

# Discrete Mathematics for Computer Science Spring 2023

## Midterm

April 29, 2023

1. (8 points) 现在有A, B, C, D, E, F六个人, 围在一张桌子旁坐成一圈. 已知:

- 1) 每个人与另外两人相邻, 与剩余三人不相邻
- 2) F, D相邻
- 3) B至少与C, D中的一个人相邻
- 4) A, C不相邻
- 5) 如果C, F相邻, 则E, C不相邻

(a)  $P(x, y)$ 表示 $x$ 与 $y$ 相邻, 请将上述条件表示为谓词公式的集合.

(b) 如果A, E相邻, 则B不可能在\_\_\_\_\_之间, 并证明.

- (1) A, C
- (2) A, D
- (3) C, D
- (4) C, F
- (5) D, E

2. (4 points) 求出 $\neg((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R)$ 的主合取范式和主析取范式.

3. (8 points) 填空并证明:  $((Q \square S) \square R) \wedge (S \square (P \square R)) \Leftrightarrow (S \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow R$

4. (8 points) 求出以下公式的 $\forall$ -前束范式和 $\exists$ -前束范式:

$$(\exists x)((\exists y)P(x, y) \rightarrow \neg((\exists y)Q(y) \rightarrow R(x)))$$

5. (6 points) 使用归结法证明:

$$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \Rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow P(x))$$

6. (10 points) 判断:

- 1) 空集的幂集是空集
- 2) 对于非空集合 $A$ ,  $\bigcup(P(A)) = A$

- 3) 空关系不具有传递性
  - 4) 存在一个关系 $R$ , 使得 $R$ 是对称的, 并且 $R$ 是反对称的
  - 5) 非空集合上的关系 $R_1$ 和 $R_2$ 满足 $S(R_1) \cup S(R_2) = S(R_1 \cup R_2)$
  - 6)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上可以给出18个等价关系
  - 7) 存在一个函数 $f$ , 使得 $f$ 既不存在左逆, 也不存在右逆
  - 8) 集合 $A$ 上的关系 $R_1$ 和 $R_2$ , 如果 $R_1$ 和 $R_2$ 都是反对称的, 则 $R_1 \circ R_2$ 也是反对称的
  - 9) 集合的等势具有传递性
  - 10) 如果 $A \times B = A \times C$ , 则 $B = C$
7. (10 points) 回答下列问题:
- (a)  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , 请写出 $\bigcup A, \bigcap A, \bigcup P(A), \bigcap P(A)$ .
  - (b) 证明:  $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$ .
  - (c) 证明:  $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ .
8. (5 points)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , 求出有多少种关系 $R$ , 使得 $R$ 是反对称的, 但 $R$ 既不是自反的也不是非自反的.
9. (9 points)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{< 1, 2 >, < 1, 4 >, < 3, 3 >, < 4, 1 >\}$ , 求出包含 $R$ 且满足下列要求的最小关系:
- 1) 对称的且传递的
  - 2) 自反的且传递的
  - 3) 自反的, 对称的, 传递的
10. (10 points)  $\mathbb{N}_+$ 上的偏序关系 $R = \{< x, y > \mid x \in \mathbb{N}_+ \wedge y \in \mathbb{N}_+ \wedge (\exists p)(p \in \mathbb{N}_+ \wedge y = x^p)\}$ , 定义 $\mathbb{N}_+$ 的子集 $A = \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{12}\}$ .
- (a)  $R_1 = (A \times A) \cap R$ , 求出 $< A, R_1 >$ 的Hasse图.
  - (b) 偏序集 $< A, R_1 >$ , 求出它的最大元, 最小元, 极大元, 极小元.
  - (c) 偏序集 $< \mathbb{N}_+, R_1 >$ , 求出它的上界, 下界, 上确界, 下确界.
11. (10 points)  $R$ 是在非空集合 $A$ 上的关系,  $R$ 是自反的并且是传递的,
- (a) 证明:  $R \cap R^{-1}$ 是等价关系.
  - (b) 设 $S$ 是在 $A \setminus (R \cap R^{-1})$ 上的关系, 并且 $< C, D > \in S$ 当且仅当 $(\exists c)(\exists d)(c \in C \wedge d \in D \wedge < c, d > \in R)$ , 证明 $R$ 是偏序关系.
12. (6 points) 函数 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow A$ , 且 $h \circ g \circ f = I_A, f \circ h \circ g = I_B, g \circ f \circ h = I_C$ , 证明:  $f, g, h$ 均为双射.
13. (13 points) 使用集合等势的定义证明:  $\mathbb{R} \approx [-1, 1] - \{0\}$ .
14. (2 points) (Bonus) 请阐述你在逻辑部分体会到的数学之美, 列举要点和理解.