第12讲 函 数（1）

计算机系 黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

第十一章 函数

数学的进步及其活力总是依赖于<u>抽象对具体的帮助</u>以及<u>具体对抽象的哺育</u>。

—— Mark Kac

波兰裔美国数学家

【课前思考】

- 谓词逻辑中第一次提到“函数”的概念
- 函数：一个基本的数学概念
- 通常的实函数：<u>在实数集合</u>上讨论
- 集合论中的函数推广了实函数概念，讨论<u>在任意集合</u>上的函数。

【课前思考】

- 一个关系应满足哪些条件才成为函数？任意集合上的函数应如何定义？
- 两个函数的合成是否还是函数？一个函数的逆也一定是函数吗？
- 从有限集合A到有限集合B不同的函数共有多少个？
- 如何构造从集合A到集合B的特殊性质的函数？

【课前思考】

- 函数建立了从一个集合到另一个集合的一种变换关系。
- 计算机执行任何类型的程序就是这样一种变换。
- 例如编译程序可以把一个源程序变换成一个机器语言的指令集合----目标程序。

11.1 函数定义

定义11.1.1 （函数-function） 对集合A到集合B的关系f，若满足下列条件：

(1) 对任意的 $x \in dom(f)$ ，存在唯一的 $y \in ran(f)$，使 xfy 成立；

(2) $dom(f) = A$

则称 f 为从 A到B的函数，或称 f 把A映射到B（有的书称 f 为全函数、映射、变换）。一个从A到B的函数f，可以写成 f：$A \to B$。这时若xfy，则可记作 f：$x \mapsto y$ 或 $f(x) = y$。

11.1 函数定义

函数的第一个条件（单值性）可以写成

(1)

$$(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)((xfy_1 \wedge xfy_2) \rightarrow y_1 = y_2)$$

一般的关系R不一定是函数，∵R不一定是单值的

函数则必须满足单值性:

同一个*x*不能对应多个*y*，但多个*x*可以对应同一个*y*

即当 $x_1 fy_1 \wedge x_2 fy_1$ 时，不要求 $x_1 = x_2$。

11.1 函数定义

函数的第二个条件

(2) $(\forall x)(x \in A \rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge xfy))$

定义域必须取遍*A*中所有元素，每个x都要能找到一个y;

但没有规定：每个B中的元素都在f下有对应A中的元素

11.1 函数定义

- **关系矩阵**的特点：每行有且仅有一个1
  其余均为0；

- **关系图**的特点：集合A中的每个顶点发出
  唯一的有向边。

11.1 函数定义

定义11.1.2 （**从A到B的所有函数的集合**） 对集合A和B，从A到B的所有函数的集合记为A_B（有的书中记为B^A）。于是

$$A_B = \{f | f: A \rightarrow B\}$$

若A和B是有限集合，且|A |=m，|B|=n

问 $|A_B| = ?$

函数举例

例3: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$. 从$A$到$B$的函数有？ 个

- $f_1 = \{ <1, \mathrm{a}>, <2, \mathrm{a}>, <3, \mathrm{a}> \}$
- $f_2 = \{ <1, \mathrm{a}>, <2, \mathrm{a}>, <3, \mathrm{b}> \}$
- $f_3 = \{ <1, \mathrm{a}>, <2, \mathrm{b}>, <3, \mathrm{a}> \}$
- $f_4 = \{ <1, \mathrm{a}>, <2, \mathrm{b}>, <3, \mathrm{b}> \}$
- $f_5 = \{ <1, \mathrm{b}>, <2, \mathrm{a}>, <3, \mathrm{a}> \}$
- $f_6 = \{ <1, \mathrm{b}>, <2, \mathrm{a}>, <3, \mathrm{b}> \}$
- $f_7 = \{ <1, \mathrm{b}>, <2, \mathrm{b}>, <3, \mathrm{a}> \}$
- $f_8 = \{ <1, \mathrm{b}>, <2, \mathrm{b}>, <3, \mathrm{b}> \}$
- 于是

$$A_B = \{ f_1, f_2, f_3, \cdots, f_8 \}$$

函数举例

从 A到B的所有函数的集合数目

若A和B是有限集合，且 $|A|=m$，$|B|=n$

则$|A_B|=n^m=|B|^{|A|}$

$\because$ 每个f恰好有m个有序对，

每个有序对的第二元素都有n 种选择。

特殊的函数

- A_B 是A→B上的函数集合
- $\varnothing_{\varnothing} = \{ \varnothing \}$ ∵从$\varnothing$到$\varnothing$的函数只有 $f = \varnothing$，$0^{\circ} = 1$
- <u>$\varnothing$*是函数，称其为空函数*</u>。
- $\varnothing_{\mathrm{B}} = \{ \varnothing \}$ $\varnothing \to B$, $f = \varnothing$, $n^{\circ} = 1$
- $A_{\varnothing} = \varnothing$ $(A \neq \varnothing)$ $A \to \varnothing$, f不存在，$0^{\mathrm{m}} = 0$

∵对于$x \in A$ 找不到 $y \in \varnothing$, 满足 $A \to \varnothing$。

11.1 函数和选择公理

定义11.1.3 （函数的象）

设 $f: A \to B$

$A_1 \subseteq$ A，定义A_1在f下的象$f[A_1]$为

$$f[A_1] = \{y | (\exists x)\big(x \in A_1 \wedge y = f(x)\big)\}$$

把$f[A]$称为函数的象。

设 $B_1 \subseteq B$，定义B_1在f下的完全原象$f^{-1}[B_1]$为

$$f^{-1}[B_1] = \{x | x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$$

函数举例

- 例4: f : Z→Z 定义为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{当}x\text{是偶数}\\[2ex] \dfrac{x+1}{2} & \text{当}x\text{是奇数}\end{cases}$$

则 $f[\mathrm{N}]=\mathrm{N}$, $f[\{1,2,3\}]=\{1,2\}$,

$f^{-1}[\{2,3\}]=\{3,4,5,6\}$.

特别地 $f[\varnothing]=f^{-1}[\varnothing]=\varnothing$

11.1 函数和选择公理

定义11.1.4 （满射 surjection ）

设 f: $A \rightarrow B$ ，

若 ran(f)=B ， 即$\forall y \, (y \in B \rightarrow \exists x \, (x \in A \land f(x)=y))$

则称 f 是满射(surjection)的，

或称 f 是 A到B上的满射；

f: {-1,0,1} → {0,1}, $f(x)= x^2$

单射

(2) （单射 injection ）

设 f: $A\rightarrow B$ ， 若对任意的 x_1， $x_2\in A$，

$x_1\neq x_2$ 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$ ，

则称 f 是单射(injection)的；

f: {1,2,3} → {4, 5,6,7}， f(x)=x+3;

双射

(3) （双射 bijection ）

设 f: $A \to B$ ，若 f 是满射的又是单射的，则称 f 是双射(bijection)的，

或一对一A到B上的。简称双射。

- f: R→R$_+$; f(x)=e^x
- f: [-π/2, π/2] →[-1,1] f(x)=sin(x)

双射

- $N \times N$ 到 N能否建立双射

11.1 函数和选择公理

定义11.1.5 （常函数）

设 $f: A \to B$，如果存在一个y∈B ，使得对所有的 x∈A， 有 f(x)=y， 即有f[A]={y}

则称 $f: A \to B$ 为常函数。

11.1 函数和选择公理

定义11.1.6 （恒等函数）

A上的恒等关系 I_A：A→A, 称为恒等函数。于是，对任意的 $x \in A$，有$I_A(x)=x$ 。

定义11.1.7 （单调函数）

对实数集R，设 f：$R \rightarrow R$，

如果 $(x \leq y) \rightarrow (f(x) \leq f(y))$，则称$f$为单调递增的；

如果 $(x < y) \rightarrow (f(x) < f(y))$，则称$f$为严格单调递增的。

类似可定义单调递减和严格单调递减的函数。

11.1 函数和选择公理

定义11.1.8 （n元运算）

对集合A， $n \in N$，把函数f：$A^n \to A$ 称为A上的n元运算。

11.1 函数和选择公理

定义11.1.9 （泛函）

设A，B，C是集合，B_C为从B 到C 的所有函数的集合，则称F：$A \rightarrow B_c$ 为一个泛函

举例：

$A=\{1, 2\}$

$B=\{a, b\}$

$C=\{x, y\}$

泛函

- 例7: 泛函$F: R \to R_R$, $F(a) = (f(x) = x+a)$. 或写成F: $a \mapsto [x \mapsto x+a]$.

  $F(2)$对应函数 $x \mapsto x+2$.

  $F(2)(3) = 3+2 = 5$.

  $F(6)$对应函数 $x \mapsto x+6$,

  $F(6)(3) = 3+6 = 9$

泛函值$F(2)$有双重含义:

一方面表示2下F的函数值为$F(2)$, 另一方面这个值是一个函数 $F(2): R \to R$, $F(2): x \mapsto x+2$.

泛函

- 换个角度：函数是一个关系，是一个集合
- F：$A \rightarrow B_c$

- F(1) 对应一个关系集合，
- 每个关系集合定义了一个函数。

$A=\{1, 2\}$

$B=\{a, b\}$

$C=\{x, y\}$

$B_c=?$

$$1 \longrightarrow \{\langle a,x\rangle,\langle b,y\rangle\}$$

$$2 \longrightarrow \{\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle\}$$

11.1 函数和选择公理

定义11. 1. 10　（特征函数）

设E是全集，对任意的A⊆ E，A的特征函数χ_A定义为:

$$\chi_A : E \to \{0,1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

为什么叫做特征函数？A即为特征集合

英语单词按照词性划分，名词、动词等

11.1 函数和选择公理

定义11.1.11 （典型映射或自然映射）

设R是A上的等价关系，令g： A→A/R， $g(a)=[a]_R$，则称g为从A到商集A/R的典型映射或自然映射。

典型映射举例

- 例9: 设 $A = \{1, 2, 3\}$, R是A上的等价关系,
  它诱导的等价类是 $\{1, 2\}, \{3\}$
  则从A到A/R的自然映射g为:
  $g:\{1, 2, 3\}\rightarrow\{\{1, 2\}, \{3\}\}$,
  $g(1) = \{1,2\}$, $g(2) = \{1,2\}$, $g(3) = \{3\}$.

思考:
典型映射是满射还是单射?
什么时候单射?
什么时候是双射?

11.1 函数和选择公理

11-1-1 选择公理

（形式1） 对任意的关系R，存在函数f,

使得 $f \subseteq R$ 且 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(R)$

注意：R是A到B的关系

f: $dom(R) \to ran(R)$

选择公理

- 一般的关系**R**不是函数，因为**R**不一定是单值的.
- 对某些$x \in dom(R)$, 有y_1，y_2 ,…,
  使$y_1 \in ran(R)$, $y_2 \in ran(R)$, …,
  且$\langle x, y_1\rangle \in R$, $\langle x, y_2\rangle \in R$,… .
  这时**x**有多个值y_1, y_2, …与之对应.

为了构造函数 **f**，只要对任意的$x \in dom(R)$, 从$\langle x, y_1\rangle$, $\langle x, y_2\rangle$,… 中任取一个放入 **f** 中.

则 **f** 是单值的，$f \subseteq R$，且有$dom(f) = dom(R)$.
F是函数 $f : dom(R) \rightarrow ran(R)$.

多个有序对可任选其一，所以构造的 **f** 可有多个

- 例10: 设关系$R = \{<1, a>, <1, b>, <2, b>\}$,

  则$f_1 = \{<1, a>, <2, b>\}$和

  $f_2 = \{<1, b>, <2, b>\}$

  都是满足条件的函数.

总结

- 函数的定义：单值条件 + 定义域取遍
- 特殊函数：单射、满射、双射
- 特殊函数：常函数，恒等函数，泛函，特征函数，典型映射
- 函数选择公理