第5讲
谓词逻辑的等值和推理演算(2)

计算机系　黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

5.4.1 一阶谓词逻辑的推理形式和推理公式

- 在一阶谓词逻辑中，从前提$A_1,A_2,\dots,A_n$出发推出结论B的推理形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$$

若上式为永真式，则称推理正确，否则称推理不正确。于是，在一阶谓词逻辑中判断推理是否正确便归结为判断上式是否为永真式，并称满足永真式的蕴涵式为推理公式，用如下形式的符号表示：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$$

5.4.1 一阶谓词逻辑的推理形式和推理公式

例1: 量词∀ 对 ∧分配率+蕴涵的传递

例2 : $\forall x\ P(x) \Rightarrow P(c)$ if $c \in U$　　UI/全称举例

例3: ∃量词对∧的分配率的类似情形

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

例4: 试图用∃量词来进行UG/全称推广(X)

P(c) for an arbitrary $c \in U \Rightarrow \forall x\ P(x)$

5.4.2 基本推理公式

1. $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$
2. $(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$
3. $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$
4. $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$
5. $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$

- 关键：深刻理解$(\forall x)P(x)$ 和$(\exists x)P(x)$的逻辑含义

5.4.2 基本推理公式

6. $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\leftrightarrow(\exists x)Q(x)$

7. $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

   ---三段论

8. $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$

   ---分离规则

9. $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$ ---前提放松

10. $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$ ---有限域量化

5.4.2 基本推理公式

Rule of Inference	Name
$P \Rightarrow P \vee Q$	Addition/析取附加式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplification/合取化简式
P、Q $\Rightarrow P \wedge Q$	Conjunction/并发式
P、 $P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus ponens/分离式
$\neg Q$、 $P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	Modus tollens/拒取式
$\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$	Disjunctive syllogism /析取三段式
$P \rightarrow Q$、 $Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Hypothetical syllogism /假言三段式

5.5 推理演算

5.5.1 谓词逻辑中使用推理规则的推理演算方法

- 在命题逻辑中，由引入几条推理规则，配合基本推理公式所进行的推理演算方法，可以容易地推广到谓词逻辑中。
- 由于在谓词逻辑中**不能使用真值表法**，**又不存在判别A→B是普遍有效的一般方法**，从而使用推理规则的推理方法已成为谓词逻辑的基本推理演算方法。
- 所使用的推理规则除命题逻辑的推理演算中用到的六条基本推理规则外（参见2.9节），还包括四条有关量词的消去和引入规则。

推理演算

- 主要的推理规则

  (1) 前提引入规则：推理过程中可随时引入前提

  (2) 结论引入规则：中间结论可作为后续推理的前提

  (3) 代入规则：仅限于重言式中的命题变项

  (4) 置换规则：利用等值公式对部分公式进行置换

  (5) 分离规则：由A及A→B成立, 可将B分离出来

  (6) 条件证明规则： $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价

量词推理规则

Rule of Inference	Name
$\forall x\, P(x) \Rightarrow P(c)$ if $c \in U$	UI/全称举例
$P(c)$ for an arbitrary $c \in U \Rightarrow \forall x\, P(x)$	UG/全称推广
$\exists x\, P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in U$	EI/存在举例
$P(c)$ for some $c \in U \Rightarrow \exists x\, P(x)$	EG/存在推广

5.5.2 全称量词消去规则（简记为UI规则或UI）

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(y)} \text{或} \frac{\forall x P(x)}{\therefore P(\mathrm{c})}$$

- 两式成立的条件是：
  - 第一式中，取代x的y应为任意的不在$P(x)$中约束出现的个体变项。
  - 第二式中，c为任意个体常项。
  - 用y或c去取代$P(x)$中自由出现的x时，必须在x自由出现的一切地方进行取代。

5.5.3 全称量词引入规则（简记为UG规则或UG）

$$\frac{P(y)}{\therefore \forall x P(x)}$$

- 该式成立的条件是：
  - 无论$P(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$P(y)$应该均为真。
  - 取代自由出现的y的x也不能在$P(y)$中约束出现。

5.5.4 存在量词消去规则（简记为EI规则或EI）

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 该式成立的条件是：

(1) c是使P为真的特定的个体常项。

(2) c不在$P(x)$中出现。

(3) $P(x)$中没有其它自由出现的个体变项。

5.5.5 存在量词引入规则（简记为EG规则或EG）

$$\frac{P(c)}{\therefore \exists x P(x)}$$

- 该式成立的条件是：

  (1) c是特定的个体常项。

  (2) 取代c的x不在$P(c)$中出现过。

推理错误举例

- 作业第三题（9，10，11）

5.5.6 使用推理规则的推理演算过程

- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

推理演算举例1

- P81 例5:
  1. 有的病人喜欢所有的医生,
  2. 没有一个病人喜欢某一庸医,
  3. 所以没有医生是庸医。

推理演算举例1

(1) 形式化

P(x) 表示x是病人，　Q(x) 表示x是庸医，

D(x) 表示x是医生，　L(x,y) 表示x喜欢y。

前提1： $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x,y)))$

前提2: $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$

or $\neg(\exists x)(P(x) \wedge (\exists y)(Q(y) \wedge L(x,y)))$

结论： $\neg(\exists x)(D(x) \wedge Q(x))$

or $(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$

◎ 证明:

(1) $(\exists x)(P(x)\land(\forall y)(D(y)\rightarrow L(x,y)))$……………………前提1

(2) $P(c)\land(\forall y)(D(y)\rightarrow L(c,y))$…………………………存在量词消去

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)(Q(y)\rightarrow\neg L(x,y)))$………………前提2

(4) $P(c)\rightarrow(\forall y)(Q(y)\rightarrow\neg L(c,y))$…………………………全称量词消去

(5) $P(c)$…………………………………………………………(2)

(6) $(\forall y)(D(y)\rightarrow L(c,y))$…………………………………(2)

(7) $D(y)\rightarrow L(c,y)$………………………………………全称量词消去

(8) $(\forall y)(Q(y)\rightarrow\neg L(c,y))$………………………………(4)(5)分离

(9) $Q(y)\rightarrow\neg L(c,y)$……………………………………全称量词消去

(10) $L(c,y)\rightarrow\neg Q(y)$ ……………………………………(9)置换

(11) $D(y)\rightarrow\neg Q(y)$…………………………………………(7)(10)三段论

(12) $(\forall y)(D(y)\rightarrow\neg Q(y))$……………………………全称量词引入

(13) $(\forall x)(D(x)\rightarrow\neg Q(x))$……………………………(12)置换

推理演算举例2

- 前提：任何人如果他喜欢步行，则他就不喜欢乘汽车；每个人喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车；有的人不喜欢骑自行车。
- 结论：因此有的人不喜欢步行。

设定：**W(x)**：**x**喜欢步行，

B(x)：**x**喜欢乘汽车

K(x)：**x**喜欢骑自行车；

推理演算举例2

形式化如下：

- $(\forall x)\ (W(x) \rightarrow \neg B(x))$；
- $(\forall x)\ (B(x) \vee K(x))$；
- $(\exists x)\ (\neg K(x))$；

结论： $(\exists x)\ (\neg W(x))$

推理演算举例2

1. ∃x (¬ K(x))　　(h：前提引入)
2. ¬ K(c)　　(EI：存在举例)
3. ∀x (B(x)∨K(x))　(h：前提引入)
4. B(c)∨K(c)　　(UI：全称举例)
5. B(c)　（2+4：排除法）
6. ∀x (W(x) → ¬ B(x))　(h)
7. W(c) → ¬ B(c)　(UI)
8. B(c) → ¬ W(c)　　（置换）
9. ¬ W(c)　5、8分离
10. ∃x (¬ W(x))　(EG：存在推广)

前提：

- (∀x) (W(x)→ ¬ B(x))；
- (∀x) (B(x)∨K(x))；
- (∃x) (¬ K(x))；

结论：　(∃x) (¬ W(x))

5.6 谓词逻辑的归结推理法

5.6.1 谓词逻辑的归结推理法

- 出发点：使用推理规则，技巧性较强，不便于机器实现。
- 命题逻辑中的归结推理法可以推广到谓词逻辑中。证明过程与命题逻辑相似。
- 所不同的是需对谓词逻辑中的量词和变元进行特殊的处理。

5.6.2 归结推理法步骤

- 1.欲证 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$是定理，等价于证 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$是矛盾式。

2.将G化为前束范式。进而化为SKOLEM标准型消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式 G*

(由于全称量词的前束范式保持不可满足的特性，故G与G*在不可满足的意义下是一致的）

- 3.略去**G***中的全称量词，**G***中的合取词∧以“，”表示，便得到**G***的子句集**S**。实用中可分别求出诸A_i与¬**B**的子句集。

- 4.对**S**作归结。直至归结出空子句□。

- 举例

归结推理法说明

- 设C_1, C_2是两个无共同变元的子句，如下式

$$C_1 = P(x) \vee Q(x)$$
$$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$$

$$R(C_1, C_2) = Q(a) \vee R(y)$$

- P(x)与¬P(a)在置换{x/a}下将变元x换成a，构成互补对可进行归结。得到归结式$R(C_1,C_2)$。

归结推理法举例

- 例2：

$A_1=(\exists x)(P(x)\wedge(\forall\ y)(D(y) \rightarrow L(x,y)))$

$A_2=(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$

$B=(\forall x)(D(x)\rightarrow\neg Q(x))$

求证：$A_1\wedge A_2 \Rightarrow B$

归结推理法举例

- 等价于证明$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B = G$是矛盾式
- 求出相应的Skolem标准型G*分别为

$$G_{A_1}^{\ *} = (\forall y)(P(a) \wedge (\neg D(y) \vee L(a,y)))$$

$$G_{A_2}^{\ *} = (\forall x)\ (\forall y)(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y))$$

$$G_{\neg B}^{\ *} = D(b) \wedge Q(b)$$

- G的子句集$S = S_{A_1} \cup S_{A_2} \cup S_{\neg B}$

$$S_{A_1} = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y)\}$$

$$S_{A_2} = \{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)\}$$

$$S_{\neg B} = \{D(b), Q(b)\}$$

注意：a和b的区别

归结推理法举例

- 建立归结过程

(1)	$P(a)$	
(2)	$\neg D(y) \vee L(a,y)$	
(3)	$\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)$	
(4)	$D(b)$	
(5)	$Q(b)$	
(6)	$L(a,b)$	(2)(4)归结
(7)	$\neg Q(y) \vee \neg L(a,y)$	(1)(3)归结
(8)	$\neg L(a,b)$	(5)(7)归结
(9)	$\square$	(6)(8)归结

第五章小结

- 本章讨论了谓词逻辑的等值和推理演算，是谓词逻辑的核心部分
- 介绍了谓词逻辑公式等值的概念，引出了否定型等值式的不同形式及其证明方法
- 量词对不同联结词的分配律，即量词分配等值式，讨论了它们成立的条件和证明方法

第五章小结

- 从范式的概念出发，重点介绍了前束范式的定义以及Skolem标准形的构成，如何求得∃前束范式和∀前束范式的方法
- 通过两个定理给出了两种前束范式的普遍有效性和不可满足性与原公式的关系

第五章小结

- 推理演算：介绍了基本的推理公式，六条推理规则；有关量词的四条推理规则，使用推理规则进行推理演算的过程和方法；
- 谓词逻辑的归结推理法：使用归结法证明推理公式的步骤和方法。

第五章作业

- 一：6，7，8，9
- 二：3，7，8
- 四：2，7，9
- 五：3，4

课外阅读

- **人工智能中的不确定性推理(uncertainty reasoning)**
- **Markov Logic Network**
- Richardson, Matthew, and Pedro Domingos. "Markov logic networks." *Machine learning* 62.1-2 (2006): 107-136.