清华大学微积分A(2)期中考试试题

考试时间　　2022年4月16日

一、填空题（每空3分，共30分）

1.设$z=e^{x-y}\ln(x+y)$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,0)=$__________.

2.设$z=x\sin(xy)$，则$\mathrm{d}z(1,\dfrac{\pi}{2})=$__________.

3.$(x+1)^{2y}$在点$(0,0)$处带Peano余项的二阶Taylor展开式为____________________.

4.设$f(x)=\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt}\mathrm{d}t$，则$f'(0)=$__________.

5.曲面$\mathrm{e}^z=xy+yz+zx$在点$(1,1,0)$处的切平面方程为____________________.

6.写出曲面$x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$在点$(x_0,y_0,z_0)=(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$处的一个单位法向量：____________________.

7.可微函数$z=f(x,y)$在$(0,0)$点沿$\vec{\mathbf{u}}=(-1,2)$的方向导数$\dfrac{\partial z}{\partial\vec{\mathbf{u}}}(0,0)=0$，沿$\vec{\mathbf{v}}=(3,4)$的方向导数$\dfrac{\partial z}{\partial\vec{\mathbf{v}}}(0,0)=2$，则$\mathrm{grad}f\big|_{(0,0)}=$__________.

8.$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}=$__________.

9.已知$\begin{cases}x=e^v+u^3\\ y=e^u-v^3\end{cases}$将点$(u_0,v_0)=(1,0)$映为$(x_0,y_0)=(2,e)$，则其逆映射$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$在点$(x_0,y_0)=(2,e)$处的Jacobi矩阵的行列式$\det\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x,y)=(2,e)}=$_________.

10.已知函数$f(x,y)$在点$(1,1)$处可微，且$f(1,1)=1,\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2,\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=3.$ 设$g(x)=f(x,f(x,x))$,则$g'(1)=$__________.

二、解答题（请写出详细的解答过程和必要的根据！）

11.(10分)　证明方程$1+xy=\arctan(x+y)$在点$(x_0,y_0)=(-1,1)$的邻域中确定了一个任意次连续可微的隐函数$y=y(x)$，并求$y'(-1)$和$y''(-1)$.

12.(12分)　已知$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$试回答以下问题，并说明理由。

(1)函数$f(x,y)$在原点$(x,y)=(0,0)$处是否连续?

(2)偏导数$f'_x(0,0)$和$f'_y(0,0)$是否存在? 如果存在，求出它们。

(3)函数$f(x,y)$在原点$(x,y)=(0,0)$处是否可微? 如果可微，求出这个微分。

13.(10分)　请用Lagrange乘子法求函数$f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$在曲线$x^2+y^2=1$上的最大值和最小值。

14.(8分)　已知$(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$为某一个函数$f(x,y)$的全微分，求$a,b$的值及$f(x,y)$.

15.(10分)　求函数$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(x+y)$的极值和值域。

16.(15分)　已知$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，$I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-tx^2}}{x^2}\mathrm{d}x$，$t\in[0,+\infty)$.

(1) 证明$f(t,x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-tx^2}}{x^2}, & x\neq0,t\in\mathbb{R}\\ t, & x=0,t\in\mathbb{R}\end{cases}$在$\mathbb{R}^2$上连续。

(2) 证明$I(t)$在$[0,+\infty)$连续。

(3) 证明$I(t)$在$(0,+\infty)$上可导并计算$I'(t)$.

(4) 求$I(t)$，$t\in[0,+\infty)$.

17.(5分)　已知函数$f(x,y)$对每个变量x,y分别连续；且对每个固定的x，函数$f(x,y)$对变量y单调。求证：$f(x,y)$作为二元函数是连续函数。