

# 타원, 케플러, 궤도운동

강성훈

May 21, 2024

## 1 타원

타원은 두 초점에서 떨어진 거리의 합이 같은 점들을 모은 것이다.

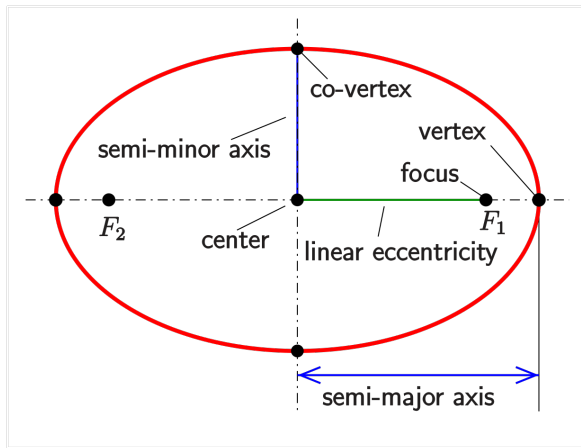


그림 1. <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

수식으로는 보통 직교좌표계에서 아래와 같이 적는다

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

식 (1)의 타원은  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(0, -b)$ 를 지난다.  $a > b$ 인 경우  $x$ 축이 장축<sup>major axis</sup>,  $y$ 축이 단축<sup>minor axis</sup>이 된다.  $a$ 와  $b$ 는 각각 장반경, 단반경이라고 부른다. 이때 초점은  $x$  축 상의 두 점  $(c, 0)$ 과  $(-c, 0)$ 이 되며, 여기서  $c$ 는 아래 식을 만족하는 값이다.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

타원의 모양, 즉 타원이 얼마나 찌그러져 있는지 표현하기 위한 값이 2개 있는데, 하나는 이심률<sup>eccentricity</sup>  $e$

이고 다른 하나는 타원율<sup>ellipticity</sup>  $\eta$ 이다. 각각은 아래와 같이 정의된다.

$$e = \frac{c}{a} \quad (3)$$

$$\eta = \frac{a - b}{a} \quad (4)$$

타원을 정의하는 다른 방법도 있다. 그림 2와 같이  $x$  축 상의 어떤 점  $(a, 0)$ 과 어떤 실수  $e$ 에 대해 ( $a > 0$ ,  $0 < e < 1$ ), 점  $P$ 와 점  $(ae, 0)$  간의 거리를  $r$ , 점  $P$ 와 직선  $x = a/e$  간의 거리를  $d$ 로 두고  $r/d = e$ 를 만족하는 점  $P$ 의 궤적이 어떤 곡선이 되는지 알아보자.

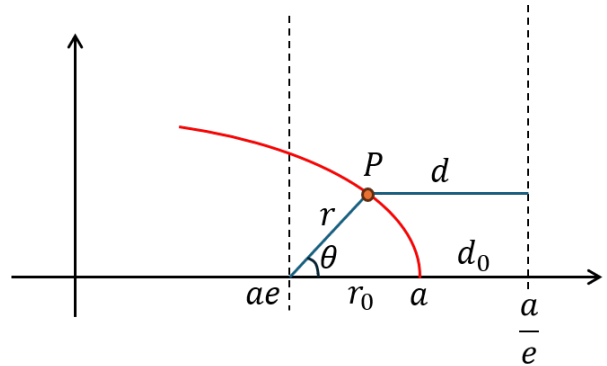


그림 2

점  $P$ 의 좌표를  $(x, y)$ 로 두면 아래와 같이 쓸 수 있고,

$$x = ae + r \cos \theta = a/e - d$$

$$y = r \sin \theta$$

$x, y$ 는 아래 등식을 만족하며,

$$(x - ae)^2 + y^2 = r^2 \quad (5)$$

$r/d = e$ 임을 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{d^2} &= e^2 = \frac{(x - ae)^2 + y^2}{(a/e - x)^2} \\ (a - xe)^2 &= (x - ae)^2 + y^2 \\ x^2(1 - e^2) + y^2 &= a^2(1 - e^2)\end{aligned}$$

로부터 아래 형태가 도출된다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad (6)$$

점  $P$ 가  $y$ 축 상에 있을 때의  $P$ 의 좌표를  $(0, b)$ , 그 때의  $r$ 와  $d$ 를 각각  $r_b, d_b$ 로 두면

$$\begin{aligned}r_b^2 &= a^2e^2 + b^2 \\ d_b^2 &= a^2/e^2\end{aligned}$$

가 되고

$$\left(\frac{r_b}{d_b}\right)^2 = \frac{a^2e^2 + b^2}{a^2/e^2} = e^2$$

로부터

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (7)$$

라는 결론을 얻을 수 있다. 식 (7)을 식 (6)에 대입하여 아래와 같은 타원 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

그림 2에서 직선  $x = a/e$ 를 타원의 준선<sup>directrix</sup>이라고 부른다. 물론 직선  $x = -a/e$ 도 타원의 준선이다.

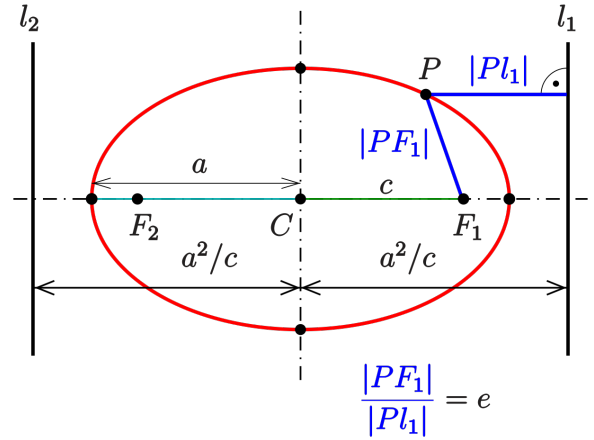


그림3. <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

타원을 식 (8)과 다른 형태로 쓸 수 있다.

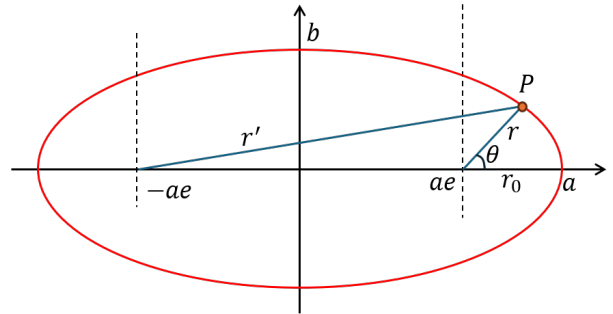


그림 4

그림 4와 같이 초점  $(ae, 0)$ 과 점  $P$  사이의 거리를  $r$ , 초점  $(-ae, 0)$ 과 점  $P$  사이의 거리를  $r'$ 로 두면, 타원의 정의에 의해

$$r + r' = 2a \quad (9)$$

이므로,

$$r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \quad (10)$$

로 쓸 수 있다. 한편  $r'$ 는  $(-ae, 0)$ 과  $(ae + r \cos \theta, r \sin \theta)$  사이의 거리이므로

$$r'^2 = (2ae + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \quad (11)$$

이기도 하여, 두 식 (10)과 (11)을 이용하면

$$\begin{aligned}
4a^2 - 4ar + r^2 &= (2ae + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \\
4a^2 - 4ar &= 4a^2 e^2 + 4aer \cos \theta \\
a^2(1 - e^2) &= ar(1 + e \cos \theta)
\end{aligned}$$

의 과정을 거쳐

$$a(1 - e^2) = r(1 + e \cos \theta) \quad (12)$$

가 되는데,  $r_0 = a(1 - e)$ 임을 이용하면

$$\frac{r_0}{r} = \frac{1 + e}{1 + e \cos \theta} \quad (13)$$

의 형태로 타원을 표현할 수 있음을 알 수 있다. 여기서  $\theta$ 의 기준이 원점이 아닌 타원의 초점임에 주의하자.

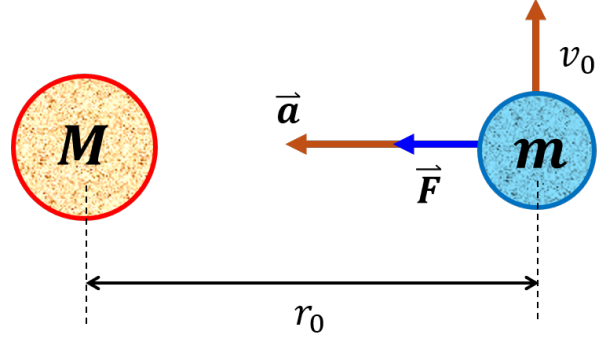


그림 5

그림 5와 같이 어느 순간  $M$ 과  $m$  간의 거리는  $r_0$ ,  $m$ 의 선속도는  $v_0$ 이고 선속도의 방향은  $M$ 과  $m$ 을 잇는 선에 수직이라고 놓다. 뉴턴의 운동 제2법칙인  $F = ma$ 를 극좌표계에서 쓰면 아래와 같다.

$$F_r = ma_r = m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \quad (14)$$

$$F_\theta = ma_\theta = m \left( r\alpha + 2\omega \frac{dr}{dt} \right) \quad (15)$$

그림 5의 상황에서는  $\theta$  방향 힘이 없으므로, 식 (14), (15)는 아래와 같아진다.

$$-G \frac{Mm}{r^2} = m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \quad (16)$$

$$0 = m \left( r\alpha + 2\omega \frac{dr}{dt} \right) \quad (17)$$

## 2 행성의 궤도

아이작 뉴턴은 물리학의 걸작 중 하나인 프린키피아를 17세기에 저술했다. 질량을 가진 두 물체, 예를 들면 태양과 지구 사이에 거리의 제곱에 반비례하는 인력이 작용한다는 것은 당시에 이미 어느 정도 알려져 있었다. 그리고 행성의 궤도가 타원이라는 것도 그보다 약 80년 전에 요하네스 케플러가 관측을 통해 밝혔다. 문제는 뉴턴 역학과 만유인력의 법칙으로부터 타원 궤도를 유도하는 것이었다. 이 빈틈을 채운 것이 뉴턴의 프린키피아이다.

두 천체의 질량을 각각  $M$ 과  $m$ 이라고 하자. 태양과 지구, 태양과 혜성, 지구와 달, 지구와 인공위성 등 어느 쪽이든 상관없다. 질량  $m$ 이 질량  $M$  주위를 공전한다.  $M$ 이  $m$ 보다 충분히 커서  $M$ 은 거의 움직이지 않는다고 가정한다.

두 식을 연립하면 미분방정식이 하나 도출되는데, 그 과정이 꽤 복잡해서 여기에는 적지 않겠다. 자세한 내용은 [1], [2] 등을 참고해보기 바란다. 도출되는 미분방정식은 아래와 같은데,  $u = 1/r$ 로 치환한 것이다.

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \quad (18)$$

이 미분방정식의 일반해는 아래와 같으며,

$$u = A \sin \theta + B \cos \theta + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \quad (19)$$

초기조건을 대입하면 아래의 결과물이 나온다.

$$\frac{1}{r} = \left( \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \right) \cos \theta + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \quad (20)$$

아래와 같이 치환하고 정리하면

$$e' := \frac{GM}{r_0 v_0^2} \quad (21)$$

식 (20)은 아래와 같이 바뀌는데

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1}{(1 - e') \cos \theta + e'} \quad (22)$$

타원을 표현하는 식 (13)의 형태로 맞추기 위해  $e' = 1/(1 + e)$ 로 두면,

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1 + e}{1 + e \cos \theta} \quad (23)$$

가 되어 질량  $m$ 의 궤도가 타원이고 질량  $M$ 의 위치가 바로 타원의 초점임을 알 수 있다. 이 타원의 이심률은 아래와 같다.

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad (24)$$

미분방정식이 없던 시절에 뉴턴이 어떻게 이 결론에 도달했는지 궁금하다. 천체의 궤도가 타원임은 케플러 제1법칙이기도 하다.

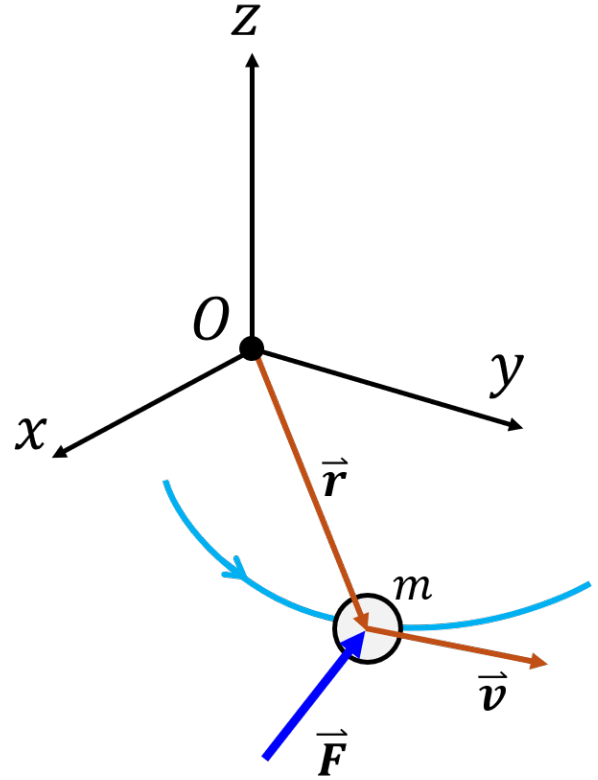


그림 6

### 3 각운동량 보존과 케플러 법칙

이제 케플러 제2법칙과 제3법칙을 유도할 차례이다. 그 전에 각운동량에 대해 언급해야 한다. 우선 질점이 어떤 점  $O$ 에 대해 받는 토크는 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{T}_O := \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (25)$$

지금부터 굵은 글씨는 모두 벡터이다.

(24) 점  $O$ 에 대한 질점의 각운동량은 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (26)$$

각운동량의 시간에 대한 변화율을 계산해보면

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\
&= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{T}_O
\end{aligned} \tag{27}$$

가 되어, 토크가 각운동량의 시간에 대한 변화율과 같음을 알 수 있다. 이것은 물체에 가하는 힘이 물체의 운동량의 변화율과 같다는 뉴턴의 운동 제2법칙을 회전 운동을 바꾼 것이기도 하다.

어떤 기준점  $O$ 에 대해서 질점에 가해지는 토크가 0이라면 같은 점에 대한 질점의 각운동량은 시간에 대해 보존됨을 알 수 있는데, 천체의 궤도운동이 바로 이 성질을 만족한다. 그림 7과 같이 질량  $m$ 이 어디에 있는 질량  $M$ 의 위치에 대해  $\mathbf{r}$ 과  $\mathbf{F}$ 는 항상 같은 방향이기 때문이다. 이와 같이 움직이는 물체에 가해지는 힘의 방향이 항상 한 점을 가리키는 운동을 중심력 운동<sup>central force motion</sup>이라고 부른다.

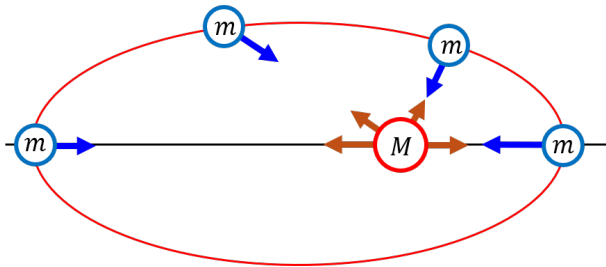


그림 7

이제부터 질량  $M$ 의 중심을 점  $O$ 로 정의한다. 질량  $m$ 의 각운동량은 극좌표계에서 아래와 같다.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) \tag{28}$$

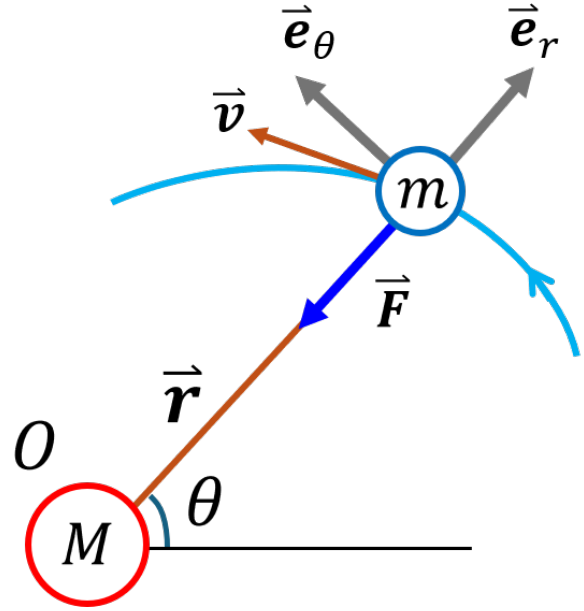


그림 8

식 (28)에서  $\mathbf{r}$ 과  $\mathbf{v}_r$ 은 항상 같은 방향이므로, 그림 8에서 중심력 운동을 하는 질량  $m$ 의 각운동량의 크기는 아래와 같다.

$$H_O = mrv_\theta = \text{const.} \tag{29}$$

지구가 태양과 가장 가까울 때를 근일점<sup>perihelion</sup>, 가장 멀 때를 원일점<sup>aphelion</sup>이라고 부른다. 달이 지구와 가장 가까울 때를 근지점<sup>perigee</sup>, 가장 멀 때를 원지점<sup>apogee</sup>라고 부른다. 이 이름들에는 거리를 재는 기준이 태양인지 지구인지가 들어가 있다. 기준점에 상관없이 이름을 붙일 수 있어야 한다. 두 천체가 가장 가까운 점을 근점<sup>periapsis</sup>, 가장 먼 점을 원점<sup>apoapsis</sup>라고 부르는 듯 하나[3] 많이 쓰이는 용어는 아닌 것 같다. 그림 9에서 점 2가 원점, 점 3이 근점에 해당된다. 그림 5에서 표현한, 질량이 작은 천체의 속도가 두 천체를 잇는 선에 수직인 상황이 근점 또는 원점이다.

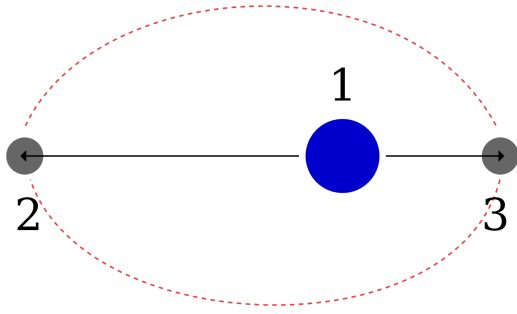


그림 9. <https://en.wikipedia.org/wiki/Apsis>

그림 10과 같이 근점에서 두 천체 간의 거리  $r_0$ 와 작은 천체인 질량  $m$ 의 속도  $v_0$ 가 주어졌다면 원점 거리  $r_1$ 과 그 때의 질량  $m$ 의 속도  $v_1$ 을 구할 수 있다.

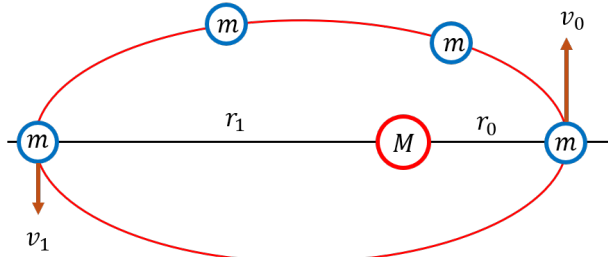


그림 10

우선 근점 거리와 속도를 식 (24)에 대입하면 궤도의 이심률을 구할 수 있고, 타원의 성질을 이용하면 이심률로부터 원점 거리를 계산할 수 있다.

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1+e}{1-e} \quad (30)$$

식 (29)에 의해 궤도운동의  $rv_\theta$ 는 상수인데, 근점과 원점에서는  $v_\theta = |v|$ 이므로, 아래 식으로 원점에서의 속도를 알 수 있다.

$$v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} = \left( \frac{2GM}{r_0 v_0^2} - 1 \right) v_0 \quad (31)$$

궤도운동의 각운동량이 보존됨을 이용하면 케플러 제2법칙을 증명할 수 있다. 그림 11은 시간  $dt$  동안 두 천체를 연결하는 선분이 쓸고 지나간 면적  $dA$ 를 표시한 것이다. 각도  $\theta$ 는 두 천체를 잇는 선과  $m$ 의 선속도 간의 각도이다.

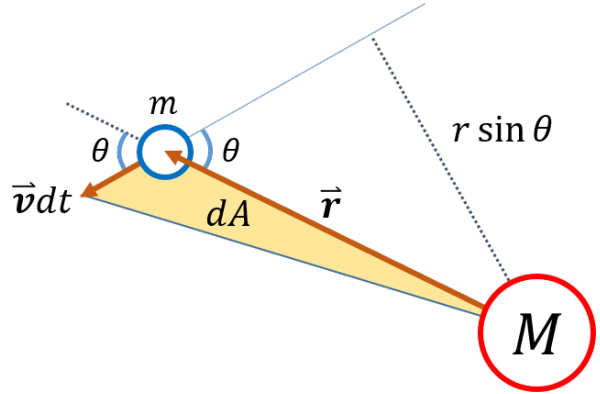


그림 11

면적  $dA$ 는 아래와 같은데,

$$dA = \frac{1}{2}(v dt)(r \sin \theta)$$

식을 적당히 조작하면

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2}(r dt)(v \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2}rv_\theta dt \end{aligned}$$

가 되어, 아래와 같이

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}rv_\theta = \frac{H_O}{2m} = \text{const.} \quad (32)$$

면적의 시간에 대한 변화율이 일정함을 알 수 있다. [2]에는 다른 증명도 있으니 참고해보기 바란다.

식 (32)로부터 공전주기를 계산할 수 있다.  $dA/dt$ 가 상수이므로 전체 면적은 이 값에 공전주기를 곱하면 된다. 그런데 타원의 면적은 장반경  $a$ , 단반경  $b$ 에 대해  $\pi ab$ 이고, 장반경은  $a = r_0/(1-e)$ 이고, 단반경  $b$ 는 식 (7)로부터

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

가 되어, 타원의 면적은 아래와 같이 두 가지 표현이 가능해지고,

$$A = \frac{1}{2}r_0v_0T = \frac{\pi r_0^2}{(1-e)^2}\sqrt{1-e^2}$$

이 식을 정리하면 주기  $T$ 의 표현식을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} \quad (33)$$

케플러 제3법칙은 주기의 제곱과 궤도 장반경의 세제곱의 비율이 일정함을 말한다. 궤도 장반경과 주기를 이미 앞에서 모두 계산했으므로, 케플러 제3법칙은 아래와 같이 증명된다.

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{T^2} &= \frac{r_0^3}{(1-e)^3} \frac{v_0^2}{4\pi^2 r_0^2} \frac{(1-e)^4}{1-e^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{r_0 v_0^2}{1+e} \\ &= \frac{GM}{4\pi^2} \end{aligned} \quad (34)$$

마지막 줄에서 식 (24)가 사용되었다. 식 (34)에서  $M$ 에 태양의 질량을 넣고 값을 계산해보면  $3.36 \times 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2$ 인데, 단위를  $\text{AU}^3/\text{yr}^2$ 으로 바꿔보면 놀랍게도 정확히 1이 나온다. 하지만 AU와 1년의 정의를 생각해보면 당연한 결과이다.

근점에서의 운동에너지  $T_0$ 와 위치에너지  $U_0$ 는 각각 아래와 같이 쓸 수 있는데,

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ U_0 &= -\frac{GMm}{r_0} \end{aligned}$$

식 (24)를 이용하면 운동에너지는 아래와 같이 단순화 되고,

$$T_0 = \left(\frac{1+e}{2}\right) \left(\frac{GMm}{r_0}\right) \quad (35)$$

근점에서의 역학적 에너지는

$$\begin{aligned} T_0 + U_0 &= \left(\frac{1+e}{2}\right) \left(\frac{GMm}{r_0}\right) - \frac{GMm}{r_0} \\ &= \left(\frac{GMm}{r_0}\right) \left(\frac{e-1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{GMm}{2}\right) \left(\frac{e-1}{r_0}\right) \\ &= -\frac{GMm}{2a} \end{aligned} \quad (36)$$

가 된다. 역학적 에너지는 보존되어야 하므로 타원 궤도 상의 어느 점에 대해서도 역학적 에너지는 식 (36)으로 계산 가능하다. 원점에서의 운동에너지와 위치에너지를 아래와 같이 쓰고

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}mv_1^2 \\ U_1 &= -\frac{GMm}{r_1} \end{aligned}$$

식 (24), (30), (31)을 적절히 이용하면 원점에서의 역학적 에너지도 식 (36)이 됨을 보일 수 있다. 계산과정이 재밋기는 하지만 딱히 중요하지는 않으므로 여기에 적지는 않겠다.

## References

- [1] A. Bedford, W. Fowler, *Engineering Mechanics: Dynamics*, 5th edition, Pearson, 2007.
- [2] <https://radio.astro.gla.ac.uk/a1dynamics/keplerproofs.pdf>
- [3] <https://wiki.kerbalspaceprogram.com/wiki/Terminology/ko>