

## 清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程    微积分 A    (卷 A)

系名\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 题) (请将答案直接填写在横线上!)

1. 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1000n+1}$  的敛散性 (收敛或发散) \_\_\_\_\_。

2. 幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$  的收敛域为\_\_\_\_\_。

3. 设  $D = \{(x, y), 0 \leq x, y \leq 1\}$ , 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上有一阶连续的偏导数,  $f(x, 1) = 0$ ,

$\forall x \in [0, 1]$ , 且  $\iint_D f(x, y) dx dy = 2$ , 则  $\iint_D y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy =$ \_\_\_\_\_。

4. 设函数  $|x|$  在闭区间  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 级数为  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ , 其和函数记作  $S(x)$ ,

则  $S(x)$  在点  $x = 3\pi$  处的值为  $S(3\pi) =$ \_\_\_\_\_。

5. 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^p} (x \geq 0)$  为条件收敛的充分必要条件是  $p$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

6. 函数  $\sin^2 x$  以  $2\pi$  为周期的 Fourier 级数为\_\_\_\_\_。

7. 对积分  $\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$  作极坐标变换, 所得的累次积分为\_\_\_\_\_。

8. 设平面闭域  $D = \{(x, y), |x| + |y| \leq 1\}$ , 则积分  $\iint_D x^{2015} \sin(x^4 y^2) dx dy =$ \_\_\_\_\_。

9. 设曲线  $L$  为函数  $y = e^{x^2}$  在闭区间  $[0, 1]$  上的图像, 起点为  $(0, 1)$ , 终点为  $(1, e)$ , 则第二型曲线积分  $\int_{L^+} x dx + y dy =$ \_\_\_\_\_。

10. 设  $S$  为  $R^3$  中的闭圆盘:  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ 。规定  $S$  的正法向向下, 则第二型曲面积分

$\iint_{S^+} (x^2 + y^2) dx \wedge dy =$ \_\_\_\_\_。

11. 全微分方程  $(x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0$  的通解为\_\_\_\_\_。

12. 设  $S$  为单位球面:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$ , 外法向为正, 则第二型曲面积分

$$\oiint_{S^+} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. 函数  $\frac{1}{4-x}$  在点  $x=2$  处的 Taylor 级数展开式为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-2)^n$  在  $x=0$  处收敛, 而在  $x=4$  处发散, 则该幂级数的收敛域为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 交换累次积分  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$  次序后, 所得的积分为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二. 计算题 (每题 10 分, 共 4 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

1. 设  $S$  为空间立体  $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$  的边界曲面, 求第一类曲面积分  $\iint_S (x^2+y^2) dS$ .

2. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$  的和函数.

3. 求第二型曲线积分  $I = \int_{\Gamma^+} xdy - ydx$ , 其中定向曲线  $\Gamma^+$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  和柱面  $x^2 + y^2 = x$  的交线, 逆着正  $z$  轴朝下看,  $\Gamma^+$  的正向是逆时针方向.

4. 计算第二型曲面积分  $I = \iint_{S^+} x^2 y dy \wedge dz - xy^2 dz \wedge dx + 3z dx \wedge dy$ , 其中定向曲面  $S^+$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  在平面  $z=1$  下方的部分, 正法向向下.

## 三. 证明题 (请写出详细的证明过程!)

1. (8 分) 设数列  $\{a_n\}$  满足条件  $a_n > 0$ ,  $\forall n \geq 1$ , 且  $a_n$  单调下降. 证明, 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$  发散, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

2. (7 分) 设  $S$  为单位球面  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ,  $A = (a_{ij})$  为  $3 \times 3$  的实对称矩阵,  $\text{tr}(A)$  代表矩阵  $A$  的迹, 即  $A$  的对角元素之和. 分两个步骤: (i)  $A$  为对角阵; (ii)  $A$  为一般对称阵, 证明第一型曲面积分  $\oiint_S (x^T A x) dS = \frac{4\pi}{3} \text{tr}(A)$ , 这里  $x^T A x = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ .