微积分 T（3）
第二次作业答案

2023 年 11 月 4 日

1. (1) 当 $x \to +\infty$ 时，
$$\frac{x^{a-1}}{1+x} \sim \frac{x^{a-1}}{x} = x^{a-2}$$
因此，该无穷积分收敛当且仅当 $a-2<-1$，也就是 $a<1$。

   (2) 当 $x \to 0^+$ 时，
$$\frac{x^{a-1}}{1+x} \sim \frac{x^{a-1}}{1} = x^{a-1}$$
因此，该瑕积分收敛当且仅当 $a-1>-1$，也就是 $a>0$。

   (3) 证明. 当 $a<1$ 时，做换元 $x=y^{-1}$ 可知
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \frac{(y^{-1})^{a-1}}{1+y^{-1}}\,\mathrm{d}y^{-1}\\ &= -\int_1^0 \frac{y^{-a}}{1+y}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \frac{y^{-a}}{1+y}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$
因此，
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

2. (1) 证明. 注意到
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = 2 < +\infty$$
另一方面，
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-ax^2-bx-c}}{e^{-|x|}} = \lim_{x\to\infty} e^{-ax^2-bx-c+|x|} = 0$$

由比较判别法，该广义积分收敛：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx-c}\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

(2) • 当 $\lambda \geqslant 0$ 时，

$$e^{-x^2-\lambda x^4} = e^{-\lambda x^4} e^{-x^2} \leqslant e^{-x^2}$$

由比较判别法，该广义积分收敛。

• 当 $\lambda < 0$ 且 $|x| \geqslant (-\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ 时，

$$e^{-x^2-\lambda x^4} = e^{-x^2\left(1-(-\lambda)x^2\right)} \geqslant 1$$

由比较判别法，该广义积分发散。

综上所述，该广义积分在 $\lambda \geqslant 0$ 时收敛，在 $\lambda < 0$ 时发散。

(3) 通过配方可知

$$-ax^2 - bx - c = -\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - c\right)$$

因此，做换元

$$y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \implies \mathrm{d}y = \sqrt{a}\,\mathrm{d}x$$

换元积分可知

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx-c}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2+\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)} \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{e^{\frac{b^2}{4a}-c}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{e^{\frac{b^2}{4a}-c}}{\sqrt{a}} I
\end{aligned}$$

3. (1) 证明. 当 $x \to \infty$ 时，

$$f(x)\,e^{-x^2} = f(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = o\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

由比较判别法可知，该广义积分收敛。 $\square$

(2) 证明. 分部积分可知

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}f(x)\\ &= f(x)\, e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}e^{-x^2}\\ &= 0 + 2\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

(3) 当 m 是奇数时，$x^m e^{-x^2}$ 是奇函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

当 m 是偶数时，设 $f(x) = x^{m-1}$ 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (m-1)\, x^{m-2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

也就是说，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{m-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{m-2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

归纳得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{m!}{2^m\left(\frac{m}{2}\right)!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

4. (1) 该积分有可能的瑕点 $t = 0$ 与无穷限 $t = +\infty$。

- 当 $t \to 0^+$ 时，

  $$t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$$

  因此，该广义积分在 0 附近收敛当且仅当 $x - 1 > -1$，也就是 $x > 0$。

- 当 $y \to +\infty$ 时，

  $$t^{x-1} e^{-t} = t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} = o\Big(e^{-\frac{t}{2}}\Big)$$

  因此，该广义积分在 $+\infty$ 附近收敛。

综上所述，该广义积分当 $x>0$ 时收敛，当 $x\leqslant 0$ 时发散。

(2) 证明. 当 $x>0$ 时，分部积分可知

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{d}e^{-t} \\ &= -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t^x \\ &= 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

□

(3) 证明. 做换元 $t=s^2$ 得到

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \left(s^2\right)^{x-1} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s^2 \\ &= 2\int_0^{+\infty} s^{2x-1}e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

□

5. (1) 该积分有可能的瑕点 $y=0$ 与无穷限 $y=+\infty$。

- 当 $y\to 0^+$ 时，

  $$\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \sim \frac{y^{\alpha-1}}{1^{\alpha+\beta}} = y^{\alpha-1}$$

  因此，该广义积分在 0 附近收敛当且仅当 $\alpha-1>-1$，也就是 $\alpha>0$。

- 当 $y\to+\infty$ 时，

  $$\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \sim \frac{y^{\alpha-1}}{y^{\alpha+\beta}} = y^{-\beta-1}$$

  因此，该广义积分在 $+\infty$ 附近收敛当且仅当 $-\beta-1<-1$，也就是 $\beta>0$。

综上所述，该广义积分当 $\alpha,\beta>0$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant 0$ 或 $\beta\leqslant 0$ 时发散。

(2) 证明. 当 $a, b > 0$ 时，分部积分可知

$$
\begin{aligned}
& B(\alpha+1,\beta) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha}}{(1+y)^{\alpha+\beta+1}} \, \mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} y^{\alpha} \, \mathrm{d} \frac{1}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \\
&= -\frac{1}{\alpha+\beta} \frac{y^{\alpha}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \, \mathrm{d}y^{\alpha} \\
&= 0 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

□

(3) 证明. 注意到

$$
\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+y} \right)^{\beta-1} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}
\end{aligned}
$$

考虑换元

$$
x = \frac{y}{1+y} \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}
$$

则得到

$$
B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \, \mathrm{d}x
$$

□