第15讲
实数集合与集合的基数(2)

计算机系 黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

12.3　有限集合与无限集合

定义12.3.1　（有限集合与无限集合）

- 集合A是有限集合，当且仅当存在$n \in N$，使$n \approx A$；
- 集合A是无限集合当且仅当A不是有限集合，即不存在$n \in N$使$n \approx A$。

12.3　有限集合与无限集合

- 定理12.3.1　不存在与自己的真子集等势的自然数。
- 推论12.3.1　不存在与自己的真子集等势的有限集合。
- 推论12.3.2　任何与自己的真子集等势的集合是无限集合。**N** 和 **R** 都是无限集合。
- 推论12.3.3　任何有限集合只与唯一的自然数等势。

12.4　集合的基数

定义12.4.1

对任意的集合A和B，它们的基数分别用 $card(A)$ 和 $card(B)$ 表示，并且 $card(A) = card(B) \Leftrightarrow A \approx B$。

（有时把 $card(A)$ 记作 $|A|$ 或 $\#(A)$。）

对有限集合A和$n \in N$，若$A \approx n$，则 $card(A) = n$。

12.4　集合的基数

12-4-1　　（自然数集合N的基数）

N的基数不是自然数，因为N不与任何自然数等势。

通常用Cantor的记法，把$card(N)$记作$\aleph_0$，读作“阿列夫零”。

因此，

$$card(Z) = card(Q) = card(N \times N) = \aleph_0$$

12.4　集合的基数

12-4-2　（实数集合**R**的基数）

R的基数不是自然数，也不是$\aleph_0$（因为$\neg R \approx N$）。

通常把card(R)记作 $\aleph_1$，读作“阿列夫壹”。

因此，

$$card([0,1]) = card((0,1)) = card(R_+) = \aleph_1$$

12.5 基数的算术运算

定义12.5.1　对任意的基数 k 和 l,

(1)　若存在集合 K 和 L,

$K \cap L = \Phi$,　$card(K) = k$，$card(L) = l$,

则$k + l = card(K \cup L)$

(2)　若存在集合K和L,

$card(K) = k$，$card(L) = l$,

则$k \cdot l = card(K \times L)$

(3)　若存在集合K和L,

$card(K) = k$ ，$card(L) = l$,

则 $k^l = card(L_k)$,　其中 L_K是从L到K的函数的集合。

举例说明

- A_B 是A→B上的函数集合
- $\varnothing_{\varnothing} = \{ \varnothing \}$ ∵从∅到∅的函数只有 $f = \varnothing$, $0^{\circ} = 1$
- *∅是函数，称其为空函数*。
- $\varnothing_{\mathrm{B}} = \{ \varnothing \}$ $\varnothing \to B$, $f = \varnothing$, $n^{\circ} = 1$
- $A_{\varnothing} = \varnothing$ $(A \neq \varnothing)$ $A \to \varnothing$, f不存在, $0^{\mathrm{m}} = 0$ (m>=1)

∵对于$x \in A$ 找不到 $y \in \varnothing$, 满足 $A \to \varnothing$。

举例说明(证明?)

- $n + \aleph_0 = \aleph_0$
- $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

- $card(P(A)) = 2^{card(A)}$
- $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

12.5 基数的算术运算

定理12.5.1 对任意的基数 k、l 和 m，

(1) $k + l = l + k$

$k \cdot l = l \cdot k$

(2) $k + (l + m) = (k + l) + m$

$k \cdot (l \cdot m) = (k \cdot l) \cdot m$

(3) $k \cdot (l + m) = k \cdot l + k \cdot m$

(4) $k^{l+m} = k^l \cdot k^m$

(5) $(k \cdot l)^m = k^m \cdot l^m$

(6) $\left(k^l\right)^m = k^{l \cdot m}$

$(k^l)^m = k^{l\cdot m}$ 的证明

- k^l 对应函数的数目 $g: L \to K$
- $(k^l)^m$ 对应函数的数目 $f: \mathrm{M} \to \mathrm{L_K}$
- $k^{l\cdot m}$对应函数的数目 $h: L\times M \to K$

- $M_{(L_k)}=\{f\,|\,f: \mathrm{M} \to \mathrm{L_K}\}$
- $(L\times M)_K=\{h|h: L\times M \to K\}$

- $\mathrm{H}: M_{(L_k)} \to (L\times M)_K$

  满足：$\boldsymbol{H(f)(< l, m >) = f(m)(l)}$

证明是满射且单射

映射过程

$$f: M \to L_K$$

$$\downarrow$$

$$f(m): L \to K$$

$$\downarrow$$

$$f(m)(l) = k$$

$$\downarrow$$

$$L \times M \to K$$

证明过程

12.6　基数的比较

定义12.6.1

对集合K和L，$card(K) = k$，$card(L) = l$，如果存在从K到L的单射函数，则称集合L优势于K，记作$K \leq L$，且称基数k不大于基数l，记作$k \leq l$。

12.6 基数的比较

定义12.6.2

对基数k和l，如果$k \le l$ 且 $k \ne l$ ，则称k小于l，记作$k < l$。

12.6　基数的比较

定理12.6.1　对任意的基数k、l和m，

(1) $k \le k$

(2) 若$k \le l$且$l \le m$，则$k \le m$，

(3) 若$k \le l$且$l \le k$，则$k = l$，

(4) $k \le l$或$l \le k$

- 例5：$R \approx N_2$, 即$R \approx P(N)$。

$N_2=\{f|f:N \rightarrow \{0,1\}\}$

$R \approx (0,1)$

证明： $N_2 \le (0,1) \le N_2$

- $\aleph_1 = card(R) = card(N_2) = 2^{\aleph_0}$

12.6 基数的比较

定理12.6.2 对任意的基数 $\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{m}$，如果 $\boldsymbol{k \leq l}$，

(1) $\boldsymbol{k + m \leq l + m}$

(2) $\boldsymbol{k \cdot m \leq l \cdot m}$

(3) $\boldsymbol{k^m \leq l^m}$

(4) 若$\boldsymbol{k \neq 0}$或$\boldsymbol{m \neq 0}$则$\boldsymbol{m^k \leq m^l}$

12.6 基数的比较

定理12.6.3 对基数k和l，如果$k \le l$、 $k \neq 0$，l是无限基数，则

$$k + l = k \cdot l = l = \max(k, l)$$

定理12.6.4

（1）对任意的无限集合K，$\boldsymbol{N} \le K$。

（2）对任意的无限基数k，$\aleph_0 \le k$。

例6（*对应笛卡尔积）:

$$2^{\aleph_0} \le \aleph_0 * 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

所以 $\aleph_0 * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

例7：对任意的无限基数 k，$k^k=2^k$。

证明：

$$k^k \le \left(2^k\right)^k = 2^{k\cdot k} = 2^k \le k^k$$

所以 $k^k = 2^k$

12.7 可数集合与连续统假设

定义12.7.1 （可数集合）

对集合K，如果$card(K) \leq \aleph_0$，

则称K是可数集合。

- 有限集合
- 自然数集合（但为无限集合）
- 整数集合（但为无限集合）
- 有理数集合（但为无限集合）

12.7 可数集合与连续统假设

定理12.7.1 （可数集的性质）

(1) 可数集的任何子集是可数集。

(2) 两个可数集的并集和笛卡儿积是可数集。

(3) 若K是无限集合，则$P(\mathrm{K})$是不可数的。

(4) 可数个可数集的并集是可数集

（该结论可写为：若A是可数集，A的元素都是可数集，则$\cup A$是可数集）。

已知的基数按从小到大的次序排列有

$$0, 1, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, 2^{\aleph_1}, \ldots$$

12.7 可数集合与连续统假设

12-7-1 （连续统假设 Continuum Hypothesis 1878年，由Cantor提出，简称CH假设）

"连续统假设"就是断言不存在基数k，满足

$$\aleph_0 < k < 2^{\aleph_0}$$

这个假设至今未经证明。

有人已证明：根据现有的（ZF)公理系统，

既不能证明它是对的，也不能证明它是错的。

本章主要内容小结

- 集合的等势
- 康托尔定理
- 自然数集与实数集的基数
- 无穷集合的基数运算
- 连续统假设与主要结论

课程目标

- 学会用逻辑语言形式化、思考和推理
- 如何利用符号系统进行定义、阐述、推理
- 与以往数学概念、数学方法的联系

数学的进步及其活力总是依赖于抽象对具体的帮助以及具体对抽象的哺育。

——— Mark Kac

波兰裔美国数学家

回顾例子1

- 有一个数据集X，由若干数据向量(x)和对应的标记(y)构成
- 有一个算法R，对数据集中的样本修改对应的标记
- 如何表示 运行R前后数据被修改的相对比例?

回顾例子2

- 如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。
- 或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。
- A队没有成为联赛的第一名。小张守第一垒。
- 因此，小李没向B队投球。

回顾例子3

- **“函数f(x)在点x_0处连续”**
  的形式描述
  $(\forall\varepsilon)(\varepsilon>0 \rightarrow (\exists\delta)(\delta>0 \wedge$
  $(\forall x)(|x-x_0|<\delta \rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)))$

这门课有什么用

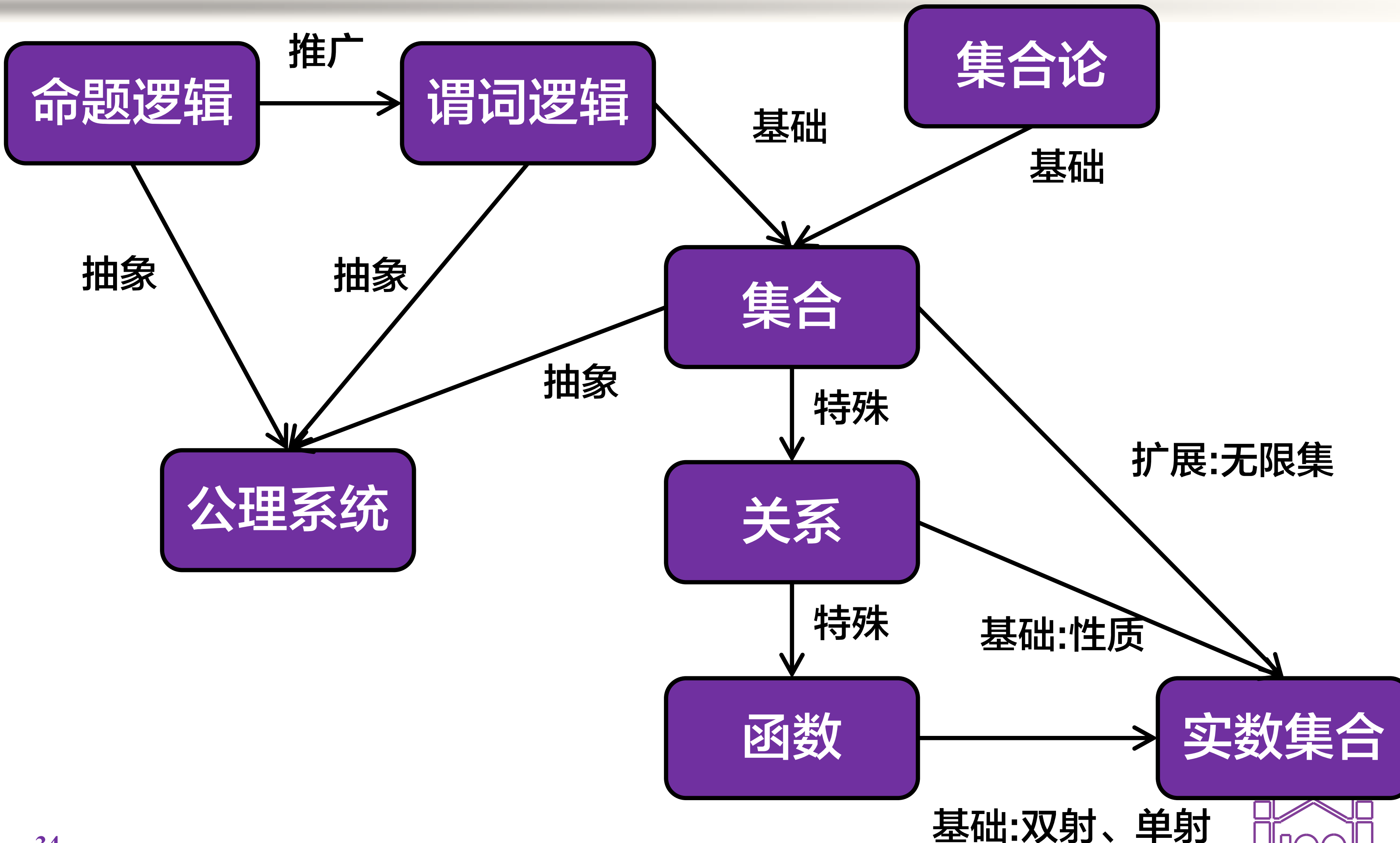
- 思维的训练
- 逻辑的训练

- 几乎对所有的学科都有帮助！
  - 心理学、社会科学

课程整体回顾

- 第一章　命题逻辑的基本概念
- 第二章　命题逻辑的等值和推理演算
- 第四章　谓词逻辑的基本概念
- 第五章　谓词逻辑的等值和推理演算
- 第九章　集合（集合论的基础）
- 第十章　关系（关系性质、闭包）
- 第十一章 函数（1，2，3）
- 第十二章 实数集合（等势）

课程整体回顾



命题逻辑
推广
谓词逻辑
集合论
基础
基础
抽象
抽象
集合
抽象
特殊
扩展:无限集
公理系统
关系
特殊
基础:性质
函数
实数集合
基础:双射、单射

谓词逻辑

- 范式、主范式、Skolen标准型、存在前束范式
  - 分配和变元易名
- 推理演算（推理规则）
- 等值演算（等值公式）
- 谓词逻辑公式的结构与解释
- 谓词逻辑的k可满足和普遍有效性

集合论

- 广义并、交，幂集合，对称差，传递集合
- 集合的性质，传递集合的证明
- 自然数的集合定义
- 公理系统
  - 子集公理
  - 正则公理

关系

- 关系的合成

- 关系性质的证明（传递性）

- 关系的传递闭包(Warshall算法)、组合闭包

- 等价R、划分、商集A/R
- 相容、覆盖、完全覆盖
- 偏序R、偏序结构<A,R>、盖住关系、哈斯图

函数

- 单射、满射、双射
- 函数的合成，左逆、右逆
- 函数集合A_B，泛函，特征函数
- 函数的相容性，函数与等价关系的相容性

实数集合

- 有理数、实数的定义过程
- 等势（双射），优势（单射）
- 定理：$P(A) \approx A_2$
- 康托尔定理（对角线证明方法）
  - ¬(A≈P(A))
  - $\neg(N \approx R)$
- R≈P(N)（两个单射）

感谢全体同学的支持！