大学物理 B(1)

期中考试：闭卷

时间：本周六(4月22日) 上午9:50~11:50

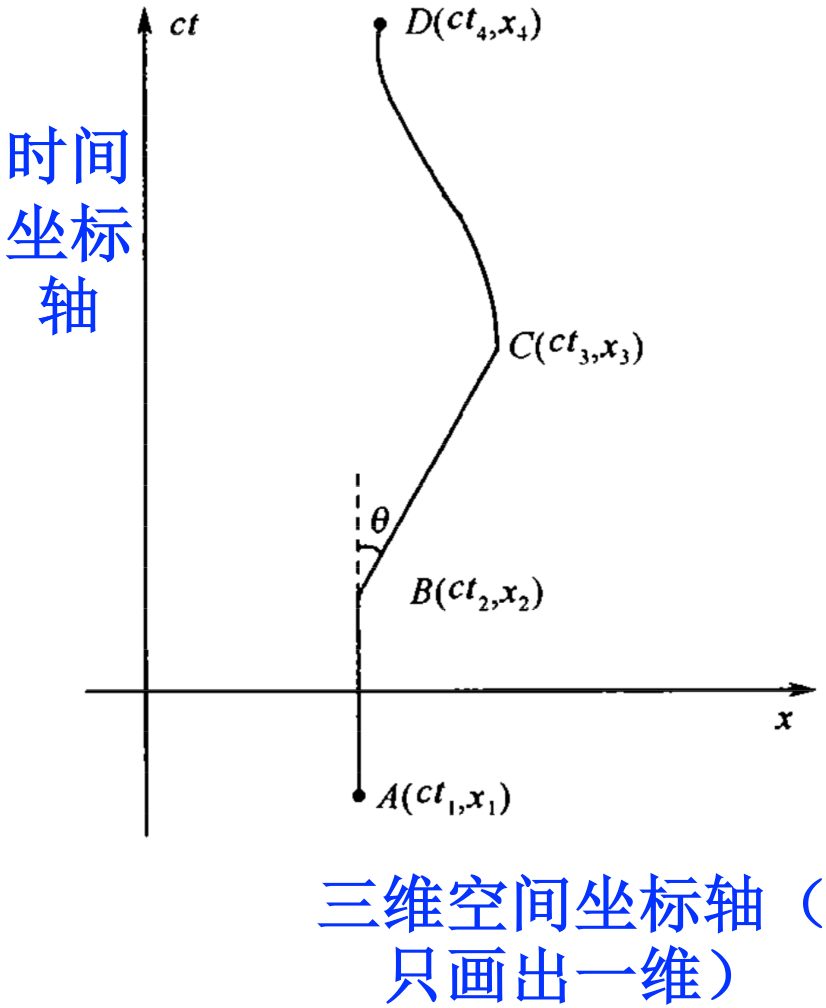
地点：明理楼112

闵可夫斯基时空图

经典时空观和狭义相对论时空观的本质区别在于：前者认为时间和空间是相互独立的，后者则断定它们相互关联.

1908 年，闵可夫斯基在著名的“空间和时间”一文中，提出把时间也作为一维坐标，和三维空间的一个现象或事件必须同时用时间和位置来标记，亦即对应一组数 (ct, x, y, z)，取时间参量为 ct 的目的是使它和位置x具有相同的量纲，因而可以取统一的长度单位．由全体数组的集合 $\{ct, x, y, z\}$ 构成的四维时空连续域.

闵可夫斯基建议的四维时空的时空图

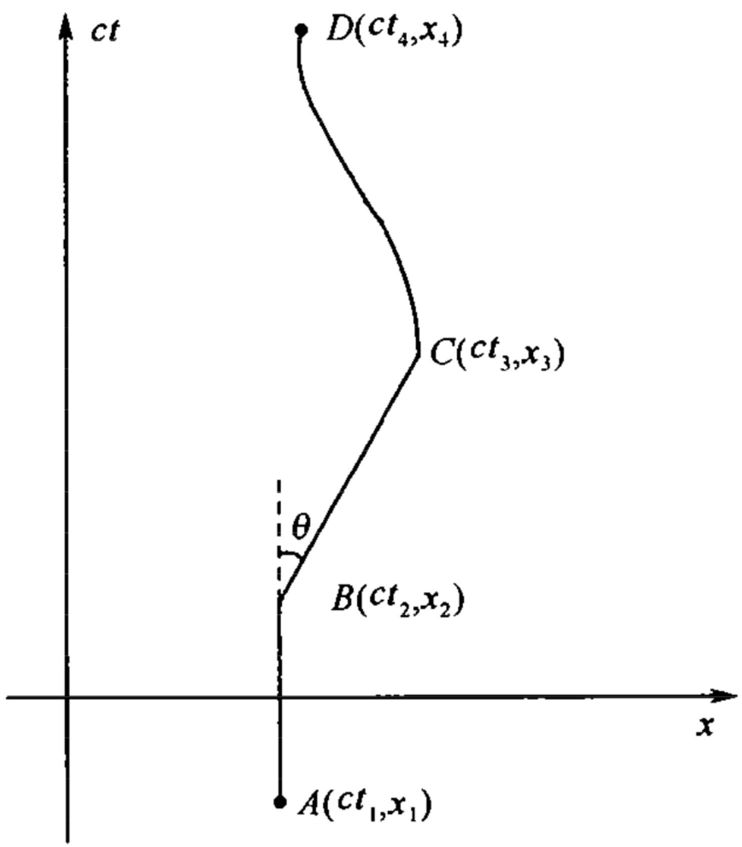


一维时间和三维空间构成闵可夫斯基四维时空也称作世界。

任意一个事件在时空图上表示为一个点：$P(ct,x,y,z)$，所以事件可以称为世界点；

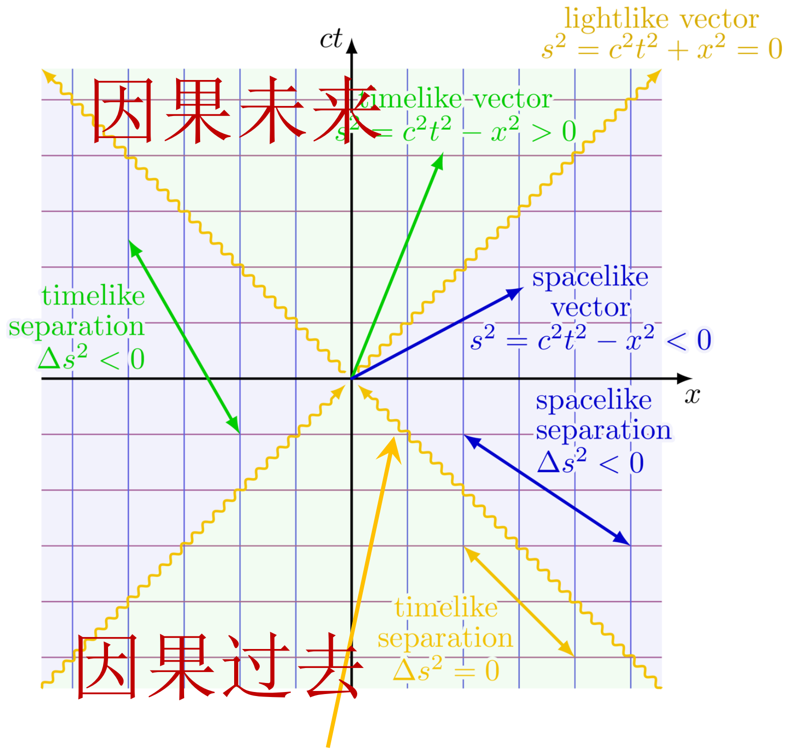
随着时间的流逝，世界点在时空图上画出一条连续的轨迹，称为世界线。

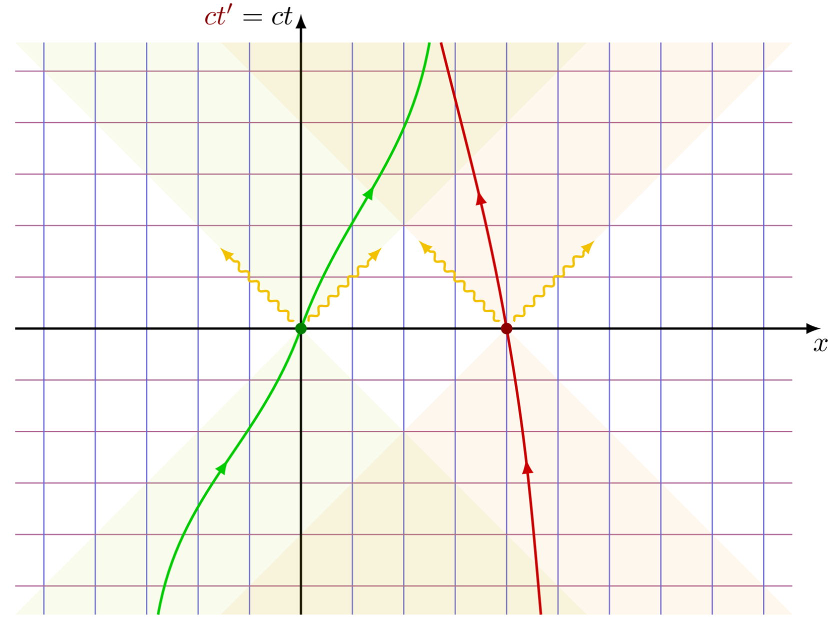
时间坐标轴



三维空间坐标轴（只画出一维）

- 静止于惯性系的粒子的世界线平行于时间轴的直线（AB段）。
- 以匀速u做均匀直线运动的粒子的世界线是一条斜直线（BC段），与时间轴的夹角
$$\theta = \arctan(u/c)$$
由于粒子运动速度受光速极值限制，$\theta \leq \pi/4$。
- 光子的世界线夹角 $\theta = \pi/4$的斜直线；
- 加速运动粒子的世界线则是一条曲线（如：CD段）





光锥：原点处光子的世界线

类时间隔：因果过去和因果未来

类空间隔：无因果关联（左右两边白色区域）

类光间隔区：光锥本身

根据时空间隔不变性和因果律：光锥在四个时空中的位置与坐标变换无关！

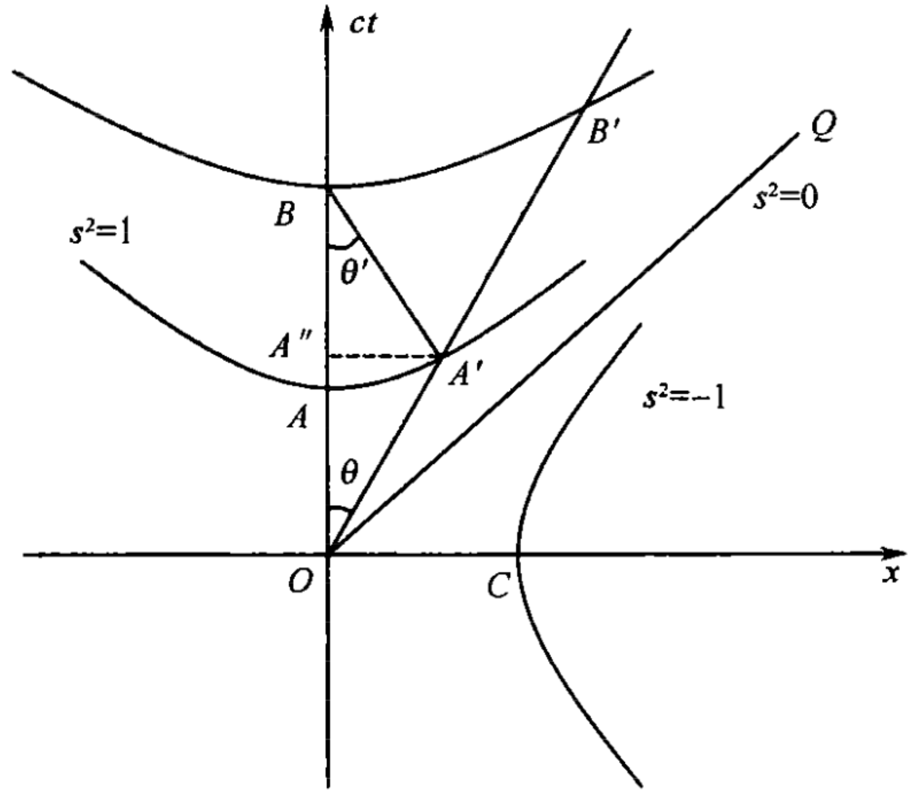
例如：某事件位于类时间隔区的因果未来，变换成其他惯性系后仍然是因果未来区。

欧氏时空(x, y)到原点的等距离面

$$l^2 = x^2 + y^2 = const.$$

闵氏时空(ct, x)到原点的等距离面

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 = const.$$



$$l = \sqrt{c^2t^2 + x^2}$$

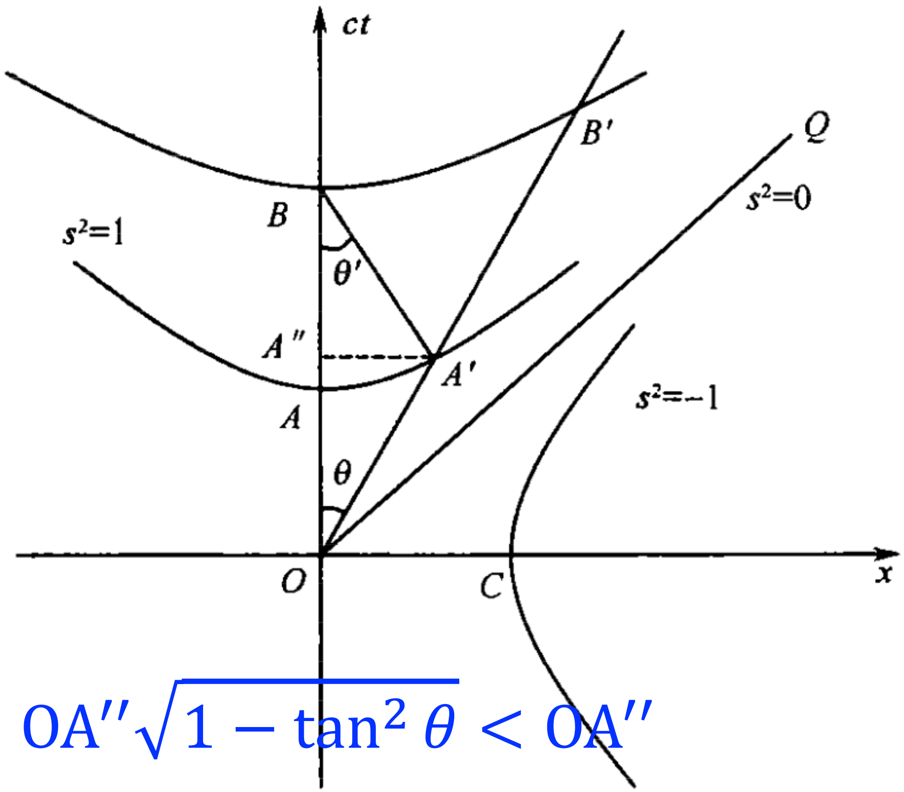
$$s = \sqrt{c^2t^2 - x^2} = \sqrt{l^2 - 2x^2} = l\sqrt{1 - 2(x/l)^2}$$

$$s = l\sqrt{\cos 2\theta} = \frac{l}{\rho(\theta)}$$

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} = 1\text{单位}}$$

$$s=\frac{l}{\rho(\theta)}$$

$$\boxed{\rho(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}}$$



位于时间轴($\theta=0$):闵氏长度等于欧氏长度$s=l$.

位于光锥($\theta=45°$):闵氏长度等于零 ($\rho(\theta)=\infty$).

$$s(OA')=\frac{OA'}{\rho(\theta)}=\frac{\mathrm{OA''}/\cos\theta}{1/\sqrt{\cos 2\theta}}=\mathrm{OA''}\sqrt{1-\tan^2\theta}<\mathrm{OA''}$$

$$s(A'B)=\frac{A'B}{\rho(\theta')}=\frac{\mathrm{A''B}/\cos\theta'}{1/\sqrt{\cos 2\theta'}}=\mathrm{A''}B\sqrt{1-\tan^2\theta'}<\mathrm{A''}B$$

$$s(OA'B)<\mathrm{OA''}+\mathrm{A''}B=s(OB)$$

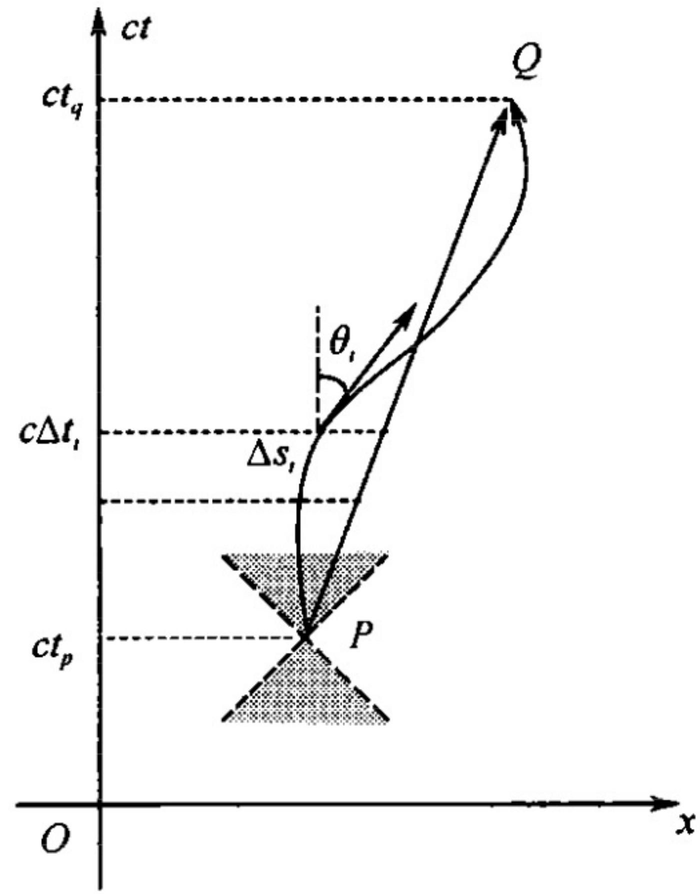
闵氏三角不等式：$s(OA'B)<s(OB)$

$$\boxed{s(\text{曲线})<s(\text{直线})}$$

两个固定世界点之间的所有连线中，直线的闵氏长度最大!

由于粒子的世界线由一系列因果事件连接而成，因此粒子的世界线的斜率要受光速极值原理的限制。

世界线对时间轴的斜率处处小于1（$\theta_i < \pi/4$），所以粒子在世界点P邻域的世界线总是处于P为顶点的光锥之内。



惯性系S中有一个运动速度为u的粒子，相邻无穷小世界点的类时世界线长为ds。引入一个随动坐标系S', 在 S'中粒子总是静止的 $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$。

$$ds^2 = c^2dt^2 - (udt)^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$\|$$

$$ds'^2 = c^2dt'^2\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) = c^2dt'^2$$

瞬时随动坐标系 $u' = 0$

间隔不变性

$ds^2 = ds'^2$

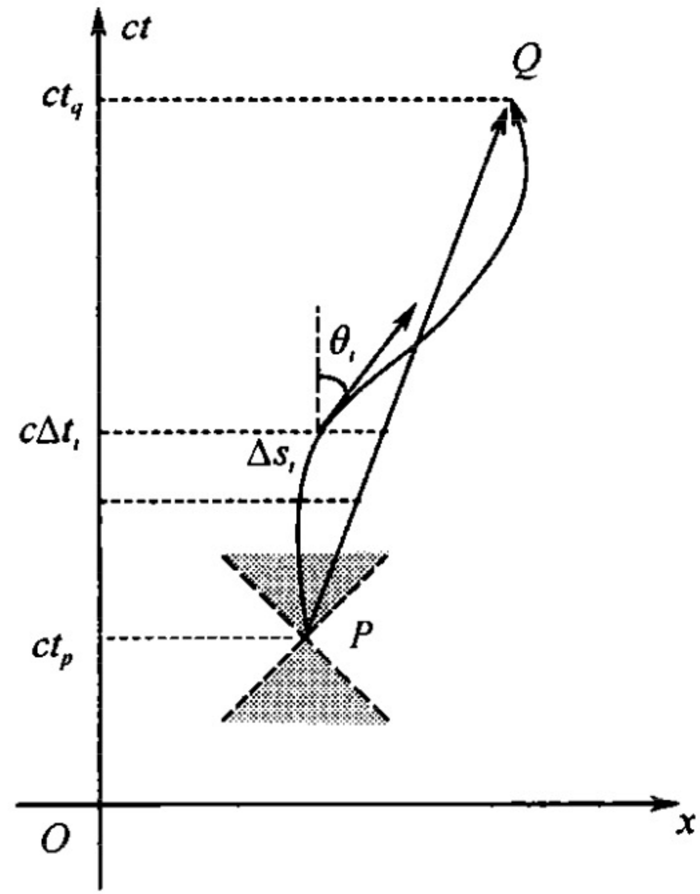
$$\boxed{ds^2 = c^2dt'^2}$$

固有时：随动坐标系感受的时间

$$d\tau \equiv dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

如果有加速度：随动坐标系是非惯性系，可分解成无穷多惯性系

$$\Delta\tau_{QP} = \int_P^Q dt\sqrt{1 - \frac{u(t)^2}{c^2}}$$

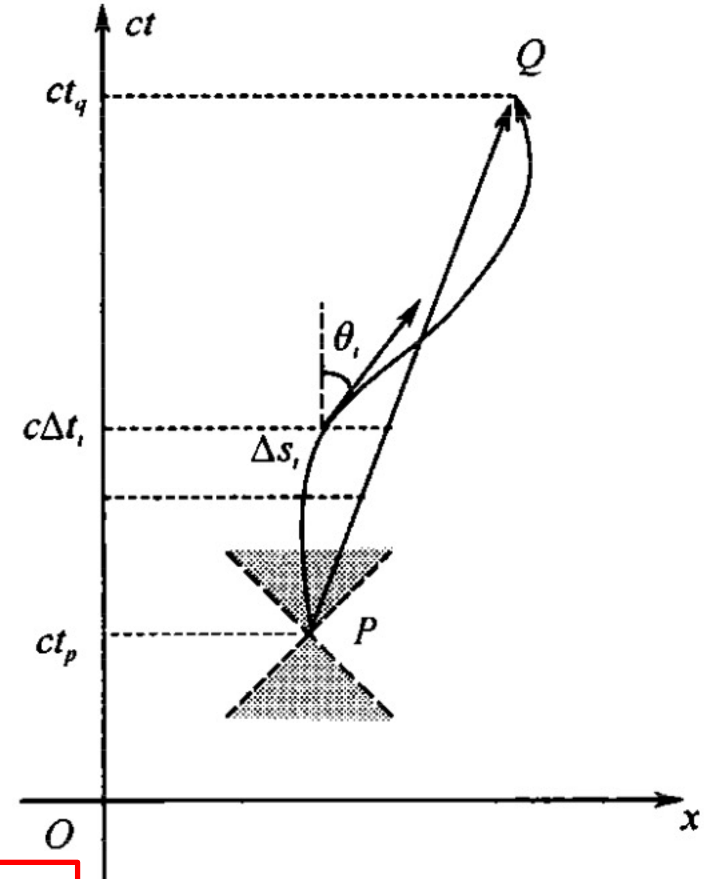


需假定加速度对标准钟无影响，为实验所证实成立！

如果粒子相对于惯性系S做匀速直线运动，速度u不变，则S'系也是惯性系。这时，两事件P和Q的固有时

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c} = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

运动时间变慢



粒子可以沿不同的世界线由P运动到Q，两个固定的世界点之间有无限多可能的世界线。在这些世界线中，间隔最长是惯性运动的世界线：

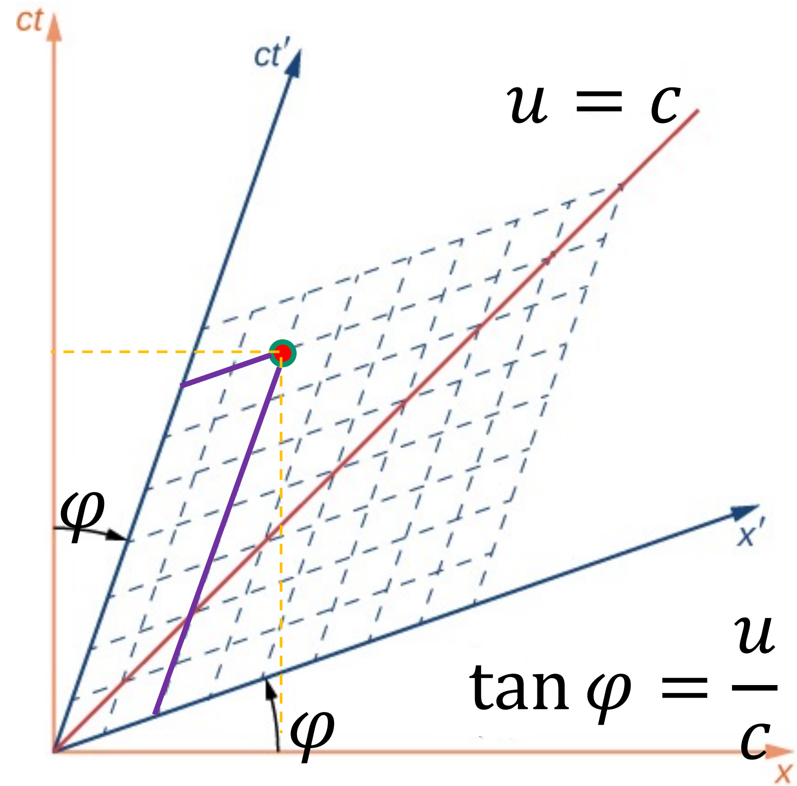
$$\boxed{s(\text{曲线, 有加速度}) < s(\text{直线, 无加速度})}$$

因此，两事件之间的加速运动的固有时必定小于匀速运动的固有时

$$\Delta\tau(u \neq \text{const.}) < \Delta\tau(u = \text{const.})$$

S'系相对于惯性系S做匀速运动（速度u），S'系原点的世界线是一条直线，与S系ct轴的夹角是φ。

由于光锥位置与坐标系无关，并且在S'系为$x' = \pm ct'$, 因此 x'轴和x轴的夹角也是φ。

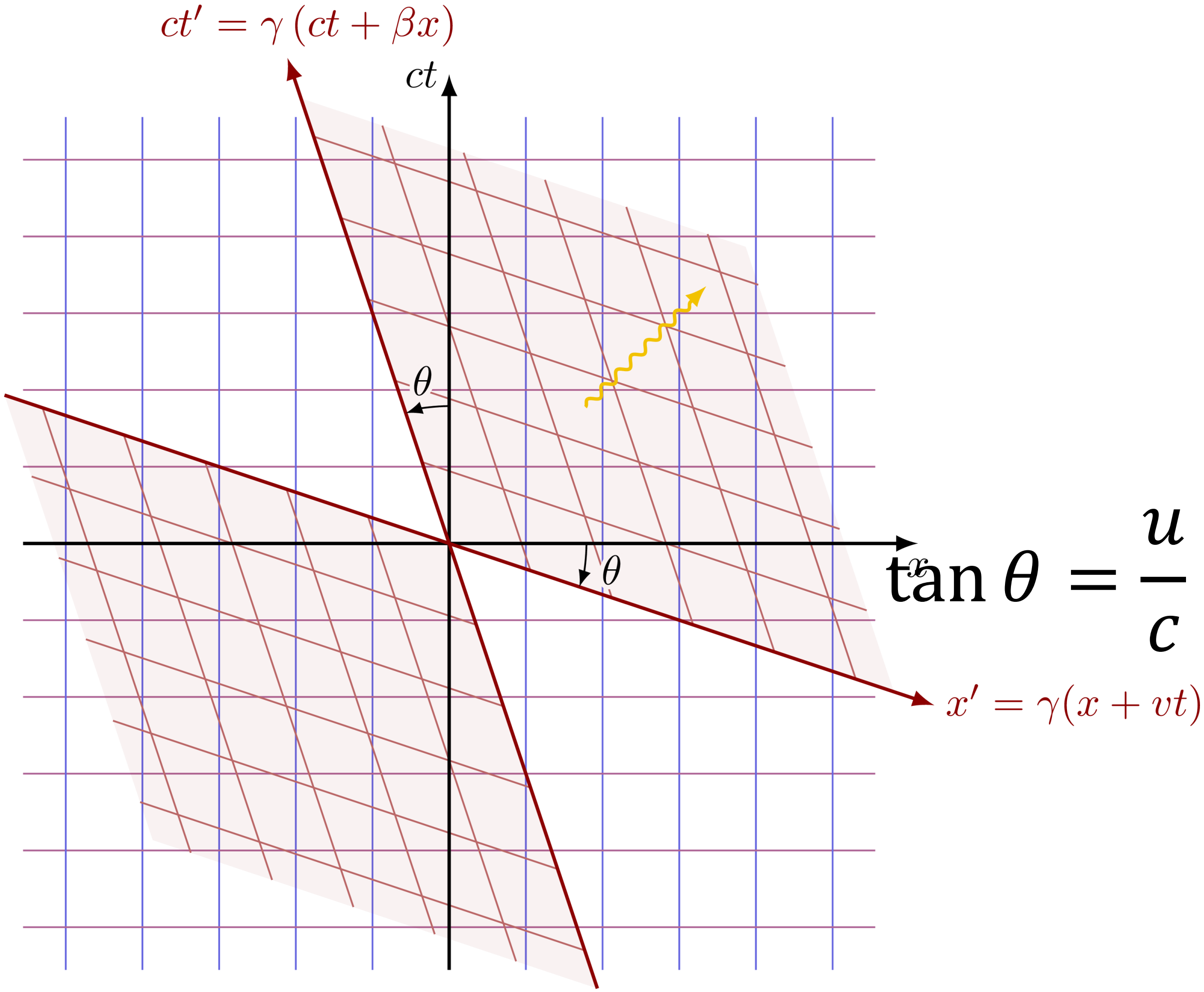


$$\tan\varphi = \frac{u}{c} = \beta$$

S'系中平行于x'轴的线代表 S' 同时不同位置 的事件；

S'系中平行于ct'轴的线代表 S' 中静止的事件；

S'系相对S系速度朝x轴反方向运动



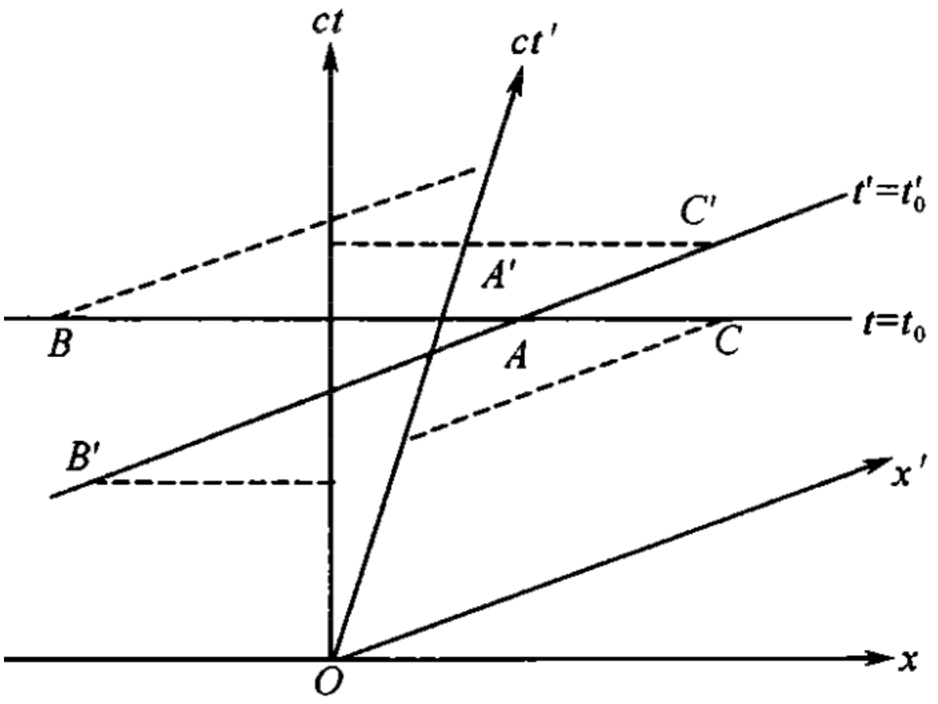
$$\tan\theta = \frac{u}{c} = \beta$$

同时的相对性

惯性系S中的同时不同地的事件：A，B，C在平行于x轴的线上；

S'系中的同时事件：A'，B'，C'在平行于x'轴的线上；

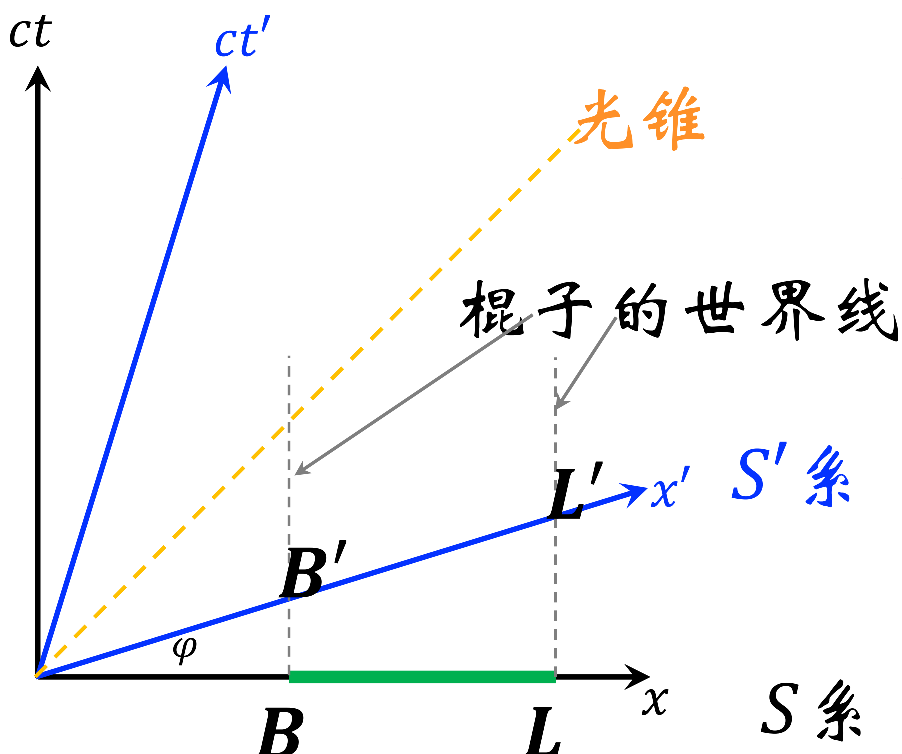
两条线至多有一个交点为$A(A')$，交点是两惯性系对钟的唯一的点，也就是只在此处才能比较两系时钟。



参考A'，B'，C'在S'系中的时间坐标，可以得到：

S'系中同时事件A'，B'，C'在S系中看：$t_{C'} > t_{A'} > t_{B'}$

S'系相对于S匀速运动（速度u）　S系中静止的棍子长度$l_0 = BL$



$$\tan\varphi = \frac{u}{c} = \beta$$

- S系中静止的B和L点的世界线与t-轴平行
- S'系同时的两件事构成的线要和x'轴平行！
- 它们与x'轴交于 B'和L', 这两点正是 S'系的观测者同时记录下棍子的两个端点！

$$l = \frac{B'L'}{\rho(\varphi)} = \frac{BL/\cos\varphi}{1/\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$= l_0\sqrt{1-\tan^2\varphi} = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

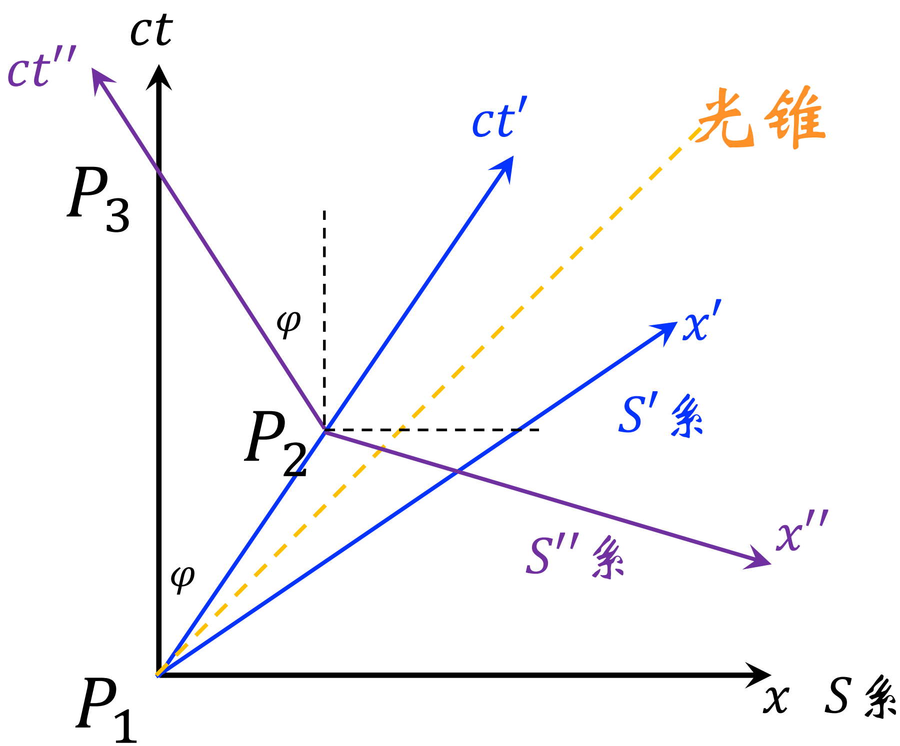
这一缩短在 S系看来，是因为同时相对性引起的；

由于B的世界线先经过 x' 轴，而L的世界线后经过；

结果S系的观测者看到 S'系观测者先记录下 B'，后记录下L'.

双生子佯谬

S'系（S''系）相对于S匀速运动速度u（速度$-u$）



$$\tan\varphi = \frac{u}{c} = \beta$$

S系时间间隔：$\Delta t = P_3P_1$

S'系时间间隔：$\Delta t'$

$$\Delta t' = \frac{P_2P_1}{\rho(\varphi)} + \frac{P_3P_2}{\rho(\varphi)}$$

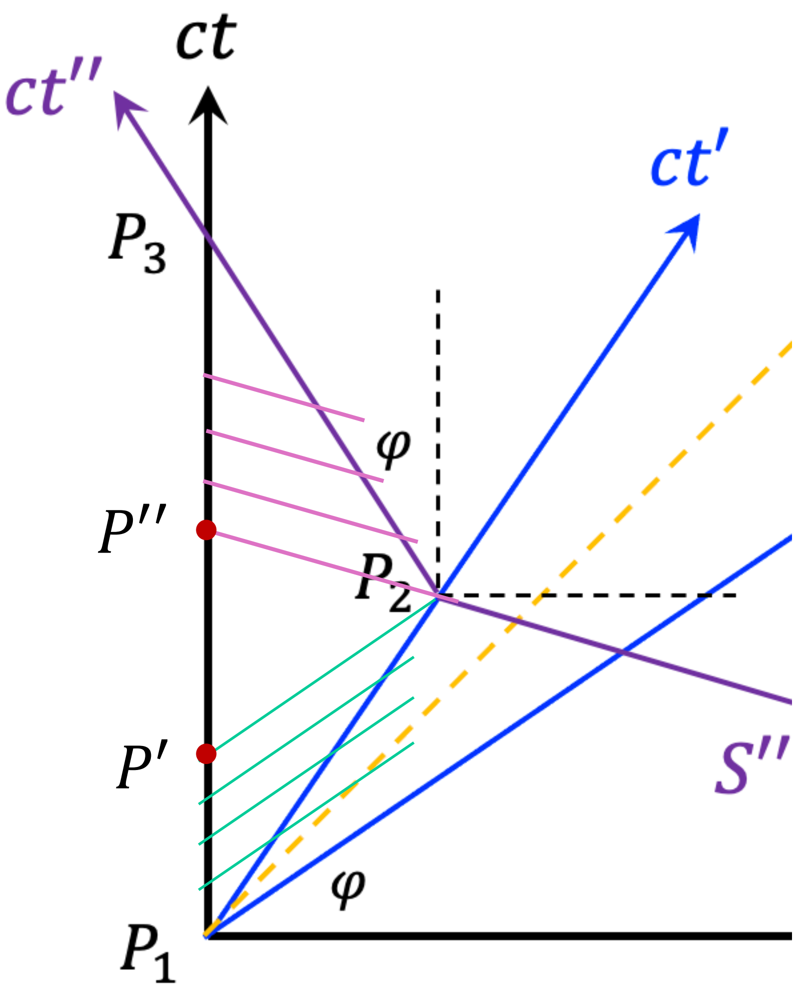
$$= \frac{\frac{\Delta t}{2\cos\varphi}}{1/\sqrt{\cos 2\varphi}} + \frac{\frac{\Delta t}{2\cos\varphi}}{1/\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$= \Delta t\sqrt{1-\tan^2\varphi} = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$$

S系看高速飞船上S'系的时间变慢，S'系飞船上看S系的时间也变慢？

首先：S系看高速飞船上看S'系的时间总是变慢

实际上有三个系：S'系（S''系）相对于S匀速运动速度u（速度$-u$）



❖飞船S'系看地球S系的时间开始也是变慢；

❖比如飞船到了P_2点看到地球时间是P'点（变慢了）

❖但是飞船经过了P_2点后，突然转变了惯性系到S''系

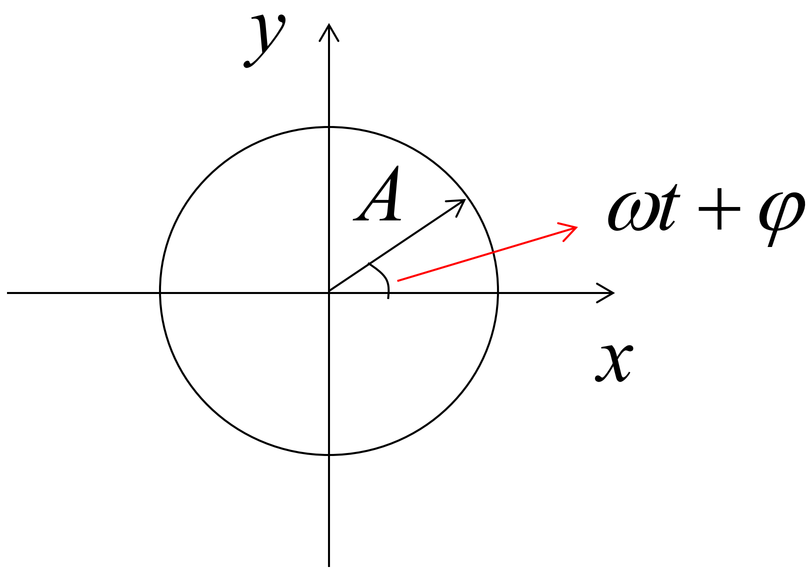
❖这时候看地球时间突变成P''也就是突然变老很多！

❖之后飞船S'系看地球S系的时间开始还是变慢的，但是由于中间$P' - P''$的突变，最终看地球时间是变快了！

第六章　振动

§ 6.1 简谐振动 （The simple harmonic oscillation）
§ 6.2 简谐振动方程
§ 6.3 简谐振动能量
§ 6.4 阻尼振动
§ 6.5 受迫振动
§ 6.6 同振动方向同频率简谐振动合成
§ 6.7 同振动方向不同频率简谐振动合成
§ 6.8 *频谱分析
§ 6.9 振动方向互相垂直的简谐振动合成
§ 6.10 相图
§ 6.11 *非线性振动及混沌

§ 6.1 简谐振动 （The simple harmonic oscillation）

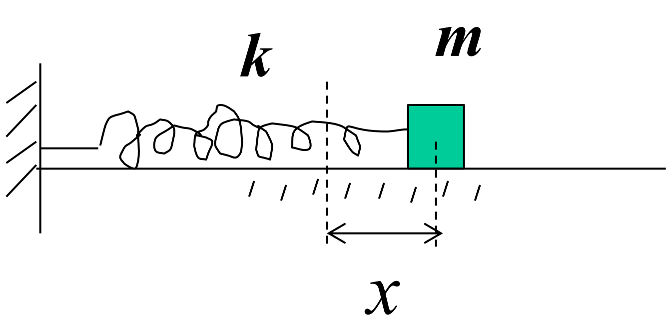


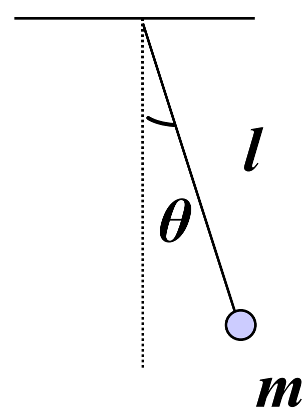
匀速圆周运动

初相

$$x = A\cos(\underbrace{\omega t+\varphi}_{\text{相}})$$

振幅





$$\theta \longrightarrow x/l$$

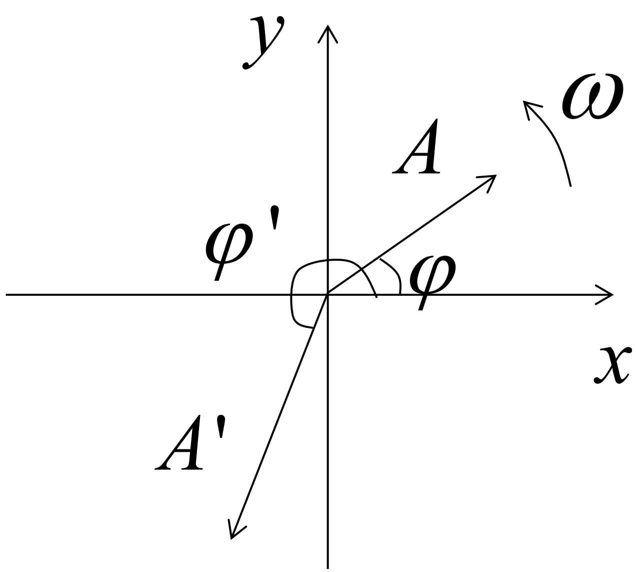
速度 $\upsilon = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

加速度 $a = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

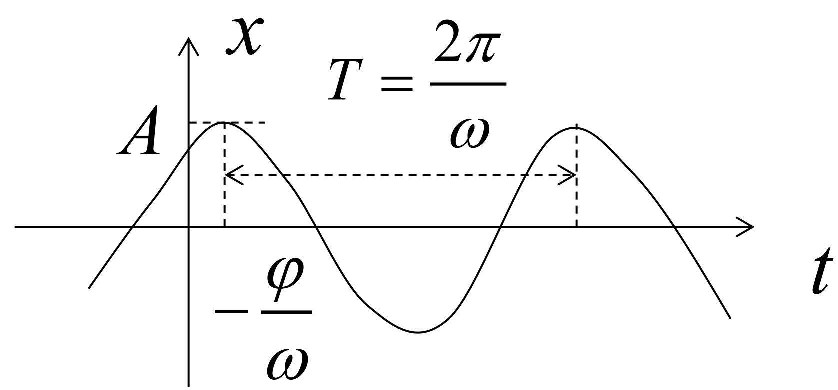
$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \qquad x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A, ω, φ **确定则简谐运动确定，角频率由系统本身确定**

相量图法



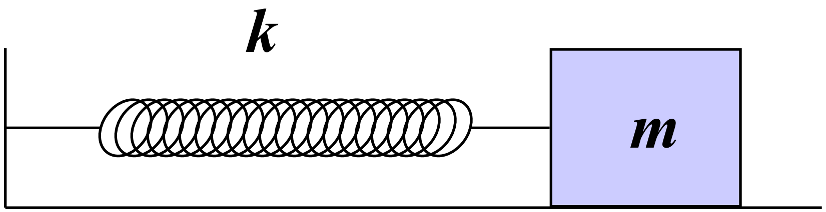
振动曲线



频率相同的简谐运动都可以在这里用几何图表示

§ 6.2 简谐振动方程

(i)

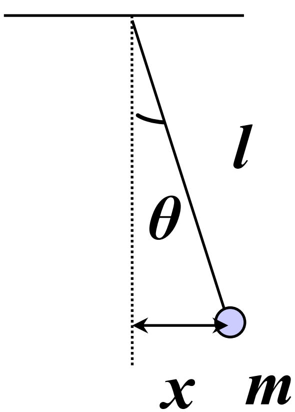


$$F=-kx=m\ddot{x}$$

$$\ddot{x}+\omega^2x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(ii)



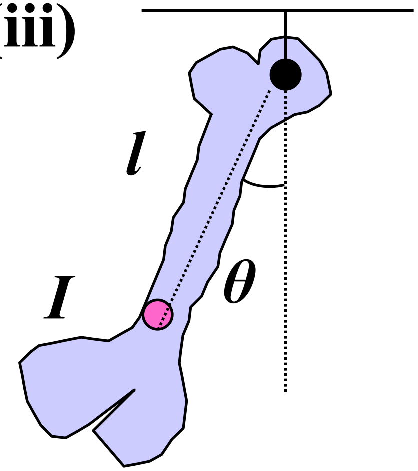
$$F=-mg\sin\theta$$

$$=-mg\frac{x}{l}\approx m\ddot{x}$$

$$\frac{x}{l}<<1$$

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

(iii)



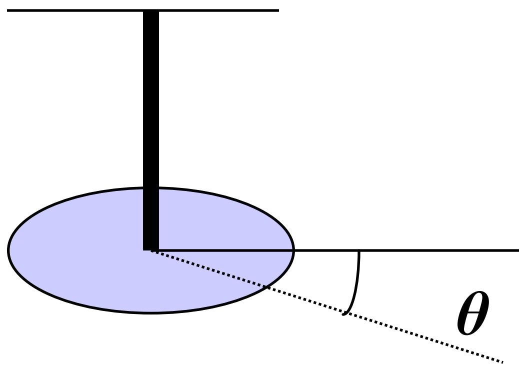
$$\tau=-mgl\sin\theta$$

$$\approx-mgl\theta=I\ddot{\theta}$$

$$\theta<<1$$

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

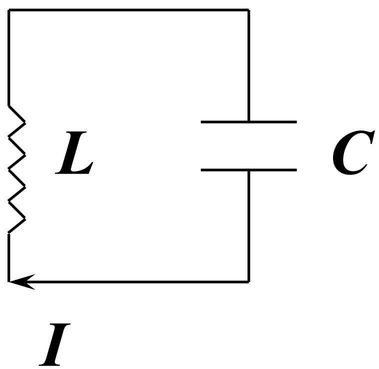
(iv)



$$\tau = -\kappa\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

(v)



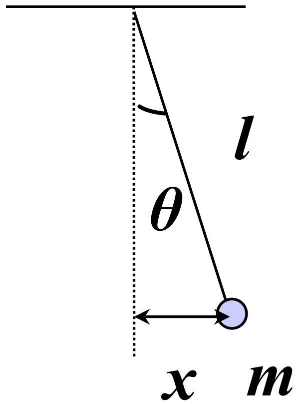
$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C}$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

物理量 S $\qquad \ddot{S} + \omega^2 S = 0$ 简谐振动

通解: $\qquad S = A\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{相位}})$ 一般 A 大于零

例



1. 初始条件: $x|_{t=0} = x_m$ $\dot{x}|_{t=0} = 0$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \varphi = 0$$

$$x = x_m \cos \omega t$$

2. 初始条件: $x|_{t=0} = 0$ $\dot{x}|_{t=0} = \upsilon_0$

$$A\cos\varphi = 0 \qquad \upsilon_0 = -\omega A \sin\varphi$$

$$\dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}, \ \upsilon_0 = \omega A$$

$$x = \frac{\upsilon_0}{\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin \omega t$$

单选题 1分

设置

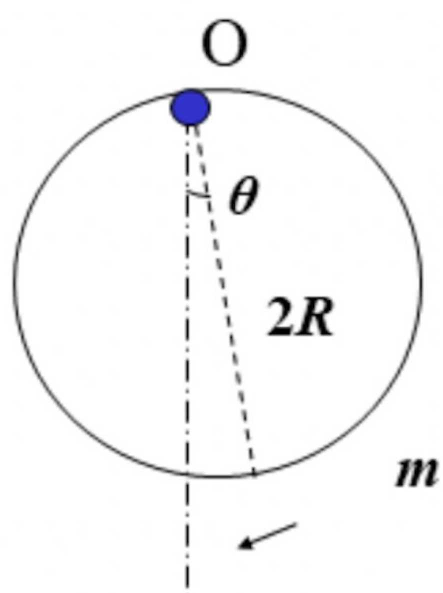
圆环半径R，质量m，挂在固定点O，绕O点无摩擦小幅度来回转动，其实就是振动，则其振动周期相当于长度为多少的单摆周期？

A R

B 2R

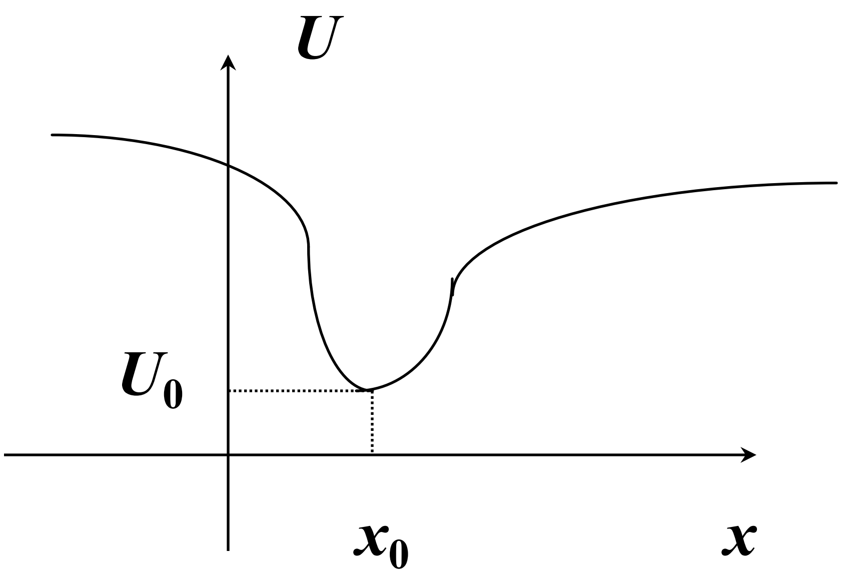
C πR/2

D 与单摆质量有关



提交

简谐振动 $F=-kx$ 或 $U=\frac{1}{2}kx^2$



$$|x-x_0| \ll 1$$

$$U(x)=U(x_0)+U'(x_0)(x-x_0)$$
$$+\frac{1}{2!}U''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

U 极小 $U'(x_0)=0$

$U''(x_0)>0$

平移

$$x-x_0 \to \tilde{x}$$

$$\tilde{U}(\tilde{x})=U(x)-U(x_0)\approx\frac{1}{2}U''(x_0)\tilde{x}^2$$

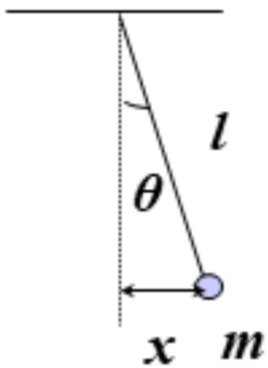
$$\tilde{x}\to x$$

$$\tilde{U}\to U$$

$m\omega^2$

$$U(x)\approx\frac{1}{2}U''(x_0)x^2$$

微小振动一般都是简谐振动



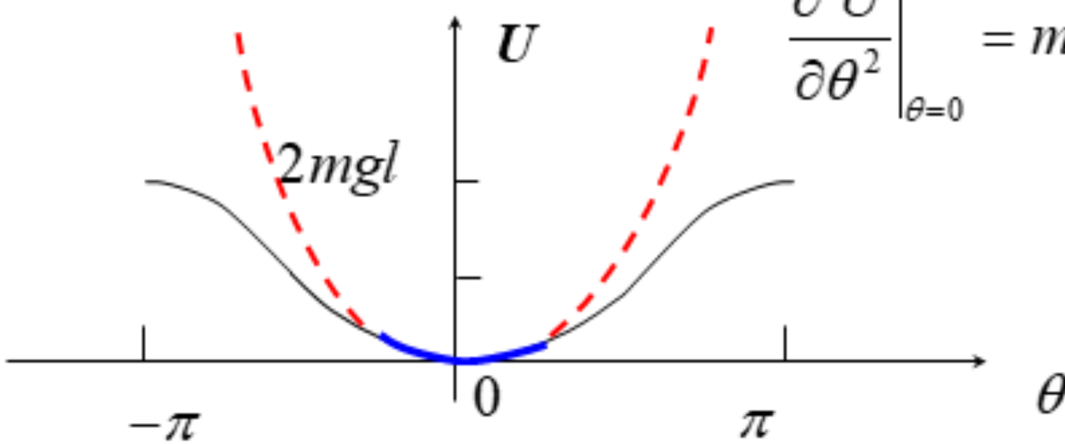
$$U = mgy = mgl(1-\cos\theta)$$

势能零点　　$\theta=0$　　$x=0$

力（矩）平衡点　$\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = mgl\sin\theta = 0$

$$\theta=0$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = mgl\cos\theta = mgl > 0$$



$$U \approx \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

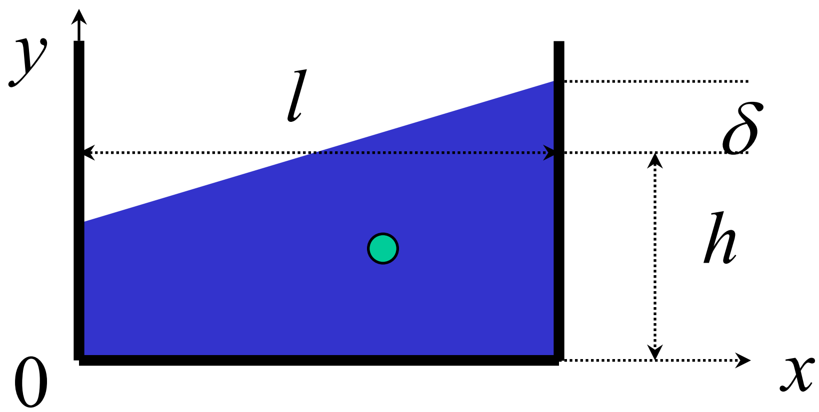
$$\approx \frac{1}{2} m\frac{g}{l} x^2$$

$$= \frac{1}{2} kx^2$$

$$\theta \approx \frac{x}{l}$$

大约5度以内

例. 水盆中的晃动模式. 谁能够端一盆水而没有晃动呢?



晃动频率?

解：假设是微小振动

简谐振动?

势能表达式 $$E_P = mg(y_c - \frac{h}{2})$$

$$x_c = \frac{\delta \frac{2}{3} l + (h - \delta) \frac{1}{2} l}{h} = \frac{1}{2} l + \frac{1}{6} l \frac{\delta}{h}$$

$$y_c = \frac{[\frac{2}{3}\delta + (h - \delta)]\delta + \frac{1}{2}(h - \delta)^2}{h} = \frac{1}{2} h + \frac{1}{6} \frac{\delta^2}{h}$$

$$E_P = mg\frac{1}{6}\frac{\delta^2}{h} = 6mg\frac{h}{l^2}(x_c - \frac{1}{2}l)^2$$

$$= \frac{1}{2}k(x_c - \frac{l}{2})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x_c - \frac{l}{2})^2$$

简谐振动 频率 $\omega^2 = 12g\frac{h}{l^2}$

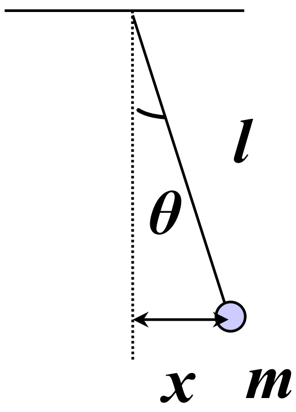
日内瓦湖的平均深度约150m，长度约60km，晃动周期?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi l}{\sqrt{3gh}} \approx 47\,\mathrm{min}.$$

实际观察到的周期约1小时

观察到的振幅大于5 feet~1.5m

§ 6.3 简谐振动能量



动能 $$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t+\varphi)$$

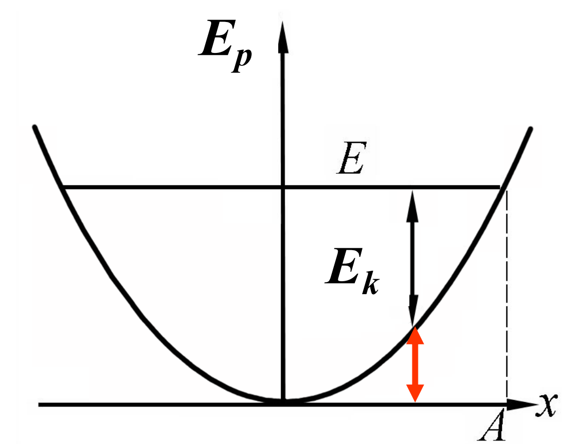
势能 $$E_P = mgl(1-\cos\theta) = 2mgl\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$E_P = \frac{1}{2}m\frac{g}{l}x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$l^2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx \frac{x^2}{4}$$

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = const.$$

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$



时间平均

$$\left\langle \cos^2(\omega t+\varphi) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)dt = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle E_P \right\rangle = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 = \left\langle E_K \right\rangle = \frac{1}{2}E$$

或

$$\begin{cases} \boldsymbol{E = \mathrm{const.}} \\ \boldsymbol{\overline{E}_{\mathrm{p}} = \overline{E}_{\mathrm{k}} = \frac{1}{4}kA^2 \propto A^2} \end{cases}$$

简谐振动的判据

1. 受力特征 $F = -kx$

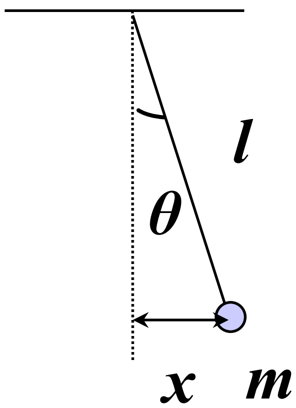
2. 微分方程 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

3. 能量特征

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E} = \mathbf{const.} \\
\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{p}} = \overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{k}} = \dfrac{1}{4}\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}^2 \propto \boldsymbol{A}^2
\end{cases}
$$

以上任一条成立即可判定为简谐振动

§ 6.4 阻尼振动



$$F = -mg\frac{x}{l} = -m\omega_0^2 x \qquad f \propto -\dot{x}$$

$$-m\omega_0^2 x - \gamma\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad \beta > 0$$

$$x \to e^{\alpha t} \qquad \alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$x \to e^{\alpha t} \qquad \alpha = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$(1)\ \beta < \omega_0, \qquad \alpha = -\beta \pm i\omega$

$(2)\ \beta = \omega_0, \qquad \alpha = -\beta$

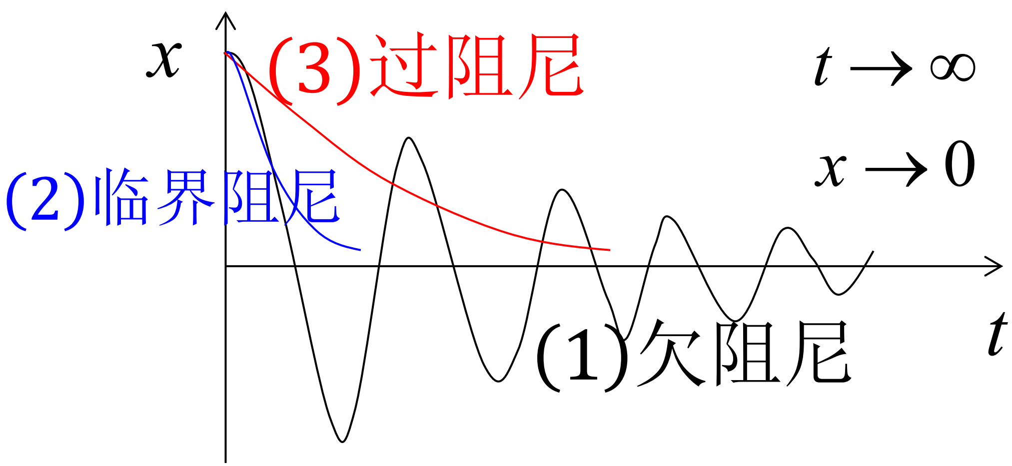
$(3)\ \beta > \omega_0, \qquad \alpha = -\beta \pm \omega$

$$\omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|}$$

$(1)\ x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \qquad e^{i\omega t}, e^{-i\omega t} \to \sin\omega t, \cos\omega t$

$(2)\ x = u(t)e^{-\beta t}$，带入原方程求$u(t)$

$(3)\ (Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t})e^{-\beta t}$



$t \to \infty$

$x \to 0$

$(1)\quad Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$

$(2)\quad A(1 + \frac{t}{\tau})e^{-\beta t}$

$(3)\quad Ae^{-(\beta-\omega)t}(Be^{-2\omega t} + 1)$

单选题 1分

设置

欠阻尼振动系统，其振动周期随着阻尼的增大

A 增大

B 减小

C 不变

D 不一定

提交

品质因数 Q 值　　　欠阻尼

振动能量　$W(t) \approx \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 e^{-2\beta t}$

阻尼特征时间　$\tau = \frac{1}{2\beta}$　　$(1 \to e^{-1})$

$\boxed{2\pi\times 振动次数}$　$\boxed{Q = 2\pi \frac{\tau}{T} = \frac{\omega}{2\beta}}$

一个周期损耗能量　$W_R(t) \approx 2\beta T W(t)$

损耗越小
Q值越大

$$\boxed{品质因数Q = 2\pi\times \frac{储存能量}{一个周期损耗能量}}$$

§ 6.5 受迫振动

驱动力

$$-m\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} + H\cos\omega t = m\ddot{x}$$

固有频率

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = h\cos\omega t$$

非齐次方程

暂态解(通解) 稳态解(特解)

$\downarrow$

0

时间长了以后,

随驱动频率振动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A\cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A\omega\sin(\omega t + \varphi) = h\cos\omega t$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A\cos\varphi - 2\beta A\omega\sin\varphi = h$$

$$-(\omega_0^2 - \omega^2)A\sin\varphi - 2\beta A\omega\cos\varphi = 0$$

$$A=\frac{h}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-2\beta\omega\sin\varphi}$$

$$\tan\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$=\frac{h}{\sqrt{(\omega^2+2\beta^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}}$$

弱阻尼情况 $\beta=\delta<<\omega_0$

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega^2-\omega_\gamma^2)^2+4\gamma^2}}$$

共振

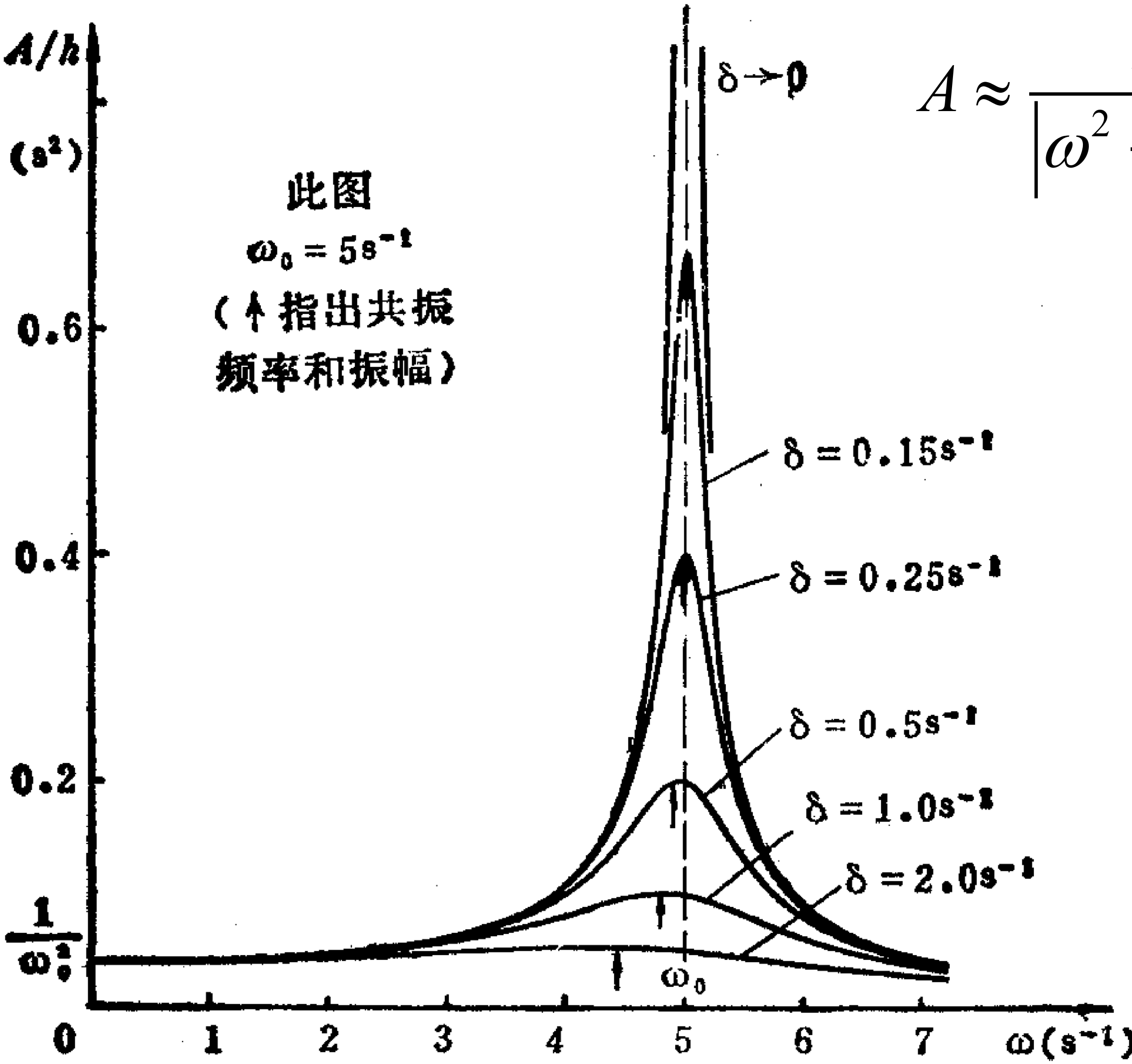
$\omega=\omega_\gamma\approx\omega_0$ 振幅最大 $A_{\max}=\dfrac{h}{2\gamma}$

共振耦合摆实验

$$A \approx \frac{h}{\left|\omega^2 - \omega_0^2\right|}$$

共振(曲线)

Resonance



不同阻尼的几条**共振**曲线

1940年华盛顿的塔
科曼大桥建成

同年7月的一场大
风引起桥的共振,
使桥摧毁.


CCTV 1
综合
CNTV 高清
经过风风雨雨后
加油
向未来

单选题 1分

设置

实际简谐受迫振动系统，总是有阻尼的。当驱动力频率与系统固有振动频率相同时，系统振动与驱动力相比

A 同相

B 相位滞后π/2

C 相位滞后π

D 相位超前π/2

E 相位超前π

提交