 5! 5! 5!}$$

$$n(B) = \binom{4}{1} \times \frac{5!}{2! 1! 1! 1!} \times \frac{15!}{3! 4! 4! 4!}$$

نکته

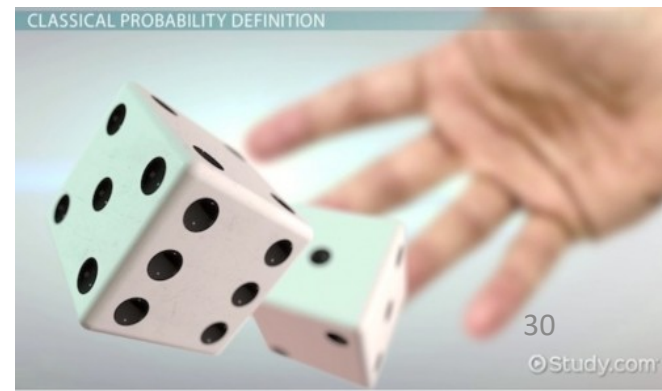
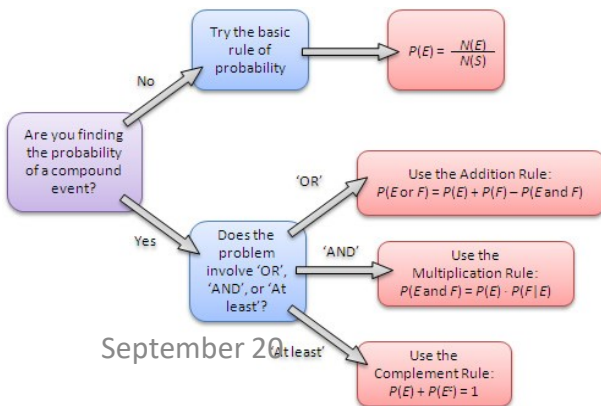
- اگر تعداد اشیاء و طبقات مساوی n باشند و در هر طبقه یک شیء قرار دهیم، این عمل به $n!$ صورت ممکن انجام پذیر است.

- ترکیب افراز n شیء در دو طبقه است.
$$\left. \begin{array}{l} r \text{ شیء در یک طبقه} \\ n-r \text{ شیء در طبقه دیگر} \end{array} \right\}$$

جدول کلی تعداد نمونه‌های r -تایی از یک مجموعه n عضوی

| مرتب | نامرتب | |
|---|--------------------|---------------|
| $\underline{n} \times \underline{n-1} \times \underline{n-2} \times \dots \times \underline{n-r+1}$ | $\binom{n}{r}$ | بدون جایگذاری |
| n^r | $\binom{n+r-1}{r}$ | با جایگذاری |

احتمال



احتمال

• تعبیر احتمال از دیدگاه فراوانی نسبی

- احتمال وقوع یک پیشامد به معنای شانس وقوع آن پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است.

فرض کنید یک آزمایش تصادفی را n مرتبه تحت شرایط یکسان تکرار کنیم و تعداد دفعاتی که در این n آزمایش پیشامد A به وقوع بپیوندد را با $f_n(A)$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین $r_n(A) = \frac{f_n(A)}{n}$ فراوانی نسبی وقوع پیشامد A است.

انتظار داریم که با زیاد شدن تعداد آزمایشات n ، $r_n(A)$ به یک عدد ثابتی نزدیک شود که این عدد ثابت را احتمال وقوع پیشامد A گوئیم و آن را با $P(A)$ نمایش

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(A)$$

می‌دهیم یعنی

احتمال

- تعبیر احتمال در فضای هم‌شانس (فضای متساوی‌الاحتمال)

اگر رخداد همه‌ی برآمدهای فضای نمونه‌ی گسسته S هم‌احتمال باشند، احتمال رخداد هر پیشامد A از این فضا برابر است با نسبت تعداد برآمدهای A به تعداد کل برآمدها

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد حالات کل}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

اصول احتمال

- مقدار عددی $P(A)$ را احتمال پیشامد A گویند.

- تابع $P(A)$ در سه اصل زیر صدق می کند:

۱- برای پیشامد حتمی S داریم: $P(S)=1$

۲- برای هر پیشامد A از فضای نمونه S داریم: $0 \leq P(A) \leq 1$

۳- اگر A_1, A_2, A_3, \dots پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، آن گاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

مثال ۱۴

• سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آوردن حداقل یک شیر را بیابید.

• راه حل:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$A = \{HH, HT, TH\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

مثال ۱۵

• یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آوردن مجموع ۷ را به دست آورید.

• راه حل:

$$S = \{(1, 1)(1, 2)(1, 3) \dots (2, 1)(2, 2) \dots (6, 4)(6, 5)(6, 6)\}$$

$$A = \{(1, 6)(2, 5)(3, 4)(4, 3)(5, 2)(6, 1)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

مثال ۱۶

- از یک دست کارت ۵۲ تایی هفت کارت را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال این که حداقل یکی از آنها شاه باشد، چه قدر است؟

• راه حل:

$$P(\text{حداقل یک شاه}) = 1 - P(\text{عدم انتخاب شاه}) = 1 - \frac{\binom{48}{7}}{\binom{52}{7}}$$

مثال ۱۷

- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است، ۶ مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال این که ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید انتخاب شود.

• راه حل:

$$P(2R, 1W) = \frac{\binom{5}{2}^B \binom{3}{1}^W \binom{4}{3}^R}{\binom{12}{6}}$$

مثال ۱۸ (فضای نامساوی)

- یک تاس به شکلی است که احتمال آوردن عدد زوج در آن دو برابر عدد فرد است. احتمال آوردن عدد بزرگ‌تر از ۳ در پرتاب این تاس را بیابید.

• راه حل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$p \quad 2p \quad p \quad 2p \quad p \quad 2p$$

$$P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) = p + 2p + p + 2p + p + 2p = 9p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{9}$$

$$A = \{4, 5, 6\}$$

$$P(A) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

احتمال در فضای نمونه‌ی پیوسته

- در یک حالت خاص، فضای نمونه‌ی پیوسته به صورت یک فاصله‌ی کران‌دار $S = [a, b]$ از اعداد حقیقی (یا یک سطح در فضای دو بعدی و ...) است.
- پیشامدها به صورت یک زیرفاصله یا اجتماعی از زیرفاصله‌ها (یا یک زیرسطح در فضای دو بعدی و ...) هستند.
- در این حالت، احتمال هر پیشامد A را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P(A) = \frac{\text{طول زیرفاصله } A}{\text{طول فاصله } S}$$

$$P(A) = \frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت ناحیه } S}$$

مثال ۱۹

- عددی را به تصادف از فاصله‌ی اعداد حقیقی $[۲, ۵]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخاب شده در فاصله‌ی $[۳, ۴/۵]$ باشد، چه قدر است؟

• راه‌حل:

$$P(A) = \frac{۴ / ۵ - ۳}{۵ - ۲} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۲۰

- از داخل دایره‌ای به شعاع R نقطه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که فاصله‌ی نقطه‌ی انتخاب شده تا مرکز دایره کمتر از فاصله‌ی آن تا محیط دایره باشد، چه قدر است؟

• راه حل:

$$P(A) = \frac{\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

چند قانون احتمال

• اگر A یک پیشامد و \bar{A} متمم آن باشد، آنگاه $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

• اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

• اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

• اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آنگاه

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال ۲۱

- شخصی که در جایگاه بنزین توقف می‌کند، بازبینی لاستیک‌های ماشین را با احتمال $0/12$ ، بازبینی روغن ماشین را با احتمال $0/29$ و بازبینی هر دو را با احتمال $0/07$ تقاضا می‌کند. مطلوبست احتمال اینکه

الف- این شخص درخواست بازبینی لاستیک **یا** روغن ماشینش را داشته باشد، بیابید.

ب- این شخص **هیچ کدام** از بازبینی‌ها را درخواست نکند، بیابید.

ج- این شخص **فقط یکی** از دو بازبینی را تقاضا کند.

راه‌حل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/12 + 0/29 - 0/07 = 0/34$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0/34 = 0/66$$

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0/12 + 0/29 - 2 \times 0/07 = 0/27$$

احتمال شرطی

احتمال شرطی

- فرض کنید به رخ دادن پیشامد B به شرط آنکه پیشامد A قبلاً رخ داده باشد، علاقمندیم. در این صورت با احتمال شرطی B به شرط آنکه A رخ داده باشد، سروکار داریم که آن را با نماد $P(B|A)$ نشان می‌دهند.
- در این وضعیت آن برآمدهایی که در A وجود دارند اهمیت پیدا می‌کنند و برآمدهای خارج از آن نقشی در رخ دادن B نخواهند داشت.
- در این حالت، در واقع A مانند فضای نمونه یک آزمایش جدید عمل می‌کند و B وقتی رخ می‌دهد که یکی از برآمدهای واقع در $A \cap B$ رخ دهد.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال ۲۲

- دو تاس سالم را پرتاب کرده و نتیجه پرتاب تاس اول که عدد ۳ است را مشاهده کرده‌ایم. احتمال این که مجموع اعداد دو تاس برابر ۸ باشد، چه قدر است؟

• راه حل:

- A: پیشامد اینکه در پرتاب تاس اول عدد ۳ ظاهر شود
- B: پیشامد اینکه مجموع پرتاب دو تاس برابر ۸ شود

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(3, 6)(3, 5)(3, 4)(3, 3)(3, 2)(3, 1)\} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 6$$

$$A \cap B = \{(3, 5)\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cap B) = 1$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

مثال ۲۳

- اطلاعات مربوط به سود خالص سالانه‌ی ۱۵۰ شرکت که در چهار صنعت مختلف فعالیت می‌کنند، در جدول زیر آورده شده است. چنانچه یکی از شرکت‌ها به تصادف انتخاب شود، مطلوبست احتمال این که شرکت انتخابی
- الف- در صنعت آلومینیوم فعالیت داشته باشد.
- ب- در صنعت نساجی بوده و سودی بیش‌تر از ۵ میلیارد داشته باشد.
- ج- در صنعت نساجی مشغول فعالیت باشد در صورتی که **بدانیم** سودی بیشتر از ۵ میلیارد دارد.

| میزان سود | کمتر یا مساوی ۵ میلیارد | بیشتر از ۵ میلیارد | جمع |
|-----------------|-------------------------|--------------------|-----|
| صنعت نساجی | ۱۷ | ۱۵ | ۳۲ |
| صنعت آلومینیوم | ۳۵ | ۳۰ | ۶۵ |
| صنعت مواد غذایی | ۲۸ | ۵ | ۳۳ |
| صنعت چوب و کاغذ | ۱۰ | ۱۰ | ۲۰ |
| جمع | ۹۰ | ۶۰ | ۱۵۰ |

مثال ۲۳

• راه حل:

A: پیشامد اینکه شرکت انتخابی در صنعت آلومینیوم باشد.

B: پیشامد اینکه شرکت انتخابی در صنعت نساجی باشد.

C: پیشامد اینکه شرکت انتخابی سودی بیشتر از ۵ میلیارد داشته باشد.

$$a. \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶۵}{۱۵۰} = ۰/۴۳$$

$$b. \quad P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(S)} = \frac{۱۵}{۱۵۰} = ۰/۱$$

$$c. \quad P(B | C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{۱۵}{۱۵۰}}{\frac{۶۰}{۱۵۰}} = ۰/۲۵$$

مثال ۲۴

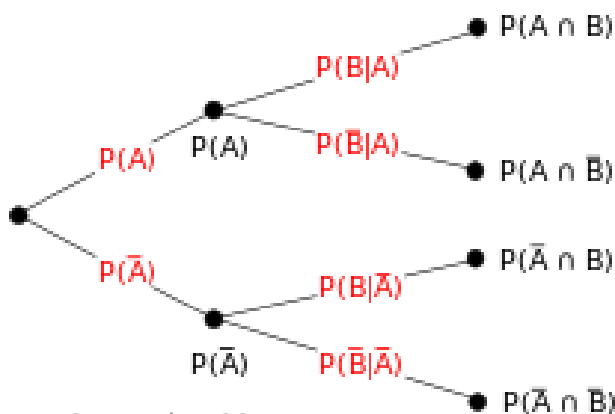
- از جعبه‌ای حاوی ۹ کارت با شماره‌های ۱ تا ۹، دو کارت را به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم که مجموع دو عدد زوج است، احتمال این که هر دو عدد فرد باشند، چه قدر است؟

• راه حل:

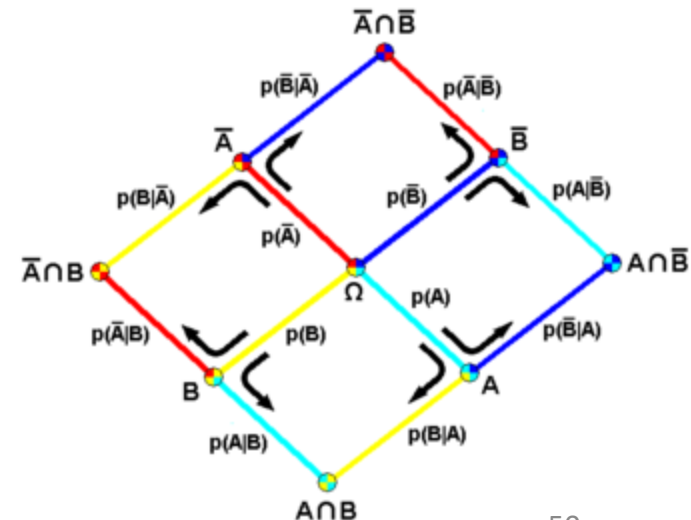
$$P(\text{مجموع زوج}) = P(\text{هر دو فرد}) + P(\text{هر دو زوج}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{10 + 6}{36}$$

$$P(\text{مجموع زوج} | \text{هر دو فرد}) = \frac{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}}{\frac{10 + 6}{36}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

قانون ضرب پذیری



September 20



$$p(A|B) \cdot p(B) = p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

قانون ضرب پذیری

- استفاده از رابطه‌ی احتمال شرطی برای محاسبه $P(A \cap B)$ مفید است. اگر طرفین رابطه‌ی احتمال شرطی را در $P(A)$ ضرب کنیم، به دست می‌آوریم:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B | A)$$

یعنی احتمال وقوع توأم پیشامدهای A و B برابر است با حاصل ضرب احتمال A در احتمال شرطی B وقتی A رخ داده است.

قانون ضرب پذیری

- قانون ضرب پذیری را برای محاسبه احتمال وقوع توأم چندین پیشامد می توان تعمیم داد.

- **قضیه:** اگر A_1, A_2, \dots, A_n پیشامدهایی باشند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) \\ = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

مثال ۲۵

• از یک دسته ورق ۵۲ تایی، دو کارت به تصادف، به ترتیب و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال این که

الف- کارت اول بی بی پیک و کارت دوم سرباز پیک باشد.

ب- کارت اول بی بی پیک و کارت دوم سرباز باشد.

ج- کارت اول بی بی پیک و کارت دوم نیز بی بی باشد.

• راه حل

$$a. \quad P(BP_1 \cap SP_2) = P(BP_1) P(SP_2 | BP_1) = \frac{1}{52} \times \frac{1}{51}$$

$$b. \quad P(BP_1 \cap S_2) = P(BP_1) P(S_2 | BP_1) = \frac{1}{52} \times \frac{4}{51}$$

$$c. \quad P(BP_1 \cap B_2) = P(BP_1) P(B_2 | BP_1) = \frac{1}{52} \times \frac{3}{51}$$

مثال ۲۶

- جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. اگر سه مهره به تصادف و بدون جایگذاری از جعبه خارج کنیم، مطلوبست احتمال این که
 الف- مهره انتخابی اول قرمز، دومی سفید و سومی قرمز باشد.
 ب- دو مهره قرمز و یک مهره سفید انتخاب شود.
 ج- هر سه مهره از یک رنگ باشند.

• راه حل:

$$a. \quad P(R_1 \cap W_2 \cap R_3) = P(R_1) P(W_2 | R_1) P(R_3 | R_1 \cap W_2) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{7}$$

$$b. \quad P(2R \cap 1W) = \frac{\binom{2}{2} \binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}$$

$$c. \quad P(3W) + P(3B) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$$

مثال ۲۷

- فرض کنید ۵ فیوز سالم و ۲ فیوز معیوب در هم شده‌اند. برای یافتن فیوزهای معیوب آنها را به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری امتحان می‌کنیم. مطلوبست احتمال این‌که

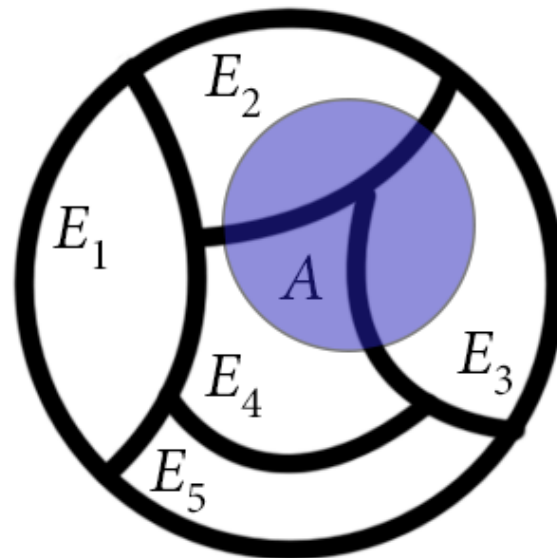
الف- هر دو فیوز معیوب را در دو امتحان اول پیدا کنیم.

ب- هر دو فیوز معیوب را دقیقاً پس از سه امتحان اول پیدا کنیم.

$$a. \quad P(M_l \cap M_r) = P(M_l) P(M_r | M_l) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} \times \frac{\binom{1}{1}}{\binom{6}{1}}$$

$$\begin{aligned} & P(M_l \cap S_r \cap M_r) + P(S_l \cap M_r \cap M_r) \\ &= P(M_l) P(S_r | M_l) P(M_r | M_l \cap S_r) + P(S_l) P(M_r | S_l) P(M_r | S_l \cap M_r) \\ &= \frac{\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} \times \frac{\binom{5}{1}}{\binom{6}{1}} \times \frac{\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} + \frac{\binom{5}{1}}{\binom{7}{1}} \times \frac{\binom{2}{1}}{\binom{6}{1}} \times \frac{\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} \end{aligned}$$

قانون احتمال كل



قانون احتمال کل

- تعریف افراز
- فرض کنید $\{B_1, \dots, B_n\}$ مجموعه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ی یک آزمایش S باشند. اگر پیشامدهای B_1, \dots, B_n دو به دو ناسازگار و $\bigcup_{i=1}^n B_i = S$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی $\{B_1, \dots, B_n\}$ را یک افراز از فضای نمونه‌ی S گویند.
- گاهی محاسبه احتمال پیشامدی مانند A مستقیماً امکان‌پذیر نیست؛ اما برای پیشامدی مانند B محاسبه احتمال‌های $P(A | B_1), \dots, P(A | B_n)$ امکان‌پذیر است.
- **قضیه:** فرض کنید $\{B_1, \dots, B_n\}$ افرازی از فضای نمونه‌ی یک آزمایش باشند. اگر برای مقادیر $P(B_i) > 0, i = 1, \dots, n$ باشد، آن‌گاه برای هر پیشامد A از فضای نمونه‌ی S داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

مثال ۲۸

- شرکت بیمه‌ای برای مشتریان خود ۳۵٪ اتومبیل‌ها را از آژانس I و ۶۵٪ اتومبیل‌ها را از آژانس II کرایه می‌کند. اگر ۸٪ اتومبیل‌های آژانس I و ۵٪ اتومبیل‌های آژانس II در طول کرایه از کار باز بمانند. احتمال این که اتومبیلی که بوسیله این شرکت بیمه کرایه شده است از کار باز بماند، چه قدر است؟

• راه حل:

- A: پیشامد اینکه اتومبیل کرایه شده خراب شود
- B1: پیشامد اینکه اتومبیل کرایه شده از آژانس I باشد
- B2: پیشامد اینکه اتومبیل کرایه شده از آژانس II باشد

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) \\ &= (0.08 \times 0.35) + (0.05 \times 0.65) \end{aligned}$$

مثال ۲۹

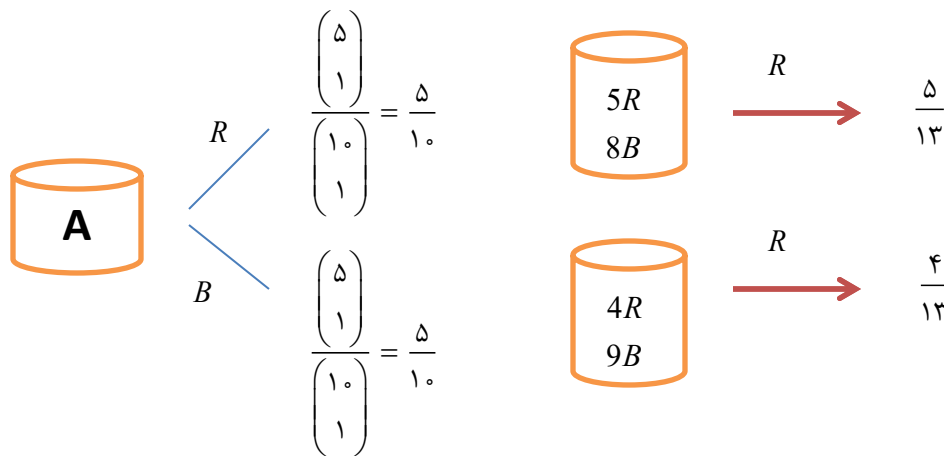
- در کارخانه‌ای کارگران در سه شیفت صبح، عصر و شب کار می‌کنند. آمار نشان می‌دهد که به ترتیب ۴۰٪، ۴۰٪ و ۲۰٪ از تولیدات توسط شیفت‌های صبح، عصر و شب تولید می‌شود و به ترتیب ۵٪، ۱۰٪ و ۲۰٪ از تولیدات شیفت‌های صبح، عصر و شب معیوب هستند. از انبار این کارخانه کالایی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال سالم بودن این کالا چه قدر است؟

- A: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده معیوب باشد
- B1: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده تولید شیفت صبح باشد
- B2: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده تولید شیفت عصر باشد
- B3: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده تولید شیفت شب باشد

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + P(A | B_3)P(B_3) \\ &= (0.5 \times 0.4) + (0.1 \times 0.4) + (0.2 \times 0.2) \\ &\Rightarrow P(\text{Salem}) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

مثال ۳۰

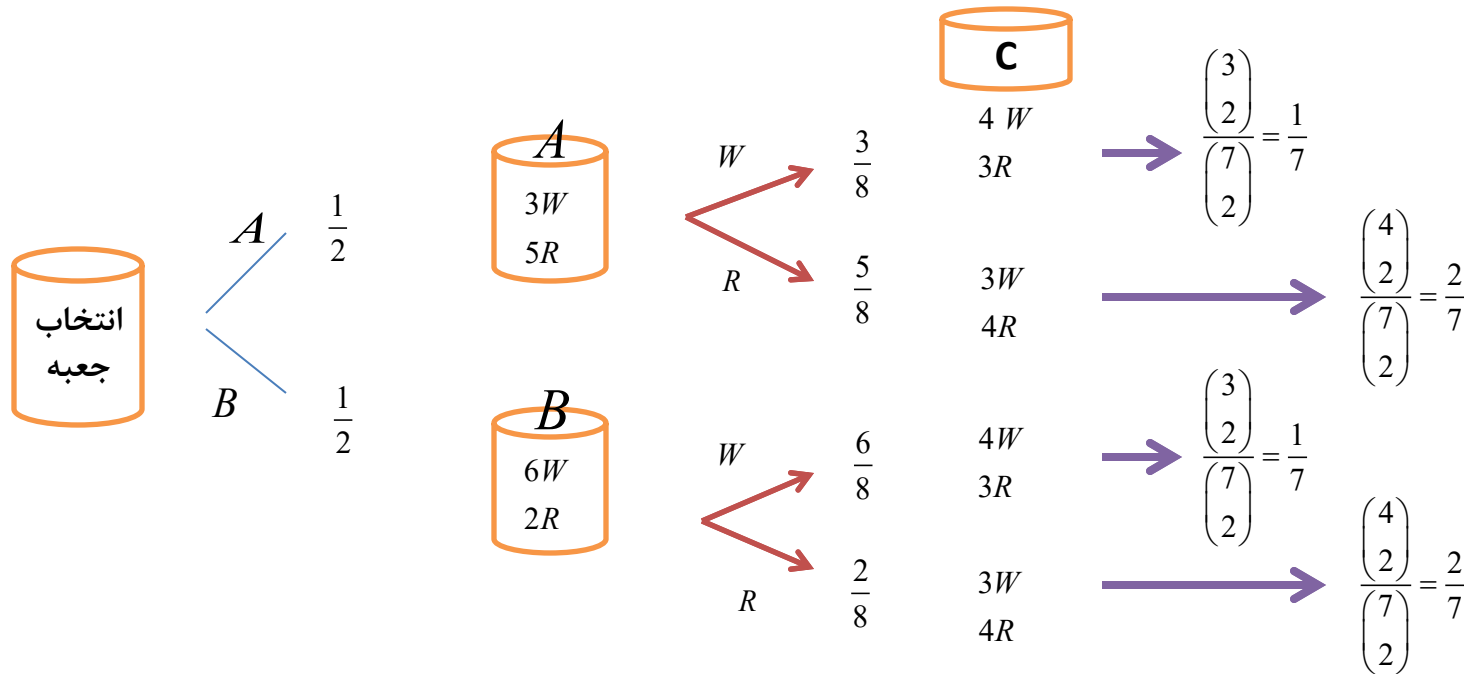
- در ظرف A ۵ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه، در ظرف B ۴ مهره قرمز و ۸ مهره سیاه وجود دارد. یک مهره از A خارج می‌کنیم و در B قرار می‌دهیم و سپس یک مهره از B خارج می‌کنیم، احتمال قرمز بودن آن چه قدر است؟



$$\begin{aligned}
 P(R_2) &= P(R_1) P(R_2 | R_1) + P(B_1) P(R_2 | B_1) \\
 &= \left(\frac{5}{10} \times \frac{5}{13} \right) + \left(\frac{5}{10} \times \frac{4}{13} \right)
 \end{aligned}$$

مثال ۳۱

- جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره قرمز و جعبه B شامل ۶ مهره سفید و ۲ مهره قرمز است. یک جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم و بدون توجه به رنگش در جعبه سوم C قرار می‌دهیم که خود شامل ۳ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. سپس از جعبه C دو مهره خارج می‌کنیم. احتمال قرمز بودن این دو مهره را بیابید.



$$P(R_C) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{7} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{8} \times \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{8} \times \frac{2}{7} \right)$$

مثال ۳۲ – الف

- در ظرفی سه نوع فلاش دوربین عکاسی وجود دارد. احتمال این که فلاش نوع ۱ بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند برابر با ۰/۷ و این احتمال برای فلاش‌های نوع ۲ و ۳ به ترتیب برابر با ۰/۴ و ۰/۳ است. فرض کنید ۲۰ درصد از فلاش‌های موجود در ظرف از نوع ۱، ۳۰ درصد از نوع ۲ و ۵۰ درصد از نوع ۳ باشد. یک فلاش از ظرف انتخاب می‌شود،
الف- مطلوبست احتمال این که فلاش انتخاب شده بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند.

- A: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند
- B1: پیشامد اینکه فلاش انتخاب شده از نوع ۱ باشد
- B2: پیشامد اینکه فلاش انتخاب شده از نوع ۲ باشد
- B3: پیشامد اینکه فلاش انتخاب شده از نوع ۳ باشد

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + P(A | B_3) P(B_3) \\ &= (0.7 \times 0.20) + (0.4 \times 0.30) + (0.3 \times 0.50) \end{aligned}$$

مثال ۳۲ - ب

- در ظرفی سه نوع فلاش دوربین عکاسی وجود دارد. احتمال این که فلاش نوع ۱ بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند برابر با ۰/۷ و این احتمال برای فلاش‌های نوع ۲ و ۳ به ترتیب برابر با ۰/۴ و ۰/۳ است. فرض کنید ۲۰ درصد از فلاش‌های موجود در ظرف از نوع ۱، ۳۰ درصد از نوع ۲ و ۵۰ درصد از نوع ۳ باشد. یک فلاش از ظرف انتخاب می‌شود،

ب- اگر فلاش انتخاب شده بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند، احتمال این که این فلاش از نوع دوم باشد، چه قدر است؟

$$\begin{aligned}
 P(B_r | A) &= \frac{P(A \cap B_r)}{P(A)} \\
 &= \frac{P(A | B_r) P(B_r)}{P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_r) P(B_r) + P(A | B_r) P(B_r)} \\
 &= \frac{0/4 \times 0/30}{(0/7 \times 0/20) + (0/4 \times 0/30) + (0/3 \times 0/50)}
 \end{aligned}$$

فرمول بیز

$$P(H|E) = \frac{P(H) * P(E|H)}{P(E)}$$

Prior Probability

Likelihood of the evidence 'E' if the Hypothesis 'H' is true

Posterior Probability of 'H' given the evidence

Prior probability that the evidence itself is true



فرمول بیز

- **قضیه:** فرض کنید $\{B_1, \dots, B_n\}$ افرازی از فضای نمونه‌ی یک آزمایش باشند. اگر برای مقادیر $P(B_i) > 0, i = 1, \dots, n$ باشد، آن گاه برای هر پیشامد A از فضای نمونه‌ی S داریم:

$$P(B_j | A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)}$$

- زمانی که عملی اتفاق افتاده باشد و نتیجه‌ی آن معلوم باشد و بخواهیم منشأ آن را پیدا کنیم، از فرمول بیز استفاده می‌شود.

مثال ۳۳

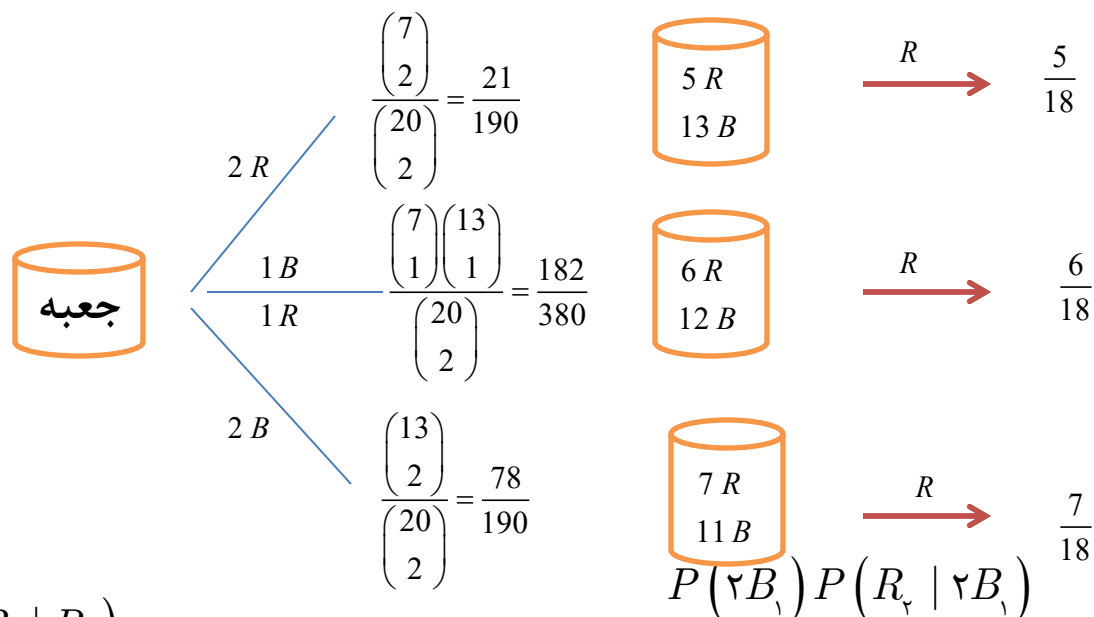
- فرض کنید ۴۰٪ افراد یک شهر را مردان و ۶۰٪ آنان را زنان تشکیل دهند. همچنین فرض کنید ۵۰٪ از مردان و ۳۰٪ از زنان سیگاری باشند. اگر شخصی از بین افراد سیگاری به تصادف انتخاب شود، احتمال این که این شخص مرد باشد، چه قدر است؟

- A: پیشامد اینکه شخص انتخاب شده سیگاری باشد.
- B1: پیشامد اینکه شخص انتخاب شده مرد باشد.
- B2: پیشامد اینکه شخص انتخاب شده زن باشد.

$$\begin{aligned} P(B_1 | A) &= \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A | B_1) P(B_1)}{P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2)} \\ &= \frac{0.50 \times 0.40}{(0.50 \times 0.40) + (0.30 \times 0.60)} \end{aligned}$$

مثال ۳۴

- جعبه‌ای شامل ۷ مهره قرمز و ۱۳ مهره آبی است. دو مهره را به تصادف خارج کرده و آنها را بدون توجه به رنگشان کنار می‌گذاریم. اگر سومین مهره‌ای که به تصادف بیرون می‌آوریم قرمز باشد، احتمال این که هر دو مهره اول آبی باشند، چه قدر است؟

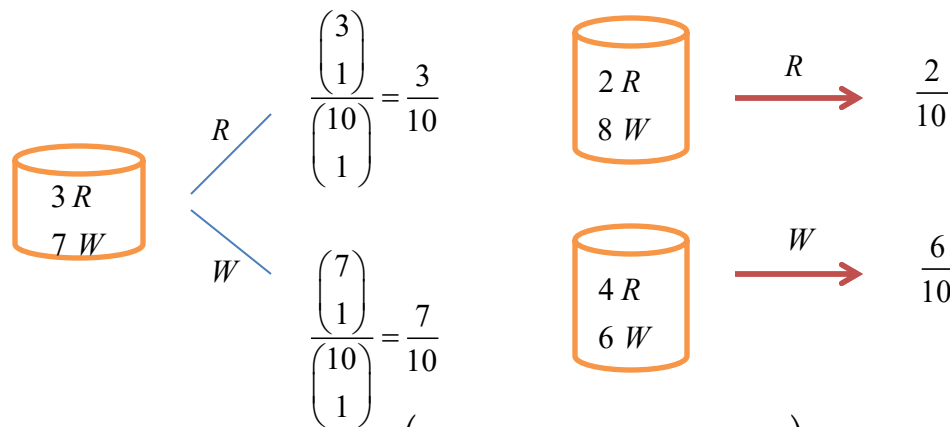


$$P(2B_1 | R_2) = \frac{P(2B_1) P(R_2 | 2B_1)}{P(2R_1) P(R_2 | 2R_1) + P(1B \& 1R) P(R_2 | 1B \& 1R) + P(2B_1) P(R_2 | 2B_1)}$$

$$= \frac{\frac{78}{190} \times \frac{7}{18}}{\left(\frac{21}{190} \times \frac{5}{18}\right) + \left(\frac{182}{380} \times \frac{6}{18}\right) + \left(\frac{78}{190} \times \frac{7}{18}\right)}$$

مثال ۳۵

- یک ظرف شامل ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. یک مهره از ظرف خارج می‌کنیم و هر رنگی که باشد مهره دیگری از رنگ مخالف آن در ظرف قرار می‌دهیم. سپس مهره دیگری از ظرف خارج می‌کنیم. اگر این مهره با مهره قبلی که به دست آمده بود هم رنگ باشد، احتمال این که هر دو سفید باشند را بیابید.

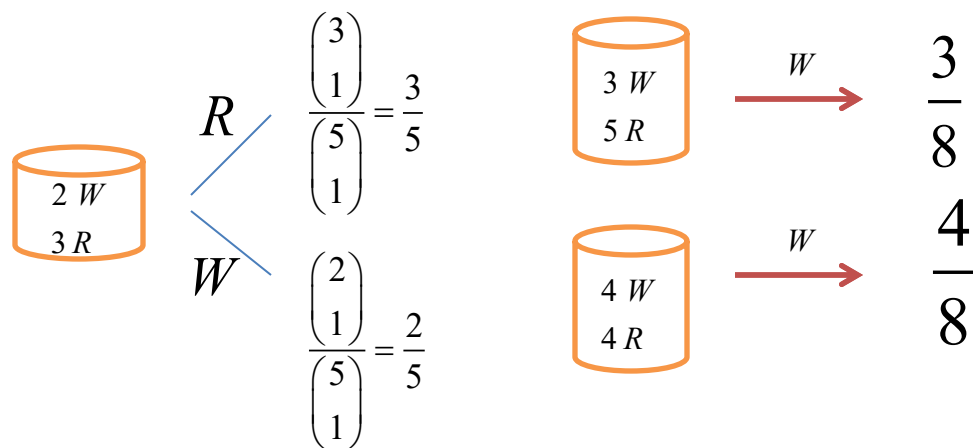


$$\begin{aligned}
 P(2 \text{ W} \mid \text{same color}) &= \frac{P(2 \text{ W} \cap \text{same color})}{P(\text{same color})} = \frac{P(W_1) P(W_2 \mid W_1)}{P(R_1) P(R_2 \mid R_1) + P(W_1) P(W_2 \mid W_1)} \\
 &= \frac{\frac{7}{10} \times \frac{6}{10}}{\left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{10}\right) + \left(\frac{7}{10} \times \frac{6}{10}\right)}
 \end{aligned}$$

مثال ۳۶

- دو جعبه وجود دارند که جعبه اول شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است و جعبه دوم شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است. از جعبه اول یک مهره با چشم بسته انتخاب کرده و به داخل جعبه دوم می‌اندازیم و سپس از جعبه دوم به تصادف یک مهره خارج می‌کنیم. مطلوب است

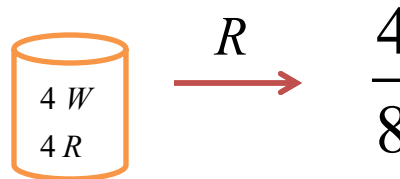
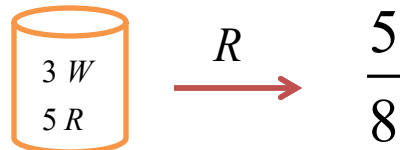
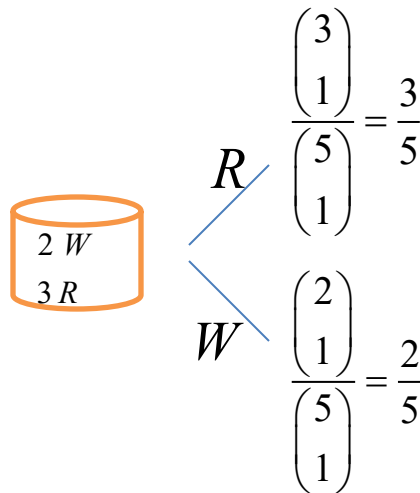
- الف- احتمال این که مهره خارج شده از جعبه دوم سفید باشد.



$$\begin{aligned}
 P(W_2) &= P(R_1) P(W_2 | R_1) + P(W_1) P(W_2 | W_1) \\
 &= \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{8} \right)
 \end{aligned}$$

مثال ۳۷

- دو جعبه وجود دارند که جعبه اول شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است و جعبه دوم شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است. از جعبه اول یک مهره با چشم بسته انتخاب کرده و به داخل جعبه دوم می‌اندازیم و سپس از جعبه دوم به تصادف یک مهره خارج می‌کنیم. **ب- اگر مهره خارج شده از جعبه دوم قرمز باشد، احتمال این که مهره خارج شده از جعبه اول سفید بوده باشد را بیابید.**



$$P(W_1 | R_2) = \frac{P(W_1) P(R_2 | W_1)}{P(R_1) P(R_2 | R_1) + P(W_1) P(R_2 | W_1)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{4}{8}}{\left(\frac{3}{5} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{8}\right)}$$

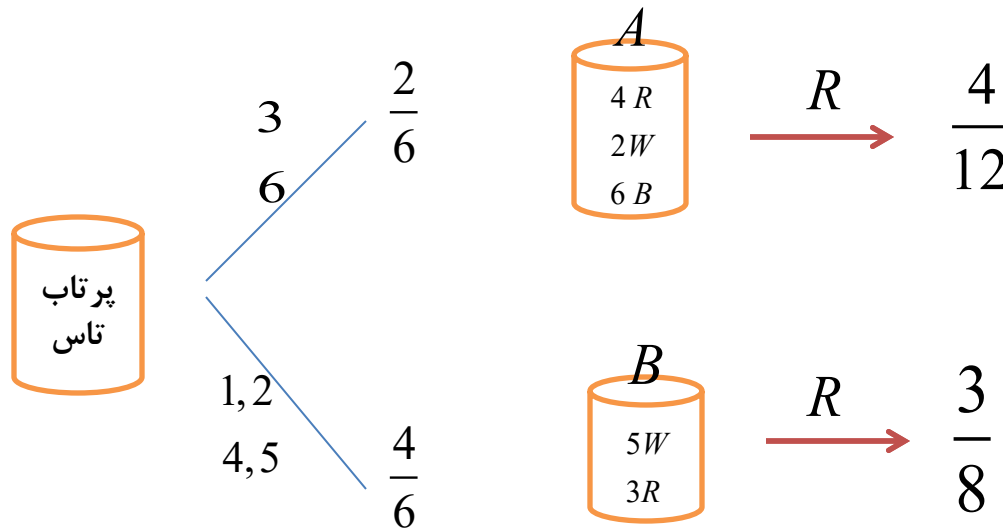
مثال ۳۸

- جعبه A شامل ۴ توپ قرمز، ۲ توپ سفید و ۶ توپ سیاه و جعبه B شامل ۳ توپ قرمز و ۵ توپ سفید است. تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر مضرب ۳ ظاهر شود، یک توپ از جعبه A و در غیر این صورت یک توپ از جعبه B برمی‌داریم. اگر این توپ قرمز باشد، احتمال اینکه در پرتاب تاس مضرب ۳ ظاهر شده باشد، چه قدر است؟

• راه حل:

• A: پیشامد اینکه مضرب ۳ ظاهر شود

• B: پیشامد اینکه مضرب ۳ ظاهر نشود



$$P(A_i | R_i) = \frac{P(A_i) P(R_i | A_i)}{P(A_i) P(R_i | A_i) + P(B_i) P(R_i | B_i)} = \frac{\frac{2}{6} \times \frac{4}{12}}{\left(\frac{2}{6} \times \frac{4}{12}\right) + \left(\frac{4}{6} \times \frac{3}{8}\right)}$$

استقلال

پیشامدهای مستقل

- استقلال دو پیشامد A و B بدین مفهوم است که رخ دادن یا رخ ندادن یکی در رخ دادن یا رخ ندادن دیگری مؤثر نیست. به عبارت دیگر، اطلاع از رخداد یکی باعث تغییر در احتمال رخداد دیگری نمی‌شود.
- در نتیجه هر یک از احتمال‌های شرطی $P(A|B)$ ، $P(B|A)$ و ... به احتمال‌های ساده تبدیل می‌شوند؛ یعنی

$$P(A | B) = P(A)$$

$$P(B | A) = P(B) \quad \Rightarrow \quad P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(\bar{A} | B) = P(\bar{A})$$

پیشامدهای مستقل

- **تعریف:** دو پیشامد A و B را از یکدیگر مستقل گویند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

در غیر این صورت A و B را دو پیشامد وابسته گوییم.

نکته

- دو پیشامد در صورتی **ناسازگار** هستند که نتوانند همزمان اتفاق بیفتند.
- دو پیشامد در صورتی **مستقل** هستند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند اما تأثیری روی یکدیگر نداشته باشند.
- حال اگر دو پیشامد بخواهند هم ناسازگار و هم مستقل باشند آنگاه باید $P(A \cap B) = 0$ و $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ یا باید $P(A) = 0$ یا $P(B) = 0$ باشد.
- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه پیشامدهای A و \overline{B} هم مستقل خواهند بود.

مثال ۳۹

- یک ایستگاه آتش‌نشانی دارای دو ماشین آتش‌نشان است که به طور مستقل کار می‌کنند و احتمال این که یک ماشین آتش‌نشان در موقع نیاز موجود باشد ۰/۹۹ است. احتمال این که موقع نیاز **حداقل یکی** از این دو ماشین موجود باشد را بیابید.

• راه حل

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\&= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\&= 0/99 + 0/99 - (0/99 \times 0/99)\end{aligned}$$

مثال ۴۰

- ظرف A شامل ۳ توپ قرمز و ۳ توپ سیاه است. ظرف B شامل ۴ توپ قرمز و ۶ توپ سیاه است. اگر یک توپ به تصادف از هر ظرف انتخاب کنیم، احتمال این که توپ‌ها از یک رنگ باشند، چه قدر است؟

• راه حل

$$P(\text{same color}) = P(\text{both R}) + P(\text{both B})$$

$$= \left[\frac{3}{6} \times \frac{4}{10} \right] + \left[\frac{3}{6} \times \frac{6}{10} \right]$$

مثال ۴۱

- سکه سالمی را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا یک شیر مشاهده شود و سپس توقف می‌کنیم.

الف- احتمال این که تعداد فردی پرتاب لازم باشد، چه قدر است؟

ب- احتمال این که حداقل ۷ پرتاب لازم باشد، چه قدر است؟

• راه حل:

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \dots\}$$

$$P\{H\} = \frac{1}{2} \quad P\{TH\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad P\{TTH\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad P\{TTTH\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$a) \quad P(\text{Odd}) = P\{H\} + P\{TTH\} + P\{TTTTH\} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

$$b) \quad P(\text{Throws} \geq 7) = P\{TTTTTTH\} + P\{TTTTTTTH\} + \dots$$

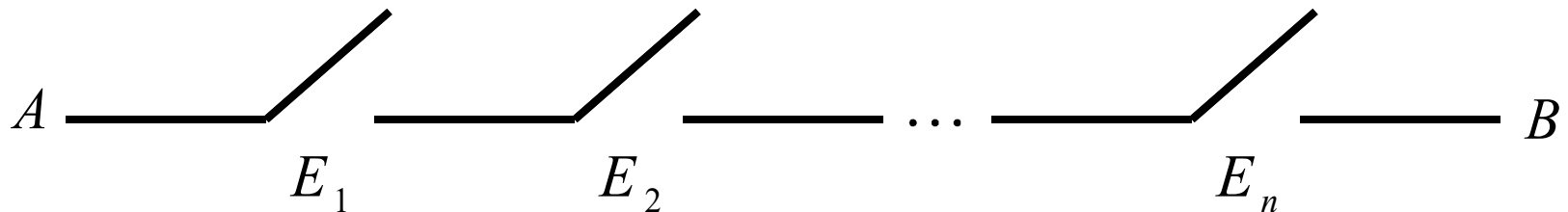
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

مدارهای سری

- در مدارهای سری احتمال برقراری ارتباط بین دو نقطه برابر است با احتمال برقراری همه‌ی مدارهای بین آن دو نقطه:

$$P(\text{connection}) = P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$$

$$P(\text{no connection}) = 1 - P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = 1 - (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n)$$

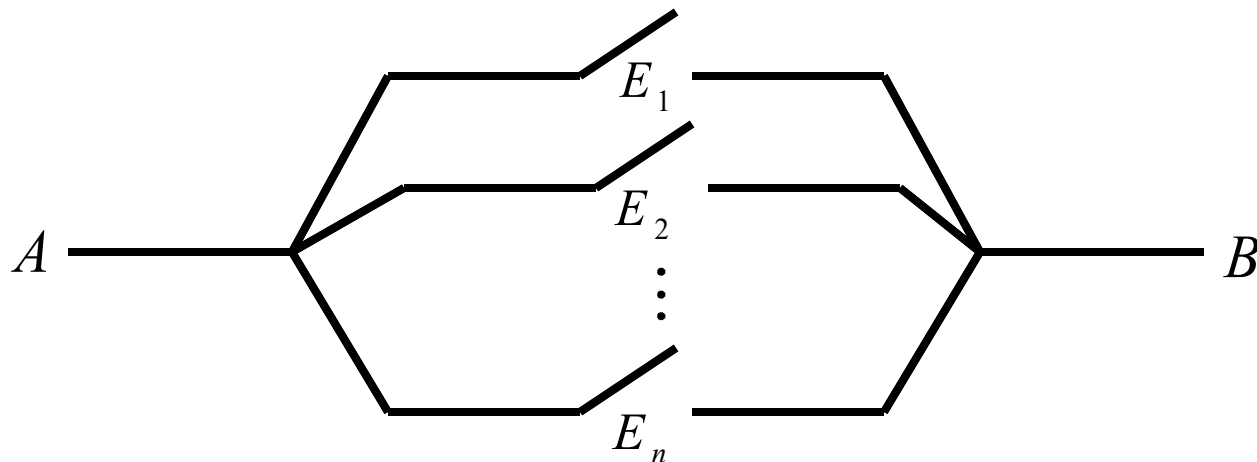


مدارهای موازی

- در مدارهای موازی احتمال عدم برقراری ارتباط بین دو نقطه برابر است با احتمال قطع تمام مدارهای بین آن دو نقطه:

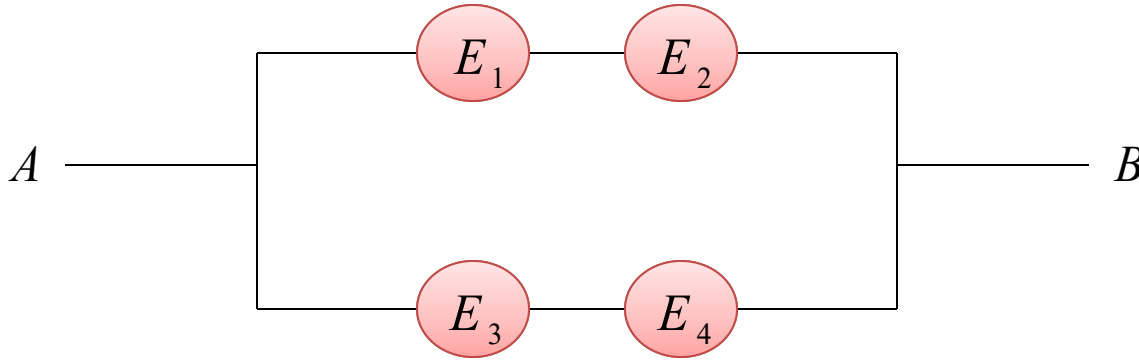
$$P(\text{connection}) = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n)$$

$$P(\text{no connection}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \dots \cap \overline{E_n}) = (1 - p_1) \times (1 - p_2) \times \dots \times (1 - p_n)$$



مثال ۴۲ - الف

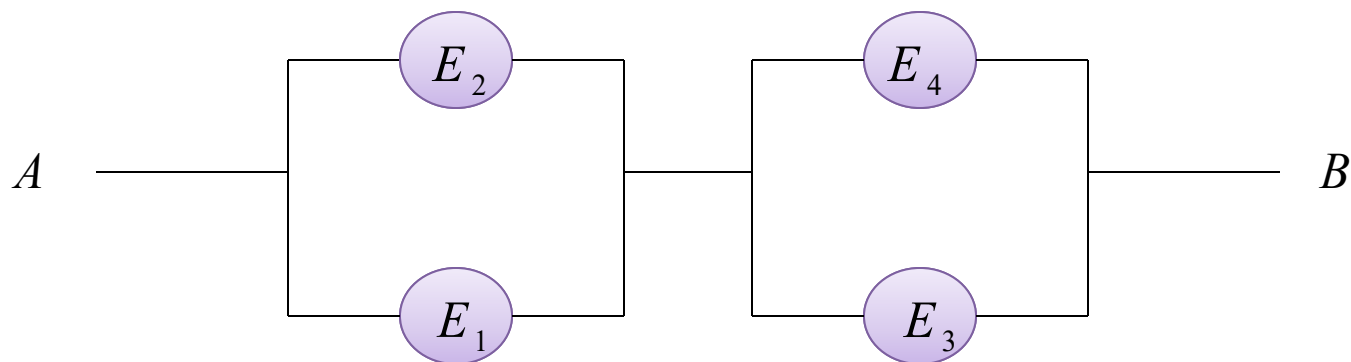
- سیستم‌های زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید در هر یک از سیستم‌ها اجزا مستقل از یکدیگر کار می‌کنند و احتمال سالم بودن هر جزء p است. احتمال کارکرد هر سیستم را حساب کنید.



$$\begin{aligned} P[(E_1 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_4)] &= P(E_1 \cap E_2) + P(E_3 \cap E_4) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) \\ &= P(E_1)P(E_2) + P(E_3)P(E_4) - P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4) \\ &= (p \times p) + (p \times p) - (p \times p \times p \times p) \\ &= p^2(2 - p^2) \end{aligned}$$

مثال ۴۲ - ب

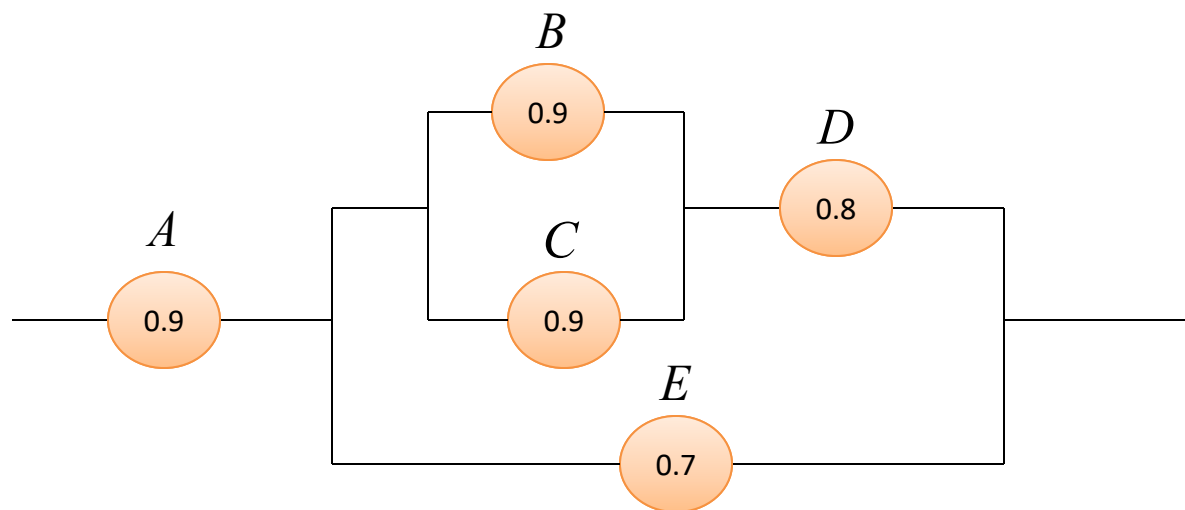
...



$$\begin{aligned}
 P[(E_1 \cup E_2) \cap (E_3 \cup E_4)] &= P(E_1 \cup E_2) \times P(E_3 \cup E_4) \\
 &= [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)] \times [P(E_3) + P(E_4) - P(E_3 \cap E_4)] \\
 &= (p + p - p \times p) \times (p + p - p \times p) \\
 &= p^2 (2 - p)^2
 \end{aligned}$$

مثال ٤٢ - ج

...



$$P(F) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.9 + 0.9 - (0.9 \times 0.9) = 0.99$$

$$P(G) = P(F \cap D) = P(F)P(D) = 0.99 \times 0.8 = 0.792$$

$$P(H) = P(G \cup E) = P(G) + P(E) - P(G \cap E) = 0.792 + 0.7 - (0.792 \times 0.7) = 0.9376$$

$$P(A \cap H) = P(A)P(H) = 0.9 \times 0.9376 = 0.84384$$