习题讨论课01题目：不等式、确界、幂指对函数

★号（越）多表示题目（越）难

一、不等式

微积分的核心思想是通过近似和逼近来解决问题，所以不等式是重要的工具。不等式的来源：

- **不等式的基本性质**：传递 $(x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z)$, 运算性质 $(x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z; x \leq y, z>0 \Rightarrow xz \leq yz)$ 。以及基本性质的推论，比如 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ 。
- **函数的单调性**：$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ 。比如对正整数 n, x^n 在区间 $(0,+\infty)$ 是严格增函数 x^{-n} 在区间 $(0,+\infty)$ 是严格减函数。
- 函数的最大值与最小值。
- 一些常见不等式。

例 1. (Cauchy-Schwarz不等式). 证明对任意实数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$,

$$\left(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right)^2 \leq\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right).$$

等式成立当且仅当存在实数 λ 使得

$$a_k=\lambda b_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad \text{或者} \quad b_k=\lambda a_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

事实上，成立等式

$$\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)-\left(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right)^2=\sum_{1 \leq i<j \leq n}\left(a_i b_j-a_j b_i\right)^2.$$

其几何意义是 $\mathbb{R}^n$ 中由向量 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 和 $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ 所形成的平行四边形的面积与它在各 2 维坐标平面中的投影平行四边形面积之间的关系。

注：Cauchy-Schwarz 不等式是一类普遍成立的不等式，它反映了空间的内 积构造，具有特殊的几何意义。

例 2. (Bernoulli 不等式). 设 $x_1, \ldots, x_n>-1$, 且 $x_i x_j \geq 0 (\forall i, j \in\{1,2, \ldots, n\})$。证明

$$(1+x_1) \cdots(1+x_n) \geq 1+(x_1+\cdots+x_n),$$

其中等号成立当且仅当 $n=1$ 或者 $x_1, \ldots, x_n$ 中至多有一个非零。

经典的 Bernoulli 不等式：

$$(1+x)^n \geq 1+n x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x>-1.$$

注：Bernoulli 不等式是本次习题课中最重要的不等式，可以把乘方运算降级为乘法运算。

例 3. 利用 Bernoulli 不等式证明对任何正整数 n 以及任何正数 a, b, 都有

$$ab^n \le \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1},$$

且等号成立当且仅当 $a = b$ 。并利用这个不等式证明对任何正整数 n, 都有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

例 4. (算术几何平均值不等式) 利用例 3 中不等式证明：对任意正整数 n 和非负 数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 都成立

$$x_1 x_2 \cdots x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 。

例 5. (广义的算术几何平均值不等式) 证明对任何非负数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和任何正整数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 都成立

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{p_n} \le \left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 。

二、确界

上确界：$\mu = \sup A$

- μ 是 A 的上界：$x \in A \Rightarrow x \le \mu$;
- μ 是 A 的最小上界：

$$\mu_1 \text{ 是 } A \text{ 的上界 } \Rightarrow \mu_1 \ge \mu,$$

或等价的，

$$\forall \mu_1 < \mu, \mu_1 \text{ 不是 } A \text{ 的上界, 即存在 } x \in A \text{ 使得 } x > \mu_1.$$

类似地，定义下确界。

确界公理：任何非空有上（下）界的实数子集必有上（下）确界。

例 6. (阿基米德性质). 证明对任意正数 ε, 存在正整数 n 使得 $\frac{1}{n} < \varepsilon < n$ 。

例 7. 设 $a > 1, \varepsilon > 0$。证明存在正整数 m 使得 $a^{-m} < \varepsilon < a^m$。

例 8. 证明：实数 α 是实数子集 A 的上确界当且仅当

- 任何比 α 小的有理数都不是 A 的上界；
- 任何比 α 大的有理数都是 A 的上界。

例 9. （★）设 A, B 是非空有上界的实数子集，且存在 $a_0, b_0 > 0$ 满足 $a_0 \in A, b_0 \in B$。记

$$AB = \{c \in \mathbb{R} \mid \text{ 存在 } a, b > 0 \text{ 使得 } a \in A, b \in B, c \leq ab\}.$$

证明 AB 非空有上界，且 $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$ 。

注：这本质上是用 Dedekind 分割作为实数时，定义两个正实数乘积的办法。

三、关于乘方、开方、幂指对函数

虽然我们在中学学习了开方和幂指对函数，但它们不是用算术运算（有限次加减乘除）得到的，它们的很多性质需要用到实数的本质性质（确界公理）。

例 10. （★）**(从乘方到开方)** 设 n 是正整数。证明函数 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，$x \mapsto x^n$ 是严格增满射。

定义：对正数 y 和正整数 n，定义 $y^{\frac{1}{n}}$ 是 $x^n = y$ 的唯一正数解 x. 对整数 m，定义 $y^{\frac{m}{n}} = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

例 11. （★★）**(从乘方到对数函数)** 设 $a > 1$，$x > 0$，记

$$A_x = \left\{ \frac{m}{n} \middle| n \text{ 是正整数，} m \text{ 是整数，} a^m \leq x^n \right\}.$$

1. 证明 A_x 非空有上界。记 $\log_a x = \sup A_x$.
2. 证明对任意正数 x, y，$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. 并且 $\log_a a = 1$.
3. 对任何有理数 $\frac{m}{n}$，$\log_a(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}$.
4. 证明 $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 是严格增满射。

定义：指数函数 a^x 是对数函数 $\log_a$ 的反函数。

所以 a^x 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的严格增满射。

由于

$$\log_a(a^x a^y) = \log_a(a^x) + \log_a(a^y) = x + y,$$

所以

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

思考题：（★★）如何证明对任意正数 a, b 和任意实数 x, y，都有 $(a^x)^y = a^{xy}$ 以及 $a^x b^x = (ab)^x$？

定义：幂函数 $x^\mu = 2^{\mu \log_2 x}$.