メモ：内生的格子法 (Endogenous Gridpoint Method)

1　２期間モデル

価値関数反復法 (Value Function Iteratino: VFI) や時間反復法 (Time Iteration: TI) は、最適化ライブラリを用いて極値やゼロ点を探す際に繰り返し計算が必要になることから簡単なモデルであれば問題にならないが、状態変数の数が多い複雑なモデルであれば計算時間がかかる。また射影法の場合、ゼロ点を探すステップは 1 回限りであるが、一般的に近似の精度を高めるために多項式の次数をあげると、係数を探す時間が大幅に増加する上、係数を見つけられないという可能性もある。そのため、様々な形で計算速度を早める方法が提案されている。Carroll (2006) による**内生的格子法 (Endogenous Gridpoint Method: EGM)** は、オイラー方程式に基づきながら、状態変数と操作変数を近似するタイミングをずらす事で繰り返し計算のステップを大幅に節約している。そのため、"EGM を使うことが出来れるモデルであれば"、計算速度を大幅にアップすることが出来る。

モデルの設定　2 期間モデルの設定を復習しておくと、

$$
\begin{gathered}
\max U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2) \\
\text{subject to} \\
\begin{aligned}
c_1 + a &= w \\
c_2 &= (1+r)a
\end{aligned}
\end{gathered}
$$

である[1]また、一階条件から導出されたオイラー方程式は、

$$
u'(c_1) = (1+r)\beta u'(c_2) \tag{1}
$$

である。

EGM のアルゴリズムは、一見ややトリッキーであるが、実際に手を動かすとさほど難しくない。これまで学習してきた最適化やオイラー方程式を満たす値を探すアプローチは、現在の資産を w だけ保有している経済主体が生涯効用を最大にするためにはどの程度貯蓄 a をすればよいかという形になっていた。言い換えると、現在の状態を所与として、最適性条件を満たす次期の状態変数を探していた。しかし、EGM ではオイラー方程式式に基づきながら、操作変数である a を離散化して、状態変数については予算制約から逆算する。具体的には下記のような手続きで計算する。

[1] ノーテーションは経済セミナーの連載第 2 回を参照。

アルゴリズム

1. パラメータを設定する (カリブレーション)。

2. $a_{(j)} \in \{a_{(1)}, ..., a_{(J)}\}$ を離散化した老年期の資産とする。

3. オイラー方程式 (1) 式の右辺を、

$$\Gamma(a'_{(j)}) \equiv \beta(1+r)[(1+r)a_{(j)}]^{-\gamma}$$

と定義する。β や r は外生的パラメータとして既にカリブレーション済みなので、$a_{(j)}$ を一つ定めれば、この式は容易に計算できる。

4. オイラー方程式より $u'(c_1) = \Gamma(a_{(j)})$ である。効用関数が CRRA 型であれば、限界効用関数の逆関数を計算することは可能なので、

$$c_1 = \Gamma(a'_{(j)})^{-\frac{1}{\gamma}}$$

を計算することが出来る。

5. ステップ 3 を離散化したあらゆる $a_{(j)}$ について計算すれば、ある $a_{(j)}$ の下でオイラー方程式を満たす $c_{(j)}$、すなわち最適な消費と貯蓄の組み合わせを計算したことになる。予算制約は $c_{1,(j)} + a_{(j)} = w$ なので、利用可能な総資産 w の下での消費と貯蓄の組み合わせが計算できた事を意味する。

6. オイラー方程式を満たす $w, a_{(j)}$ の組み合わせを得ることが出来た。これはこれまで計算してきた貯蓄関数と同じである。ただし、このアルゴリズムで得られた w はきれいなグリッド上の値になっているとは限らない点に注意する必要がある。興味がある w のもとでの a を知りたい場合、内挿法を利用する。

2 無限期間モデル

連載第 3 回で紹介した無限期間生存する代表的個人モデルを思い出そう。

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

subject to

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t, \ k_0 \text{ given.}$$

ベルマン方程式の形で書き換えると、

$$V(k) = \max_{k'}\{u(f(k) + (1-\delta)k - k') + \beta V(k')\}, \tag{2}$$

となる。また、オイラー方程式は

$$u(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) f'(k_{t+1}) \tag{3}$$

である。

EGM の一番のポイントは、VFI では現在の状態変数 k を有限個のグリッドで近似するのに対して、次期の資本 k' の方を有限個に区切る点にある。価値関数の右辺第 2 項を

$$\Omega\left(k'_{t+1}\right) = \beta v(k'_{t+1}),$$

と定義し直そう。現金保有高 $x_t \equiv f(k_t) + (1-\delta)k_t$ 上の消費関数を $\tilde{h}(x_t)$ と書くことにする。このとき、包絡線定理から

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \Omega'\left(k'_{t+1}\right), \\ &= \beta(1+r)\tilde{h}(k'_{t+1})^{-\gamma}. \end{aligned}$$

である。そのため、消費関数 $\tilde{h}(x_{t+1})$ の初期値を (例えば線形ルールで) 与えれば、各資産水準 $\{k^1_{t+1}, \ldots, k^n_{t+1}\}$ 上で $\Omega'\left(k'_{t+1}\right)$ を容易に計算出来る。

CRRA 型の限界効用関数は逆関数を計算する事が可能なので、$c^i_t = [\Omega'(k^i_{t+1})]^{-\frac{1}{\gamma}}$ が各グリッド k^i_{t+1} 上で計算出来る。現金保有高は $x^i_t = c^i_t + k^i_{t+1}$ で求められるので、逆算する事によって現金保有高上の新しい政策関数 $\tilde{h}(x_t)$ を導出する事が可能になる。これを繰り返していき、収束したものがオイラー方程式を満たす政策関数である。

- Carroll (2006) で使用された Matlab(&Mathematica) コードは、Carroll 教授の HP に置いてある。

3 参考文献

EGM について更に学びたい場合、下記の論文が参考になる。

- Carroll (2006)、Carroll (2012)、Barillas and Ferńandez-Villaverde (2007)、Hintermaier and Koeniger (2010)、Maliar and Maliar (2013)、Fella (2014)、Iskhakov et al. (2017)

参考文献

Barillas, Francisco and Jesús Ferńandez-Villaverde (2007) "A Generalization of the Endogenous Grid Method," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 31, pp. 2698-2712.

Carroll, Christopher (2006) "The Method of Endogenous Gridpoints for Solving Dynamic Stochastic Optimization Problems," *Economics Letters*, Vol. 91, No. 3, pp. 312-320.

——— (2012) "Solution Methods for Microeconomic Dynamic Stochastic Optimization Problems," Unpublished Manuscript.

Fella, Giulio (2014) "A Generalized Endogenous Grid Method for Non-Smooth and Non-Concave Problems," *Review of Economic Dynamics*, Vol. 17, No. 2, pp. 329-344.

Hintermaier, Thomas and Winfried Koeniger (2010) "The Method of Endogenous Gridpoints with Occasionally Binding Constraints among Endogenous Variables," *Review of Economic Dynamics*, Vol. 34, No. 10, pp. 2074-2088.

Iskhakov, Fedor, Thomas H. Jørgensen, John Rust, and Bertel Schjerning (2017) "The Endogenous Grid Method for Discrete-Continuous Dynamic Choice Models with (or without) Taste Shocks," *Quantitative Economics*, Vol. 8, pp. 217-365.

Maliar, Lilia and Serguei Maliar (2013) "Envelope Condition Method Versus Endogenous Grid Method for Solving Dynamic Programming Problems," *Economics Letters*, Vol. 120, pp. 262-266.