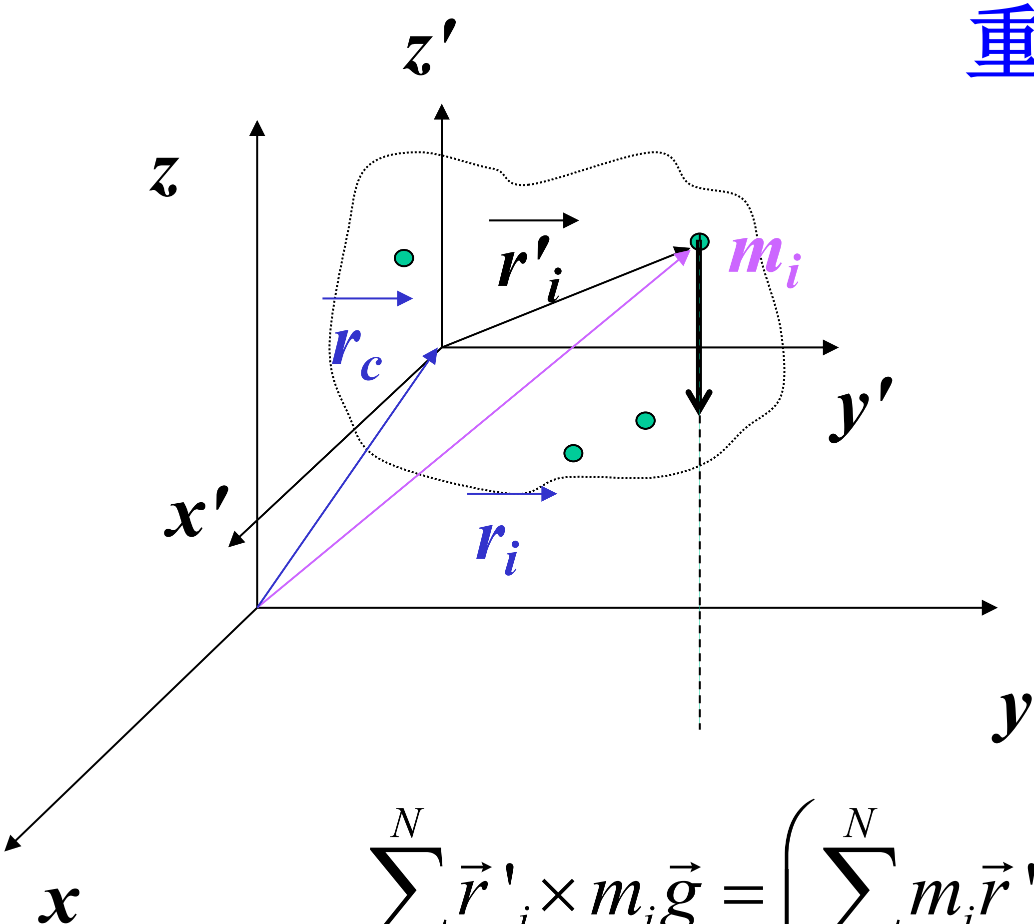
大学物理 B(1)

清华大学物理系

重心



将$\vec{F}_i$变为重力

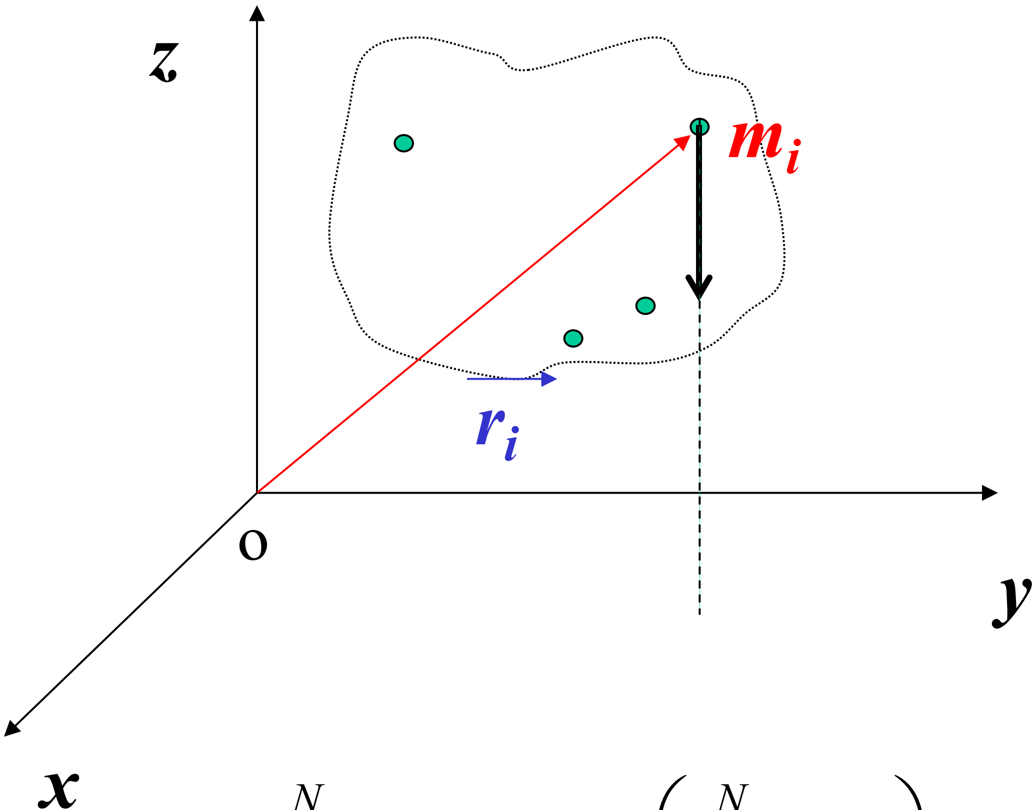
相对质心的力矩

$$\vec{r}_i' \times m_i \vec{g}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}\,'_i \times m_i \vec{g} = \left(\underline{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}\,'_i} \right) \times \vec{g} = 0$$

质点系相对质心的重力矩等于0

地面上的重心



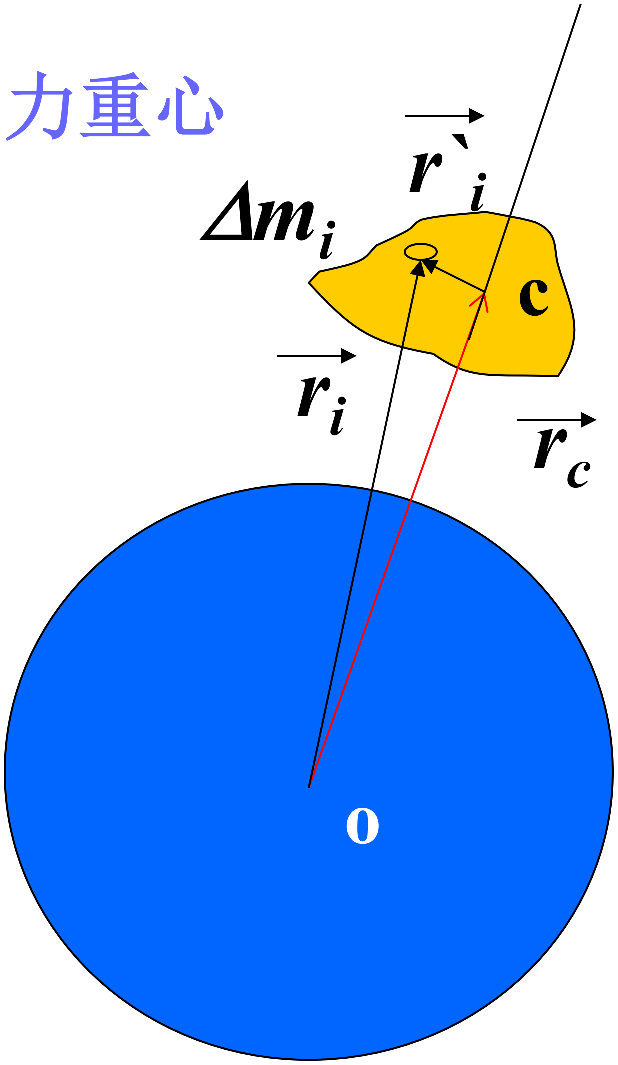
相对原点的重力矩

$$\vec{r}_i \times m_i\vec{g}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \left(\underline{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}\right)\times\vec{g} = M\vec{r}_c \times \vec{g} = \vec{r}_c \times M\vec{g}$$

相当于所有质量集中于质心产生的力矩

引力重心



$$\vec{f}=\sum_i \vec{f}_i=-GM\sum_i \frac{\Delta m_i}{r_i^3}\vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i=\vec{r}_c+\vec{r}_i\,'$$

$$r_c \gg r_i\,'$$

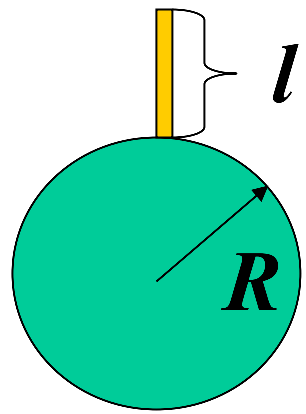
$$\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}=\frac{\vec{r}_c+\vec{r}_i\,'}{(r_c^2+r'^2_i+2\vec{r}_c\cdot\vec{r}_i\,')^{3/2}}$$

$$=\frac{\vec{r}_c}{r_c^3}+\frac{1}{r_c^3}[\vec{r}_i\,'-\frac{3\vec{r}_c(\vec{r}_c\cdot\vec{r}_i\,')}{r_c^2}]$$

$$\vec{f} = -GM\sum_i \Delta m_i \{\frac{\vec{r}_c}{r_c^3} + \frac{1}{r_c^3}[\vec{r}_i' - \frac{3\vec{r}_c(\vec{r}_c\cdot\vec{r}_i')}{r_c^2}]\}$$

$$\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i' = 0$$

练习



R>>l

R~l

$$\vec{f} = -GM\frac{\vec{r}_c}{r_c^3}\sum_i \Delta m_i$$

物体线度远小于到地心的距离时相当于质量集中于质心，引力心=质心

§ 3.6 质心运动定律

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \text{求导} \qquad \dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{M}$$

质心速度 $\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M}$

再求导

质心加速度 $\vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M}$

质心动量
=质点系总动量

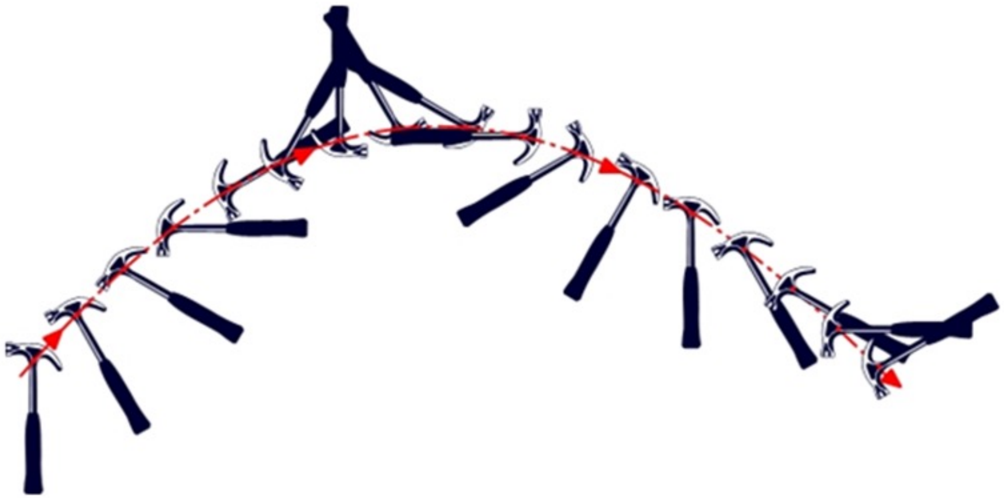
$$M\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P}$$

质点系动力学方程 $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

$$\vec{F} = \frac{d\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_c$$

$$\boxed{\vec{F} = M\vec{a}_c}$$

质点系质心的运动，相当于所有质量集中于质心之后，再让所有外力作用在这个质心上，使质心运动



单选题 1分

设置

水平桌面上拉动纸，纸张上有一均匀球，球的质量M，纸被拉动时与球的摩擦力为 F，求：t 秒后球相对桌面如何动？若运动，移动多少距离？

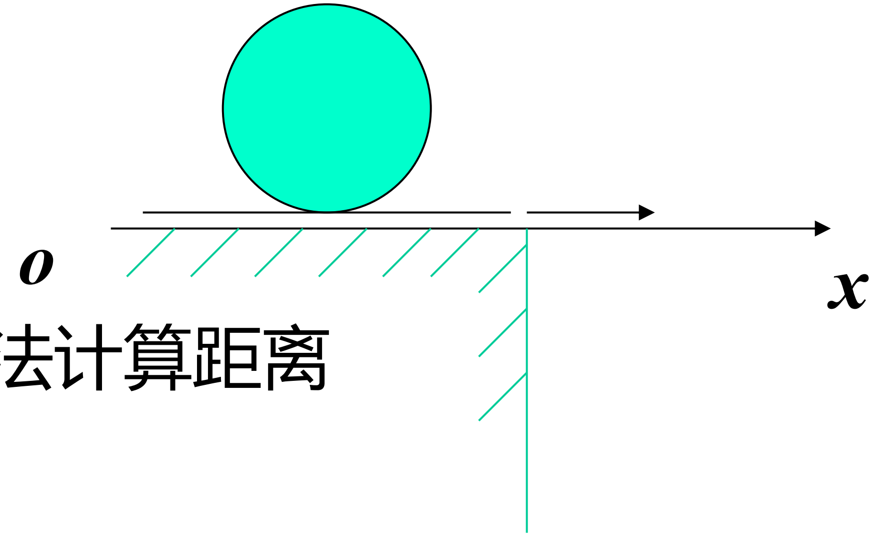
A 向左滚动，缺少半径R，无法计算距离

B 向左滚动1/2*(F/M)*t^2

C 不动

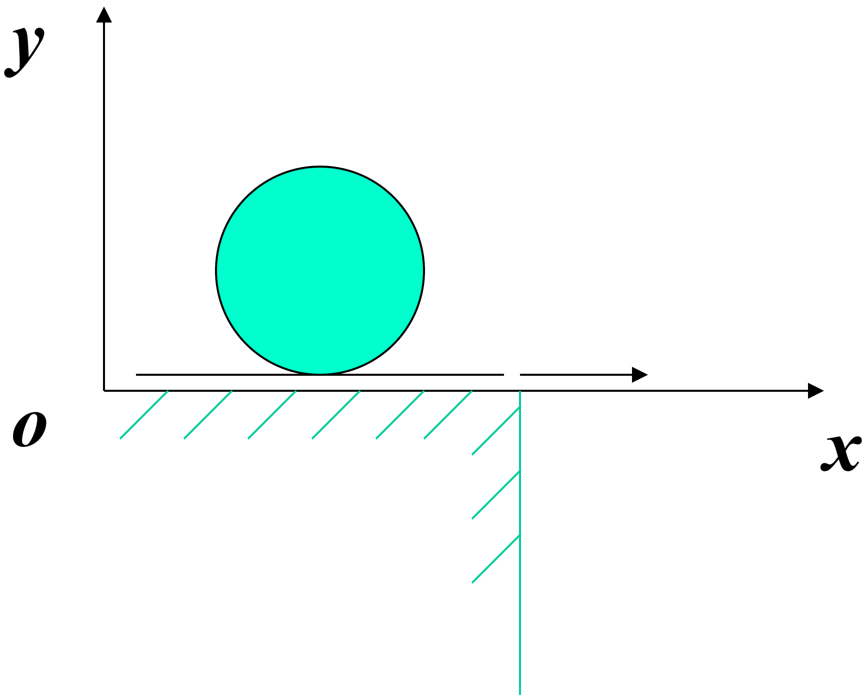
D 向右动，缺少半径R，无法计算距离

E 向右移动1/2*(F/M)*t^2



提交

例：水平桌面上拉动纸，纸张上有一均匀球，球的质量M，纸被拉动时与球的摩擦力为 F，求：t 秒后球相对桌面移动多少距离？



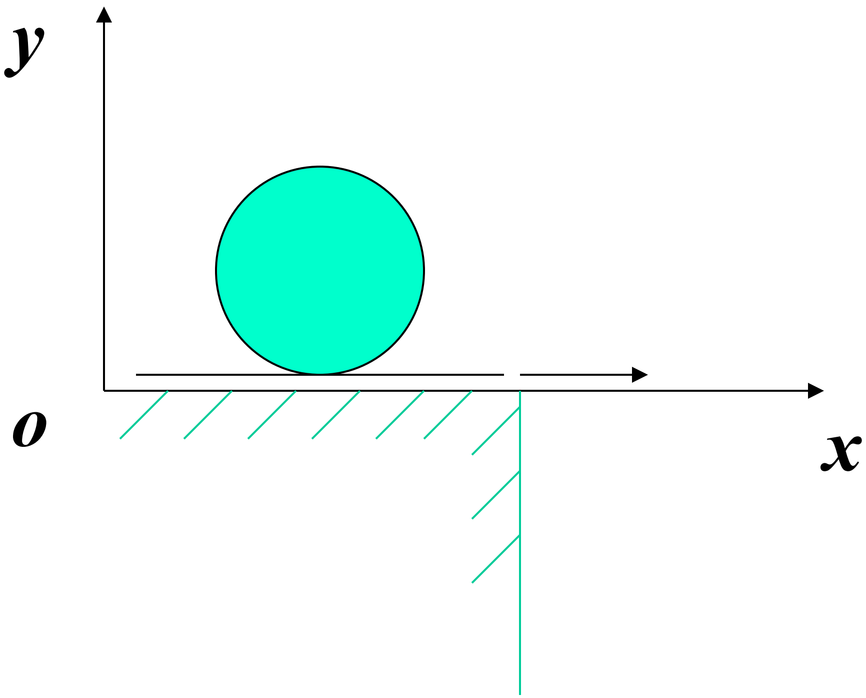
解： $\vec{F} = M\vec{a}_c$

$$a_c = \frac{F}{M} \qquad x_c = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

答：沿拉动纸的方向移动

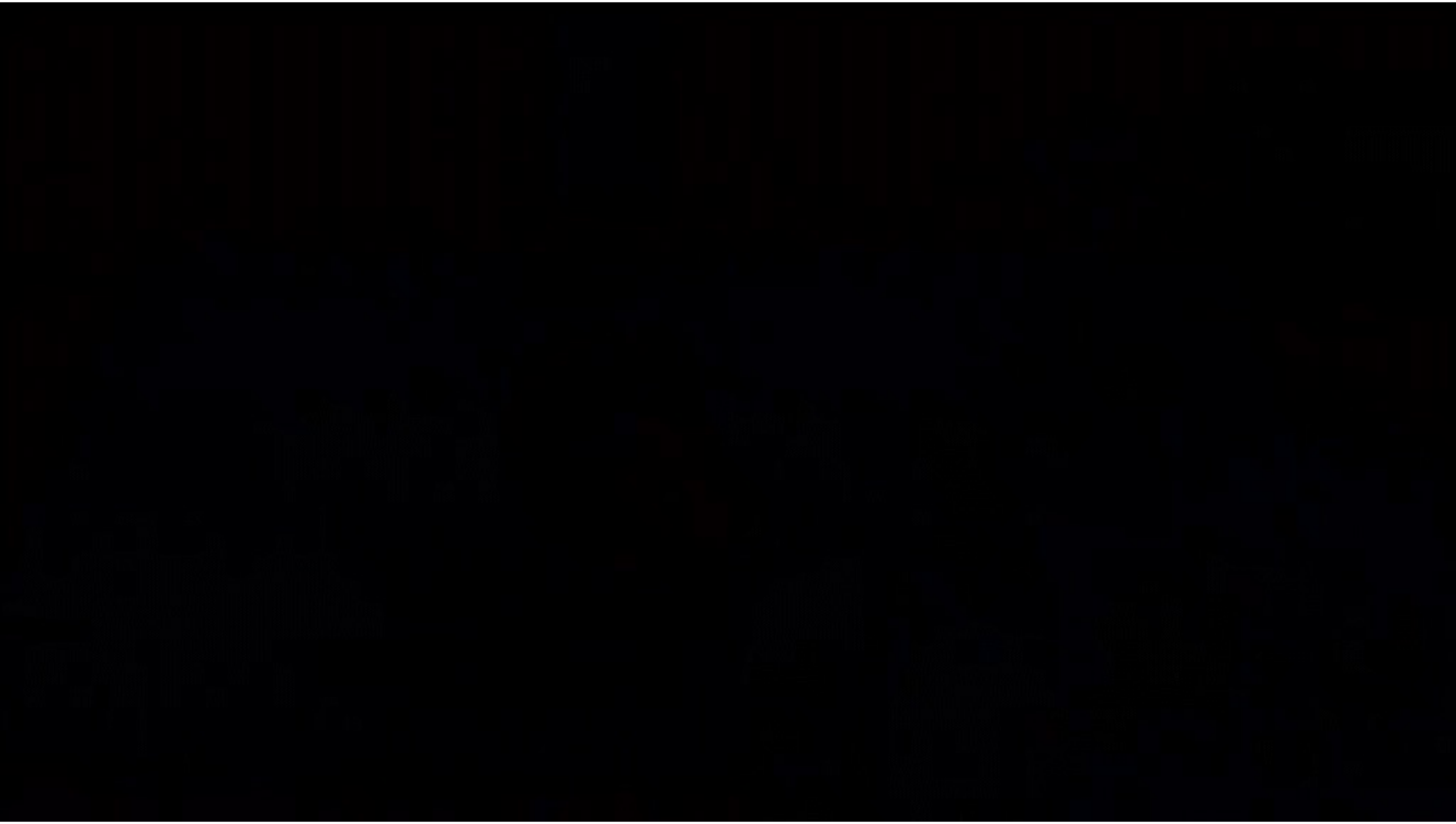
例：水平桌面上拉动纸，纸张上有一均匀球，球的质量M，纸被拉动时与球的摩擦力为 F，求：t 秒后球相对桌面移动多少距离？



思考：

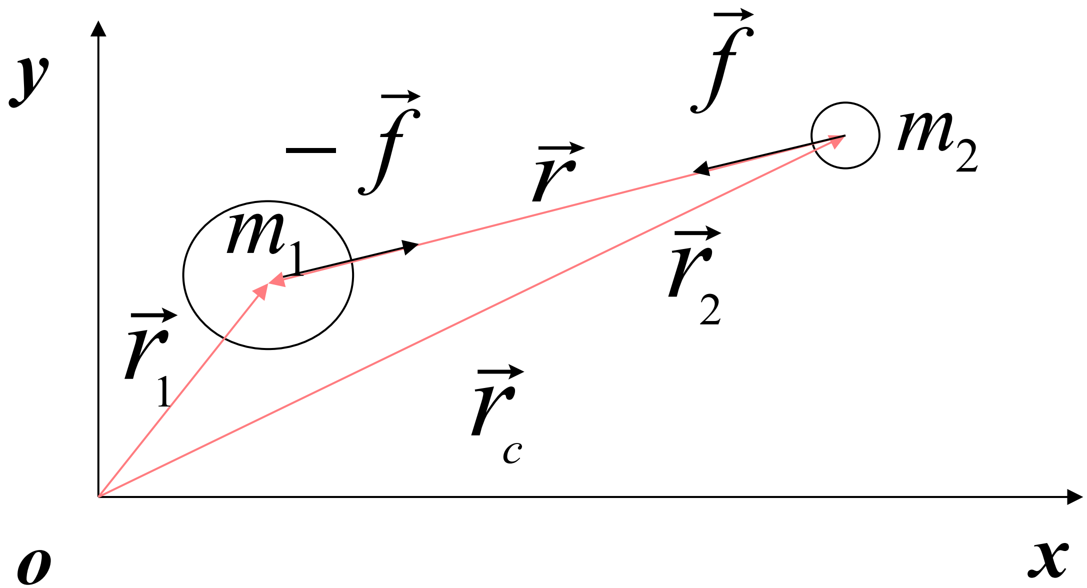
1. 如果小球换成正方体，有什么区别？

2. 纸运动多少距离？



§ 3.7 两体问题

考虑两个物体构成的体系，如 地-月体系



在惯性参考系

$$-\vec{f} = m_1\vec{a}_1$$
$$\vec{f} = m_2\vec{a}_2$$

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i}{M} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{a}_c = 0$$

惯性系

相对量

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$
$$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$
$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1\\ \vec{v} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1\\ \vec{a} &= \vec{a}_2 - \vec{a}_1\\ m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 &= 0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\vec{a}_1 &= -\frac{m_2\vec{a}}{m_1+m_2}\\ \vec{a}_2 &= \frac{m_1\vec{a}}{m_1+m_2}\end{aligned}$$

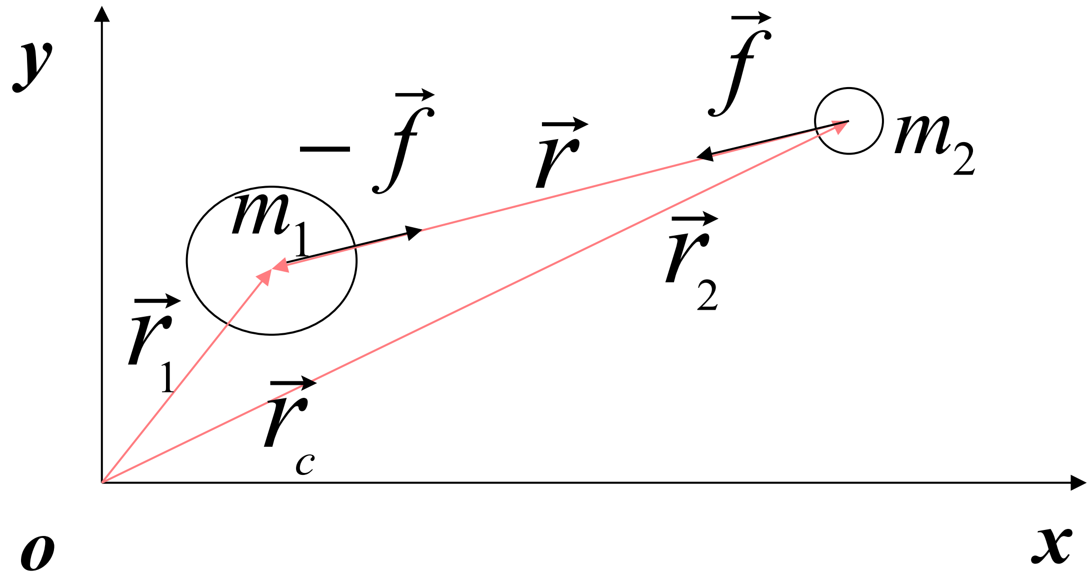
$$\vec{f} = m_2\vec{a}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{a} = \mu\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{f} = \mu\vec{a}} \qquad \boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

相对加速度

μ称为
折合质量
或者
约化质量

两体问题简化为单体问题。



$$m_1 >> m_2$$

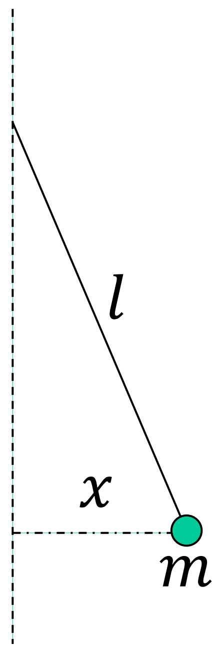
$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \approx \vec{r}_1$$

$$\vec{a}_1 = -\frac{m_2\vec{a}}{m_1 + m_2} \approx 0$$

$$\vec{f} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{a} \approx \boxed{m_2}\vec{a}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{m_1\vec{a}}{m_1 + m_2} \approx \vec{a}$$

单摆

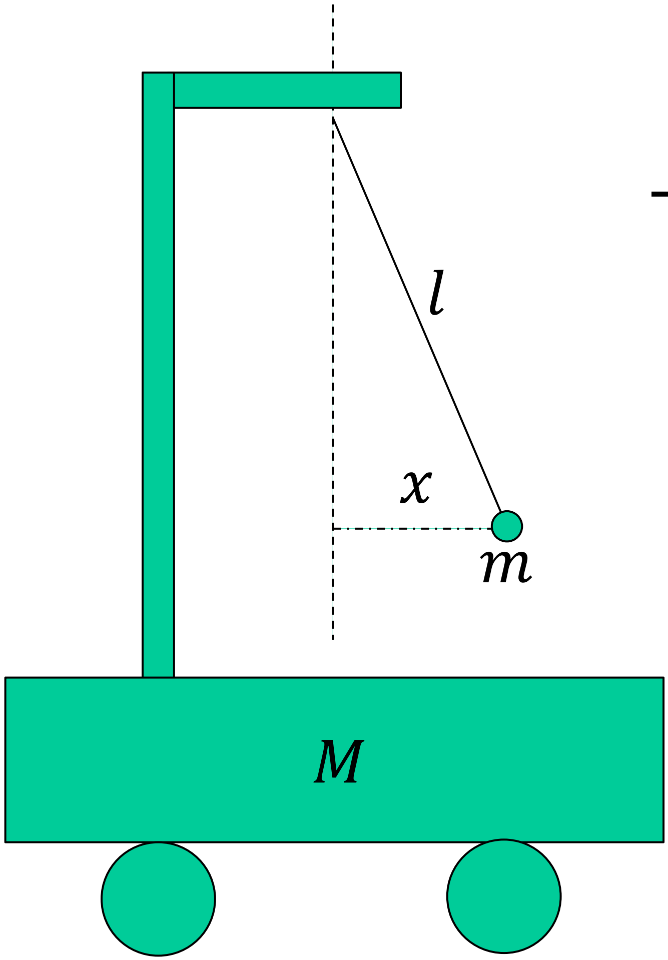


$$\left.\begin{aligned} -mg\frac{x}{l} &= m\ddot{x} \\ \ddot{x}+\omega^2 x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

摆载小车

摆载小车



$$-mg\frac{x}{l} = \mu\ddot{x}$$

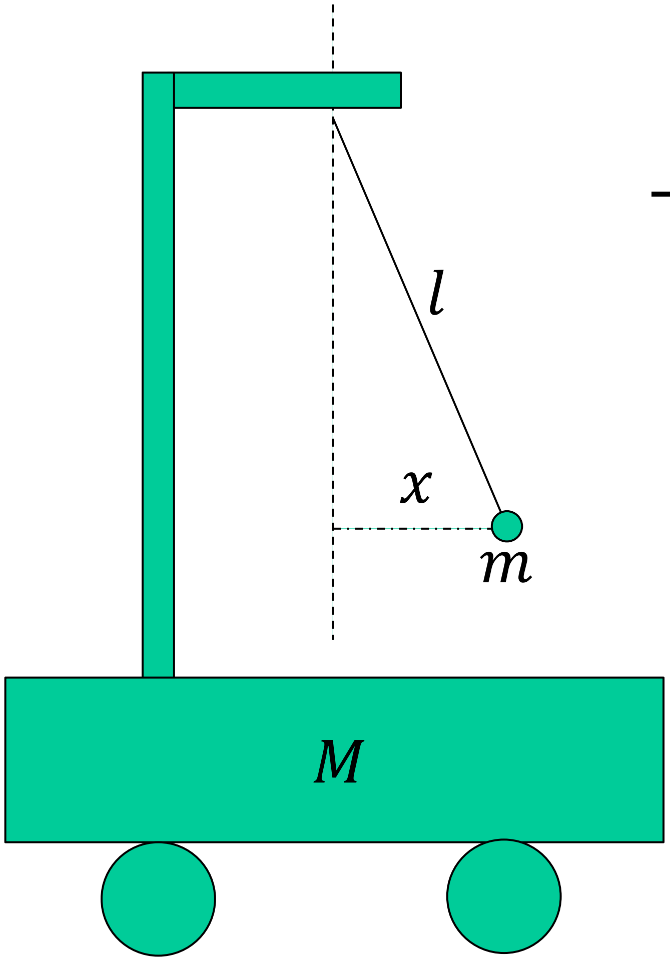
$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(\frac{M}{m+M}\right)}$$

摆载小车



$$-mg\frac{x}{l} = \mu\ddot{x}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(\frac{M}{m+M}\right)}$$

空间站用测体重？

多选题 1分

设置

“人在照镜子时，会发现左右改变，但上下不变。” 请选出下列各项中正确的。

A 左右改变是因为人眼左右排列，而不是上下排列

B 这种现象的原因在于重力是竖直向下的

C 这种说法不正确。镜子没有改变左右

D 这种说法不正确。镜子可以改变上下

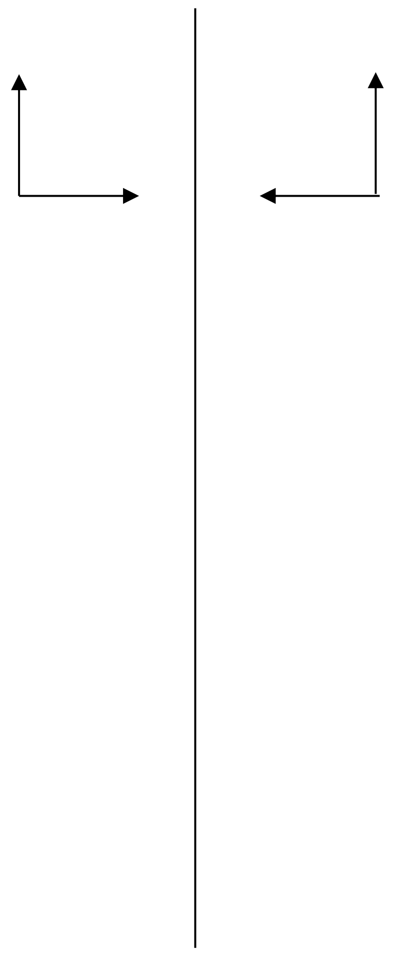
提交

镜像对称性

对称性: 对某种操作或变换保持不变

极矢量

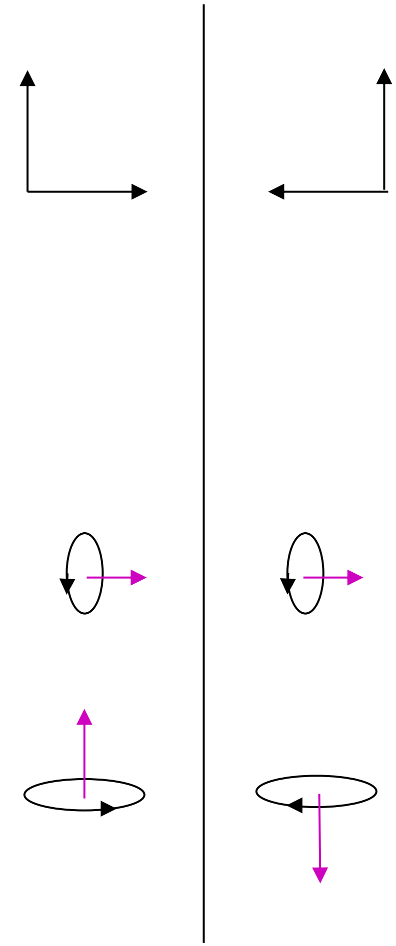
(速度、加速度、电场）



镜像变换对称性

镜像对称性

对称性: 对某种操作或变换保持不变



极矢量

(速度、加速度、电场）

镜像变换对称性

赝(轴)矢量

(角速度、角动量、磁场）

镜像对称性

对称性: 对某种操作或变换保持不变

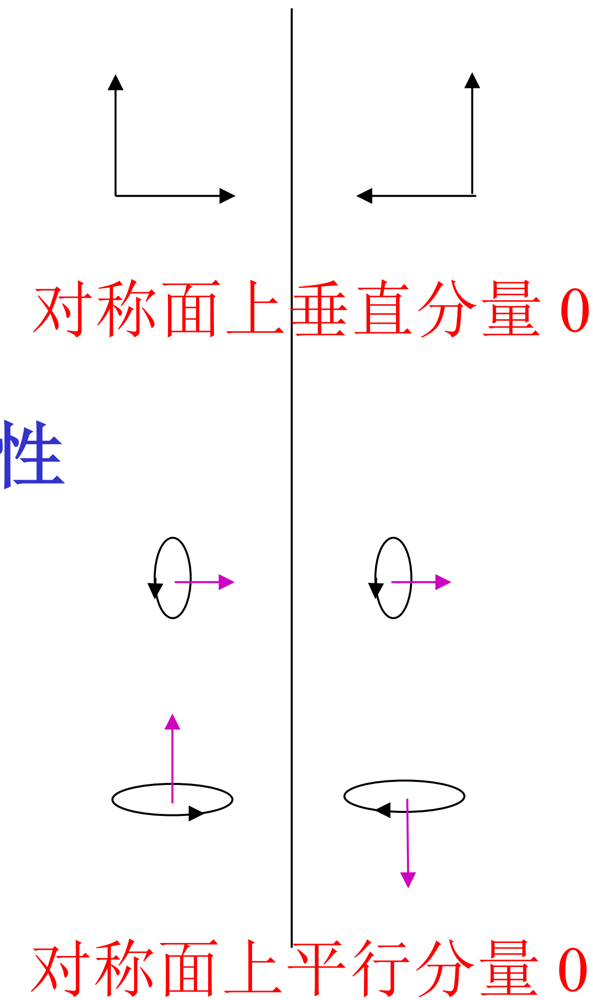
极矢量

(速度、加速度、电场)

镜像变换对称性

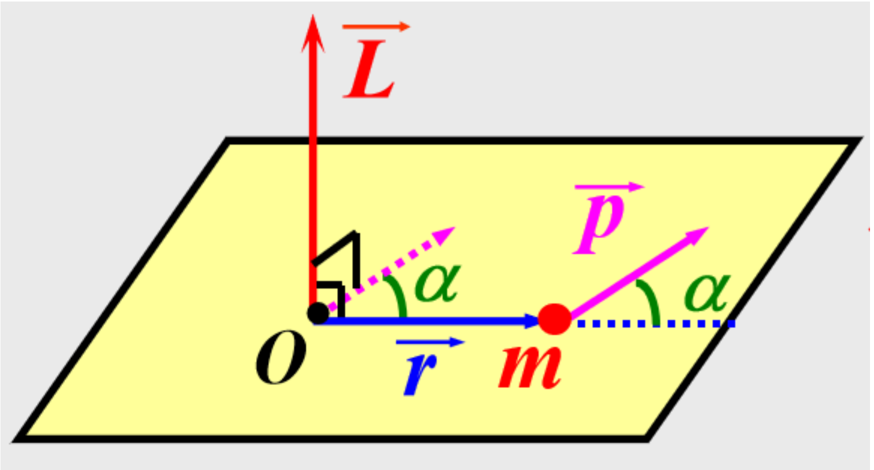
赝(轴)矢量

(角速度、角动量、磁场)



§ 3.8 质点的角动量

角动量是质点运动中的一个重要的物理量，在物理学的许多领域都有着十分重要的应用。



质点m对惯性系中的固定点O的角动量定义为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

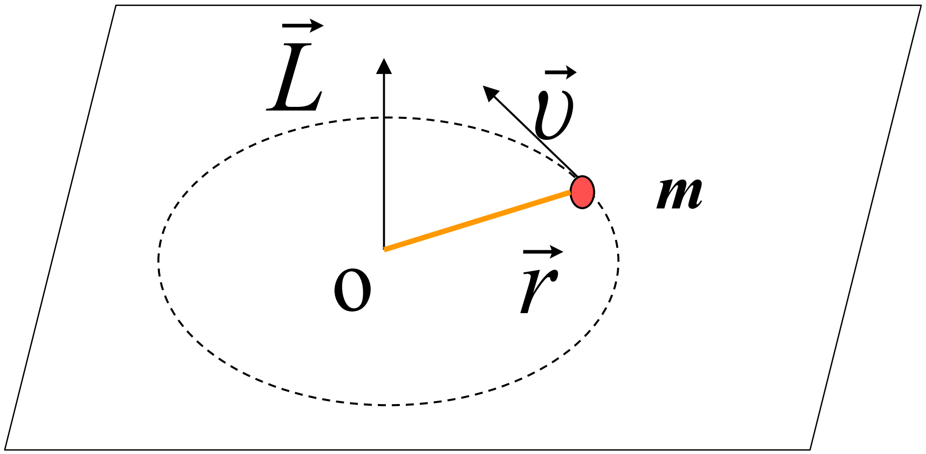
大小：$L = rp\sin\alpha = rmv\sin\alpha$，单位kg m^2/s

方向：垂直于$\vec{r}$，$\vec{p}(\vec{v})$ 决定的平面（右螺旋）

匀速圆周运动角动量？

相对哪个点？

$$L = mr\upsilon = mr^2\omega$$



相对圆心角动量不变

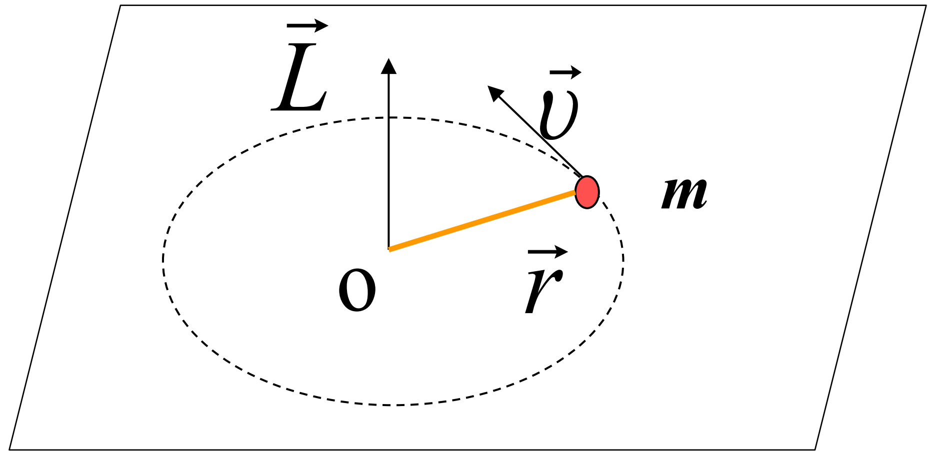
同一质点的同一运动，其角动量可以随固定点的不同而变化

匀速圆周运动角动量

相对哪个点？

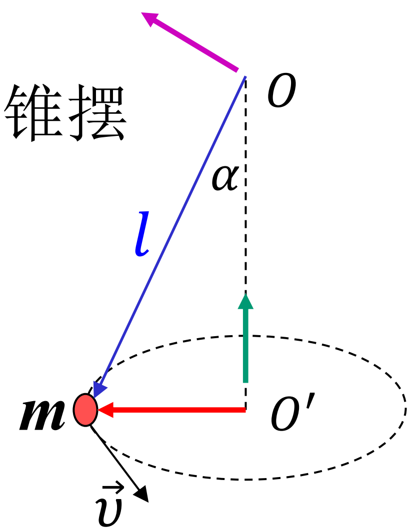
$$L = mr\upsilon = mr^2\omega$$

相对圆心角动量不变



同一质点的同一运动，其角动量可以随固定点的不同而变化

锥摆



$$\vec{L}_O = \vec{r}_{Om} \times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_O = lmv \\ \text{方向变化} \end{cases}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'm} \times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_{O'} = lmv\sin\alpha \\ \text{方向不变} \end{cases}$$

多选题 1分

设置

关于直线运动的质点，下列说法正确的是

A 质点做直线运动，无法定义角动量

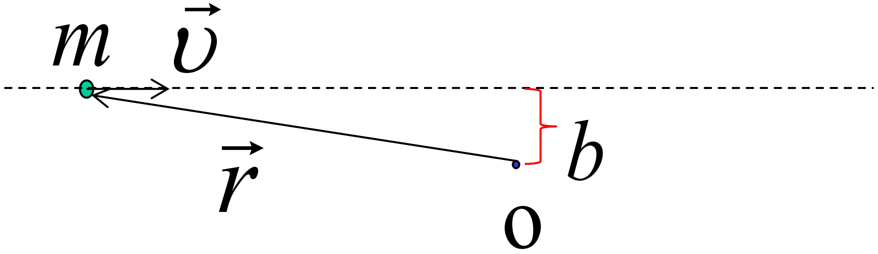
B 质点有角动量，但角动量一定为零

C 质点有角动量，且角动量不变

D 质点有角动量，且角动量可以随时间变化

提交

直线运动角动量



$$m\upsilon r\sin\theta = m\upsilon b$$

$\otimes$

角动量定理

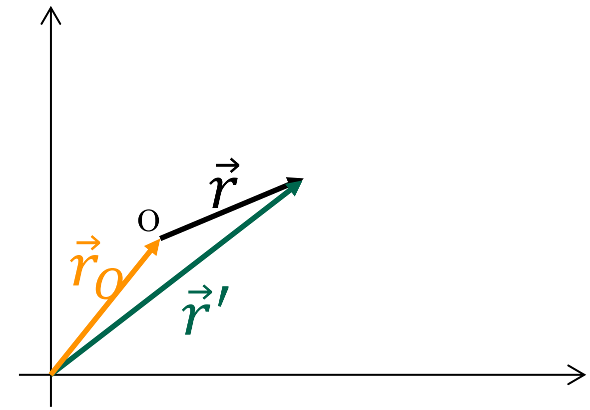
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{p}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v} \times m\vec{v}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

角动量定理



$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}\times\dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}}\times\vec{p}$$
$$= \vec{r}\times\vec{F} + \vec{v}\times m\vec{v} - \vec{v}_O\times m\vec{v}$$
$$= \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}_O$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} - \vec{v}_O$$

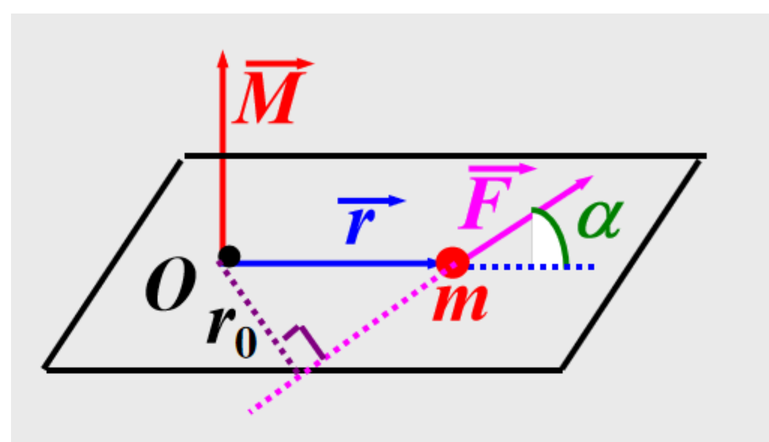
$$\vec{v}_O = 0$$

定义力对定点O的力矩为

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$M = rF\sin\alpha = r_0 F$$

力臂 $r_0 = r\sin\alpha$



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

质点角动量定理（微分形式）

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

质点角动量定理（积分形式）

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

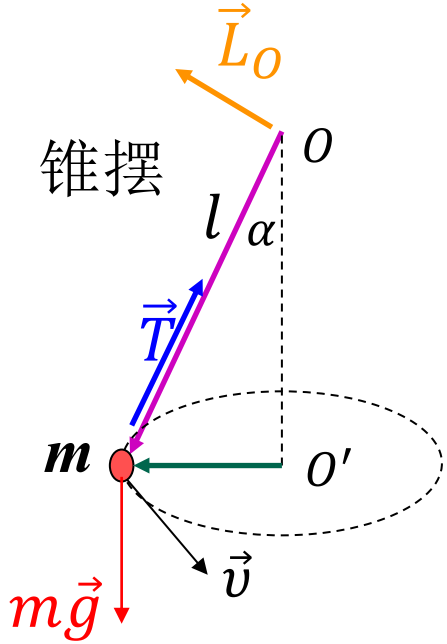
冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt$

$$\boxed{\vec{M} = \dot{\vec{L}}}$$

相对同一点(惯性系)

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}}$$

等价



$$\vec{L}_O = \vec{r}_{Om}\times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_O = lmv \\ \text{方向变化} \end{cases}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'm}\times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_{O'} = lmv\sin\alpha \\ \text{方向不变} \end{cases}$$

$$\vec{r}_{Om}\times\vec{T} = 0$$

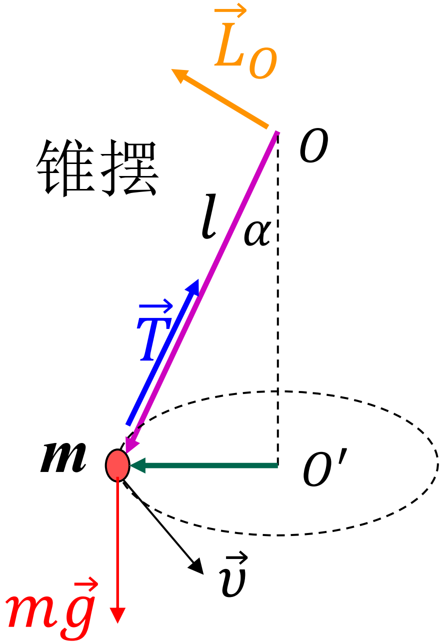
$$\vec{r}_{Om}\times m\vec{g} = l\sin\alpha\, mg \neq 0$$

$$\vec{M} = \dot{\overrightarrow{L_O}} = \dot{L}_O\widehat{L_O} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{L_O}$$

$\vec{M}$与 $\vec{v}$同向，故与 $\widehat{L_O}$垂直，角动量大小不变

但合力矩不为零，角动量方向变化

锥摆



$$\vec{L}_O = \vec{r}_{Om}\times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_O = lmv \\ \text{方向变化} \end{cases}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'm}\times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_{O'} = lmv\sin\alpha \\ \text{方向不变} \end{cases}$$

$$\vec{r}_{Om}\times\vec{T} = 0$$

$$\vec{r}_{Om}\times m\vec{g} = l\sin\alpha\, mg \neq 0$$

$$\vec{M} = \dot{\overrightarrow{L_O}} = \dot{L}_O\widehat{L_O} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{L_O}$$

$\vec{M}$与$\vec{v}$同向，与$\widehat{L_O}$垂直，角动量大小不变

但合力矩不为零，角动量方向变化

$$\vec{r}_{O'm}\times\vec{T}_{O'm} = 0$$

$$\vec{r}_{O'm}\times\vec{T}_{\perp} + \vec{r}_{O'm}\times m\vec{g} = 0$$

合力矩为零，角动量不变

（合力不为零，动量变化）

多选题 1分

设置

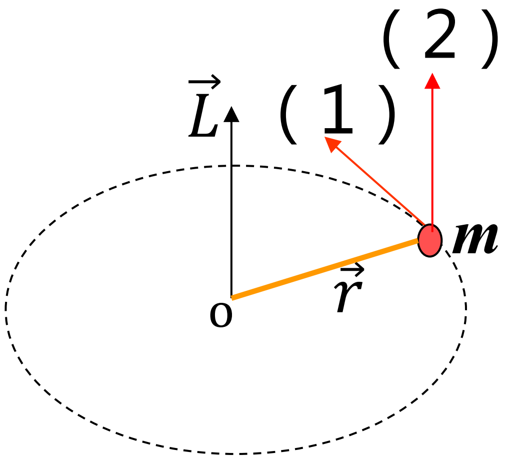
空间站中，宇航员沿着水平的圆周匀速旋转一个系在绳子上的网球，旋转轴竖直，圆半径r，角速度 ω 。若在某个位置，网球受到猛烈击打，冲量为I ，击打方向是： （1）沿着网球运动方向；（2）竖直向上。击打前后，两种情况下，网球角动量

A （1）变大，（2）不变

B （1）（2）都变大

C （1）（2）方向都改变

D （1）方向不变，（2）方向改变



提交

§ 3.9 角动量守恒定律

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ -----> $\vec{L} =$ 常矢量

1. $\vec{F} = 0$
2. 有心力

大小不变

方向不变 -> 平面运动

开普勒定律 行星运动

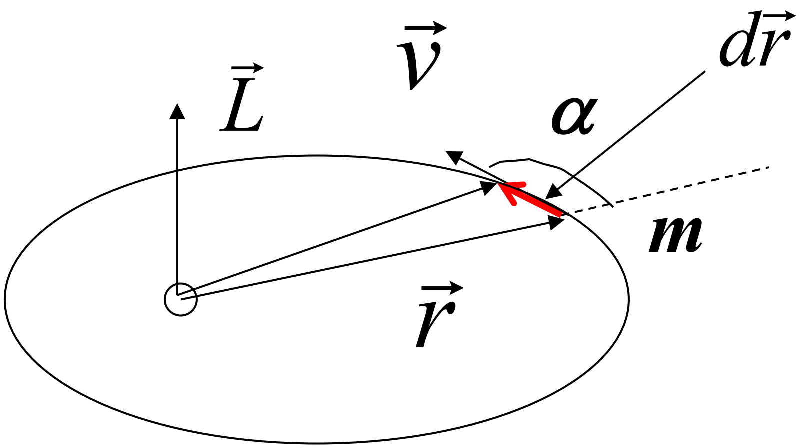
为什么行星做平面运动的假设成立

行星受力方向与矢径在一条直线（有心力）

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$ -----> $\vec{L} =$ 常矢量

故角动量守恒，平面方向不变

§ 3.9 角动量守恒定律



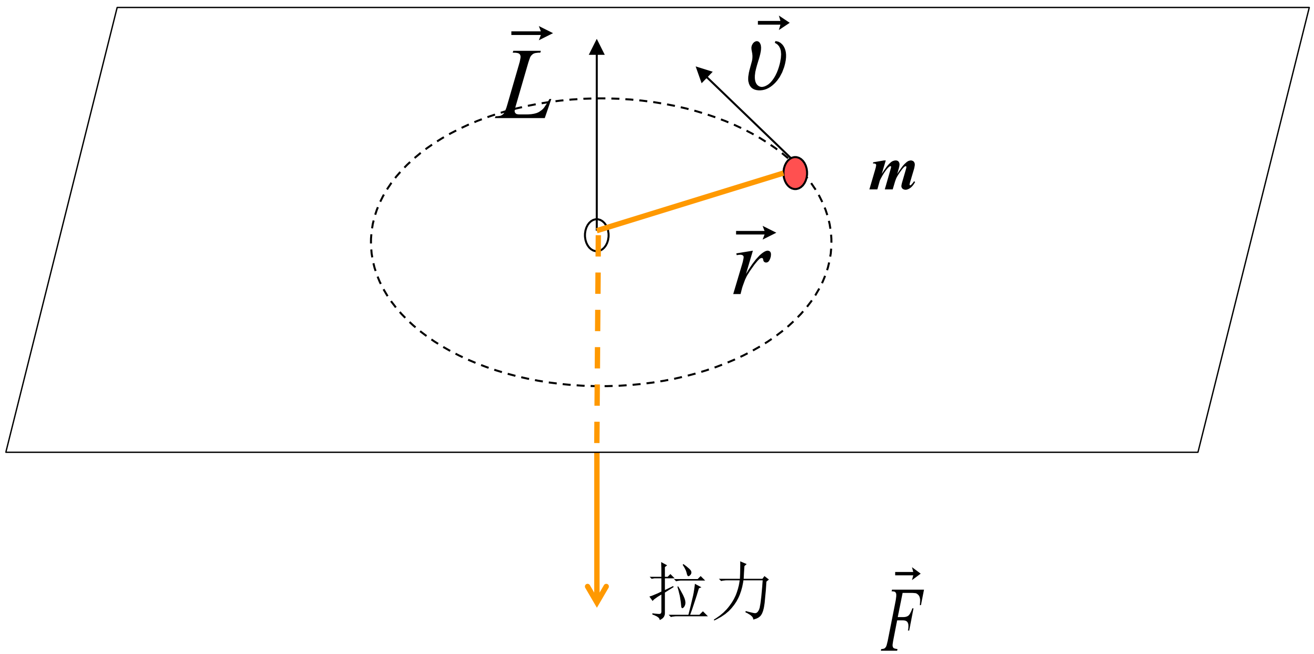
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

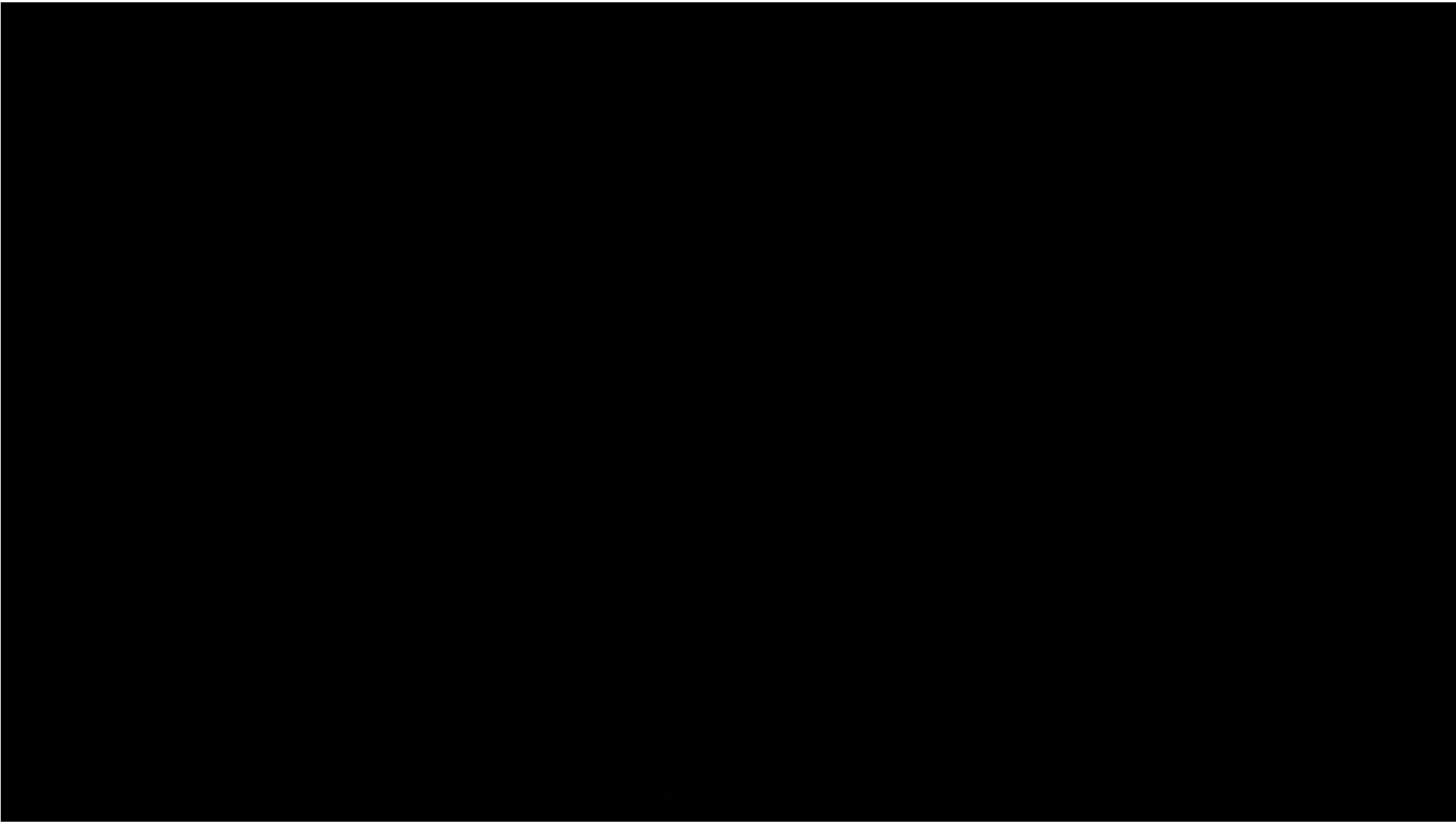
$$L = mvr\sin\alpha = m\frac{|d\vec{r}|}{dt}r\sin\alpha$$

$$= 2m\frac{\frac{1}{2}|d\vec{r}|r\sin\alpha}{dt} = 2m\frac{dS}{dt}$$

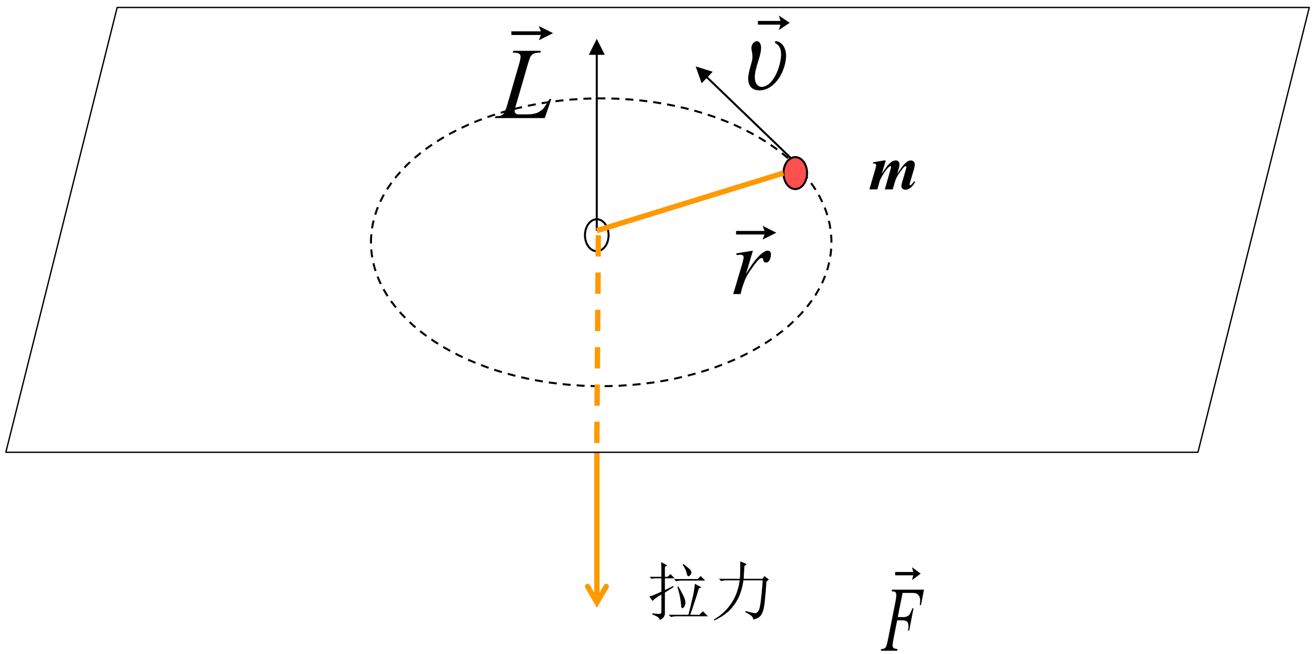
开普勒第二定律

角动量守恒演示实验





角动量守恒演示实验



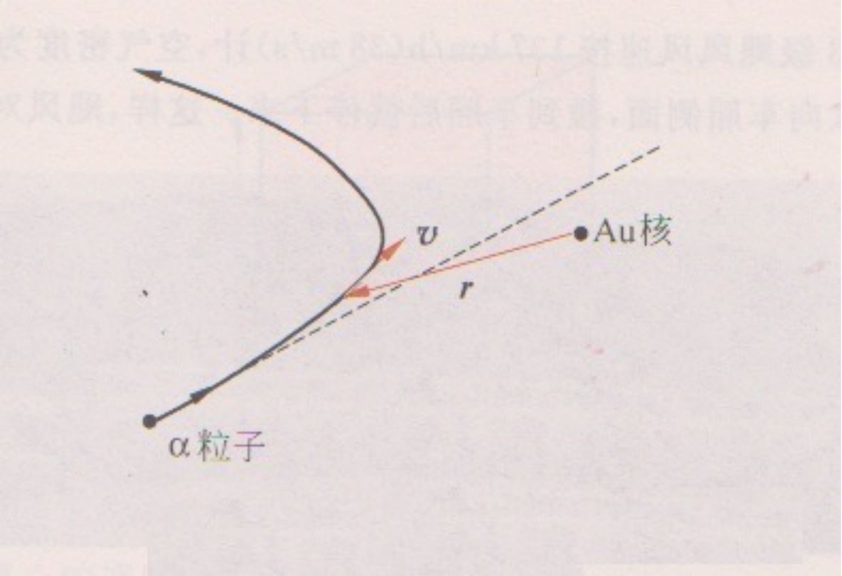
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$L = mrv \quad = mr^2\omega = \text{常量}$$

单选题 1分

设置

一个α粒子与一个金原子核发生散射，金原子核基本不动（取为参考点）。这个过程中，α粒子的



A 动量守恒，角动量不守恒

B 动量不守恒，角动量守恒

C 动量和角动量都守恒

D 动量和角动量都不守恒

提交

单选题 1分

设置

一个物体的角动量大小为a，另一个物体的角动量大小为b，方向相同，则这两个物体的合角动量大小为a+b

A 正确

B 不正确

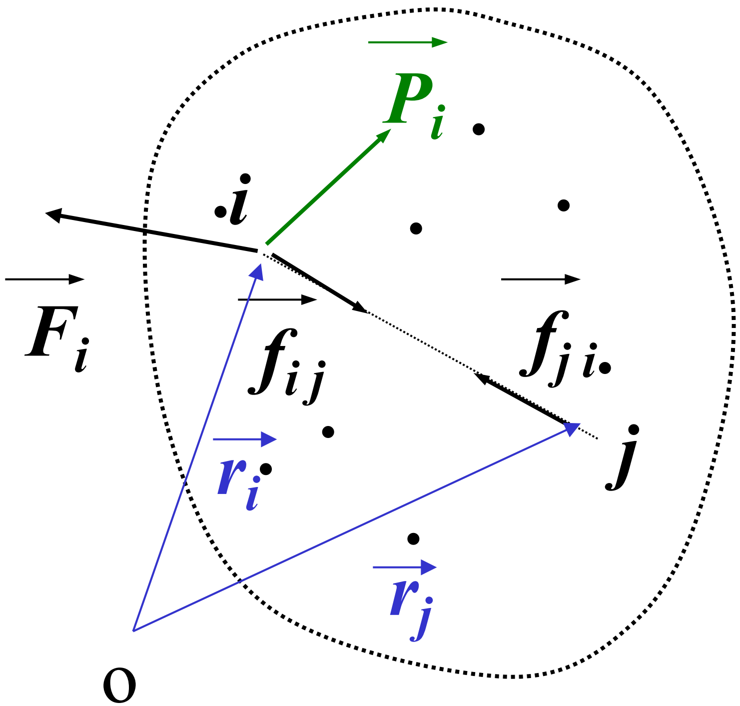
提交

质点系

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij}) = \dot{\vec{L}}_i$$

求和 $\sum_i$

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij}) = \sum_i \dot{\vec{L}}_i$$

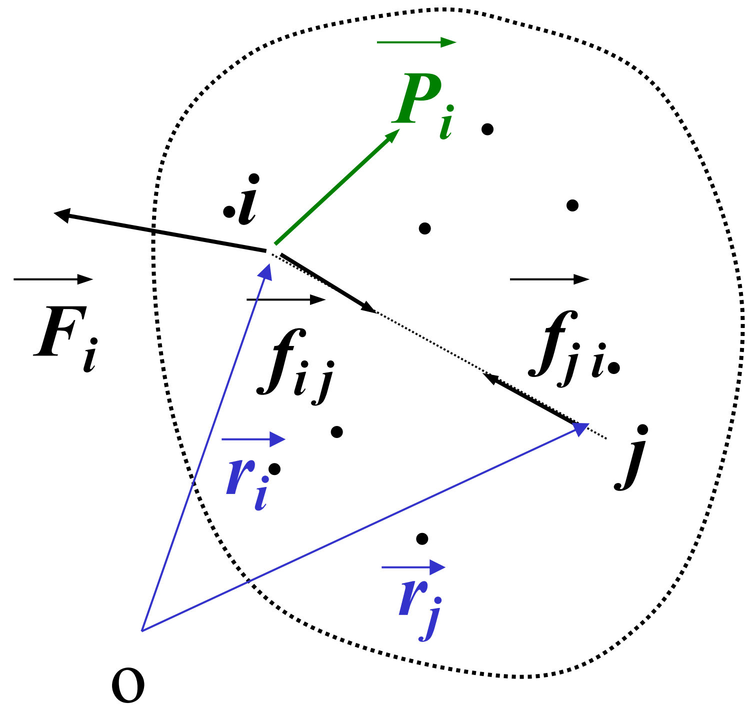


质点系

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij}) = \dot{\vec{L}}_i$$

求和 $\sum_i$

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij}) = \sum_i \dot{\vec{L}}_i$$

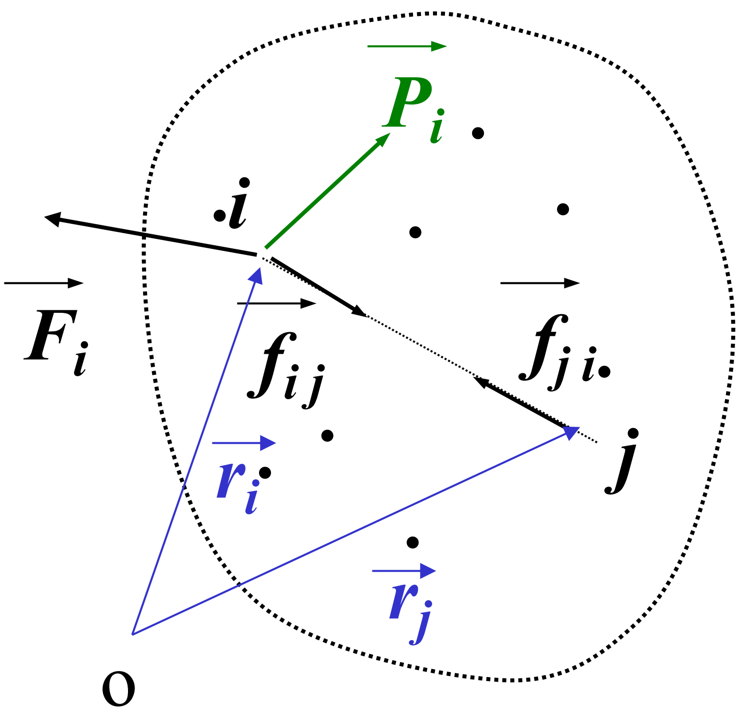


内力矩 $\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} =$

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = 0$$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right)$$



$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

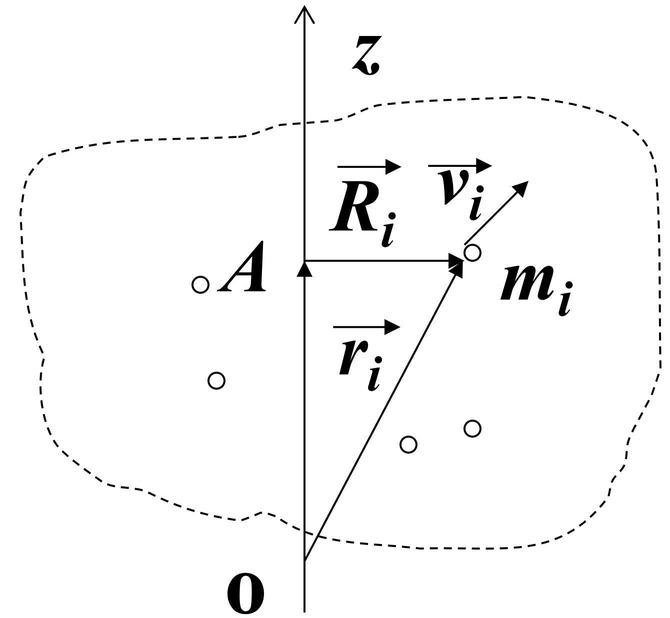
质点系的角动量定理

无外力矩，质点系总角动量守恒

摩擦转盘

绕固定轴的力矩和角动量

设固定轴为 z 轴



$$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$$

$$\boxed{M_z = \dot{L}_z}$$

$$L_z = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \cdot \hat{z} = \sum_i (\vec{R}_i \times \vec{p}_{i\perp}) \cdot \hat{z}$$

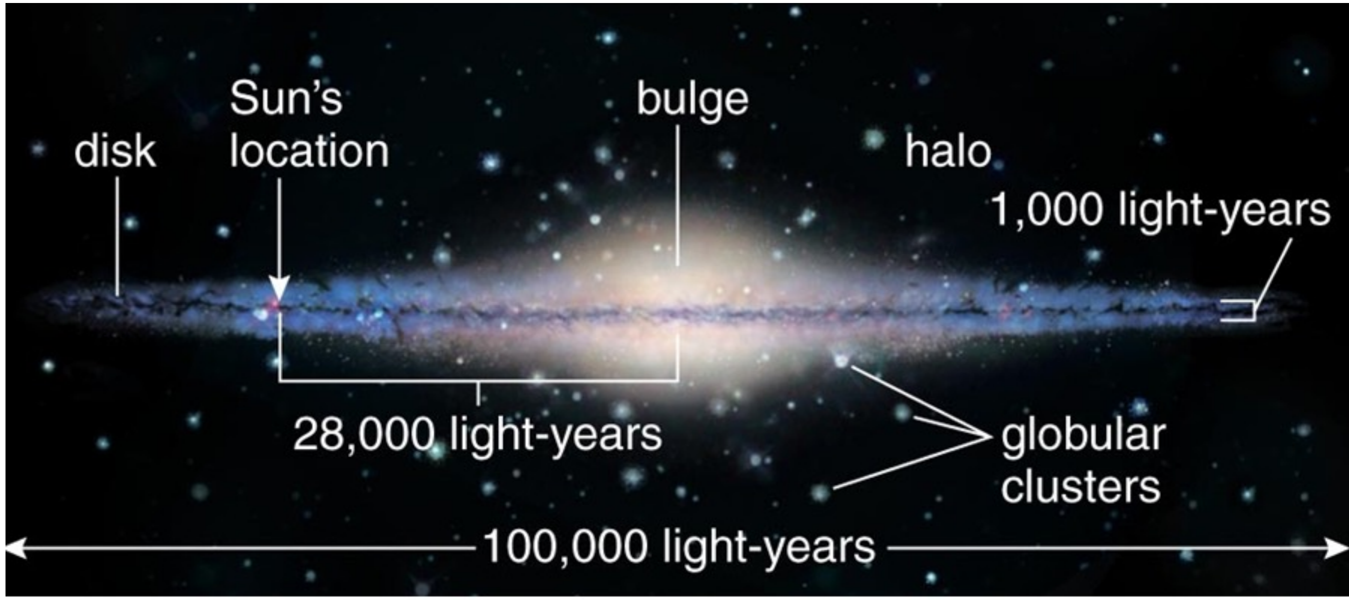
$$M_z = \sum_i (\vec{R}_i \times \vec{F}_{i\perp}) \cdot \hat{z}$$

绕固定轴的力矩为 0，
则绕该轴的角动量守恒。

$$M_z = 0$$

$$L_z = const.$$

引力使星团压缩



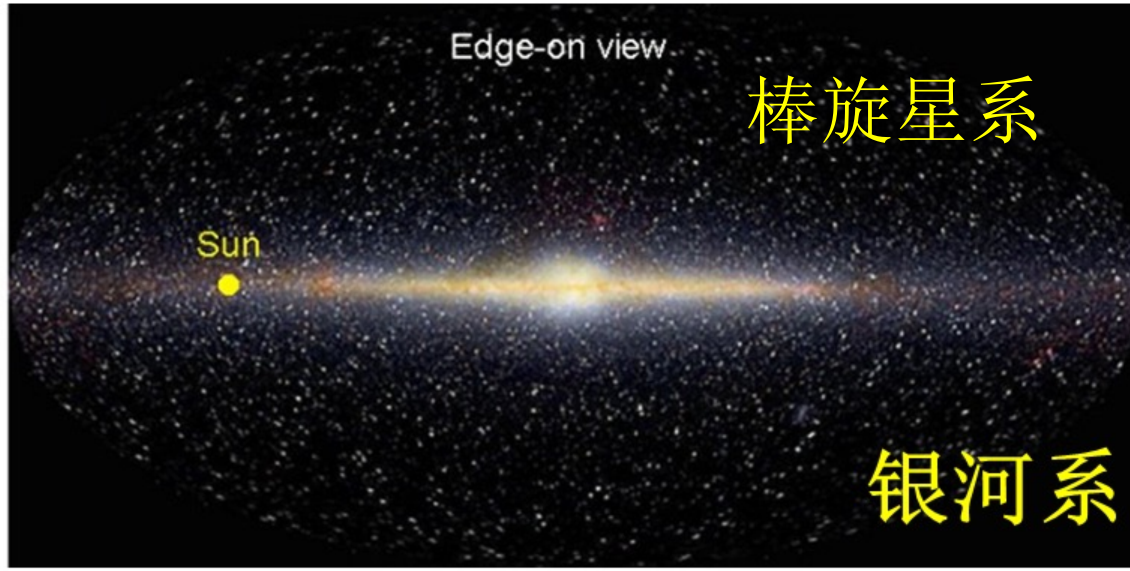
银河系的盘形结构

惯性离心力

离心力与引力达到平衡 r 就一定了

z 轴方向无限制，最终塌缩成旋涡状

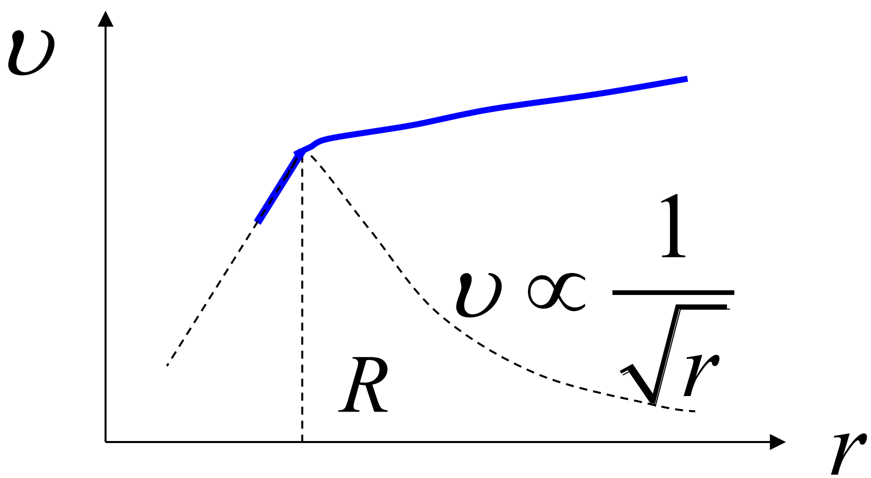
涡旋星系 **m81**



速度分布

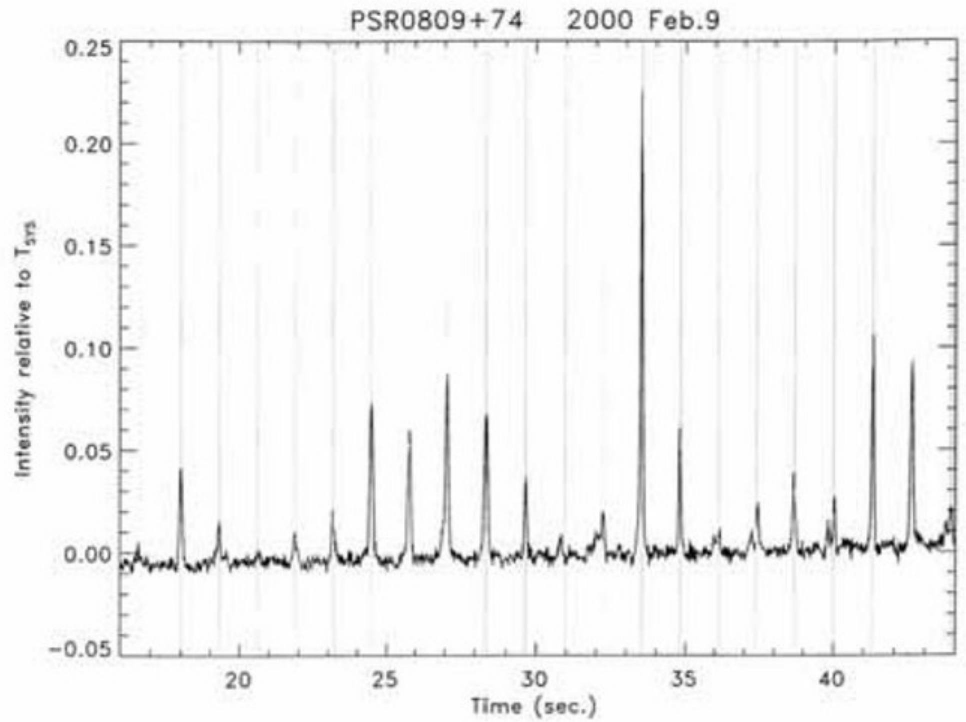
$$m\frac{\upsilon^2}{r} \propto \frac{1}{r^2}$$

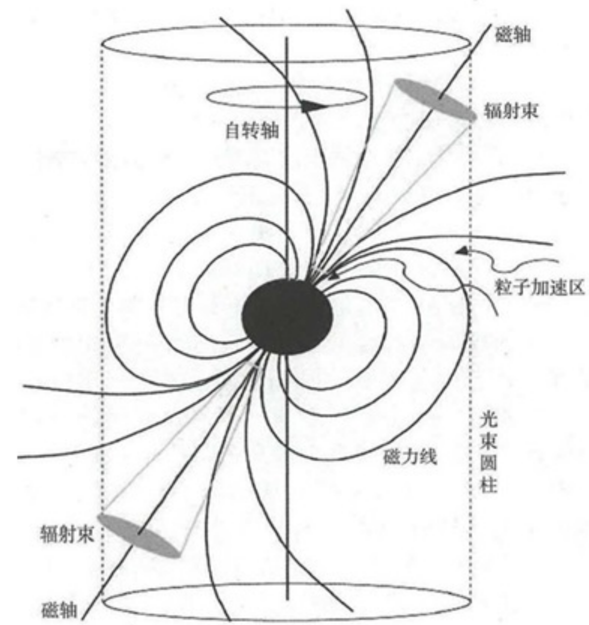
$$\upsilon \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$



观测 **210～240 km/s**

暗物质?





脉冲星辐射模型

脉冲星自转周期几乎不变，
转速太快，如密度太小则被离心力撕裂

球形星体自转角动量 $= \dfrac{2}{5}MR^2\omega$

星体演化过程不受外力矩，角动量守恒

*上图中的脉冲星自转周期只有约 1.19 秒，要使星体不被惯性离心力甩散，必须满足条件：

$$\frac{GM}{R^2} > R\omega^2 \text{，} \left(M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho\right)$$

即星体的密度需满足条件： $\rho > \dfrac{3\omega^2}{4\pi G}$

按上条件计算，脉冲星密度超过了白矮星密度。经多方认证，脉冲星是高速旋转的中子星。通常中子星自转周期是毫秒量级。