第9讲 关系（1）

计算机系 黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

课前思考

- 什么是关系？ 关系的要素是什么？
- 日常生活中有哪些常见的关系？
- 哪些关系本质上一样的？ 或者是不同的？
- 如果我是数学家，该怎么定义关系？

第十章 关系

- 10.1 二元关系
- 10.2 关系矩阵和关系图
- 10.3 关系的逆、合成、(限制和象)*
- 10.4 关系的性质
- 10.5 关系的闭包
- 10.6 等价关系和划分
- 10.7 相容关系和覆盖*
- 10.8 偏序关系

10.1 二元关系(Binary Relations)

10.1.1 二元关系（有序对的集合）

如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空，且它的元素都是有序对（见定义9.3.4）；

（2）集合是空集；

则称该集合为一个二元关系，记作R，也简称关系。

对于二元关系R，如果$\langle x,y\rangle \in R$，也可记作 xRy。

10.1 二元关系(Binary Relations)

定义10.1.1 **A到B的二元关系**

设A,B为集合，**A×B的任一子集**所定义的二元关系称为A到B的二元关系。

特别当A=B时，A×A的任一子集称为A上的一个二元关系。

思考：定义为什么不考虑关系类型？

关系举例

- A×B上的关系
- A上的关系

10.1 二元关系(Binary Relations)

定义10.1.2 **n 元关系（n 元组的集合）**

若 $n \in N$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是n个集合，则 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的任一子集称为从 A_1到 A_n上的一个n元关系。

n元关系=n阶笛卡尔集的子集

$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = R$，$R$上的$n$元关系

10.1 二元关系(Binary Relations)

10-1-2 集合上的包含关系与真包含关系

设A是集合，A上的包含关系可定义为：

$$R_{\subseteq} = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \land x \subseteq y\}$$

A上的真包含关系可定义为：

$$R_{\subset} = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \land x \subset y\}$$

10.1 二元关系(Binary Relations)

例如，对任意的集合A，A的幂集P(A)上的包含关系可定义为：

$$R_{\subseteq} = \{\langle x, y\rangle | x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subseteq y\}$$

常见关系

- 实数集上?
- 自然数集上?
- 三角形相似关系?

10.1 二元关系(Binary Relations)

定义10.1.3　三个特特殊的关系 —

（恒等关系、全域关系和空关系）

对任意的集合A，

A上的恒等关系I_A定义为

$$I_A = \{\langle x, x\rangle | x \in A\}$$

A上的全域关系（全关系）E_A定义为

$$E_A = \{\langle x, y\rangle | x \in A \land y \in A\}$$

10.1 二元关系(Binary Relations)

定义10.1.3 三个特殊的关系—

（恒等关系、全域关系和空关系）

对任意的集合A，空集Φ是$A\times A$的子集，定义为A上的空关系。

若|A| = n，A 上共可定义多少个不同的二元关系？

10.1 二元关系(Binary Relations)

定义10.1.4 **定义域和值域(domain & range)** 设R是A到B的二元关系

（1）R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域，记作 *dom*(R)。形式化表示为：

$$dom(R) = \{x | (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

定义域跟A是什么关系？

举例说明

10.1 二元关系(Binary Relations)

（2）R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域，记作 *ran*(R)。形式化表示为：

$$ran(R) = \{y | (\exists x)(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

值域跟B是什么关系？

（3）R的定义域和值域的并集称为R的域(field)，记作*fld*(R)。形式化表示为：

$$fld(R) = dom(R) \cup ran(R)$$

跟A×B 是什么关系？

举例说明

10.2 关系矩阵和关系图

定义10.2.1 关系矩阵

设集合 $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

若R是X到Y的一个关系。则R的关系矩阵是$m\times n$矩阵，矩阵元素是r_{ij}。

$$M(R)=\left[r_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & 当\langle x_i, y_j\rangle \in R \\ 0 & 当\langle x_i, y_j\rangle \notin R\end{cases} \quad (1\le i\le m, 1\le j\le n)$$

若R是X上的一个关系，则R的关系矩阵是$m\times m$方阵，定义与上述类似。

关系矩阵

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1				
x_2				
x_3				
x_4				
x_5				
x_6				

6 x 4

举例：特殊关系的关系矩阵

- 空关系
- 恒等关系
- 全关系

10.2 关系矩阵和关系图

定义10.2.2 关系图

设集合$X=\{x_1,x_2,\ldots x_m\}$ $Y=\{y_1,y_2,\ldots y_n\}$ 。若R是X到Y的一个关系，则R的关系图是一个有向图(digraph) $G(R)=(V, E)$ ，它的顶点集是$V=X\cup Y$，边集是E，从x_i到y_i的有向边$e_{ij}\in E$，当且仅当$\langle x_i,y_j\rangle\in R$。

若 R 是 X 上的一个关系，则 R 的关系图是上述情形的特例。

举例说明

- A到B上关系
- A上关系

举例：特殊关系的关系图

- 空关系
- 恒等关系
- 全关系

10.3 关系的逆、合成、限制和象

定义10.3.1 关系的逆、合成、限制和象

对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义:

（1） R的逆(inversion)R^{-1}为Y到X的关系:

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in R\}$$

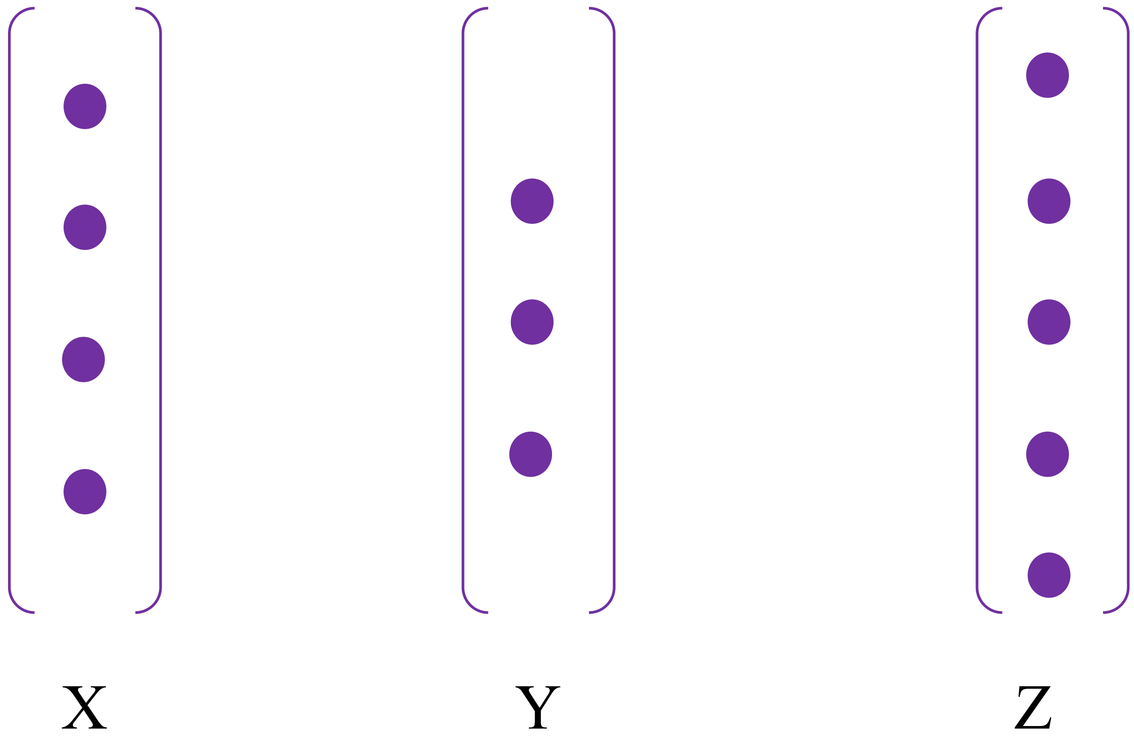
注意：X×Y ≠ Y×X

10.3 关系的逆、合成、限制和象

（2） R与S的合成(composite relation) S∘R（也称S为R的左复合）为X到Z的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y\rangle | (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}$$

关系的合成过程



10.3 关系的逆、合成、限制和象

（3） 对任意的集合A，定义R在A上的限制$R\upharpoonright A$为A到Y的关系，其中R是 X 到Y 的关系。

$$R \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle | \langle x, y\rangle \in R \ \wedge \ x \in A\}$$

（4）A 在R下的象$R[A]$为集合

$$R[A] = \{y | (\exists x)(x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R)\}$$

10.3 关系的逆、合成、限制和象

10-3-1 $S\circ R$的关系矩阵

设A是有限集合，$|A|=n$。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵$M(R)=[r_{ij}]$ 和 $M(S)=[s_{ij}]$都是n×n的方阵。于是R与S的合成 $S\circ R$ 的关系矩阵

$$M(S\circ R)=[W_{ij}]_{n\times n}$$

可以用下述的矩阵逻辑乘计算（类似于矩阵乘法）。记作$M(S\circ R)=M(R)\otimes M(S)$

其中

$$w_{ij}=\vee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

(**why?**)

10.3 关系的逆、合成、限制和象

定理10.3.1　**关系*R*的逆关系的性质**

对X到Y的关系R和Y到Z的关系S，

（1）　$dom(R^{-1}) = ran(R)$

（2）　$ran(R^{-1}) = dom(R)$

（3）　$(R^{-1})^{-1}=R$

（4）　$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

证明：$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

定理10.3.2 关系合成的结合律

对X到Y的关系Q，Y到Z的关系S，Z到W的关系R，

$$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q)$$

关系合成结合律证明板书

定理10.3.3 **关系的合成的其它性质**

对X到Y的关系R_2，R_3，Y到Z的关系R_1，

（1）$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$

（2）$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$

对X到Y的关系，Y到Z的关系R_1，R_2

（3）$(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = R_1 \circ R_3 \cup R_2 \circ R_3$

（4）$(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ R_3 \cap R_2 \circ R_3$

（规定关系合成运算符优先于集合运算符）

为什么有的是子集，有的是相等？

证明

- 先直观分析、解释
- 背后的逻辑规律

10.3 关系的逆、合成、限制和象

定理10.3.4 集合在关系下的象的性质

对X到Y的关系R和集合A、B，

（1） $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$

（2） $R[\bigcup \mathcal{A}] = \bigcup\{R[B] | B \in \mathcal{A}\}$ (**1和2是什么联系**)

（3） $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$

（4） $R[\bigcap \mathcal{A}] \subseteq \bigcap\{R[B] | B \in \mathcal{A}\}$ $\mathcal{A} \neq \Phi$ (**3和4是什么联系**)

（5） $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$

象：对应y构成的集合

补充资料

(5)$\boldsymbol{R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]}$

证明：对任意的y，可得

$$y\in R[A]-R[B]\Leftrightarrow y\in R[A]\wedge y\notin R[B]$$

$$\Leftrightarrow(\exists x)(x\in A\wedge <x,y>\in R)\wedge(\forall x)(<x,y>\in R\rightarrow x\notin B)$$

$$\Rightarrow\ (\exists x)(x\in A\wedge x\notin B\wedge <x,y>\in R)$$ （全称举例）

$$\Leftrightarrow(\exists x)(x\in A-B\wedge <x,y>\in R)$$

$$\Leftrightarrow\ y\in R[A-B]$$

所以，$R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]$.

10.4 关系的性质

定义10.4.1 自反性与非自反性

设R为集合A上的关系，

R在A上是自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$

R在A上是非自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$

关系图、关系矩阵的特点？

自反与非自反

- 假设集合A={a,b}
- $R_1=\{<a,a>,<a,b>\}$
- $R_2=\{<a,b>\}$
- $R_3=\{<b,b>\}$
- 判断：一个关系不是自反的，就是非自反的

10.4 关系的性质

定义10.4.2 对称性与反对称性

设R为集合A上的关系，

- R 在A上是对称的 $\Leftrightarrow$

  $(\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R) \to \langle y,x\rangle \in R)$

- R在A上是反对称的 $\Leftrightarrow$

  $(\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R) \to x = y)$

  (逆否命题)

- R在A上是反对称的 $\Leftrightarrow$

  $(\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge x \neq y) \to \langle y,x\rangle \notin R)$

关系矩阵、关系图有什么特点？

对称与反对称

- 假设集合A={a,b,c}
- $R_1=\{<b,a>,<a,b>\}$
- $R_2=\{<a,a>\}$
- $R_3=\{<b,b>,<b,c>\}$
- $R_4=\{<b,a>,<a,b>,<b,c>\}$

- 判断：一个关系不是对称的，就是反对称的
- 判断：存在关系既是对称的，又是反对称的
- 判断：存在关系既不是对称的，又不是反对称的

10.4 关系的性质

定义10.4.3 **传递性** 设R为集合A上的关系，

R在A上是传递的

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)$$

$$((x \in A \land y \in A \land z \in A \land \langle x, y\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R)$$

$$\rightarrow \langle x, z\rangle \in R)$$

关系矩阵、关系图有什么特点？

传递性

- 全关系是传递的
- 恒等关系是传递的
- 空关系是传递的
- 单元素关系集合是传递的{<a,b>}
- 这样的集合是传递的{<a,b>,<b,b>}; {<a,a>,<a,b>}
- 判断：一个关系要么是传递的，要么是非传递的

10.4 关系的性质

定理10.4.1 几个特殊关系的自反性

设R_1、R_2是A上的自反关系，则R_1^{-1}、

$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$也是A上的自反关系。

10.4 关系的性质

定理10.4.2 几个特殊关系的对称性

设R_1、R_2是A上的对称关系，则R_1^{-1}、

$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$也是A上的对称关系。

10.4 关系的性质

定理10.4.3 几个特殊关系的传递性

设R_1、R_2是A上的传递关系，

则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$ 是A上的传递关系。

但$R_1 \cup R_2$不一定是传递的。

10.4 关系的性质

定理10.4.4　几个特殊关系的反对称性

设R_1、R_2是A上的反对称关系，

则R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$是A上的反对称关系。

但$R_1 \cup R_2$不一定是反对称的。

先分析理解再证明

10.4 关系的性质

定理10.4.5 对称性与反对称性的两个性质

设R是A上的关系，

（1） R是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

（2） R是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

先分析理解再证明

关系性质-补充

- $\{<a, a>\}$是具有什么性质的关系？

关系性质-补充

判断正误

- 存在既不是对称的，又不是反对称的关系
- 存在既是对称又是反对称的关系
- 存在既是自反又是非自反的关系
- 一个关系不是自反的，就是非自反的
- 一个关系不是传递的，就是非传递的

	自反 Reflexive (10.4.1)	非自反 Irreflexive (10.4.1)	对称 Symmetric (10.4.2)	反对称 Antisymmetric (10.4.2)	传递 Transitive (10.4.3)
定义要点	$x \in A \rightarrow xRx$	$x \in A \rightarrow x \not R x$ $\langle x, x\rangle \notin R$	$xRy \rightarrow yRx$ $\langle x, y\rangle \in R \rightarrow$ $\langle y, x\rangle \in R$	$xRy \wedge x \neq y$ $\longrightarrow y \not R x$ $xRy \wedge yRx$ $\rightarrow x = y$	$xRy \wedge yRz$ $\rightarrow xRz$ $\langle x, y\rangle \in R \wedge$ $\langle y, z\rangle \in R \rightarrow$ $\langle x, z\rangle \in R$
关系矩阵的特点	$r_{ii} = 1$ 主对角元均为1	$r_{ii} = 0$ 主对角元均为0	对称矩阵 $r_{ij} = r_{ji}$	若 $r_{ij} = 1 \wedge i \neq j$ $\rightarrow r_{ji} = 0$	无直观特点或难以直接判断
关系图的特点	每个结点都有自圈	每个结点都没有自圈	若两个结点之间有边，一定是一对方向相反的边	若两个结点之间有边，一定是一条有向边	若从结点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k一定有边

运算性质

- 已知 R_1, R_2, R_3 是A上满足相应性质的关系，
- 问题：经过并，交，补，求逆，合成运算后是否还具有原来的性质？

性质 运算	自反性	非自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注：√表示经过左端的运算仍保持原来的性质，×则表示原来的性质不再满足。

注：按列来看。

关于关系合成—反例

- 非自反性：$R_1=\{<2,1>\}, R_2=\{<1,2>\}$ $R_1 \circ R_2=\{<1,1>\}$
- 对称性： $R_1=\{<2,3>, <3,2>\}, R_2=\{<1,2>, <2,1>\}$ $R_1 \circ R_2=\{<1,3>\}$
- 反对称： $R_1=\{<2,3>, <2,1>\}, R_2=\{<1,2>, <3,2>\}$ $R_1 \circ R_2=\{<1,3>, <3,1>, <3,3>, <1,1>\}$
- 传递性：
  - $R_1=\{<2,3>, <3,1>, <2,1>\}, R_2=\{<1,2>, <2,3>, <1,3>\}$
    $R_1 \circ R_2=\{<1,1>, <2,1>, <1,3>\}$

几个主要关系的性质

关系＼性质	自反性	非自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A上的空关系 Φ	×	√	√	√	√
N上的整除关系	√	×	×	√	√
包含关系 $\subseteq$	√	×	×	√	√
真包含关系 $\subset$	×	√	×	√	√

注：按照行来看

是否满足逻辑非的关系

- 自反 vs. 非自反
- 对称 vs. 反对称
- 传递 vs. 非传递

生活中的关系

关系 \ 性质	自反性	非自反性	对称性	反对称性	传递性
朋友					
同学					
恋人					