1 请证明: 假设图$G=(V,E)$有n个顶点, 并且不包含K_p完全子图, 且$p\geq 2$, 那么

$$|E|\leq (1-\frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$$

.

1 使用归纳法. 当$p=2$时, $|E|=0$, 显然成立.

当$p=3$时, $|E|\leq\frac{n^2}{4}$, 等号成立当且仅当G是完全二分图:

d_i表示第i个顶点的度数, 则根据握手定理可知:

$$\sum_{i\in V} d_i=2|E|$$

并且由于G中不存在三角形(即K_3子图), 可知若$e_{ij}\in E$, 则

$$d_i+d_j\leq n, \forall 1\leq i,j\leq n$$

因此可得

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}(d_i+d_j)\leq n|E|, i\neq j$$

进一步化简. 第i个顶点在上式被计算d_i次, 由此可得:

$$n|E|\geq\sum_{i\in V} d_i^2$$

再根据*Cauchy-Schwarz*不等式, 可得

$$n|E|\geq\sum_{i\in V} d_i^2\geq\frac{(\sum_{i\in V} d_i)^2}{n}=\frac{4|E|^2}{n}$$

即

$$|E|\leq\frac{n^2}{4}$$

对n归纳: 当$2\sim n-1$均成立时, 证明n时也成立.

首先考虑$n<p$的情况: 注意到

$$|E|=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{n^2}{2n}\leq\frac{n^2}{2}-\frac{n^2}{2(p-1)}=(1-\frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$$

此时图G中不存在K_p完全子图.

再考虑$n\geq p$的情况: 令G为顶点集V上边数最多的不含K_p完全子图的图, 则G中一定包含K_{p-1}完全子图, 否则可以向G中加入一条边, 使得边数增加, 与G的定义矛盾.

令A为其中任意一个K_{p-1}完全子图, $B=V\backslash A$, 则A中含有$\frac{(p-1)(p-2)}{2}$条边.

由归纳条件知, B不含K_p完全子图, 其边数$|E_B|\leq(1-\frac{1}{p-1})\frac{(n-p+1)^2}{2}$.

并且由于G不含K_p完全子图, B中每个顶点最多可以与A中的$p-2$个顶点相连, 得到:

$$|E|\leq|E_A|+|E_B|+(p-2)(n-p+1)=(1-\frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$$

得证.