4.

$f(0)=0$

$f[\{0\}]=\{0\}$

$f[\{0,2,4,6,\cdots\}]=\{0,1,2,3,\cdots\}$

$f[\{1,3,5,\cdots\}]=\{1\}$

$f^{-1}[\{2\}]=\{4\}$

$f^{-1}[\{3,4\}]=\{6,8\}$

5.

(4)

(a) 非满射，单射，非双射

(b) $f(\mathbb{N})=\{\langle n,n+1\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$

$f^{-1}(S)=\emptyset$

(c) $R=I_{\mathbb{N}}$

(5)

(a) 非满射，单射，非双射

(b) $f([0,1])=[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$

$f^{-1}(S)=[0,\frac{1}{2}]$

(c) $R=I_{[0,1]}$

8.

若A为有限集 ($f, g \in A_A$)

则 f, g 均为双射，不满足题意。

$\Rightarrow$ A为无限集

不妨设A为可数集 $\Rightarrow$ 设 $A=\mathbb{N}$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\text{为奇数} \\ \frac{x}{2} & x\text{为偶数} \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{2} & x\text{为奇数} \\ \frac{x}{2} & x\text{为偶数} \end{cases}$$

9.

(1) $m \le n$

若存在函数 f 为单射

则 $\forall x_1 \ne x_2$，$\exists f(x_1) \ne f(x_2)$

$\Rightarrow$ B中至少有m个元素，与A中每个元素对应

(2) $m \ge n$

若存在函数 f 为满射

则 $\forall y \in B$，$\exists x, f(x)=y$

$\Rightarrow$ A中至少有n个元素，与B中每个元素对应

(3) $m=n$

由(1)(2)知 $\begin{cases} m \le n \\ m \ge n \end{cases} \Rightarrow m=n$

11.

f 满射 $\Rightarrow \forall b \in B$，$\exists x \in A \wedge f(x)=b$

g 单射 $\Rightarrow \forall b \in B$，$\exists$ 唯一 $g(b)=\{x \mid x \in A \wedge f(x)=b\}$

因此若 f 满射，则 g 为单射

$\Downarrow$

其逆不成立

12.

$$\forall \langle x,y\rangle \in f \to \langle x,y\rangle \in g$$

$$\begin{array}{ccc} \forall \langle x,y\rangle \in f & \longrightarrow & \langle x,y\rangle \in g \\ \downarrow & & \downarrow \\ x\in A & & x\in C \end{array}$$

$$\forall x\in C \to x\in A$$

因此：

$$\forall \langle x,y\rangle \in g \Rightarrow x\in C \Rightarrow x\in A \Rightarrow (\exists z)\langle x,z\rangle \in f$$
$$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in g$$
$$\Rightarrow y=z$$
$$\Rightarrow \forall \langle x,y\rangle \in g \Rightarrow \langle x,y\rangle \in f$$
$$\Rightarrow g\subseteq f$$
$$\Rightarrow f=g$$

14.

$$f\circ f(n) = n+2$$

$$f\circ g(n) = 2n+1$$

$$g\circ f(n) = 2n+2$$

$$g\circ h(n) = \begin{cases} 0 & n\text{为偶数} \\ 2 & n\text{为奇数} \end{cases}$$

$$h\circ g(n) = 0$$

$$(f\circ g)\circ h = \begin{cases} 1 & n\text{为偶数} \\ 3 & n\text{为奇数} \end{cases}$$

16.

① $\forall f, g \in A^A$, $h\circ f = h\circ g$ 且 h单射 $\Rightarrow f = g$

证: $\forall \langle x, y\rangle \in f \Rightarrow (\exists z)\ \langle y, z\rangle \in h$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in h\circ f \Rightarrow \langle x, z\rangle \in h\circ g \wedge \langle y, z\rangle \in h$

$\Rightarrow \langle y, z\rangle \in h$

因此 $f \subseteq g$
同理 $f \supseteq g$ $\Big\} \Rightarrow f = g$

② $\forall f, g \in A^A$, $h\circ f = h\circ g$ 且 $f = g \Rightarrow h$单射

证: $f = g$

$\forall \langle x, y\rangle \in f \Rightarrow \langle x, h(y)\rangle \in h\circ f$

$\forall \langle x, y'\rangle \in g \Rightarrow \langle x, h(y)\rangle \in h\circ g$

因此

$y = y' \Rightarrow h(y) = h(y')$

$\Rightarrow h$为单射

17.