آمار و احتمالات مهندسی

متغیرهای تصادفی پیوسته

مدرس: مشکانی فراهانی

متغیر تصادفی پیوسته

و

تابع چگالی احتمال

متغیر تصادفی پیوسته و توزیع احتمالات آن

- **تعریف:** متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته گویند.

- **تابع چگالی احتمال:**
- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع f(x) را تابع چگالی احتمال X می‌نامند هرگاه :

$$
\begin{aligned}
&۱)\quad f_X\left(x\right) > ۰, \qquad \forall\, x \in R_X \\
&۲)\quad \int_{R_X} f_X\left(x\right) dx = ۱
\end{aligned}
$$

مثال ۱ – الف

- مقدار ثابت c را چنان تعیین کنید که تابع زیر یک تابع چگـالی احتمـال باشد.

$$f\left(x\right) = cx\left(1 - x\right), \qquad 0 < x < 1$$

- راه‌حل

$$1)\quad c > 0$$

$$2)\quad \int_{R_X} f_X\left(x\right) dx = \int_0^1 cx\left(1 - x\right) dx$$

$$= c\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx$$

$$= c\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{c}{6} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = 6$$

مثال ۱ – ب ، ج

$$f\left(x\right) = ce^{-۲x}, \qquad x > 0$$

$Solution:$

$$۱)\quad c > ۰$$

$$۲)\quad \int_{R_X} f_X\left(x\right)\,dx = \int_{۰}^{\infty} ce^{-۲x}\,dx$$

$$= c\left[\frac{e^{-۲x}}{-۲}\right]_{۰}^{\infty}$$

$$= c\left[۰ - \frac{۱}{-۲}\right] = ۱$$

$$\Rightarrow \quad c = ۲$$

$$f\left(x\right) = \frac{c}{\sqrt{x}}, \qquad ۰ < x < 4$$

$Solution:$

$$۱)\quad c > ۰$$

$$۲)\quad \int_{R_X} f_X\left(x\right)\,dx = \int_{۰}^{۴} \frac{c}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= c\int_{۰}^{۴} x^{\frac{-۱}{۲}}\,dx$$

$$= c\left[۲\sqrt{x}\right]_{۰}^{۴}$$

$$= c\left[۴ - ۰\right] = ۱$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۱ – هـ ، و

$$f(x) = \frac{c}{۱ + x^{۲}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Solution :

$$۱) \quad c > ۰$$

$$۲) \quad \int_{R_X} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{۱ + x^{۲}}\, dx$$

$$= c\Big[\operatorname{Arctan}(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= c\left[\frac{\pi}{۲} - \frac{-\pi}{۲}\right] = ۱$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{۱}{\pi}$$

$$f(x) = c\left|۱ - x\right|, \qquad ۰ < x < ۲$$

$$= \begin{cases} c(۱ - x), & ۰ < x \le ۱ \\ c(x - ۱), & ۱ \le x < ۲ \end{cases}$$

Solution :

$$۱) \quad c > ۰$$

$$۲) \quad \int_{R_X} f_X(x)\, dx = \int_{۰}^{۱} c(۱ - x)\, dx + \int_{۱}^{۲} c(x - ۱)\, dx$$

$$= c\left[x - \frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{۱} + c\left[\frac{x^{۲}}{۲} - x\right]_{۱}^{۲}$$

$$= c\left[۱ - \frac{۱}{۲}\right] + c\left[۰ - \frac{-۱}{۲}\right] = ۱$$

$$\Rightarrow \quad c = ۱$$

محاسبه‌ی احتمال (با استفاده از تابع چگالی احتمال)

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشـد، بنـا بر تعریف، احتمال هر پیشامد $A \subseteq R_X$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P\left(A\right) = \int_A f\left(x\right) dx$$

- برای مثال اگر $A = \left\{ a < X < b \right\}$ داریم:

$$P\left(a < X < b\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx$$

چند نکته

- در توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی گسسته، $\mathrm{f(x)}$ نمایان‌گر احتمال در نقطه $\boldsymbol{x}$ است و احتمال فقط در نقاط تکیه‌گاه مثبت و در سایر نقاط برابر صفر است؛ در حالی که در توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی پیوسته، $\mathrm{f(x)}$ نشان‌دهنده‌ی هیچ احتمالی نیست و احتمال قطعه‌ای از مساحت واقع در زیر نمودار تابع $\mathrm{f(x)}$ است.

- احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته دقیقاً مقدار معینی مانند $\boldsymbol{a}$ را بگیرد برابر صفر است:

$$P\left(X=a\right)=P\left(a\leq X\leq a\right)=\int_a^a f\left(x\right)dx=0$$

- افزودن یا کاستن یک یا چند نقطه‌ی شمارا در پیشامدهای مربوط به متغیرهای تصادفی پیوسته هیچ تأثیری در مقدار احتمال آنها نخواهد داشت:

$$P\left(a\leq X\leq b\right)=P\left(a\leq X<b\right)=P\left(a<X\leq b\right)=P\left(a<X<b\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

مثال ۲

- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی X به صورت زیر است؛ مطلوبست:

الف- تعیین مقدار k   ب- محاسبه‌ی احتمال‌های زیر

$$f(x) = k\frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+۱}}, \qquad x \ge \beta, \quad \alpha, \beta > ۰$$

- **راه‌حل**

$$P(X = ۴\beta) = ۰$$

$$P(X > ۲\beta) = \int_{۲\beta}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{۲\beta}^{\infty} \alpha\frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+۱}}\,dx$$

$$= \left[-\frac{\beta^\alpha}{x^\alpha}\right]_{۲\beta}^{\infty}$$

$$= \left(\frac{۱}{۲}\right)^\alpha$$

$$۱)\ k > ۰$$

$$۲)\ \int_{\beta}^{\infty} k\frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+۱}}\,dx = k\beta^\alpha \int_{\beta}^{\infty} x^{-(\alpha+۱)}\,dx$$

$$= \left[\frac{k\beta^\alpha}{-\alpha x^\alpha}\right]_{\beta}^{\infty}$$

$$= \frac{k\beta^\alpha}{\alpha\beta^\alpha} = ۱$$

$$\Rightarrow \quad k = \alpha$$

مثال ۳

- میزان تحمل خاک زیر پایه‌ی یک ستون بین ۶ تا ۱۵ تن بر متر مربع تغییر می‌کند. تابع چگالی احتمال آن در این تکیه‌گاه به صورت زیر است. اگر این ستون برای تحمل بار ۷/۵ تن بر متر مربع طراحی شود، احتمال شکستن پایه‌ی ستون چه‌قدر است؟

$$f_Y(y) = \frac{۱}{۲/۷}\left(۱ - \frac{y}{۱۵}\right), \qquad y \in [۶, ۱۵]$$

- راه‌حل

$$P(Y > ۷/۵) = \int_{۷/۵}^{۱۵} \frac{۱}{۲/۷}\left(۱ - \frac{y}{۱۵}\right) dy$$

$$= \frac{۱}{۲/۷}\left[y - \frac{y^{۲}}{۳۰}\right]_{۷/۵}^{۱۵}$$

$$= \frac{۱}{۲/۷}\left[(۱۵ - ۷/۵) - (۷/۵ - ۱/۸۷۵)\right]$$

یادآوری

- در فضای احتمال **گسسته**، احتمال وقوع یک پیشامد را به صـورت زیـر حساب می‌کردیم:

$$P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)}$$

- در فضای احتمال **پیوسته**، احتمال وقوع یک پیشامد به صـورت زیـر بـه دست می‌آید:

$$P\left(A\right)=\frac{\left|A\right|}{\left|S\right|}$$

مثال ۴

- یک عدد تصادفی از بازه‌ی $\left(\circ\,,\,\frac{\pi}{۲}\right)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که سینوس آن از کسینوس آن بیشتر باشد، چه قدر است؟

- **راه‌حل:**

- X: عدد انتخاب شده

$$P\left(\mathrm{Sin}\ X > \mathrm{Cos}\ X\right) = P\left(\tan X > ۱\right)$$
$$= P\left(X > \frac{\pi}{۴}\right)$$
$$= \frac{\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲} - \circ} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۵

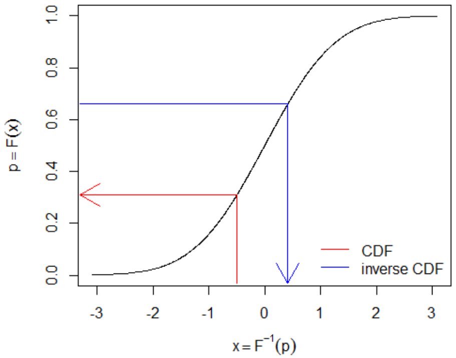
- فرض کنید X یک نقطه‌ی تصادفی از بازه‌ی (۳ , ۰) باشد. احتمال پیشامد $X^{۲} - ۵X + ۶ > ۰$ چه‌قدر است؟

- **راه‌حل:**

$$
\begin{aligned}
P\left(X^{۲} - ۵X + ۶ > ۰\right) &= P\left(\left(X - ۲\right)\left(X - ۳\right) > ۰\right) \\
&= P\left(X < ۲, X < ۳\right) + P\left(X > ۲, X > ۳\right) \\
&= P\left(X < ۲\right) + P\left(X > ۳\right) \\
&= \frac{۲ - ۰}{۳ - ۰} + ۰
\end{aligned}
$$

تابع توزیع تجمعی

برای متغیرهای تصادفی پیوسته



تابع توزیع تجمعی

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f(x) باشد، تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X\left(t\right) = P\left(X \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} f\left(x\right) dx$$

مثال ۶

- مقاومت جانبی اسکلت یک ساختمان کوچک R متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است. تابع توزیع $F_R(r)$ را حساب کنید.

$$f_R(r) = \frac{3}{500}(r-10)(20-r), \qquad r \in [10,20]$$

- راه‌حل

$$F_R(t) = \int_{10}^{t} \frac{3}{500}(r-10)(20-r)\,dr$$
$$= \frac{3}{500}\int_{10}^{t}\left(-r^2+30r-200\right)dr$$
$$= \frac{3}{500}\left[\frac{-r^3}{3}+15r^2-200r\right]_{10}^{t}$$
$$= \frac{3}{500}\left[\frac{-t^3}{3}+15t^2-200t+\frac{2500}{3}\right]$$

$$F_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 10 \\ \dfrac{3}{500}\left[\dfrac{-t^3}{3}+15t^2-200t+\dfrac{2500}{3}\right], & 10 \le t < 20 \\ 1, & t \ge 20 \end{cases}$$

مثال ۷- الف

- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی X به صورت زیر است؛ تابع توزیع تجمعی X را به دست آورید.

$$f(x) = ۴\, e^{-۲ x}\left(۱ - e^{-۲ x}\right), \qquad x > ۰$$

- **راه‌حل**

$$F_X(t) = \int_۰^t ۴\, e^{-۲ x}\left(۱ - e^{-۲ x}\right) dx$$

$$= ۴ \int_۰^t \left(e^{-۲ x} - e^{-۴ x}\right) dx$$

$$= ۴\left[\frac{e^{-۲ x}}{-۲} - \frac{e^{-۴ x}}{-۴}\right]_۰^t$$

$$= e^{-۴ t} - ۲\, e^{-۲ t} + ۱$$

$$\Rightarrow \quad F_X(t) = \begin{cases} ۰, & t < ۰ \\ e^{-۴ t} - ۲\, e^{-۲ t} + ۱, & t \geq ۰ \end{cases}$$

مثال ۷- ب

$$f(x) = |۱ - x|, \qquad ۰ < x < ۲$$

$$= \begin{cases} ۱ - x, & ۰ < x \le ۱ \\ x - ۱, & ۱ \le x < ۲ \end{cases}$$

- **راه‌حل**

$$F_X(t) = \int_۰^t (۱ - x)\, dx = \left[x - \frac{x^۲}{۲}\right]_۰^t = t - \frac{t^۲}{۲}$$

$$F_X(t) = \int_۰^۱ (۱ - x)\, dx + \int_۱^t (x - ۱)\, dx = \left[x - \frac{x^۲}{۲}\right]_۰^۱ + \left[\frac{x^۲}{۲} - x\right]_۱^t = \frac{۱}{۲} + \frac{t^۲}{۲} - t + \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad F_X(t) = \begin{cases} ۰, & t < ۰ \\ t - \dfrac{t^۲}{۲}, & ۰ \le t < ۱ \\ \dfrac{t^۲}{۲} - t + ۱, & ۱ \le t < ۲ \\ ۱, & t \ge ۲ \end{cases}$$

نکته

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمـال f_x(.) و تـابع توزیع تجمعی $F_X(.)$ باشد، داریم:

$$F_X^{'}\left(x\right) = \frac{d}{dx}F_X\left(x\right) = \mathrm{f}_X\left(x\right)$$

$$\boldsymbol{f} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{F} \xrightarrow{\text{مشتق}} \boldsymbol{f}$$

مثال ۸

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به صورت زیر است. تابع چگـالی احتمـال X را به دست آورید.

$$F\left(x\right)=۱-\frac{۹}{x^{۲}},\qquad x>3$$

- **راه‌حل**

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=۲\times ۹\ x^{-۳}$$

$$F\left(x\right)=۱-e^{-۳x},\qquad x>۰$$

راه‌حل

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=۳\ e^{-۳\ x}$$

مثال ۹

- نقطه‌ای به تصادف از داخل دایره‌ای به شعاع r انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را برابر فاصله‌ی نقطه‌ی انتخابی تا مرکز دایره در نظر می‌گیریم. مطلوب است:

الف- تعیین تابع توزیع تجمعی X

ب- تعیین تابع چگالی احتمال X

ج- محاسبه‌ی احتمال زیر

$$a)\quad F(x)=P(X\le x)=\frac{\pi x^{۲}}{\pi r^{۲}}=\left(\frac{x}{r}\right)^{۲}\quad\Rightarrow\quad F(x)=\begin{cases}۰, & x<۰\\ \left(\frac{x}{r}\right)^{۲}, & ۰\le x<r\\ ۱, & x\ge r\end{cases}$$

$$b)\quad f(x)=F'(x)=\frac{۲x}{r^{۲}},\qquad ۰<x<r$$

$$c)\quad P\left(\frac{r}{۳}<X<\frac{r}{۲}\right)=F\left(\frac{r}{۲}\right)-F\left(\frac{r}{۳}\right)=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۹}=\frac{۵}{۳۶}$$

نکته

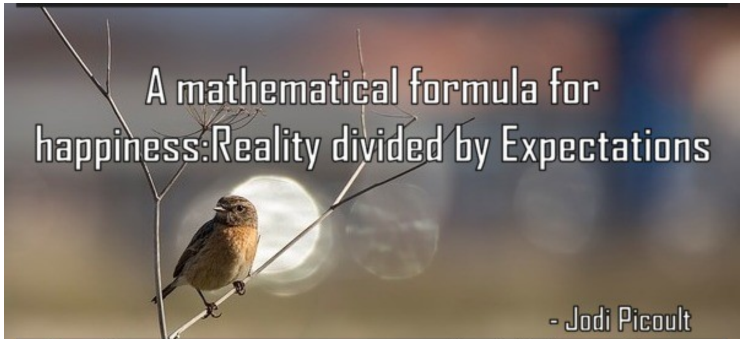
- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، احتمال هر پیشامد $A \subseteq R_X$ با استفاده از روابط بیان شده در تعریف تابع توزیع تجمعی به دست می‌آید.

- مراجعه شود به فایل:

آمار مهندسی – فصل ۲ و ۳ – متغیر تصادفی گسسته – سلاید ۲۲

امید ریاضی

متغیرهای تصادفی پیوسته



امید ریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته بـا تـابع چگـالی احتمـال f(x) باشـد، امید ریاضی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\left(X\right) = \int_{R_X} x\ f\left(x\right) dx$$

مثال ۱۰

- قطر سوراخ‌های ایجاد شده به وسیله‌ی مته‌ای بر حسب میلی‌متر دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = ۱۰\, e^{-۱۰(x-۵)}, \qquad x > ۵$$

اگر چه اندازه‌ی قطر مورد نظر ۵ میلی‌متر است، لرزش‌ها، سایش ابزار و سایر عوامل غیر قابل کنترل باعث تولید قطرهایی با اندازه‌ی بزرگتر از ۵ میلی‌متر می‌شوند. متوسط قطر سوراخ‌های ایجاد شده را به دست آورید.

$$E(X) = \int_{R_X} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{۵}^{\infty} ۱۰\, x\, e^{-۱۰(x-۵)}\, dx$$

$$= \left[-e^{-۱۰(x-۵)} \left(x + \frac{۱}{۱۰} \right) \right]_{۵}^{\infty}$$

$$= ۵/۱$$

مشتق	انتگرال
$derivative$	$Integral$
x	$۱۰\, e^{-۱۰(x-۵)}$
۱	$-\, e^{-۱۰(x-۵)}$
۰	$\frac{۱}{۱۰}\, e^{-۱۰(x-۵)}$

مثال ۱۱ – الف

- مدت زمان استفاده‌ی خانواده‌ای از جاروبرقی در طول سال، در واحد ۱۰۰ ساعت، متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر است:

الف- اگر E(X)=1 باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ax, & ۰<x<۱ \\ b(۲-x), & ۱\le x<۲ \\ ۰, & O.W. \end{cases}$$

$$\int_{R_X} f(x)\,dx=۱ \qquad *$$

$$\int_۰^۱ ax\ dx+\int_۱^۲ b(۲-x)\,dx$$

$$=a\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_۰^۱+b\left[۲x-\frac{x^۲}{۲}\right]_۱^۲$$

$$=\frac{a}{۲}+b\left(۲-\frac{۳}{۲}\right)$$

$$=\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}=۱$$

$$E(X)=\int_{R_X} xf(x)\,dx=۱ \qquad **$$

$$\int_۰^۱ x.ax\ dx+\int_۱^۲ x.b(۲-x)\,dx$$

$$=a\left[\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^۱+b\left[x^۲-\frac{x^۳}{۳}\right]_۱^۲$$

$$=\frac{a}{۳}+b\left(\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۳}\right)$$

$$=\frac{a}{۳}+\frac{۲b}{۳}=۱$$

مثال ۱۱ – ب

$$\begin{cases} ۱) \quad a+b=۲ \\ ۲) \quad a+۲b=۳ \end{cases} \Rightarrow a=۱ \qquad b=۱$$

ب- اگر $X > \frac{۱}{۲}$ باشد، احتمال این‌که X از $\frac{۳}{۲}$ کمتر باشد، چه‌قدر است؟

$$P\left(X < \frac{۳}{۲} \mid X > \frac{۱}{۲}\right) = \frac{P\left(X < \frac{۳}{۲} \ , \ X > \frac{۱}{۲}\right)}{P\left(X > \frac{۱}{۲}\right)} = \frac{P\left(\frac{۱}{۲} < X < \frac{۳}{۲}\right)}{P\left(X > \frac{۱}{۲}\right)}$$

$$= \frac{\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} x\ dx + \int_{۱}^{\frac{۳}{۲}} (۲-x)\ dx}{\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} x\ dx + \int_{۱}^{۲} (۲-x)\ dx} = \frac{\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{۱} + \left[۲x - \frac{x^۲}{۲}\right]_{۱}^{\frac{۳}{۲}}}{\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{۱} + \left[۲x - \frac{x^۲}{۲}\right]_{۱}^{۲}} = \frac{\left[\frac{۳}{۸}\right] + \left[\frac{۳}{۸}\right]}{\left[\frac{۳}{۸}\right] + \left[\frac{۱}{۲}\right]} = \frac{۶}{۷}$$

مثال ۱۱ – ج

- ج- تابع توزیع تجمعی X را به دست آورید.

$$F_X(t) = \int_{۰}^{t} x\ dx = \left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{t} = \frac{t^{۲}}{۲}$$

$$F_X(t) = \int_{۰}^{۱} x\ dx + \int_{۱}^{t} (۲ - x)\ dx = \left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{۱} + \left[۲x - \frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۱}^{t} = \frac{۱}{۲} + ۲t - \frac{t^{۲}}{۲} - \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad F_X(t) = \begin{cases} ۰, & t < ۰ \\ \frac{t^{۲}}{۲}, & ۰ \le t < ۱ \\ ۲t - \frac{t^{۲}}{۲} - ۱, & ۱ \le t < ۲ \\ ۱, & t \ge ۲ \end{cases}$$

یک ویژگی خاص از امید ریاضی

- در تعریف امید ریاضی داشتیم: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، امید ریاضی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\left(X\right)=\int_{R_X} x\ f\left(x\right)\,dx$$

- حال اگر بخواهیم امید ریاضی عدد ثابت c را حساب کنیم، با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم:

$$E\left(c\right)=\int_{R_X} c\ f\left(x\right)\,dx=c\int_{R_X} f\left(x\right)\,dx=c$$

- به عنوان مثال:

$$E\left(۵\right)=۵\qquad E\left(-۱۱\right)=-۱۱\qquad E\left(۰\right)=۰$$

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی پیوسته

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تـابع چگـالی احتمـال $f(x)$ باشـد، امید ریاضی $g(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\left[g\left(X\right)\right] = \int_{R_X} g\left(x\right) f\left(x\right) dx$$

مثال ۱۲

- فرض کنید طول کابل‌های رایانه بر حسب میلی‌متر دارای تابع چگالی زیر باشد؛ امید ریاضی $\left(X-۱۲۰۵\right)^{۲}$ را محاسبه کنید.

$$f\left(x\right) = ۰/۱, \qquad ۱۲۰۰ < x < ۱۲۱۰$$

- **راه‌حل**

$$E\left[\left(X-۱۲۰۵\right)^{۲}\right] = \int_{۱۲۰۰}^{۱۲۱۰} \left(X-۱۲۰۵\right)^{۲} \times \frac{۱}{۱۰} dx$$

$$= \frac{۱}{۱۰}\left[\frac{U^{۳}}{۳}\right]_{-۵}^{۵}$$

$$= \frac{۲۵۰}{۳۰}$$

ویژگی‌های خاص از امید ریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f(x) باشد، امید ریاضی تابع cX، که در آن c یک عدد ثابت است، به صورت زیر تعریـف می‌شود:

$$E\left(cX\right) = \int_{R_X} c\ x\ f\left(x\right) dx = c\int_{R_X} x\ f\left(x\right) dx = c\ E\left(X\right)$$

- به عنوان مثال:

$$E\left(۲X\right) = ۲E\left(X\right) \qquad E\left(-۵Y\right) = -۵E\left(Y\right)$$

ویژگی‌های خاص از امید ریاضی

- حال اگر بخواهیم امید ریاضی تابع $a\ g\left(X\right) \pm b\ h\left(X\right)$ را حساب کنیم، با استفاده از رابطه‌ی صفحه‌ی قبل داریم:

$$E\left[a\ g\left(X\right) \pm b\ h\left(X\right)\right] = \int_{R_X} \left[a\ g\left(X\right) \pm b\ h\left(X\right)\right] f\left(x\right) dx$$
$$= a \int_{R_X} g\left(x\right) f\left(x\right) dx \pm b \int_{R_X} h\left(x\right) f\left(x\right) dx$$
$$= a\ E\left[g\left(X\right)\right] \pm b\ E\left[h\left(X\right)\right]$$

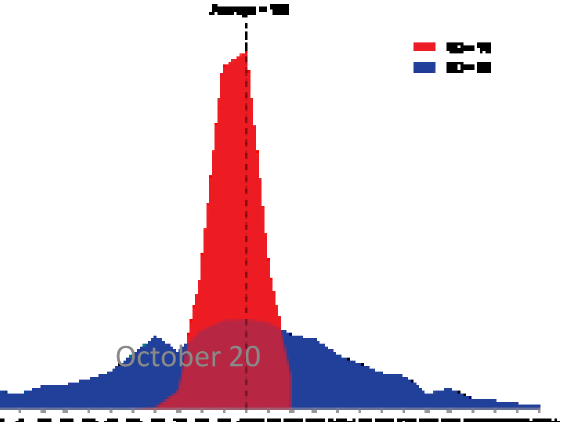
- به عنوان مثال:

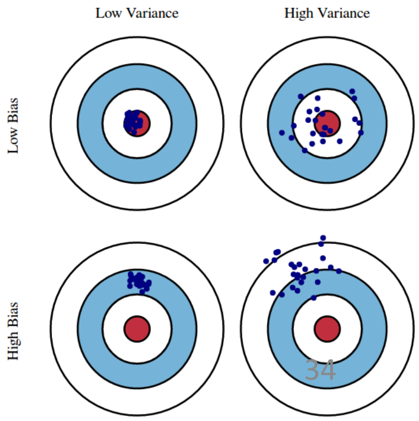
$$E\left(۳X^{۲} - ۷\ln X\right) = ۳E\left(X^{۲}\right) - ۷E\left(\ln X\right)$$

$$E\left(-۲X + ۵X^{۳} - ۱\right) = -۲E\left(X\right) + ۵E\left(X^{۳}\right) - ۱$$

واریانس و انحراف معیار

برای متغیرهای تصادفی پیوسته





واریانس و انحراف معیار

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با میـانگین E(X) یـا μ باشـد، آنگـاه واریانس X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^{2} = Var\left(X\right) = E\left[\left(X-\mu\right)^{2}\right] = E\left(X^{2}\right) - \left\{E\left(X\right)\right\}^{2}$$

- **اثبات: در فایل متغیرهای گسسته آورده شده است.**

$$E\left(X\right) = \int_{R_X} x\, f\left(x\right) dx$$

$$E\left(X^{2}\right) = \int_{R_X} x^{2}\, f\left(x\right) dx$$

- **انحراف معیار:** جذر واریانس را انحراف معیار نامیده و آن را با σ نشـان می‌دهیم.

مثال ۱۳

- مدت زمان لازم برای ارائه یک خدمت بانکی به یک مشتری متغیری تصـادفی با تابع چگالی احتمال زیر است؛ واریانس این توزیع را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{۲}, \qquad ۰ < x < ۲$$

- **راه‌حل**

$$E[X] = \int_{۰}^{۲} x.\frac{x}{۲}\,dx = \left[\frac{x^{۳}}{۶}\right]_{۰}^{۲} = \frac{۸}{۶}$$

$$E[X^{۲}] = \int_{۰}^{۲} x^{۲}.\frac{x}{۲}\,dx = \left[\frac{x^{۴}}{۸}\right]_{۰}^{۲} = ۲$$

$$Var(X) = E(X^{۲}) - E^{۲}(X) = ۲ - \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۲} = \frac{۲}{۹}$$

مثال ۱۴

- فرض کنید اندازه‌ی ذرات آلودگی بر حسب میکرومتر به صورت زیر مدل‌بندی شود. انحراف معیار X را تعیین کنید.

$$f(x) = ۲x^{-۳}, \qquad x > ۱$$

- **راه‌حل**

$$E[X] = \int_{۱}^{\infty} x.۲x^{-۳}dx = \left[\frac{-۲}{x}\right]_{۱}^{\infty} = ۲$$

$$E[X^{۲}] = \int_{۱}^{\infty} x^{۲}.۲x^{-۳}dx = ۲\left[\ln(x)\right]_{۱}^{\infty} = \infty$$

$$Var(X) = E(X^{۲}) - E^{۲}(X) = \infty - (۲)^{۲} = \infty$$

قضیه

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، در این صورت برای ثابت‌های a و b داریم:

$$Var\left(aX+b\right)=a^{2}\,Var\left(X\right),\qquad \sigma_{aX+b}=\left|a\right|\sigma_{X}$$

- **اثبات:**

$$\begin{aligned}
Var\left(aX+b\right)&=E\left[\left(aX+b\right)-E\left(aX+b\right)\right]^{2}\\
&=E\left[\left(aX+b\right)-aE\left(X\right)-E\left(b\right)\right]^{2}\\
&=E\left[\left(aX-aE\left(X\right)\right)-\left(b-b\right)\right]^{2}\\
&=E\left[a\left(X-E\left(X\right)\right)\right]^{2}\\
&=a^{2}\,E\left[X-E\left(X\right)\right]^{2}\\
&=a^{2}\,Var\left(X\right)\qquad\Rightarrow\qquad \sigma_{aX+b}=\left|a\right|\sigma_{X}
\end{aligned}$$

خواص امید ریاضی و واریانس (خلاصه)

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی و a و b اعدادی ثابت باشند، آن‌گاه برای هر تابع $g(x)$ داریم:

$* \ E(a) = a$ $\quad\quad \bullet \ Var(a) = ۰$

$* \ E(aX) = a\ E(X)$ $\quad\quad \bullet \ Var(aX) = a^۲\ Var(X)$

$* \ E[ag(X)] = a\ E[g(X)]$ $\quad\quad \bullet \ Var[ag(X)] = a^۲\ Var[g(X)]$

$* \ E[ag(X) \pm b] = a\ E[g(X)] \pm b$ $\quad\quad \bullet \ Var[ag(X) \pm b] = a^۲\ Var[g(X)]$

$* \ E[ag_۱(X) \pm bg_۲(X)] = a\ E[g_۱(X)] \pm b\ E[g_۲(X)]$

$\bullet \ Var[ag(X) \pm bg_۲(X)] = a^۲\ Var[g(X)] + b^۲\ Var[g_۲(X)]$

مثال ۱۵

- مقدار تقاضای هفتگی برای نوشابه‌ای معین (بر حسب هزار لیتر) در فروشگاهی زنجیره‌ای متغیر تصادفی پیوسته‌ی $g(X) = X^{۲} + X - ۲$ است، که در آن X دارای تابع چگالی زیر است. مقدار مورد انتظار تقاضای هفتگی این نوع نوشابه را پیدا کنید.

$$f(x) = ۲(x-۱), \qquad ۱ < x < ۲$$

- **راه‌حل**

$$E\left[X^{۲} + X - ۲\right] = E\left(X^{۲}\right) + E\left(X\right) - ۲ = \frac{۱۷}{۶} + \frac{۵}{۳} - ۲ = ۲/۵$$

$$E\left(X^{۲}\right) = \int_{۱}^{۲} x^{۲} \times ۲(x-۱)\,dx = ۲\left[\frac{x^{۴}}{۴} - \frac{x^{۳}}{۳}\right]_{۱}^{۲} = \frac{۱۷}{۶}$$

$$E\left(X\right) = \int_{۱}^{۲} x \times ۲(x-۱)\,dx = ۲\left[\frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۱}^{۲} = \frac{۵}{۳}$$