微积分 A（2）期中考试样题参考解答

一．**填空题**（每空 3 分，共 15 题）

1． 记函数 $u=x^2+y^2-xyz$ 在 $(1,0,1)$ 处的梯度方向为 $\vec{g}$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{g}}\right|_{(1,0,1)}$ =__________。

解：注意函数沿梯度方向的方向导数等于梯度的模（长度）。$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{g}}\right|_{(1,0,1)}=\sqrt{5}$。

2． 曲线 $x=t,\ y=2\cos t,\ z=3\sin t$ 在 $t=\pi/2$ 处的切线方程为 ________________。

答案：$\frac{x-\pi/2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{0}$。

3． 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z=\cos(xyz)$ 确定的隐函数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$____________。

答案：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1+yz\sin(xyz)}{1+xy\sin(xyz)}$。

4． 设函数 $f(u,v)$ 连续可微，$z(x,y)=f(xy,x-y)$，则 $dz=$_____________。

答案：$dz=(yf_u+f_v)dx+(xf_u-f_v)dy$，这里 $f_u=f_u(xy,x-y)$，$f_v=f_v(xy,x-y)$。

5． 函数 $u=x+y^2+z^3$ 在点（1,1,1）处沿方向 $I=(2,-2,1)/3$ 的方向导数为___________。

解：$\frac{\partial u}{\partial I}(1,1,1)=\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}(1,1,1)-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1)+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial z}(1,1,1)=\frac{1}{3}$。

6． 函数 $z=\frac{\sin x}{1-\sin y}$ 在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项 $o(x^2+y^2)$ 的 Taylor 展式为________。

答案：$z=x+xy+o(x^2+y^2)$

7．两曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 和 $z^2=3x^2+y^2$ 的交线在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方程为

_________________________。

答案：所求切线方程为 $\begin{cases}4(x-1)-6(y+1)+4(z-2)=0\\6(x-1)-2(y+1)-4(z-2)=0\end{cases}$。化简得 $\begin{cases}2x-3y+2z=9\\3x-y-2z=0\end{cases}$

注：直线方程的另一种形式为 $\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$

8．设函数 $F(x,y)=\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-yt^2}dt$，$y>0$，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=$______________。

答案：$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-\int_0^{+\infty} t^3\cos(xt)e^{-yt^2}dt$。

9. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,0)}=$____________。

答案：$\mathrm{dz}\big|_{(1,0)}=dx-\sqrt{2}dy$.

10. 已知曲面 $2x^2+y^2-z=0$ 在某点的切平面平行于平面 $x+y+z=2$，则该切平面的方程为______________________。

解：设曲面 $2x^2+y^2-z=0$ 在点（x_0,y_0,z_0）处的切平面平行于平面 $x+y+z=2$，则有 $(4x_0,2y_0,-1)//(1,1,1)$。由此可见 $x_0=-1/4$，$y_0=-1/2$。代入曲面方程得 $z_0=3/8$。于是所求切平面的方程为（$x+1/4$）+（$y+1/2$）$+(z-3/8)=0$，即 $x+y+z=-3/8$。

11. 设 $f(u,v)$ 是 C^2 函数，$z(x,y)=f(x+y,x-y)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______________.

解:两次应用链规则得 $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}-\dfrac{\partial f}{\partial v}$，$\dfrac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 v}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 v}$。

12. 设 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处可微,向量 $\vec{u}=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$。若 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\bigg|_{(x_0,y_0)}=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\bigg|_{(x_0,y_0)}=-2$，则微分 $df\big|_{(x_0,y_0)}=$______________________。

解:记 $\nabla f\big|_{(x_0,y_0)}=(a,b)$,则有 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\bigg|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}a+\dfrac{2}{\sqrt{5}}b=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\bigg|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a-\dfrac{1}{\sqrt{2}}b=-2$。

解得 $a=\sqrt{5}-4\sqrt{2}$，$b=\sqrt{5}-2\sqrt{2}$。由此得 $df\big|_{(x_0,y_0)}=(\sqrt{5}-4\sqrt{2})dx+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})dy$。

13. 极限 $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1\sqrt{x^3+a^2}dx=$____________。

解：$\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1\sqrt{x^3+a^2}dx=\int_0^1\sqrt{x^3}dx=\dfrac{2}{5}$。

14. 已知积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，$a$，$b$ 和 c 为三个常数，且 $a>0$，则积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(ax^2+2bx+c\right)}dx=$

________________。

解：对二次多项式 $ax^2+2bx+c$ 配方得 $ax^2+2bx+c=a(x+b/a)^2+(ac-b^2)/a$。于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx = e^{(b^2-ac)/a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+b/a)^2}dx = e^{(b^2-ac)/a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}dy = e^{(b^2-ac)/a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ 。

15．曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的法线方程为 ________________________________。

解：曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的梯度方向为 $(2x,2y,-1)\big|_{(1,2,5)}=(2,4,-1)$。因此所求法线方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$。

二、**计算题**（每题 10 分，共 4 题）（**请写出详细的计算过程和必要的根据！**）

16. 设函数 $z=z(x,y)$ 为由方程 $x^3+y^3+z^3=3e^z$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：对方程 $x^3+y^3+z^3=3e^z$ 关于 x 求导得 $3x^2+3z^2z_x=3e^zz_x$。由此得 $z_x=\dfrac{x^2}{e^z-z^2}$。

同理可得 $z_y=\dfrac{y^2}{e^z-z^2}$。对式 $z_y=\dfrac{y^2}{e^z-z^2}$ 关于 x 求导得

$$z_{xy}=\frac{-y^2}{(e^z-z^2)^2}\left(e^z-2z\right)z_x=\frac{x^2y^2(2z-e^z)}{(e^z-z^2)^3}$$ 。

17. 设 $f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$。 回答以下问题，并说明理由。(i) 函数 f 在原点 $(0,0)$ 处是否连续？ (ii) 函数 f 在原点 $(0,0)$ 处沿任意给定的方向 $u=(a,b)$（$a^2+b^2=1$）的方向导数是否存在？若存在，求出这个方向导数; (iii) 函数 f 在原点 $(0,0)$ 处是否可微，若可微，求出这个微分。

解: (i) 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$|f(x,y)-f(0,0)|=\dfrac{|xy^2||y|}{x^2+y^4}\le\dfrac{|y|}{2}\to 0$，因此 $f(x,y)$ 在原点连续。

(ii)当 $a\neq 0$ 时，$\dfrac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\dfrac{t^4ab^3}{t^2a^2+t^4b^4}=\dfrac{t^2ab^3}{a^2+t^2b^4}\to 0$（$t\to 0$）；当 $a=0$

时，$\dfrac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}\equiv 0$。因此 $f(x,y)$ 在原点处沿任意方向都有方向导数 0。

(iii) 假设 $f(x,y)$ 在原点可微，由(ii)知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，因此当 $(x,y)\to(0,0)$ 必有

$f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}=o(\sqrt{x^2+y^2})$，即 $\dfrac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$。

但是，当点 (x,y) 沿着抛物线 $x=y^2$ 在上半平面趋向于 $(0,0)$ 时，

$\dfrac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y^5}{(y^4+y^4)\sqrt{y^4+y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+y^2}}\to\dfrac{1}{2}$，矛盾。因此 $f(x,y)$ 在原点不可微.

18. 计算含参变量的广义积分 $I(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan(yx)}{x(1+x^2)}dx$，其中 $y\in R$。

解：记 $f(x,y)=\dfrac{\arctan(xy)}{x(1+x^2)}$，则 $I(y)=\int_0^{+\infty}f(x,y)dx$ 是奇函数，且关于 y 连续

（取控制函数 $\dfrac{\pi}{2x(1+x^2)}$ 知 $I(y)$ 关于 $y\in R$ 一致收敛，注意 0 不是 $I(y)$ 的奇点）。

而且有 $I'(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$

（这是因为，取控制函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 有 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$ 关于 $y\in R$ 一致收敛）。

注意到当 $y\neq 1$ 时有 $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}=\dfrac{1}{1-y^2}\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{y^2}{1+x^2y^2}\right)$，于是当 $y\geq 0$ 时有

$I'(y)=\dfrac{1}{1-y^2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi y}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2(1+\mathrm{y})}$。积分并注意到 $I(0)=0$ 得

$I(y)=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+y)$，$y\geq 0$，其中上式对 $y=1$ 成立是由 $I(y)$ 的连续性得到。

又 $I(y)$ 是奇函数。故 $I(y)=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(y)\ln(1+|y|)$。

19. 确定函数 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在区域 $x^2+y^2\leq 25$ 上的最大值和最小值.

解：（法一）令 $0=f_x=2x-12, 0=f_y=2y+16$，解得函数 $f(x,y)$ 在全平面上有唯一驻点

$(6,-8)$，它不在 D 内。因此，函数 $f(x,y)$ 在闭圆盘 $\overline{D}$：$x^2+y^2\le 25$ 上的最值必在其边界，即圆周 $\partial D: x^2+y^2=25$ 上达到。

令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$ 。令 $L_x=L_y=L_\lambda=0$ ，即 $\begin{cases}2x-12+2\lambda x=0,\\ 2y+16+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2-25=0.\end{cases}$ 解得 $(x,y,\lambda)=(3,-4,1)$，或 $(-3,4,-3)$。由于函数 $f(x,y)$ 在有界闭集 ∂D 上必有最值，而 $f(-3,4)=125$， $f(3,-4)=-75$，故 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 25$ 内最大值为 125，最小值为-75.

（法二）同上证明最值必在边界取到。令 $x=5\cos t, y=5\sin t$. 我们有

$f(x,y)=25-60\cos t+80\sin t=25+100\sin(t+\varphi)$, 这里，$\varphi=-\arcsin\dfrac{3}{5}$.

当 $t=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ 时 f 取到最大值 125，当 $t=-\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ 时 f 取到最小值-75.

（法三）注意到 $f(x,y)=(x-6)^2+(y+8)^2-100=\left(d(x,y)\right)^2-100$，这里 $d(x,y)=\sqrt{(x-6)^2+(y+8)^2}$ 表示平面上点 (x,y) 到点 P（6,-8）的（欧氏）距离。以下只需求闭圆盘 $\overline{D}: x^2+y^2\le 25$ 上的点到 P 点的距离的最值。

易知 P 在 D 外。连接 PO 交 ∂D 于两点 Q，R，可求得 Q（3,-4）及 R（-3,4）。

任取一点 $S\in\overline{D}$，我们有 $|PS|\le|PO|+|OS|\le|PO|+|OR|=|PR|=15$

及 $|PS|\ge|PO|-|OS|\ge|PO|-|OQ|=|PQ|=5$。

由此可得 $\max f(x,y)=f(-3,4)=125, \min f(x,y)=f(3,-4)=-75$。

三、证明题（请写出详细的证明过程！）

20.（8 分）证明函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$ 在全平面 R^2 上可以取得最大值和最小值，并求出它的最大值和最小值，以及最大值点和最小值点。

证明：（法一）先考虑函数 f 的驻点。为此解方程组 $\begin{cases}f_x=0\\ f_y=0\end{cases}$。该方程组与方程组

$\begin{cases}1+x^2+y^2-2x(x+y)=0\\ 1+x^2+y^2-2y(x+y)=0\end{cases}$ 同解。容易解得第二个方程组有且仅有两组解，即两个驻点

$(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ 和 $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$。而 $f(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$， $f(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=1/\sqrt{2}$。以下证明，

这两个驻点分别就是 f 的最小值点和最大值点。

设 $R>0$ 。记 D_R 为开圆盘 $x^2+y^2<R^2$ ，记 $\overline{D}_R$ 为闭圆盘 $x^2+y^2\le R^2$ 。由于

$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，故存在充分大的 $R>0$（不妨设 $R>1$），使得 $|f(x,y)|<1/2$，

对 $\forall(x,y)\in R^2\setminus D_R$。于是两个驻点 $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ 和 $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ 均落在 D_R 内。另一方面，

连续函数 $f(x,y)$ 在闭圆盘 $\overline{D}_R$ 上必有最大值和最小值。并且最大值应 $\geq 1/\sqrt{2}$，最小值应 $\leq -1/\sqrt{2}$。由于在 $\overline{D}_R$ 的边界上，$|f(x,y)|<1/2$，因此这两个最值点必落在开圆盘 D_R 内，必为驻点。但是 f 有且仅有两个驻点，因此，函数 f 在点 $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ 处取得最小值 $-1/\sqrt{2}$，在点 $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ 处取得最大值 $1/\sqrt{2}$。

（法二）注意到 $f(0,0)=0$，而当 $|x|+|y|\neq 0$ 时有

$$|f(x,y)|\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|^2+|y|^2}\leq \frac{|x|+|y|}{1+\frac{(|x|+|y|)^2}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{|x|+|y|}+\frac{|x|+|y|}{2}}\leq \frac{1}{2\sqrt{1/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

这里等号成立要求 $x=y,|x|+|y|=\sqrt{2}$。因此 f 有最大值 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和最小值 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

21.（7 分）设函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在开单位圆盘 D：$x^2+y^2<1$ 上有二阶连续的偏导数，在闭单位圆盘 $\overline{D}$：$x^2+y^2\leq 1$ 上连续。假设这两个函数还满足条件 (i) 它们在边界（单位圆周）上相等，即 $u|_{\partial D}=v|_{\partial D}$；(ii) 在 D 内处处满足 $u_{xx}+u_{yy}=e^u$，$v_{xx}+v_{yy}\leq e^v$。证明 $u(x,y)\leq v(x,y)$，$\forall (x,y)\in\overline{D}$。

证明：假设结论不成立，则存在一点 $(x_0,y_0)\in D$，使得 $u(x_0,y_0)>v(x_0,y_0)$。记 $w=w(x,y):=u(x,y)-v(x,y)$，则函数 $w(x,y)$ 在开单位圆盘 D 上有二阶连续的偏导数，在闭单位圆盘 $\overline{D}$ 上连续，在边界上为零，并且 $w(x_0,y_0)>0$。因此函数 $w(x,y)$ 在闭单位圆盘 $\overline{D}$ 上的最大值一定在开圆盘 D 内的某点 $(\xi,\eta)\in D$ 处达到，这个最大值也是极大值。因此，函数 $w(x,y)$ 在点 (ξ,η) 处的 Hesse 矩阵半负定，有 $0\geq (w_{xx}+w_{yy})_{(\xi,\eta)}$ $=(u_{xx}+u_{yy}-v_{xx}-v_{yy})_{(\xi,\eta)}\geq (e^u-e^v)_{(\xi,\eta)}>0$，矛盾。