第10讲 关系闭包（2）

计算机系 黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

课前思考？

- 关系性质：自反、非自反、对称、反对称、传递

- 任意一个关系是否具有以上性质呢?

- 要使得某个关系具有某个性质，怎么办呢?

10.5 关系的闭包(closure)

- 希望已有的关系具有某些特殊的性质（如**自反、对称、传递**等）
- 有些关系原本不具备这些性质，但可以通过对原关系加以扩充，使之满足这些性质。
- 希望扩充的部分**尽量小**，即增加的有序对**尽量少**，便形成了闭包的概念。

10.5 关系的闭包(closure)

定义10.5.1 多个关系的合成

设 R 为 A上的关系，$n \in N$,

关系 R 的 n 次幂定义为:

（1） $R^0 = \{< x, x > | x \in A\} = I_A$

（2）$R^{n+1} = R^n \circ R \qquad (n \geq 0)$

思考：能否定义为右递归的形式？

10.5.1 多个关系的合成举例

- 例 $A = \{a, b, c, d\}$

$R^0 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

$R^1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$

$R^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$

$R^4 = R^3 \circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\} = R^2$

对于此例

$$R^2 = R^4 = R^6 = \cdots, \quad R^3 = R^5 = R^7 = \cdots,$$

是否具有普遍规律？

有限观察 → 普遍规律

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.1 有限集合上只有有限个不同的二元关系

设A是有限集合，|A| = n，R是A上的关系，则存在不相等的自然数s和t，使得 $R^s = R^t$ 。

思考：有限集合A上不同的关系有多少种？

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.2 有限集合上关系的合成

设 A是有限集合，R 是 A上的关系，

m 和 n 是非零自然数，

（1）$R^m \circ R^n = R^{m+n}$

（2）$(R^m)^n = R^{mn}$

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.3　**有限集合上关系的幂序列具有周期性** 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t，使得 $R^s=R^t$ ，则

（1）$R^{s+k}=R^{t+k}$， 其中任意 $k \in N$；

（2）$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$， 其中任意 $k, i \in N$

$$p = t - s$$

（3）令$B=\{R^0,R^1 \ldots R^{t-1}\}$，则$R$的各次幂均为$B$的元素，即对任意的 $q \in N$，有 $R^q \in B$

- 对于前面的例题中的关系R，
- 对应 $s = 2$, $t = 4$,
- $B=\{ R^0, R^1, R^2, R^3 \}$,
- R的幂中不相同的只有以上4种。

10.5 关系的闭包(closure)

定义10.5.2　闭包的定义

设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）；

（2）$R \subseteq R'$；

（3）对A上任何自反的（对称的或传递的）关系R''，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$。

则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

自反闭包$r(R)$：

具有自反性的包含R的“最小超集合”

对称闭包$s(R)$：

具有对称性的包含R的“最小超集合”

传递闭包$t(R)$：

具有传递性的包含R的“最小超集合”

最小的含义：具有同样性质的，包含R的其它R'都是闭包的子集

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.4 **闭包的性质 1**

对非空集合A上的关系R，

（1）R是自反的 $\Leftrightarrow r(R) = R$ ；

（2）R是对称的 $\Leftrightarrow s(R) = R$ ；

（3）R是传递的 $\Leftrightarrow t(R) = R$ 。

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.5 **闭包的性质2**

对非空集合A上的关系R_1, R_2, 若 $R_1 \subseteq R_2$ 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.6 闭包的性质3

对非空集合A上的关系 R_1，R_2,

（1）$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

（2）$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

（3）$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

为什么(3)是子集关系？

集合并运算对关系性质的保持？

证明：$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.7　自反闭包的构造方法

对非空集合A上的关系R，

$$r(R) = R \cup R^0$$

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.8 对称闭包的构造方法

对非空集合A上的关系R，

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.9 传递闭包的构造方法

对非空集合A上的关系R，

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \ \ldots$$

证明思路：

1）先证明右边有传递性； $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \ \ldots$

2) 证明互为子集： $R \cup R^2 \cup R^3 \ \ldots \subseteq t(R)$

证明过程

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.11 闭包同时具有的多种性质1 **(交叉性质)**

对非空集合A上的关系R，

（1）若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$是自反的；

（2）若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$是对称的；

（3）若R是传递的，则$r(R)$是传递的。

补充1： R对称，则R^n对称

证明：若R对称，则$r(R)$和$t(R)$ 对称

- 若 R对称，则R^n对称

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.12 闭包同时具有的多种性质2 (交叉性质)

对非空集合A上的关系R，

（1）$rs(R) = sr(R)$

（2）$rt(R) = tr(R)$

（3）$st(R) \subseteq ts(R)$ 为什么三项中只有这个子集?

其中 $rs(R) = r(s(R))$ ，其它类似。

补充1：R对称，则R^n对称

补充2：$st(R)$不一定传递

重点分析： $st(R) \subseteq ts(R)$

- $R \subseteq s(R)$
- $t(R) \subseteq ts(R)$
- $st(R) \subseteq sts(R)$
- $sts(R) = ts(R)$

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.10 传递闭包的有限构造方法

A为非空有限集合，$|A| = n$，R为A上的关系，则存在正整数 $k \leq n$，使得

$$t(R) = R^{+} = R \cup R^{2} \cup \ldots \cup R^{\mathrm{k}}$$

Warshall算法

证明思路

$$< x, y > \in R^p$$

$$\underbrace{x_0 = x, x_1, \cdots, x_{t-1}, x_t}_{< x, x_t > \in R^t}, x_{t+1} \cdots, \underbrace{x_q, x_{q+1} \cdots, x_p = y}_{< x_q, x_p = y > \in R^{p-q}}$$

$$x_t = x_q, q > t$$

$$< x, y > \in R^{p-q+t}$$

具体证明过程

Warshall 算法

— 计算有限集合上关系的传递闭包

的一种有效算法

令B[j, i]表示矩阵B第j行第i列的元素，

（1） 令矩阵B = M(R);

（2） 令 i =1， n = $|A|$ ； **外循环对列进行**

（3） *for* j =1 *to* n

if B[j, i]=1 *then*

for k=1 *to* n

B[j, k]=B[j, k] ∨B[i, k]

将第i行的元素加到第j行上（逻辑加）

（4） i=i+1;

（5） *if* i≤n *then go to* (3)

else stop 且 M (R^+) = B

对角线不用计算

1	1	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0

B[1,2]

更新第1行

1	1	0	1
0	0	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0

B[4,2]

更新第4行

1	1	0	1
0	0	0	1
0	0	0	0
0	1	0	1

更新第1行

B[1,4]

1	1	0	1
0	0	0	1
0	0	0	0
0	1	0	1

更新第2行

B[2,4]

1	1	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0
0	1	0	1

再思考...

- 为什么这个算法得到了传递闭包呢?

闭包的计算方法

- 自反闭包
- 对称闭包
- 传递闭包

10.5 关系的闭包(closure)

- 传递闭包的应用举例

闭包在语法分析中的应用举例

设有一字母表V=(A,B,C,D,e,d,f)，并给定下面六条规则：

$A \rightarrow Af$ $B \rightarrow Dde$ $C \rightarrow e$

$A \rightarrow B$ $B \rightarrow De$ $D \rightarrow Bf$

R为定义在V上的二元关系且$x_i R x_j$，表示从x_i出发用一条规则推出一串字符，使其第一个字符恰为x_j。

请问：连续应用上述规则可能推出的字符串首字母。

闭包在语法分析中的应用举例

解：**R**的关系矩阵为：

$$
M_R=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & e & d & f \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

则 $\mathbf{x_i}\ \mathbf{R^+}\ \mathbf{x_j}$ 表示从 $\mathbf{x_i}$ 出发，经过多次连续推导而得到的字符串，其第一个字符恰为 $\mathbf{x_j}$ 的关系，该关系可通过计算$\mathbf{M_R}^+$得到。

$$
\mathbf{M_R}^+ = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{e} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

因此

R^+={〈A,A〉，〈A,B〉，〈A,D〉，〈B,B〉，〈B,D〉，〈C,e〉，〈D,B〉 〈D,D〉}

这说明，应用给定的六条规则，

从*A*出发推导的首字符有**A, B, D**三种可能，

从*B*出发推导的首字符有**B, D**两种可能，等等。

Takeaway & 再思考

- **闭包是什么**：满足性质的、包含R的最小的那个关系
- **闭包有什么性质**：集合运算下的性质，交叉闭包下的性质
- **闭包如何得到**：自反、对称、传递（warshall算法）
  - 从理论到实际算法
- **闭包有什么用?**
  - 语言生成的实例