第14讲
实数集合与集合的基数

计算机系　黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

课前思考

- 有理数是离散的吗？
- 实数是离散的吗？实数能不能有离散的表示？
- 有理数和自然数本质一样吗？
- 有理数和实数有什么本质不同吗？

本章提纲

- 实数集合（整数、有理数、实数）
- 集合的等势
- 有限集与无限集合
- 集合的基数
- 基数的算术运算
- 基数的比较
- 可数集合与连续统假设

12.1　实数集合

定义12.1.1　（整数）对自然数集合N，令

$$Z_+ = N - \{0\}$$

$$Z_- = \{\langle 0, n\rangle | n \in Z_+\}$$

$$Z = Z_+ \cup \{0\} \cup Z_-$$

则称Z_+的元素为正整数，Z_-的元素为负整数，Z的元素为整数。

12.1　实数集合

定义12.1.2　一个整数的相反数分别是

$$-n = \langle 0, n \rangle \text{ 当 } n \in Z_+ \text{，}$$

$$-0 = 0 \text{，}$$

$$-\langle 0, n \rangle = n \text{ 当 } n \in Z_+ \text{。}$$

12.1 实数集合

定义12.1.3 在集合Z上定义小于等于关系 $\leq_z$ 为:

对任意的，$x, y \in Z$ 满足 $x \leq_Z y$ 当且仅当

$$(x \in N \wedge y \in N \wedge x \leq_N y) \vee (x \in Z_- \wedge y \in N)$$

$$\vee (x \in Z_- \wedge y \in Z_- \wedge -y \leq_N -x)$$

在集合Z上定义小于关系$<_Z$为，对任意的$x, y \in$ Z满足

$x <_Z y$ 当且仅当

$$(x \leq_Z y) \wedge (x \neq y)$$

12.1 实数集合

定义12.1.4 （**等价关系≅**）对整数集合Z，令

$$Q_1 = Z\times(Z-\{0\}) = \{\langle a,b\rangle | a \in Z \wedge b \in Z-\{0\}\}$$

并称Q_1是Z上的因式的集合。对$\langle a,b\rangle \in Q_1$，可以$a/b$用代替$\langle a,b\rangle$。

在Q_1上定义关系为≅，对任意的$a/b \in \mathrm{Q}_1$，$\mathrm{c}/d \in \mathrm{Q}_1$，

$$\boldsymbol{a/b \cong c/d} \textbf{当且仅当} \boldsymbol{a\cdot d = b\cdot c}$$

其中$a\cdot d$是在Z上定义的乘法，$=$是Z上的相等关系。

12.1　实数集合

定理12.1.1 Q_1上的关系≅是等价关系。

自反性

传递性

对称性

12.1 实数集合

定义12.1.5（有理数集合） $Q = Q_1/\cong$，即**Q是集合Q_1对等价关系$\cong$的商集**，则称Q的元素为有理数，一般用a/b表示Q中的元素$[\langle a, b\rangle_{\cong}]$ ，并习惯上取a、b是互素的整数，且$b > 0$。

Q的元素是该等价关系的等价类，每个等价类对应一个有理数。

12.1 实数集合

定义12.1.6 在Q上定义等于关系$\leq_Q$为，对任意的$a/b, c/d \in Q$，

$$a/b \leq_Q c/d \text{当且仅当} a \cdot d \leq_Z b \cdot c\text{。}$$

总结：如何定义有理数集合

- 定义整数集合Z
- 定义因子集合$Q_1 = Z \times (Z - \{0\})$
- 在Q_1定义等价关系≅： **$a/b \cong c/d$当且仅当$a \cdot d = b \cdot c$**
- 有理数集合为商集$Q_1/\cong$
  - 一个有理数对应一个等价类

12.1 实数集合

定义12.1.7 （基本函数）如果f：$N \rightarrow Q$满足条件，

(1) $(\exists x)(x \in Q \wedge (\forall n)(n \in N \rightarrow |f(n)| < x))$

(2) $(\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)(\forall i)((m \in N \wedge i \in N \wedge n \leq m \wedge n \leq i \wedge m \leq i) \rightarrow (f(m) \leq f(i))))$

(当m，i足够大时，满足递增关系)

则f称是一个基本函数，或**有界非递减函数**。当f是一个基本函数时，则函数值

$$f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

称为一个基本序列，它有时写为

$$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

在以下定义与定理中，B表示所有基本函数的集合。$BF(f)$表示f是一个基本函数。

12.1 实数集合

定理12.1.2 当f: $N\to Q$取常数值时，f 是基本函数。即对任意的$r \in Q$，

$$r, r, r, \ldots$$

是一个基本序列。

定理12.1.3 存在不是常值函数的基本函数。

12.1 实数集合

定义12.1.8 对基本函数的集合B，定义B上的关系为 $\cong$ ，

对任意的f，$g \in B$，

当且仅当

$$
\begin{aligned}
& f \cong g \\
& (\forall \varepsilon)((\varepsilon \in Q \land \varepsilon > 0) \to (\exists n)(n \in N \land (\forall m) \\
& \qquad ((m \in N \land n \leq m) \to |f(m) - g(m)| < \varepsilon)))
\end{aligned}
$$

直观上说，$f \cong g$等价于f和g的序列的极限相同。

12.1 实数集合

定理12.1.4 B上的关系$\cong$是等价关系.

定理12.1.5 设$f: N \to Q$和$g: N \to Q$都是常值函数，且$f \cong g$，则$f = g$。

12.1 实数集合

定义12.1.9 （实数集） 令R =B/≅，即R是集合B对等价关系≅的商集，则称R的元素为实数，称R为实数集合。

R的每一个元素x对应了一个等价类$[x]_{\cong}$每个等价类是极限相同的基本函数集合若等价类中存在常值函数，则x为有理数；否则为无理数

12.1　实数集合

定义12.1.9　（实数集）　令R =B/≅，即R是集合B对等价关系≅的商集，则称R的元素为实数，称R为实数集合。

无理数基本函数

- $\sqrt{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{8^n}$
- $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

如何定义实数集合

1. 基本函数
2. 基本函数集合B上的等价关系≅
3. 每个等价类里是极限相同的基本函数
4. B和等价关系≅的商集：R =B/≅
5. 每个实数对应一个等价类
   I. **有理数**：等价类中存在常函数
   II. **无理数**：等价类中不存在常函数

12.1 实数集合

定义12.1.10 在B上定义小于关系$<_B$为，对任意的f，$g \in B$, $f <_B g$

当且仅当

$$(\exists \varepsilon)((\varepsilon \in Q \wedge 0 < \varepsilon) \wedge (\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)$$
$$((m \in N \wedge n \leq m) \rightarrow g(m) - f(m) > \varepsilon))))$$

差别：只在某个N之后大于关系才全部成立

12.1 实数集合

定义12.1.11 在R上定义小于等于关系$\leq_R$和小于关系$<_R$为，对任意的$f, g \in B$，即对$[f] \in R_{\cong}$和$[g] \in R_{\cong}$，

$[f]_{\cong} \leq_R [g]_{\cong}$当且仅当$f \leq_B g$，

$[f]_{\cong} <_R [g]_{\cong}$当且仅当$f <_B g$。

【课前思考】

- 无限集合的基数应该如何定义?
- 一个无限集合的子集真子集是否与原集合的基数相同?
- 实数集的基数是否与自然数集的基数相同?
- 怎样判断两个无限集合的基数是否相等，或谁多谁少?

【课前思考】

- 无限集合，所含的元素有无穷多个
- 基数如何定义？
- 怎样比较两个无限集合的大小？
- $|\mathrm{N}| =?$　　$|\mathrm{Q}|=?$
- $|\mathrm{R}| =?$　　$|\mathrm{R}^{+}| =?$
- $|P(\mathrm{N})| =?$

部分＝全体（Galileo悖论）

1638年著名天文学家Galileo提出下列问题：

$N = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \}$

$N^2 = \{ 0, 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots \}$

哪个集合元素更多？

- 一方面， $N^2 \subseteq N$，因为2, 3, 5等均不在N^2中；
- 另一方面， 对于N中的每个元素n在N^2中都有一个元素n^2与之对应。
- 当时它不仅困惑了Galileo，也使许多数学家束手无策。

哲学之问

- 无穷到底能不能比较？

部分＝全体（Galileo悖论）

- 1874-1894年间，Cantor圆满地解决了Galileo悖论。

  基本思想：“一一对应”

  $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$

  $\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow$ $\quad f: A \to n \quad n = \{0, 1, 2, \ldots n\text{-}1\}$

  $0,\ 1,\ 2,\ 3$

结论：N与N² 之间存在着一一对应（双射）

$|\mathrm{N}| = |\mathrm{N}^2|$ 等势

12.2 集合的等势

定义12.2.1 （集合的等势）

对集合A和B，**如果存在从A到B的双射函数，就称A和B等势，记作$A \approx B$**;

如果不存在从A到B的双射函数，就称A和B不等势，记作$\neg A \approx B$

- 例1: N≈Z。 因为存在双射函数

$$f: N \to Z, f(n) = \begin{cases} -\dfrac{1+n}{2} & \text{当n是奇数} \\ \dfrac{n}{2} & \text{当n是偶数} \end{cases}$$

- 例2: $\mathrm{R}\approx\mathrm{R}^+$，其中$\mathrm{R}^+$是正实数集合。

因为存在双射函数

$$f: \mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}^+, \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

所以$\mathrm{R}\approx\mathrm{R}^+$

例6: (0,1)≈R。

构造双射函数 f: (0,1)→R,

已知 tg(x): $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to R$

设$f(x) = tg(ax+b)$

由$f(0) = tg\ b, b = -\frac{\pi}{2}$

$f(1) = tg(a+b), a = \pi$

代入$f(x) = tg\frac{\pi(2x-1)}{2}$

例7: [0,1]≈(0,1)，构造双射函数

$f:[0,1]\to(0,1)$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{当}x=0\\ \frac{1}{2} & \text{当}x=1\\ \frac{x}{4} & \text{当}x=2^{-n},n=1,2,3,\dots\\ x & \text{当}x\text{取其它值}\end{cases}$$

当$x=2^{-n}$时，多乘一个 ¼

12.2 集合的等势

- 定理12.2.1 对任意的集合A，有

$$P(A) \approx A_2$$

$$A_2 = \{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$$

先进行有限集合的分析：如何构造幂集合?

◉ 证明：因为$2 = \{0,1\}$, 所以 A_2 是所有函数 f:A→{0,1}组成的集合。

构造函数 H: $P(A) \rightarrow A_2$,

对于任意$B \in P(A)$, $H(B) = \chi_B(x): A \rightarrow \{0,1\}$ 。

其中$\chi_B(x)$是以A为全集时B的特征函数。

$\chi_B: A \rightarrow \{0,1\}$,

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

1. 证H是单射的；

设B_1， $B_2 \in P(A)$ 且$B_1 \neq B_2$，则

$H(B_1) = \chi_{B_1} \neq \chi_{B_2} = H(B_2)$, 所以, H是单射的。

2. 证H是满射的；

对任意的$g \in A_2$, $g: A \rightarrow \{0,1\}$，令

$B = \{ x \mid x \in A \land g(x) = 1 \}$, 则 $B \subseteq A$，即存在

$B \in P(A)$, 且$H(B) = g(x)$ 。所以, H是满射的.

12.2 集合的等势

定理12.2.2 对任意的集合A、B和C,

(1) $A \approx A$,

(2) 若$A \approx B$，则$B \approx A$,

(3) 若$A \approx B$且$B \approx C$，则$A \approx C$。

该定理表明, 等势具有自反性, 对称性和传递性。

是否是等价关系?

- 由定理可知

$$N \approx N\times N \approx Z \approx Q$$

且

$$R \approx R^{+} \approx (0,1) \approx [0,1]$$

定理12.2.3 康托定理(1890)

(1) $\neg(N \approx R)$

(2) 对任意的集合A, $\neg(A \approx P(A))$

证明：（1）只要证明$\neg \boldsymbol{N} \approx [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$即可。

- 为此只要证明对任何函数f:N→[0,1]，都存在x∈[0,1], 使$x \notin$ran(f), 即任何函数f:N→[0,1]都不是双射的。
- 反证：假设存在一个双射函数 f:N→[0,1]

  则[0,1]中的元素必与N中的元素一一对应，

  那么[0,1] 中的元素必可排列成如下的形式：

$$ran(f) = [0,1] = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$$

- 设每个 x_i 的小数形式是

$$0.a_{i1}a_{i2} \dots a_{ij} \dots, 且 a_{ij} \in \{0,1,\dots,9\}$$

- 对任意一个f:N→[0,1]，顺序列出 f 值

$$f(0) = x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$$

$$f(1) = x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots$$

$$f(2) = x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots$$

$$f(3) = x_4 = 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots$$

$$\cdots$$

$$f(n-1) = x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\cdots$$

$$\cdots$$

- 依假设，任一[0,1]中的实数均应出现在上表中的某一行

关键：如何找出一个[0,1]区间的小数，

并证明该小数不在上表中出现。

Cantor 提出按对角线构造一个新的小数 x^*

$$x^* = 0.a_{11}^* a_{22}^* a_{33}^* \ldots a_{ii}^* \ldots$$

使得$a_{ii}^* \neq a_{ii}$ $(i = 1,2, \ldots, n, \ldots)$

显然$x^* \in [0,1]$，然而x^*又不在上表中。

$\because x^*$与上表中的任一x_i至少总有一位数字相异。

于是$x^* \notin ran(f)$，即f不可能是满射。

故不存在双射函数$f: N \to [0,1]$。

（2）对任意的集合$A, \neg(A \approx P(A))$

对任意的函数 $g: A \to P(A)$，构造集合

$B = \{ x \mid x \in A \land x \notin g(x) \}$ (**g(x)是函数值，是A的子集**)

- 显然，$B \subseteq A$, $B \in P(A)$。 对任意的 $x \in A$, 有$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$,

  则$B \neq g(x)$。

- 所以$B \notin \mathrm{ran}(g)$，但$B \in P(A)$,

- 所以g不是满射的。当然也不是双射的。

- 不存在双射函数 $g: A \to P(A)$。

- 例： **A ={1, 2, 3}**

$P(\text{A})=\{\Phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1, 2\},\{1, 3\},\{2, 3\}, \text{A}\}$

设B = {1, 2}, 显然$\text{B}\subseteq\text{A}$, $\text{B}\in P(\text{A})$

g(x) = {3}, 满足$\text{B} =\{ x \mid x\in\text{A} \wedge x\notin \text{g}(x)\}$

$\text{B} \neq \text{g}(x)$， $\text{B}\notin \text{ran(g)}$, $\text{g} : \text{A}\to P(\text{A})$,

总之，不管给出的函数g 为何种情形，均可按此法构造集合B，

B是P(A)中的元素，但不在g的值域中。所以g不是满射的。

Cantor定理及其理论意义

- Cantor首次对无穷集合从定性与定量两方面进行了深入的研究
- Cantor定理揭示：
  - **N与R是有本质区别的**
  - 并非所有的无穷集合的基数都是相同的
- 著名的证明方法 — Cantor Diagonal Method

已成为数学与计算机科学中证明“否定性结论”的强有力工具