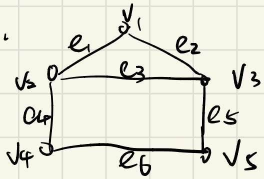
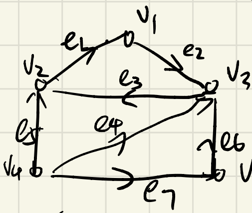
1.



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0\\1&1&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{array}\\ \begin{array}{cccccc}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\end{array}\end{array}$$

$v_1 \to v_3$ 长为4的通路数量 $= 8$

$$A^4=\begin{pmatrix}8&8&8&6&6\\8&15&7&3&11\\8&7&15&11&3\\6&3&11&9&1\\6&11&3&1&9\end{pmatrix}$$



$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0&0\\1&0&-1&0&-1&0&0\\0&-1&1&-1&0&-1&0\\0&0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$v_1 \to v_3$ 长为4的通路数量 $= 1$

$$A^4=\begin{pmatrix}&&1&&\\1&&&&\\&1&&&\\1&1&1&&\\&&1&&\end{pmatrix}$$

2.

0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100,

1100, 1110, 1111, 1101, 1001, 1011, 1010, 1000, 3.

① 若图无回路

若存在 U-U 通路,

⇒ U-U 通路中每边将计算偶数次 (即往返 n次)

⇒ U-U 通路长度为偶数

⇒ 矛盾, 该图中必有回路

② 若 图无奇数长度回路

⇒ 回路长度均为偶数

则 U-U 通路 为回路与 回路首尾相接的组合

⇒ 通路长度只能为偶数

⇒ 矛盾, 则该图中有长度为奇数的回路

4. "转录"自 https://www.zhihu.com/question/304078392

设题意得到的图为 S

构造一个二分图 $H:((A,B),E(H))$

其中 A 为 G 中一对点的集合

$B=V(G)$

设 A 中一点 (u,v) 与 B 中一点 w 在 H 中相连，当且仅当 S 中存在 (u,w) 和 (v,w)

我们可将 A 分为 2 个子集 C 和 D，其中 C 为在 S 中连接的一对点

D 为在 S 中不连接的一对点

因此由题干条件知，C 中元素在 H 中度数为 0（S 中不存在长度为 3 的回路）

D ～ ——————— ≤ 1（— ～ — ——— 4 ———）

$$\Rightarrow |E(H)|=\sum_{n=1}^{10}\binom{d_n}{2}\leq 0\times|C|+1\times|D|$$

其中 d_n 为在 S 中顶点的度数

且由 C、D 定义知：$|C|+|D|=\binom{10}{2}=45$，$|C|=E(S)$

并且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\binom{d_n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}d_n^2-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}d_n$

$$\overset{\text{握手定理}}{=}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}d_n^2-E(S)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{10}d_n^2\right)\cdot 1-E(S)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{10}d_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{10}\right)-E(S)$$

$$\overset{\text{Cauchy不等式}}{\geq}\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{10}\left(d_n\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)^2-E(S)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\left(\sum_{n=1}^{10}d_n\right)^2-E(S)$$

$$=\frac{1}{20}(2E(S))^2-E(S)$$

$$=\frac{1}{5}(E(S))^2-E(S)$$

$$\Rightarrow 45-E(S)=|D|\geq\frac{1}{5}(E(S))^2-E(S)$$

$$\Rightarrow 15^2\geq(E(S))^2$$

$\Rightarrow E(S)\leq 15$　　因此 S 中最多 15 条边