# 微积分 T（3）
# 第四次作业答案

2024 年 1 月 6 日

1. (1) *证明.* 对于 $x \in [m, m+1]$，由 Jensen 不等式可知

$$
\begin{aligned}
&(m+1-x)\ln m + (x-m)\ln(m+1) \\
\leqslant& \ln\left((m+1-x)m + (x-m)(m+1)\right) \\
=& \ln x
\end{aligned}
$$

对于 $x \in [m-1/2, m+1/2)$，由 $\ln x$ 在 $m$ 处的 Lagrange 余项 Taylor 展开可知

$$\ln x = \ln m + \frac{x-m}{m} - \frac{(x-m)^2}{2\xi^2} \leqslant g(x) - 0 = g(x)$$

综上所述，对于 $x \geqslant 1$ 都有

$$f(x) \leqslant \ln x \leqslant g(x) \qquad \square$$

(2) 对于 $m \in \mathbb{N}$，

$$\int_m^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln m + \ln(m+1))$$
$$\int_m^{m+1} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln m + \ln(m+1)) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$$

对 $m = 1, \ldots, n-1$ 求和得到

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \ln n! - \frac{1}{2}\ln n$$
$$\int_1^n g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\ln n! - \frac{1}{2}\ln n\right) + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

(3) 证明. 由 (1) 的结论可知

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^n g(x)\,\mathrm{d}x$$

将 (2) 的结论代入得到

$$\ln n! - \frac{1}{2}\ln n \leqslant n\ln n - n + 1 \leqslant \left(\ln n! - \frac{1}{2}\ln n\right) + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

整理得到

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{n} \leqslant \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n \leqslant 1$$

进而，

$$\frac{7}{8} \leqslant \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n \leqslant 1$$

□

(4) 证明. 对 (3) 的结论取指数得到

$$e^{\frac{7}{8}} \leqslant \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \leqslant e$$

□

2. 证明. 将 $x$ 换为 $-x$，$\alpha$ 换为 $-\alpha$ 得到

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-\alpha} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!}(-x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)\,\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!\Gamma(\alpha)}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)}x^n
\end{aligned}$$

□

3. 证明. 设函数 $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 为

$$f(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

- 由 $\Gamma$ 函数的乘法性质，对于 $x>0$ 有

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= \frac{2^{(x+1)-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(x+1)+1}{2}\right) \\
&= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right) \\
&= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= x\cdot\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
&= xf(x)
\end{aligned}$$

- 当 $x=1$ 时，

$$f(1)=\frac{2^{1-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot 1=1$$

- 由于 $\ln\Gamma(x)$ 是下凸函数，该函数也是下凸函数：

$$\ln f(x)=\ln\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)+(x-1)\ln 2-\frac{1}{2}\ln\pi$$

由 Bohr — Mollerup 定理可知，对 $x>0$ 都有 $f(x)=\Gamma(x)$。 □

4. 证明. 当 $\xi\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\right|_{-1}^{1} \\
&= \frac{e^{-2\pi i\xi}-e^{2\pi i\xi}}{-2\pi i\xi} \\
&= \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi}
\end{aligned}$$

特别地，

$$\hat{f}(0)=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2$$

当 $\xi \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (1-|x|)\, e^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} (1+x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (1-x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x \\
&= \left( (1+x)\, \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\bigg|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\, \mathrm{d}x \right) + \\
&\quad \left( (1-x)\, \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\bigg|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} -\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\, \mathrm{d}x \right) \\
&= \left( (1+x)\, \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\bigg|_{-1}^{0} - \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(-2\pi i\xi)^2}\bigg|_{-1}^{0} \right) + \\
&\quad \left( (1-x)\, \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\bigg|_{0}^{1} + \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(-2\pi i\xi)^2}\bigg|_{0}^{1} \right) \\
&= \frac{2 - e^{-2\pi i\xi} - e^{2\pi i\xi}}{(2\pi\xi)^2} \\
&= \frac{2 - 2\cos 2\pi\xi}{(2\pi\xi)^2} \\
&= \frac{4\sin^2 \pi\xi}{(2\pi\xi)^2} \\
&= \left( \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} \right)^2
\end{aligned}$$

特别地，

$$\hat{g}(0) = \int_{-1}^{0} (1+x)\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (1-x)\, \mathrm{d}x = 1 \qquad \square$$

5. 注意到，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi y|\xi|} e^{2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi y\xi} e^{2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi y\xi} e^{2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi(y+ix)\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi(y-ix)\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \left.\frac{e^{2\pi(y+ix)\xi}}{2\pi\left(y+ix\right)}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-2\pi(y-ix)\xi}}{-2\pi\left(y-ix\right)}\right|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi\left(y+ix\right)} + \frac{1}{2\pi\left(y-ix\right)} \\
&= \frac{y}{\pi\left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned}
$$

由微降函数的 Fourier 反演定理可知，$P_y(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{P}_y(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}$$

进而，$P_y(x)$ 的 Fourier 逆变换为

$$\hat{P}_y(-\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}$$

6. 证明. 假设对于 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2} \qquad |g(x)| \leqslant \frac{B}{1+x^2}$$

那么我们有

$$
\begin{aligned}
& |f * g(x)| \\
= & \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y\right| \\
= & \left|\int_{|y| \leqslant \frac{|x|}{2}} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y + \int_{|y| \geqslant \frac{|x|}{2}} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y\right| \\
\leqslant & \int_{|y| \leqslant \frac{|x|}{2}} |f(x-y)\, g(y)|\, \mathrm{d}y + \int_{|y| \geqslant \frac{|x|}{2}} |f(x-y)\, g(y)|\, \mathrm{d}y \\
\leqslant & \int_{|y| \leqslant \frac{|x|}{2}} \frac{A}{1+(x-y)^2} |g(y)|\, \mathrm{d}y + \int_{|y| \geqslant \frac{|x|}{2}} |f(x-y)| \frac{B}{1+y^2}\, \mathrm{d}y \\
\leqslant & \int_{|y| \leqslant \frac{|x|}{2}} \frac{A}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} |g(y)|\, \mathrm{d}y + \int_{|y| \geqslant \frac{|x|}{2}} |f(x-y)| \frac{B}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, \mathrm{d}y \\
\leqslant & \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \left(A \int_{|y| \leqslant \frac{|x|}{2}} |g(y)|\, \mathrm{d}y + B \int_{|y| \geqslant \frac{|x|}{2}} |f(x-y)|\, \mathrm{d}y\right) \\
\leqslant & \frac{4}{4+x^2} \left(A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B}{1+y^2}\, \mathrm{d}y + B \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+(x-y)^2}\, \mathrm{d}y\right) \\
\leqslant & \frac{4}{1+x^2} (A \cdot B\pi + B \cdot A\pi) \\
\leqslant & \frac{8\pi AB}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

因此，$f * g$ 也是微降函数。 $\square$