第三次习题课题目：Taylor 公式、极值问题

第一部分 Taylor 公式

1. 将函数 $\ln(1+x+y+z)$ 在点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 分别展开成带二阶 Peano 余项的泰勒展式和带有一阶 Lagrange 余项的 Taylor 展式。

2. 将函数 $\arctan\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$ 在点 $(x,y)=(0,0)$ 分别展开成带二阶 Peano 余项的泰勒展式和带有一阶 Lagrange 余项的 Taylor 展式。

3. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为凸的有界闭区域，$f(x,y)\in C^1(D)$. 试证：$f(x,y)$ 在区域 D 上满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L>0,\ s.t.\ \forall P_1,P_2\in D$，有 $|f(P_2)-f(P_1)|\le L\|P_2-P_1\|$（两点之间的距离）。

4. 设 $f(x,y)\in C^2$. 证明：$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2h,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0).$

5. 设 $a,b>0$，求（依赖于 a,b 的）常数 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 使当 $h\to 0$ 时，

$$\lim_{h\to 0}\frac{A_1u(x+ah,y)+A_2u(x_0-ah,y)+A_3u(x,y+bh)+A_4u(x,y-bh)-A_5u(x,y)}{h^2}=u_{11}(x,y)+u_{22}(x,y).$$

6. 求 $z=x^y$ 在点 $(1,0)$ 处的 4 阶 Taylor 多项式，以及 $z^{(2,2)}(1,0)$，并估计 $1.1^{0.2}$ 的值.

第二部分 极值与最值

7. 三个村庄 A,B,C，发生火灾的概率各为 $\dfrac{1}{3}$，且几乎不可能有两个或更多的村庄同时出现火灾。现在要建一个消防站，问消防站选址哪里最合理？

一些相关讨论话题：

(1) 找一个点到三角形三个顶点距离之和最小，这个问题是 Fermat 于 1643 年写给 Torrichelli 的信中提到的一个问题。

(2) 两个村子或 4 个村子，情况如何？一般的 n 个村子呢？

(3) 如何建立一个总长度最短的道路网络使得 4 个村子中任何两个村子都可以通过这个路网相连接？

(4) 如果这些村子发生火灾的概率不同，结论如何？

(5) 如果是要建一所垃圾处理站供几个村子处理日常垃圾，已知每个村子日产垃圾量，单位质量垃圾处理的费用以及清运单位质量垃圾的运输费用，清运垃圾的车辆的最大载荷量，问垃圾处理站应该建在哪里？再考虑居民对垃圾站选址与自身距离的敏感度以及相关费用的承受能力，垃圾处理站应该建在哪里？

8. 求半径为1的圆的内接凸n边形的最大面积。

9. 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 在全平面上除原点之外处处满足 $xf_x + yf_y > 0$. 证明：原点是 $f(x,y)$ 的唯一最小值点，并且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

10. 设二元函数 f 在全平面上处处可微，且满足条件

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty. \qquad (*)$$

试证：对于任意给定的向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，均存在一点 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\mathrm{grad}\, f(\xi,\eta) = (a,b)$.

11. 若 $f''_{xy}(x,y) = 2(y+1)\mathrm{e}^x$， $f'_x(x,0) = (x+1)\mathrm{e}^x$， $f(0,y) = y^2+2y$. 求 $f(x,y)$ 的值域。

12. 设 u 在在开圆盘 $D = \left\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\right\}$ 内二阶连续可微，闭圆盘 $\bar{D}$ 上连续，且满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$. 若在圆盘边界 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\right\}$ 上，$u(x,y)\ge 0$，证明：当 $x^2+y^2\le 1$ 时， $u(x,y)\ge 0$.

13. 设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$. 若 $f(x,y)$ 在任意一点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 处的 Hesse 矩阵均是正定的，则 $f(x,y)$ 至多有一个驻点。