



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹-۹۸  
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
تمرینات ریاضی عمومی - سری ششم  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تدریس یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود پردازید.

۱. (آدامز) فرض کنید  $a_1 = 1$  و  $a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n}$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) . نشان دهید که دنباله  $\{a_n\}$  صعودی و از بالا کراندار است. (راهنمایی: نشان دهید که عدد ۳ یک کران بالا است.) به این ترتیب نتیجه بگیرید که این دنباله همگراست و حد آن را بیابید.

۲. (آدامز) فرض کنید  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  و لذا  $\ln a_n = n \ln(1 + \frac{1}{n})$ . با استفاده از این ویژگی تابع لگاریتمی نشان دهید:

(آ) دنباله  $\{a_n\}$  صعودی است.

(ب)  $e$  یک کران بالا برای  $\{a_n\}$  است.

۳. (آدامز) حدود مبهم زیر را بیابید.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{x}}$$

۴. در همگرایی و واگرایی سری های زیر بحث کنید.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1),$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) e^{-n}, \quad (e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}.$$

راهنمایی: در قسمت (e) از  $\ln x < \sqrt{x}$  استفاده کنید.

۵. در همگرایی و واگرایی سری  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p(n)}$  به ازای مقادیر مختلف  $p \geq 0$  بحث کنید.

۶. (آدامز الف) اگر  $\sum a_n, \sum b_n$  هر دو واگرا باشند، آنگاه  $\sum (a_n + b_n)$  نیز واگراست.

(ب) فرض کنید سری های  $\sum (a_n)^2$  و  $\sum (b_n)^2$  همگرا باشند. نشان دهید سری  $\sum a_n b_n$  نیز همگرا است.

۷. اگر  $a_n > 0$  و  $\sum a_n$  همگرا باشد، نشان دهید سری های  $\sum (a_n)^2$  و  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  و  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  همگرا هستند.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹-۹۸  
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی  
تمرینات ریاضی عمومی - سری ششم  
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۸. (آدامز) مرکز و شعاع همگرایی سری‌های زیر را بیابید و بازه همگرایی هر یک را با استدلال دقیق تعیین کنید.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (4-x)^3, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{3^n (n^2+1)}.$$

۹. (آدامز) مقدار عددی سری‌های زیر را بیابید.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n}.$$

۱۰. (آدامز) به ازای چه مقادیری از  $x$  سریهای زیر مطلقاً یا بطور مشروط همگراست.

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^{22} 2^n}.$$

۱۱. (آدامز الف) با استفاده از سری مک لورن تابع  $\tan^{-1} x$  نشان دهید:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 3^n}.$$

ب) سری مک لورن تابع  $\sin^2 x$  را بیابید و به کمک آن مقدار انتگرال  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  را تا چهار جمله اول بیابید.

۱۲. مقدار سری  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$  را بیابید.