



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال دوم ۹۸-۹۹
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی ۲- سری چهارم
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۱. (آدامز بخش ۲- ۱۴ سوالات ۱۶, ۱۷) در هر یک از انتگرال های زیر قلمرو انتگرالگیری را رسم کنید و انتگرال مکرر مفروض را محاسبه کنید.

(آ)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{y}}} \int_y^{\frac{\pi}{\sqrt{y}}} \frac{\sin x}{x} dx dy$$

(ب)

$$I = \int_0^1 \int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2 + y^2} dy dx \quad (\lambda > 0)$$

۲. (آدامز بخش ۲- ۱۴ سوال ۲۷) با استفاده از انتگرال دوگانه حجم محصور به دو استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$ را بیابید.

۳. (آدامز بخش ۳- ۱۴ سوالات ۷, ۹) تعیین کنید انتگرال های زیر همگراست یا واگرا و مقدار انتگرال های همگرا را محاسبه کنید.

$$(آ) \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)} dA \text{ روی ناحیه } \mathbb{R}^2$$

$$(ب) \iint \frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x}} dA \text{ روی ناحیه ای که در رابطه های } x \geq 1 \text{ و } 0 \leq y \leq x \text{ صدق کند.}$$

۴. (آدامز بخش ۳- ۱۴ سوال ۲۳) مقدار متوسط تابع $x^2 + y^2$ بر مثلث $0 \leq x \leq a$ و $0 \leq y \leq a - x$ را بیابید.

۵. (آدامز بخش ۴- ۱۴ سوال ۱۱) مطلوبست محاسبه $\iint (x+y) dA$ روی ناحیه S که در ربع اول، درون قرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ و زیر خط $y = \sqrt{3}x$ قرار گرفته است.

۶. (آدامز بخش ۴- ۱۴ سوال ۲۲) حجم ناحیه ای را که درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و استوانه $x^2 + y^2 = ax$ قرار گرفته است بیابید.

۷. مساحت خارج دایره به معادله $r = 2a \cos(\theta)$ و داخل کاردیوئید $r = a(1 + \cos(\theta))$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

۸. (آدامز بخش ۴- ۱۴ سوال ۳۱) مطلوب است محاسبه $\iint e^{x+y} dA$ روی ناحیه $|x| + |y| \leq a$.

۹. (آدامز بخش ۴- ۱۴ سوال ۳۲) مطلوبست محاسبه $\iint (x^2 + y^2) dA$ روی ناحیه متوازی الاضلاع محصور به خط های $x + y = 1, x + y = 2, 3x + 4y = 5, 3x + 4y = 6$.

۱۰. (آدامز بخش ۴- ۱۴ سوال ۳۵) فرض کنیم T مثلث دارای راس های $(0,0), (1,0), (0,1)$ باشد. انتگرال $\iint \frac{y-x}{y+x} dA$ را

(آ) با تبدیل به مختصات قطبی و

(ب) با تغییر متغیرهای $u = y - x$ و $v = y + x$ محاسبه کنید.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال دوم ۹۸-۹۹
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی ۲- سری چهارم
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۱۱. (میانترم ۹۸-۹۷) انتگرال $\iint_S \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ که در آن S ناحیه بالای محور x و زیر منحنی قطبی $r = 1 + \cos \theta$ است را بصورت انتگرال مکرر در مختصات قطبی بنویسید و حدود انتگرال را بطور دقیق در مختصات قطبی تعیین کنید. (محاسبه انتگرال لازم نیست.)

۱۲. (آدامز بخش ۵-۱۴ سوال ۳) مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint (3 + 2xy) dV$ بر حجم محصور به نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ و $z \geq 4$.

۱۳. (آدامز بخش ۵-۱۴ سوال ۱۳) مطلوبست محاسبه $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-2y^2-3z^2} dV$ روی \mathbb{R}^3 .

۱۴. (آدامز بخش ۵-۱۴ سوال ۱۵) مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint x dV$ روی چهاروجهی محصور به صفحات $x=1, y=1, z=1, x+y+z=2$.

۱۵. (آدامز بخش ۵-۱۴ سوالات ۲۷, ۲۸) در هر یک از انتگرال های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال گیری، محاسبه کنید.

$$I = \int_0^1 dz \int_z^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_y^1 \int_0^{1-x} \int_0^1 \frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)} dz dy dx \quad (\text{ب})$$

۱۶. (آدامز بخش ۶-۱۴ سوال ۲۴) مطلوبست محاسبه $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV$ که در آن، R عبارتست از استوانه $0 \leq z \leq h$ و $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$.

۱۷. (آدامز بخش ۶-۱۴ سوال ۲۷) مطلوبست محاسبه $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV$ که در آن، R ناحیه ای است که بالای مخروط $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ و درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ قرار دارد.

۱۸. (آدامز بخش ۶-۱۴ سوال ۳۳) نشان دهید معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

در دستگاه مختصات استوانه ای بصورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

در می آید.

۱۹. (آدامز بخش ۷-۱۴ سوال ۹) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت آن قسمت از رویه استوانه ای $x^2 + z^2 = 4$ که بالای ناحیه $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq x$ قرار دارد را بیابید.

۲۰. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy$$



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال دوم ۹۹-۹۸
تهیه و تنظیم: مهری رشیدی

گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی ۲- سری چهارم
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

۲۱. (میانترم ۹۷) حجم ناحیه محصور به مخروط های $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ و کره های $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ را محاسبه کنید.

۲۲. اگر D ناحیه خارج $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و زیر مخروط $z = (\sqrt{3} + 1) - \sqrt{x^2 + y^2}$ و بالای صفحه $z = 0$ باشد، کران های $\iiint_V dV$ را در مختصات کروی بنویسید. (محاسبه انتگرال لازم نیست).

۲۳. فرض کنید V درون مخروط $\varphi = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ و رویه $\rho = 1 - \cos \varphi$ و خارج کره $\rho = \frac{3}{4}$ باشد. مطلوبست محاسبه انتگرال زیر $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$.

۲۴. مطلوبست محاسبه حجم محصور به صفحه $z = \cos \alpha$ و مخروط $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ با استفاده از دستگاه مختصات کروی.