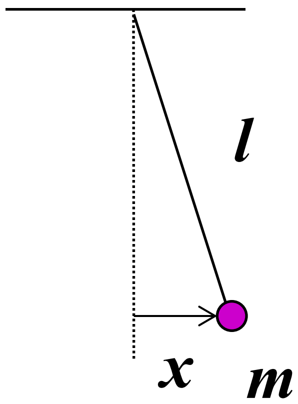
大学物理 B(1)

清华大学物理系

§ 6.10 相图



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

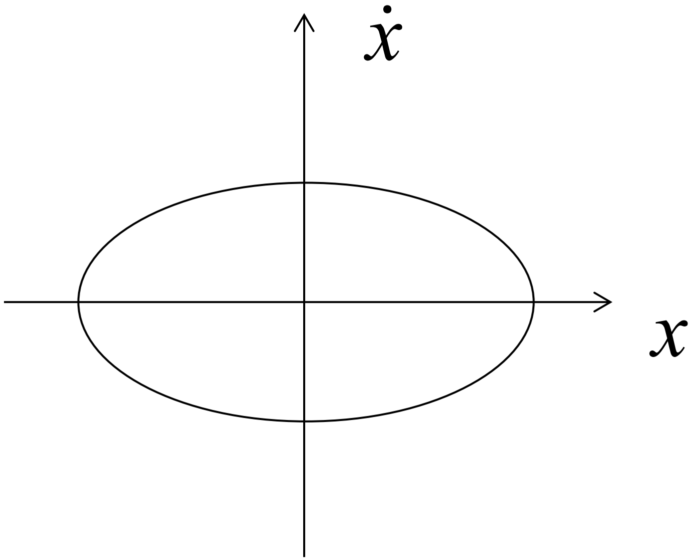
$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{\omega^2} = A^2$$



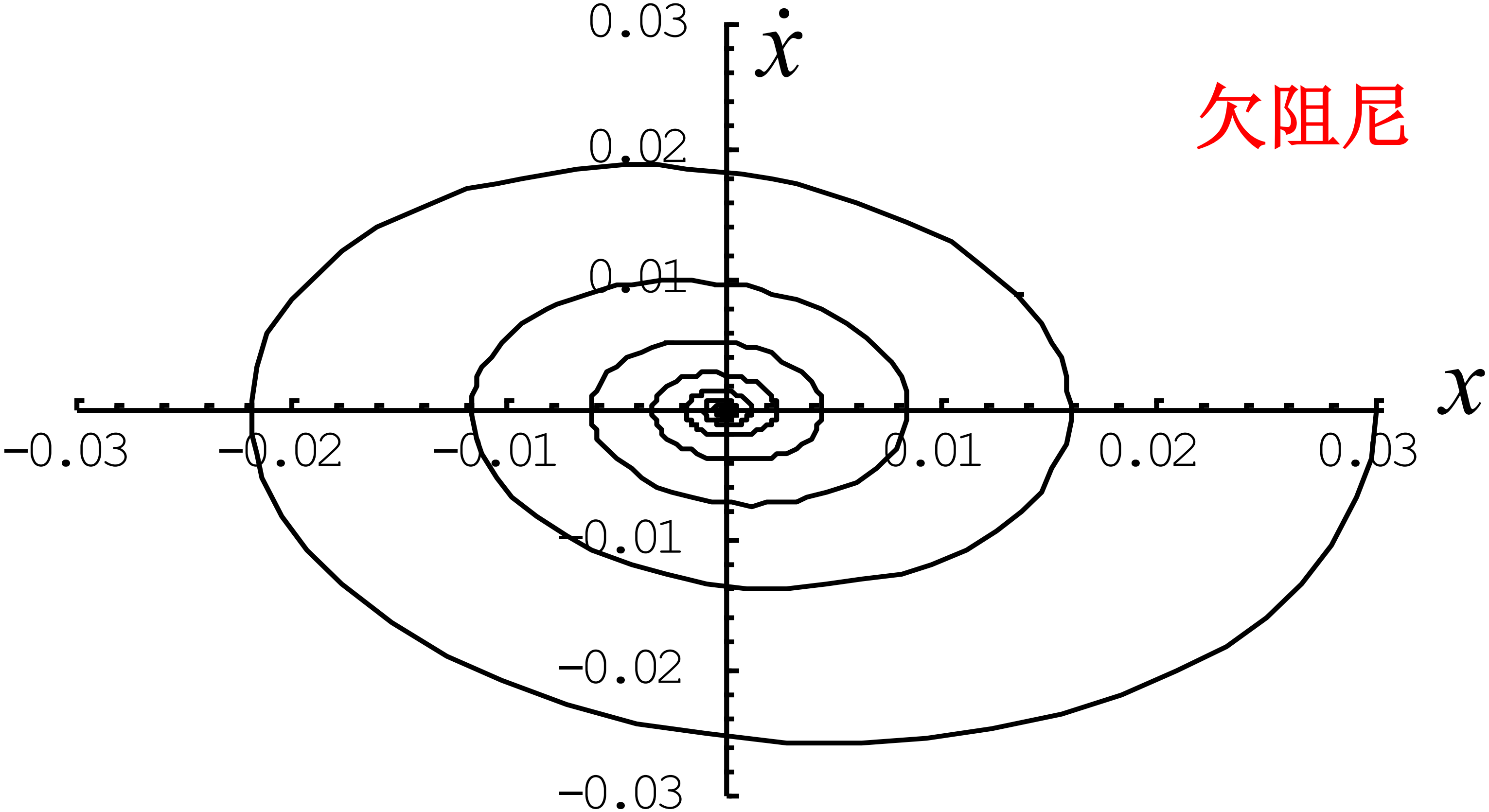
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\omega^2 x} \qquad \omega^2 x^2 + y^2 = c$$

简谐振动相图

阻尼振动

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

$$x\big|_{t=0}=0.03,\qquad \dot{x}\big|_{t=0}=0,\qquad \beta=0.1,\quad \omega_0=1$$



欠阻尼

临界阻尼或过阻尼?

受迫振动 $$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x = f\cos\omega t$$

系统最终按 ω 频率振动

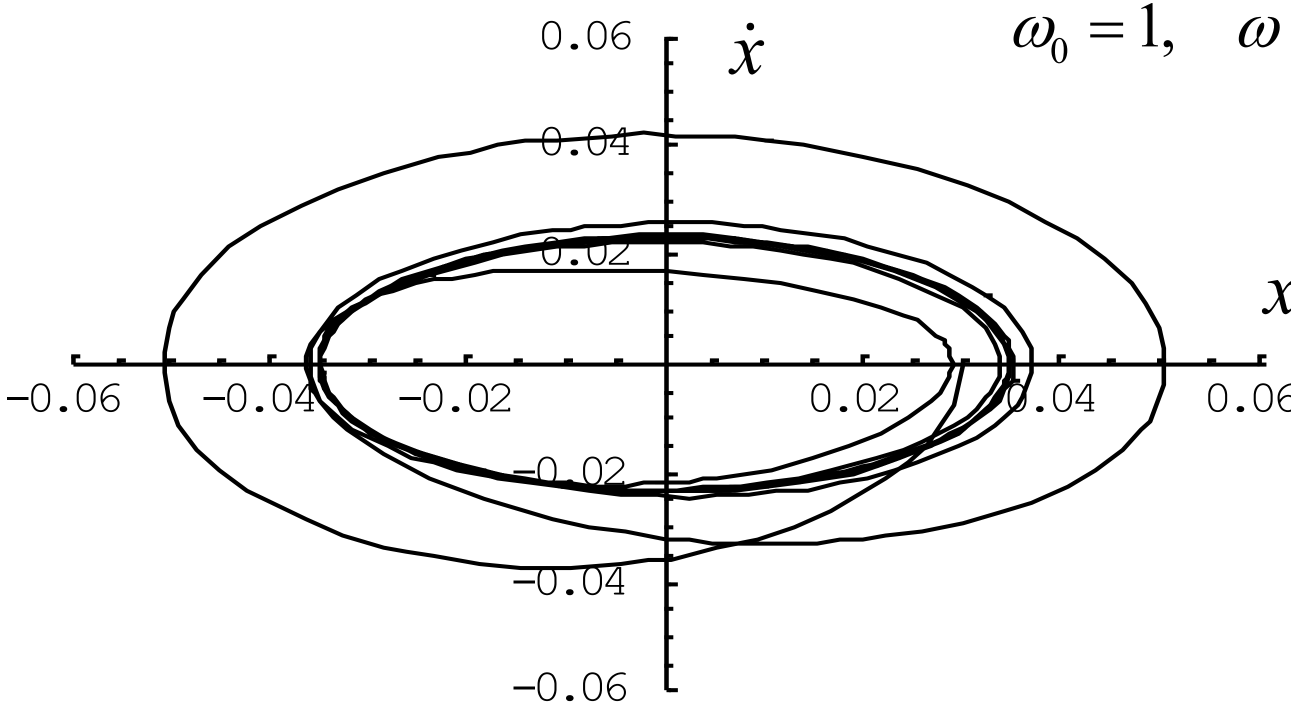
$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\dot{x} = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$x|_{t=0}=0.03,\quad \dot{x}|_{t=0}=0,$

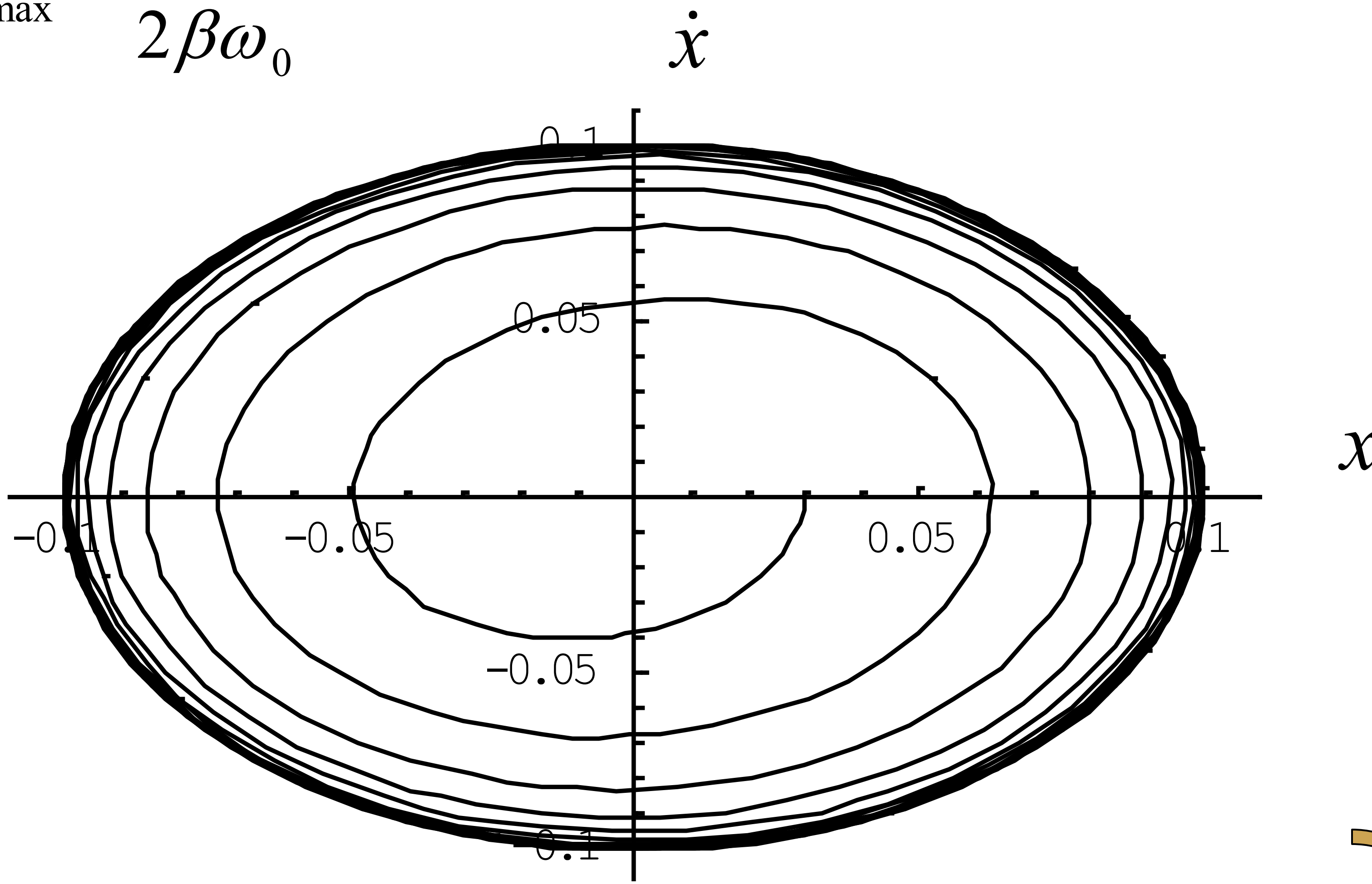
$\beta=0.1,\quad f=0.02,$

$\omega_0=1,\quad \omega=0.666,$



$\omega \approx \omega_0 = 1$ 时产生共振　　　系统对外界响应最大

$$x_{\max} \approx \frac{f}{2\beta\omega_0}$$



§6.11 *非线性振动及混沌

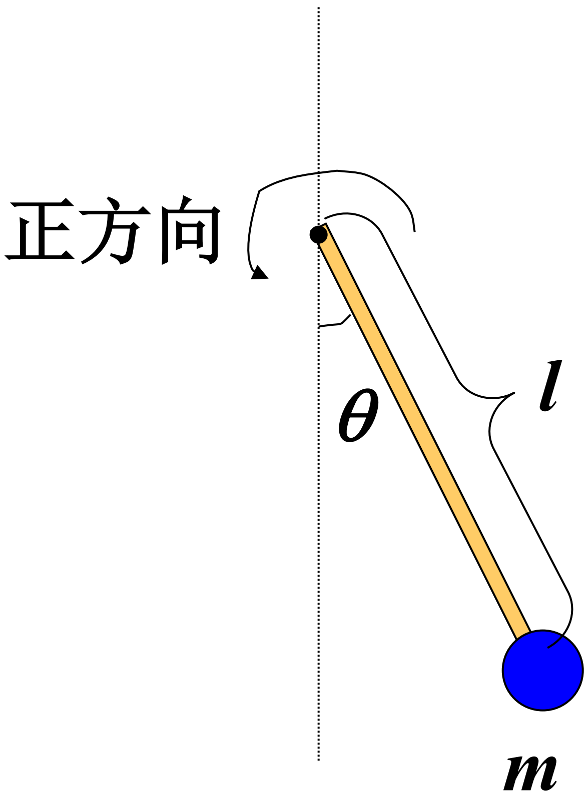
Poincaré 1892 三体问题 发现混沌

E.N.Lorenz 1963 天气模型 数值计算

M.J.Lighthill （噪声）**1986:**

We collectively wish to apologize for having misled the general public by spreading ideas about the determinism of systems satisfying Newton’s law of motion that, after 1960, were proven to be incorrect……

最简单的非线性振子：轻杆儿一端为轴
另一端连一质点



$$\tau_g + \tau_f + \tau_{ext} = I\ddot{\theta}$$

$$\tau_g = -mgl\sin\theta$$

$$\because f_r \propto \upsilon$$

$$\therefore \tau_f = -2\beta\dot{\theta}$$

$$\tau_{ext} = \tau_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{\theta}+2\alpha\dot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=f\cos\omega t$$

$\boldsymbol{\theta}$很小, sin($\boldsymbol{\theta}$) → $\boldsymbol{\theta}$, 线性, 否则非线性

$$\ddot{\theta}+2\alpha\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=f\cos\omega t$$

$$\theta=\theta(t)$$

$$\theta\,|_{t=0}=\xi \qquad \dot{\theta}\,|_{t=0}=\eta$$

令 $\xi\to\xi+\delta\xi$ 或 $\eta\to\eta+\delta\eta$

经过有限时间 $\theta=\theta(t)+\delta\theta$

$\delta\xi\to 0$时 $\delta\theta\to 0$ 解稳定

$\delta\eta\to 0$

经典力学
可预测性

θ不小

$$\ddot{\theta}+2\alpha\dot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=f\cos\omega t$$

$$\theta\,|_{t=0}=\xi \qquad \dot{\theta}\,|_{t=0}=\eta$$

$$\theta=\theta(t)$$

令 $\xi\to\xi+\delta\xi$ 或 $\eta\to\eta+\delta\eta$

经过有限时间 $\theta=\theta(t)+\delta\theta$

在有些条件下 (f大)

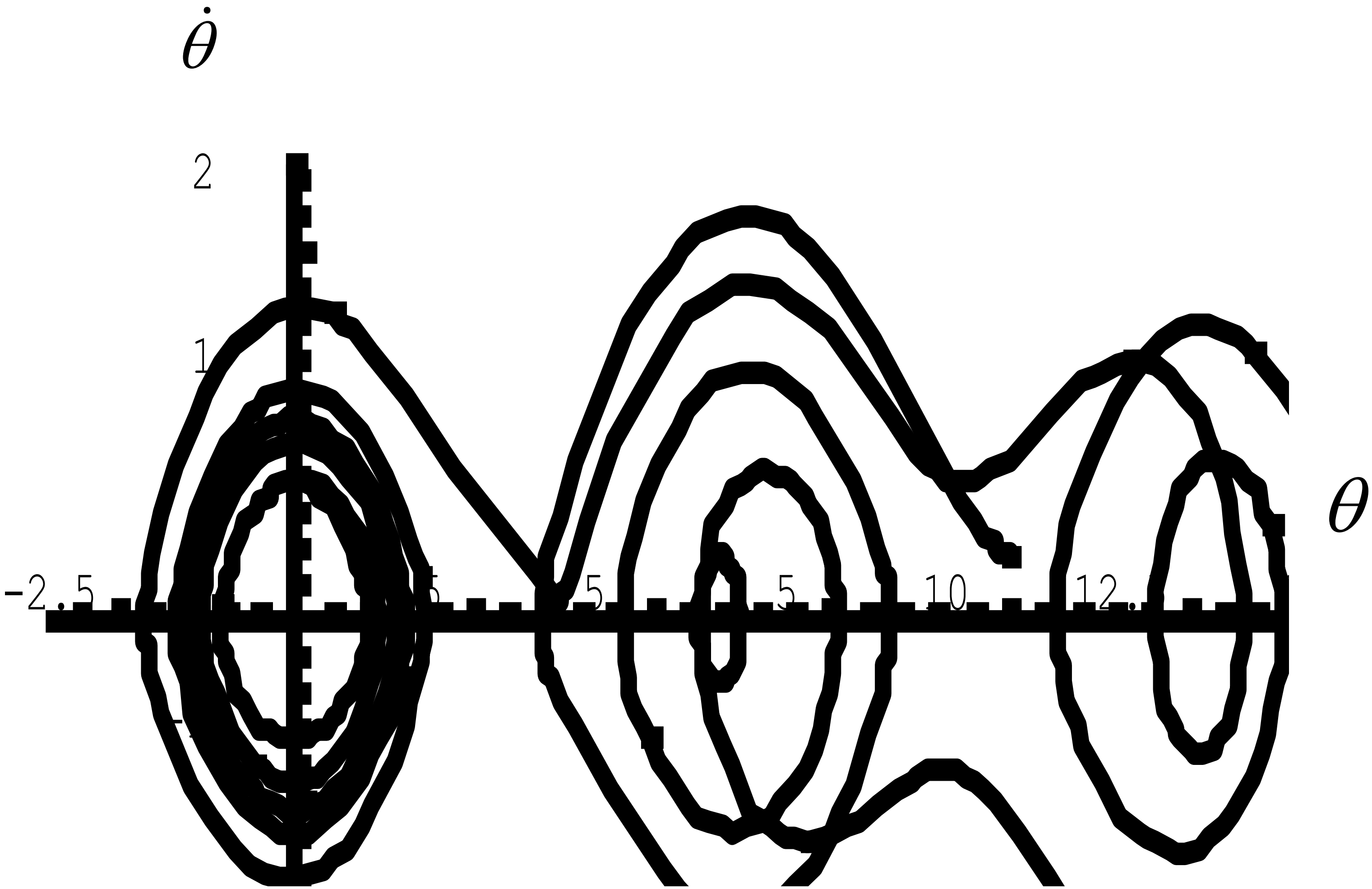
$\delta\xi\to 0$时 $\delta\theta \not\to 0$ 解不稳定

$\delta\eta\to 0$

初值敏感，混沌

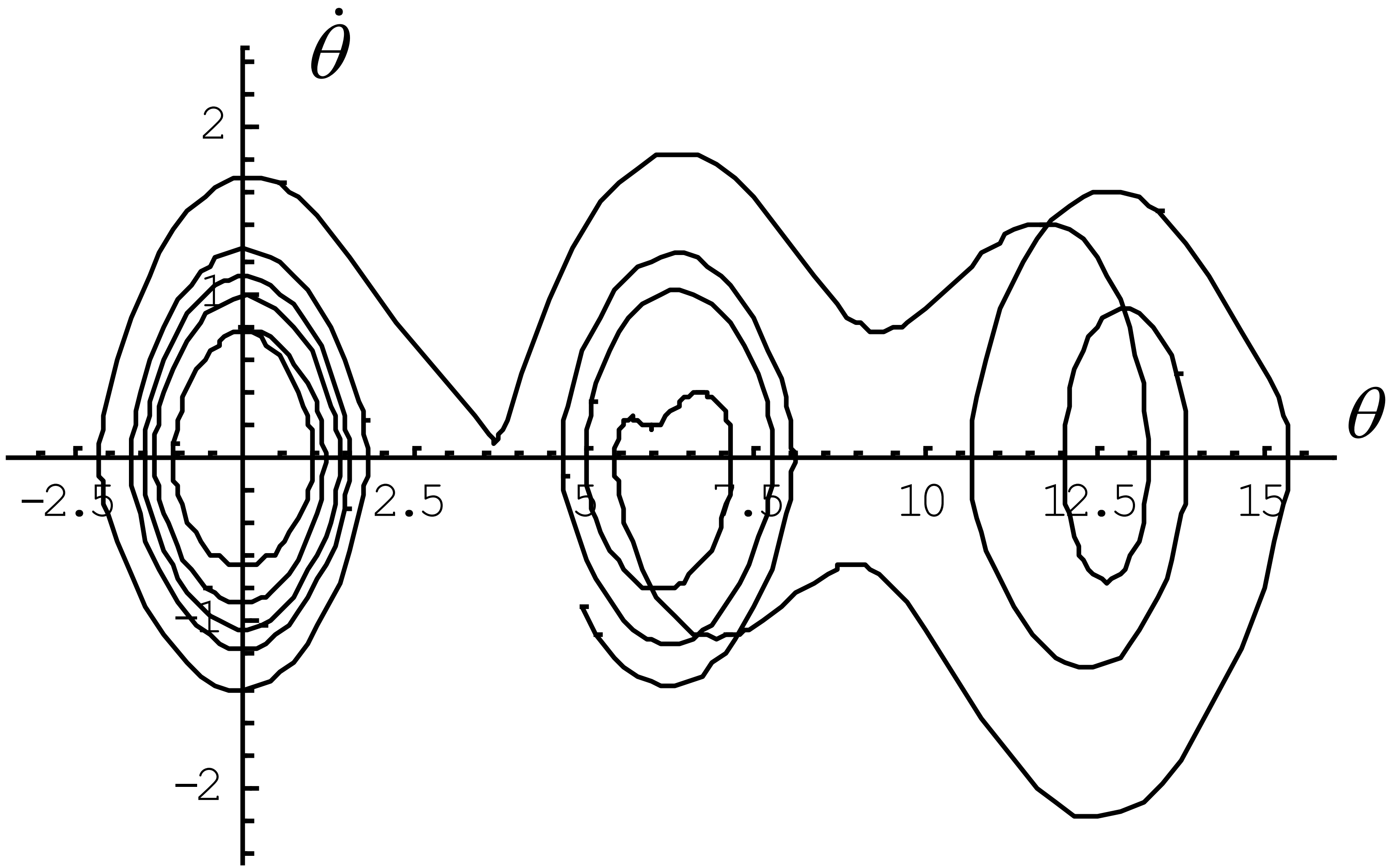
$\theta|_{t=0} = -0.0885 \qquad \dot{\theta}|_{t=0} = 0.8 \qquad \alpha = 0.1$

$f = 0.52 \qquad \omega = 0.666$



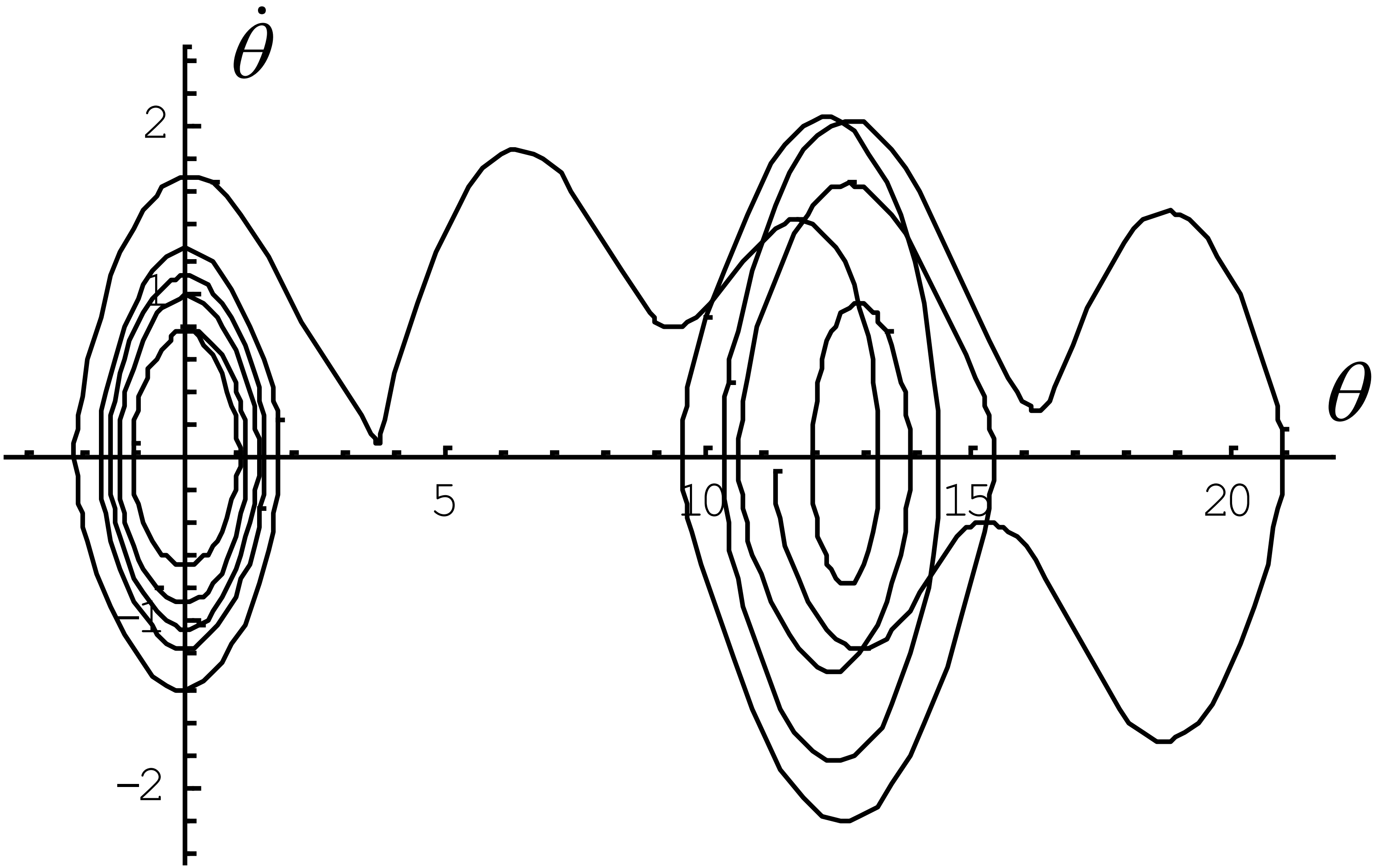
$$\theta\big|_{t=0} = -0.0886 \qquad \dot{\theta}\big|_{t=0} = 0.8 \qquad \alpha = 0.1$$

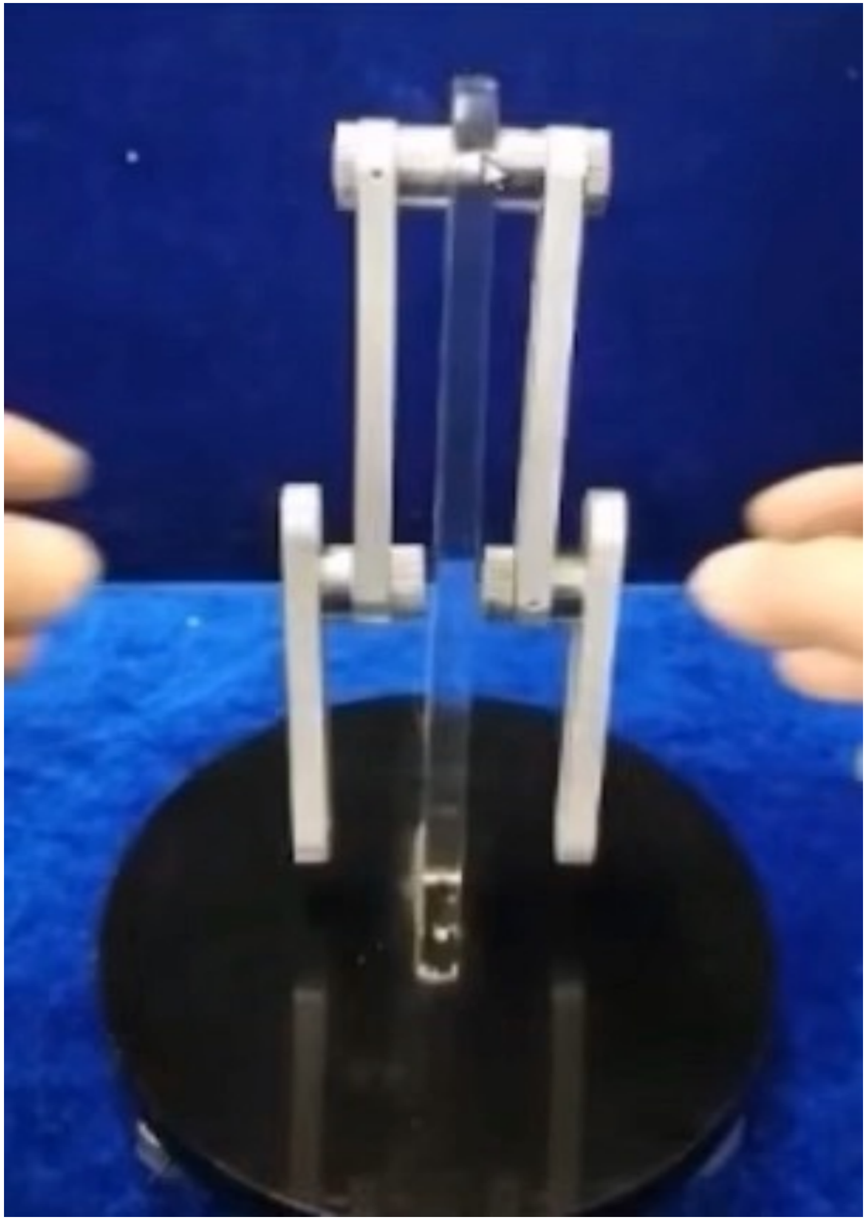
$$f = 0.52 \qquad \omega = 0.666$$



$$\theta\,\big|_{t=0} = -0.0887 \qquad \dot{\theta}\,\big|_{t=0} = 0.8 \qquad \alpha = 0.1$$

$$f = 0.52 \qquad \omega = 0.666$$





第七章 波动（Wave）

§ 7.1 机械波的形成和特征

一. 机械波的形成

机械振动为什么会传播?

机械振动在媒质中传播

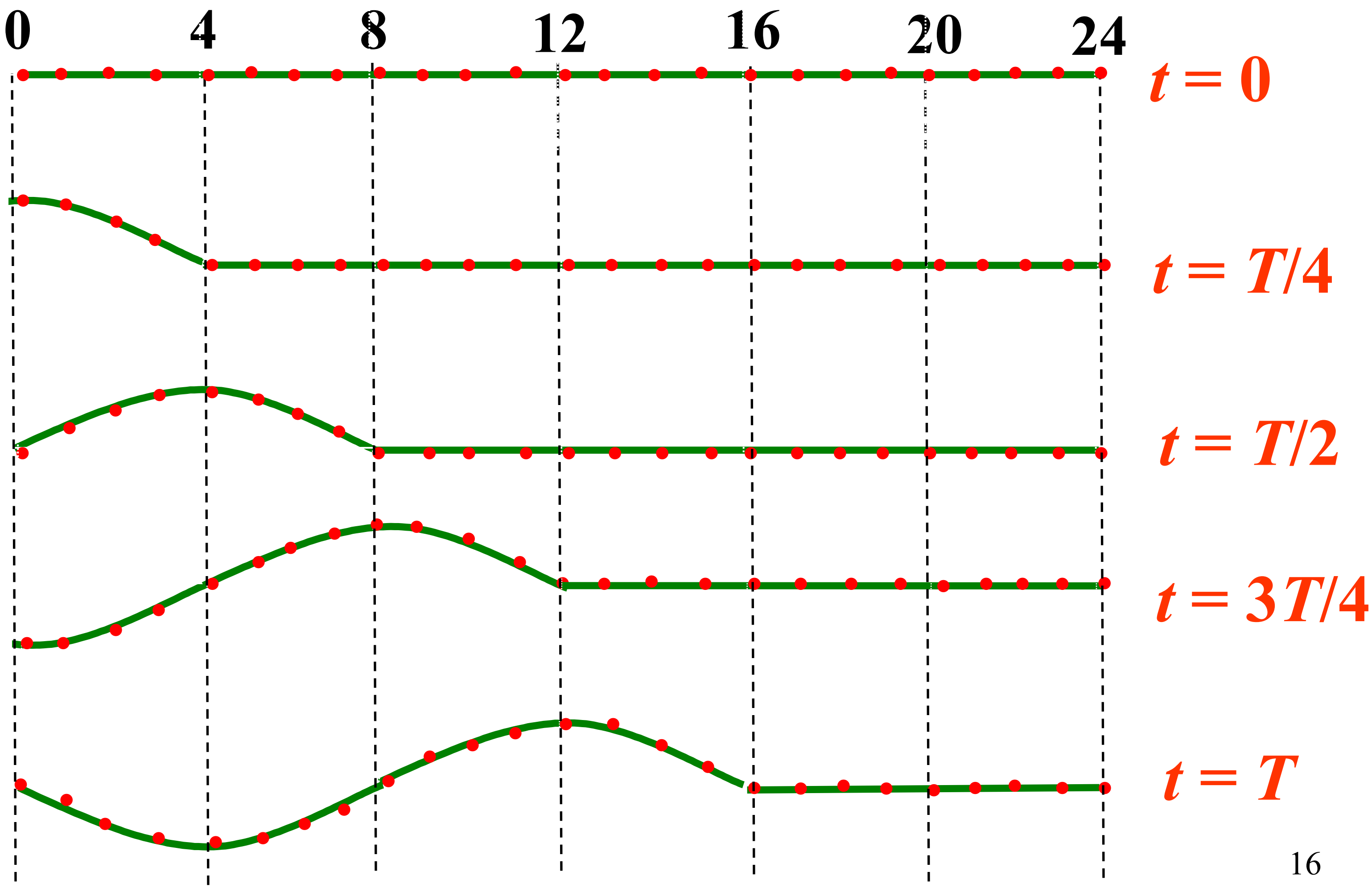
物质的特性: 弹性

一质元振动，邻近的质元倾向于使其恢复原状

于是振动传播-----波动，质元本身不传播。

“上游”的质元依次带动“下游”的质元振动

—机械波（mechanical wave）



新模型 ---- 弹性介质模型 (弹性波)

质点，质点系，流体，刚体，弹性介质

物体可以是气体、液体、固体

1. 处于平衡时质点（元）之间力平衡
2. 介质可以产生形变（拉伸、涨缩、扭曲等）
3. 形变使质元的位置相对变化，而质元之间的弹性力倾向于使质元回到平衡位置

形成机械波的条件 $\begin{cases} \text{波源，振源} \\ \text{弹性媒质（介质）} \end{cases}$

二.波的几何描述

波线（wave line）——

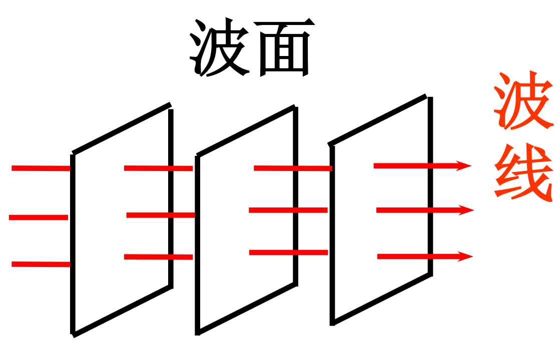
表示波的传播方向的射线（波射线）

波面（wave surface）——

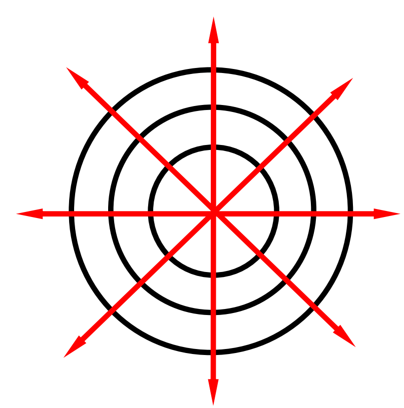
相位相同的点组成的面（同相面）

波阵面（wave front）——

波传播时最前面的波面（波前）



平面波



球面波

三.波的分类

按波的性质
- 机械波（ mechanical wave ）
- 电磁波（electromagnetic wave ）
- 物质波（matter wave)
- 引力波（gravitational wave)

按波线与振动方向关系
- 横波（transverse wave ）
- 纵波（longitudinal wave ）

水表面波：水表面的波

既非横波又非纵波。

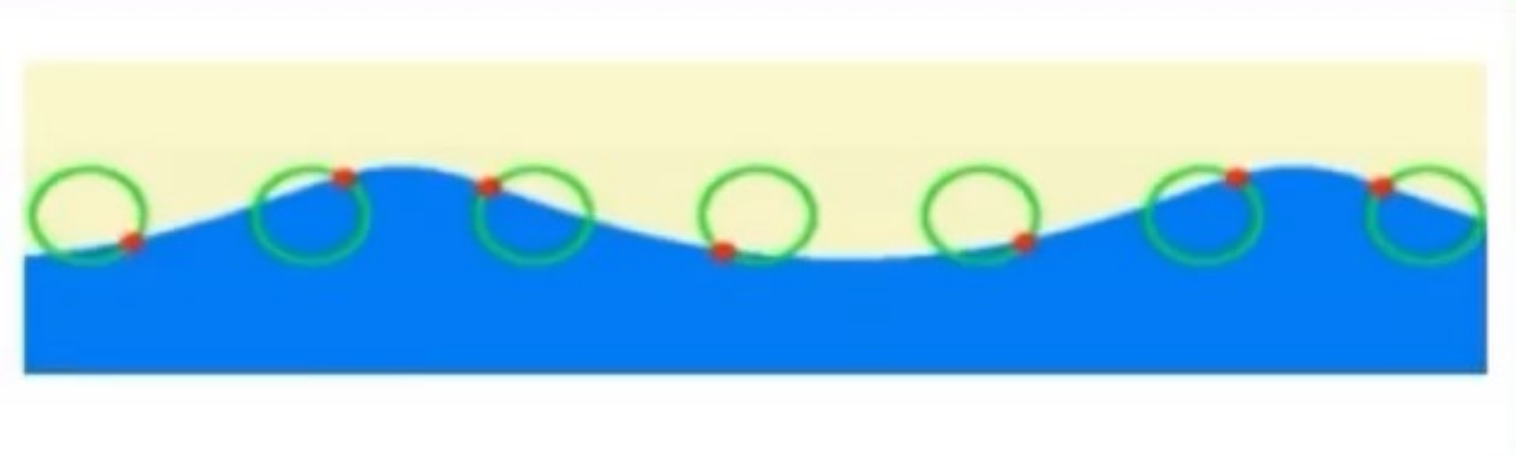
水的流动性和不可压缩性

水波中水质元作二维运动

纵向运动

横向运动

作圆运动



按波面形状
- 平面波（plane wave）
- 球面波（spherical wave）
- 柱面波（ cylindrical wave）

按复杂程度
- 简谐波（simple harmonic wave）
- 复波（ compound wave）

按持续时间
- 连续波（continued wave）
- 脉冲波（pulsating wave）

按波形是否传播
- 行波（ travelling wave）
- 驻波（standing wave）

⋮

§ 7.2 行波，简谐波

一. 行波（ travelling wave ）

相对驻波而言，“行”，行走之意。

设 ξ 为振动的物理量，它沿 x 轴传播

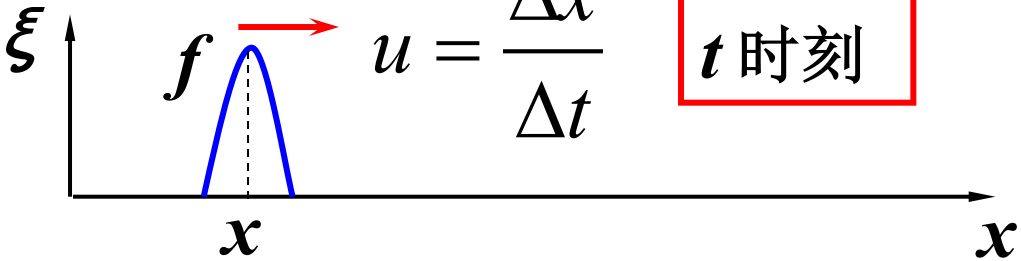
波速 u： 振动状态传播的速度

它由媒质的性质决定与波源情况无关。

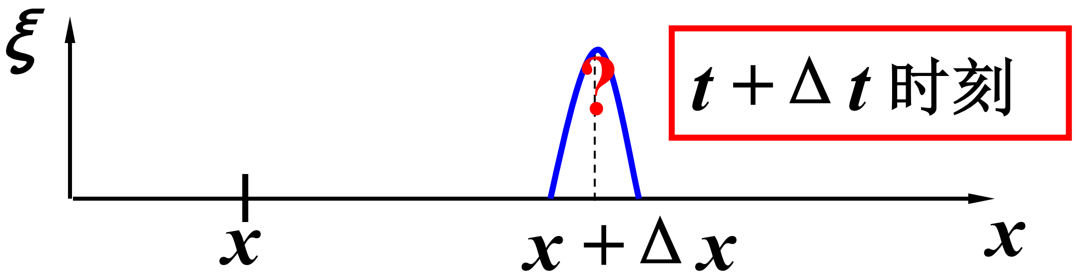
$$\xi = f\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

为沿 $+x$ 向传播的行波，u 为波速

为什么？



$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$



$$f\left(t+\Delta t-\frac{x+\Delta x}{u}\right)\;\overset{}{\underset{\Delta x=u\Delta t}{=\!=\!=\!=}}\;f\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

即 $\quad \xi(x+\Delta x,\ \ t+\Delta t)=\xi(x,\ \ t)$

$\therefore \quad \xi=f\left(t-\dfrac{x}{u}\right)$ 具有沿+x向传播的性质。

同理，$\xi = f(t+\frac{x}{u})$ 具有沿**-*x***向传播的性质。

$\xi(x,\ t)$ 的函数形式称为波函数，

是波传播时媒质质元的运动函数。

$$\xi(x,t) = f(t \pm \frac{x}{u})$$

称为行波的波函数。

二. 简谐波（simple harmonic wave）

如果波传播的扰动是简谐振动

这样的波称为简谐波（余弦波，单色波）

$$\xi(x,t) = f\left(t \pm \frac{x}{u}\right) \qquad f \to \sin, \cos$$

波的周期（**period**）T：振动周期

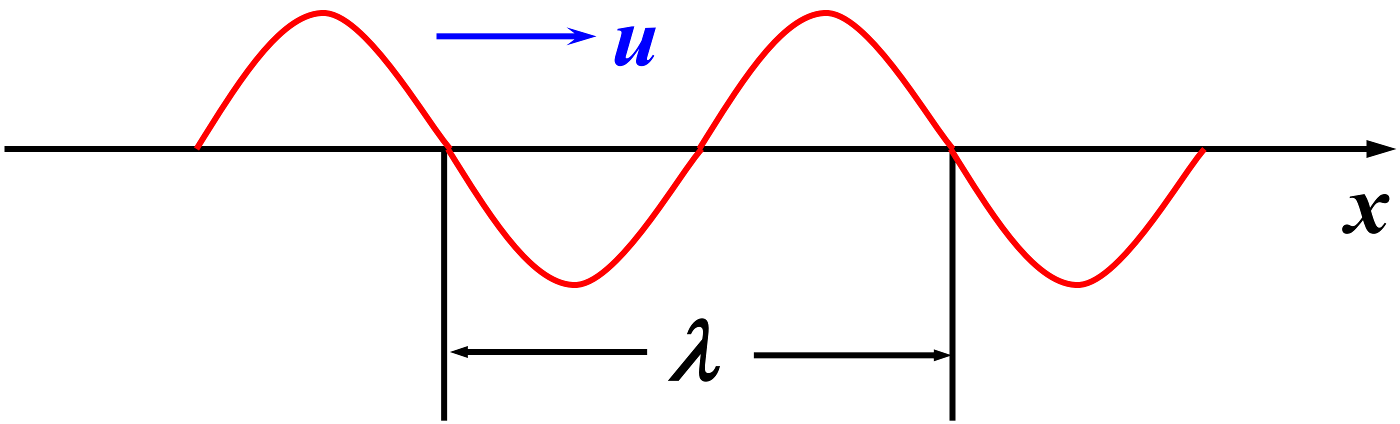
它由波源决定（波源、观测者均不动时）

对于简谐波，频率（**frequency**）$\nu = \dfrac{1}{T}$

角频率（**angular frequency**）$\omega = 2\pi\nu$

波长（wave length）λ ：

波线上相邻的振动状态相同的两质元间的距离。



$\boxed{\lambda = uT}$ 由波源和媒质共同决定

波长是波的“空间周期”

角波数

波长倒数叫波数 $\tilde{\nu} = \dfrac{1}{\lambda}$ $k = 2\pi\tilde{\nu}$

一维平面简谐波的波函数：

以机械波的横波为例，设平面波沿 $\boldsymbol{x}$方向以速度 $\boldsymbol{u}$ 传播， 媒质均匀、无限大，无吸收。在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 处质元振动方程为 $y(0,t)=A\cos\omega t$,

则应有： $$y(x,t)=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$$ ——波函数

（因无吸收，故振幅 $\boldsymbol{A}$不变）

$\omega(t-\frac{x}{u})$ 为波的相位。

波在某点的相位反映该点媒质的“运动状态”。

所以简谐波的传播也是媒质振动相位的传播。

设 t 时刻 x 处的相位经 dt 传到（x +dx）处，

则应有 $$\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)=\omega\left[(t+\mathrm{d}t)-\frac{x+\mathrm{d}x}{u}\right]$$

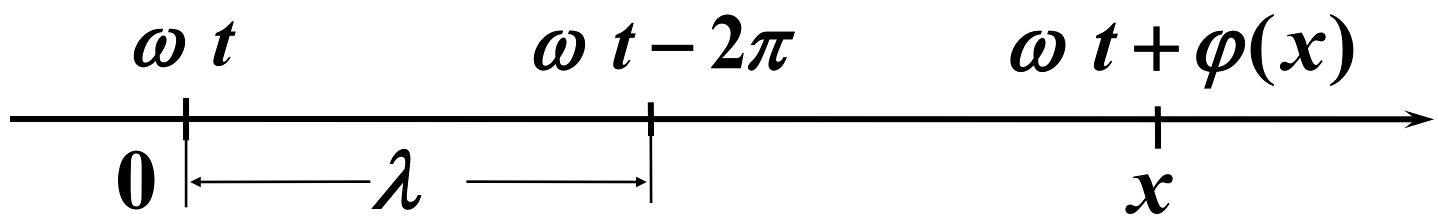
于是得到 $$u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$ ——相速度（相速）

即简谐波的波速就是相速。

简谐波函数的另一种常用的表示：

$$\left.\begin{aligned} y(x,t) &= A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right) \\ u &= \frac{\lambda}{T} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{y(x,t) = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)}$$

说明：

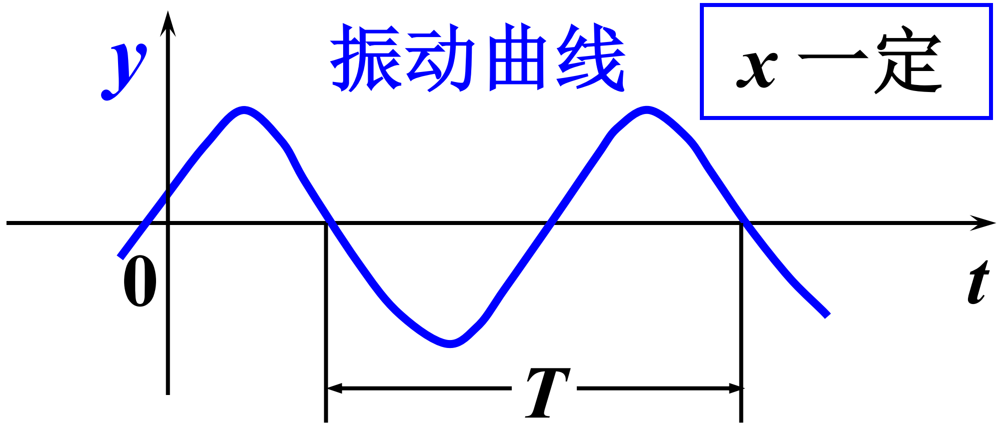


沿波传播方向每增加λ的距离，相位落后2π。

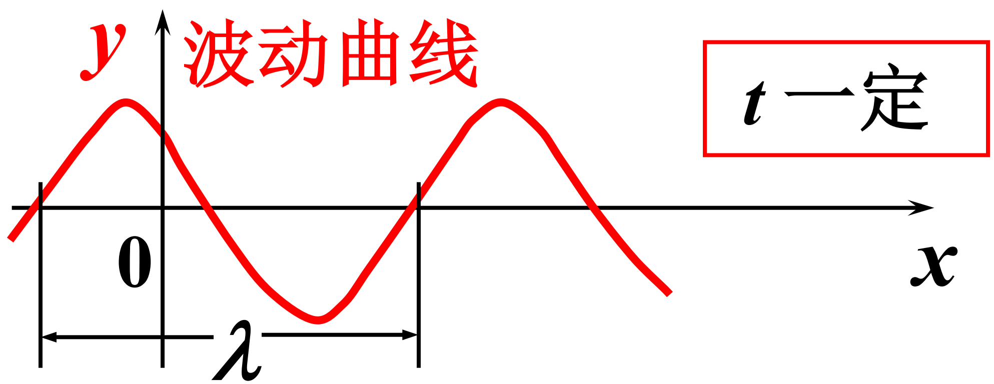
∴传播x的距离，相位落后 $\phi(x) = -\frac{2\pi}{\lambda}x$

波函数的意义：

①x 一定，$y \sim t$ 给出 x 点的振动方程。



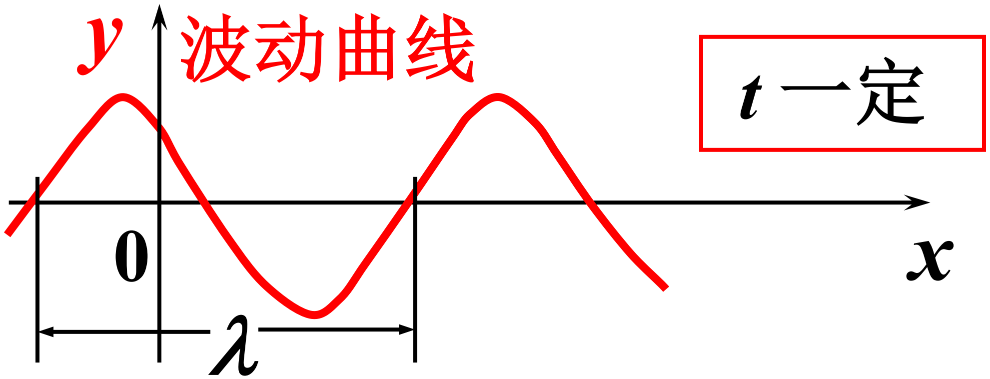
②t 一定，$y \sim x$ 给出 t 时刻空间各点位移分布。



单选题 1分

设置

该简谐波形曲线表示的是



A 纵波

B 横波

C 可能是横波也可能是纵波

提交

波函数的另几种常见表示式：

$$y = A\cos(\omega t \mp kx), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ ——角波数 (wave number)

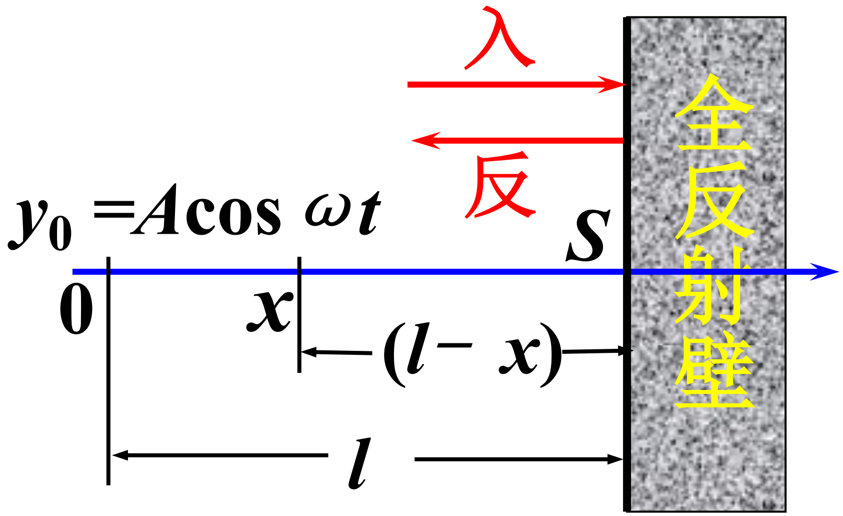
$$y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y = A\cos k(ut \mp x)$$

$$y = Ae^{i(\omega t \mp kx)} \quad (\mathrm{Re})$$

$$= \underbrace{Ae^{i(\mp kx)}}_{\text{空间因子（复振幅）}} \cdot \underbrace{e^{i\omega t}}_{\text{振动因子}} \quad (\mathrm{Re})$$

[例] 如图示，已知：$y_0 = A\cos\omega\, t$，波长为λ，



求：反射波函数 $y'(x,t)$

解：全反射，A不变。

反射波在S处相位改变π(?)

$$y'(x,t) = A\cos[\omega\, t - \frac{l}{\lambda}2\pi - \pi - \frac{l-x}{\lambda}2\pi]$$

$$= A\cos[\omega\, t + \frac{x}{\lambda}2\pi - \frac{2l}{\lambda}2\pi - \pi]$$

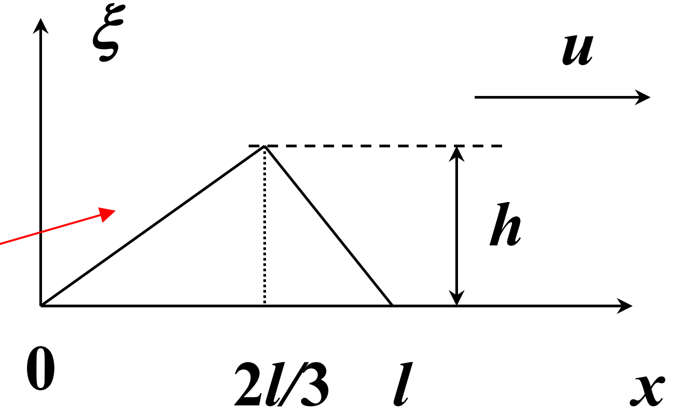
"+"表示沿 $-x$ 方向传播

例 一三角形脉冲横波向右传播，传播过程波形不变，$t=0$ 波形曲线如下，求：

a）$x=l$ 振动曲线和横向运动速度曲线；

b）此脉冲的波函数；

c）$x=L$ 处遇波密媒质反射，求反射波函数。



解：

$$\xi = f(t - \frac{x}{u})$$

0

$$f(-\frac{x}{u}) = \frac{3h}{2}\frac{x}{l}, \qquad \frac{2l}{3} > x > 0$$

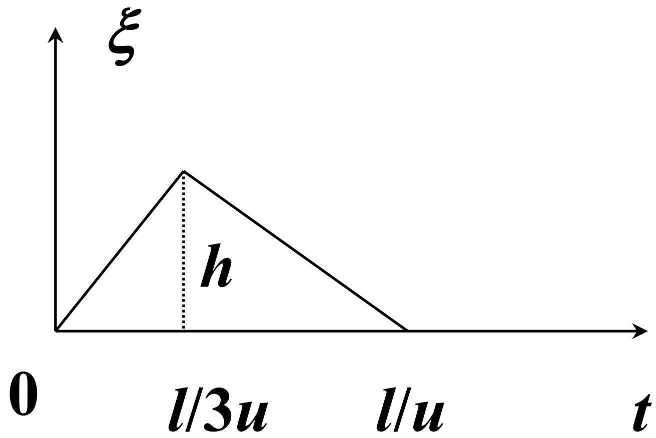
$$= 3h(1-\frac{x}{l}), \qquad \frac{2l}{3} \le x < l$$

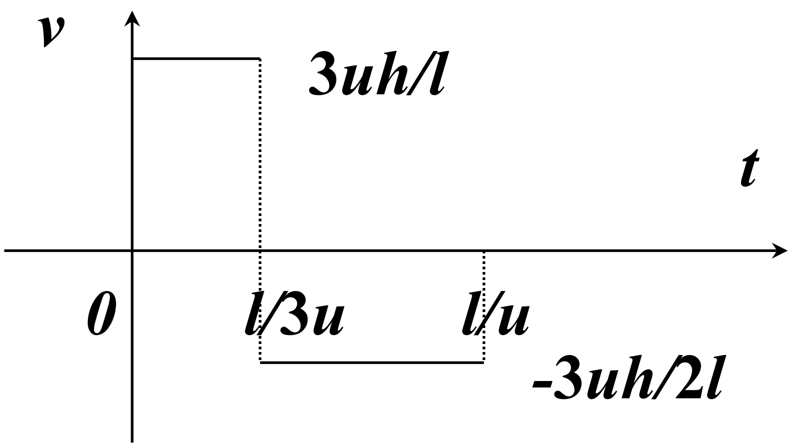
a）$x=l$ 振动曲线和横向运动速度曲线

$$\xi = f(t-\frac{l}{u}) \qquad t-\frac{l}{u} \Rightarrow -\frac{x}{u} \qquad l-ut \Rightarrow x$$

$$f(t-\frac{l}{u}) = \frac{3uh}{l}t, \qquad 0<t\le\frac{l}{3u}$$

$$= \frac{3}{2}(1-\frac{ut}{l})h, \qquad \frac{l}{u}>t>\frac{l}{3u}$$





b）此脉冲的波函数

x 大于 l $\quad \xi(x,t) = f(t - \frac{x}{u})$

$$t - \frac{x}{u} \Rightarrow -\frac{x}{u} \qquad x - ut \Rightarrow x$$

$$f(t-\frac{x}{u}) = 3h(1 - \frac{x-ut}{l}), \qquad -\frac{l}{u} < t - \frac{x}{u} \le -\frac{2l}{3u}$$

$$= \frac{3}{2}h\frac{x-ut}{l}, \qquad 0 > t - \frac{x}{u} > -\frac{2l}{3u}$$

$$f(t-\frac{x}{u}) = \frac{3h}{l}[u(t-\frac{x}{u}) + l], \qquad -\frac{l}{u} < t - \frac{x}{u} \le -\frac{2l}{3u}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{h}{l}u(t-\frac{x}{u}), \qquad 0 > t - \frac{x}{u} > -\frac{2l}{3u}$$

c）$x=L$ 处遇波密媒质反射，求反射波函数。

假设反射能量没有损失（没有透射）

只有从波疏媒质到波密媒质，
透射波振幅相对入射波振幅可以很小，反过来不可能。

从波疏媒质到波密媒质，理想情况下可以无透射。

$x=L$ 入射波振动 $\xi(L,t)=f\left(t-\frac{L}{u}\right)$

入射点无振动，才可能无透射

入射点无振动，可以解释为入射波和反射波抵消

$$\xi_{反}(L,t)=-\xi(L,t)=-f\left(t-\frac{L}{u}\right)$$

假设反射波 $\xi_{反}(x,t)=g(t+\frac{x}{u})$

在L处： $g(t+\frac{L}{u})=-f(t-\frac{L}{u})$

$t'\Rightarrow t+\frac{L}{u}$ $\qquad g(t')=-f(t'-\frac{2L}{u})$

$t+\frac{x}{u}\Rightarrow t'$ $\qquad \xi_{反}(x,t)=g(t+\frac{x}{u})=-f(t-\frac{2L-x}{u})$

$$\xi_{反}(x,t)=-\frac{3h}{l}[1-2L+u(t+\frac{x}{u})],\quad \frac{2L-l}{u}<t+\frac{x}{u}\leq\frac{2L}{u}-\frac{2l}{3u}$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{h}{l}[2L-u(t+\frac{x}{u})],\quad \frac{2L}{u}>t+\frac{x}{u}>\frac{2L}{u}-\frac{2l}{3u}$$

§ 7.3 物体的弹性变形

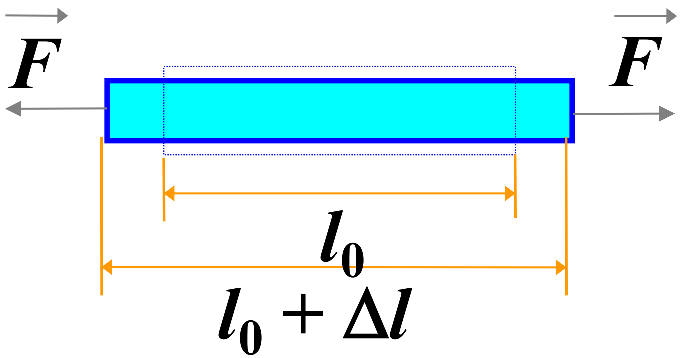
模型: 质点, 流体, 刚体, 弹性介质

线变

$$\frac{F}{S} = Y \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$$

应力 stress, 应变 strain

Y − 杨氏弹性模量

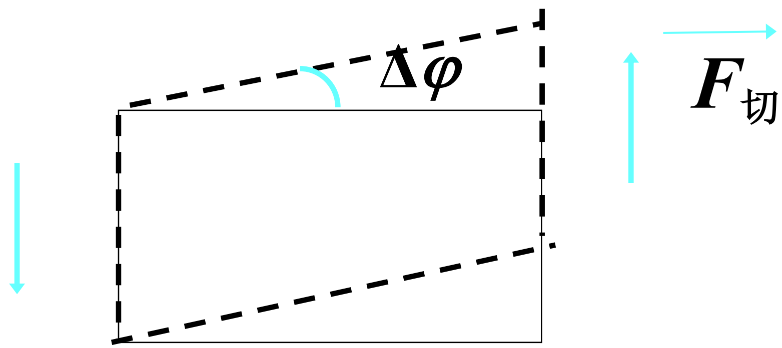


$$k = YS/l_0$$

相应形变:线变

$$F = -k\Delta l$$

切变 shear

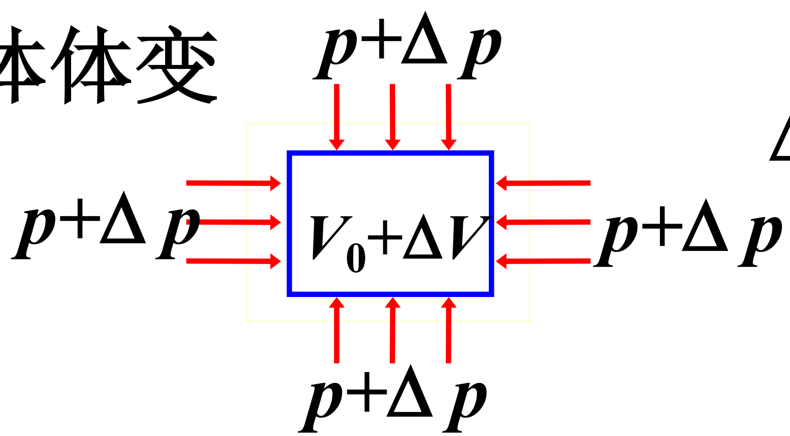


切变

$$\frac{F}{S} = G\Delta\varphi$$

G - 切变模量

流体体变



体变

$$\Delta p = -K(\Delta V/V_0)$$

K-体积模量

§ 7.4 波动方程（wave equation）

一、平面波波动方程：

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$（u 是波速）

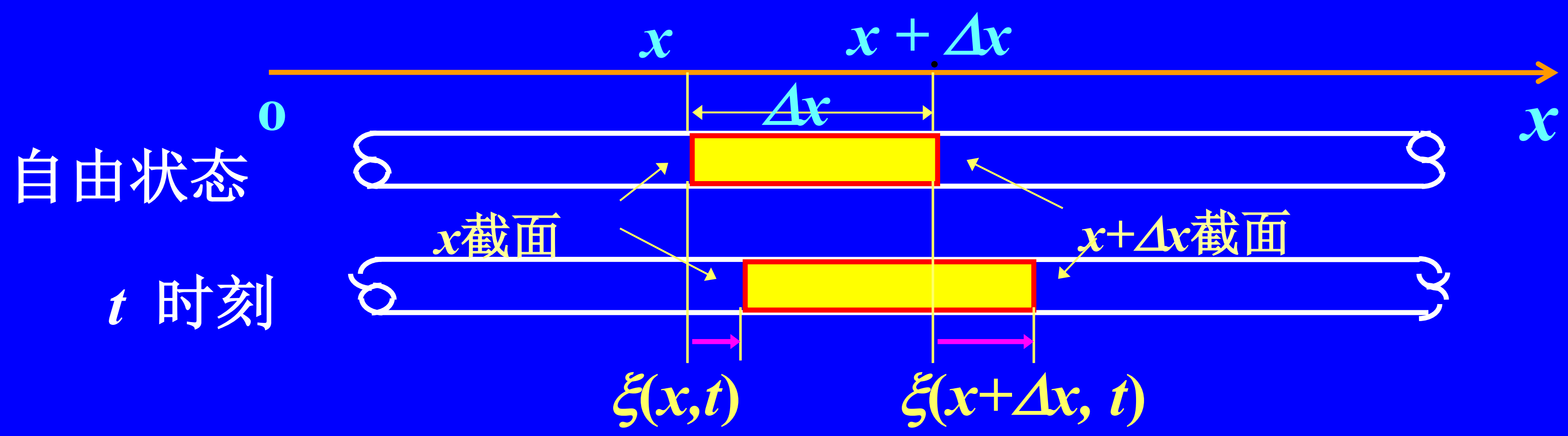
将 $y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$ 代入可以验证。

实际上任意一个以 $(t \mp \frac{x}{u})$ 为变量的波函数

$y = f(t \mp \frac{x}{u})$ 都是波动方程的解。

二、 固体棒中纵波的波动方程*(推导)

1. 某截面处的应力、应变关系



波引起的Δx段的平均应变:

$$[\xi(x+\Delta x,t) - \xi(x,t)] / \Delta x \sim \partial\xi/\partial x$$

x处截面t时刻

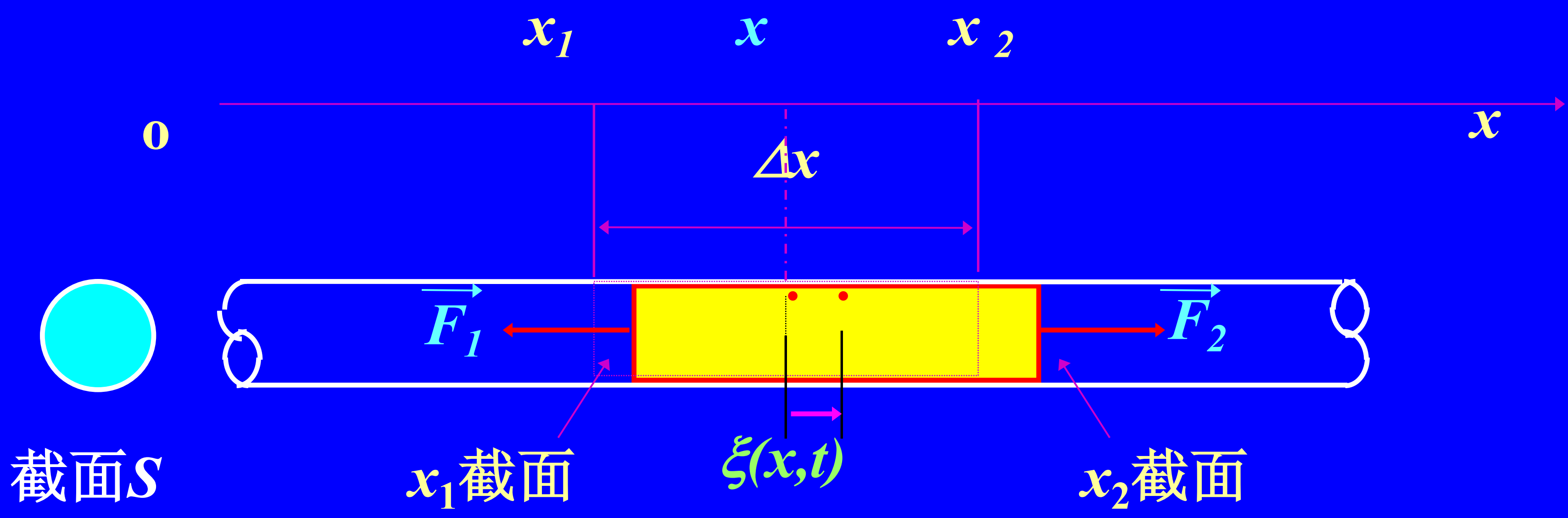
应变为 $\partial\xi/\partial x$

应力为 $F(x, t)/S$

应力、应变关系 $F/S = Y(\partial\xi/\partial x)$

2. 波动方程

在棒上取质元Δx, 其质心的位移为 ~ $\xi(x,t)$



$$(\rho S \Delta x)(\partial^2 \xi / \partial t^2) = F_2 - F_1$$

$$\rho(\partial^2 \xi / \partial t^2) = [(F_2 / S) - (F_1 / S)] / \Delta x$$

将前述应力、应变结果代入有

$$\rho(\partial^2 \xi / \partial t^2) = Y[(\partial \xi / \partial x)_2 - (\partial \xi / \partial x)_1] / \Delta x$$

令$\Delta x \to 0$,并取极限即得所求波动方程

$$\partial^2 \xi/\partial t^2 = (Y/\rho)(\partial^2 \xi/\partial x^2)$$

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0}$$

三维

$$\partial^2 \xi/\partial t^2 = u^2 \nabla^2 \xi$$

$$(\partial^2 \xi/\partial t^2) = u^2\ (\partial^2 \xi/\partial x^2 + \partial^2 \xi/\partial y^2 + \partial^2 \xi/\partial z^2)$$

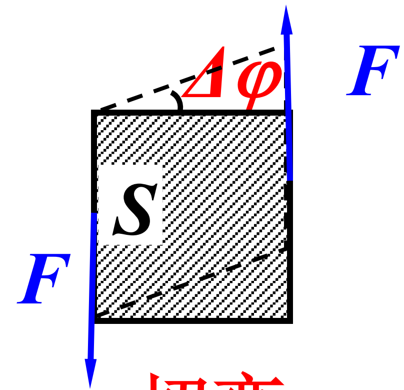
三、波速 u 与媒质性质的关系：

（公式不必记忆）

固体中

横波 $u_t = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$， $G = \dfrac{F/S}{\Delta\varphi}$

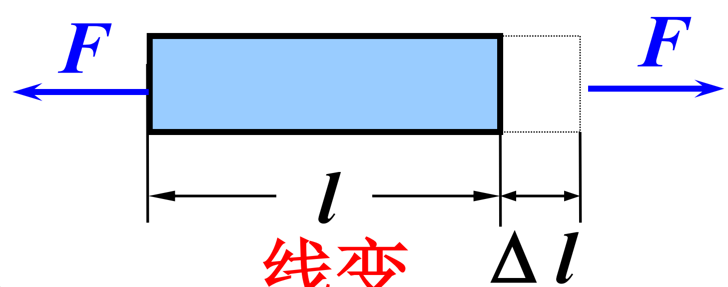
（切变模量）



切变

纵波 $u_l = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$， $Y = \dfrac{F/S}{\Delta l/l}$

（杨氏模量）



线变

地震波传播

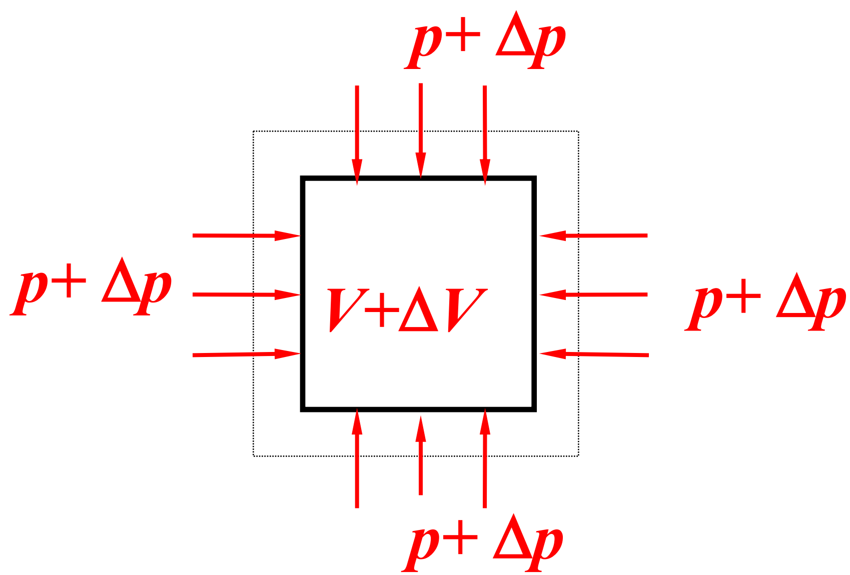
弹性绳上的横波 $u = \sqrt{\dfrac{F}{\rho_l}}$

F —— 绳的初始张力，ρ_l —— 绳的线密度

流体中 $u = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$，

$$K = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

（体积模量）



体变

应用于气体 $u = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$，

γ —— 比热比