第一周作业提示

1. 如果按以下做法, 可以不必讨论等号成立的条件.

证明. $n=1$ 时显然成立.
如果 $x_i=0$, 则 $(1+x_i)=1$, 且对任意 j, 都有 $x_ix_j=0$, 而原不等式左右两边变成了

$$(1+x_1)\cdots(1+x_{i-1})(1+x_{i+1})\cdots(1+x_n)\geq 1+x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n,$$

相当于少了一个变量. 所以只需证明以下命题即可: 设 $n\geq 2$, $x_1,\ldots,x_n\in(-1,0)\cup(0,\infty)$, 且 $\forall i,j$, $x_ix_j>0$, 则有

$$(1+x_1)\cdots(1+x_n)>1+x_1+\cdots+x_n.$$

对 n 归纳证明.
当 $n=2$ 时, $(1+x_1)(1+x_2)=1+x_1+x_2+x_1x_2>1+x_1+x_2$.
假设命题对 n 成立. 对 $n+1$, 根据归纳假设, 我们有:

$$\begin{aligned}(1+x_1)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) &> (1+x_1+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\ &= 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+x_{n+1}x_1+\cdots+x_{n+1}x_n\\ &> 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}.\end{aligned}$$

于是原命题得证.
令 $x_1=\cdots=x_n=x$, 则可以得到经典 Bernoulli 不等式. □
如果没有按上述方法, 而是先用归纳法证明了 "$\geq$", 再讨论等号成立的条件, 就需要仔细写清楚, 分类讨论各种情况.

2. (1) 在 Bernoulli 不等式中令 $x=\frac{a-b}{b(k+1)}$, $n=k+1$ 即可.
(2) 第一个不等号, 在第一小问里令 $a=1$, $b=1+\frac{1}{n}$ 即可. 第二个不等号显然. 第三个不等号, 令 $a=1$, $b=\frac{n}{n+1}$, 幂指数取 $k=n+1$ 即可.
注意, 不要使用求导. 只能用已学过的知识进行证明, 否则容易造成循环论证.

3. 归纳证明. $n=1$ 时显然, 假设对 n 成立, 则对 $n+1$, 在给定不等式里令 $a=x_{n+1}$, $b=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 即可完成证明.

4. **注意不要跳步. 按已知的定义和定理进行证明.** 以下是示范:

证明. 必要性:
假设 α 是 A 的上确界. 则 α 是 A 的上界, 所以任意实数 $r>\alpha$ 都是 A 的上界, 特别地, 任意有理数 $q>\alpha$ 也都是 A 的上界.

另外, 根据上确界的定义, α 是 A 的最小上界, 即任意实数 $r<\alpha$ 都不是 A 的上界. 特别地, 任意有理数 $q<\alpha$ 都不是 A 的上界.

充分性:

假设 $\alpha\in\mathbb{R}$ 满足: (1) 任意大于 α 的有理数都是集合 A 的上界; (2) 任意小于 α 的有理数都不是集合 A 的上界.

先证明 α 是 A 的上界. 不然, 存在实数 $a\in A$, 使得 $a>\alpha$. 根据有理数的稠密性, 存在 $q\in\mathbb{Q}$ 使得 $\alpha<q<a$, 故 q 不是 A 的上界, 但这与 (1) 相矛盾! 所以假设不成立, α 是 A 的上界.

再证明 α 是 A 的上确界. 不然, 存在 A 的上界 $u\in\mathbb{R}$, 使得 $u<\alpha$. 根据有理数的稠密性, 存在 $q\in\mathbb{Q}$ 使得 $u<q<\alpha$, 因此 q 也是 A 的上界, 但这与 (2) 相矛盾! 所以假设不成立, α 的确是 A 的上确界. $\square$

5. **请按定义证明.**

注意到

$$\frac{(1+x)^2-1}{x}=2+x.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则对任意 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$, 都有

$$\left|\frac{(1+x)^2-1}{x}-2\right|=|x|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^2-1}{x}=2.$$

6. 与上一题同理. 注意到

$$\frac{(1+x)^m-1}{x}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{m}C_m^k x^k=m+\sum_{k=1}^{m-1}C_m^{k+1}x^k.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取

$$\delta=\min\left\{\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{(m-1)C_m^{k+1}}}:\,k=1,\ldots,m-1\right\},$$

则对 $k=1,\cdots,m-1$, 以及 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$, 都有

$$|C_m^{k+1}x^k|\le\frac{\varepsilon}{m-1},$$

故

$$\left|\frac{(1+x)^m-1}{x}-m\right|\le\sum_{k=1}^{m-1}|C_m^{k-1}x^k|\le\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

(或者用极限的四则运算法则也可以, 因为要求极限的项是一个多项式, 说明每一个单项式的极限后将其累加起来.)

7. 上下同除 $(1+x)^m$, 再利用极限的四则运算法则和上一题的结论. 答案为 m.
?
8. 等式上下同乘 $(1+x)^n$. 答案为 $\frac{m}{n}$.
9. 与上题相同.

10. 任取 $\varepsilon > 0$. 根据有理数的稠密性, 一定存在有理数 q_1, q_2, 使得

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < q_1 < \alpha < q_2 < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

先考虑 $x > 0$ 的情况. 此时 $r \mapsto (1+x)^r$ 严格单调增, 故

$$\frac{(1+x)^{q_1} - 1}{x} < \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} < \frac{(1+x)^{q_2} - 1}{x}.$$

我们已经证明了对任意 $q \in \mathbb{Q}$, 都有

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^q - 1}{x} = q,$$

因此存在 $\delta_1 > 0$, 使得对于任意 $x \in (0, \delta_1)$, 都有

$$\left| \frac{(1+x)^{q_i} - 1}{x} - q_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2,$$

因此

$$-\varepsilon < \frac{(1+x)^{q_1} - 1}{x} - (q_1 + \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} - \alpha < \frac{(1+x)^{q_2} - 1}{x} - (q_2 - \frac{\varepsilon}{2}) < \varepsilon.$$

同理, 考虑 $x < 0$ 的情况时, 根据映射 $r \mapsto (1+x)^r$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的单调减性, 我们可以找到 $\delta_2 > 0$, 使得对任意 $x \in (-\delta_2, 0)$, 都有

$$-\varepsilon < \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} - \alpha < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则对任意 $0 < |x| < \delta$, 都有

$$\left| \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} - \alpha \right| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha.$$

选做题:

证明. 由假设, 存在 $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, 且 $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. 根据定义, $a_0 b_0 \in AB$, 所以 AB 非空.
注意到 $\sup A > 0, \sup B > 0$. 根据确界的刻画, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $a \in A$, $b \in B$ 使得 $a > \sup A - \varepsilon$, $b > \sup B - \varepsilon$. 取 ε 充分小, 使得 $a > 0$, $b > 0$, 则 $ab \in AB$, 且

$$\sup AB \geq ab > (\sup A - \varepsilon)(\sup B - \varepsilon) = \sup A \sup B - \varepsilon(\sup A + \sup B - \varepsilon).$$

由于 $\varepsilon(\sup A \sup B - \varepsilon)$ 可以取任意小, 所以

$$\sup AB \geq \sup A \sup B.$$

另一方面, 对任意 $c \in AB$, 都存在 $a \in A$, $b \in B$, $a > 0$, $b > 0$, 使得 $c \leq ab$, 所以 $c \leq \sup A \sup B$. 由于 c 是在 AB 中任取的, 所以

$$\sup AB \leq \sup A \sup B.$$

综上,

$$\sup AB = \sup A \sup B.$$

□

以上证明使用了如下两个基本事实:
(1) 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $a < \varepsilon$, 则 $a \leq 0$;
(2) 如果 $a \leq b$, $b \leq a$, 那么 $a = b$.
前一条命题告诉大家如何得到一个估计 (不等式); 后一条告诉大家如何从充分的估计中得到一个等式. **这两条是分析学最基础的思想, 可以说微积分里几乎所有概念和想法 (包括大家刚学的极限定义) 都是这两条的延伸和变形.**