# 微积分 T（3）
# 第一次作业答案

2023 年 10 月 7 日

1. (1) 证明. 由 Euler 公式可知

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \hat{f}(0) + \sum_{n\geqslant 1} \Big(\hat{f}(n)\, e^{inx} + \hat{f}(-n)\, e^{-inx}\Big) \\
&\sim \hat{f}(0) + \sum_{n\geqslant 1} \Big(\hat{f}(n)\,(\cos nx + i\sin nx) + \hat{f}(-n)\,(\cos nx - i\sin nx)\Big) \\
&\sim \hat{f}(0) + \sum_{n\geqslant 1} \Big(\Big(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\Big)\cos nx + \Big(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)\Big)\, i\sin nx\Big)
\end{aligned}
$$

因此，该结论成立。 □

(2) 证明. 如果 $f$ 是偶函数，设 $x=-y$ 得到

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{-\pi} f(-y)\, e^{iny}\,(-y)'\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{iny}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

除以 $2\pi$ 即得到 $\hat{f}(n)=\hat{f}(-n)$。由第 (1) 题的结论可知，$f$ 的 Fourier 级数是余弦级数。 □

(3) 证明. 如果 $f$ 是奇函数，设 $x=-y$ 得到

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{-\pi} f(-y)\, e^{iny}\,(-y)'\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{iny}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

除以 $2\pi$ 即得到 $\hat{f}(n)=-\hat{f}(-n)$。由第 (1) 题的结论可知，$f$ 的 Fourier 级数是正弦级数。 □

(4) 证明. 设 $n$ 是奇数，则有

$$e^{-in\pi} = (-1)^n = -1$$

由于 $f$ 以 $2\pi$ 为周期，设 $x = y + \pi$ 则有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y+\pi)\, e^{-in(y+\pi)}\,(y+\pi)'\,\mathrm{d}y \\ &= e^{-in\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

除以 $2\pi$ 得到 $\hat{f}(n) = -\hat{f}(n)$，因此 $\hat{f}(n) = 0$。 □

(5) 证明. 由于 $f$ 是实值函数，

$$\begin{aligned}\overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x} &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)\, e^{-inx}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{e^{-inx}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

除以 $2\pi$ 即得到 $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$。 □

2. 证明. 由于 $f''$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，可以取

$$C = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f''(x)| < +\infty$$

$f$ 以 $2\pi$ 为周期，故 $f$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分部积分产生的边界项全部抵消。设 $n$ 是非零整数，分部积分两次得到

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{-inx}}{n^2}\right)''\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\left(\frac{e^{-inx}}{n^2}\right)'\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\,\frac{e^{-inx}}{n^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

进而，其绝对值

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{f}(n)\right| &= \frac{1}{2\pi n^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f''(x)\, e^{-inx}\right|\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} C\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{C}{n^2}
\end{aligned}
$$

□

3. 由于 $f(x)$ 是奇函数，其 Fourier 级数由正弦级数构成。当 $n \neq 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,(\pi - x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi n}x\,(\pi - x)\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi n}x\,(\pi - x)\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}(\pi - 2x)\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi n}x\,(\pi - x)\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}(\pi - 2x)\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi} \\
&= 0 + 0 - \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right)
\end{aligned}
$$

因此，$f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$
f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right)\sin nx
$$

4. 由于 $f(x)$ 是偶函数，其 Fourier 级数由余弦级数构成。

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi
$$

当 $n \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi n}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi n}x\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} \\
&= 0 + \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)
\end{aligned}$$

因此，$f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx$$

5. (1) 证明. 注意到

$$\left|\hat{f}(n)\,e^{inx}\right| = \left|\hat{f}(n)\right| \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(n)\right| < +\infty$$

由 Weierstrass 强级数判别法可知，该函数项级数一致收敛：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\,e^{inx}$$ □

(2) 由于上述函数项级数一致收敛，极限函数 $g(x)$ 也是以 $2\pi$ 为周期

的连续函数，且其 Fourier 系数

$$\begin{aligned}
\hat{g}(m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-imx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\, e^{inx}\right) e^{-imx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\, e^{i(n-m)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(n)\, e^{i(n-m)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\,\delta_{n,m} \\
&= \hat{f}(m)
\end{aligned}$$

(3) *证明.* 设周期为 $2\pi$ 的连续函数

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

则其 Fourier 系数满足

$$\hat{h}(n) = \hat{g}(n) - \hat{f}(n) = 0$$

由参考书定理 2.1 的结论可知 $h(x) = 0$，因此 $g(x) = f(x)$。 □

(4) *证明.* 由前述结论，在 $[-\pi, \pi]$ 上有一致收敛的函数项级数

$$\frac{(\pi - x)^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

取 $x = 0$ 得到

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ □