清华大学 2022 微积分 A2 期末考试

考试时间: 2022-06-14 09:00-11:00

一、填空题（共 15 题，满分 45 分）

1. 积分 $\int_0^\pi \mathrm{d}y \int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x =$____________.

2. 三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \sqrt{|x|+y^2-\cos z+1}\sin(xy^2z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$____________.

3. 函数 $f(x)=x^2$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\le 5^2\}$ 中的积分平均值 $\dfrac{\iiint\limits_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} =$____________.

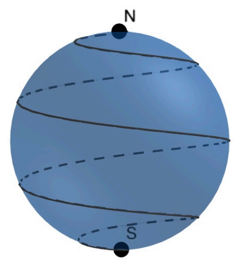
4. 设 $L: x=2t, y=t, z=2-2t, 0\le t\le 1$，则 $\int_L (xy+2y+z)\mathrm{d}l =$____________.

5. 曲线 $L: |x|+|y|=\sqrt{2}$ 的线密度为 $\mu(x,y)=3+x^2-y^2$，则曲线 L 的质量为____________.

6. 设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 $\Sigma: x^2+y^2-2z=0(0\le z\le 8)$. 则 $\iint\limits_\Sigma \frac{1}{\pi\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}S =$____________.

7. 设有向曲线 $L^+: x=t, y=t^2, z=t^4, 0\le t\le 1$，参数 t 增加方向与曲线正向一致，则

$\int_{L^+} 9y\mathrm{d}x-3x\mathrm{d}y+4z\mathrm{d}z =$____________.



8. 如图，L^+ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的一条 C^1 曲线，以

$S(0,0,-1)$ 为起点，以 $N(0,0,1)$ 为终点。则

$\int_{L^+}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+2(z^2+x^2)\mathrm{d}y+3(x^2+y^2)\mathrm{d}z =$____________.

9. 已知曲线积分 $\int_{L^+}(2x^2+axy)\mathrm{d}x+(x^2+3y^2)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关（只与曲线的起点和终点有关），则

实数 $a=$____________.

10. 设 $\lambda>0$，记 L_λ^+ 为单位圆周 $x^2+y^2=\lambda^2$，逆时针为正向，则

$\frac{1}{\pi\lambda^2}\left(\oint_{L_\lambda^+}(\sin x+y+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x+(3x+x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y\right) =$____________.

11. 设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 $\Sigma: \begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \quad (0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi). \\ z=\theta, \end{cases}$ 取 Σ 朝上一侧为正向，则

$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Sigma^+} 2y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y =$____________.

12. 设 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2), x^2+y^2\neq 0$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)(1,1)=$____________.

13. 设 $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(yz,zx,x^2)$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}}(x,y,z))=$____________.

14. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛，记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n$ 的收敛半径为 R，则 R 的最小值是____________.

15. 设幂级数 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数是微分方程初值问题 $\begin{cases}xy''=y,\\ y(0)=0,\\ y'(0)=1\end{cases}$ 的解，则 $\dfrac{1}{a_3}=$____________.

二、单项选择（共 10 题，满分 30 分）

1. 积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

A. π　　B. 2π　　C. $\dfrac{3\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

2. 积分 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=$____________.

A. 2π　　B. 6π　　C. 4π　　D. 8π

3. 空间曲线 L^+ 为柱面 $|x|+|y|=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，它围绕 z 轴的正方向逆时针旋转。则 $\oint\limits_{L^+}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z=$____________.

A. 12　　B. $12\sqrt{3}$　　C. 6　　D. $4\sqrt{3}$

4. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$，记

$$I_1=\iint_D\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}+100(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_2=\iint_D\left(\cos(x^2+y^2)+10(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3=\iint_D\left(\cos\left((x^2+y^2)^2\right)+x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

以下结论正确的是____________.

A. $I_3<I_1<I_2$　　B. $I_1<I_2<I_3$　　C. $I_2<I_1<I_3$　　D. $I_3<I_2<I_1$

5. 设 Ω 为单位球体 $x^2+y^2+z^2\leq 1$. 则流速场 $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(x+yz,y+zx,z+xy)$ 在单位时间中流出 Ω 的流量 $\iint_{\partial\Omega^+}\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\mathrm{d}S=$____________.

A. π　　B. 2π　　C. 4π　　D. 0

6. 设 a 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(na)}{n^2}+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$____________.

A. 绝对收敛　　B. 发散　　C. 条件收敛　　D. 收敛性与 a 的取值有关

7. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上____________.

A. 绝对收敛，且一致收敛　　B. 绝对收敛，但不一致收敛

C. 条件收敛，但不一致收敛　　D. 条件收敛，且一致收敛

8. 记 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S'(\frac{1}{2})=$____________.

A. $\ln 2-\ln 3$　　B. $\ln 3-\ln 2$　　C. $\ln 2$　　D. $-\ln 2$

9. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n}$ 的收敛域为____________.

A. $\{0\}$　　B. $(-\infty,+\infty)$　　C. $(-1,1]$　　D. $(-1,1)$

10. 已知 2π 周期函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\pi,\\ -1, & -\pi<x<0.\end{cases}$ 利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数，可得级数 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$ 的和为____________.

A. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$　　B. $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$　　C. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$　　D. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

三、计算题（共 2 题，满分 20 分）

1.(10 分)　设 $D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,0\leq x+y\leq 2\}$，计算二重积分 $\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2.(10 分)　计算曲面积分：$I=\iint_{S+}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$,

其中 $S+$ 为曲面 $1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}(z\geq 0)$ 的上侧.

四、证明题 (共 1 题，满分 5 分)

1.(5 分)　已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 由以下等式确定

$$b_n=\ln(\mathrm{e}^{a_n}-a_n),\quad \forall n\geq 1.$$

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$ 收敛。