# 第7讲 集合的性质（2）

计算机系 黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

# 定理9.5.3 对称差的性质

- 对任意的集合 $A, B, C$

(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$

**(2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$**

(3) 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(4) 同一律 $A \oplus \Phi = A$

(5) 零律　 $A \oplus A = \Phi$

**(6) 吸收律 $A \oplus (A \oplus B) = B$**

# 对称差结合律补充资料1

首先：$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap -B) \cup (B \cap -A)$

$$(A \oplus B) \oplus C = (A \oplus B - C) \cup (C - A \oplus B)$$

其次：

1. $A \oplus B - C$

$= \big((A \cap -B) \cup (B \cap -A)\big) \cap -C$

$= (A \cap -B \cap -C) \cup (-A \cap B \cap -C)$

# 对称差结合律补充资料2

$2. C - A \oplus B$

$= C - (A - B) \cup (B - A)$

$= C \cap -\big((A - B) \cup (B - A)\big)$

$= C \cap \big(-(A - B) \cap -(B - A)\big)$

$= C \cap (-\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (-\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A})$

$= C \cap \big((\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (-\boldsymbol{A} \cap -\boldsymbol{B})\big)$ （两次分配、文氏图）

$= (A \cap B \cap C) \cup (-A \cap -B \cap C)$

注：$(-\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup -\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (-\boldsymbol{A} \cap -\boldsymbol{B})$

因此：$(A \oplus B) \oplus C = (A \cap -B \cap -C) \cup (-A \cap B \cap -C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (-A \cap -B \cap C)$

同理可得

$$A \oplus (B \oplus C) = (-A \cap -B \cap C) \cup (-A \cap B \cap -C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap -B \cap -C)$$

# 定理9.5.4 集合间的⊆关系的性质

- 对任意的集合 $A, B, C$ 和 $D$

$$(1)\ A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$$

$$(2)\ A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$$

$$(3)\ (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$$

$$(4)\ (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$$

$$(5)\ (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A - D) \subseteq (B - C)$$

$$(6)\ C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$$

观察、分析、比较、找异同，跟谓词公式的关系

# 证明板书

◉ 求证 $A\cup B = B$ (1)

$\Leftrightarrow A\subseteq B$ (2)

$\Leftrightarrow A\cap B = A$ (3)

$\Leftrightarrow A-B = \Phi$ (4)

证 (4) $\Rightarrow$ (1)， 已知 $A-B=\Phi$， 求证$A\cup B = B$

$A\cup B$

$= B\cup A$

$= B\cup(A-B)$ 由差集的性质(3) $A\cup(B-A)=A\cup B$

$= B\cup\Phi$ $B\cup(A-B)=B\cup A$

$=B$

- 例1的重要结论：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \Phi$$

- 后面的例3 即利用此结论

- 例2 对任意的集合A, B和C, 有

  $A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C \Rightarrow B=C$

- 代表性方法1:

$$
\begin{aligned}
B &= B\cap (A\cup B) && \text{吸收律}\\
&= B\cap (A\cup C) && \text{已知前提}\\
&= (B\cap A) \cup (B\cap C) && \text{分配律}\\
&= (A\cap C) \cup (B\cap C) && \text{已知前提}\\
&= (A\cup B) \cap C && \text{分配律—反向用}\\
&= (A\cup C) \cap C && \text{已知前提}\\
&= C && \text{吸收律}
\end{aligned}
$$

清華大學 Tsinghua University

## ◉ 代表性方法2：

假设$B \neq C$，即存在$x$, 使$(x \in B \wedge x \notin C)$ 或者$(x \in C \wedge x \notin B)$

(1) 当$(x \in B \wedge x \notin C)$

若$x \in A \Rightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C)$

若$x \notin A \Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cup C)$

均与已知条件$A \cup B = A \cup C, A \cap B = A \cap C$矛盾

(2) 当$(x \in C \wedge x \notin B)$情况类似

因此只有 $B=C$。

- 问题：仅由$A \cup B = A \cup C$

  是否可推出 $B = C$？

  或仅由$A \cap B = A \cap C$是否可推出 $B = C$？

$A \cup A = A \cup \Phi \ ? \Rightarrow A = \Phi$

$A \cap -A = A \cap \Phi \ ? \Rightarrow -A = \Phi$

可见必须同时满足两个条件

# 幂集合的性质

- 定理9.5.5  幂集合的性质1

  对任意的集合 $A$和$B$

$$(1)\ A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$$
$$(2)\ A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

- 定理9.5.6  幂集合的性质2

  对任意的集合 $A$和$B$

$$P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$$

关键点：$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$

# 证明板书

# 幂集合的性质(续)

- 定理9.5.7 幂集合的性质3

  对任意的集合 $A$和$B$

$$(1)\ P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$
$$(2)\ P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

为什么一个是相等，一个是子集?

**(1): A={a,b}, B={b,c}**

**(2): A={a,b}, B={b,d}**

# 证明板书：$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

# 证明：$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

- 证（2）$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

$x \in P(A) \cup P(B)$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B)$ --并集定义

$\Leftrightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$ --幂集合定义

$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A) \vee (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in B)$ --子集关系定义

$\Rightarrow (\forall y)((y \in x \rightarrow y \in A) \vee (y \in x \rightarrow y \in B))$ --谓词推理公式

$\Leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in (A \cup B))$ --谓词等值推理公式

$\Leftrightarrow x \subseteq A \cup B$ --子集关系定义

$\Leftrightarrow x \in P(A \cup B)$ --幂集定义

$$x \subseteq A \vee x \subseteq B \Rightarrow x \subseteq A \cup B$$

- 但 $x \subseteq A \cup B$ ？ $\Rightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$

# 幂集合的性质(续)

- 定理9.5.8 幂集合的性质4

  对任意的集合 $A$和$B$

  $$P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\Phi\}$$

  - 为什么多出来一个$\{\Phi\}$? $P(A)-P(B)$是否有$\Phi$?
  - **证明之前，能否倒推证明路径?**

# 证明板书

# 证明方法总结

- 1.运用集合运算的基本性质
- 2.基于集合的基本定义，回归到谓词推理演算
  - 熟记集合定义的谓词表述
  - 熟练使用集合的等值和推理演算

# 定义9.5.1 传递集合

- 如果集合A的任一元素的元素都是 A的元素，就称 A为传递集合。该定义可写成

A是传递集合

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \land y \in A) \rightarrow x \in A)$$

- 空集Φ是传递集合

$$(\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A)$$

$x_1 , x_2$

例： $A = \{ \Phi, \{\Phi\}, \{\Phi,\{\Phi\}\} \}$

$y_1$， $y_2$， $y_3$

1个元素的传递集合？

2个元素的传递集合？

# 传递集合的性质

- 重要性质（根据定义）：$(\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A)$

  若 A是传递集合，则有　$x \in A \Rightarrow x \subseteq A$

  即，任一传递集合，它的元素一定是它的子集。

- 反之并不成立，　$x \subseteq A \not\Rightarrow x \in A$

  上例中，$\{\{\Phi,\{\Phi\}\}\} \subseteq A$，

  但$\{\{\Phi,\{\Phi\}\}\} \notin A$。

# 传递集合的性质

- 定理9.5.9　传递集合的性质1

  对任意的集合 A

  A是传递集合$\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$

  从定义出发

- 从定义出发
- 幂集合性质

- 定理9.5.10　传递集合的性质2

  对任意的集合 A

  A是传递集合$\Leftrightarrow P(A)$是传递集合

# 证明板书

# 广义并和广义交的性质

- 定理9. 5. 11　广义并和广义交的性质1

  对任意的集合 A和B

  $A \subseteq B \Rightarrow \bigcup A \subseteq \bigcup B$

  $A \subseteq B \Rightarrow \bigcap B \subseteq \bigcap A$　(A,B非空)

- 定理9. 5. 12　广义并和广义交的性质1

  对任意的集合 A和B

  $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$

  $\bigcap(A \cup B) = (\bigcap A) \cap (\bigcap B)$　(A,B非空)

  - 广义并、广义交分别是并和交的推广
  - 相应集合的谓词定义

# 证明板书

- 等值演算，任意对合取的分配，存在对析取的分配

# 定理9.5.13 广义并和幂集运算的关系性质

- 对任意的集合 A

$$\cup\left(P(A)\right) = A$$

A={Φ,{Φ}}

P(A)=?

# 传递集合的性质(续)

- 定理9. 5. 14　传递集合的性质3

  若集合 A是传递集合，则$\cup$A是传递集合。

- 定理9. 5. 15　传递集合的性质4

  若集合 A的元素都是传递集合，则$\cup$A是传递集合。

  - 从定义出发
  - 传递集合的谓词描述
  - 广义并的谓词描述

- **定理9.5.16　传递集合的性质5**

  若非空集合 A是传递集合，则$\cap A$是传递集合，且$\cap A=\Phi$。（由正则公理，后面讲）

  - 从定义出发
  - 传递集合的谓词描述
  - 广义交的谓词描述

- **定理9.5.17　传递集合的性质6**

  若非空集合 A的元素都是传递集合，则$\cap A$是传递集合。

  （教材的2，3，4可以简化）

# 补充资料

**定理9.5.17** 若非空集合A的元素都是传递集合，则$\cap A$是传递集合。

**证明：** 对任意的$x$和$y$，可得

$$x \in y \wedge y \in \cap A \Leftrightarrow x \in y \wedge (\forall z)(z \in A \rightarrow y \in z)$$

$\Leftrightarrow (\forall z)\big(x \in y \wedge (z \notin A \vee y \in z)\big)$ --等值置换

$\Leftrightarrow (\forall z)\big((x \in y \wedge z \notin A) \vee (x \in y \wedge y \in z)\big)$ --分配律

$\Rightarrow (\forall z)\big(z \notin A \vee (x \in y \wedge y \in z)\big)$ --条件放松

$\Leftrightarrow (\forall z)\big(z \in A \rightarrow (x \in y \wedge y \in z)\big)$ --等值置换

$\Rightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$ --z是传递集合

$\Leftrightarrow x \in \cap A$ --广义交定义

所以$\cap A$是传递集合。

# 笛卡儿积的性质

- 不满足交换律和结合律

$$A \times \Phi = \Phi \times B = \Phi$$

$$A \times B \neq B \times A\ (\text{当} A \neq \Phi \wedge B \neq \Phi \wedge A \neq B)$$

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

笛卡尔积对应序偶、向量，有序(order)的概念

# 定理9.5.18 幂集的性质

- 若 A是集合，$x \in A$, $y \in A$，

  则 $<x, y> \in PP(A)$ 。

其中 PP(A) 表示 P(P(A))。

（另外：从序偶的集合表示）

分析：

- $< x, y > = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- P(A)里有什么？
- PP(A)里有什么？

# 定理9.5.19 笛卡儿积与∩, ∪运算的性质

- 对任意的集合A, B和C

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

# 笛卡儿积与⊆运算的性质

- **定理9.5.20　性质1**

  对任意的集合 A, B和C，若$C \neq \Phi$，则

  $$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$$

- **定理9.5.21　性质2**

  对任意的集合 A, B, C和D

  $$(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow (A \subseteq C \land B \subseteq D)$$

# 对各种性质证明的总结

- 证明思路：
  - 从定义出发（广义并、交、幂集、差集、传递集合、序偶）
  - 回归到谓词逻辑的推理公式和等值公式
    - 合取化简$P \land Q \Rightarrow P$、析取附加$P \Rightarrow P \lor Q$
    - 5.4.2 第1推理公式；2.2.2第18等值式$P \lor Q \to R = (P \to R) \land (Q \to R)$
  - 集合运算和谓词运算的分配律
  - 构造法：构造一个新的集合{y}
- 熟记各种定义的谓词表述(幂集、广义交并、传递集合)
- 相等意味着等值演算；子集意味着推理演算
- 从定理结构倒推 证明思路

# 重要的谓词表述

- 广义交定义： $y \in \cap A \Leftrightarrow (\forall \mathbf{x})(\mathbf{x} \in \mathbf{A} \to y \in x)$
- 广义并定义：$y \in \cup A \Leftrightarrow (\exists \mathbf{x})(\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \wedge \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{x})$

- 幂集：$\mathbf{x} \in \mathbf{P(A)} \Leftrightarrow \mathbf{x} \subseteq \mathbf{A}$
- 传递集合定义：$(\forall \mathbf{x})(\forall \mathbf{y})((\mathbf{x} \in \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{A}) \to \mathbf{x} \in \mathbf{A})$
- 传递集合性质：$\mathbf{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{x} \subseteq \mathbf{A}$

## 证明举例：$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$