清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　微积分 A(2)　B 卷　　2021 年 6 月 15 日

一．填空题（每空 3 分，共 10 题）

1. 设 $\mathbf{F}(x,y,z)=(\mathrm{e}^{x+y+z},1,\ 1)$，$P_0=(0,0,0)$，则 $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(P_0)=$ ________。

2. 设 $\mathbf{F}(x,y,z)=(x\ln(y+z),y\ln(z+x),z\ln(x+y))$，$P_0=(1,1,1)$，则 $\mathrm{div}\,\mathbf{F}(P_0)=$ ____。

3. 设 a 为常数，且 $\forall A,B\in\mathbf{R}^2$，积分 $\int_{L(A)}^{(B)}(x^2+ayz)\mathrm{d}x+(y^2+2zx)\mathrm{d}y+(z^2+2xy)\mathrm{d}z$ 与路径无关，则 $a=$ ____。

4. 设 2π 周期函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\pi];\\ 0, & x\in(-\pi,0]\end{cases}$ 的形式 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$ ____。

5. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n+\ln n}$ 的收敛性（指明"条件收敛"，"绝对收敛"或"发散"）____。

6. 微分方程 $(y\cos x+\cos y)\mathrm{d}x+(\sin x-x\sin y)\mathrm{d}y=0$ 的通解为 ________。

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n}x^{2n}$ 在 $(-1,1)$ 的和函数为 ____。

8. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le x\}$，$f\in C[0,1]$，将二重积分 $I=\iint\limits_D(f(x)+f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成一重定积分的表达式，则 $I=$ ____。

9. 设 L 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的上半周，$A=(-a,0),B=(a,0)$，则 $\int_{L(A)}^{(B)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=$ ____。

10. 2π 周期函数在区间 $[-\pi,\pi)$ 的定义为 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(0,\pi];\\ 1, & x\in(-\pi,0]\end{cases}$，设 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_n=$ ____。

二. 解答题（共 6 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. （12 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+4y^2\le 1\}$，求 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

12. （16 分）设 S^+：$z=1-x^2-y^2$ （$z\ge 0$），其正法向量的 z 分量大于等于 0，求
$\iint\limits_{\mathrm{S}^+} x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。

13. （12 分）设 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(R>0)$ 包含在圆柱面 $\left(x-\dfrac{R}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$ 内的部分，求 $\iint\limits_S z^3\mathrm{d}S$。

14. （10 分）设 L 为曲线 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$，$t\in[0,2\pi]$，求 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}l$。

15. （12 分）设 $a_n>0, n=1,2,3,\cdots$。

（I）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例；

（II）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例；

（III）若 $\{a_n\}$ 单调，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例。

16. （8 分）设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为有界闭区域，其边界面 $\partial\Omega$ 为光滑正则曲面。

（I）设 $f,g\in\mathrm{C}^{(2)}$，求证：$\iint\limits_{\partial\Omega} f\dfrac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega} f\Delta g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}\nabla f\bullet\nabla g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向量，算子 $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$， $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$；

（II）函数 $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)\in\mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$。若 u 为调和函数（$\Delta u=0$），且当 $(x,y,z)\in\partial\Omega$ 时，$u(x,y,z)-v(x,y,z)=0$，求证：

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\le\iiint\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z。$$

三. 附加题：已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，求证：$\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\dfrac{\pi^2}{12}$。