习题讨论课04题目：无穷大量与无穷小量

★号（越）多表示题目（越）难

一、无穷大量与无穷小量，大 O 和小 o 的计算

【有界量】

$x \to a$ 时, $f(x)$ 是有界量, 如果存在常数 M 以及 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x \in V \cap D_f$, 都有 $|f(x)| \le M$ 。

【无穷大量】

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: 对任意 $M > 0$, 存在 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x \in V \cap D_f$, 都有 $f(x) > M$ 。

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$: $\lim\limits_{x\to a}(-f(x)) = +\infty$ 。

【无穷小量】

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 。

【大 O 和小 o ，阶的比较】

$x \to a$ 时, $f(x) = O(g(x))$: 存在 $M > 0$ 和 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x \in V$, $|f(x)| \le M|g(x)|$，f 受控于 g。

$x \to a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶: $f(x) = O(g(x))$ 且 $g(x) = O(f(x))$, 即存在 $M > 0$ 和 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x \in V$，$\frac{1}{M}|g(x)| \le |f(x)| \le M|g(x)|$ 。

$x \to a$ 时, $f(x) = o(g(x))$: $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 a 的去心邻域 V_ε 使得 $\forall x \in V_\varepsilon$, $|f(x)| \le \varepsilon|g(x)|$，即 f 相对于 g 而言很小。

$x \to a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价: $x \to a$ 时, $f(x) = g(x) + o(g(x))$, 即 $\forall \varepsilon > 0$，存在 a 的去心邻域 V_ε 使得 $\forall x \in V_\varepsilon$，$|f(x) - g(x)| \le \varepsilon|g(x)|$。

【联系】

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff x \to a$ 时, $f(x) = o(1)$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \iff x \to a$ 时, $f(x) = A + o(1)$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \iff x \to a$ 时, $\frac{1}{f(x)} = o(1)$.
$x \to a$ 时，$f(x)$ 是有界量 $\iff f(x) = O(1), x \to a$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \implies f(x) = O(1), x \to 0$.
无穷小量都是有界量, 无穷大量都不是有界量。

例 1 (**O 和 o 的运算性质**).

$$O(f) + O(f) = O(f), \quad O(f)O(g) = O(fg),$$
$$o(f) + o(f) = o(f), \quad O(f)o(g) = o(fg).$$
$$o(f) = O(f).$$

这里的等式的含义是: 等号左边的运算结果是等号右边集合中的一个对象。

例 2. （★）证明：若

$$f(x) + o(f(x)) = Bg(x) + o(g(x)), \quad x \to a,$$

则

$$f(x)=Bg(x)+o(g(x)),\quad x\to a.$$

特别地，若 $B=1$，则“f 与 g 等价”当且仅当“g 与 f 等价”。

例 3 (反函数的渐近表达式). 设 f 有连续的反函数，$f(x)=Ax+Bx^k+o(x^k)$（$A\neq 0$，$k>1$，$x\to 0$），求 f 的反函数 f^{-1} 在自变量 $y\to 0$ 时的渐近表达式。

例 4 (有理指数幂函数的渐近展开，Newton的方法，广义二项式展开). 对正有理数 $\frac{m}{n}$，在 $x\to 0$ 时，把 $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ 做渐近展开。

例 5 (幂函数的渐近展开，★). 设 α 为实数，在 $x\to 0$ 时，把 $(1+x)^{\alpha}$ 做渐近展开。

例 6 (指数函数、对数函数、三角函数、反三角的渐近展开，★).

1. 记 $u(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x}$. 证明：$u(x)=o(1)$，并且
$$u(2x)-u(x)-\frac{x}{2}=o(x),\quad x\to 0.$$
由此得到
$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0.$$
2. 记 $v(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{x}$. 证明：$v(x)=o(1)$，并且
$$v(2x)-v(x)+\frac{x}{2}=o(x),\quad x\to 0.$$
由此得到
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0.$$
3. 记 $w(x)=\frac{\sin x-x}{x}$. 证明：$w(x)=o(1)$，并且
$$w(2x)-w(x)+\frac{x^2}{2}=o(x^2),\quad x\to 0.$$
由此得到
$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0.$$
4.
$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0.$$
$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0.$$
5.
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

例 7. （★★）设 $\lambda > 1 \geq |A|, \alpha > 0$，当 $x \to 0$ 时，f 是无穷小量且满足

$$f(\lambda x) - Af(x) - Bx^\alpha = o(x^\alpha).$$

证明 $f(x) = \frac{B}{\lambda^\alpha - A} x^\alpha + o\left(x^\alpha\right), \quad x \to 0$ 。

证明. 猜 $f(x) = Cx^\beta + o(x^\beta)$（$C \neq 0$）。代入已知条件，得到

$$C\lambda^\beta x^\beta - ACx^\beta + o(x^\beta) = Bx^\alpha + o(x^\alpha),$$

即

$$C(\lambda^\beta - A)x^\beta + o(x^\beta) = Bx^\alpha + o(x^\alpha).$$

由 f 是无穷小量知 $\beta > 0$，所以 $\lambda^\beta > 1 \geq A$，因此 $C(\lambda^\beta - A) \neq 0$。由例2结论知 $x^\beta = \frac{B}{C(\lambda^\beta - A)} x^\alpha + o(x^\alpha)$. 从而 $f(x) = Cx^\beta + o(x^\beta) = \frac{B}{\lambda^\beta - A} x^\alpha + o(x^\alpha)$.

若 $B = 0$，则 $x^\beta = o(x^\alpha)$，从而 $f(x) = o(x^\alpha)$，$f(x) = \frac{B}{\lambda^\alpha - A} x^\alpha + o(x^\alpha)$.

若 $B \neq 0$，则 $\beta = \alpha$，此时也成立 $f(x) = \frac{B}{\lambda^\alpha - A} x^\alpha + o(x^\alpha)$. □

找出上述证明中的问题。

例 8. （★）求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

例 9. （★★）求单侧极限 $\lim\limits_{x \to 1^\pm} \dfrac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}}{x - 1}$.

二、极限的综合练习

例 10. 求

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right)$$

例 11. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$.

例 12. 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right)$.

例 13. 求 $\lim\limits_{x \to 0} (2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

例 14. （★）求 $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

例 15. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 求参数 p 的值，使得 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right)$ 为非零实数，并求这个极限的值。

例 16. 比较 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$，$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 作为 e 的误差。