第4讲
谓词逻辑的基本概念
谓词逻辑的推理形式

计算机系　黄民烈

Tel: 18901155050

Office: FIT 4-504

http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/

aihuang@tsinghua.edu.cn

提纲

- 有限域量化、谓词逻辑的解释
- 可满足性、普遍有效性、可判定性问题
- 谓词逻辑的推理演算

4.4 自然语句的形式化(续)

- 对谓词变元多次量化的分析
  - $(\forall x)(\forall y)P(x,y) = (\forall x)((\forall y)P(x,y))$
  - $(\forall x)(\exists y)P(x,y) = (\forall x)((\exists y)P(x,y))$
  - $(\exists x)(\forall y)P(x,y) = (\exists x)((\forall y)P(x,y))$
  - $(\exists x)(\exists y)P(x,y) = (\exists x)((\exists y)P(x,y))$

4.5 有限域下公式的表示法

- 有限域下全称量词和存在量词的表示

  将论域限定为有限集，不失一般性，用{1,2, …,k}来表示，这时全称量词和存在量词可化为如下公式：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(k)$$

- 因此可以说，全称量词是合取词的推广；

  存在量词是析取词的推广。

4.5 有限域下公式的表示法

- 在有限域下，可将$(\forall x)P(x)$化成由合取词来描述的命题公式。
- 在有限域下，可将$(\exists y)P(y)$化成由析取词来描述的命题公式。
- **但是在无限域下，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。为什么?**

4.5.2 在域{1， 2}上多次量化公式

- $(\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$

  $= (\forall y)\ P(1, y) \wedge (\forall y)P(2, y)$

  $= P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge P(2, 1) \wedge P(2, 2)$

- $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$

  $= (\forall y)P(1, y) \vee (\forall y)P(2, y)$

  $= (P(1, 1) \wedge P(1, 2)) \vee (P(2, 1) \wedge P(2, 2))$

4.5.2　在域{1，2}上多次量化公式

- $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$= (\exists x)P(x, 1) \land (\exists x)P(x, 2)$

$= (P(1, 1) \lor P(2, 1)) \land (P(1, 2) \lor P(2, 2))$

- $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

$= (\exists y)P(1, y) \lor (\exists y)P(2, y)$

$= (P(1, 1) \lor P(1, 2)) \lor P(2, 1) \lor P(2, 2))$

4.5.2　在域{1，2}上多次量化公式

- 将$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$写成析取范式可明显看出它与 $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$ 的差别：

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$= ((\exists x)P(x, 1)) \land ((\exists x)P(x, 2))$

$(P(1, 1) \lor P(2, 1)) \land (P(1, 2) \lor P(2, 2))$ （合取范式）

$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$

$= (P(1, 1) \land P(1, 2)) \lor (P(2, 1) \land P(2, 2))$ （析取范式）

4.5.2 在域{1，2}上多次量化公式

- 从而有

$$(\exists x)(\forall y)\, P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\, P(x, y)$$

注：$(\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$可以写成$(\forall y)\ P(f(y), y)$其得到的合取式少；而 $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$ 可以分配出来的合取式多

- 当对有的谓词公式难于理解时，可在有限域{1, 2}上转换成命题逻辑公式做些分析，常会帮助理解。

- 举例（课本）

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

◉ 普遍有效公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

$$(\forall x)\,(P(x) \lor \neg P(x))$$

$$(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$$

$$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$$

谓词公式的解释

- 假设D={1, 2}
- 谓词公式A= $(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x))$ 有多少种可能解释?

- 假设D_1={1, 2}，D_2={a,b,c}
- 谓词公式A=$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$有多少种可能的解释（x属于$D_1$，y属于$D_2$）？

- 设谓词公式$\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \vee R(y,z))$，其中$x \in A, y \in B, z \in C$，其中A、B、C分别有2、3、4个元素，则该公式有多少种可能的解释?

谓词公式的解释与命题公式有什么不同?

- 跟公式的结构有关
- 跟个体域的元素个数有关

$$\forall x \forall y \forall z (Q(x, y) \vee R(y, z))$$

$$\forall x \forall y \forall z Q(x, y, z)$$

$$\forall x \forall y \forall z (Q(x, y, z) \vee R(y, z))$$

4.6.2 不可满足公式

◉ **不可满足公式**

设A为一个谓词公式，若A**在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式**。

例 $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

$(\forall x) P(x) \wedge (\exists y) \neg P(y)$

4.6.3 可满足公式

- **可满足公式**

  设A为一个谓词公式，若至少存在一个解释使A为真，则称A为可满足的公式。

  普遍有效的公式一定是可满足的公式。

判断下面公式的普遍有效性和可满足性

- $(\exists x)\ P(x)$
- $(\forall x)\ P(x)$
- $(\forall x)\ (P(x) \vee \neg P(x))$
- $(\forall x)\ (P(x) \to (Q(x) \vee P(x)))$
- $(\exists x)\ P(x) \wedge (\exists x)\ \neg P(x)$

普遍有效和可满足性

- $(\exists x)\, P(x) \land (\exists x) \neg P(x)$

  在D_1上不可满足，但在D_2上可满足。

- $(\forall x)\, P(x) \lor (\forall x) \neg P(x)$

  在D_1上普遍有效，但在D_2上则不一定。

D_1：是指包含一个元素的个体域，如$\{x_1\}$；

D_2：是指包含二个元素的个体域，如$\{x_1,x_2\}$；

可满足性（补充资料I）

- 在(k)个体域上可满足，但不在(k−1)个体域上可满足

$$\mathrm{k}=2: \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$$

$$\mathrm{k}=3: \exists x P(x) \wedge \exists x(\neg P(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(\neg P(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\begin{aligned} k=4: & \exists x P(x) \wedge \exists x(\neg P(x) \wedge G(x)) \wedge \\ & \exists x(\neg P(x) \wedge \neg G(x) \wedge R(x)) \wedge \\ & \exists x(\neg P(x) \wedge \neg G(x) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

- 在无穷个体域中可满足，但不在有穷个体域中可满足

$$\forall x \neg R(x,x) \wedge \forall x\, \forall y \forall z(\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \wedge$$
$$(\forall x \exists y R(x,y))$$

(0, 1) 可满足；(0, 1]，{1，2，3} 不可满足

普遍有效性（补充资料II）

- 在k个体域上普遍有效，但不在(k+1)个体域中普遍有效

$$\mathrm{k}=1: \forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$$

$$\mathrm{k}=2: \forall x P(x) \vee \forall x(\neg P(x) \vee G(x)) \vee \forall x(\neg P(x) \vee \neg G(x))$$

$$\begin{aligned} k=3: & \forall x P(x) \vee \forall x(\neg P(x) \vee G(x)) \vee \\ & \forall x(\neg P(x) \vee \neg G(x) \vee R(x)) \vee \\ & \forall x(\neg P(x) \vee \neg G(x) \vee \neg R(x)) \end{aligned}$$

- 在有穷个体域中普遍有效但在无穷个体域中不普遍有效

$$\begin{aligned} & (\forall x\, \exists y R(x,y) \wedge \forall x\, \forall y \forall z(\mathrm{R(x,y)} \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)) \\ & \rightarrow \exists x R(x,x) \end{aligned}$$

有限传递集合{<a,b>,<b,b>}，但对于R上的<关系不成立

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- 有限域上公式普遍有效性的几个结论

- **有限域上一个公式的可满足性和普遍有效性依赖于且仅依赖于个体域个体的个数。**

- 即在某个含k 个元素的个体域上普遍有效（或可满足），则在任一含k 个元素的个体域上也普遍有效（或可满足）。

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- **如果某公式在k个元素的个体域上普遍有效，则在(k-1)个元素的个体域上也普遍有效。**

  大范围内普遍有效 => 小范围内也普遍有效

  有限域上普遍有效，并不保证无限域上普遍有效

- **如果某公式在k个元素的个体域上可满足，则在(k+1)个元素的个体域上也可满足。**

  小范围内可满足 => 大范围内也可满足

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- **谓词逻辑的判定问题**
- 谓词逻辑的判定问题，指的是**谓词逻辑任一公式的普遍有效性的判定问题。**
- 若说谓词逻辑是可判定的，就要求给出一个能行的方法，使得对任一谓词公式都能判定是否是普遍有效的。

4.6.6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- **一阶谓词逻辑是不可判定的。**

对任一谓词公式而言，没有一个能行的方法判明它是否是普遍有效的。

4.6.6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- **一阶谓词逻辑的某些子类是可判定的。**

其中包括：

(1) 仅含一元谓词变项的公式是可判定的

(2) $(\forall x_1)(\forall x_2) \ldots (\forall x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

和$(\exists x_1)(\exists x_2) \ldots (\exists x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$型公式，若P中无量词和其它自由变项也是可判定的

(3) 个体域有穷时的谓词公式是可判定的。

4.6.6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

1936年**Turing**和**Church**分别独立地证明：

- **一阶谓词逻辑的普遍有效性是半可判定的**

如果公式本身是普遍有效(或不可满足)的，则存在有限的判定算法，否则不存在有限的判定算法。

4.6.6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- 没有一般的方法使得在有限步内判别一阶逻辑的公式是否普遍有效或不可满足。
- 如果公式本身是普遍有效（或不可满足），那么就能在有限步内完成判定。
- 对于其它类型的公式就不一定能在有限步内得出结论，判定过程有可能永不停止。

谓词逻辑的判定问题的若干定理

- **定理一** 公式在一个体域中的可满足性和普遍有效性依赖于其中个体的数目。 **(补充说明)**
- **定理二** 公式在一个体域中的可满足性和普遍有效性只依赖于个体域中个体的数目。

  (补充说明)
- **定理三** 如个体域是有穷的，则判定方法常有。

谓词逻辑的判定问题的若干定理

- **定理四**（1）如公式A为k普遍有效，则¬ A为k不可满足，反之亦然。（2）如公式A普遍有效，则¬ A不可满足，反之亦然。
- **定理五** 如公式A为k（k>0）可满足，则A也是k+1可满足.
- **定理六** 如公式A为k（k>1）普遍有效，则A也是k-1普遍有效.
- **定理七** 只含有一元谓词变项的公式是能行可判定的。

谓词逻辑的判定问题的若干定理

- **定理八** $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

和$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$型公式，

若P中无量词和其它自由变项也是可判定的（Skolem标准型）

- **定理九** $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)(\exists y_1)(\exists y_2)\ldots(\exists y_m)P(x_1, x_2,\ldots, x_n, y_1,\ldots y_m)$

若P中无量词和其它自由变项也是可判定的（Skolem标准型）

本章作业

- 四：1，2，3
- 五：7，9
- 六：4，6，7，9
- 七：3，5，6，7，9
- 八：2，3，6，7
- 九
- 十：7，8

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

- 5.1 否定型等值式
- 5.2 量词分配等值式
- 5.3 范式*
- 5.4 基本推理公式
- 5.5 推理演算*
- 5.6 谓词逻辑的归结推理法*

谓词逻辑的等值和推理演算

- 普遍有效公式是最重要的逻辑规律。
- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。
- 相比命题逻辑，量词谓词的引入，使得谓词演算应用广泛。

普遍有效

- 4-6-1 普遍有效公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

例

$$(\forall x)\ (P(x) \vee \neg P(x))$$
$$(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$$
$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$(\forall x)\ P(x)\ \vee\ (\forall x)\neg P(x)$在$D_1$上普遍有效，但在$D_2$上则不一定。

5.1 否定型等值式

5.1 否定型等值式

- 5-1-1 等值

设A, B是一阶谓词逻辑中任意两个公式，若 $A \leftrightarrow B$是普遍有效的公式，则称 A 与 B 等值，记作

$$A = B \quad 或 \quad A \Leftrightarrow B$$

从命题公式移植来的等值式

5.1 否定型等值式

- 5-1-2 否定型等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \cdots \land P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \cdots \lor P(k)$$

$$x \in D_k = \{1,2,\dots,k\}$$

分析以下两式是否相等?

$$\neg(\forall x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

- {1, 2}域分析
- 否定词越过量词的移动，使用摩根定律

自然语言形式化

- 例:“天下乌鸦一般黑”的表示

设F(x): x是乌鸦, G(x, y): x与y 一般黑

原语句可表示成

$$(\forall x)(\forall y)(F(x) \land F(y) \rightarrow G(x, y))$$

与之等值的公式是

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \land F(y) \land \neg G(x, y))$$

即不存在x, y是乌鸦但不一般黑。这两句话含义是相同的。

自然语言形式化

- 经计算有

$$
\begin{aligned}
&\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y)) \\
&= (\forall x)\neg(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y))) \\
&= (\forall x)(\forall y)\neg(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y)) \\
&= (\forall x)(\forall y)(\neg(F(x) \wedge F(y)) \vee G(x, y)) \\
&= (\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))
\end{aligned}
$$

5.2 量词分配等值式

5.2 量词分配等值式

- 5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \lor q) = (\forall x)P(x) \lor q$$
$$(\exists x)(P(x) \lor q) = (\exists x)P(x) \lor q$$
$$(\forall x)(P(x) \land q) = (\forall x)P(x) \land q$$
$$(\exists x)(P(x) \land q) = (\exists x)P(x) \land q$$

- 其中q 是命题变项，与个体变元 x 无关

5.2 量词分配等值式

- 5-2-2 量词对蕴含词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q) = (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\exists x)(P(x) \rightarrow q) = (\forall x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\forall x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

- 其中p, q是命题变项，与个体变元 x 无关

- 给出上面等式的证明。
- 先证明其中的第一个等式。

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(P(x) \rightarrow q) \\
= \ &(\forall x)(\neg P(x) \vee q) \\
= \ &(\forall x)\neg P(x) \vee q && \text{依5.2.1的等值式} \\
= \ &\neg(\exists x)P(x) \vee q && \text{依5.1.2的等值式} \\
= \ &(\exists x)P(x) \rightarrow q
\end{aligned}
$$

- 再证明其中的第三个等式

$$
\begin{aligned}
& (\forall x)(p \to Q(x)) \\
= \quad & (\forall x)(\neg p \lor Q(x)) \\
= \quad & \neg p \lor (\forall x)Q(x) && \text{依5.2.1的等值式} \\
= \quad & p \to (\forall x)Q(x)
\end{aligned}
$$

- 同样可证其余两个等值式。

$\forall x\, P(x) \to q$ 跟 $\forall x\, ((P(x) \to q)$的差别

5.2 量词分配等值式

- 5-2-3 全称量词 $\forall$ 对 $\wedge$，存在量词 $\exists$ 对 $\vee$ 的分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

用{1,2}域方法验证：

- $\forall$ 对 $\vee$ 不满足分配率，$\exists$ 对 $\wedge$ 不满足分配率

- 但需注意：

$$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$$

5.2 量词分配等值式

- 5 - 2 - 3 **变元易名**∀与对∨，∃对∧的分配等值式

  (分配和易名对比)

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \lor Q(y)) = (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \land Q(y)) = (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$$

5.2 量词分配等值式

- 5-2-3 **变元易名**∀与对∨，∃对∧的分配等值式

  （分配和易名对比）

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \lor Q(y)) = (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \land Q(y)) = (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \lor Q(y)) \neq (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$$
$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \land Q(y)) \neq (\exists x)(P(x) \land Q(x))$$

变元易名，什么时候该易名?

5.3 范式 (Normal Form)

5-3-1 前束范式

- 设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

  (1) 所有量词都位于该公式的最左边；

  (2) 所有量词前都不含否定词；

  (3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

  则称A为**前束范式**。

5-3-1 前束范式

- 前束范式的一般形式为

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

- 其中$Q_i(1\leqslant i\leqslant n)$为 ∀ 或 ∃，M为不含量词的公式，称作公式A的基式或母式。

5-3-2 前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。

5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. 消去联结词 →，↔。

2. 右移否定词 ¬（利用否定型等值式与摩根律）。

3. 量词左移（使用量词分配等值式）。

4. 变元易名（使用变元易名分配等值式）。

例1：求下式的前束范式

$$\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b)\rightarrow R(x)))$$

可按下述步骤实现：

(1) 消去联结词→, ↔;

得 $\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b)\vee R(x)))$

(2) ¬内移（反复使用摩根律）

得 $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)Q(y, b)\vee R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

(3) 量词左移（使用分配等值式）得

$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\land(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\land\neg R(x))$

$= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\land(\exists y)\neg Q(y, b)\land\neg R(x))$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\land(\exists z)\neg Q(z, b)\land\neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y)\land\neg Q(z, b)\land\neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$

思考：为什么不能直接写成：$(\forall x)(\exists y)$ $(P(a, x, y)\land\neg Q(y, b)\land\neg R(x))$

- 使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值，所以，所得到的前束形与原公式是等值的。这里的

$$S(a, b, x, y, z)$$

便是原公式的母式。

由于前束中量词的次序排列，如$(\exists y)(\exists z)$也可以写成$(\exists z)(\exists y)$以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \wedge P)$$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

5-3-4 SKOLEM 标准型

- Thoralf Skolem： 生于1887年，挪威；死于1963年；
- **主要工作是研究**丢番图方程，**数理逻辑, 集合论**等

Skolem tends to treat general problems by concrete examples. He often seemed to present proofs in the same order as he came to discover them. This results in a fresh informality as well as a certain inconclusiveness. Many of his papers strike one as progress reports. Yet his ideas are often pregnant and potentially capable of wide application. He was very much a 'free spirit': he did not belong to any school, he did not found a school of his own, he did not usually make heavy use of known results... he was very much an innovator and most of his papers can be read and understood by those without much specialized knowledge. It seems quite likely that if he were young today, logic...

5-3-4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

  (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且，至少有一个存在量词；

  (2) 或仅保留全称量词而没有任何存在量词，便得到公式 A的 SKOLEM 标准型。

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

5-3-5 ∃前束范式

- 一阶谓词逻辑的任一公式的前束范式（或称SKOLEM标准型）的形式为

$$(\exists \boldsymbol{x_1})(\exists \boldsymbol{x_2}) \ldots (\exists \boldsymbol{x_i})(\forall \boldsymbol{x_{i+1}}) \ldots (\forall \boldsymbol{x_n})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$$

- 即所有的存在量词都在全称量词的左边,且应保证至少有一个存在量词(i ⩾ 1)，同时$M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$中不含量词也无自由个体变项

5-3-6 ∃前束范式存在定理

◉ 一阶谓词逻辑的任一公式 *A*都存在与之等值的∃前束范式，并且 *A*是**普遍有效**的当且仅当其∃前束范式是**普遍有效**

补充内容（选学）：∃前束范式的存在定理及其证明

--选自 王宪钧编《数理逻辑引论》，1982，北京大学出版社

定理 谓词逻辑的任一公式 A，都可化成相应的∃前束范式，并且 A 是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。

说明：对普遍有效的公式，它与其∃前束范式是等值的。而一般的公式与其∃前束范式并不等值。自然仅当 A 是普遍有效的，方使用∃前束范式。

<u>定理的证明：</u>

上述定理可叙述为：**谓词逻辑的任一公式 D 都有一∃前束范式 E，**并且 **D** 和 **E** 可互推，亦即：**D 普遍有效是 E 普遍有效的充要条件。**

补充说明I: $(\forall x)F(x) \rightarrow \exists x \forall y Q(x,y)$

$\vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x F(x) \to \forall x G(x))$ 推理公式

$\vdash \neg\left(\forall x(\neg F(x) \vee G(x))\right) \vee \left(\neg(\forall x F(x)) \vee \forall x G(x)\right)$ 去掉所有蕴含

$\vdash \exists x\left(\neg(\neg F(x) \vee G(x))\right) \vee \neg(\forall x F(x)) \vee \forall x G(x)$ 否定内移

$\vdash \exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \vee \neg(\forall x F(x)) \vee \forall x G(x)$ 否定内移

$\vdash \neg(\forall x F(x)) \vee \left(\exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \vee \forall x G(x)\right)$ 换位置，加括号

$\vdash \forall x F(x) \to (\exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \vee \forall x G(x))$ 等值变换

$\vdash \forall x F(x) \to (\exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \vee \forall z G(z))$ 变元易名

$\vdash \forall x F(x) \to \exists x \forall z((F(x) \wedge \neg G(x)) \vee G(z))$ 分配量词

例2: 求$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$的∃前束范式(P中无量词)。

将一公式化成∃前束形, 首先要求出前束形, 再做∃前束。这个例子已是前束形， 便可直接求∃前束形。

首先将全称量词$(\forall y)$改写成存在量词$(\exists y)$, 其次是引入谓词S和一个变元z, 得$S(x, z)$, 建立公式

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \wedge \neg S(x, y))\vee(\forall z)(S(x, z)))$$

其中$\neg S(x, y)$的变元, 是$(\forall y)$的变元y和$(\forall y)$左边存在量词$(\exists x)$的变元x。附加的$(\forall z)S(x, z)$中的变元z是新引入的未在原公式中出现过的个体, S也是不曾在M中出现过的谓词。

- 进而将$(\forall z)$左移(等值演算), 便得∃前束范式

$$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x, y, u)\wedge\neg S(x, y))\vee S(x, z))$$

- 当原公式中有多个全称量词在存在量词的左边时，可按上述方法将全称量词逐一右移。
- ∃前束范式仅在普遍有效的意义下与原公式等值。∃前束形对谓词逻辑完备性的证明是重要的。

两个公式如何互相推导?

- 普遍有效意义下的互相推导

$$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x, y, u)\wedge\neg S(x, y))\vee S(x, z))$$

$$\Downarrow$$

$$(\exists x)(\exists u)(\forall z)((\exists y)(P(x, y, u)\wedge\neg S(x, y))\vee S(x, z))$$

- 普遍有效的前提下，可以使用代入规则$S(x,y)= P(x, y, u)$
- 消去矛盾式，即得:

$$(\exists x)(\exists u)(\forall z)P(x,z,u)$$

$$\Downarrow$$

变元易名

$$(\exists x)(\exists u)(\forall y)P(x,y,u)$$

$$\Downarrow$$

Why? $(\exists x)(\forall y)P(x,y)\rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

$$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$$

补充说明II：存在前束范式存在定理及其证明

- 定理：谓词逻辑的任一公式A，都可化成相应的∃前束范式，并且A是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。
- 见附件材料——自学

5-3-7 ∀前束范式

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A的∀前束范式（或称SKOLEM标准型）是仅保留全称量词的前束范式。

5-3-8 ∀前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A都可化成相应的∀前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称SKOLEM标准型），并且 A是不可满足的当且仅当其∀前束范式是不可满足的。

- 对不可满足的公式，原公式与其Skolem标准形是等值的
- 一般的公式与其Skolem标准形并不等值
- 仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形

- **例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。**

- 将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。该例已是前束形，便可直接求Skolem标准形
- 首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。
- 进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$, 因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数$f(y, z)$ (未在P中出现过)代入。

- 最后按同样的方法消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词P中出现的所有变元w均以y、z、v的某个三元函数
$g(y, z, v)$ (未在P中出现过也不同于$f(y, z)$)代入。

- 这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y,z), v, g(y,z,v))$$

- 消存在量词是将相应变元以函数代入，如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$。因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一x，都有一个y使$P(x, y)$成立，那么这个y通常是依赖于x，可视作x的某个函数$f(x)$。

从而有Skolem标准形$(\forall x)P(x, f(x))$, 然而所能找到的y不必然是x的函数f, 于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值。

- 在{1, 2}域上

  $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

  $= (P(1, 1) \lor P(1, 2)) \land (P(2, 1) \lor P(2, 2))$

  $(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1)) \land P(2, f(2))$

  两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。

这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。

求下式的存在前束范式和任意前束范式

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(x,y) \rightarrow \neg(\forall z)R(y,z)))$$