타원, 케플러, 궤도운동

강성훈

2024년 5월 14일

1 타원

타원은 두 초점에서 떨어진 거리의 합이 같은 점들을 모은 것이다.

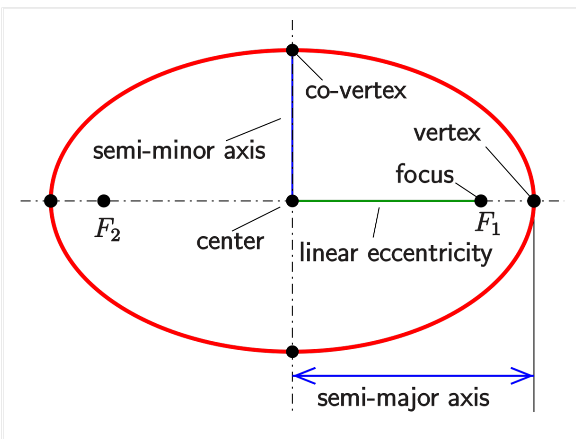

그림 1. https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

수식으로는 보통 직교좌교계에서 아래와 같이 적는다

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

식 (1)의 타원은 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$를 지난다. $a > b$인 경우 x축이 장축$^{\text{major axis}}$, y축이 단축$^{\text{minor axis}}$이 된다. a와 b는 각각 장반경, 단반경이라고 부른다. 이때 초점은 x 축 상의 두 점 $(c, 0)$과 $(-c, 0)$이 되며, 여기서 c는 아래 식을 만족하는 값이다.

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{2}$$

타원의 모양, 즉 타원이 얼마나 찌그러져 있는지 표현하기 위한 값이 2개 있는데, 하나는 이심률$^{\text{eccentricity}}$ e이고 다른 하나는 타원율$^{\text{ellipticity}}$ η이다. 각각은 아래와 같이 정의된다.

$$e = \frac{c}{a} \tag{3}$$

$$\eta = \frac{a-b}{a} \tag{4}$$

타원을 정의하는 다른 방법도 있다. 그림 2와 같이 x 축 상의 어떤 점 $(a, 0)$과 어떤 실수 e에 대해 ($a > 0$, $0 < e < 1$), 점 P와 점 $(ae, 0)$ 간의 거리를 r, 점 P와 직선 $x = a/e$ 간의 거리를 d로 두고 $r/d = e$를 만족하는 점 P의 궤적이 어떤 곡선이 되는지 알아보자.

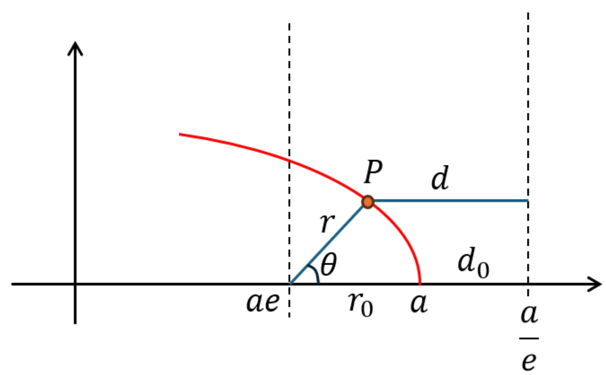

그림 2

점 P의 좌표를 (x, y)로 두면 아래와 같이 쓸 수 있고,

$$x = ae + r\cos\theta = a/e - d$$
$$y = r\sin\theta$$

x, y는 아래 등식을 만족하며,

$$(x - ae)^2 + y^2 = r^2 \tag{5}$$

$r/d = e$임을 이용하면

$$\frac{r^2}{d^2} = e^2 = \frac{(x-ae)^2 + y^2}{(a/e - x)^2}$$
$$(a - xe)^2 = (x - ae)^2 + y^2$$
$$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$$

로부터 아래 형태가 도출된다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \tag{6}$$

점 P가 y축 상에 있을 때의 P의 좌표를 $(0, b)$, 그 때의 r와 d를 각각 r_b, d_b로 두면

$$r_b^2 = a^2e^2 + b^2$$
$$d_b^2 = a^2/e^2$$

가 되고

$$\left(\frac{r_b}{d_b}\right)^2 = \frac{a^2e^2 + b^2}{a^2/e^2} = e^2$$

로부터

$$b^2 = a^2(1-e^2) \tag{7}$$

라는 결론을 얻을 수 있다. 식 (7)을 식 (6)에 대입하여 아래와 같은 타원 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

그림 2에서 직선 $x = a/e$를 타원의 준선$^{\text{directrix}}$이라고 부른다. 물론 직선 $x = -a/e$도 타원의 준선이다.

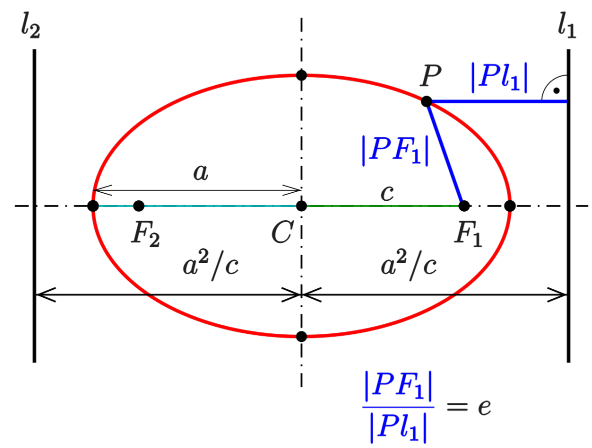

그림3. https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

타원을 식 (8)과 다른 형태로 쓸 수 있다.

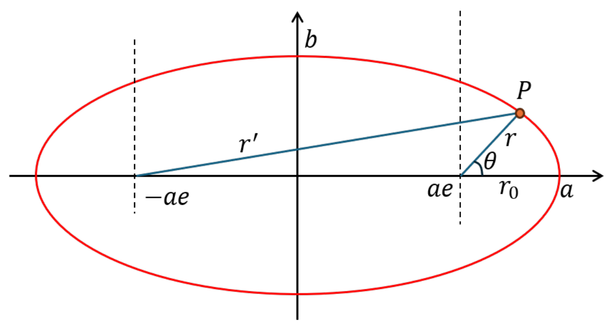

그림 4

그림 4와 같이 초점 $(ae, 0)$과 점 P 사이의 거리를 r, 초점 $(-ae, 0)$와 점 P 사이의 거리를 r'로 두면, 타원의 정의에 의해

$$r + r' = 2a \tag{9}$$

이므로,

$$r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \tag{10}$$

로 쓸 수 있다. 한편 r'는 $(-ae, 0)$과 $(ae + r\cos\theta, r\sin\theta)$ 사이의 거리이므로

$$r'^2 = (2ae + r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta \tag{11}$$

이기도 하여, 두 식 (10)과 (11)을 이용하면

$$
\begin{aligned}
4a^2 - 4ar + r^2 &= (2ae + r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta \\
4a^2 - 4ar &= 4a^2e^2 + 4aer\cos\theta \\
a^2(1-e^2) &= ar(1+e\cos\theta)
\end{aligned}
$$

의 과정을 거쳐

$$
a(1-e^2) = r(1+e\cos\theta) \tag{12}
$$

가 되는데, $r_0 = a(1-e)$임을 이용하면

$$
\frac{r_0}{r} = \frac{1+e}{1+e\cos\theta} \tag{13}
$$

의 형태로 타원을 표현할 수 있음을 알 수 있다. 여기서 θ의 기준이 원점이 아닌 타원의 초점임에 주의하자.

2 행성의 궤도

아이작 뉴턴은 물리학의 걸작 중 하나인 프린키피아를 17세기에 저술했다. 질량을 가진 두 물체, 예를 들면 태양과 지구 사이에 거리의 제곱에 반비례하는 인력이 작용한다는 것은 당시에 이미 어느 정도 알려져 있었다. 그리고 행성의 궤도가 타원이라는 것도 그보다 약 80년 전에 요하네스 케플러가 관측을 통해 밝혔다. 문제는 뉴턴 역학과 만유인력의 법칙으로부터 타원 궤도를 유도하는 것이었다. 이 빈틈을 채운 것이 뉴턴의 프린키피아이다.

두 천체의 질량을 각각 M과 m이라고 하자. 태양과 지구, 태양과 혜성, 지구와 달, 지구와 인공위성 등 어느 짝이든 상관없다. 질량 m이 질량 M 주위를 공전한다. M이 m보다 충분히 커서 M은 거의 움직이지 않는다고 가정한다.

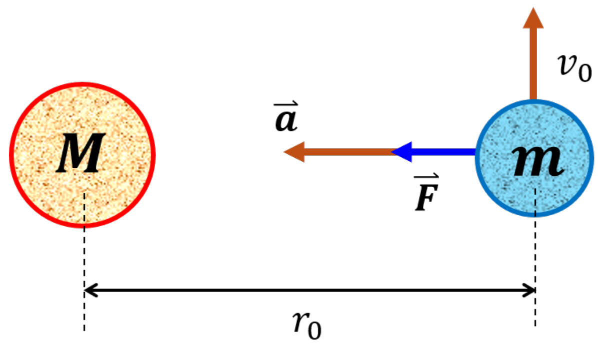

그림 5

그림 5와 같이 어느 순간 M과 m 간의 거리는 r_0, m의 선속도는 v_0이고 선속도의 방향은 M과 m을 잇는 선에 수직이라고 놓다. 뉴턴의 운동 제2법칙인 $F = ma$를 극좌표계에서 쓰면 아래와 같다.

$$
F_r = ma_r = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right) \tag{14}
$$

$$
F_\theta = ma_\theta = m\left(r\alpha + 2\omega\frac{dr}{dt}\right) \tag{15}
$$

그림 5의 상황에서는 θ 방향 힘이 없으므로, 식 (14), (15)는 아래와 같아진다.

$$
-G\frac{Mm}{r^2} = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right) \tag{16}
$$

$$
0 = m\left(r\alpha + 2\omega\frac{dr}{dt}\right) \tag{17}
$$

두 식을 연립하면 미분방정식이 하나 도출되는데, 그 과정이 꽤 복잡해서 여기에는 적지 않겠다. 자세한 내용은 [1], [2] 등을 참고해보기 바란다. 도출되는 미분방정식은 아래와 같은데, $u = 1/r$로 치환한 것이다.

$$
\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{r_0^2v_0^2} \tag{18}
$$

이 미분방정식의 일반해는 아래와 같으며,

$$
u = A\sin\theta + B\cos\theta + \frac{GM}{r_0^2v_0^2} \tag{19}
$$

초기조건을 대입하면 아래의 결과물이 나온다.

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{r_0^2 v_0^2}\right)\cos\theta + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \tag{20}$$

아래와 같이 치환하고 정리하면

$$e' \coloneqq \frac{GM}{r_0 v_0^2} \tag{21}$$

식 (20)은 아래와 같이 바뀌는데

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1}{(1-e')\cos\theta + e'} \tag{22}$$

타원을 표현하는 식 (13)의 형태로 맞추기 위해 $e' = 1/(1+e)$로 두면,

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1+e}{1+e\cos\theta} \tag{23}$$

가 되어 질량 m의 궤도가 타원이고 질량 M의 위치가 바로 타원의 초점임을 알 수 있다. 이 타원의 이심률은 아래와 같다.

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{24}$$

미분방정식이 없던 시절에 뉴턴이 어떻게 이 결론에 도달했는지 궁금하다. 천체의 궤도가 타원임은 케플러 제1 법칙이기도 하다.

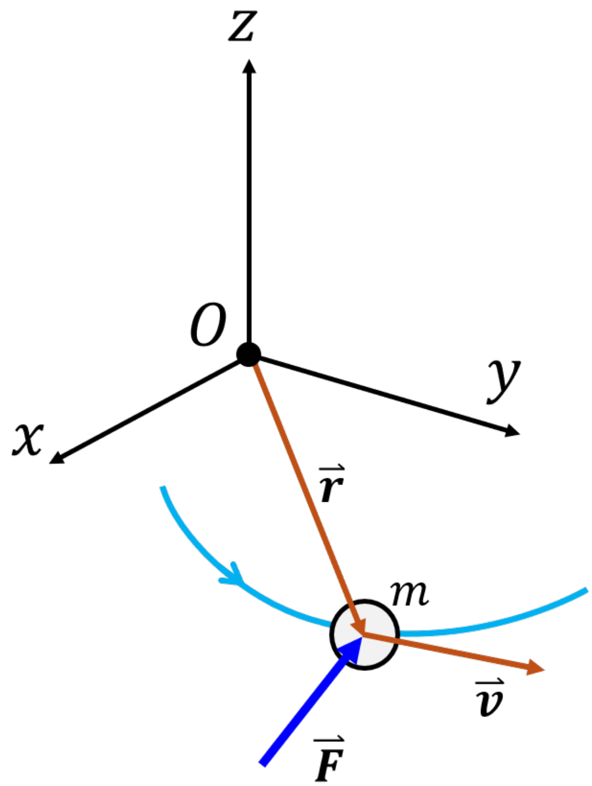

그림 6

3 각운동량 보존과 케플러 법칙

이제 케플러 제2법칙과 제3법칙을 유도할 차례이다. 그전에 각운동량에 대해 언급해야 한다. 우선 질점이 어떤 점 O에 대해 받는 토크는 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{T}_O \coloneqq \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{25}$$

지금부터 굵은 글씨는 모두 벡터이다.

점 O에 대한 질점의 각운동량은 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \tag{26}$$

각운동량의 시간에 대한 변화율을 계산해보면

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \\
&= \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\
&= \boldsymbol{T}_O
\end{aligned} \tag{27}
$$

가 되어, 토크가 각운동량의 시간에 대한 변화율과 같음을 알 수 있다. 이것은 물체에 가하는 힘이 물체의 운동량의 변화율과 같다는 뉴턴의 운동 제2법칙을 회전 운동을 바꾼 것이기도 하다.

어떤 기준점 O에 대해서 질점에 가해지는 토크가 0이라면 같은 점에 대한 질점의 각운동량은 시간에 대해 보존됨을 알 수 있는데, 천체의 궤도운동이 바로 이 성질을 만족한다. 그림 7과 같이 질량 m이 어디에 있든 질량 M의 위치에 대해 $\boldsymbol{r}$과 $\boldsymbol{F}$는 항상 같은 방향이기 때문이다. 이와 같이 움직이는 물체에 가해지는 힘의 방향이 항상 한 점을 가리키는 운동을 중심력 운동central force motion이라고 부른다.

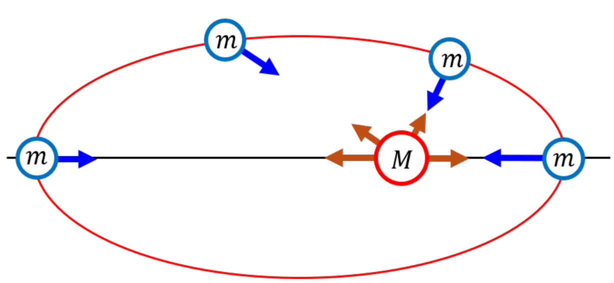

그림 7

이제부터 질량 M의 중심을 점 O로 정의한다. 질량 m의 각운동량은 극좌표계에서 아래와 같다.

$$
\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r} \times m(\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta) \tag{28}
$$

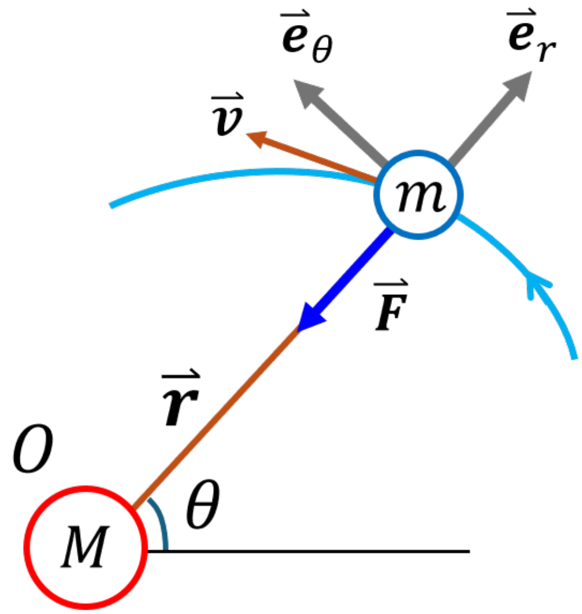

그림 8

식 (28)에서 $\boldsymbol{r}$과 $\boldsymbol{v}_r$은 항상 같은 방향이므로, 그림 8에서 중심력 운동을 하는 질량 m의 각운동량의 크기는 아래와 같다.

$$
H_O = mrv_\theta = \text{const.} \tag{29}
$$

지구가 태양과 가장 가까울 때를 근일점perihelion, 가장 멀 때를 원일점aphelion이라고 부른다. 달이 지구와 가장 가까울 때를 근지점perigee, 가장 멀 때를 원지점apogee라고 부른다. 이 이름들에는 거리를 재는 기준이 태양인지 지구인지가 들어가 있다. 기준점에 상관없이 이름을 붙일 수 있어야 한다. 두 천체가 가장 가까운 점을 근점periapsis, 가장 먼 점을 원점apoapsis라고 부르는 듯하나[3] 많이 쓰이는 용어는 아닌 것 같다. 그림 9에서 점 2가 원점, 점 3이 근점에 해당된다. 그림 5에서 표현한, 질량이 작은 천체의 속도가 두 천체를 잇는 선에 수직한 상황이 근점 또는 원점이다.

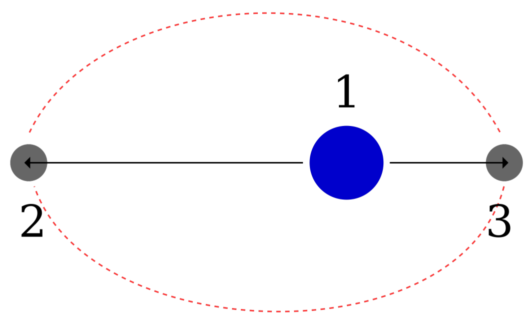

그림 9. https://en.wikipedia.org/wiki/Apsis

그림 10과 같이 근점에서 두 천체 간의 거리 r_0와 작은 천체인 질량 m의 속도 v_0가 주어졌다면 원점 거리 r_1과 그 때의 질량 m의 속도 v_1을 구할 수 있다.

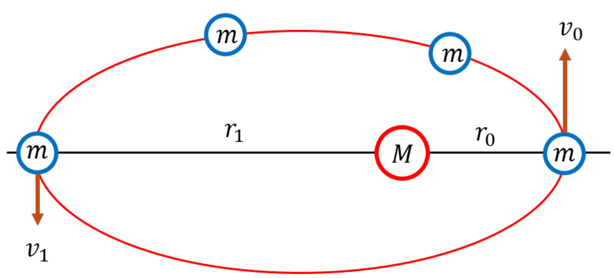

그림 10

우선 근점 거리와 속도를 식 (24)에 대입하면 궤도의 이심률을 구할 수 있고, 타원의 성질을 이용하면 이심률로부터 원점 거리를 계산할 수 있다.

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1+e}{1-e} \tag{30}$$

식 (29)에 의해 궤도운동의 rv_θ는 상수인데, 근점과 원점에서는 $v_\theta = |\boldsymbol{v}|$이므로, 아래 식으로 원점에서의 속도를 알 수 있다.

$$v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} = \left(\frac{2GM}{r_0 v_0^2} - 1 \right) v_0 \tag{31}$$

궤도운동의 각운동량이 보존됨을 이용하면 케플러 제2법칙을 증명할 수 있다. 그림 11은 시간 dt 동안 두 천체를 연결하는 선분이 쓸고 지나간 면적 dA를 표시한 것이다. 각도 θ는 두 천체를 잇는 선과 m의 선속도 간의 각도이다.

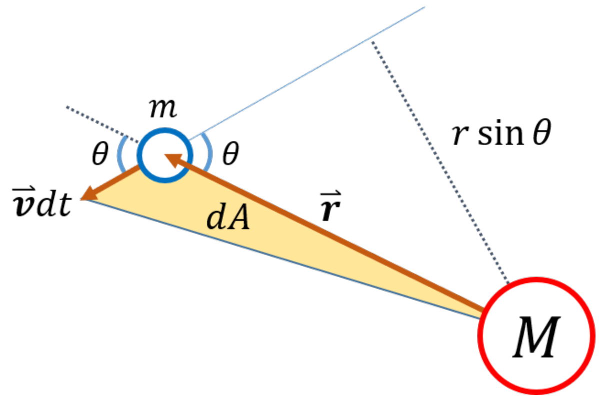

그림 11

면적 dA는 아래와 같은데,

$$dA = \frac{1}{2}(v\ dt)(r \sin\theta)$$

식을 적당히 조작하면

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2}(r\ dt)(v \sin\theta) \\ &= \frac{1}{2} r v_\theta dt \end{aligned}$$

가 되어, 아래와 같이

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_\theta = \frac{H_O}{2m} = \text{const.} \tag{32}$$

면적의 시간에 대한 변화율이 일정함을 알 수 있다. [2]에는 다른 증명도 있으니 참고해보기 바란다.

식 (32)로부터 공전주기를 계산할 수 있다. dA/dt가 상수이므로 전체 면적은 이 값에 공전주기를 곱하면 된다. 그런데 타원의 면적은 장반경 a, 단반경 b에 대해 πab이고, 장반경은 $a = r_0/(1-e)$이고, 단반경 b는 식 (7)로부터

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

가 되어, 타원의 면적은 아래와 같이 두 가지 표현이 가능해지고,

$$A = \frac{1}{2} r_0 v_0 T = \frac{\pi r_0^2}{(1-e)^2}\sqrt{1-e^2}$$

이 식을 정리하면 주기 T의 표현식을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} \tag{33}$$

케플러 제3법칙은 주기의 제곱과 궤도 장반경의 세제곱의 비율이 일정함을 말한다. 궤도 장반경과 주기를 이미 앞에서 모두 계산했으므로, 케플러 제3법칙은 아래와 같이 증명된다.

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{T^2} &= \frac{r_0^3}{(1-e)^3}\frac{v_0^2}{4\pi^2 r_0^2}\frac{(1-e)^4}{1-e^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{r_0 v_0^2}{1+e} \\ &= \frac{GM}{4\pi^2} \end{aligned} \tag{34}$$

마지막 줄에서 식 (24)가 사용되었다. 식 (34)의 값을 계산해보면 $3.36 \times 10^{18}\ \mathrm{m^3/s^2}$인데, 단위를 $\mathrm{AU^3/yr^2}$으로 바꿔보면 놀랍게도 정확히 1이 나온다. 하지만 AU와 1년의 정의를 생각해보면 당연한 결과이다.

근점에서의 운동에너지 T_0와 위치에너지 U_0는 각각 아래와 같이 쓸 수 있는데,

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} m v_0^2 \\ U_0 &= -\frac{GMm}{r_0} \end{aligned}$$

식 (24)를 이용하면 운동에너지는 아래와 같이 단순화되고,

$$T_0 = \left(\frac{1+e}{2}\right)\left(\frac{GMm}{r_0}\right) \tag{35}$$

근점에서의 역학적 에너지는

$$\begin{aligned} T_0 + U_0 &= \left(\frac{1+e}{2}\right)\left(\frac{GMm}{r_0}\right) - \frac{GMm}{r_0} \\ &= \left(\frac{GMm}{r_0}\right)\left(\frac{e-1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{GMm}{2}\right)\left(\frac{e-1}{r_0}\right) \\ &= -\frac{GMm}{2a} \end{aligned} \tag{36}$$

가 된다. 역학적 에너지는 보존되어야 하므로 타원 궤도 상의 어느 점에 대해서도 역학적 에너지는 식 (36)으로 계산 가능하다. 원점에서의 운동에너지와 위치에너지를 아래와 같이 쓰고

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m v_1^2 \\ U_1 &= -\frac{GMm}{r_1} \end{aligned}$$

식 (24), (30), (31)을 적절히 이용하면 원점에서의 역학적 에너지도 식 (36)이 됨을 보일 수 있다. 계산과정이 재밌기는 하지만 딱히 중요하지는 않으므로 여기에 적지는 않겠다.

References

[1] A. Berdford, W. Fowler, *Engineering Mechanics: Dynamics*, 5th edition, Pearson, 2007.

[2] `https://radio.astro.gla.ac.uk/a1dynamics/keplerproofs.pdf`

[3] `https://wiki.kerbalspaceprogram.com/wiki/Terminology/ko`