补充内容（选学）：∃前束范式的存在定理及其证明

--选自 王宪钧编《数理逻辑引论》，1982，北京大学出版社

定理　谓词逻辑的任一公式 A，都可化成相应的∃前束范式，并且 A 是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。

说明：对普遍有效的公式，它与其∃前束范式是等值的。而一般的公式与其∃前束范式并不等值。自然仅当 A 是普遍有效的，方使用∃前束范式。

定理的证明：

上述定理可叙述为：**谓词逻辑的任一公式 D 都有一∃前束范式 E，**并且 **D** 和 **E** 可互推，亦即：**D 普遍有效是 E 普遍有效的充要条件。**

（**1**）必有一前束范式 E_1，且 $\vdash D \leftrightarrow E_1$。（前束范式存在定理）

（**2**）如 E_1 中有自由个体变项 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$，则可引用概括规则得

$$E_2 = (\Delta_1)(\Delta_2)\cdots(\Delta_m)E_1,\ m \geqslant 0。$$

E_2 和 E_1 可以互推，如 E_1 中无自由个体变项，则 E_2 即是 E_1。

（**3**）如 E_2 中只有命题变项而无谓词变项，即是说，E_2 为一命题演算的公式，则可引用定理

$$\vdash P \leftrightarrow (\exists x)(F(x) \vee \neg F(x) \wedge P)$$

引入一个处于最前方的存在量词。右侧公式即为存在前束范式

（**4**）如 E_2 为∃前束范式，则 E_2 即为 **E**。否则 E_2 的形式为

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)(\forall y)\ A(x_1,\cdots,x_n,y),\ n \geqslant 0。$$

在这里，$A(x_1,\cdots,x_n,y)$ 为一前束范式，其中只有 $x_1,\cdots,x_n,y$ 是自由个体变项。E_2 有两种可能：

（**a**）全称量词“$(\forall y)$”之前无存在量词，其后也无存在量词。

（**b**）“$(\forall y)$”后只有 $k-1$ 个全称量词出现于存在量词之前。

现在如果能够证明，在上述情形下，必然可以求得一前束范式 E_3，E_3 和 E_2 可以互推，并且，如为情况（**a**），则 E_3 的最前方为一存在量

词，也就是说，E_3是一个∃前束范式。如为情况（b），则 E_3 中只有 k – 1 个全称量词出现于存在量词之前，也就是说，比 E_2 少一个这样的全称量词。在情况（b）下，经过 k 次这样的转换，就可以得到一∃前束范式，因此存在定理得证。

为了求得 E_3，可先构造 E*如下。

$(\exists x_1)\ (\exists x_2)\cdots(\exists x_n)\{(\exists y)\ [A(x_1,\cdots,x_n,y)\wedge\neg S(x_1,\cdots,x_n,y)]\vee(\forall z)S(x_1,\cdots,x_n,z)\}$

其中 S(…)是在 A 中不出现的谓词变项，z 是在 A 中不出现的个体变项。现在需要证明：

（ i ）E_2 和 E*可以互推，

（ ii ）从 E*可以得到所需要的 E_3，E*和 E_3 可以互推。

（5）E_2 和 E*可以互推。

根据定理

$\vdash(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow((\forall x)F(x)\rightarrow(\forall x)G(x))$

可得

$\vdash(\forall y)F(y)\rightarrow(\exists y)(F(y)\wedge\neg G(y))\vee(\forall z)G(z)$。(iii)

在上列公式中，以 $A(x_1,\cdots,x_n,\triangle)$代 $F(\triangle)$，以 $S(x_1,\cdots,x_n,\triangle)$代 $G(\triangle)$，可得

$\vdash(\forall y)A(x_1,\cdots,x_n,y)\rightarrow(\exists y)[(A(x_1,\cdots,x_n,y)\wedge\neg S(x_1,\cdots,x_n,\ y))]\vee(\forall z)S(x_1,\cdots,x_n,z)$ (aa)

根据概括规则及定理

$\vdash(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow((\exists x)F(x)\rightarrow(\exists x)G(x))$ (iv) 条件放松

可得

$\vdash(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)(\forall y)A(x_1,\cdots,x_n,y)$

$\rightarrow(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)\{(\exists y)[A(x_1,\cdots,x_n,y)$

$\wedge\neg S(x_1,\cdots,x_n,y)]\vee(\forall z)S(x_1,\cdots,x_n,z)\}$

【备注：在 aa 式中，对 $x_1,x_2,x_3\ldots$施加∀量词，可以得到存在量词的

结论

$\vdash\forall x_n\{(\forall y)F(y)\rightarrow(\exists y)(F(y)\wedge\neg G(y))\vee(\forall z)G(z)\}$　　根据（iii）

$\vdash\forall x_n\{(\forall y)F(y)\rightarrow(\exists y)(F(y)\wedge\neg G(y))\vee(\forall z)G(z)\}\rightarrow\{\exists x_n\forall yF(y)\rightarrow\exists x_n(\exists y)(F(y)\wedge\neg G(y))\vee(\forall z)G(z)\}$　　(根据 iv)

$\vdash\{\exists x_n\forall yF(y)\rightarrow\exists x_n(\exists y)(F(y)\wedge\neg G(y))\vee(\forall z)G(z)\}$　　分离规则

如此重复施加于 $x_{n-1},\ldots,x_1$】

以上即是 $\vdash E_2\rightarrow E^*$。可见从 E_2 可以推出 E^*。

现证从 E^*可以推出 E_2。

在 E^*中作代入，以 $A(x_1,\cdots,x_n,\triangle)$代 $S(x_1,\cdots,x_n,\triangle)$，可得

$(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)\{(\exists y)[A(x_1,\cdots,x_n,y)\wedge\neg S(x_1,\cdots,x_n,y)]\vee(\forall z)S(x_1,\cdots,x_n,z)\}$

消去其中的矛盾式则得

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)(\forall z)A(x_1,\cdots,x_n,z)。$$

再用约束变项易名可得 E_2，即是

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)(\forall y)A(x_1,\cdots,x_n,y)。$$

因此，E_2 和 E^*可互推得证。

（6）从 E^*可以推出 E_3。

E^*为

$(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)\{(\exists y)\ [A(x_1,\cdots,x_n,y)\wedge\neg S(x_1,\cdots,x_n,y)]\vee(\forall z)S(x_1,\cdots,x_n,z)\}$

$A(\cdots)$为一前束范式，其中只有 $k-1$ 个全称量词出现于存在量词之前，设 $A(\cdots)$为

$$Z_1Z_2\cdots Z_l A^*(x_1,\cdots,x_n,y)，l\geqslant k。$$

其中 $Z_1,\cdots,Z_l$ 皆为量词，且约束变项中无 z。现将量词$(\exists y)$，$Z_1,\cdots,Z_l$

等依次前移使其辖域延伸至公式的末端，最后将$(\forall z)$前移。这样前移的结果即为 E_3：

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)(\exists y)\, Z_1Z_2\cdots Z_l(\forall z)\{[\, A(x_1,\cdots,x_n,y) \wedge\neg S(x_1,\cdots,x_n, y)]\vee S(x_1,\cdots,x_n, z)\}。$$

由于 Z_1 前的“$(\forall y)$”已转换为一存在量词“$(\exists y)$”，同时“$(\forall z)$”已移至前束词末端，因此（a）如果 E_2 中原无存在量词，E_3 的第一个量词即为存在量词，所以 E_3 是一个∃前束范式，（b）如果 E_2 中原有的 k 个全称量词出现于存在量词之前，在 E_3 中只有 $k-1$ 个全称量词在某些存在量词之前，与 E_3 相比较已减少一个。

E^*和 E_3 是等值的，因此也是可以互推的。

至此，∃前束范式的存在定理得证。