清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A(1) (B) 2021 年 12 月 29 日

系名________________ 班级________________ 姓名________________学号________________

一、填空题（每个空 3 分，共 10 题）（请将答案直接填写在答题卡相应横线上！）

1. $y = x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x^2})$ 的斜渐近线为______________。

答案：直线 $y = x$

解析：本题考查函数图象的渐近线。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x^2})}{x} = \lim_{x\to\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x^2}) = 1$$，故斜渐近线斜率为 1。

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x^2}) - x\right) = \lim_{x\to\infty}x\left(\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x^2})+1-1\right) = \lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{\mathrm{e}x^2} = 0$$，故斜渐近线截距为 0。

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right) =$ ______________。

答案：$2-2\ln 2$

解析：本题考查用定积分定义求极限。

$$原式 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n}{n}}}\right) = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$$

设 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$， $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ 。

故 $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_0^1\frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1\left(2-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \left(2t-2\ln(1+t)\right)\Big|_0^1 = 2-2\ln 2$$ 。

3. 记 $F(x) = \int_0^{x^2}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$，则 $F'(1) =$ ______________。

答案：-2

解析：本题考查变上限积分。

由变上限积分函数的求导法则， $F'(x) = 2x\cos(\pi x^4)$ 。故 $F'(1) = 2\cos\pi = -2$ 。

4. 设 $f(x)=\min\{x^2,1\}$，则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=$ ______________。

答案：$\frac{4}{3}$

解析：本题考查定积分。

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\text{。}$$

5. 常微分方程 $y'+2xy=2x$ 的通解为______________。

答案：$y=1+C\mathrm{e}^{-x^2}$

解析：本题考查一阶非齐次常微分方程。

齐次方程 $y'+2xy=0$ 的通解为 $y=C\mathrm{e}^{-x^2}$，设原方程有解 $y=C(x)\mathrm{e}^{-x^2}$，代入原方程化简得 $C'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}$，故 $C(x)=\mathrm{e}^{x^2}+C$，原方程的通解为 $y=1+C\mathrm{e}^{-x^2}$。

6. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=$ ______________。

答案：$\ln 2$

解析：本题考察广义积分。

设 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})\mathrm{d}t=\ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2\text{。}$$

7. 常微分方程 $x^2y''+xy'-4y=0$（$x>0$）的通解为______________。

答案：$y=c_1x^2+\frac{c_2}{x^2}$

解析：本题考查欧拉方程。

设 $t=\ln x$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})$。

代入原方程得，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=0$。特征方程为 $\lambda^2-4=0$，特征根 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$。

所以方程通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{2t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x^2}$。

8. 设 $p>0$，广义积分 $\int_1^{+\infty}x^2\ln(1+\sin\dfrac{1}{x^p})\mathrm{d}x$ 收敛，则实数 p 的取值范围是________。

答案：$(3,+\infty)$

解析：本题考查广义积分的敛散性。

$$\lim_{x\to+\infty}x^{p-2}\cdot x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x^p})=\lim_{x\to+\infty}x^p\sin\frac{1}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}x^p\cdot\frac{1}{x^p}=1$$

因此，当且仅当 $p-2>1$，即 $p>3$ 时，原积分收敛。

9. 由曲线段 $y=\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}$，$x\in[1,4]$ 绕 x 轴旋转一周所成旋转面的面积为________。

答案：$\dfrac{28\pi}{3}$

解析：本题考查定积分的几何应用。

所求表面积 $S=2\pi\int_1^4\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}\right)^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\pi(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\Big|_1^4=\dfrac{28\pi}{3}$。

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $2\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=xf(x)+x^2$，则 $f'(1)=$________。

答案：-3

解析：本题考查变上限积分。

代入 $x=1$，得 $f(1)=-1$。

方程两边求导，得 $2f(x)=f(x)+xf'(x)+2x$，即 $xf'(x)=f(x)-2x$

代入 $x=1$，得 $f'(1)=-3$。

二、解答题（请写出详细的解答过程和必要的根据！）

11.（10 分）求积分 $\int_0^{\mathrm{e}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x$ 的值。

解 设 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$，$\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$。

$\int_0^{e}\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}e^t\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(e^t\sin t+e^t\cos t)\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{e}{2}(\sin1+\cos1)$。

12. （10 分）求常微分方程 $y''-3y'+2y=e^x$ 的通解。

解 原方程对应的齐次方程为 $y''-3y'+2y=0$，

特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$。故齐次方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$。

由于 1 是单特征根，设原方程有特解 $y_0=Axe^x$，代入得

$A(x+2)e^x-3A(x+1)e^x+2Axe^x=e^x$，整理并比较系数得 $A=-1$。

故原方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$。

13. （15 分）求函数 $y=4e^{-x}(2x^2+x+1)-5$ 的单调区间，极值，上凸区间与下凸区间，以及拐点的横坐标。

解 由题可知，$y'=4e^{-x}x(3-2x)$，$y''=4e^{-x}(2x^2-7x+3)$。

则当 $x\in(-\infty,0)\bigcup(\frac{3}{2},+\infty)$ 时，$y'<0$；$x\in(0,\frac{3}{2})$ 时，$y'>0$。

故函数的单调递减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(\frac{3}{2},+\infty)$，单调递增区间为 $(0,\frac{3}{2})$。

函数的极小值为 $f(0)=-1$，极大值为 $f(\frac{3}{2})=28e^{-\frac{3}{2}}-5$。

因为当 $x\in(-\infty,\frac{1}{2})\bigcup(3,+\infty)$ 时，$y''>0$；$x\in(\frac{1}{2},3)$ 时，$y''<0$

所以函数的上凸区间为 $(\frac{1}{2},3)$，下凸区间为 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 和 $(3,+\infty)$。

拐点横坐标为 $\frac{1}{2}$ 和 3。

14. （10 分）设 D 为 $y=\sqrt{x(1-x)}$ 与 x 轴围成的有界区域。

（Ⅰ）求 D 的面积；

（Ⅱ）求 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积。

（Ⅰ）**解** 由题可知，所求面积

$$S=\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}x=\left(\frac{2x-1}{4}\sqrt{x(1-x)}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}$$

（Ⅱ）**解** 由题可知，所求体积

$$V=\pi\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x=\pi(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$$

（注：也可以直接利用圆的面积公式和球的体积公式求解）

15.（10 分）设平面曲线 $y=y(x)$ 满足 $y(0)=1$，$y'(0)=0$，且对曲线上任意点 $P(x,y)$（$x>0$），沿曲线从点 $(0,1)$ 到点 $P(x,y)$ 的弧长等于该曲线在点 $P(x,y)$ 的切线斜率，求 $y(x)$（$x>0$）。

解 由题可知，$\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}t=y'$。

两边求导，得 $\sqrt{1+y'^2}=y''$。设 $y'=u(x)$，则 $\sqrt{1+u^2}=u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

分离变量并积分，得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=x+C$。

由于 $u(0)=y'(0)=0$，代入 $x=0$，得 $C=0$。

故 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=x$，解得 $u=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$。

积分得 $y=\int y'\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}+C'$。代入 $x=0$，$y(0)=1$，得 $C'=0$。

故 $y(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}(x>0)$

16.（8 分）设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的周期函数，且连续，证明：

（Ⅰ）函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$。

（Ⅰ）**证明**

$$\begin{aligned}F(x+T)&=\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-\frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于 $\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$

且 $\int_T^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t$，

所以 $F(x+T)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\dfrac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=F(x)$。故 $F(x)$ 是以 T 为周期的周期函数。

（Ⅱ）**证明** 不妨设 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\ge 0$。

设 $kT\le x\le (k+1)T$ （$k\in\mathbb{N}$），则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=k\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_{kT}^x f(t)\mathrm{d}t$。

故 $k\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\le\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\le(k+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$。

因为 $kT\le x\le (k+1)T$，所以 $\dfrac{1}{T}-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{k}{x}\le\dfrac{1}{T}$。

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{T}-\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{T}$，由夹逼定理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{x}=\dfrac{1}{T}$。

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k+1}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$

又因为 $\dfrac{k}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\le\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\le\dfrac{k+1}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，

所以由夹逼定理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$。

17.（7 分）设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且对 $x\ge1$ 时，有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$。

（Ⅰ）证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限；

（Ⅱ）证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$。

（Ⅰ）**证明** 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}\ge0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增。

又因为 $f(1)=1$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}\le\dfrac{1}{x^2+1}$。

所以$\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t \le \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \arctan x - \frac{\pi}{4}$

所以 $f(x)-f(1)=f(x)-1\le \arctan x-\frac{\pi}{4}$，即 $f(x)\le 1+\arctan x-\frac{\pi}{4}\le 1+\frac{\pi}{4}$。

因为 $f(x)$ 单调递增且有上界，由单调收敛定理，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限。

（Ⅱ）由（Ⅰ）显然。

附加题（本题为附加题，全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+）

设 $f\in C[0,1]$，g 为非负的周期函数，周期为 1，且 $g\in R[0,1]$，求证：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)。$$

证明 由积分区间的可加性，$\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)\mathrm{d}x$。

由于 $f\in C[0,1]$，g 非负且 $g\in R[0,1]$，由积分第一中值定理，对任意 k ,存在 $\xi_k\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$，使得$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)\mathrm{d}x = f(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\mathrm{d}x$

设 $nx=t$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\mathrm{d}t$。$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{k-1}^{k} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

所以

$$\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_k)\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_k)$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_k) = \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)$。