1. (Rudin 200 页练习 20) 用如下方法可给出 Stirling's 公式的一个版本.

定义分段线性函数 $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ 为: 对每个正整数 m, f 在区间 $[m, m+1]$ 上的值为

$$f(x) = (m+1-x)\ln m + (x-m)\ln(m+1), \quad x \in [m, m+1].$$

定义分段线性函数 $g : [\frac{1}{2}, +\infty)$ 为: 对每个正整数 m, g 在区间 $[m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2})$ 上的值为

$$g(x) = \frac{x-m}{m} + \ln m, \quad x \in [m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}).$$

(1) 利用 $\ln x$ 的上凸性证明: 对 $x \geq 1$ 有 $f(x) \leq \ln x \leq g(x)$.

(2) 对正整数 n, 计算如下积分的值

$$\int_1^n f(x)dx, \quad \int_1^n g(x)dx.$$

(3) 利用 $\int_1^n f(x)dx \leq \int_1^n \ln x dx \leq \int_1^n g(x)dx$ 证明: 对正整数 $n \geq 2$ 有

$$\frac{7}{8} \leq \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln n + n \leq 1.$$

(4) 证明: 对正整数 $n \geq 2$ 有

$$e^{7/8} \leq \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}} \leq e.$$

2. (Rudin 201 页练习 22) 已知对任何实数 α, 有

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad \forall |x| < 1.$$

证明: 对正数 α, 有

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}x^n, \quad \forall |x| < 1,$$

其中 $\Gamma(\alpha)$ 是 gamma 函数.

3. 完成讲义上 34 页中如下断言的证明.

利用 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, 结合 Bohr–Mollerup theorem 可证明 *Legendre duplication formula*:

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

4. (Stein & Shakarchi 书上 161 页练习 2) 定义 f, g 为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } |x| \le 1, \\ 0, & \text{如果 } |x| > 1. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{如果 } |x| \le 1, \\ 0, & \text{如果 } |x| > 1. \end{cases}$$

证明: 它们的 Fourier 变换分别为

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \quad \widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2, \quad \forall \xi \neq 0,$$

且 $\widehat{f}(0) = 2$, $\widehat{g}(0) = 1$.

5. (Stein & Shakarchi 书上 150 页引理 2.4)

对每个 $y > 0$, 定义关于 x 的 *moderate decrease* 函数

$$P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

求 $P_y(x)$ 的 Fourier 变换与 Fourier 逆变换.

6. (Stein & Shakarchi 书上 163 页练习 7) 称连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 *moderate decrease*, 如果存在正数 A 使得

$$|f(x)| \le \frac{A}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

设 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 都是 *moderate decrease* 函数. 证明: 它们的卷积函数 $f * g$ 也是 *moderate decrease* 函数.

提示: 设 $|f(x)| \le \frac{A}{1+x^2}, |g(x)| \le \frac{B}{1+x^2}$, 来估计 $f * g(x)$, 则有

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right| \\
&= \left| \int_{|y| \le \frac{|x|}{2}} f(x-y)g(y)dy + \int_{|y| \ge \frac{|x|}{2}} f(x-y)g(y)dy \right| \\
&\le \int_{|y| \le \frac{|x|}{2}} |f(x-y)g(y)|dy + \int_{|y| \ge \frac{|x|}{2}} |f(x-y)g(y)|dy \\
&\le \int_{|y| \le \frac{|x|}{2}} \frac{A}{1+(x-y)^2}|g(y)|dy + \int_{|y| \ge \frac{|x|}{2}} |f(x-y)| \frac{B}{1+y^2}dy \\
&\le \frac{1}{1+(x/2)^2} \left(A \int_{-\infty}^{+\infty} |g| + B \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \right) \\
&\le \frac{C}{1+x^2}.
\end{aligned}$$