1 (1) 判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$ 的收敛发散性.

(2) 判断瑕积分 $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$ 的收敛发散性.

(3) 证明: 当 $a < 1$ 时, 有

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x} dx.$$

2 设 a 是正实数, b, c 是实数.

(1) 证明: 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c} dx$$

收敛.

(2) 设 λ 是给定的实数, 判断无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx$$

的收敛发散性.

(3) 设无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 的值等于 I. 请把无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c} dx$$

的值用 a, b, c 与 I 表示.

3 设 $f(x)$ 是多项式, 即 $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, 其中 n 是正整数, $a_0, ..., a_n$ 是实数.

(1) 证明: 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx$$

收敛.

(2) 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-x^2} dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-x^2} dx.$$

(3) 假设已证明了 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, 对正整数 m, 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2} dx$ 的值.

4 考虑如下反常积分

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(1) 对怎样的 x, 上述反常积分收敛? 请证明你的断言.

(2) 证明: 对 $x > 0$, 有 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(3) 证明: 对 $x > 0$, 有

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} ds.$$

5 (1) 设 α, β 是给定的实数, 请判断广义积分

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy$$

何时收敛.

(2) 利用分部积分公式证明: 当广义积分 $B(\alpha, \beta)$ 收敛时, 有如下等式成立:

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta).$$

(3) 利用换元公式证明: 当广义积分 $B(\alpha, \beta)$ 收敛时, 有如下等式成立:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$