目录

1 Fourier 级数的定义

Fourier 分析, 是分析学的重要分支. 它研究如何将一个函数或信号表达为 (或者近似为) 简单三角函数之和. 它包含至少两方面内容: *Fourier* 级数理论与 *Fourier* 变换理论.

定义 1.1. 一个三角多项式是指形如

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的函数, 其中 $a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ 是实数或复数, $P(x)$ 是周期为 2π 的函数.

利用 *Euler* 公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 可将上述 P 改写为

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{a_n + b_n i}{2} e^{-inx} + \frac{a_n - b_n i}{2} e^{inx} \right) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

例 1.2 (三角多项式的积分)**.** 对正整数 n, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0.$$

对正整数 m, n 有

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{如果 } m \neq n, \\ \pi, & \text{如果 } m = n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin nx dx = 0.$$

例 1.3 (复值函数的求导与积分)**.** 对 $\mathbb{R}$ 上的复值函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 若记 $f(x) = u(x) + iv(x)$, 则可定义 f 的导数与积分分别为

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x), \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

在此定义下, 有 $(e^{inx})' = ine^{inx}$, 且有求导的 *Leibniz* 法则成立: 若 f, g 都可导, 则有 $(fg)' = f'g + fg'$.

对复值函数, 也有 *Newton-Leibniz 公式*: 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, F 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任何 $x \in (a,b)$ 都有 $F'(x) = f(x)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

由此可得*分部积分公式*: 若 f, g 是 C^1 光滑的复值函数, 则有

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = fg\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

例 1.4. 可将例1.2的结果改写成: 对整数 m, n 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = 2\pi\delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n \neq m, \\ 2\pi, & \text{如果 } n = m, \end{cases}$$

其中 $\delta_{n,m}$ 是 *Kronecker 符号*.

例 1.5. 称如下的三角多项式

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$$

为第 *N 个狄利克雷核 (Dirichlet Kernel)*.

记前 N 个狄利克雷核的平均为

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N} = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

称之为*第 N 个费耶核 (Fejér Kernel)*.

定义 1.6. 一个*三角级数*是指形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的函数级数. 记其部分和函数为

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

定义上述三角级数的和函数为 $S(x) = \lim\limits_{N\to\infty} S_N(x)$.

若用指数函数 e^{inx} 表示, 则三角级数形如

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

其部分和函数为

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx},$$

定义三角级数的和函数为

$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

问题 1.7. *给定周期为 2π 的函数 f, 能否将 f 表示成三角级数?*

若三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 则可逐项积分得到

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{1}$$

由此可知, 要将 f 表示为三角级数, 只有唯一的候选级数.

定义 1.8. 设 f 是周期为 2π 的函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则定义 f 的 *Fourier* 系数如(1)式所示, 称对应的三角级数为 f 的 *Fourier* 级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

为了写成更加对称的形式, 我们更喜欢用 $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ 表示 f 的 Fourier 级数.

定义 1.9. 设 f 是周期为 L 的函数, 且在任何一个周期 $[a,b]$ 上可积 (这里 $b-a=L$), 定义 f 的第 n 个 *Fourier* 系数为

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{-2\pi inx/L}dx,$$

定义 f 的 *Fourier* 级数为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x/L},$$

形式化的记录为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x/L}.$$

若 f 的周期为 2π, 则 f 的 Fourier 系数为

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-inx} dx.$$

注意, 在上述定义中, 我们只是对可积函数 f 定义了其 Fourier 系数, 并没有谈及相应的 Fourier 级数是否收敛, 更没有讨论 Fourier 级数是否收敛到 f.

对正整数 N, 定义 f 的 Fourier 级数的第 N 个部分和为

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x/L}.$$

Fourier 级数理论的基本问题如下:

问题 1.10. *在怎样的意义下, 当 $N \to \infty$ 时有 $S_N(f)$ 收敛到 f?*

更加具体的, 是否对每个 x 都有

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x)?$$

容易看出, 我们不能期望上述结果对所有的 x 都成立, 因为总可修改可积函数在一点处的值而保持 Fourier 系数不变. 这样, 我们可能会对连续的周期函数 f 问同样的问题, 此问题的答案仍然是否定的, 1873 年 Du Bois-Reymond 构造了一个连续函数, 其 Fourier 级数在某点处发散.

另一方面, 有如下正面的结果. 我们将在下一节中证明: 若 f 是 C^1 光滑的周期函数, 则其 Fourier 级数一致收敛到 f. 一般可积函数 Fourier 级数的逐点收敛性问题, 在 1966 年由 L.Carleson 解决, 他证明了: 至多除了一个测度为零的集合之外, 在其余点处 f 的 Fourier 级数都收敛到 f. Carleson 的证明是非常复杂的, 直到 1990 年代才被数学家们更好的理解.

例 1.11. 设 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = x$, 则其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

例 1.12. 设 $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = \frac{(\pi - x)^2}{4}$, 则其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

2 Fourier 级数的逐点收敛性

定义 2.1. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 所谓 V 上的一个*内积*是指一个映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, 要求它满足如下三个条件:

(i) 共轭对称性: 对任何 $x, y \in V$ 有 $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(ii) 关于第一个分量是线性的: 对任何 $x, y, z \in V$ 与 $a, b \in \mathbb{C}$ 有

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle;$$

(iii) (半) 正定性: 对任何 $x \in V$ 有 $\langle x, x \rangle \geq 0$.

定义 V 中成员 x 的*范数 (norm)* 为

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

由条件 (i) 可知 $\langle x, x \rangle = \overline{\langle x, x \rangle}$, 表明 $\langle x, x \rangle$ 是实数; 由条件 (i) 与 (ii) 可知内积关于第二个分量是共轭线性的:

$$\langle w, ax + by \rangle = \overline{a}\langle w, x \rangle + \overline{b}\langle w, y \rangle;$$

在条件 (iii) 中我们只要求半正定性, 这是因为在 Fourier 级数理论中可积复值函数构成的线性空间上自然的内积结构不是严格正定的. 称内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是严格正定的, 如果对 $x \neq 0$ 有 $\langle x, x \rangle > 0$.

例 2.2. $\mathbb{C}^n$ 上有如下内积: 对 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n), \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, 定义

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}.$$

例 2.3. 用 $\mathcal{R}$ 表示由所有周期为 2π 的可积复值函数构成的集合, 则 $\mathcal{R}$ 上有如下内积: 对 f, g 定义

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

在此内积下, f 的范数为

$$||f|| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

定义 2.4. 设 V 是内积空间, 称 V 的成员 x 与 y 正交, 记作 $x \perp y$, 如果 $\langle x, y\rangle = 0$.

命题 2.5. *设 V 是内积空间.*

(1) 毕达哥拉斯定理*: 若 x 与 y 正交, 则* $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

(2) Cauchy-Schwartz 不等式*: 对任何 $x, y \in V$, 有*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

(3) 三角不等式*: 对任何 $x, y \in V$, 有*

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

证明: (1) 直接计算可得

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2.$$

(2) 设 $\langle x, y\rangle = re^{i\theta}$. 对任何实数 t, 利用内积的正定性可得

$$0 \leq \langle x - te^{i\theta}y, x - te^{i\theta}y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 \cdot t^2 - 2rt,$$

表明函数 $g(t) = ||x||^2 + ||y||^2 \cdot t^2 - 2rt$ 在 $\mathbb{R}$ 上取值非负. 当 $||y|| = 0$ 时, 一次函数 $g(t) = -2rt + ||x||^2$ 取值非负, 可知 $r = 0$; 当 $||y||^2 > 0$ 时, 二次函数 $g(t)$ 取值非负, 可得其判别式 $\Delta \leq 0$, 即有 $(2r)^2 - 4||x||^2 \cdot ||y||^2 \leq 0$, 得到 $r \leq ||x|| \cdot ||y||$.

(3) 利用 (2) 的结论, 可得

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2\big|\langle x, y\rangle\big| \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| = \left(||x|| + ||y||\right)^2. \end{aligned}$$

□

以下我们来研究 *Fourier* 级数的收敛问题. 对周期可积函数构成的空间 $\mathcal{R}$ 赋予例2.3 中所述的内积结构. 对每个整数 n, 定义 $\mathbf{e}_n(x) = e^{inx}$, 例1.4的结果表明

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m\rangle = \delta_{n,m},$$

即 $\{\mathbf{e}_n : n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{R}$ 的一个正交规范向量组. 对 $f \in \mathcal{R}$, 其 *Fourier* 系数为

$$\widehat{f}(n) = \langle f, \mathbf{e}_n \rangle,$$

f 的 *Fourier* 级数为

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx},$$

Fourier 级数的第 N 个部分和为

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) \mathbf{e}_n.$$

命题 2.6. 设 f 是周期为 2π 的可积函数, 则级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2$$

收敛, 且有如下的 Bessel 不等式成立:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \le ||f||^2.$$

证明: 记 f 的 Fourier 系数为 $a_n = \widehat{f}(n)$. 对整数 $m \in [-N, N]$ 有

$$\langle f - S_N(f), \mathbf{e}_m \rangle = \langle f, \mathbf{e}_m \rangle - \langle \sum_{n=-N}^{N} a_n \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = a_m - \sum_{n=-N}^{N} a_n \delta_{n,m} = 0,$$

由此可知 $f - S_N(f) \perp S_N(f)$. 利用毕达哥拉斯定理可得

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= ||S_N(f) + (f - S_N(f))||^2 = ||S_N(f)||^2 + ||f - S_N(f)||^2 \\ &\ge ||S_N(f)||^2 = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2, \end{aligned}$$

这表明 $\{\sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2\}$ 关于 N 单调递增且有上界 $||f||^2$, 由此可得级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$ 收敛且有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \le ||f||^2.$$

□

定理 2.7 (*Riemann-Lebesgue lemma*)**.** 设 f 是周期为 2π 的可积函数, 则当 $n \to \infty$ 时有 $\widehat{f}(n) \to 0$. 一般的, 若 f 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)e^{2\pi inx/(b-a)}dx = 0.$$

证明*:* 由命题2.6的结论, 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2$ 收敛, 因而有 $\lim\limits_{n\to\infty}|\widehat{f}(n)| = 0$. $\square$

命题 2.8 (最佳逼近)**.** 设 f 是周期为 2π 的可积函数, $a_n = \widehat{f}(n)$ 是其 *Fourier* 系数, 则对任何复数 $c_{-N}, \ldots, c_N$ 有

$$||f - S_N(f)|| \leq ||f - \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathbf{e}_n||,$$

等号成立当且仅当对每个 $|n| \leq N$ 都有 $c_n = a_n$.

证明*:* 利用毕达哥拉斯定理可得

$$\begin{aligned}
||f - \sum_{n=-N}^{N} c_n\mathbf{e}_n||^2 &= ||\left(f - \sum_{n=-N}^{N} a_n\mathbf{e}_n\right) + \sum_{n=-N}^{N}(a_n - c_n)\mathbf{e}_n||^2 \\
&= ||f - S_N(f)||^2 + \sum_{n=-N}^{N}|a_n - c_n|^2 \\
&\geq ||f - S_N(f)||^2.
\end{aligned}$$

$\square$

定理 2.9 (Fourier 级数逐点收敛定理)**.** 设 f 是周期为 2π 的可积函数, 且在 x_0 处可微, 则有

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0).$$

证明*:* 定义

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{x}, & \text{如果 } x \neq 0 \text{ 且 } |x| \leq \pi \\ -f'(x_0), & \text{如果 } x = 0. \end{cases}$$

利用命题13.5可证明 F 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积.

直接计算可得

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x_0) - f(x_0) &= \left(\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{in(x_0-x)} dx\right) - f(x_0) \\
&= \left(\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - x) e^{inx} dx\right) - f(x_0) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - x) D_N(x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) D_N(x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - x) - f(x_0)) D_N(x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{x \sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \sin Nx dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) x \cos Nx dx,
\end{aligned}$$

对可积函数 $F(x)\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}$ 与 $F(x)x$ 用 *Riemann-Lebesgue lemma*, 可得当 $N \to \infty$ 时上式右边趋于零. 这就证明了

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0).$$

□

沿用上述证明方法, 可得如下的 *Dirichlet–Dini Criterion*.

定理 2.10 (Dirichlet–Dini Criterion)**.** *设 f 是周期为 2π 的可积函数, 若实数 L 满足*

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} - L \right| \cdot \frac{dt}{t} < +\infty,$$

则 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛到 L, 即有

$$\lim_{N \to \infty} S_N(f)(x_0) = L.$$

推论 2.11. *设 f 是周期为 2π 的可积函数, 且 x_0 处 f 的左右极限 $f(x_0-), f(x_0+)$ 与左右导数 $f'(x_0-), f'(x_0+)$ 都存在, 则有*

$$\lim_{N \to \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}.$$

3 Fourier 级数的均方收敛性 *

定理 3.1. *设 f 是周期为 2π 的周期函数, 其 Fourier 级数为 $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$, 则有*

(1)Fourier 级数的均方收敛性:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_N(f)(x) \right|^2 dx = 0.$$

(2) 帕塞瓦尔等式 (Parseval's theorem):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(n) \right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

证明概要. 证明分成如下三步.

(1) 先证明连续周期函数可用三角多项式逼近. 具体的说, 对任何周期 2π 的连续函数 g, 对任何正数 ϵ, 都存在三角多项式 $P(x)$ 使得

$$|g(x) - P(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

设 $S_k(g)(x)$ 是 g 的 Fourier 级数的第 k 个部分和函数, 令

$$\sigma_N(g)(x) = \frac{S_0(g)(x) + \cdots + S_{N-1}(g)(x)}{N}$$

为 $S_0(g), \ldots, S_{N-1}(g)$ 的平均, 则有

$$\sigma_N(g)(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(g(x_0 - x) - g(x_0)\right) F_N(x) dx,$$

其中 $F_N(x)$ 是例1.5中所述的第 N 个费耶核. 由于 g 在 x_0 处连续, 存在 $\delta > 0$ 使得对任何 $|x| \le \delta$ 有 $|g(x_0 - x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$, 从而有

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{|x|\le\delta} \left(g(x_0 - x) - g(x_0)\right) F_N(x) dx\Big| \le \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{|x|\le\delta} F_N(x) dx \le \frac{\epsilon}{2}.$$

设 $\max_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x)| = K$, 则当 N 充分大时 ($N > \frac{4K}{\epsilon \sin\frac{\delta}{2}}$) 有

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{|x|\ge\delta} \left(g(x_0 - x) - g(x_0)\right) F_N(x) dx\Big| \\
\le& \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\ge\delta} 2K \cdot \frac{1}{N\sin^2\frac{\delta}{2}} dx \\
\le& \frac{2K}{N\sin^2\frac{\delta}{2}} \\
<& \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

结合这两方面, 可知当 $N > \frac{4K}{\epsilon \sin \frac{\delta}{2}}$ 时有

$$\left|\sigma_N(g)(x_0) - g(x_0)\right| < \epsilon, \quad \forall x_0 \in [-\pi, \pi].$$

令 $P(x) = \sigma_N(g)(x)$, 它是 $g(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的三角多项式逼近.

(2) 再证明任何可积周期函数可用连续周期函数逼近.

设 f 是周期 2π 的可积函数, K 是 $|f|$ 的上界, 则对任何正数 ϵ, 都存在周期 2π 的连续函数 g, 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx < \epsilon^2, \qquad \text{且} \max_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)| \le K.$$

由此可得

$$||f - g||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \le \frac{2K}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx \le \frac{K}{\pi} \epsilon^2,$$

即有 $||f - g|| \le C\epsilon$.

(3) 结合 (1), (2), 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 f 的连续函数逼近 g, 以及 g 的三角多项式逼近 P, 满足

$$||f - P|| \le ||f - g|| + ||g - P|| \le (1 + C)\epsilon.$$

设三角多项式 $P(x)$ 的次数为 N_0, 即 $P(x)$ 形如 $\sum\limits_{n=-N_0}^{N_0} b_n e^{inx}$. 对正整数 $N \ge N_0$, 由命题2.8可得

$$||f - S_N(f)|| \le ||f - \sum_{n=-N_0}^{N_0} b_n e^{inx}|| \le (1 + C)\epsilon.$$

这就证明了 Fourier 级数的均方收敛性:

$$\lim_{N \to \infty} ||f - S_N(f)|| = 0.$$

再结合毕达哥拉斯定理可得

$$||f||^2 - ||S_N(f)||^2 = ||f - S_N(f)||^2 \le (1 + C)^2 \epsilon^2,$$

即有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \le (1 + C)^2 \epsilon^2.$$

由此可得帕塞瓦尔等式. $\square$

推论 3.2 (一般形式的帕塞瓦尔等式). 设 f, g 是周期为 2π 的可积函数, 它们的 *Fourier* 级数分别为

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{inx},$$

则有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

证明: 注意到, 有如下恒等式

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \left(||f+g||^2 - ||f-g||^2 + i(||f+ig||^2 - ||f-ig||^2) \right),$$

之后再用 $f+g, f-g, f+ig, f-ig$ 的帕塞瓦尔等式代入即可. □

4 Fourier 级数的应用

定理 4.1 (等周不等式). 设 D 是由光滑封闭曲线 C 所围成的有界区域, 若 C 的长度为 ℓ, 则 D 的面积 A 满足

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

当且仅当 C 是圆周时上式取等号.

证明: 不妨设 $\ell = 2\pi$, 来证明 $A \leq \pi$.(对一般的情形, 引入坐标变换 $x' = \frac{2\pi}{\ell}x, y' = \frac{2\pi}{\ell}y$, 在新坐标系中 C 的长度为 2π, D 的面积为 $(\frac{2\pi}{\ell})^2 A$, 由特例的结论可得 $(\frac{2\pi}{\ell})^2 A \leq \pi$, 得证一般情形的等周不等式.)

任取 C 的一个参数化 $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, 令 $h(t) = \int_a^t ||\eta'(t)||dt$, 令 $\gamma(s) = \eta(h^{-1}(s))$, 它给出 C 的弧长参数化 $\gamma : [0, 2\pi] \to C$, 满足 $||\gamma'(s)|| = 1$.

设 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, 则 $x(s), y(s)$ 是周期为 2π 的光滑实值函数. 考虑 $x(s), y(s)$ 的 Fourier 级数

$$x(s) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ins}, \quad y(s) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{ins}.$$

用分部积分计算 Fourier 系数, 可得 $x'(s), y'(s)$ 的 Fourier 级数为

$$x'(s) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} ina_n e^{ins}, \quad y'(s) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} inb_n e^{ins}.$$

由条件 $x'(s)^2+y'(s)^2=1$ 及帕塞瓦尔等式可得

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x'(s)^2+y'(s)^2\right)ds=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2(|a_n|^2+|b_n|^2). \tag{2}$$

利用 Green 公式与推论3.2, 可计算 D 的面积:

$$\begin{aligned}A&=\iint_D dxdy\\&=\frac{1}{2}\Big|\int_{\partial D}xdy-ydx\Big|\\&=\frac{1}{2}\Big|\int_0^{2\pi}\left(x(s)y'(s)-y(s)x'(s)\right)ds\Big|\\&=\pi\Big|\sum_{n=-\infty}^{\infty}n(a_n\overline{b_n}-\overline{a_n}b_n)\Big|.\end{aligned}$$

结合(2)式可得

$$A\le\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\cdot2|a_n||b_n|\le\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2(|a_n|^2+|b_n|^2)=\pi.$$

□

5 广义积分

5.1 Motivation

Riemann 积分是 Riemann 和的极限

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\text{分割越来越细}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

它描述了由 f 的函数图像, 直线 $x=a$, 直线 $x=b$ 以及直线 $y=0$ 围成的曲边四边形的面积.

例 5.1. "计算" 由函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的图像, 直线 $x=1$ 以及直线 $y=0$ 围成的无界区域的面积.

利用直线 $x=b$ 做截断, 截得的曲边四边形面积为 $\int_1^b\frac{1}{x^2}dx$. 当 $b\to+\infty$ 时, 有理由相信, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx$ 描述了上述无界区域的大小. 我们把 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 称为 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分.

例 5.2. "计算" 由函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的图像, 直线 $x=0$, 直线 $x=1$ 以及直线 $y=0$ 围成的无界区域的面积.

由于 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 是 $[0,1]$ 上的无界函数, Riemann 积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 不存在. 只能用直线 $x=\epsilon$ 截出有限区域, 计算其面积, 再对 $\epsilon\to 0^+$ 取极限

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

这个极限值描述了该无界区域的大小. 我们把 $\lim\limits_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$ 称为 f 在 $[a,b]$ 上的瑕积分.

总结一下,

- Riemann 积分: $\int_{\text{有界区间}}$ 有界函数.
- 无穷积分: $\int_{\text{无界区间}}$ 函数.
- 瑕积分: $\int_{\text{有界区间}}$ 无界函数.

我们把无穷积分与瑕积分统称为反常积分.

5.2 无穷积分的定义

定义 5.3. (1) 设函数 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足: 对任何 $b>a$, f 在 $[a,b]$ 上可积. 如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

(2) 类似的, 定义反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

(3) 如果反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 记作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

例 5.4. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

例 5.5.

$$\int_1^{\infty} x^p dx = \begin{cases} \text{发散}, & \text{如果} p \geq -1, \\ -\frac{1}{1+p}, & \text{如果} p < -1. \end{cases}$$

5.3 瑕积分的定义

定义 5.6. (1) 设 $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ 满足: 对任何 $a < c < b$, f 在 $[c, b]$ 上可积, 但当 $x \to a^+$ 时 f 无界. 如果极限

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

存在, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

如果上述极限不存在, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

(2) 类似的, 如果 $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ 满足: 对任何 $a < c < b$, f 在 $[a, c]$ 上可积, 但当 $x \to b^-$ 时 f 无界. 定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

定义 5.7. 如果 f 在 c 附近无界, 则称 c 是瑕点. 设对任何 $\epsilon > 0$, f 在 $[a, c - \epsilon]$ 与 $[c + \epsilon, b]$ 上都可积. 如果瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 且定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

例 5.8. 设 $p > 0$, 考虑暇积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ 的收敛性, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \text{发散}, & \text{如果} p \geq 1, \\ \frac{1}{1-p}, & \text{如果} 0 < p < 1. \end{cases}$$

例 5.9. 设 $p > 0$, 考虑暇积分 $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}dx$ 的收敛性, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}dx = \begin{cases} \text{发散}, & \text{如果} p \geq 1, \\ \frac{1}{1-p}, & \text{如果} 0 < p < 1. \end{cases}$$

6 广义积分的收敛性

6.1 非负函数无穷积分的收敛性

命题 6.1. 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是非负函数，且对任何 $b>a$, f 在 $[a,b]$ 上可积，则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是 $\{\int_a^A f(x)dx\}_{A>a}$ 有上界.

定理 6.2 (比较判别法). 设 f 与 g 在任何闭区间 $[a,b]$ 上都可积，且满足对任何 $x\geq a$, 都有

$$0\leq f(x)\leq g(x).$$

(1) 如果 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(2) 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

推论 6.3 (比较判别法的极限形式). 设非负函数 f 与 g 在任何闭区间 $[a,b]$ 上都可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$(如果当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{f(x)}{g(x)}$ 趋近于 $+\infty$, 则约定 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$).

(1) 当 $0\leq k<+\infty$ 时，如果 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(2) 当 $0<k\leq+\infty$ 时，如果 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

特别的，当 $0<k<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同时收敛或发散.

推论 6.4. 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数.

(1) 如果存在 $p>1$, 使得极限 $0\leq\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)<+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(2) 如果存在 $p\leq 1$, 使得极限 $0<\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)\leq+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例 6.5. 无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 收敛. 以后我们会算出 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 它在概率论与物理中经常出现.

例 6.6. 考察无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^k\ln x}$ 的收敛发散性.

6.2 一般函数无穷积分的收敛性

定理 6.7 (Cauchy 收敛准则). 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ 满足对任何 $b>a$, f 在 $[a,b]$ 上可积. 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是：对任何 $\epsilon>0$, 存在某个 (依赖于 ϵ 的) 常数 K, 使得对任何 $\beta>\alpha>K$, 都有 $|\int_\alpha^\beta f(x)dx|<\epsilon$.

定理 6.8. 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

定义 6.9. 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛; 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛但 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 条件收敛.

6.3 瑕积分的收敛性

命题 6.10. 设 $f:(a,b]\to\mathbf{R}$ 是非负函数, 且对任何 $a<c<b$, f 在 $[c,b]$ 上可积, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是 $\{\int_c^b f(x)dx\}_{a<c<b}$ 有上界.

定理 6.11 (比较判别法)**.** 设 f 与 g 在任何闭区间 $[c,b]$ 上都可积 *(*$a<c<b$*)*, 且满足对任何 $x\in(a,b]$, 都有

$$0\le f(x)\le g(x).$$

(1) 如果瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(2) 如果瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散.

推论 6.12 (比较判别法的极限形式)**.** 设非负函数 f 与 g 在任何闭区间 $[c,b]$ 上都可积 *(*$a<c<b$*)*, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$.

(1) 当 $0\le k<+\infty$ 时, 如果瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(2) 当 $0<k\le+\infty$ 时, 如果瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

特别的, 当 $0<k<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同时收敛或发散.

注 6.13. 使用比较定理时, 如果 a 是暇点, 我们经常把 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ 比较. 如果 b 是暇点, 经常把 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx$ 比较.

例 6.14. 设 $0\le k<1$, 则瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ 收敛.

例 6.15. 设 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 则瑕积分 $\displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}$ 收敛.

例 6.16. 设 $p>0$, 考虑暇积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}$ 的收敛性.

证明*:* (1) $0<p<1$ 时, 取 $0<\epsilon<1-p$. 由洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\ln x|}{x^{-\epsilon}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^{-1}}{-\epsilon x^{-\epsilon-1}}=0,$$

因此有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\ln x|/x^p}{1/x^{p+\epsilon}}=0,$$

由于 $p+\epsilon<1$, $\int_0^1\frac{1}{x^{p+\epsilon}}dx$ 收敛. 由比较定理的极限形式知 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^p}$ 也收敛.

(2) $p \geq 1$ 时,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\ln x|/x^p}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} |\ln x|(\frac{1}{x})^{p-1} = +\infty,$$

由比较定理的极限形式知 $\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^p}$ 发散.

□

定理 6.17 (Cauchy 收敛准则)**.** *设 f 在任何闭区间 $[c, b]$ 上可积 $(a < c < b)$. 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是: 对任何 $\epsilon > 0$, 存在某个 (依赖于 ϵ 的) 常数 $a < K < b$, 使得对任何 $a < \alpha < \beta < K$, 都有 $|\int_\alpha^\beta f(x)dx| < \epsilon$.*

定理 6.18. *设 f 与 $|f|$ 在任何闭区间 $[c, b]$ 上可积 $(a < c < b)$. 如果瑕积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.*

例 6.19 (Gamma 函数)**.** $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, 其中 $x > 0$. 可以证明 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, 由此可知对任何正整数 n, 有 $\Gamma(n) = (n-1)!$.

证明: $t = 0$ 可能是瑕点, 考虑瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 及无穷积分 $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 的收敛性.

(1) 瑕积分的收敛性.

- 当 $x \geq 1$ 时, $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 是正常积分.
- 当 $0 < x < 1$ 时, 对任何 $t \in (0, 1]$, 有 $t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^{1-x}}$, 由比较定理知瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 收敛.
- 当 $x \leq 0$ 时, 对任何 $t \in (0, 1]$, 有 $t^{x-1}e^{-t} \geq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{t}$, 由比较定理知瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 发散.

(2) 无穷积分的收敛性. 注意到

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0,$$

由比较定理的极限形式知无穷积分 $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 收敛.

结合这两方面, 对任何 $x > 0$,

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

收敛. 当 $x \leq 0$ 时, 上述积分发散. □

例 6.20. 设 a 是正实数, b, c 是实数.

(1) 证明: 无穷积分
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx$$
收敛.

(2) 设无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 的值等于 I. 请把无穷积分
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx$$
的值用 a, b, c 与 I 表示.

解. (1) 利用无穷积分的定义, 有
$$\int_0^{+\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}(-e^{-x})|_0^A = 1,$$
$$\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 e^{x}dx = \lim_{A\to+\infty} e^{x}|_A^0 = 1,$$
故无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$ 收敛. 注意到, 由于 $a>0$, 有
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-ax^2-bx-c}}{e^{-|x|}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp\left(x^2\cdot(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}-\frac{|x|}{x^2})\right)} = 0,$$
由比较定理的极限形式, 无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx$ 收敛.

(2) 令 $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$, 利用定积分的换元法, 可得
$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} e^{-ax^2-bx-c}dx &= \int_{-M}^{M} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2-4ac}{4a}}dx \\ &= \frac{\exp(\frac{b^2-4ac}{4a})}{\sqrt{a}}\int_{(-M+\frac{b}{2a})\sqrt{a}}^{(M+\frac{b}{2a})\sqrt{a}} e^{-y^2}dy.\end{aligned} \tag{3}$$

注意到
$$\lim_{M\to+\infty}(-M+\frac{b}{2a})\sqrt{a} = -\infty, \quad \lim_{M\to+\infty}(M+\frac{b}{2a})\sqrt{a} = +\infty,$$
从而有
$$\lim_{M\to+\infty}\int_{(-M+\frac{b}{2a})\sqrt{a}}^{(M+\frac{b}{2a})\sqrt{a}} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = I.$$

代入 (3) 式, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} e^{-ax^2-bx-c}dx = \frac{\exp(\frac{b^2-4ac}{4a})}{\sqrt{a}}I.$$

□

例 6.21. 对非负整数 n, 考虑积分 $\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2}dx$, 人们可以证明当 $A \to +\infty$ 时, 极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2}dx\right)$ 存在, 记作

$$J_n = \lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2}dx\right).$$

证明:

(1) 当 n 是奇数时, $J_n = 0$.

(2) 对每个非负整数 n, 都有

$$J_{n+2} = \frac{n+1}{2}J_n.$$

证明: (1) 当 n 是奇数时, $x^n e^{-x^2}$ 是奇函数, 则有 $\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2}dx = 0$. 对 $A \to +\infty$ 取极限, 可知此时有 $J_n = 0$.

(2) 分部积分, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2}dx = \int_{-A}^{A}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' e^{-x^2}dx \\
=&\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x^2}|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A}\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot e^{-x^2}(-2x)dx \\
=&\frac{A^{n+1}}{n+1}e^{-A^2} - \frac{(-1)^{n+1}A^{n+1}}{n+1}e^{-A^2} + \frac{2}{n+1}\int_{-A}^{A} x^{n+2}e^{-x^2}dx,
\end{aligned}$$

对 $A \to +\infty$ 取极限, 可得

$$J_n = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{n+1}}{n+1}e^{-A^2} - \frac{(-1)^{n+1}A^{n+1}}{n+1}e^{-A^2}\right) + \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$

注意到, 多次使用洛必达法则可得

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{A^{n+1}}{e^{A^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{(n+1)/2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2}x^{(n-1)/2}}{e^x} = ... = 0,$$

所以有

$$J_n = \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$

□

7 含参变量的正常积分

定理 7.1. 设 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

(1) 含参积分 $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 是 $[c,d]$ 上的连续函数.

(2) 若 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则含参积分 $F(y)$ 是 $[c,d]$ 上的 C^1 光滑函数, 且有

$$F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

证明: (1) 来证明 $F(y)$ 在每点 y_0 处连续. 由于紧集上的连续函数是一致连续的, 可知对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 I 中距离小于 δ 的两点 $(x,y),(x',y')$ 都有 $|f(x,y)-f(x',y')|<\epsilon$. 特别的, 对任何 $|y-y_0|<\delta$ 有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\epsilon,\quad \forall x\in[a,b].$$

由此可得

$$|F(y)-F(y_0)|=\Big|\int_a^b (f(x,y)-f(x,y_0))dy\Big|\le\int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|dy\le\epsilon(b-a),$$

这就证明了 F 在 y_0 处连续.

(2) 来证明

$$\lim_{h\to0}\frac{F(y_0+h)-F(y_0)}{h}=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx.$$

由 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 I 上连续可知其一致连续, 即对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 I 中距离小于 δ 的两点 $(x,y),(x',y')$ 都有 $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x',y')|<\epsilon$. 特别的, 对任何 $|h|<\delta$, 有

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\Big|<\epsilon,\quad \forall t\in[y_0,y_0+h],\forall x\in[a,b].$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{F(y_0+h)-F(y_0)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx\Big|\\
=&\Big|\int_a^b\left(\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right)dx\Big|\\
=&\Big|\int_a^b dx\frac{1}{h}\int_{y_0}^{y_0+h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right)dt\Big|\\
\le&\int_a^b dx\Big|\frac{1}{h}\int_{y_0}^{y_0+h}\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\Big|dt\Big|\\
\le&(b-a)\epsilon,
\end{aligned}$$

从而完成了证明. □

命题 7.2. 设 f 与其对 y 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都是 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数, 设 α,β 是 $[c,d]$ 上的 C^1 光滑函数, 且取值在 $[a,b]$ 中. 定义含参积分

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dy,$$

则 F 是 $[c,d]$ 上的 C^1 光滑函数, 且有

$$F'(y)=f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

证明: 定义二元函数 $H:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为

$$H(\beta,y)=\int_a^\beta f(x,y)dx.$$

由一元函数的变上限积分定理可知 $\frac{\partial H}{\partial\beta}(\beta,y)=f(\beta,y)$. 由定理7.1可得

$$\frac{\partial H}{\partial y}(\beta,y)=\int_a^\beta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,$$

且上式右边关于 y 是连续的. 再由一元函数的变上限积分定理可知上式右边关于 β 也连续. 这样, H 有连续的偏导函数, 即 H 是 I 上的 C^1 光滑函数.

注意到

$$F(y)=H(\beta(y),y)-H(\alpha(y),y),$$

结合链式法则可得

$$\begin{aligned}F'(y)&=\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}(\beta(y),y)\beta'(y)\right)+\frac{\partial H}{\partial y}(\beta(y),y)-\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}(\alpha(y),y)\alpha'(y)+\frac{\partial H}{\partial y}(\alpha(y),y)\right)\\&=f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.\end{aligned}$$

□

8 含参变量的无穷积分

设对每个 $y\in Y$, 无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 都收敛, 则可定义含参无穷积分:

$$F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx,$$

它是定义在 Y 上的函数.

定义 8.1. 称含参积分 $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $K > 0$ 使得对任何 $b \geq K$ 都有

$$\Big|\int_b^{+\infty} f(x,y)\Big| < \epsilon, \quad \forall y \in Y.$$

若记

$$F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

则前述含参积分在 Y 上一致收敛的定义等价于: 当 $b \to +\infty$ 时, $F_b(y)$ 在 Y 上一致的趋于 $F(y)$. 后者的定义为: 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $K > 0$ 使得对任何 $b \geq K$ 都有

$$|F_b(y) - F(y)| < \epsilon, \quad \forall y \in Y.$$

定理 8.2 (含参无穷积分一致收敛的 Cauchy 准则)**.** *含参积分 $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛的充分必要条件是: 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 使得对任何 $b_2 > b_1 \geq K$ 都有*

$$\Big|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\Big| < \epsilon, \quad \forall y \in Y.$$

证明: 必要性是直接的, 我们来证明充分性. 设定理中所述的充要条件成立, 这说明对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 使得对任何 $b_2 > b_1 \geq K$ 与任何 $y \in Y$ 都有 $|F_{b_2}(y) - F_{b_1}(y)| < \epsilon$. 特别的, 对每个固定的 y, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 收敛, 记其值为 $F(y)$.

由前述, 对任何 $b_2 > b_1 \geq K$ 有

$$|F_{b_2}(y) - F_{b_1}(y)| < \epsilon,$$

对 $b_2 \to +\infty$ 取极限可得

$$\epsilon \geq \lim_{b_2 \to +\infty} |F_{b_2}(y) - F_{b_1}(y)| = |F(y) - F_{b_1}(y)|, \quad \forall y \in Y,$$

这就证明了含参积分 $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛. □

定理 8.3 (含参无穷积分一致收敛的 M-Test)**.** *设 $f(x,y)$ 与 $g(x)$ 满足*

$$|f(x,y)| \leq g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty), \forall y \in Y,$$

且无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则含参积分 $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛.

证明: 对任何 $\epsilon > 0$, 由无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛的 Cauchy 准则可知存在 $K > 0$ 使得对任何 $b_2 > b_1 \geq K$ 都有 $\int_{b_1}^{b_2} g(x)dx < \epsilon$. 由此可得

$$\Big|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\Big| \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x)dx < \epsilon,$$

再利用含参无穷积分一致收敛的 Cauchy 准则即得证定理. □

定理 8.4 (含参无穷积分关于参数的连续性)**.** *设 $f(x,y)$ 是 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上的连续函数, 且含参无穷积分 $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则 $F(y)$ 是 $[c,d]$ 上的连续函数.*

证明: 我们来证明 $F(y)$ 在每点 y_0 处连续. 对任何 $\epsilon > 0$, 由含参无穷积分 $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛的定义可知, 存在 $K > 0$ 使得对任何 $b \geq K$ 都有

$$|F(y) - F_b(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall y \in [c,d].$$

考虑含参正常积分 $F_K(y) = \int_a^K f(x,y)dx$, 由定理7.1可知 $F_K(y)$ 是 $[c,d]$ 上的连续函数. 特别的, 存在 $\delta > 0$ 使得对任何 $|y - y_0| < \delta$, 有 $|F_K(y) - F_K(y_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.

结合起来, 对任何 $|y - y_0| < \delta$, 有

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(y_0)| &= \big|(F(y) - F_K(y)) + (F_K(y) - F_K(y_0)) + (F_K(y_0) - F(y_0))\big| \\
&\leq |F(y) - F_K(y)| + |F_K(y) - F_K(y_0)| + |F_K(y_0) - F(y_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

这就证明了 F 在 y_0 处连续. □

定理 8.5 (含参无穷积分关于参数求导)**.** *设 $f(x,y)$ 与其偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 是 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上的连续函数, 满足如下条件:*

(1) 含参无穷积分 $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上处处收敛;

(2) 含参无穷积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛;

则 $F(y)$ 是 $[c,d]$ 上的 C^1 光滑函数, 且其导函数为

$$F'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

证明: 条件 (1) 可以改成: 存在一点 $y_0 \in [c,d]$ 使得无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx$ 收敛.

记 $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = g(y)$, 由于含参无穷积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 可知对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $K > 0$ 使得对任何 $b \geq K$ 都有

$$\Big|\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - g(y)\Big| < \epsilon, \quad \forall y \in [c,d].$$

由此可得

$$\begin{aligned}
(b-a)\epsilon &\geq \Big|\int_{y_0}^y \Big(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - g(y)\Big)dy\Big| \\
&= \Big|\int_a^b dx \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy - \int_{y_0}^y g(y)dy\Big| \\
&= \Big|\int_a^b dx(f(x,y) - f(x,y_0)) - \int_{y_0}^y g(y)dy\Big| \\
&= \Big|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx - \int_{y_0}^y g(y)dy\Big|,
\end{aligned}$$

这表明

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y g(y)dy = F(y_0) + \int_{y_0}^y g(y)dy,$$

即有

$$F(y) = F(y_0) + \int_{y_0}^y g(y)dy.$$

利用一元函数的变上限定理, 可得

$$F'(y) = g(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

□

9 含参积分的应用

例 9.1. 验证函数 $u(x) = \int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$ 满足贝塞尔方程 (*Bessel's equation*):

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0.$$

证明: 利用含参正常积分的求导定理, 可得

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= \int_0^\pi \sin(n\varphi - x\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi, \\
u''(x) &= -\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\sin^2\varphi d\varphi.
\end{aligned}
$$

由一元积分的分部积分公式, 有

$$
\begin{aligned}
xu'(x) &= \int_0^\pi \sin(n\varphi - x\sin\varphi)x\sin\varphi d\varphi \\
&= \int_0^\pi \sin(n\varphi - x\sin\varphi)\frac{d}{d\varphi}(-x\cos\varphi)d\varphi \\
&= \sin(n\varphi - x\sin\varphi)(-x\cos\varphi)\big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)(n - x\cos\varphi)x\cos\varphi d\varphi \\
&= \int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)(nx\cos\varphi - x^2\cos^2\varphi)d\varphi.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
& x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u \\
=& \int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)(-x^2\sin^2\varphi + x^2 - n^2 + nx\cos\varphi - x^2\cos^2\varphi)d\varphi \\
=& -n\int_0^\pi \frac{d}{d\varphi}\sin(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi \\
=& -n\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\big|_0^\pi \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

□

例 9.2. 计算积分

$$
F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)d\varphi, \quad \alpha > 1.
$$

解. 对含参正常积分求导, 可得

$$
\begin{aligned}
F'(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2\varphi}d\varphi \\
&= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\left(\arctan\frac{\alpha t + 1}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \arctan\frac{\alpha t - 1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right)\big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.
\end{aligned}
$$

从而有 $F(\alpha)=\pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})+c$.

令 $\beta=\frac{1}{\alpha^2}$, 则有

$$F(\alpha)-\frac{\pi}{2}\ln(\alpha^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\frac{1}{\alpha^2}\sin^2\varphi)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\beta\cdot\sin^2\varphi)d\varphi.$$

注意到二元函数 $g(\varphi,\beta)=\ln(1-\beta\cdot\sin^2\varphi)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]$ 上连续, 利用含参积分的连续性可得

$$\lim_{\beta\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\beta\cdot\sin^2\varphi)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-0\cdot\sin^2\varphi)d\varphi=0,$$

从而有

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(F(\alpha)-\frac{\pi}{2}\ln(\alpha^2)\right)=\lim_{\beta\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\beta\cdot\sin^2\varphi)d\varphi=0.$$

结合

$$\lim_{\alpha\to+\infty}(F(\alpha)-\frac{\pi}{2}\ln(\alpha^2))=c+\lim_{\alpha\to+\infty}\pi\ln(1+\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}})=c+\pi\ln 2,$$

可得 $c=-\pi\ln 2$.

这就证明了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\alpha^2-\sin^2\varphi)d\varphi=\pi\ln\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}\right),\quad \alpha>1.$$

□

定理 9.3 (含参无穷积分一致收敛的 Abel 判别法). *设如下三个条件成立:*

(1) 含参无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛;

(2) 对每个 $y\in Y$, 关于 x 的函数 $g(x,y)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调;

(3) $g(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times Y$ 上一致有界;

在此条件下, 则含参无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)g(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛.

例 9.4. 计算 *Dirichlet integral*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

证明*:* 考虑含参无穷积分

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx,$$

令 $a(x,y) = e^{-xy}$, $b(x,y) = \frac{\sin x}{x}$, 则对每个 $y \in [0,+\infty)$, 函数 $a(x,y)$ 关于 x 单调; 对 $x,y \geq 0$ 有 $|a(x,y)| \leq 1$, 说明 $a(x,y)$ 一致有界; 另外 $\int_0^{+\infty} b(x,y)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 这样, 由 Abel 判别法可知此含参无穷积分

$$\int_0^{+\infty} a(x,y)b(x,y)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 由此可得 $F(y)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 特别的有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = F(0) = \lim_{y\to 0+} F(y).$$

我们来计算导函数 $F'(y)$. 考虑含参无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx$, 对每个正数 b, 有

$$|e^{-xy}\sin x| \leq e^{-bx} = M(x), \quad \forall (x,y) \in (0,+\infty)\times(b,+\infty).$$

由于无穷积分 $\int_0^{+\infty} M(x)dx$ 收敛, 利用 M-Test 可得 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx$ 在 $(b,+\infty)$ 上一致收敛. 由含参无穷积分的求导定理可得 $F(y)$ 在 $(b,+\infty)$ 上可导, 且导数为

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx = -\frac{1}{1+y^2}, \quad \forall y \in (b,+\infty).$$

由 b 的任意性, 可得在 $(0,+\infty)$ 上有 $F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$, 进而可得在 $(0,+\infty)$ 上有 $F(y) = -\arctan y + C$.

由于 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 可得它在 $[0,+\infty)$ 有界. 设 B 为 $|\frac{\sin x}{x}|$ 的上界, 对正数 y 有

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx\right| \leq B\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx = \frac{B}{y},$$

从而可得

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = 0.$$

结合 $F(y) = -\arctan y + C$ 可知 $C = \frac{\pi}{2}$. 这样, 就算出了 *Dirichlet integral* 的值为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{y\to 0+} F(y) = \lim_{y\to 0+}\left(-\arctan y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

命题 9.5 (含参无穷积分的积分)**.** 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 且含参无穷积分

$$F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则有

$$\int_c^d F(y)dy=\int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

证明: 由含参无穷积分一致收敛的定义, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $K>0$, 使得对任何 $b\geq K$ 有

$$|F(y)-F_b(y)|<\epsilon,\quad \forall y\in[c,d].$$

由此可得

$$\begin{aligned}&|\int_c^d F(y)dy-\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx|\\=&|\int_c^d F(y)dy-\int_c^d F_b(y)dy|\\\leq&\int_c^d |F(y)-F_b(y)|dy\\\leq&(d-c)\epsilon,\end{aligned}$$

这表明

$$\int_c^d F(y)dy=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

□

10 特殊函数

定义 10.1. 定义 *gamma* 函数 $\Gamma(x)$ 为

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\quad \forall x>0.$$

定理 10.2 (Hölder 不等式)**.** 设 f,g 是取值非负的连续函数, α,β 是非负实数, 满足 $\alpha+\beta=1$, 则有

$$\int_a^b f(x)^\alpha g(x)^\beta dx\leq\left(\int_a^b f(x)dx\right)^\alpha\left(\int_a^b g(x)dx\right)^\beta.$$

证明: 记 $A=\int_a^b f(x)dx$, $B=\int_a^b g(x)dx$, 不妨设 A,B 都是正数. 利用 *Young* 不等式, 有

$$\left(\frac{f(x)}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{g(x)}{B}\right)^{\beta}\leq \alpha\frac{f(x)}{A}+\beta\frac{g(x)}{B}.$$

对上式积分, 可得

$$\int_a^b\left(\frac{f(x)}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{g(x)}{B}\right)^{\beta}dx\leq\int_a^b\left(\alpha\frac{f(x)}{A}+\beta\frac{g(x)}{B}\right)dx=\alpha+\beta=1,$$

从而有 Hölder 不等式成立. □

命题 10.3. (1) 对 $x>0$ 有 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$;

(2) 对任何正整数 n, 有 $\Gamma(n)=(n-1)!$.

(3) 设 α,β 是非负实数, 满足 $\alpha+\beta=1$, 则对任何 $x,y>0$ 有

$$\Gamma(\alpha x+\beta y)\leq\Gamma(x)^{\alpha}\Gamma(y)^{\beta},$$

即 $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数函数.

证明: (3) 利用 Hölder 不等式成立可得

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha x+\beta y)&=\int_0^{+\infty}t^{\alpha x+\beta y-1}e^{-t}dt\\&=\int_0^{+\infty}\left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\alpha}\left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\beta}dt\\&\leq\left(\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\alpha}\left(\int_0^{+\infty}t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{\beta}\\&=\Gamma(x)^{\alpha}\Gamma(y)^{\beta}.\end{aligned}$$

□

定理 10.4 (Bohr–Mollerup theorem)**.** 设 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 满足如下三个条件:

(i) $f(x+1)=xf(x)$;

(ii) $f(1)=1$;

(iii) $\ln f$ 是下凸函数;

则 $f(x)=\Gamma(x)$.

证明: 由前述命题可知 Gamma 函数 $\Gamma(x)$ 满足上述三个条件, 因而只需证明 f 由此三个条件唯一确定. 利用条件 (i) 可知只需对 $0<x<1$ 证明即可.

令 $\varphi(x)=\ln f(x)$, 则 φ 是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数, 且满足 $\varphi(1)=0, \varphi(x+1)=\varphi(x)+\ln x$. 由后者反复迭代, 可知对正整数 n 有

$$\varphi(n+1+x)=\varphi(x)+\ln x+\cdots+\ln(x+n). \tag{4}$$

由于 φ 是下凸函数, 分别在三点 $n<n+1<n+1+x$ 与 $n+1<n+1+x<n+2$ 上用斜率不等式, 可得

$$\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{(n+1)-n} \leq \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{(n+1+x)-(n+1)} \leq \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}{(n+2)-(n+1)},$$

即有

$$0 \leq \varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)-x\ln n \leq x\ln(1+\frac{1}{n}).$$

结合(4)可得

$$0 \leq \varphi(x)-\ln\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq x\ln(1+\frac{1}{n}).$$

利用夹逼定理即得到

$$\varphi(x)=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

进而有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

□

推论 10.5. *对正数 x, 有*

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

定义 10.6. 对正数 x,y, 定义 *beta* 函数 $B(x,y)$ 为

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

定理 10.7. *Beta 函数可由 Gamma 函数表示*

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{5}$$

证明: 对固定的正数 y, 定义函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 为

$$f(x)=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}B(x,y)=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

只需证明 f 恒等于 Γ. 由定理10.4, 只需验证 $f(1)=1, f(x+1)=xf(x)$ 以及 $\ln f$ 的下凸性.

直接计算可知

$$f(1)=y\int_0^1(1-t)^{y-1}dt=1.$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned}f(x+1)-xf(x)&=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\left((x+y)\int_0^1 t^{x}(1-t)^{y-1}dt-x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\right)\\&=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\int_0^1\left(yt^{x}(1-t)^{y-1}-xt^{x-1}(1-t)^{y}\right)dt\\&=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\left(-t^{x}(1-t)^{y}\right)\Big|_0^1\\&=0.\end{aligned}$$

最后来验证 $\ln f$ 的下凸性, 即对和为 1 的非负实数 α_1,α_2 以及正数 x_1,x_2, 验证

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\le f(x_1)^{\alpha_1}f(x_2)^{\alpha_2},$$

这等价于

$$\begin{aligned}&\Gamma(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+y)\int_0^1 t^{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2-1}(1-t)^{y-1}dt\\\le&\Gamma(x_1+y)^{\alpha_1}\Gamma(x_2+y)^{\alpha_2}\left(\int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}dt\right)^{\alpha_1}\left(\int_0^1 t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}dt\right)^{\alpha_2}.\end{aligned}$$

由 $\ln\Gamma$ 的下凸性可知

$$\Gamma(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+y)=\Gamma(\alpha_1(x_1+y)+\alpha_2(x_2+y))\le\Gamma(x_1+y)^{\alpha_1}\Gamma(x_2+y)^{\alpha_2};$$

再由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 t^{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2-1}(1-t)^{y-1}dt\\=&\int_0^1\left(t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}\right)^{\alpha_1}\left(t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}\right)^{\alpha_2}dt\\\le&\left(\int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}dt\right)^{\alpha_1}\left(\int_0^1 t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}dt\right)^{\alpha_2}.\end{aligned}$$

这就验证了 $\ln f$ 的下凸性. $\square$

例 10.8. 在(5)式中令 $t=\sin^2\theta$ 换元, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

取 $x=y=\frac{1}{2}$, 得到 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

在 Gamma 函数的定义式中令 $t=s^2$ 换元, 可得

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = 2\int_0^{+\infty} s^{2x-1}e^{-s^2}ds, \quad \forall x>0.$$

特别的, 取 $x=\frac{1}{2}$ 得到

$$\sqrt{\pi}=2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}ds,$$

这是 Gauss 积分.

进一步, 利用 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, 结合 Bohr–Mollerup theorem 可证明 *Legendre duplication formula*:

$$\Gamma(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

11 Fourier 变换

Fourier 级数理论研究周期函数, 将圆周上的函数 f 表示成三角函数 e^{inx} 的叠加:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)e^{inx},$$

其中 Fourier 系数为

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Fourier 变换理论研究 $\mathbb{R}$ 上的函数, 将 f 表示成平面波函数 $e^{2\pi i\xi x}$ 的叠加:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi,$$

其中

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

定义 11.1 (速降函数空间)**.** 称 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 是速降函数, 如果 f 的各个高阶导数都存在, 且对任何非负整数 k,ℓ 都有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k f^{(\ell)}(x)\right|<+\infty,$$

即存在常数 $C_{k,\ell}$ 满足

$$|f^{(\ell)}(x)|\le\frac{C_{k,\ell}}{|x|^k},\quad\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

记由所有速降函数构成的集合为 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 称为速降函数空间, 或 *Schwartz space*.

例 11.2. 若 $f\in\mathcal{S}$, 则 $f'(x)\in\mathcal{S}$, $xf(x)\in\mathcal{S}$. 这表明速降函数空间在求导与乘以多项式的运算下是封闭的.

理由如下: 对任何 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}&|x^k(f')^{(\ell)}(x)|=|x^kf^{(\ell+1)}(x)|\le C_{k,\ell+1},\\&|x^k(xf)^{(\ell)}(x)|=|x^k\left(xf^{(\ell)}(x)+C_\ell^1f^{(\ell-1)}(x)\right)|\le C_{k+1,\ell}+\ell C_{k,\ell-1}.\end{aligned}$$

例 11.3. (1) 紧支光滑函数都是速降函数. 这里, 称 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是紧支函数, 如果存在正数 K 使得对任何 $|x|>K$ 都有 $f(x)=0$.

(2) Gauss 函数 (Gaussian function)

$$f(x)=ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}=a\exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2c^2}\right)$$

是速降函数.

Gauss 函数是速降函数的理由如下. 适当换元之后可假设 $f(x)=e^{-x^2}$, 可用归纳法证明 $f^{(\ell)}(x)=P(x)e^{-x^2}$, 其中 $P(x)$ 是多项式. 由此可得

$$\lim_{x\to\infty}x^kf^{(\ell)}(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^kP(x)}{e^{x^2}}=0,$$

从而有 $\sup_{x\in\mathbb{R}}x^kf^{(\ell)}(x)<+\infty$.

定义 11.4. 定义速降函数 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换为

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx,$$

我们用符号

$$f(x) \to \widehat{f}(\xi)$$

表示 $\widehat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换.

命题 11.5. 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

(1) 对实数 h, 有 $f(x+h) \to \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}$.

(2) 对实数 h, 有 $f(x)e^{-2\pi i x h} \to \widehat{f}(\xi+h)$.

(3) 对正数 δ, 有 $f(\delta x) \to \delta^{-1}\widehat{f}(\delta^{-1}\xi)$.

(4) $f'(x) \to 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$.

(5) $-2\pi i x f(x) \to \frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$.

证明: (5) 视 $\widehat{f}(\xi)$ 为含参无穷积分

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx,$$

若能验证 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i x\xi}dx$ 的一致收敛性, 则可知 $F(\xi)$ 的导数为

$$\frac{d}{d\xi}F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i x\xi}dx = -\widehat{2\pi i x f}(x)(\xi).$$

注意到,

$$\left|f(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i x\xi}\right| \le 2\pi|xf(x)|, \quad \forall x, \quad \forall \xi$$

再利用含参无穷积分一致收敛的 M-Test 即可得证 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i x\xi}dx$ 的一致收敛性.

□

定理 11.6. 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则有 $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

证明: 对任何非负整数 k, ℓ, 由命题11.5可得

$$\frac{1}{(2\pi i)^k}\frac{d^k}{dx^k}\Big((-2\pi i x)^\ell f(x)\Big) \to \xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell}\widehat{f}(\xi).$$

记 $g(x) = \frac{1}{(2\pi i)^k}\frac{d^k}{dx^k}\big((-2\pi i x)^\ell f(x)\big)$, 由速降函数空间关于求导与乘以 x 封闭, 可知 $g \in \mathcal{S}$. 由此可得

$$|g(\xi)| = \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-2\pi i x\xi}dx\Big| \le \int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx = C, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

这表明
$$\left|\xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell}\widehat{f}(\xi)\right| \le C, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$
从而得证 $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$\square$

定理 11.7. 设 $f(x) = e^{-\pi x^2}$, 则有 $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$.

证明: 记 $F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx$, 则有
$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\pi}x)^2} \frac{d(\sqrt{\pi}x)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = 1.$$
由命题11.5中 (4), (5) 的结论可得
$$\frac{d}{d\xi}F(\xi) = -2\widehat{\pi i x e^{-\pi x^2}}(\xi) = i\widehat{\frac{d}{dx}e^{-\pi x^2}}(\xi) = i \cdot 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) = -2\pi\xi F(\xi).$$
这样, $F(\xi)$ 满足微分方程 $\frac{d}{d\xi}F(\xi) = -2\pi\xi F(\xi)$ 以及初值条件 $F(0) = 1$, 积分可得 $F(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

$\square$

命题 11.8 (*Multiplication formula*)**.** 设 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则有
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)dy.$$

证明: 利用无穷积分的 Fubini 定理 (Stein & Shakarchi 附录中定理 3.1), 可得
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-2\pi i x y}dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)e^{-2\pi i x y}dxdy.\end{aligned}$$
类似的可得
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x y}dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)e^{-2\pi i x y}dxdy.\end{aligned}$$

$\square$

定理 11.9 (傅立叶反演)**.** 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则有

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

证明: 先证明

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{6}$$

再将此结果用于 f 的平移函数 $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$, 有 $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{2\pi i h \xi} \widehat{f}(\xi)$, 由(6) 可得

$$f(h) = \tau_h f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\tau_h f}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i h \xi} d\xi.$$

以下来证明(6). 对正数 δ, 定义函数 $G_\delta(x) = e^{-\pi \delta x^2}$, 则有

$$\widehat{G_\delta(x)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \xi^2/\delta}.$$

利用 Multiplication formula 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_\delta(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{G_\delta}(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta} f(x) dx,$$

即有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \delta \xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta} f(x) dx.$$

当 $\delta \to 0+$ 时, 上式左边趋于 $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi$, 上式右边趋于 $f(0)$, 由此得证(6).

□

推论 11.10. 傅立叶变换是从速降函数空间到自身的双射.

对速降函数 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 定义它们的卷积 (*convolution*) 为

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt.$$

命题 11.11. 设 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则有

(1) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(2) $f * g = g * f$.

(3) $(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

证明: (1) 先证明

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k(f*g)(x)| < +\infty. \tag{7}$$

取 $C > \max\{\sup_{u\in\mathbb{R}} |g(u)|, \sup_{u\in\mathbb{R}} |u^k g(u)|\}$. 对 $|x| \leq 2|y|$, 有

$$|x^k g(x-y)| \leq |2y|^k \cdot C \leq (2|y|+2)^k C;$$

对 $|x| \geq 2|y|$, 有

$$|x^k g(x-y)| \leq |x^k| \cdot \frac{C}{|x-y|^k} \leq (\frac{|x|}{|x|-|y|})^k C \leq 2^k C \leq (2|y|+2)^k C.$$

从而对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$|x^k g(x-y)| \leq C(2|y|+2)^k,$$

进而可得对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$\begin{aligned} |x^k(f*g)(x)| &= \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)(x^k g(x-y))dy \Big| \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} (2|y|+2)^k |f(y)| dy \\ &= D. \end{aligned}$$

对一般的非负整数 ℓ, 有

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^{(\ell)}(x-t)dt = (f*g^{(\ell)})(x).$$

由 $g \in \mathcal{S}$ 可知 $g^{(\ell)} \in \mathcal{S}$, 利用(7)可得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k(f*g)^{(\ell)}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k(f*g^{(\ell)})(x)| < +\infty,$$

即有 $f*g \in \mathcal{S}$. □

速降函数空间上有内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

相应的 $f \in \mathcal{S}$ 的范数为

$$||f|| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

定理 11.12 (Plancherel formula)**.** 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则有 $||\widehat{f}|| = ||f||$.

证明: 定义函数 g 为 $g(x) = \overline{f(-x)}$, 令 $h = f * g$, 则有

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x \xi} dx = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{2\pi i x \xi} dx} = \overline{\widehat{f}(\xi)},$$

进而可得

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

注意到

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy,$$

结合 Fourier 反演公式即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

□

定理 11.13 (海森堡测不准原理)**.** 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 满足归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

证明: 由归一化条件与分部积分公式, 可得

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x \left(f'(x) \overline{f(x)} + f(x) \overline{f'(x)} \right) dx. \end{aligned}$$

利用模长不等式可得

$$1 = \Big| -\int_{-\infty}^{+\infty} x \left(f'(x) \overline{f(x)} + f(x) \overline{f'(x)} \right) dx \Big| \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| \cdot |f'(x)| dx.$$

再利用 Cauchy-Schwartz 不等式与 Plancherel formula, 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4} &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| \cdot |f'(x)| dx\right)^2 \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |2\pi i\xi \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi,
\end{aligned}
$$

从而完成了海森堡测不准原理的证明.

□

12 拉普拉斯变换

13 附录: 积分

回忆 Riemann 积分的定义. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的函数, 称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 如果如下极限

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在, 并称上述极限值为 f 在 $[a,b]$ 上的积分, 记为 $\int_a^b f(x)dx$.

在上述定义中, P 是 $[a,b]$ 的一个划分, 即满足 $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ 的一族分点, 用 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 表示区间 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $|I_i|$, $\lambda(P) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$ 为划分小区间长度的最大值; $\{\xi_i \in I_i : 1 \leq i \leq n\}$ 为对应此划分的一个选点方案. f 在区间 $[a,b]$ 上可积的一个必要条件是 f 在 $[a,b]$ 上有界, 以后假设我们讨论的 f 都是 $[a,b]$ 上的有界函数.

定义 f 相对于 P 的上和与下和分别为

$$\mathcal{U}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in I_i} f(x) \cdot |I_i|, \quad \mathcal{L}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in I_i} f(x) \cdot |I_i|,$$

显然 $\mathcal{U}(P,f) \geq \mathcal{L}(P,f)$. 称划分 P' 为划分 P 的*加细*, 如果 P' 是从 P 添加更多分点所得的划分. 通过逐一的向 P 添加单个分点, 可验证

$$\mathcal{U}(P',f) \leq \mathcal{U}(P,f), \quad \mathcal{L}(P',f) \geq \mathcal{L}(P,f).$$

这样, 对任何两个划分 P_1, P_2, 令 $P = P_1 \cup P_2$ 为 P_1, P_2 的所有分点形成的划分, 则有

$$\mathcal{L}(P_2,f) \leq \mathcal{L}(P,f) \leq \mathcal{U}(P,f) \leq \mathcal{U}(P_1,f).$$

若记 $U = \inf\limits_P \mathcal{U}(P,f)$, $L = \sup\limits_P \mathcal{L}(P,f)$, 则从上式可得 $L \leq U$.

引理 13.1. *$U = L$ 的充分必要条件是: 对任何 $\epsilon > 0$, 存在划分 P 使得 $\mathcal{U}(P,f) - \mathcal{L}(P,f) < \epsilon$.*

证明: 必要性. 设 $U = L = I$, 则对任何 $\epsilon > 0$, 存在划分 P_1, P_2 满足 $\mathcal{U}(P_1,f) < I + \frac{\epsilon}{2}$, $\mathcal{L}(P_2,f) < I - \frac{\epsilon}{2}$. 令 $P = P_1 \cup P_2$, 则有

$$\mathcal{U}(P,f) - \mathcal{L}(P,f) \leq \mathcal{U}(P_1,f) - \mathcal{L}(P_2,f) < \epsilon.$$

充分性. 若对任何 $\epsilon > 0$, 存在划分 P 使得 $\mathcal{U}(P,f) - \mathcal{L}(P,f) < \epsilon$, 则有

$$U - L \leq \mathcal{U}(P,f) - \mathcal{L}(P,f) < \epsilon,$$

再由 ϵ 的任意性可得 $U = L$. □

定理 13.2. *设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是 $L = U$. 进一步, 有*

$$\int_a^b f(x)dx = L = U.$$

证明: (1) 充分性. 设 $L = U = I$, 我们先证明

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \mathcal{L}(P,f) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \mathcal{U}(P,f) = I. \tag{8}$$

在此基础上, 结合 $\mathcal{L}(P,f) \leq \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq \mathcal{U}(P,f)$ 可得

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

回到(8)的证明. 对任何 $\epsilon > 0$, 存在划分 $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ 使得 $\mathcal{U}(P_1, f) < I + \frac{\epsilon}{2}$. 设 B 是 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上的上界, 取正数 δ 满足 $2mB\delta < \frac{\epsilon}{2}$. 对于满足 $\lambda(P) < \delta$ 的划分 P, 通过逐一的把 $x_j (1 \le j \le m-1)$ 加入到 P 中, 可得

$$\mathcal{U}(P, f) - \mathcal{U}(P \cup P_1, f) \le 2(m-1)B\delta < \frac{\epsilon}{2}.$$

由此可知

$$\mathcal{U}(P, f) < \mathcal{U}(P \cup P_1, f) + \frac{\epsilon}{2} \le U(P_1, f) + \frac{\epsilon}{2} < I + \epsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \mathcal{U}(P, f) = I$. 类似的可证明 $\lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \mathcal{L}(P, f) = I$.

(2) 必要性. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积且积分值为 I, 则对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\lambda(P) < \delta$, 对任何选点方案 $\{\xi_i\}$ 都有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i < I + \frac{\epsilon}{2}.$$

在每个区间 I_i 中, 存在点 η_i 使得 $f(\eta_i) > \sup\limits_{x \in I_i} f(x) - \frac{\epsilon}{2(b-a)}$, 由此可得

$$\mathcal{U}(P, f) \le \sum_{i=1}^{n} \left(f(\eta_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \right) \Delta x_i < I + \epsilon.$$

这就证明了 $\inf\limits_{P} \mathcal{U}(P, f) = I$. 类似的可证明 $\sup\limits_{P} \mathcal{L}(P, f) = I$. □

这样, 我们得到了可积性的判据: 有界函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是对任何 $\epsilon > 0$, 存在划分 P 使得 $\mathcal{U}(P, f) - \mathcal{L}(P, f) < \epsilon$. 由于每次只需构造一个划分 P, 此判据在很多情形下比较容易验证.

例 13.3. 连续函数都是 Riemann 可积的.

证明: 设 $f \in C([a,b])$, 则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. 由此可知, 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得任何 $x, y \in [a,b]$, 只要 $|x - y| \le \delta$, 则有 $|f(x) - f(y)| \le \frac{\epsilon}{b-a}$. 任取一个满足 $\lambda(P) < \delta$ 的划分 P, 则有

$$\mathcal{U}(P, f) - \mathcal{L}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) |I_i| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \cdot |I_i| = \epsilon,$$

得到 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

命题 13.4. *设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积分, 则:*

(i) $f+g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且有

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) 对实数 λ 有

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

(iii) 若对任何 $x\in[a,b]$ 都有 $f(x)\le g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

(iv) 若 $c\in[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

命题 13.5. *设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数, $c\in(a,b)$. 设对任何正数 $\delta<\min\{c-a,b-c\}$, f 在区间 $[a,c-\delta]$ 与 $[c+\delta,b]$ 上都可积, 则 f 在区间 $[a,b]$ 上可积.*

证明: 设 B 是 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上的一个上界, 取 $0<\delta<\frac{\epsilon}{12B}$. 由 f 在区间 $[a,c-\delta]$ 与 $[c+\delta,b]$ 上可积, 存在 $[a,c-\delta]$ 的划分 P_1 与 $[c+\delta,b]$ 的划分 P_2 满足

$$\mathcal{U}(P_1,f)-\mathcal{L}(P_1,f)<\frac{\epsilon}{3},\quad \mathcal{U}(P_2,f)-\mathcal{L}(P_2,f)<\frac{\epsilon}{3}.$$

设 P_1,P_2 的所有分点给出 $[a,b]$ 的划分 P, 则有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}(P,f)-\mathcal{L}(P,f)\\
=&(\mathcal{U}(P_1,f)-\mathcal{L}(P_1,f))+(\mathcal{U}(P_2,f)-\mathcal{L}(P_2,f))+\left(\sup_{x\in[c-\delta,c+\delta]} f(x)-\inf_{x\in[c-\delta,c+\delta]} f(x)\right)\cdot 2\delta\\
<&\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+2B\cdot 2\delta\\
<&\epsilon,
\end{aligned}$$

由此可得 f 在区间 $[a,b]$ 上可积. $\square$