2022年秋微积分A(1)期末考试样卷参考解答

系别_______ 班级_______ 姓名_______ 学号_______

一、填空题 (10道题, 每题3分, 共30分)

1. 由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{6}$, 以及直线 $x=0$, $y=0$ 围成的有界平面图形的面积为_________.

   答: 6.

   详解: 所求面积为

$$S=\int_0^6(\sqrt{6}-\sqrt{x})^2dx=\int_0^6(6+x-2\sqrt{6x})dx$$

$$=36+18-2\sqrt{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot 6^{3/2}=6.$$

2. 极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

   答: 1.

   详解: 将待求极限的函数写作

$$\frac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}\cdot\frac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{x^2}.$$

   第一个因子的极限容易求得:

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{x^2}{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1}=\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\to 2.$$

   第二个因子的极限可两次使用 L'Hospital 法则得到:

$$\frac{\left[\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt\right]'}{[x^2]'}=\frac{e^{\sin x}-\cos x}{2x};$$

$$\frac{\left[e^{\sin x}-\cos x\right]'}{[2x]'}=\frac{e^{\sin x}\cos x+\sin x}{2}\to\frac{1}{2}.$$

因此极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{\sin t}-\cos t)dt}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}=1.$$

3. 曲线段 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(0\le x\le 15)$ 的弧长为 __________.

答: 42.

详解: 所求弧长为

$$\int_0^{15}\sqrt{1+y'(x)^2}dx=\int_0^{15}\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=15}=\frac{2}{3}(64-1)=42.$$

4. 极限

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

答 2.

详解: 由于

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\to\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2,$$

故所求极限为

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}=e^{\ln 2}=2.$$

5. 记 $y=y(x)$ 是常微分方程 $y'+y=e^{-x}$ 满足 $y(0)=0$ 的解, 则函数 $y=y(x)$ 拐点的横坐标为 $x=$ __________.

答 $x=2$.

详解: 根据一阶线性常微分方程的求解公式, 可知方程 $y'+y=e^{-x}$ 的一般解为

$$y(x)=e^{-x}\left(c+\int_0^x e^{-s}e^{s}ds\right)=e^{-x}(c+x)=xe^{-x}+ce^{-x}.$$

令 $y(0)=0$ 得 $c=0$. 因此方程 $y'+y=e^{-x}$ 满足初值条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=xe^{-x}$. 以下求 $y(x)$ 的拐点. 简单计算得 $y'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$, $y''(x)=(x-2)e^{-x}$.

可见函数 $y''(x)$ 有且仅有唯一的零点 $x=2$. 由于 $y''(x)$ 在零点 $x=2$ 附近改变了符号, 故函数 $y=y(x)$ 有唯一的拐点 $(x,y)=(2,2e^{-2})$, 其横坐标为 $x=2$. 解答完毕.

6. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\sin(\frac{\pi t^2}{2})dt$, 则 $F'(1)=$ __________.

答 $F'(1)=2$.

详解: 由于

$$F'(x)=\sin(\frac{\pi x^4}{2})\cdot 2x,$$

故

$$F'(1)=\sin(\frac{\pi}{2})\cdot 2=2.$$

7. 积分 $\int_0^2|(x-1)(x-2)|dx=$ __________.

答 1.

详解:

$$\int_0^2|(x-1)(x-2)|dx=\int_0^1(1-x)(2-x)dx+\int_1^2(x-1)(2-x)dx$$

$$=\int_0^1(2-3x+x^2)dx+\int_1^2(-x^2+3x-2)dx=2-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(2^3-1)+\frac{3}{2}(2^2-1)-2=1.$$

8. 设 $f(x)$ 为连续可微函数, 满足方程 $2\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^2$, 则 $f'(1)=$ __________.

答 $f'(1)=3$.

详解: 在方程 $2\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^2$ 中, 令 $x=1$ 得 $0=f(1)-1$. 由此得 $f(1)=1$. 再对方程 $2\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^2$ 两边求导得 $2f(x)=f(x)+xf'(x)-2x$. 化简得 $f(x)=xf'(x)-2x$. 令 $x=1$ 得 $1=f'(1)-2$. 由此得 $f'(1)=3$.

9. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $y'=1+2x+y^2+2xy^2$ 满足初值条件 $y(0)=0$ 的解, 则 $\arctan y(1)=$ __________.

答: $\arctan y(1)=2$.

详解: 方程 $y' = 1 + 2x + y^2 + 2xy^2$ 可写作 $y' = (1+2x)(1+y^2)$. 后者是变量分离型方程. 分离变量得 $\frac{y'}{1+y^2} = 1 + 2x$. 两边积分得 $\arctan y = x + x^2 + C$. 根据初值条件 $y(0) = 0$ 知 $C = 0$. 因此 $\arctan y(1) = 1 + 1 = 2$.

10. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $y'' - 2y' + y = 2$ 满足初值条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ 的解, 则 $y(1) = $ __________.

答: $y(1) = 2$.

解: 观察知常数函数 $y = 2$ 是方程的解, 且满足初值条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. 根据初值问题解的唯一性知 $y(x) \equiv 2$. 因此 $y(1) = 2$. (也可以先求齐次方程的通解, 然后求非齐次方程的一个特解. 这样就得到非齐次方程的通解. 再根据初值条件确定通解中的两个常数. 这样就得到 Cauchy 问题的解. 从而确定 $y(1)$ 的值)

二、选择题 (10道题, 每题3分, 共30分)

1. 积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[x^2\sin(x^5) + \sqrt{1-x^2}\right]dx =$

   $A.$ 0;

   $B.$ $\frac{\pi}{2}$;

   $C.$ π;

   $D.$ 1.

   选 B.

   详解: 由于 $x^2\sin(x^5)$ 是奇函数, 故积分 $\int_{-1}^{1} x^2\sin(x^5)dx = 0$. 实际上函数 $x^2\sin(x^5)$ 只是起迷惑作用. 积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ 通过三角函数代换很容易计算:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}[\sin t]'dt$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当

$A.\quad p > 1;$

$B.\quad p < 3;$

$C.\quad 1 < p < 3;$

$D.\quad 1 \le p \le 3.$

选 C.

详解: 记

$$J_1 = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^p} dx, \quad J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^p} dx,$$

则积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当积分 J_1 和 J_2 均收敛.

考虑积分 J_1. 显然 $x = 0$ 是积分 J_1 唯一的瑕点, 且积分 J_1 收敛, 当且仅当积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-2}} dx$ 收敛. 而后者收敛, 当且仅当 $p - 2 < 1$, 即 $p < 3$.

再考虑积分 J_2. 积分 J_2 又可以写作 $J_2 = J_3 - J_4$, 其中

$$J_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad J_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx.$$

显然 J_3 收敛, 当且仅当 $p > 1$; J_4 收敛, 当且仅当 $p > 0$ (Dirichlet 判别法). 而积分 J_2 收敛, 当且仅当 J_3 和 J_4 均收敛. 因此积分 J_2 收敛, 当且仅当 $p > 1$.

综上可知, 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当 $1 < p < 3$.

3. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt =$

$A.\quad 3\sin(x^3) - 2\sin(x^2);$

$B.\quad \frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x};$

$C.\quad \frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x^2};$

$D.\quad \frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x^3}.$

选 B.

详解:

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\sin(x^3)}{x^3}(x^3)'-\frac{\sin(x^2)}{x^2}(x^2)'$$

$$=\frac{\sin(x^3)}{x^3}3x^2-\frac{\sin(x^2)}{x^2}2x=\frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x}.$$

4. 函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x^2})$ 的斜渐近线为

$A.$ $y=x;$

$B.$ $y=x+1;$

$C.$ $y=2x;$

$D.$ $y=2x+1.$

选 $A.$

详解: 由于

$$\frac{y(x)}{x}=\frac{x\ln(e+\frac{1}{x^2})}{x}=\ln(e+\frac{1}{x^2})\to\ln e=1,$$

且

$$y(x)-x=x\ln(e+\frac{1}{x^2})-x=x\left(\ln(e+\frac{1}{x^2})-1\right)$$

$$=x\ln\left(1+\frac{1}{ex^2}\right)=x\left(\frac{1}{ex^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)=\frac{1}{ex}+o(\frac{1}{x})\to 0,\quad x\to+\infty.$$

因此函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x^2})$ 有斜渐近线 $y=x$. 解答完毕.

5. 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x}=$

$A.$ $1;$

$B.$ $\ln 2;$

$C.$ $2;$

$D.$ $2\ln 2.$

选 $B.$

详解:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}=-\ln(e^{-x}+1)\Big|_0^{+\infty}=\ln 2.$$

6. 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx =$

$A.$ $\frac{1}{2}$;

$B.$ $\frac{1}{2}\ln 2$;

$C.$ $\ln 2$;

$D.$ $\frac{1}{2}\Big(1-\ln 2\Big)$.

选 D.

详解:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^3 x d\cos x}{1+\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x d\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{1}{1+\cos^2 x}\right) d\cos^2 x = -\frac{1}{2}\Big[\cos^2 x - \ln(1+\cos^2 x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

7. 由曲线段 $y=\sqrt{x-1}$ $(1 \le x \le 3)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

$A.$ π;

$B.$ 3π;

$C.$ 2π;

$D.$ 4π.

选 C.

详解: 由旋转体体积公式得所求体积为

$$V = \int_1^3 \pi y^2 dx = \pi \int_1^3 (x-1)dx = \pi \int_0^2 t dt = 2\pi.$$

8. 抛物线的一段 $y=\sqrt{2x}$ $(0 \le x \le 1)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面的侧面积为

$A.$ $2\sqrt{3}\pi$;

$B.$ $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$;

$C.$ 2π;

$D.$ π.

选 B.

详解: 根据旋转面的侧面积公式得

$$S=\int_0^1 2\pi y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx=\int_0^1 2\pi\sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx$$

$$=2\pi\int_0^1\sqrt{1+2x}dx=2\pi(\sqrt{3}-\frac{1}{3})=\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1).$$

9. 旋轮线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 一拱与 x 轴所围平面有界图形的面积为

   A. π;

   B. 2π;

   C. 3π;

   D. 4π.

   选 C.

   详解: 若将旋轮线可以看作函数 $y=f(x)$ 的函数图像, 则 $y(t)=f(x(t))$. 于是所求面积为

$$S=\int_0^{2\pi} f(x)dx=\int_0^{2\pi} f(x(t))x'(t)dt=\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(1-\cos t)dt=\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=3\pi.$$

10. 极限 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1+x^n}{1+x}dx$ 等于

   A. 0;

   B. 1;

   C. 2;

   D. $\ln 2$.

   选 D.

   详解: 由于

$$\int_0^1\frac{1+x^n}{1+x}dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}+\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\ln 2+\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx,$$

且

$$0<\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0,\quad n\to+\infty,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x}dx=\ln 2.$$

三. 解答题 (5道题, 共计40分)

1. (10分)设

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 并求 $f(x)$ 的单调区间, 极值点与极值, 凸性区间, 拐点和渐近线.

解: 显然 $f(x)$ 有唯一间断点 $x=0$. 对于 $x\neq 0$, $f(x)$ 无穷次可微. 计算得

$$f'(x)=\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2},\quad f''(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}.$$

由此可见

(i) 函数在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均单调下降;

(ii) $x=0$ 是严格极小值点, 极小值为 $f(0)=0$;

(iii) 函数于区间 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 上凸, 于区间 $(-\frac{1}{2},0)$ 和 $(0,+\infty)$ 均下凸.

(iv) 函数有唯一拐点 $x=\frac{-1}{2}$;

(v) 函数有一条垂直渐近线 $x=0$, 以及一条水平渐近线 $y=1$. 因为 $\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$. 解答完毕.

2. (10分) 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty}\Big(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\Big)dx \qquad (*)$$

的收敛性. 若收敛, 请求出积分值; 若发散, 请说明理由.

解: 由函数 $\sin u$ 的 Taylor 展式 $\sin u = u - \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$ 知其反函数 $\arcsin u$ 的 Taylor 展式为 $\arcsin u = u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$. 因此当 x 充分大时,

$$\arcsin\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{x}\Big)^3 + o\Big(\frac{1}{x}\Big)^3.$$

根据广义积分比较判别法的极限形式知, 广义积分(*)收敛. 为计算积分(*), 我们作变量代换 $u = \frac{1}{x}$ 或 $x = \frac{1}{u}$. 记积分(*)为 J, 则

$$J = \int_1^0 (\arcsin u - u)\frac{-du}{u^2} = \int_0^1 (\arcsin u - u) d\Big(\frac{-1}{u}\Big)$$

$$= \frac{u - \arcsin u}{u}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{u}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1\Big)du = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{1}{u}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1\Big)du.$$

注意积分 $\int_0^1 \frac{1}{u}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1\Big)du$ 收敛, $u = 0$ 不是瑕点, $u = 1$ 是瑕点. 对积分作变量变换 $u = \sin t$ 得

$$\int_0^1 \frac{1}{u}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1\Big)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} - 1\Big)\cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}(1 - \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2(t/2)}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)} dt = -2\ln\cos(t/2)\Big|_0^{\pi/2} = \ln 2.$$

于是原广义积分

$$\int_1^{+\infty} \Big(\arcsin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\Big)dx = 1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2.$$

3. (10分) 求解 Euler 方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 2\ln x - 3$ $(x > 0)$ 的通解.

解: 作变量代换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 并记 $z(t) = y(e^t)$, 则

$$z'(t) = y'(e^t)e^t = xy', \quad z''(t) = y''(e^t)e^te^t + y'(e^t)e^t = x^2y'' + xy'.$$

于是 $xy'(x) = z'(t)$, $x^2y''(x) = z''(t) - xy'(x) = z''(t) - z'(t)$, 原方程就变成了 $z'' - z' + 2z' - 2z = 2t - 3$, 即 $z'' + z' - 2z = 2t - 3$. 这是常系数线性方程, 易见对应的齐次方程 $z'' + z' - 2z = 0$ 的通解为 $z = c_1e^t + c_2e^{-2t}$. 由 ODE 线性方程的理论

知, 非齐次方程 $z''+z'-2z=2t-3$ 有特解 $z_p=at+b$, 其中 a,b 为待定常数. 将特解 z_p 代入非齐次方程得 $a-2(at+b)=2t-3$. 比较系数得 $-2a=1$, $1-2b=-3$. 解之得 $a=-1$, $b=1$. 即非齐次方程 $z''+z'-2z=2t-3$ 有特解 $z_p=-t+1$, 从而有通解 $z=c_1e^t+c_2e^{-2t}-t+1$. 于是原 Euler 方程 $x^2y''+2xy'-2y=2\ln x-3$ $(x>0)$ 的通解为 $y=c_1x+\frac{c_2}{x^2}-\ln x+1$. 解答完毕.

4. (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且满足 $[f(x)]^2\leq 1+2\int_0^x f(t)dt$, $\forall x\in[0,1]$. 证明 $f(x)\leq 1+x$, $\forall x\in[0,1]$.

证明: 记 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则 $g(x)$ 于 $[0,1]$ 上连续, 于 $(0,1)$ 上连续可微, 且 $g'(x)=f(x)\leq\sqrt{1+2g(x)}$, $\forall x\in(0,1)$. 由此得 $\frac{g'(x)}{\sqrt{1+2g(x)}}\leq 1$. 对这个不等式两边从 0 到 x 积分得 $\int_0^x\frac{g'(t)dt}{\sqrt{1+2g(t)}}\leq x$. 作积分变量代换 $u=g(t)$ 得 $\int_0^{g(x)}\frac{du}{\sqrt{1+2u}}\leq x$. 左边的积分容易计算出来得 $\sqrt{1+2g(x)}-1\leq x$. 于是 $f(x)\leq\sqrt{1+2g(x)}\leq 1+x$, $\forall x\in[0,1]$. 证毕.

5. (5 分) 设 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为实系数多项式. 若 $p(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 证明 $p(x)+p'(x)+p''(x)+\cdots+p^{(n)}(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 其中 $p'(x)$, $p''(x)$, $\cdots$, $p^{(n)}(x)$ 分别表示 $p(x)$ 的一阶, 二阶, $\cdots$, 以及 n 阶导数.

证明: 由于 $p(x)$ 为 n 次多项式, 故它的 $n+1$ 阶导数恒为零, 即 $p^{(n+1)}(x)\equiv 0$. 因此若记 $H(x)=p(x)+p'(x)+p''(x)+\cdots+p^{(n)}(x)$, 则 $H'(x)=p'(x)+p''(x)+\cdots+p^{(n)}(x)=H(x)-p(x)$. 于是 $H'(x)-H(x)=-p(x)$. 在这个等式两边同乘以积分因子 e^{-x} 得 $e^{-x}[H'(x)-H(x)]=-e^{-x}p(x)$. 此即 $[e^{-x}H(x)]'=e^{-x}[H'(x)-H(x)]=-e^{-x}p(x)\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 这表明函数 $e^{-x}H(x)$ 在整个实轴 $\mathbb{R}$ 上单调下降. 由于 $e^{-x}H(x)=\frac{H(x)}{e^x}\to 0$, $x\to+\infty$, 故 $e^{-x}H(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 从而 $H(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 证毕.