

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A(2) (A) 答案 2022 年 4 月 16 日

院系名称_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____.

一. 填空题 (每空 3 分, 共 30 分)

1. 设 $z = e^{x-y} \ln(x+y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) =$ _____。 e.
2. 设 $z = x \sin(xy)$, 则 $dz(1, \frac{\pi}{2}) =$ _____。 dx
3. $(x+1)^{2y}$ 在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 _____。
 $1 + 2xy + o(x^2 + y^2)$
4. 设 $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt} dt$, 则 $f'(0) =$ _____。 $\frac{e-3}{2}$
5. 曲面 $e^z = xy + yz + zx$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切平面方程为 _____。 $x + y + z = 2$.
6. 写出曲面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$ 在点 $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ 处的一个单位法向量: _____。 $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2\sqrt{2})$ 或 $\frac{-1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2\sqrt{2})$
7. 可微函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\vec{u} = (-1, 2)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(0,0) = 0$, 沿 $\vec{v} = (3, 4)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}(0,0) = 2$, 则 $\text{grad } f|_{(0,0)} =$ _____。 $(2, 1)$
8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{xy} =$ _____。 1
9. 已知 $\begin{cases} x = e^v + u^3 \\ y = e^u - v^3 \end{cases}$ 将点 $(u_0, v_0) = (1, 0)$ 映为 $(x_0, y_0) = (2, e)$, 则其逆映射 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ 在点 $(x_0, y_0) = (2, e)$ 处的 Jacobi 矩阵的行列式 $\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{(x,y)=(2,e)} =$ _____。 $-\frac{1}{e}$
10. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微, 且 $f(1,1)=1, \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2, \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=3$. 设 $g(x) = f(x, f(x, x))$, 则 $g'(1) =$ _____。 17

二、解答题 (请写出详细的解答过程和必要的根据!)

11. (10分) 证明方程 $1 + xy = \arctan(x + y)$ 在点 $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ 的邻域中确定了一个任意次连续可微的隐函数 $y = y(x)$, 并求 $y'(-1)$ 和 $y''(-1)$.

解答: 令 $F(x, y) = 1 + xy - \arctan(x + y)$, 则 $F(x, y)$ 在点 $(-1, 1)$ 的邻域中无穷次连续可微。

$$F'_y(x, y) = x - \frac{1}{1 + (x + y)^2}, \quad F'_y(-1, 1) = -2 \neq 0, \quad F(-1, 1) = 0,$$

由隐函数定理, $F(x, y) = 1 + xy - \arctan(x + y) = 0$ 在 $(-1, 1)$ 的邻域确定了隐函数 $y = y(x)$, 且

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

而 $F(x, y)$ 在点 $(-1, 1)$ 的邻域中任意次连续可微, 因此隐函数 $y = y(x)$ 在点 $x = -1$ 的邻域中任意次连续可微。

视方程 $1 + xy = \arctan(x + y)$ 中 $y = y(x)$ 方程两边分别对 x 求偏导, 得

$$y + xy'(x) = \frac{1}{1 + (x + y)^2} (1 + y'(x)),$$

$$2y'(x) + xy''(x) = \frac{y''(x)(1 + (x + y)^2) - 2(x + y)(1 + y'(x))^2}{[1 + (x + y)^2]^2}.$$

将 $(x, y) = (-1, 1)$ 代入, 得

$$y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = 0.$$

12. (12分) 已知 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 试回答以下问题, 并说明理由。

(1) 函数 $f(x, y)$ 在原点 $(x, y) = (0, 0)$ 处是否连续?

(2) 偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 是否存在? 如果存在, 求出它们。

(3) 函数 $f(x, y)$ 在原点 $(x, y) = (0, 0)$ 处是否可微? 如果可微, 求出这个微分。

解: (1) 由于

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| + |y|,$$

故函数 $f(x, y)$ 在原点 $(x, y) = (0, 0)$ 处连续。

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 1, \text{ 故 } f'_x(0, 0) \text{ 存在且 } f'_x(0, 0) = 1.$$

同理 $f'_y(0, 0) = -1$.

(3) 假设 $f(x, y)$ 在原点 $(x, y) = (0, 0)$ 处可微, 则 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时,

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$\text{于是 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \text{ 即 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

另一方面, 当动点 (x, y) 沿着直线 $y = kx$ 趋向原点时, 极限 $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} \frac{xy(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{k(1 - k)}{(1 + k^2)^{3/2}},$

与 k 有关. 矛盾. 故 $f(x, y)$ 在原点 $(x, y) = (0, 0)$ 处不可微.

13. (10 分) 请用 Lagrange 乘子法求函数 $f(x, y) = e^{xy} \sin(x + y)$ 在曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最大值和最小值.

解: 连续函数在有界闭集上有最大值和最小值, 因此条件极值问题

$$\min/\max f(x, y)$$

$$s.t. \quad x^2 + y^2 = 1$$

存在最大值和最小值.

令

$$L(x, y) = e^{xy} \sin(x + y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

求解方程组

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = e^{xy} (y \sin(x + y) + \cos(x + y)) + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L'_y(x, y) = e^{xy} (x \sin(x + y) + \cos(x + y)) + 2\lambda y = 0 & (2) \\ L'_\lambda(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2)x - (1)y: \quad (x - y)((x + y)\sin(x + y) + \cos(x + y)) = 0.$$

由 (3) 式知 $|x + y| \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, 此时 $(x + y)\sin(x + y) \geq 0, \cos(x + y) \geq 0$, 且

$(x + y)\sin(x + y)$ 与 $\cos(x + y)$ 不能同时为 0. 因此

$$(x + y)\sin(x + y) + \cos(x + y) \neq 0, \quad x - y = 0.$$

将 $x = y$ 代入 (3) 式得 $(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 或 $(x, y) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$,

因此 f 在曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最大值、最小值分别为

$$f_{\max} = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = e^{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{2}, \quad f_{\min} = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -e^{\frac{1}{2}} \sin \sqrt{2}.$$

14. (8分) 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 为某一函数 $f(x, y)$ 的全微分, 求 a, b 的值及 $f(x, y)$ 。

解: 由于函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$,

又当 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 存在且连续时, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = by \cos x + 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3axy^2 - 2y \cos x,$$

所以 $a = 2, b = -2$.

$$\begin{aligned} dz &= (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy \\ &= y^3 dx^2 - y^2 d \sin x + dy - \sin x dy^2 + x^2 dy^3 \\ &= d(x^2 y^3) - d(y^2 \sin x) + dy \\ &= d(x^2 y^3 - y^2 \sin x + y) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = x^2 y^3 - y^2 \sin x + y + c, c \in \mathbb{R}.$$

解法 2:

$$f(x, y) = \int (2xy^3 - y^2 \cos x)dx = x^2 y^3 - y^2 \sin x + A(y),$$

对 y 求导得到 $3x^2 y^3 - 2y \sin x + A'(y) = 1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2$, 所以 $A(y) = y + c$ 。

所以 $f(x, y) = c + y - y^2 \sin x + x^2 y^3$ 。

解法 3:

$$f(x, y) = \int (axy^3 - y^2 \cos x)dx = \frac{a}{2} x^2 y^3 - y^2 \sin x + A(y),$$

$$\text{对 } y \text{ 求导得到 } \frac{3a}{2} x^2 y^2 - 2y \sin x + A'(y) = 1 + by \sin x + 3x^2 y^2,$$

取 $x = 0$, 得到 $A(y) = y + c$ 。上式再对 y 求导后令 $y = 0$, 得到 $b = -2$ 。再由上式得到

$a = 2$ 。所以 $f(x, y) = c + y - y^2 \sin x + x^2 y^3$ 。

解法 4:

$$f(x, y) = f(0, 0) + (f(x, 0) - f(0, 0)) + (f(x, y) - f(x, 0))$$

应用牛顿莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \int_0^x f'_x(t, 0)dt + \int_0^y f'_y(x, s)ds \\ &= f(0, 0) + \int_0^x 0dt + \int_0^y (1 - 2s \sin x + 3x^2 s^2)ds \\ &= c + y - y^2 \sin x + x^2 y^3 \end{aligned}$$

15. (10分) 求函数 $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(x+y)$ 的极值和值域。

解:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(-2x^2 - 2xy + 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(-2xy - 2y^2 + 1) \end{cases}$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ 解得临界点 $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 或 $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^3 + 2x^2y - 3x - y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^3 + 2xy^2 - x - 3y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(x+y)(2xy-1)$$

$$H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad H_f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

所以 $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 是极大值, $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -e^{-1/2} = \frac{-1}{\sqrt{e}}$ 是极小值。

$$\text{因为 } |e^{-(x^2+y^2)}(x+y)| \leq e^{-(x^2+y^2)}(|x|+|y|) \leq e^{-(x^2+y^2)}2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\text{所以 } \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} e^{-(x^2+y^2)}(x+y) = 0,$$

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -e^{-1/2} = \frac{-1}{\sqrt{e}}。$$

所以 f 有 (正的) 最大值和 (负的) 最小值,

从而 $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 是最大值, $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -e^{-1/2} = \frac{-1}{\sqrt{e}}$ 是最小值, 定义域道路连通,

$$\text{所以 } f \text{ 的值域为 } \left[\frac{-1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right].$$

16. (15分) 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx^2}}{x^2} dx, t \in [0, +\infty)$.

$$(1) \text{ 证明: } f(t, x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-tx^2}}{x^2}, & x \neq 0, t \in \mathbb{R} \\ t, & x = 0, t \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ 在 } \mathbb{R}^2 \text{ 上连续.}$$

(2) 证明 $I(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续。

(3) 证明 $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导并计算 $I'(t)$.

(4) 求 $I(t), t \in [0, +\infty)$.

解答: (1) $\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1-e^{-u}}{u}, & u \neq 0 \\ 1 & u = 0 \end{cases}$ 在 $u \in \mathbb{R}$ 上连续, 因此 $f(t, x) = t\varphi(tx^2)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续.

(或按定义证明)

$$(2) I(t) = \int_0^1 f(t, x) dx + \int_1^{+\infty} f(t, x) dx \triangleq I_1(t) + I_2(t), \forall t \in [0, +\infty).$$

由 $f(t, x)$ 的连续性可得 $I_1(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续。

又因为 $|f(t, x)| \leq \frac{1}{x^2}, \forall t \geq 0, x \geq 1$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法,

$I_2(t) = \int_1^{+\infty} f(t, x) dx$ 关于 $t \in [0, +\infty)$ 一致收敛, 因此 $I_2(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续。

综上, $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续。

(3) 任取 $a > 0$, 有 $f'_t(t, x) = e^{-tx^2} \leq e^{-ax^2}, \forall t \in [a, +\infty)$,

而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $\int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx$ 在 $t \in [a, +\infty)$ 上一致收敛, 因此 $I(t)$

在 $t \in [a, +\infty)$ 可导, 由 a 的任意性可知 $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导且

$$I'(t) = \int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, \forall t \in (0, +\infty).$$

(4) 由 $I'(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$, 得 $I(t) = \sqrt{\pi t} + c, \forall t \in (0, +\infty)$.

而(2)中已证明 $I(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 注意到 $I(0) = 0$, 可得 $c = 0$. 于是

$$I(t) = \sqrt{\pi t}, \forall t \in [0, +\infty).$$

17. (5分) 已知函数 $f(x, y)$ 对每个变量 x, y 分别连续; 且对每个固定的 x , 函数 $f(x, y)$ 对变量 y 单调。求证: $f(x, y)$ 作为二元函数是连续函数。

证明: 不妨设 $f(x, y)$ 对 y 单调递增。任意给定 (x_0, y_0) , 任意给定 $\varepsilon > 0$ 。

因为 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对变量 y 连续, 所以存在 $y_1 < y_0 < y_2$ 使得

$$f(x_0, y_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x_0, y_1) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y_2) < f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_1) 和点 (x_0, y_2) 处对变量 x 连续, 所以

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x: |x - x_0| < \delta_2, |f(x, y_i) - f(x_0, y_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, i = 1, 2.$$

$$\forall x: |x - x_0| < \delta_2, f(x_0, y_1) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x, y_1), f(x, y_2) < f(x_0, y_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $|x - x_0| < \delta_2, y \in [y_1, y_2]$ 时, 由单调性和前面的不等式

$$f(x_0, y_0) - \varepsilon < f(x, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x, y_2) < f(x_0, y_0) + \varepsilon ,$$

所以 $f(x, y)$ 作为二元函数在 (x_0, y_0) 点连续。