جواب تمرینات سری چهارم ریاضی یک

سوال اول: فرض کنید $h(x)$ تابعی باشد که:

$$\boldsymbol{h(1)=h'(1)=-2\,,h''(1)=3\,,h(2)=6\,,h'(2)=5\,,h''(2)=13}$$

و نیز فرض کنید $h''(x)$ پیوسته باشد. مقدار انتگرال $\int_1^2 h''(u)du$ را بیابید.

$$\int_1^2 h''(u)du=\left(h'(u)\right)_1^2=h'(2)-h'(1)=5-(-2)=7$$

سوال دوم: اگر $g(x)=\int_{tgx}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{2+t^4}}$ ، در این صورت $g'(x)$ را بیابید.

$$g'(x)=(2x)\left(\frac{1}{\sqrt{2+(x^2)^4}}\right)-(\frac{1}{\cos^2 x})(\frac{1}{\sqrt{2+tg^4x}})$$

سوال سوم: اگر $f(x)=\int_0^x(1-t^2)\cos^2 t\,dt$ ، روی کدام بازه $f(x)$ صعودی است.

$$f'(x)\geq 0\to(1-x^2)\cos^2 x\geq 0\to 1-x^2\geq 0\to x^2\leq 1\to x\in[-1,1]$$

سوال چهارم: اگر $f(x)=\int_0^{sinx}\sqrt{1+t^2}dt$ و $g(y)=\int_3^y f(x)dx$ ، $g''(\frac{\pi}{6})$ را بیابید.

$$g'(y)=f(y)\to g''(y)=f'(y)=\left(\int_0^{siny}\sqrt{1+t^2}dt\right)'=(cosy)(\sqrt{1+\sin^2 y}$$

$$\to g''\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\sqrt{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

سوال پنجم: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^5+\left(1+\frac{2}{n}\right)^5+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^5=\int_0^1(1+x)^5dx=\left(\frac{(1+x)^6}{6}\right)_0^1=\frac{1}{6}(2^6-1)=\frac{21}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(\frac{i\pi}{n})=\int_0^{\pi}sinxdx=(-cosx)_0^{\pi}=1+1=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{n+i}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left(2\sqrt{1+x}\right)_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

سوال ششم: ثابت کنید اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشند به طوری که $f \geq 0$ باشد، در این صورت نقطه ای مانند $x_0 \in [a,b]$ موجود است به طوری که:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(x_0)\int_a^b f(x)dx$$

چون $g(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه بسته است، لذا مینیمم و ماکزیمم خود را اختیار می‌کند:

$$\exists x_1 \in [a,b] : m = g(x_1) = \min\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

$$\exists x_2 \in [a,b] : M = g(x_2) = \max\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

$$m \leq g(x) \leq M \to mf(x) \leq f(x)g(x) \leq Mf(x)$$

$$\to m\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b f(x)dx$$

$$\to m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \leq M \to \exists x_0 \in [x_1,x_2] \subseteq [a,b]: g(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

$$\to \int_a^b f(x)g(x)dx = g(x_0)\int_a^b f(x)dx$$

سوال هفتم: فرض کنید $0 < a < b$ و $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به که $\int_a^b f(x)dx = 0$ ، نشان دهید $c \in (a,b)$ موجود است به طوری که $\int_a^c f(x)dx = cf(c)$.

تابع $g(x)$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید که چون f پیوسته است، تابع g مشتق پذیر است.

$$g(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x} \to g'(x) = \frac{xf(x) - \int_a^x f(t)dt}{x^2}$$

$$g(a) = 0\, , g(b) = 0 \to \exists c \in (a,b) : g'(c) = 0 \to \frac{cf(c) - \int_a^c f(t)dt}{c^2} = 0$$

$$\to cf(c) - \int_a^c f(t)dt = 0 \to \int_a^c f(t)dt = cf(c)$$

سوال هشتم: فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که $\int_0^1 f(x)dx = 1$. نشان دهید $c \in [0,1]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = 3c^2$.

تابع $g(x) = f(x) - 3x^2$ را روی بازه $[0,1]$ در نظر بگیرید، با به کار بردن قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\exists c \in [0,1]:\ g(c) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (f(x) - 3x^2)dx$$

$$\to g(c) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 3x^2 dx = \int_0^1 f(x)dx - 1 = 0 \to f(c) = 3c^2$$

سوال نهم: مقدار متوسط توابع زیر را بیابید.

$$\boldsymbol{f(t) = 1 + sint \quad t \in [a,b]}$$

$$Ave = \frac{1}{b-a}\int_a^b (1 + sint)dt = \frac{1}{b-a}(t - cost)_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}(b - cosb - a + cosa) = 1 - \frac{cosb - cosa}{b-a}$$

$$\boldsymbol{f(x) = |x+1|signx \qquad x \in [-2,2]}$$

$$Ave = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^2 f(x)dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^0 -|x+1|dx + \int_0^2 |x+1|dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1}(x+1)dx - \int_{-1}^0 (x+1)dx + \int_0^2 (x+1)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)_0^2\right) = \frac{3}{4}$$

سوال دهم: با استفاده از انتگرال معین، تابعی مانند $\boldsymbol{F(x)}$ تعریف کنید که مشتق آن به ازای هر $\boldsymbol{x}$ برابر $\boldsymbol{\frac{sinx}{1+x^2}}$ باشد و در رابطه $\boldsymbol{F(17) = 0}$ صدق کند.

$$F(x) = \int_{17}^x \frac{sint}{1+t^2}dt \to F(17) = 0\ , F'(x) = \frac{sinx}{1+x^2}$$

جواب تمرینات سری پنجم ریاضی یک

سوال اول: تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ دوبار مشتق پذیر و $f(a)=f(b)=0$ است، نشان دهید:

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = 2\int_a^b f(x)dx$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} u=(x-a)(x-b) \rightarrow du=(2x-a-b)dx \\ dv=f''(x)dx \rightarrow v=f'(x) \end{cases}$$

$$I=\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = \big((x-a)(x-b)f'(x)\big)_a^b - \int_a^b (2x-a-b)f'(x)dx$$

$$=-\int_a^b (2x-a-b)f'(x)dx$$

$$\begin{cases} u=2x-a-b \rightarrow du=2dx \\ dv=f'(x)dx \rightarrow v=f(x) \end{cases}$$

$$I=-\left(\big((2x-a-b)f(x)\big)_a^b - 2\int_a^b f(x)dx\right) = 2\int_a^b f(x)dx$$

سوال دوم: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n dx$$

$$\int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = -\frac{n}{2}\int_0^1 -2x(1-x^2)^n dx = -\frac{n}{2}\left(\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right)_0^1$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\frac{-1}{n+1}\right)=\frac{n}{2n+2} \rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{\sin(nx)}{x}dx$$

برای محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u=\frac{1}{x} \rightarrow du=-\frac{1}{x^2} \\ dv=\sin(nx)\,dx \rightarrow v=-\frac{1}{n}\cos(nx)\,dx \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{\sin(nx)}{x}dx = \left(-\frac{\cos(nx)}{nx}\right)_1^2 - \int_1^2 \frac{cosnx}{nx^2}dx = \frac{\cos(n)}{n}-\frac{\cos(2n)}{2n}-\frac{1}{n}\int_1^2\frac{cosnx}{x^2}dx$$

$$\frac{\cos(n)}{n}\le\frac{1}{n}\ ,\ \ \frac{\cos(2n)}{2n}\le\frac{1}{2n}$$

$$\int_1^2 \frac{cosnx}{x^2}dx \le \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{\sin\,(nx)}{x}dx = \lim_{n\to\infty}(\frac{\cos(n)}{n} - \frac{\cos(2n)}{2n} - \frac{1}{n}\int_1^2 \frac{cosnx}{x^2}dx) = 0$$

سوال سوم: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \boldsymbol{e^{2x}\sin(3x)\,dx}$$

$$\begin{cases} u = e^{2x} \to du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin(3x) \to v = -\frac{1}{3}\cos\,(3x) \end{cases}$$

$$I = \int e^{2x}\sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)\,e^{2x} + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$$

$$\begin{cases} u = e^{2x} \to du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos(3x) \to v = \frac{1}{3}\sin(3x) \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{3}\cos(3x)\,e^{2x} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\sin(3x)\,e^{2x} - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin(3x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x)\,e^{2x} + \frac{2}{9}\sin(3x)\,e^{2x} - \frac{4}{9}I \to \frac{13}{9}I = -\frac{1}{3}\cos(3x)\,e^{2x} + \frac{2}{9}\sin(3x)\,e^{2x}$$

$$\to I = -\frac{3}{13}\cos(3x)\,e^{2x} + \frac{2}{13}\sin(3x)\,e^{2x} + c$$

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}\left(\sqrt{\boldsymbol{1-x^2}}\right)^{\boldsymbol{3}}}$$

تغییر متغیر $z^2 = 1 - x^2$ و لذا $2zdz = -2xdx \to dx = -\frac{zdz}{x}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I = -\int \frac{z}{(1-z^2)z^3}dz = -\int \frac{1}{z^2(1-z^2)}dz$$

حال از روش تجزیه به کسر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{z^2(1-z^2)} = \frac{Az+B}{z^2} + \frac{C}{1-z} + \frac{D}{1+z} \to 1 = (Az+B)(1-z^2) + Cz^2(1+z) + Dz^2(1-z)$$

$$\to 1 = (C-A-D)z^3 + (C+D-B)z^2 + Az + B \to B = 1\,, A = 0\,, C = D = \frac{1}{2}$$

$$I = -\int\left(\frac{1}{z^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-z} + \frac{\frac{1}{2}}{1+z}\right)dz = -\left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\ln|1-z| + \frac{1}{2}\ln|1+z|\right) + c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+c$$

$$\int \frac{\boldsymbol{cosx}}{(\mathbf{sin^2}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{4})^{\frac{5}{2}}}\boldsymbol{dx}$$

تغییر متغیر $z=sinx$ و لذا $dz=cosxdx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I=\int \frac{cosx}{(\sin^2 x+4)^{\frac{5}{2}}}dx=\int \frac{dz}{(z^2+4)^{\frac{5}{2}}}$$

حال تغییر متغیر $z=2tg\theta$ و لذا $dz=2\sec^2\theta d\theta$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I=\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{(4tg^2\theta+4)^{\frac{5}{2}}}d\theta=\frac{1}{16}\int \frac{1}{\sec^3\theta}d\theta=\frac{1}{16}\int \cos^3\theta\, d\theta=\frac{1}{16}\int cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$\frac{1}{16}\left(\int cos\theta d\theta-\int cos\theta sin^2\theta\, d\theta\right)=\frac{1}{16}\left(sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)+c$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+4}}-\frac{\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+4}}\right)^3}{3}\right)+c=\frac{1}{16}\left(\frac{sinx}{\sqrt{\sin^2 x+4}}-\frac{\left(\frac{sinx}{\sqrt{\sin^2 x+4}}\right)^3}{3}\right)+c$$

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{9}\boldsymbol{x}}$$

از روش تجزیه به کسر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^3+9x}=\frac{1}{x(x^2+9)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+9}\rightarrow 1=A(x^2+9)+(Bx+C)x$$

$$\rightarrow 1=(A+B)x^2+Cx+9A\rightarrow A=\frac{1}{9}\,,C=0\,,B=-\frac{1}{9}$$

$$\int \frac{dx}{x^3+9x}=\int\left(\frac{\frac{1}{9}}{x}+\frac{-\frac{1}{9}x}{x^2+9}\right)dx=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x}-\frac{1}{18}\int \frac{2x}{x^2+9}dx$$

$$=\frac{1}{9}ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+9)+c$$

$$\int \boldsymbol{e}^{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{dx}$$

تغییر متغیر $z=e^x$ و لذا $dz=e^xdx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I=\int zsin(z)dz$$

حال با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = z \to du = dz \\ dv = \text{sinz}dz \to v = -cosz \end{cases}$$

$$I = -zcosz + \int coszdz = -zcosz + sinz + c = -e^x \cos(e^x) + \sin(e^x) + c$$

$$\int \frac{\boldsymbol{9x+9}}{\boldsymbol{(x-1)(x^2+4x+13)}} \boldsymbol{dx}$$

از روش تجزیه به کسر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{9x+9}{(x-1)(x^2+4x+13)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+13}$$

$$\to 9x + 9 = A(x^2 + 4x + 13) + (Bx + C)(x - 1)$$

$$x = 1 \to 18 = 18A \to A = 1$$

$$9x + 9 = (A + B)x^2 + (4A - B + C)x + 13A - C$$

$$x = 0 \to 9 = (13)(1) - C \to C = 4$$

$$9 = (4)(1) - B + 4 \to B = -1$$

$$I = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x+4}{x^2+4x+13}\right)dx = \ln(x-1) - \int \frac{(x+2)+2}{(x+2)^2+9}dx$$

از تغییر متغیر $z = x + 2$ و لذا $dz = dx$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$I = \ln(x-1) - \int \frac{z+2}{z^2+9}dz = \ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{2z}{z^2+9}dz - \frac{2}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{z}{3}\right)^2}dz$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|z^2+9| - \frac{2}{3}tg^{-1}\left(\frac{z}{3}\right) + c$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+13| - \frac{2}{3}tg^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

$$\int \frac{\boldsymbol{\sin^3 x}}{\boldsymbol{\cos^7 x}} \boldsymbol{dx}$$

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx = \int \frac{tg^3x}{\cos^4 x}dx = \int (1 + tg^2x)^2 tg^3x dx$$

تغییر متغیر $z = tgx$ و لذا $dz = (1 + tg^2x)dx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I = \int (1 + z^2)z^3 dz = \int (z^3 + z^5)dz = \frac{z^4}{4} + \frac{z^6}{6} + c = \frac{tg^4x}{4} + \frac{tg^6x}{6} + c$$

$$\int \sqrt{tgx}\, dx$$

تغییر متغیر $z^2 = tgx$ و لذا $2zdz = (1 + tg^2x)dx = (1 + z^4)dx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I = \int \frac{2z^2}{1+z^4}dz = \int \frac{z^2+1}{1+z^4}dz + \int \frac{z^2-1}{1+z^4}dz = \int \frac{1+\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{z^2}+z^2}dz + \int \frac{1-\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{z^2}+z^2}dz$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{z^2}}{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+2}dz + \int \frac{1-\frac{1}{z^2}}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2}dz$$

حال برای انتگرال اول تغییر متغیر $t = z - \frac{1}{z}$ و لذا $dt = 1 + \frac{1}{z^2}dz$ و برای انتگرال دوم تغییر متغیر $w = z + \frac{1}{z}$ و لذا $dw = 1 - \frac{1}{z^2}dz$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I = \int \frac{1}{t^2+2}dt + \int \frac{1}{w^2-2}dw = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}dt + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{w-\sqrt{2}} + \frac{1}{w+\sqrt{2}}\right)dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}tg^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{w-\sqrt{2}}{w+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}}tg^{-1}\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z+\frac{1}{z}-\sqrt{2}}{z+\frac{1}{z}+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{tgx}-\frac{1}{\sqrt{tgx}}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{tgx}+\frac{1}{\sqrt{tgx}}-\sqrt{2}}{\sqrt{tgx}+\frac{1}{\sqrt{tgx}}+\sqrt{2}}\right| + c$$

سوال چهارم: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n sinxdx$ را بیابید و با استفاده از آن I_6 را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} u = x^n \to du = nx^{n-1}dx \\ dv = sinxdx \to v = -cosx \end{cases}$$

$$I_n = (-x^n cosx)_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}cosxdx = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}cosxdx$$

$$\begin{cases} u = x^{n-1} \to du = (n-1)x^{n-2}dx \\ dv = cosxdx \to v = sinx \end{cases}$$

$$I_n = n\left((x^{n-1}sinx)_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}sinxdx\right) = n\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - (n-1)I_{n-2}\right)$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = (-cosx)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \to I_2 = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2$$

$$\rightarrow I_4 = 4\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3(\pi - 2)\right) = 4\left(\frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6\right) = \frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24$$

$$\rightarrow I_6 = 6\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24\right)\right) = \frac{3\pi^5}{16} - 15\pi^3 - 360\pi + 720$$

سوال پنجم: $(n \geq 2)$ $I_n = \int \sec^n x\, dx$ را بیابید و با استفاده از آن I_6 را محاسبه کنید.

$$I_n = \int \sec^n x\, dx = I_n = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx$$

$$\begin{cases} u = sec^{n-2}\, x \rightarrow du = (n-2) tgxsec^{n-2}xdx \\ dv = \sec^2 x\, dx \rightarrow v = tgx \end{cases}$$

$$I_n = tgxsec^{n-2}x - (n-2)\int tg^2xsec^{n-2}xdx$$

$$= tgxsec^{n-2}x - (n-2)\int (\sec^2 x + 1)sec^{n-2}xdx$$

$$= tgxsec^{n-2}x - (n-2)\int \sec^n x\, dx - (n-2)\int \sec^{n-2} x\, dx$$

$$= tgxsec^{n-2}x - (n-2)I_n - (n-2)I_{n-2}$$

$$\rightarrow (n-1)I_n = tgxsec^{n-2}x - (n-2)I_{n-2} \rightarrow I_n = \frac{1}{n-1}tgxsec^{n-2}x - \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

$$I_2 = \int \sec^2 x\, dx = tgx + c \rightarrow I_4 = \frac{1}{3}tgxsec^2x - \frac{2}{3}tgx + c$$

$$\rightarrow I_6 = \frac{1}{5}tgxsec^4x - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}tgxsec^2x - \frac{2}{3}tgx\right) + c$$

$$= \frac{1}{5}tgxsec^4x - \frac{4}{15}tgxsec^2x - \frac{8}{15}tgx + c$$

سوال ششم: نشان دهید:

$$\int_0^\pi \boldsymbol{xe^{sinx}dx} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\int_0^\pi \boldsymbol{e^{sinx}dx}$$

تغییر متغیر $z = \pi - x$ و لذا $dz = -dx$ که $0 \rightarrow \pi$ و $\pi \rightarrow 0$ در نظر بگیرید، داریم:

$$I = \int_0^\pi xe^{sinx}dx = \int_\pi^0 (-(\pi - z)e^{\sin(\pi - z)})dz = \int_0^\pi (\pi - z)e^{sinz}dz$$

$$= \pi\int_0^\pi e^{sinz}dz - \int_0^\pi ze^{sinz}dz = \pi\int_0^\pi e^{sinz}dz - I$$

$$\rightarrow 2I = \pi\int_0^\pi e^{sinx}dx \rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{sinx}dx$$

سوال هفتم: مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$\boldsymbol{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx}$$

تغییر متغیر $z=\frac{\pi}{2}-x$ و لذا $dz=-dx$ که $0\to\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}\to 0$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-\sin^n(\frac{\pi}{2}-z)}{\sin^n(\frac{\pi}{2}-z)+\cos^n(\frac{\pi}{2}-z)}dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n z}{\sin^n z+\cos^n z}dz$$

$$\to 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\to I=\frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}dx}$$

تغییر متغیر $z=6-x$ و لذا $dz=-dx$ که $2\to 4$ و $4\to 2$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I=\int_4^2\frac{-\sqrt{\ln(z+3)}}{\sqrt{\ln(z+3)}+\sqrt{\ln(9-z)}}dz=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(z+3)}}{\sqrt{\ln(z+3)}+\sqrt{\ln(9-z)}}dz$$

$$\to 2I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}dx=\int_2^4 dx=2\to I=1$$

سوال هشتم: معادله زیر را حل کنید:

$$\boldsymbol{3\sinh(x)+\frac{9}{5}\cosh(x)=-\frac{9}{5}}$$

$$3\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{9}{5}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=-\frac{9}{5}\to 15(e^x-e^{-x})+9(e^x+e^{-x})=-18$$

$$\to 24e^x-6e^{-x}+18=0\to 4e^x-e^{-x}+3=0\to 4e^{2x}+3e^x-1=0$$

$$\to e^x=\frac{-3\pm 5}{8}\to e^x=\frac{1}{4}\to x=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln(4)=-2\ln(2)$$

سوال نهم: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\boldsymbol{\int\frac{4xe^{x^2}}{e^{2x^2}+2e^{x^2}+2}dx}$$

تغییر متغیر $z=e^{x^2}$ و لذا $dz=2xe^{x^2}dx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I=\int\frac{2}{z^2+2z+2}dz=\int\frac{2}{1+(z+1)^2}dz=2tg^{-1}(z+1)+c=2tg^{-1}\left(e^{x^2}+1\right)+c$$

$$\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{\arcsin(\ln x)}{x} dx$$

تغییر متغیر $z = \ln x$ و لذا $dz = \frac{dx}{x}$ را در نظر بگیرید که $0 \to 1$ و $\frac{1}{2} \to \sqrt{e}$ بنابراین داریم:

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \arcsin(z) dz$$

حال با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = \arcsin(z) \to du = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz \\ dv = dz \to v = z \end{cases}$$

$$I = (\mathrm{z}\arcsin(z))_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} dz = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (-2z(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}) dz$$

$$= \frac{\pi}{12} + \left(\sqrt{1-z^2}\right)_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$\int \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

تغییر متغیر $z = \sqrt{x}$ و لذا $dz = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\int \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2\int \sinh(z)\, dz = 2\cosh(z) + c = 2\cosh\left(\sqrt{x}\right) + c$$

$$\int \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1 + tgh^2 x} dx$$

تغییر متغیر $z = tghx$ و لذا $dz = \operatorname{sech}^2 x\, dx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I = \int \frac{dz}{1+z^2} = arctg(z) + c = arctg(tghx) + c$$

سوال دهم: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} tg\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} tg\left(\frac{k\pi}{4n+4}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4} \frac{tg\left(\frac{\frac{k\pi}{4}}{n+1}\right)}{\frac{k\pi}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{tg\left(\frac{k\pi}{4n}\right)}{\frac{k\pi}{4}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{x} dx$$

نیازی به محاسبه انتگرال فوق نیست و صرفا می‌بایست وجود حد را بررسی می‌کردیم که انتگرال فوق موجود است، صرفا برای بررسی صحت وجود این انتگرال به محاسبات زیر توجه کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}+\frac{17x^6}{315}+\cdots)dx$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{9}+\frac{2x^5}{75}+\frac{17x^7}{2205}+\cdots\right)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}$$

$$a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to \ln(a_n)=\ln\left(\sqrt[n]{n!}\right)-\ln(n)=\frac{1}{n}\left(\ln(n!)-nln(n)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\ln(n!)-ln(n^n)\right)=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}.\frac{2}{n}\ldots\frac{n}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 lnxdx$$

برای محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} u=lnx\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx\to v=x \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(a_n\right)=(xlnx)_0^1-\int_0^1 dx=-(x)_0^1=-1\to \lim_{n\to\infty}a_n=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

توجه داشته باشید که مقدار $xlnx$ در نقطه $x=0$ به صورت حدی برابر صفر است، زیرا:

$$\lim_{x\to 0}xlnx=\lim_{x\to 0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

سوال یازدهم: رفتار همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید.

$$\boldsymbol{\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx<\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx=\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx\to$$ همگرایی

$$\boldsymbol{\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}dx}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}dx>\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}dx\geq\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx\geq\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx\to$$ واگرایی

$$\int_{2}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x(lnx)^2} dx$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x(lnx)^2} dx < \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(lnx)^2} dx$$

حال تغییر متغیر $z = lnx$ لذا $dz = \frac{dx}{x}$ را در نظر بگیرید که $2 \to \ln(2)$ و $\infty \to \infty$ بنابراین داریم:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(lnx)^2} dx = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{dz}{z^2} < \infty \to \text{همگرایی}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta}{tg^2\theta - 1} d\theta$$

تغییر متغیر $z = tg\theta$ و لذا $dz = \sec^2\theta \, d\theta$ که $\frac{\pi}{4} \to 1$ و $\frac{\pi}{2} \to \infty$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - 1} dz = I_1 + I_2 = \int_{1}^{2} \frac{1}{z^2 - 1} dz + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{z^2 - 1} dz$$

$$I_1 = \int_{1}^{2} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \int_{1}^{2} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz > \int_{1}^{2} \frac{1}{3(z-1)} dz$$

حال برای انتگرال فوق تغییر متغیر $t = z - 1$ و لذا $dt = dz$ که $1 \to 0$ و $2 \to 1$ در نظر بگیرید:

$$I_1 > \frac{1}{3}\int_{0}^{1} \frac{1}{t} dt \to I_1 \text{ واگرا} \to I \text{ واگرا}$$

سوال دوازدهم: طول قوس منحنی پارامتری زیر را بیابید.

$$\boldsymbol{x = \sin^{-1} t \ , \ y = \ln\left(\sqrt{1 - t^2}\right) , \ 0 \le t \le \frac{1}{2}}$$

$$L = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{-2t}{2\sqrt{1 - t^2}}}{\sqrt{1 - t^2}}\right)^2} dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{1 - t^2} + \frac{t^2}{(1 - t^2)^2}} dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{(1 - t^2)^2}} dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2} dt$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1 + t)(1 - t)} dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t}) dt = \frac{1}{2}(\ln(1 + t) - \ln(1 - t))_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(1)\right) = \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(2) + \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(3)$$

سوال سیزدهم: مطلوب است محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y = cosx$ و بالای محور x، در بازه $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ حول خط $x = -1$.

همانند این است که تابع $f(x) = \cos(x-1)$ را حول محور $x = 0$ (محور y) دوران دهیم، لذا:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x+1)f(x)dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x+1)cosxdx = 2\pi(\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} cosxdx)$$

$$= 2\pi \left((xsinx)_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxdx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} cosxdx \right) = \pi(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - 1)$$

سوال چهاردهم: محیط خم بسته $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ را بیابید.

ابتدا معادله را پارامتری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \quad \rightarrow \quad x' = -3asintcos^2 t \\ y = a\sin^3 t \quad \rightarrow \quad y' = 3acostsin^2 t \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^4 t + 9a^2 \cos^2 t \sin^4 t = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$$

$$x = 0 \rightarrow cost = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \ , y = 0 \rightarrow sint = 0 \rightarrow t = 0$$

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3asintcostdt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt$$

$$6a\left(\frac{-1}{2}\cos(2t)\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

سوال پانزدهم: با دوران پاره خط واصل بین $(0,0)$ و (r,h) حول محور y، مساحت قسمت خمیده مخروط دایره‌ای قائم به شعاع قاعده r و ارتفاع h را محاسبه کنید.

در واقع می‌بایست مساحت حاصل از دوران خط $f(x) = \frac{h}{r}x$ را در بازه $0 \leq x \leq r$ حول محور y بیابیم.

$$S = 2\pi \int_0^r |x| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx = 2\pi \int_0^r x \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} dx = 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^r$$

$$= 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} . \frac{r^2}{2} = \pi \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{r} r^2 = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

سوال شانزدهم: $y = lnx \quad (0 < x \leq 1)$ را حول محور y دوران می‌دهیم. مساحت رویه شیپوری شکل حاصل را بیابید.

$$S = 2\pi \int_0^1 |x| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

تغییر متغیر $x = tg\theta$ و لذا $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ که $0 \to 0$ و $1 \to \frac{\pi}{4}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\, d\theta = 2\pi J$$

برای محاسبه انتگرال J از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = sec\theta \to du = sec\theta tg\theta d\theta \\ dv = \sec^2\theta\, d\theta \to v = tg\theta \end{cases}$$

$$J = (sec\theta tg\theta)_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2\theta sec\theta d\theta = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1) sec\theta d\theta$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec\theta d\theta = \sqrt{2} - J + (ln|sec\theta + tg\theta|)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\to 2J = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(1) \to J = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)}{2}$$

$$\to S = (2\pi)\left(\frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)}{2}\right) = \pi\left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right)$$

سوال هفدهم: مساحت رویه حاصل از دوران $x^2 + 4y^2 = 4$ را حول محور y بیابید.

$$2x\frac{dx}{dy} + 8y = 0 \to \frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{x}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \sqrt{1 + \frac{16y^2}{x^2}}\, dy = \sqrt{\frac{x^2 + 16y^2}{x^2}}\, dy = \sqrt{\frac{x^2 + 4y^2 + 12y^2}{x^2}}\, dy$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 12y^2}{x^2}}\, dy = \frac{1}{|x|}\sqrt{4 + 12y^2}\, dy$$

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} |x| ds = 4\pi \int_0^1 |x| \frac{1}{|x|}\sqrt{4 + 12y^2}\, dy = 8\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 3y^2}\, dy$$

تغییر متغیر $\sqrt{3}y = tg\theta$ و لذا $\sqrt{3}dy = \sec^2\theta\, d\theta$ که $0 \to 0$ و $1 \to \frac{\pi}{3}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$S = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} J$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sec\theta \sec^2\theta\, d\theta$$

برای محاسبه J از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = sec\theta \to du = sec\theta tg\theta d\theta \\ dv = \sec^2\theta\, d\theta \to v = tg\theta \end{cases}$$

$$J = (sec\theta tg\theta)_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2\theta sec\theta d\theta = 2\sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2\theta - 1)sec\theta d\theta$$

$$= 2\sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^3\theta\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} sec\theta d\theta = 2\sqrt{3} - J + (ln|sec\theta + tg\theta|)_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\to 2J = 2\sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \ln(1) \to J = \frac{2\sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$\to S = \left(\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}\right) = \frac{4\pi(2\sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right))}{\sqrt{3}}$$

سوال هجدهم: حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y = x$ و $x = 4y - y^2$ را حول محور x و y به روش واشری و لایه‌های استوانه‌ای بیابید.

$$4y - y^2 = y \to 3y - y^2 = 0 \to y(3-y) = 0 \to y = 0\,, y = 3$$

حول محور x با روش لایه‌های استوانه‌ای:

$$V = 2\pi \int_0^3 y(4y - y^2 - y)dy = 2\pi \int_0^3 (3y^2 - y^3)dy = 2\pi \left(y^3 - \frac{y^4}{4}\right)_0^3 = \frac{27\pi}{2}$$

حول محور y با روش واشری:

شعاع خارجی برابر $R = 4y - y^2$ و شعاع داخلی برابر $r = y$ است، لذا داریم:

$$\Delta v = \pi(R^2 - r^2)\Delta y \to V = \pi \int_0^3 ((4y - y^2)^2 - y^2)dy = \pi \int_0^3 (16y^2 + y^4 - 8y^3 - y^2)dy$$

$$= \pi \int_0^3 (15y^2 + y^4 - 8y^3)dy = \pi \left(5y^3 + \frac{y^5}{5} - 2y^4\right)_0^3 = \frac{108\pi}{5}$$

سوال نوزدهم: طول کمانی از منحنی $y = -\ln\,(1 - x^2)$ را که بین دو خط $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ قرار دارد، بیابید.

$$f(x) = -\ln(1 - x^2) \to f'(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$$

$$l = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1+x^2)^2}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - x^2 - 2}{1 - x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{2}-(\ln(1-x)+\ln(1+x))_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\ln(3)$$

سوال بیستم: طول منحنی $y=x^{\frac{2}{3}}$ را بین $x=-1$ و $x=8$ بیابید.

$$y=x^{\frac{2}{3}}\rightarrow x=y^{\frac{3}{2}}\rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

$$l=\int_{0}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^{2}}\,dy+\int_{0}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^{2}}\,dy=\int_{0}^{1}\sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy+\int_{0}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy$$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_{0}^{1}+\frac{4}{9}\left(\frac{\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_{0}^{4}=\frac{21}{2}$$

جواب تمرینات فوق العاده ریاضی یک

سوال اول: انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{2}}}$$

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^{2}}}=\int \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^{2}}}$$

تغییر متغیر $z=2x-1$ و لذا $dz=2dx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I=\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}}=\sin^{-1} z+c=\sin^{-1}(2x-1)+c$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{1}+\sqrt[4]{\boldsymbol{x}}}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}$$

تغییر متغیر $u^{3}=1+\sqrt[4]{x}$ و لذا $3u^{2}du=\frac{dx}{4\sqrt[4]{x^{3}}}$ در نظر بگیرید که داریم:

$$dx=12u^{2}\sqrt[4]{x^{3}}du=12u^{2}(u^{3}-1)^{3}du\ ,\qquad \sqrt{x}=(u^{3}-1)^{2}$$

$$I=12\int \frac{u^{3}(u^{3}-1)^{3}}{(u^{3}-1)^{2}}du=12\int (u^{6}-u^{3})du=12\left(\frac{u^{7}}{7}-\frac{u^{4}}{4}\right)+c$$

$$=12\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{7}{3}}}{7}-\frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}}}{4}\right)+c$$

$$\int \boldsymbol{x}(\boldsymbol{tg}^{-1}\boldsymbol{x})^{2}\boldsymbol{dx}$$

$$\begin{cases} u=(tg^{-1}x)^{2}\rightarrow du=\dfrac{2tg^{-1}x}{1+x^{2}}dx \\ dv=xdx\rightarrow v=\dfrac{x^{2}}{2} \end{cases}$$

$$I=\frac{x^{2}}{2}(tg^{-1}x)^{2}-\int \frac{x^{2}tg^{-1}x}{1+x^{2}}dx$$

حال تغییر متغیر $z=tg^{-1}x$ و متعاقب آن $dz=\frac{dx}{1+x^{2}}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I=\frac{x^{2}}{2}(tg^{-1}x)^{2}-\int ztg^{2}zdz=\frac{x^{2}}{2}(tg^{-1}x)^{2}+\int (z-zsec^{2}z)dz$$

$$=\frac{x^{2}}{2}(tg^{-1}x)^{2}+\frac{z^{2}}{2}-\int zsec^{2}zdz$$

$$\begin{cases} u = z \to du = dz \\ dv = sec^2 zdz \to v = tgz \end{cases}$$

$$I = \frac{x^2}{2}(tg^{-1}x)^2 + \frac{z^2}{2} - ztgz + \int tgzdz$$

$$= \frac{x^2}{2}(tg^{-1}x)^2 + \frac{z^2}{2} - ztgz + ln|secz| + C$$

$$= \frac{x^2}{2}(tg^{-1}x)^2 + \frac{(tg^{-1}x)^2}{2} - xtg^{-1}x + ln|\sec(tg^{-1}x)| + C$$

$$\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + tgx)\, dx}$$

تغییر متغیر $z = \frac{\pi}{4} - x$ و لذا $dz = -dx$ که $\frac{\pi}{4} \leftrightarrow 0$ را در نظر بگیرید:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + tg(\frac{\pi}{4} - z)\right) dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tgz}{1 + tg\left(\frac{\pi}{4}\right) tgz}\right) dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - tgz}{1 + tgz}\right) dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + tgz}\right) dz$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\, dz - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + tgz)\, dz = \frac{\pi}{4} ln2 - I \to 2I = \frac{\pi}{4} ln2 \to I = \frac{\pi}{8} ln2$$

$$\boldsymbol{I = \int \frac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} dx}$$

$$I = \int \frac{(2x + 1) + 2}{\sqrt{(2x + 1)^2 + 4}} dx$$

مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه 2 و $2x + 1$ و وتر $\sqrt{(2x + 1)^2 + 4}$ را در نظر بگیرید که θ زاویه بین ضلع به طول 2 و وتر است، داریم:

$$tg\theta = \frac{2x + 1}{2} \to 2x + 1 = 2tg\theta \to 2dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{2tg\theta + 2}{\sqrt{4tg^2\theta + 4}} \sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{tg\theta + 1}{\sqrt{\sec^2\theta}} \sec^2\theta\, d\theta = \int (tg\theta sec\theta + sec\theta) d\theta$$

$$= \int \left(\frac{sin\theta}{cos\theta} + sec\theta\right) d\theta = \frac{1}{cos\theta} + ln|sec\theta + tg\theta| + c = \frac{1}{cos\theta} + ln\left|\frac{1}{cos\theta} + tg\theta\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt{(2x + 1)^2 + 4}}{2} + ln\left|\frac{\sqrt{(2x + 1)^2 + 4}}{2} + \frac{2x + 1}{2}\right| + c$$

$$\boldsymbol{I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^a - e^x}}}$$

مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه $\sqrt{e^a - e^x}$ و $e^{\frac{x}{2}}$ و وتر $e^{\frac{a}{2}}$ را در نظر بگیرید که θ زاویه بین ضلع به طول $\sqrt{e^a - e^x}$ و وتر است، داریم:

$$sin\theta = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{a}{2}}} = e^{\frac{x}{2}-\frac{a}{2}} \to cos\theta d\theta = \frac{1}{2}e^{\frac{-a}{2}}e^{\frac{x}{2}}dx \to dx = 2e^{\frac{-a}{2}}cos\theta e^{\frac{a}{2}}csc\theta d\theta$$

$$cos\theta = \frac{\sqrt{e^a - e^x}}{e^{\frac{a}{2}}} \to \sqrt{e^a - e^x} = e^{\frac{a}{2}}cos\theta$$

$$I = 2e^{\frac{-a}{2}}\int csc\theta d\theta = -2e^{\frac{-a}{2}}ln|cot\theta + csc\theta| + c = -2e^{\frac{-a}{2}}ln\left|\frac{\sqrt{e^a - e^x} + e^{\frac{a}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}\right| + c$$

سوال دوم: فرض کنید $\boldsymbol{f: [0,1] \to \mathbb{R}}$ مشتق دوم پیوسته داشته باشد، $\boldsymbol{f(0) = f(1) = 0}$ و به ازای هر $\boldsymbol{x \in (0,1)}$ داشته باشیم $\boldsymbol{f(x) > 0}$ ، نشان دهید:

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{|f''(x)|}{f(x)}dx > 4}$$

نقطه $c \in (0,1)$ را در نظر بگیرید که:

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (0,1) \to \frac{|f''(x)|}{f(x)} \geq \frac{|f''(x)|}{f(c)}$$

$$\to \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{f(x)}dx \geq \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{f(c)}dx = \frac{1}{f(c)}\int_0^1 |f''(x)|dx \geq \frac{1}{f(c)}\left|\int_0^1 f''(x)dx\right|$$

حال قضیه مقدار میانگین را روی بازه های $(0,c)$ و $(c,1)$ به کار می‌بریم:

$$\exists x_1 \in (0,c):\ f'(x_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}$$

$$\exists x_2 \in (c,1):\ f'(x_1) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{-f(c)}{1 - c}$$

$$\frac{1}{f(c)}\left|\int_0^1 f''(x)dx\right| > \frac{1}{f(c)}\left|\int_{x_1}^{x_2} f''(x)dx\right| = \frac{1}{f(c)}\left|\left(f'(x)\right)_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$= \frac{1}{f(c)}|f'(x_2) - f'(x_1)| = \frac{1}{f(c)}\left|\frac{-f(c)}{1-c} - \frac{f(c)}{c}\right| = \frac{1}{c(1-c)}$$

بنابراین به ازای ماکزیمم تابع $g(c) = c(1 - c)$ مینیمم کسر $\frac{1}{c(1-c)}$ به دست می‌آید، لذا داریم:

$$g(c) = c - c^2 \to g'(c) = 1 - 2c$$

$$g'(c) = 0 \to c = \frac{1}{2} \to g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \to \frac{1}{c(1-c)} \geq 4$$

سوال سوم: انتگرال ناسره $\int_2^\infty \left(\frac{cx}{x^2+2} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$ به ازای مقدار حقیقی c همگراست. c را به دست آورید و مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_2^\infty \left(\frac{cx}{x^2+2} - \frac{1}{2x+1}\right) dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \left(\frac{cx}{x^2+2} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{c}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right)_2^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{c}{2}(\ln(b^2+2) - ln6) - \frac{1}{2}(\ln(2b+1) - \ln 5)\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left(\frac{(b^2+2)^{\frac{c}{2}}}{(2b+1)^{\frac{1}{2}}}\right)\right) - \frac{c}{2} ln6 + \frac{1}{2} ln5$$

برای همگرایی باید داشته باشیم:

$$(2)\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2} \to c = \frac{1}{2}$$

لذا برای مقدار انتگرال داریم:

$$\int_2^\infty \left(\frac{cx}{x^2+2} - \frac{1}{2x+1}\right) dx = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} ln6 + \frac{1}{2} ln5$$

سوال چهارم: همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی و در صورت همگرایی، مقدار آن را بیابید.

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2} dx}$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^\infty xe^{-x^2} dx$$

در انتگرال I_2 تغییر متغیر $x = -u$ و متعاقبا $dx = -du$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I_2 = \int_0^{-\infty} (-u)e^{-u^2}(-1)du = -\int_{-\infty}^0 ue^{-u^2} du = -I_1$$

$$I = I_1 - I_1 = 0$$

$$\boldsymbol{\int_1^\infty \frac{lnx}{x} dx}$$

$$I > \int_3^\infty \frac{lnx}{x} dx > \int_3^\infty \frac{1}{x} dx = \infty \to \text{انتگرال واگراست}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{9+x^6}}\boldsymbol{dx}$$

$I = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}dx < 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4}dx < \infty \rightarrow$ انتگرال همگراست

تغییر متغیر $u = x^3$ و متعاقبا $du = 3x^2dx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$I = \frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{1}{9+u^2}du = \frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{9}}{1+\left(\frac{u}{3}\right)^2}du = \frac{2}{9}\int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{u}{3}\right)^2}du$$

$$= \left(\frac{2}{9}arctg\left(\frac{u}{3}\right)\right)_0^{\infty} = \frac{2}{9}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{9}$$

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\infty} \frac{\boldsymbol{xlnx}}{(\boldsymbol{x^2+1})^2}\boldsymbol{dx}$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{xlnx}{(x^2+1)^2}dx + \int_1^{\infty} \frac{xlnx}{(x^2+1)^2}dx$$

$$I_1:\ f(x) = \frac{xlnx}{(x^2+1)^2}\ , g(x) = 1\ , \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{xlnx}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 dx = 1 < \infty \rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \infty$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{xlnx}{(x^2+1)^2}dx < \int_1^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx < \int_1^{\infty} \frac{x^2}{(x^2)^2}dx < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

لذا چون I_1 و I_2 همگرا هستند پس I همگراست.

$$I_2:\ x = \frac{1}{t}\ , dx = \frac{-1}{t^2}dt\ , 1 \rightarrow 1\ , \infty \rightarrow 0$$

$$I_2 = \int_1^0 \frac{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2}\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt = -\int_0^1 \frac{tlnt}{(t^2+1)}dt = -I_1$$

$$I_1 + I_2 = 0 \rightarrow I = 0$$

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\infty} \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x^2+1})\sqrt{\boldsymbol{x^2+4}}}$$

$$x \geq 0 \rightarrow (x^2+1)\sqrt{x^2+4} > x^2+1 \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}} < \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty}(arctg)_0^b = \lim_{b\to\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}} \qquad x = 2tg\theta \to dx = 2\sec^2\theta\, d\theta\ ,0 \to 0\ ,\infty \to \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4tg^2\theta+1)\sqrt{4tg^2\theta+4}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2sec\theta d\theta}{4tg^2\theta+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2cos\theta d\theta}{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\theta d\theta}{1+3\sin^2\theta} \qquad u = sin\theta \to du = cos\theta d\theta\ ,0 \to 0\ ,\frac{\pi}{2} \to 1$$

$$I = \int_0^1 \frac{du}{1+3u^2} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{du}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+u^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} arctg\, \frac{u}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)_0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

سوال پنجم: به ازای مقادیر مختلف $p \in \mathbb{R}$ همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(x^4-16)^p}$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(x^4-16)^p} = I_1 + I_2 = \int_2^3 \frac{dx}{(x^4-16)^p} + \int_3^\infty \frac{dx}{(x^4-16)^p}$$

$$I_1:\ f(x) = \frac{1}{(x^4-16)^p}\ \ ,g(x) = \frac{1}{(x-2)^p}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{(x^4-16)^p}}{\frac{1}{(x-2)^p}} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^p}{(x^2+4)^p(x+2)^p(x-2)^p} = \left(\frac{1}{32}\right)^p \neq 0,\infty$$

$$\int_2^3 g(x)dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^p}dx = \int_0^1 \frac{1}{t^p}dt = \left(\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right)_0^1 \to -p+1 > 0 \to p < 1$$

$$I_2:\ f(x) = \frac{1}{(x^4-16)^p}\ \ ,g(x) = \frac{1}{x^{4p}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(x^4-16)^p}}{\frac{1}{x^{4p}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{4p}}{(x^4-16)^p} = 1 \neq 0,\infty$$

$$\int_3^\infty g(x)dx = \int_3^\infty \frac{1}{x^{4p}}dx = \left(\frac{x^{-4p+1}}{-4p+1}\right)_3^\infty \to -4p+1 < 0 \to p > \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} < p < 1$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln\left(coshx\right)}{x^{p}}\, dx$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln\left(coshx\right)}{x^{p}} dx = I_1 + I_2 = \int_{0}^{1} \frac{\ln\left(coshx\right)}{x^{p}} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\ln\left(coshx\right)}{x^{p}} dx$$

$$I_1:\ f(x) = \frac{\ln\left(coshx\right)}{x^{p}} \quad , g(x) = \frac{x^2}{x^p}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln\left(coshx\right)}{x^{p}}}{\frac{x^2}{x^p}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(coshx\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty$$

$$\int_{0}^{1} g(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x^p} dx = \int_{0}^{1} x^{2-p} dt = \left(\frac{x^{3-p}}{3-p}\right)_{0}^{1} \rightarrow 3 - p > 0 \rightarrow p < 3$$

$$I_2:\ f(x) = \frac{\ln\left(coshx\right)}{x^{p}} \quad , g(x) = \frac{x}{x^p}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln\left(coshx\right)}{x^{p}}}{\frac{x}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(coshx\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{sinhx}{coshx}}{1} = 1 \neq 0, \infty$$

$$\int_{1}^{\infty} g(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{x}{x^p} dx = \int_{1}^{\infty} x^{1-p}\, dx = \left(\frac{x^{2-p}}{2-p}\right)_{1}^{\infty} \rightarrow 2 - p < 0 \rightarrow p > 2$$

$$\rightarrow 2 < \mathrm{p} < 3$$

سوال ششم: طول نمودار تابع $f(x) = \int_0^x \sqrt{|sint|}dt$ را در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ بیابید.

$$l = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\sqrt{|sinx|}\right)^2}\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + sinx} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \left(-2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(0) - \sin(0)\right) = 2$$

سوال هفتم: طول خم‌های زیر را بیابید.

$$\boldsymbol{x = \ln(1+t^2)\,,\, y = 2tg^{-1}t\,,\, 0 \le t \le 1}$$

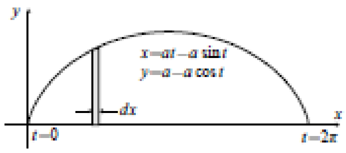
$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{4t^2+4}{(1+t^2)^2}}\, dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

تغییر متغیر $t = tg\theta$ و متعاقبا $dt = \sec^2\theta\, d\theta$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$l = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec\theta d\theta = 2(ln|sec\theta + tg\theta|)_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\ln\,(1+\sqrt{2})$$

سوال هشتم: حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین محور x و یک طاق چرخزاد $x = at - asint$ و $y = a - acost$ را حول محور x بیابید.



$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} \big(y(t)\big)^2 x'(t) dt = \pi \int_0^{2\pi} (a - acost\,)^2 a(1-cost)dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-cost)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3cost + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt = 5\pi^2 a^3$$

جواب تمرینات سری ششم ریاضی یک

سوال اول: فرض کنید $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$، نشان دهید که دنباله $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار است. به این ترتیب نتیجه بگیرید دنباله همگراست و حد آن را بیابید.

طبق تعریف دنباله داریم $a_2 = \sqrt{1+2a_1} = \sqrt{3} > a_1$ با اثبات از طریق استقرا فرض کنید $a_k > a_{k-1}$ و می‌بایست نشان دهیم $a_{k+1} > a_k$ داریم:

$$a_{k+1} = \sqrt{1+2a_k} > \sqrt{1+2a_{k-1}} = a_k$$

لذا دنباله $\{a_n\}$ صعودی است از طرفی $a_1 < 3$ و $a_2 < 3$، مجددا با اثبات به کمک استقرا فرض کنید که $a_k < 3$ و می‌بایست نشان دهیم که $a_{k+1} < 3$، داریم:

$$a_{k+1} = \sqrt{1+2a_k} < \sqrt{1+2(3)} = \sqrt{7} < 3$$

لذا دنباله از بالا نیز کراندار است بنابراین طبق صعودی و از بالا کرانداری، همگراست. فرض کنید حد دنباله عددی مانند α باشد لذا از جایی به بعد جملات دنباله با یکدیگر یکسان و برابر α هستند و داریم:

$$\alpha = \sqrt{1+2\alpha} \to \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \to \alpha = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

توجه داشته باشید چون جمله اول دنباله مثبت و دنباله صعودی است، جواب منفی معادله فوق قابل قبول نیست.

سوال دوم: فرض کنید $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و لذا $\ln(a_n) = nln(1+\frac{1}{n})$، با استفاده از این ویژگی تابع لگاریتمی نشان دهید:

آ) دنباله $\{a_n\}$ صعودی است.

تابع $f(x) = xln(1+\frac{1}{x})$ را برای $x \geq 1$ در نظر بگیرید، داریم:

$$f(x) = xln\left(\frac{x+1}{x}\right) = xln(x+1) - xlnx$$

$$\to f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - lnx - 1 = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$= \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{x+1} > \frac{1}{x+1}\int_x^{x+1} dt - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 0$$

در نتیجه تابع $f(x)$ صعودی است لذا دنباله $\ln(a_n)$ و متعاقبا دنباله $a_n = e^{\ln(a_n)}$ صعودی است.

ب) e یک کران بالا برای $\{a_n\}$ است.

از آنجا که $\ln(x) \leq x-1$ داریم:

$$\ln(a_n) = nln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq n\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = 1 \to a_n = e^{\ln(a_n)} \leq e^1 = e$$

سوال سوم: حدود مبهم زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{xlnx-x+1}{(x-1)lnx}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{lnx}{lnx+1-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{x}}$$

$$y=(1+tgx)^{\frac{1}{x}}\to \ln(y)=\ln\left((1+tgx)^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{x}\ln(1+tgx)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(y)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+tgx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1+tgx}=1\to \lim_{x\to 0}y=e^1=e$$

سوال چهارم: در همگرایی و واگرایی سری‌های زیر بحث کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

همگرایی مطلق این سری را بررسی می‌کنیم، لذا سری زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

از آزمون مقایسه حدی با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n-1}.\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,\infty$$

لذا دو سری هم رفتار هستند و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ همگراست، سری فوق همگراست. حال چون سری داده شده مطلقا همگراست پس همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\sqrt{n}}$$

برای استفاده از آزمون انتگرال می‌بایست تابع نزولی بودن تابع $f(x)=xe^{-\sqrt{x}}$ را بررسی کنیم، داریم:

$$f'(x)=e^{-\sqrt{x}}-\frac{x}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}=e^{-\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

لذا اگر $x<4$ داریم $f'(x)>0$ و اگر $x\geq 4$ داریم $f'(x)\leq 0$ لذا تابع f روی بازه $[4,\infty)$ نزولی است و سری را بر اساس این مقدار تفکیک می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{3}ne^{-\sqrt{n}}+\sum_{n=4}^{\infty}ne^{-\sqrt{n}}$$

مقدار $\sum_{n=1}^{3} ne^{-\sqrt{n}}$ متناهی است و کافی است همگرایی یا واگرایی $\sum_{n=4}^{\infty} ne^{-\sqrt{n}}$ بررسی کنیم، داریم:

$$\int_4^{\infty} xe^{-\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_4^{b} xe^{-\sqrt{x}}dx\right)$$

تغییر متغیر $z=\sqrt{x}$ و لذا $dz=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ که $4\to 2$ و $b\to\sqrt{b}$ در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_4^{b} xe^{-\sqrt{x}}dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left(2\int_4^{\sqrt{b}} z^3e^{-z}dz\right) = 2\lim_{b\to\infty}\left((-e^{-z}z^3)_4^{\sqrt{b}} + 3\int_4^{\sqrt{b}} z^2e^{-z}dz\right)$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-\sqrt{b}}b^{\frac{3}{2}} + 64e^{-4} + 3\int_4^{b} z^2e^{-z}dz\right)$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-\sqrt{b}}b^{\frac{3}{2}} + 64e^{-4} - (3z^2e^{-z})_4^{\sqrt{b}} + 6\int_4^{\sqrt{b}} ze^{-z}dz\right)$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-\sqrt{b}}b^{\frac{3}{2}} + 64e^{-4} - 3be^{-\sqrt{b}} + 48e^{-4} - (6ze^{-z})_4^{\sqrt{b}} + 6\int_4^{\sqrt{b}} e^{-z}dz\right)$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-\sqrt{b}}b^{\frac{3}{2}} + 64e^{-4} - 3be^{-\sqrt{b}} + 48e^{-4} - 6\sqrt{b}e^{-\sqrt{b}} + 24e^{-4} - 6e^{-\sqrt{b}} + 6e^{-4}\right)$$

$$= 284e^{-4} - 2\lim_{b\to\infty}\left(\left(b^{\frac{3}{2}} + 3b + 6\sqrt{b} + 6\right)e^{-\sqrt{b}}\right) = 284e^{-4} - 0 = 284e^{-4}$$

توجه داشته باشید که با محاسبه حد هر یک از جملات فوق با روش هوپیتال به مقدار صفر می‌رسیم، به عنوان مثال:

$$\lim_{b\to\infty} b^{\frac{3}{2}}e^{-\sqrt{b}} = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{\frac{3}{2}}}{e^{\sqrt{b}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{3}{2}b^{\frac{1}{2}}}{\frac{b^{\frac{-1}{2}}}{2}e^{\sqrt{b}}} = 3\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{\sqrt{b}}} = 3\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\frac{b^{\frac{-1}{2}}}{2}e^{\sqrt{b}}} = 6\lim_{b\to\infty}\frac{b^{\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{b}}}$$

$$= 6\lim_{b\to\infty}\frac{\frac{b^{\frac{-1}{2}}}{2}}{\frac{b^{\frac{-1}{2}}}{2}e^{\sqrt{b}}} = 6\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{b}}} = 0$$

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}(\sqrt[n]{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{1})$$

از آزمون مقایسه حدی با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-(ln2)2^{\frac{1}{n}}}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}(ln2)2^{\frac{1}{n}} = ln2 \neq 0,\infty$$

لذا دو سری هم رفتار هستند و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست، سری فوق واگراست.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}e^{-n}$$

از آزمون مقایسه حدی با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{n}$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}e^{-n}}{\left(\frac{1}{e}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}=1\neq 0,\infty$$

لذا دو سری هم رفتار هستند و چون سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{n}$ همگراست، سری فوق همگراست.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(\ln(n))}}$$

$$x^{a}=e^{alnx}\to(\ln(n))^{\ln(\ln(n))}=e^{(\ln(\ln(n)))(\ln(\ln(n)))}=e^{(\ln(\ln(n)))^{2}}$$

$$lnx<\sqrt{x}\to\ln(\ln(n))<\sqrt{\ln(n)}\to(\ln(\ln(n)))^{2}<\ln(n)$$

$$\to e^{(\ln(\ln(n)))^{2}}<e^{\ln(n)}\to\frac{1}{e^{\ln(n)}}<\frac{1}{e^{(\ln(\ln(n)))^{2}}}\to\frac{1}{n}<\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(\ln(n))}}$$ واگرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^{2}}{(2n)!}$$

$$a_{n}=\frac{2^{2n}(n!)^{2}}{(2n)!}=\frac{2^{2n}(n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1)^{2}}{2n\times(2n-1)\times\ldots\times 2\times 1}=\frac{(2n\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2)^{2}}{2n\times(2n-1)\times\ldots\times 2\times 1}$$

$$=\frac{2n\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}=\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n-2}{2n-3}\times\ldots\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{1}>1$$

لذا چون هر جمله از دنباله بزرگتر از یک است، لذا سری حاصل از این دنباله واگراست.

سوال پنجم: در همگرایی و واگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p}\ln(n)}$ به ازای مقادیر مختلف $p\geq 0$ بحث کنید.

چون تابع $f(x)=\frac{1}{x^{p}\ln(x)}$ روی بازه $[2,\infty)$ پیوسته و نزولی است از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x^{p}\ln(x)}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\int_{2}^{b}\frac{1}{x(\ln(x))^{p}}dx\right)$$

تغییر متغیر $z=lnx$ و لذا $dz=\frac{dx}{x}$ را که $2\to ln2$ و $b\to lnb$ در نظر بگیرید، داریم:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_{2}^{b}\frac{1}{x(\ln(x))^{p}}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\int_{ln2}^{lnb}\frac{1}{z^{p}}dz\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\left(\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right)_{ln2}^{lnb}\right)$$

اگر $p>1$ انتگرال فوق و لذا سری همگراست و برای سایر مقادیر واگراست.

سوال ششم: برای گزاره درست، اثبات و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه کنید.

الف) اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو واگرا باشند آن‌گاه $\sum(a_n + b_n)$ نیز واگراست.

گزاره نادرست است، دو سری واگرای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ را در نظر بگیرید که $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(0) = 0$ همگراست.

ب) اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_n \geq c > 0$ آن‌گاه $\sum a_n$ به بی نهایت واگراست.

گزاره درست است است، زیرا داریم:

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n > \sum_{n=1}^{m} c = cm$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} (cm) = c \lim_{m\to\infty} m = \infty$$

سوال هفتم: فرض کنید سری‌های $\sum(a_n)^2$ و $\sum(b_n)^2$ همگرا باشند، نشان دهید سری $\sum(a_n b_n)$ همگراست.

$$0 \leq \sum(a_n - b_n)^2 = \sum(a_n)^2 + \sum(b_n)^2 - 2\sum(a_n b_n)$$

$$\rightarrow \sum(a_n b_n) \leq \frac{1}{2}\left(\sum(a_n)^2 + \sum(b_n)^2\right) \quad (1)$$

$$0 \leq \sum(a_n + b_n)^2 = \sum(a_n)^2 + \sum(b_n)^2 + 2\sum(a_n b_n)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\left(\sum(a_n)^2 + \sum(b_n)^2\right) \leq \sum(a_n b_n) \quad (2)$$

لذا چون دو سری $\sum(a_n)^2$ و $\sum(b_n)^2$ همگرا هستند، طبق روابط (1) و (2) سری $\sum(a_n b_n)$ همگراست.

سوال هشتم: اگر $a_n > 0$ و $\sum a_n$ همگرا باشد، نشان دهید سری‌های $\sum(a_n)^2$، $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ و $\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ همگرا هستند.

قسمت اول: چون $\sum a_n$ همگراست لذا $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ بنابراین:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \;\; 0 \leq a_n \leq 1 \rightarrow \forall n \geq N \quad a_n^2 \leq a_n$$

حال چون $\sum a_n$ همگراست و $a_n > 0$ لذا $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگراست و داریم:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \infty \quad (1)$$

از طرفی $\sum_{n=1}^{N-1} a_n^2$ با توجه به این که مجموع تعداد متناهی عدد است داریم:

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 < \infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 + \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

طبق تمرین قبل می‌دانیم اگر $\sum(x_n)^2$ و $\sum(y_n)^2$ همگرا باشند، آن‌گاه $\sum(x_n y_n)$ همگراست.

قسمت دوم: قرار دهید $x_n=\sqrt{a_n}$ و $y_n=\sqrt{a_{n+1}}$ لذا $\sum(x_n)^2=\sum a_n$ و $\sum(y_n)^2=\sum a_{n+1}$ همگرا هستند در نتیجه سری $\sum(x_ny_n)=\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$ همگراست.

قسمت سوم: قرار دهید $x_n=\sqrt{a_n}$ و $y_n=\frac{1}{n}$ لذا $\sum(x_n)^2=\sum a_n$ و $\sum(y_n)^2=\sum(\frac{1}{n^2})$ همگرا هستند در نتیجه سری $\sum(x_ny_n)=\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ همگراست.

سوال نهم: مرکز، شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری‌های زیر را بیابید.

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(4-x)^n}$$

سری فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(4-x)^n=\frac{(-1)^ne^n}{n^3}(x-4)^n$$

لذا مرکز همگرایی سری فوق $x=4$ است و شعاع همگرایی برابر است با:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^ne^n}{n^3}}{\frac{(-1)^{n+1}e^{n+1}}{(n+1)^3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{(-1)en^3}\right|=\frac{1}{e}$$

حال به بررسی همگرایی در نقاط مرزی می‌پردازیم:

$$x=4+\frac{1}{e}:\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$$

طبق آزمون لایب نیتز چون دنباله $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ نزولی، نامنفی و همگرا به صفر است، سری فوق همگراست.

$$x=4-\frac{1}{e}:\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

سری فوق نیز همگراست لذا بازه همگرایی سری فوق $[4-\frac{1}{e},4+\frac{1}{e}]$ است.

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{3^n(n^2+1)}}$$

سری فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{3^n(n^2+1)}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2+1}\left(x+\frac{5}{2}\right)^n$$

لذا مرکز همگرایی سری فوق $x=\frac{-5}{2}$ است و شعاع همگرایی برابر است با:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(n^2+2n+2)}{2(n^2+1)}\right|=\frac{3}{2}$$

حال به بررسی همگرایی در نقاط مرزی می‌پردازیم:

$x = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2} = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{همگرا}$$

$x = \frac{-5}{2} - \frac{3}{2} = -4$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

طبق آزمون لایب نیتز چون دنباله $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ نزولی، نامنفی و همگرا به صفر است، سری فوق همگراست.

بنابراین بازه همگرایی سری فوق $[-4, -1]$ است.

سوال دهم: مقدار عددی سری‌های زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1) \to \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\to \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$$

حال قرار دهید $x = \frac{-1}{2}$ لذا داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2^{n-1}} = \frac{16}{27}$$

$$\to -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n} = \frac{16}{27} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n} = \frac{-8}{27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1) \to \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1) \to \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$$

حال قرار دهید $x = \frac{1}{\pi}$ لذا داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\frac{1}{\pi})^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\pi^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{\pi^n} = \frac{1+\frac{1}{\pi}}{\left(1-\frac{1}{\pi}\right)^3} = \frac{\pi^2(\pi+1)}{(\pi-1)^3}$$

سوال یازدهم: به ازای چه مقادیری از x سری‌های زیر مطلقا یا به طور مشروط همگرا هستند.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2^n \ln{(n)}}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\ln{(n+1)}}}{\frac{x^n}{2^n\ln{(n)}}}\right| = \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln{(n)}}{\ln{(n+1)}}\right| = \frac{|x|}{2}$$

اگر $\frac{|x|}{2} < 1$ و لذا $|x| < 2$ و در نتیجه $-2 < x < 2$ سری فوق همگرای مطلق است.

با جایگذاری $x = -2$ داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\ln{(n)}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln{(n)}}$$

که طبق آزمون لایب نیتز چون $\left\{\frac{1}{\ln(n)}\right\}$ نزولی، نامنفی و همگرا به صفر است، سری فوق همگراست لذا به ازای $x = -2$ همگرایی مشروط داریم.

با چایگذاری $x = 2$ داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\ln{(n)}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln{(n)}}$$

که چون به ازای $n \geq 2$ داریم $\ln(n) < n$ لذا داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln{(n)}} > \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{واگرا}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2 2^{2n+2}}}{\frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}}\right| = \frac{|x-2|}{4}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \frac{|x-2|}{4}$$

اگر $\frac{|x-2|}{4} < 1$ و لذا $|x-2| < 4$ و در نتیجه $-2 < x < 6$ سری فوق همگرای مطلق است.

با جایگذاری $x = -2$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{n^2 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

طبق آزمون لایب نیتز چون $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ نزولی، نامنفی و همگرا به صفر است، سری فوق همگراست لذا به ازای $x = -2$ سری فوق همگرای مشروط است.

با جایگذاری $x = 6$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4)^n}{n^2 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^2 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{همگرا}$$

بنابراین به ازای $x = 6$ نیز سری فوق همگرای مشروط است.

سوال دوازدهم: الف) با استفاده از سری مکلورن تابع $tg^{-1}x$ نشان دهید:

$$\boldsymbol{\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}}$$

$$tg^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad -1 \le x \le 1$$

با جایگذاری $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ داریم:

$$tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} \to \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

$$\to \pi = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

ب) سری مک لورن تابع $\sin^2 x$ را بیابید و به کمک آن مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ را تا چهار جمله اول بیابید.

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + \cdots\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n (2)^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n (2)^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n (2)^{2n+1}}{(2n+2)(2n+2)!} x^{2n+2}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n (2)^{2n+1}}{(2n+2)(2n+2)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}\right)$$

سوال سیزدهم: مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$ را بیابید.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\to e^{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+3)!}=\frac{1}{(x+2)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+3}}{(n+3)!}=\frac{1}{(x+2)^3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{(x+2)^3}\left(e^{x+2}-\sum_{n=0}^{2}\frac{(x+2)^n}{n!}\right)=\frac{1}{(x+2)^3}(e^{x+2}-1-(x+2)-\frac{(x+2)^2}{2!})$$

best regards

Yarahmadi