第四次习题课讨论题目

1. 第 7、8 次作业题目选讲.
2. 在一个地区进行某种疾病筛查，为此要检验每个人的血液，如果当地有 N 个人，逐个检验就需要验血 N 次. 假设每个人呈阳性的概率为 p 且检验结果相互独立. 问：是否有办法减少检验工作量？请具体计算当 $p=0.05$，$N=1000$ 时你的方法的平均检验次数.
3. 假设 X 是随机变量，其期望为 μ，方差为，$Y=g(X)$（函数 g 足够好）.
   （1） 给出 $E(Y)$ 的近似（一阶、二阶）.
   （2） 给出 $Var(Y)$ 的近似.
   （3） 当 $g(x)=e^x$ 时，给出（1）（2）的具体计算结果.
   （4） 这些近似可以推广至多个随机变量的函数情形吗？
4. *设有 n 种不同的明星卡，一个人在收集这些卡，每次得到一张，目标是得到一套完整的明星卡. 假设在收集时卡片的种类是随机的，而且每次收集到 n 种类型中的任意一种的概率相同.
   （1） 求当这个人收集到全套明星卡时所需收集卡片总数的期望值.
   （2） 当 n 越来越大时，期望值的变化趋势如何？结果是否与生活经验相符？
5. （Monte Carlo 方法）
   （1） 考虑积分 $I(g)=\int_0^1 g(x)dx$. 假设 X_i（$i=1,\cdots,n$）独立且服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，定义 $\hat{I}(g)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$，请尝试说明 $\hat{I}(g)$ 可以用来近似计算积分 $I(g)$.
   （2） 取 $g(x)$ 为标准正态的密度函数，利用（1）中方法近似计算积分 $I(g)$，并将结果与直接通过查正态分布表计算所得结果相比较.
   （3） 假设 X_i（$i=1,\cdots,n$）是 $[0,1]$ 上的独立同分布随机变量，其分布密度函数为 $h(x)$，定义 $\hat{I}_1(g)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g(X_i)}{h(X_i)}$，计算 $\hat{I}_1(g)$ 的期望与方差. 如果方差有限，$\hat{I}_1(g)$ 是否可以用来近似计算积分 $I(g)$？
   （4） *通过选择非均匀分布 h，能够提高估计的精度吗？（提示：比较方差）
   （5） 能否给出（4）中结果的一个应用思路？