HW3

李昊伦 经22-计28 2022011545

2023 年 12 月 10 日

1. 证明. 设

$$f(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x$$

于是有

$$\begin{aligned}f^{'}(r)&=\int_0^{\pi}\frac{2r-2\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{r}\int_0^{\pi}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos x}+1\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

先证明引理:

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

证:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}\\&\text{令}t=\tan\frac{x}{2}\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}2\arctan t}{a-b+\frac{2b}{1+t^2}}\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(a-b)(1+t^2)+2b}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{a-b}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)^2+1}\mathrm{d}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\\&=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\end{aligned}$$

因此由引理可以推出

$$\begin{aligned}f^{'}(r)&=\frac{1}{r}\int_0^{\pi}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos x}+1\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{r}\left(\frac{\pi(r^2-1)}{\sqrt{(1+r^2)^2-4r^2}}+\pi\right)\end{aligned}$$

当 $|r|<1$ 时, $f^{'}(r)=0$, 即 $f(r)$ 在 $(-1,1)$ 内为常数, 由 $f(0)=0$ 可知 $f(r)\equiv 0$, 即

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x=0$$

得证. □

2. (1) 证明. 首先, 证明

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-y} \mathrm{d}y$$

在 $x \in [0, +\infty)$ 上一致收敛: $\int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-y} \mathrm{d}y = x^\alpha \Gamma(a+b+2)$.

因此得证.

并且易知 e^{-xy} 在 $y \in [0, +\infty)$ 单调并且在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上一致有界,

根据 Abel 判别法可知, 该含参积分在 $x \in [0, +\infty)$ 上一致收敛. □

(2) 证明. 首先, 证明

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-xy} \mathrm{d}x$$

在 $y \in [0, +\infty)$ 上一致收敛: $\int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-xy} \mathrm{d}x = y^{\alpha+\beta+1} y^{-\alpha-1} \Gamma(\alpha+1) = y^\beta \Gamma(\alpha+1)$.

并且易知 e^{-y} 在 $x \in [0, +\infty)$ 单调并且在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上一致有界,

根据 Abel 判别法可知, 该含参积分在 $y \in [0, +\infty)$ 上一致收敛. □

3. (1) 解. 当 $x = 0$ 时:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+y^2} \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \quad = \infty$$

该积分不收敛.

当 $x \neq 0$ 时:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+y^2} \mathrm{d}y &= \frac{1}{|x|} \arctan\left(\frac{y}{|x|}\right)\Bigg|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2|x|}\end{aligned}$$

□

(2) 解.

$$\begin{aligned}I(n) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)^n} \mathrm{d}y \\ &= \frac{y}{(x^2+y^2)^n}\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-2ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}} \mathrm{d}y \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}} \mathrm{d}y \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(x^2+y^2)^n} - x^2 \frac{1}{(x^2+y^2)^{n+1}}\right] \mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此有 $2nx^2 I(n+1) = (2n-1) I(n)$, 即 $\frac{I(n+1)}{I(n)} = \frac{2n-1}{2nx^2}$.

由(1)又有 $I(1) = \frac{\pi}{2|x|}$, 因此得

$$I(n) = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{|x|^{2n-1}}$$

□

(3) 证明.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n} \mathrm{d}y &= \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^n} \mathrm{d}\frac{y}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{n} \frac{\pi}{2} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{1}{|1|^{2n-1}} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \sqrt{n}\end{aligned}$$

□

(4) 证明.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\frac{y^2}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} -n\left(\frac{y^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= -y^2\end{aligned}$$

因此得证. □

(5) 证明.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}\mathrm{d}y\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

□

4. 证明. (1)

$$\begin{aligned}F^{'}(y) &= \int_0^{+\infty}e^{-x^2}(-\sin(2xy))2x\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\sin(2xy)\mathrm{d}e^{-x^2}\\ &= \sin(2xy)e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)2y\mathrm{d}x\\ &= -2yF(y)\end{aligned}$$

又根据 Guass 积分知, $F(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

因此解微分方程得

$$F(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$$

(2) 设

$$G(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin(2xy)\mathrm{d}x$$

则有

$$\begin{aligned}G^{'}(y) &= \int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)2x\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}-\cos(2xy)\mathrm{d}e^{-x^2}\\ &= -\cos(2xy)e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin(2xy)2y\mathrm{d}x\\ &= 1-2yG(y)\end{aligned}$$

又有 $G(0)=0$, 解微分方程得

$$G(y)=e^{-y^2}\int_0^y e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

□

5. (1) 解.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b e^{-xy}\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b \frac{1}{y}\mathrm{d}y\\ &= \ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

□

(2) 解.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}xy &= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}\int_a^b \sin(xy)\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{xy}\mathrm{d}(xy)\\ &= \int_a^b \frac{\pi}{2}\mathrm{d}y\\ &= \frac{\pi}{2}(b-a)\end{aligned}$$

□