习题讨论课02题目：极限与连续

一、连续与函数在一点处的极限

【定义】

f 在 x_0 处**连续**:

- f 在 x_0 处有定义; (允许 f 仅在 x_0 处有定义)
- 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_\varepsilon>0$ 使得:

$$\left|x-x_0\right|<\delta_\varepsilon, x \in D_f \Rightarrow\left|f(x)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon .$$

极限 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=A$:

- x_0 是 f 的定义域 D_f 的一个聚点, 即 f 在 x_0 的任意近旁有定义;（允许 f 在 x_0 处没有定义)
- 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_\varepsilon>0$ 使得:

$$0<\left|x-x_0\right|<\delta_\varepsilon, x \in D_f \Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon .$$

注: 极限 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=A$ 是由 (任意) 临近 x_0 处 f 的函数值共同决定的, 与 x_0 处 f 的值无关。

单侧极限。右极限 $f\left(x_0+\right)=\lim\limits_{x \rightarrow x_0^{+}} f(x)=A$: (类似定义左极限 $f\left(x_0-\right)=\lim\limits_{x \rightarrow x_0^{-}} f(x)=A$)

- f 在 x_0 的右侧任意近旁有定义; (允许 f 在 x_0 处没有定义)
- 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_\varepsilon>0$ 使得:

$$x_0<x<x_0+\delta_\varepsilon, x \in D_f \Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon .$$

【联系】

设 x_0 是 f 的定义域 D_f 的一个聚点。则

- $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=A$ 当且仅当

$$\tilde{f}(x)= \begin{cases}f(x), & x \neq x_0 \\ A, & x=x_0\end{cases}$$

在 x_0 处连续。

- $f(x_0+)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 当且仅当

$$\tilde{f}_+(x)=\begin{cases} f(x), & x>x_0, \\ A, & x=x_0 \end{cases}$$

  在 x_0 处右连续。

- $f(x_0-)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 当且仅当

$$\tilde{f}_-(x)=\begin{cases} f(x), & x<x_0 \\ A, & x=x_0 \end{cases}$$

  在 x_0 处左连续。

如果 $\tilde{f}$ 在 x_0 处连续, 而 f 在 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 f 的**可去间断点**。

如果 $f(x_0+), f(x_0-)$ 都存在但不相等, 则称 x_0 为 f 的**跳跃间断点**。

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点**。

如果 x_0 是 f 定义域的聚点, 但 f 在 x_0 处既不连续, 也不是第一类间断, 则称 x_0 为 f 的**第二类间断点**。

【连续和极限的运算性质】

- 线性: f,g 都在 x_0 处连续 $\Rightarrow \lambda f+\mu g$ 在 x_0 处连续。

  $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)+\mu g(x))=\lambda A+\mu B$ 。

- 乘法: f,g 都在 x_0 处连续 $\Rightarrow fg$ 在 x_0 处连续。

  $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB$ 。

- 除法: f,g 都在 x_0 处连续, 且 $g(x_0)\neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ 在 x_0 处连续。

  $\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ 。

- 复合 (换元): f 在 x_0 处连续, g 在 $f(x_0)$ 处连续 $\Rightarrow g\circ f$ 在 x_0 处连续。

  $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0, g$ 在 y_0 处连续 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(y_0)$ 。

  $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0, \lim_{y\to y_0} g(x)=B \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x))=B$ 。(这对吗?)

例 1. 讨论函数 $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$ 的连续性和间断点。

例 2. 设 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 是 I 上的连续函数。证明

$$g(x)=\max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$

也是 I 上的连续函数。

例 3. 设 f 在区间 (a,b) 到区间 (α,β) 的严格增满射, 则 f 是连续函数, f 的反函数 f^{-1} 也是连续函数。因此指数函数 a^x (在 $(-\infty,+\infty)$ 中) 是连续函数, 幂函数 x^α 和对数函数 $\log_a x$ 是区间 $(0,+\infty)$ 中的连续函数。

注: 如果把上述条件中的严格增改成单调（即还包括严格减、单调不增、单调不减), 则 f 是连续函数。请读者自己给出证明。

例 4. 对任意 $\alpha>0$, 证明 $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha=0$.

例 5. 对实数 α, 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ 。（α 为无理数时，难度为★）

二、三角函数

本节内容仅供学生自学阅读。

【三角函数的基本性质】

$\sin,\cos$ 由以下性质唯一确定

1. $\cos,\sin$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$;
2. $\cos 0=\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \cos\pi=-1$;
3. 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$,
$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$
4. 对任意 $0<x<\frac{\pi}{2}$,
$$0<\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}.$$

【由上述基本性质推导 $\sin,\cos$ 的其他性质】

在(3)中取 $x=y$, 并利用(2), 得到
$$1=\cos^2 x+\sin^2 x. \tag{5}$$
由(5)并结合(2), 得到
$$\sin 0=\cos\frac{\pi}{2}=\sin\pi=0. \tag{6}$$
由(6)并结合 (3), 得到 cos 是偶函数 (取 $y=0$), (7)

以及 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ (取 $y=\frac{\pi}{2}$), 并且 $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 。 (8)

(3)中取 $y=\pi$ 并结合 $(2,6)$, 得到 $\cos(\pi-x)=-\cos x$ 。 (9)

由(9)知 cos 是 2π 周期函数, 再结合(8)知 sin 是 2π 周期函数。 (10)

由 $(8,9)$ 可知 sin 是奇函数。 (11)

由 $(3,8)$ 可知
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y. \tag{12}$$

由 $(7,11,3,12)$ 可得

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y \tag{13}$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \tag{14}$$

并且

$$\sin u-\sin v=2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}, \tag{15}$$

$$\cos u-\cos v=-2\sin\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2}. \tag{16}$$

若 $-\frac{\pi}{2}\leq v<u\leq\frac{\pi}{2}$, 则

$$0<\frac{u-v}{2}\leq\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{u+v}{2}<\frac{\pi}{2},$$

因为 $\cos$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为正, 又 $\cos$ 为偶函数, 所以

$$\cos\frac{u+v}{2}>0.$$

因为 $\sin$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为正, 所以

$$\sin\frac{u-v}{2}>0.$$

所以 $\sin u>\sin v$, 故 $\sin$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格增。 (17)

类似可证 $\cos$ 在 $[0,\pi]$ 上严格增。 (18)

由 $(12,14,2,4)$ 可得 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 。

当 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 时, 由(4)知

$$0<\sin x<\frac{x}{\cos x}<\frac{x}{\cos\frac{\pi}{3}}=2x,$$

再由 $\sin$ 是奇函数, 得到: 对任意 $|x|<\frac{\pi}{3},|\sin x|\leq 2|x|$ 。所以 $\sin$ 在 $x=0$ 连续。 (19)

由(15)知 $\sin$ 是连续函数。并由(16)知 $\cos$ 是连续函数。 (20)

再由(4)和(20)知, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 。 (21)

由(21)知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}. \tag{22}$$

三、函数在无穷远处的极限、数列极限

【定义】

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\left(\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\right)$:

  对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得

  $$x\in D_f\cap[N,+\infty)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

  数列极限是这种极限的特殊情况, $f(n)=a_n$ 是数列的通项公式。

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$：对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得

$$x\in D_f\cap(-\infty,N]\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$：对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得

$$x\in D_f,|x|>N\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

【联系】

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{y\to0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)=A$ 。对 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 有类似结论。
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 。

【相关概念】

- $y=kx+b$ 是 $x\to\pm\infty(\infty)$ 时 $y=f(x)$ 的渐近线:

$$\lim_{x\to\pm\infty(\infty)}(f(x)-(kx+b))=0.$$

- 以上极限等价于

$$k=\lim_{x\to\pm\infty(\infty)}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty(\infty)}(f(x)-kx).$$

【极限的性质：与不等式的联系】

- 保序。设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ 都存在。
  - 若在 a 附近总有 $f(x)\le g(x)$, 则 $A\le B$;
  - 若 $A<B$, 则在 a 附近总有 $f(x)<g(x)$ 。注: 这条性质比上一条更重要。
- 夹挤定理。设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$ 存在。若在 a 附近总有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to a} h(x)=A$ 。

例 6. 设 $a_n>0$ 满足，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A\in[0,+\infty]$。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

用上述结论可以用于以下练习。

1. 设 $a>0$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}$.
2. 设 $a_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.
3. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

4. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}$.

例 7. 设 $a>1$ 。则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0$ 。

例 8. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$ 。

例 9. 求

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$$

例 10. 求 $y=\frac{2x^2-3x+2}{x+1}$ 在 $x\to\pm\infty$ 时的渐近线。

例 11. 求 $y=\sqrt{x^2-x+1}$ 在 $x\to\pm\infty$ 时的渐近线。

例 12. (★★) 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{m+n}\le a_m+a_n,\quad \forall m,n\ge 1,$$

且存在 α 使得对任意 n 都有 $a_n\ge\alpha n$ 。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\inf\limits_{n\ge1}\frac{a_n}{n}$ 。

四、涉及平均值的极限, Stolz定理

例 13. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 。证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A.$$

用类似办法可以证明以下更一般的结论。

例 14. (★)设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A, b_{ij}\ge 0$ 满足

$$b_{n1}+b_{n2}+\cdots+b_{nn}=1,$$

且对任意 N，

$$\lim_{n\to+\infty}(b_{n1}+b_{n2}+\cdots+b_{nN})=0.$$

证明

$$\lim_{n\to+\infty}(b_{n1}a_1+b_{n2}a_2+\cdots+b_{nn}a_n)=A.$$

注： 上述正数 $b_{n1},b_{n2},\ldots,b_{nn}$ 可以视为对 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 做平均的权重。

以下习题留作练习。

1. (★) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a_k$.

   提示：考虑 $b_{nk}=\frac{C_n^k}{2^n}$. 对任意 K，$\sum\limits_{k=0}^{K}C_n^k$ 是关于 n 的一个 K 次多项式。

2. (★) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$. 求

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}.$$

提示：考虑

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

3. (★) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to+\infty n} b_n = B$. 求

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}.$$

提示：不妨设所有 $b_n > 0$ 且 $B > 0$. 考虑

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

例 15 (Stolz). (★) 设 $\{x_n\}$ 严格增无上界, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = A$ 。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = A$ 。

以下习题作为练习。

1. (★) 设 $\alpha > -1$ 。求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

2. (★) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^{-1} + 2^{-1} + \cdots + n^{-1}}{\ln n}$.