大学物理 B(1)

周 次	日 期	教学及考试安排
6	3月27日	刚体
	3月29日	刚体，相对论
7	4月3日	相对论
	4月5日	清明放假停课
8	4月10日	相对论
	4月12日	相对论
9	4月17日	相对论、振动
	4月19日	**移至第9周 周六（22日）上午 期中考试**

5.4 刚体的定轴转动定律

回顾：质点系的角动量定理

对固定点C $\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $M_{外z} = \sum_i M_{i外z}$

对转动轴z $M_{外z} = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$ $L_z = \sum_i L_{iz}$

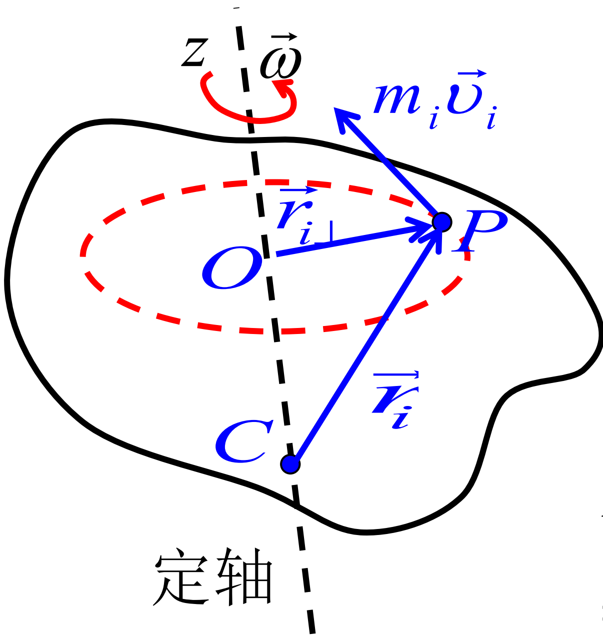
1、力对轴的力矩 $M_{iz} = r_{i\perp}F_{i\perp}\sin\alpha$

2、质点对轴的角动量 $L_{iz} = r_{i\perp}p_{i\perp}\sin\beta$

刚体 $L_{iz} = r_{i\perp}p_{i\perp}$

3、刚体的定轴转动定律

定轴转动角动量表达式



$$L_z = \sum L_{iz}$$
$$= \sum r_{i\perp} p_{i\perp} \sin\beta$$
$$= \sum r_{i\perp} p_{i\perp}$$

$$L_z = \sum m_i r_{i\perp} \upsilon_i = \sum m_i r_{i\perp}^2 \omega$$
$$= (\sum m_i r_{i\perp}^2)\omega = J_z \omega$$

$\boxed{J_z = \sum m_i r_{i\perp}^2}$ 对Z轴的转动惯量(moment of inertia)

J 由质量对轴的分布决定，与转动状态无关。

定轴转动定律

定轴转动角动量 $L_z = J_z \omega$

质点系的角动量定理（对Z轴）

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(J_z \omega) = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \alpha$$

$\boxed{M_z = J_z \alpha}$ 定轴转动定律

常省略小标，写为 $M = J\alpha$

与牛顿第二定律相比

牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$

定轴转动定律 $M = J\alpha$

$F \Leftrightarrow M$ 状态变化的原因

$m \Leftrightarrow J$ 惯性大小的量度

$\vec{a} \Leftrightarrow \vec{\alpha}$ 状态变化的快慢

与牛顿第二定律相比

牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$

定轴转动定律 $M = J\alpha$

$F \Leftrightarrow M$ 状态变化的原因

$m \Leftrightarrow J$ 惯性大小的量度

$\vec{a} \Leftrightarrow \vec{\alpha}$ 状态变化的快慢

动量定理 $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m\vec{v}$

刚体角动量定理 $M_Z = \dfrac{dL_Z}{dt}$ $L_Z = J_Z\omega$

单选题 1分

设置

一轴对称均匀刚体，绕质量对称轴转动，则刚体的角动量与参考点的选择

A 有关

B 无关

C 视情况而定

提交

刚体的定点转动可以看成相对于瞬时轴的定轴转动，所以刚体定点转动时的角动量和角速度满足关系 $\vec{L} = J\vec{\omega}$

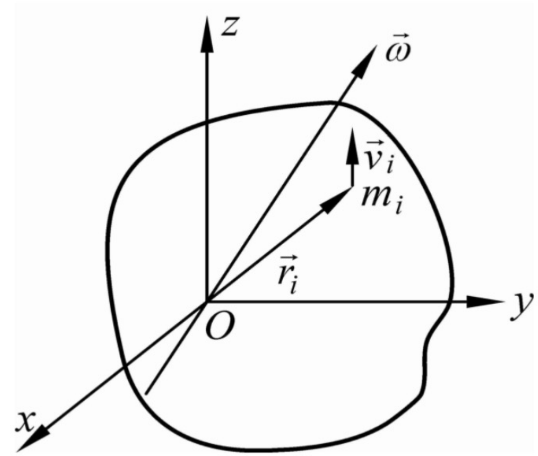
A 正确

B 不正确

提交

只有当刚体质量分布对瞬时轴对称时，刚体对瞬时轴上的定点的角动量的方向才是沿着瞬时轴的。若不对称：

$$\vec{L}=\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$
$$=\sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}\times \vec{r}_i)$$
$$=\sum m_i [\vec{\omega}\ r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$



$$\vec{L}=[\omega_x \sum m_i(y_i^2+z_i^2)-\omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i]\vec{i}$$
$$+[-\omega_x \sum m_i y_i x_i + \omega_y \sum m_i (x_i^2+z_i^2) - \omega_z \sum m_i y_i z_i]\vec{j}$$
$$+[-\omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_y \sum m_i z_i y_i + \omega_z \sum m_i (x_i^2+y_i^2)]\vec{k}$$

$$I_{xx}=\sum m_i(y_i^2+z_i^2) \qquad I_{xy}=I_{yx}=\sum m_i x_i y_i$$
$$I_{yy}=\sum m_i(x_i^2+z_i^2) \qquad I_{yz}=I_{zy}=\sum m_i y_i z_i$$
$$I_{zz}=\sum m_i(x_i^2+y_i^2) \qquad I_{zx}=I_{xz}=\sum m_i z_i x_i$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

填空题 2分

设置

两个半径相同的轮子A和B，质量相同。但A轮子的质量聚集在边缘附近，B轮子的质量分布比较均匀。现两个轮子绕中心对称轴旋转，如果它们的角动量相同，则 [填空1] 轮子转得快；但如果它们的角速度相同，则 [填空2] 轮子的角动量大。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

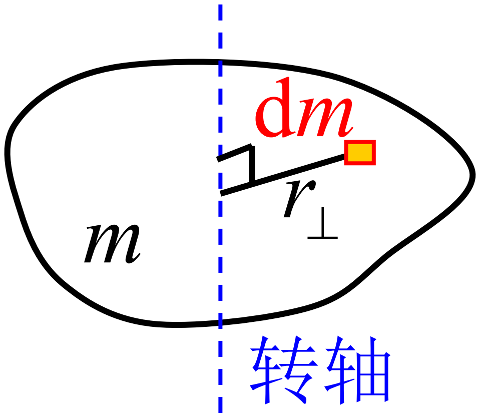
作答


角动量守恒，转动惯量减小，
bilibili
00:00/00:12
前方高能

花样滑冰

跳水

5.5 转动惯量的计算



分散系统

$$J=\sum m_i r_{i\perp}^2$$

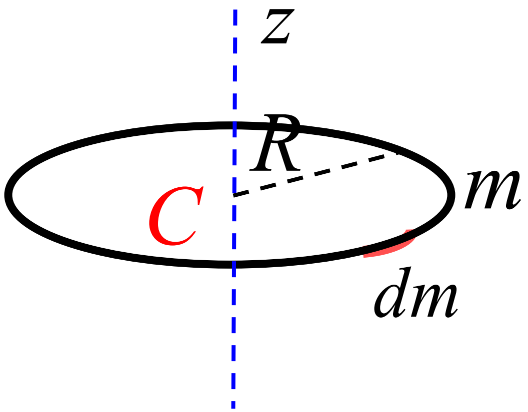
连续体

$$J=\int_m r_\perp^2\cdot \mathrm{d}\,m$$

J 由质量对轴的分布决定，与转动状态无关。

一. 常见刚体的转动惯量的计算

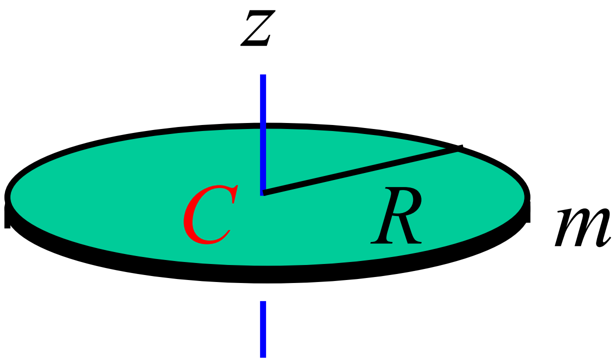
1、细圆环

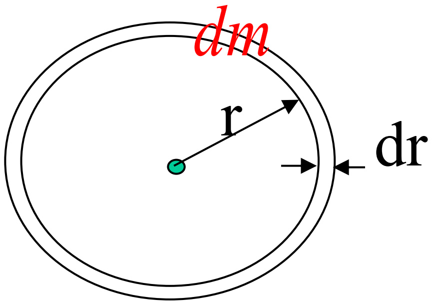


$$J = \int_m r_\perp^2 dm$$

$$\boxed{J_C = mR^2}$$

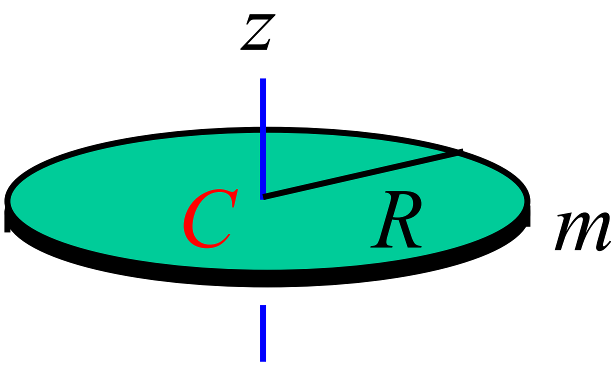
2、均匀圆盘

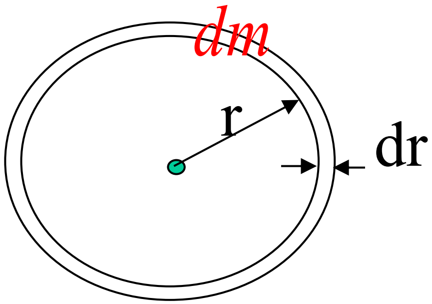




$$r^2 dm$$

2、均匀圆盘





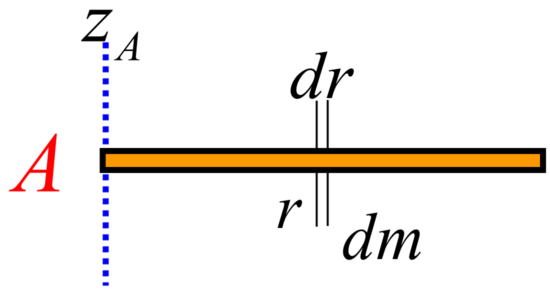
$r^2 dm$

$$J_C = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R 2\pi r dr \frac{m}{\pi R^2} r^2 = \frac{1}{2} mR^2$$

dm 随 r 变化

$$\boxed{J_C = \frac{1}{2} mR^2}$$

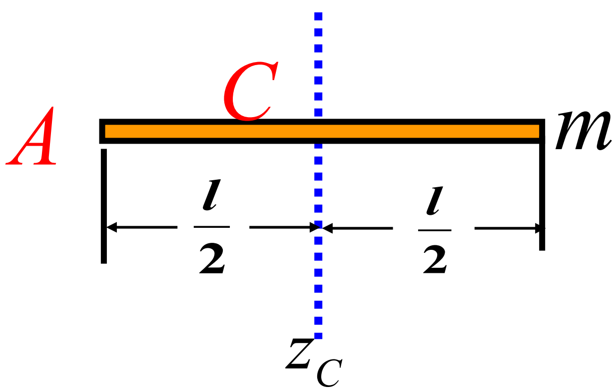
3、均匀细杆 $m \quad l$



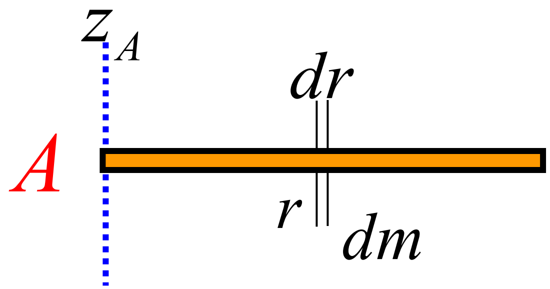
对A轴的转动惯量

$$\boxed{J_A = \frac{1}{3} m l^2}$$

$$J_A = \int_0^l r^2 dm = \int_0^l r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3} m l^2$$



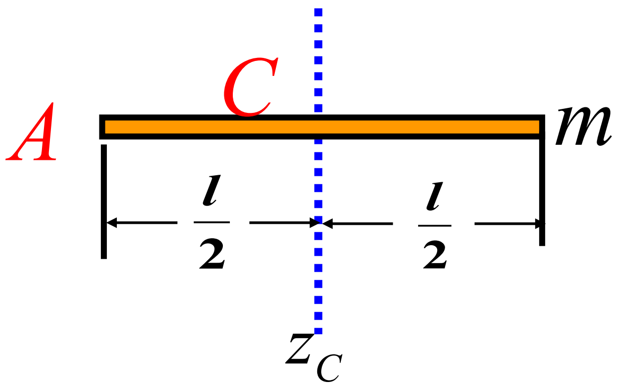
3、均匀细杆 $m \quad l$



对A轴的转动惯量

$$\boxed{J_A = \frac{1}{3} m l^2}$$

$$J_A = \int_0^l r^2 dm = \int_0^l r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3} m l^2$$



对过质心C轴的转动惯量最小

$$\boxed{J_C = \frac{1}{12} m l^2}$$

二、计算转动惯量的几条规律

1、对同一轴J具有可叠加性

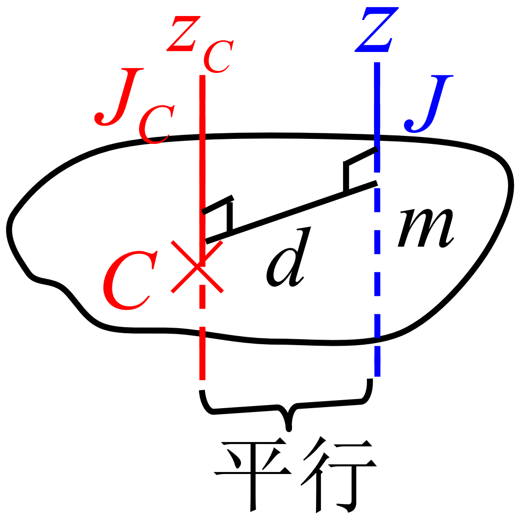
$$\boxed{J=\sum J_i}$$

可通过计算表达式来证明

分散系统 $$J=\sum m_i r_{i\perp}^2$$

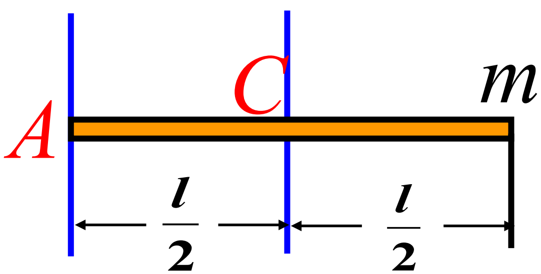
连续体 $$J=\int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}\,m$$

2、平行轴定理



$$\boxed{J = J_C + md^2}$$

$$\therefore \quad J_C = J_{\min}$$



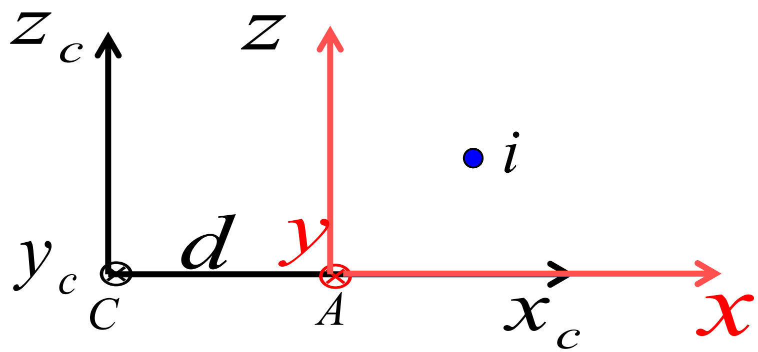
$$\boxed{J_C = \frac{1}{12} ml^2}$$

$$\boxed{J_A = \frac{1}{3} ml^2}$$

平行轴定理证明

建立直角坐标系

$x_c y_c z_c$　　xyz



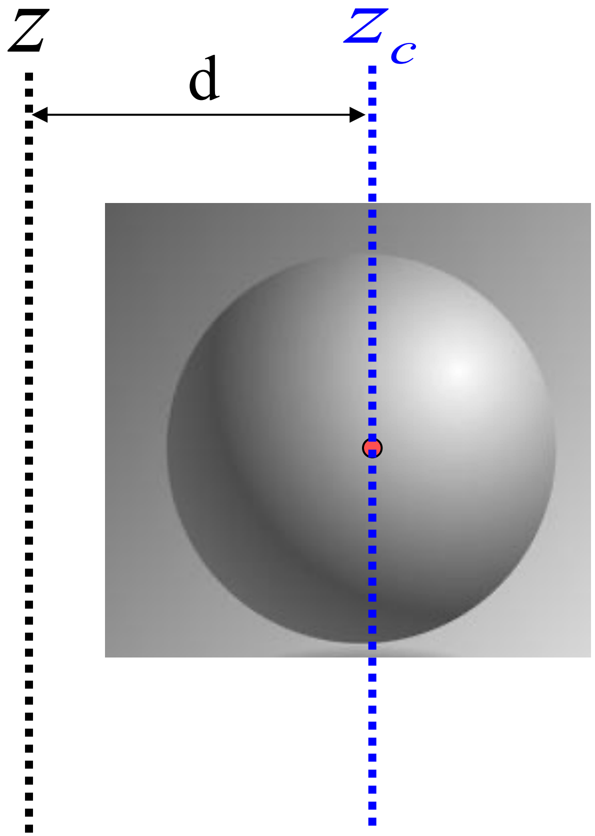
$$J = \sum_i m_i (y_i^{\ 2} + x_i^{\ 2}) = \sum_i m_i (y_{ic}^{\ 2} + (x_{ic} - d)^2)$$

$$= \sum_i m_i y_{ic}^{\ 2} + \sum_i m_i x_{ic}^{\ 2} + \sum_i m_i d^2 - 2\sum_i m_i x_{ic} d$$

$$\boxed{J = J_c + md^2}$$

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_{ic}}{m} = 0$$

平行轴定理应用



已知：

$$J_C = \frac{2}{5} mR^2$$

求相对于球外任一轴的转动惯量

$$J = \frac{2}{5} mR^2 + md^2$$

单选题 1分

设置

刚体对固定轴的转动惯量与刚体转动的角速度的关系是：

A 有关

B 无关

C 不好判断

提交

单选题 1分

设置

一轴对称均匀刚体，对称轴为A，另一转动轴B平行于A，相对于A、B轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B ，则

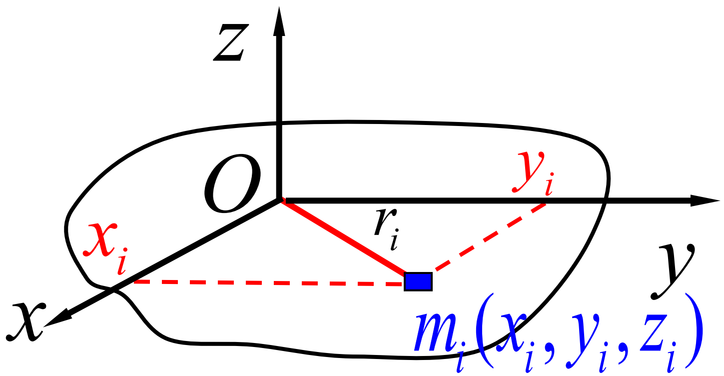
A $J_A > J_B$

B $J_A < J_B$

C $J_A = J_B$

提交

3、对薄平板刚体的正交轴定理



薄板刚体（厚度忽略不计）

Oxy 在刚体平面内

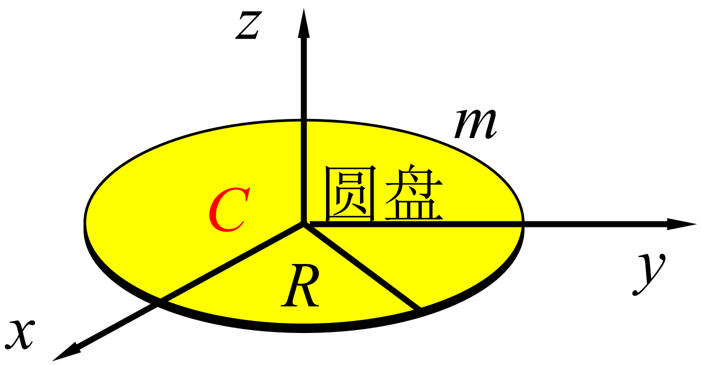
$$J_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

$$J_x = \cancel{\sum m_i z_i^2} + \sum m_i y_i^2 = \sum m_i y_i^2$$

$$J_y = \cancel{\sum m_i z_i^2} + \sum m_i x_i^2 = \sum m_i x_i^2$$

即 $\boxed{J_z = J_x + J_y}$

[例]求对薄圆盘的一条直径的转动惯量，



解：　　已知圆盘 $J_z = \frac{1}{2}mR^2$ 。

$$J_x + J_y = J_z = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\therefore \quad J_x = J_y = \frac{1}{4}mR^2$$

单选题 1分

设置

一正方形均匀薄板，已知它对通过中心并与板面垂直的轴的转动惯量为J，若以一条对角线为轴，则转动惯量为

A (1/4)J

B (1/2)J

C (2/3)J

D J

提交

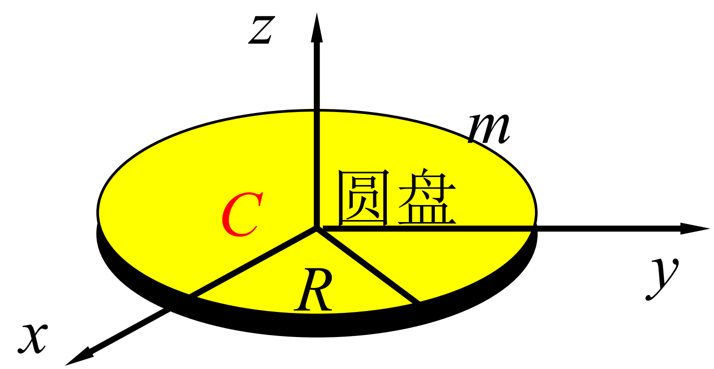
单选题 1分

设置

一厚度为h的均匀圆盘，一坐标系XOY，X轴和Y轴在圆盘面内，Z轴垂直于盘面，O是坐标原点，相对于X轴、Y轴和Z轴的转动惯量分别为Jx, Jy, Jz, 则Jz=Jx+Jy

A 上述结论正确

B 上述结论不正确



提交

5.6 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

一、角动量定理

质点系

对点	对轴	刚体定轴转动
$\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$	$M_{外z} = \dfrac{dL_z}{dt}$	$L_z = J_z\omega$ $\boxed{M_z = \dfrac{d(J_z\omega)}{dt}}$ 刚体的角动量定理

二、刚体定轴转动的角动量守恒定律

$$M_z = \frac{d(J_z\omega)}{dt}$$

$$\boxed{M_{外z}=0 \quad \Rightarrow \quad J_z\omega = \text{const.}} \begin{cases} \text{大小不变} \\ \text{正、负不变} \end{cases}$$

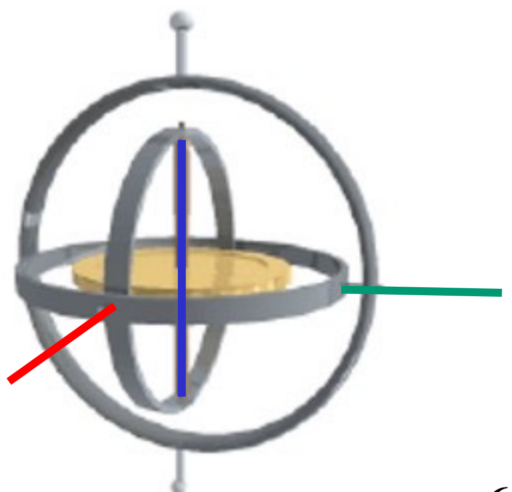
如果 J_z 保持不变 ω 将保持不变

角动量守恒实例—陀螺仪定向

1. 转轮厚重 J_z

2. 高速旋转 ω

3. 连接处光滑



ω 方向不变


mechanical gyro
陀 螺 仪

一刚体定轴转动，角速度不变，则

A 刚体受到的合外力一定为零

B 刚体受到的沿旋转轴方向的合外力矩一定为零

C 刚体受到的合外力矩一定为零

提交

填空题 3分

设置

一个内壁光滑的圆环形细管，正绕竖直固定轴自由转动。管是刚性的，转动惯量为J。一个小球静止于管内最高点处，由于微小干扰，小球向下滑动中：

（1）地球、环、小球系统的机械能 [填空1] （是/否）守恒；

（2）小球的动量 [填空2] （是/否）守恒；

（3）小球对竖直轴的角动量 [填空3] （是/否）守恒。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

三、角动量定理的另一形式

对点 $\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ 瞬时方程

$\vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t$ 力矩对时间的积累效应

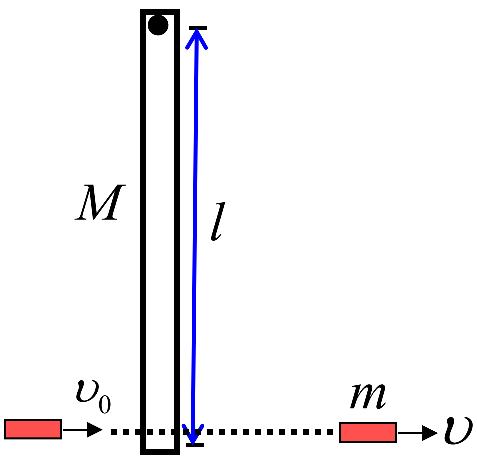
刚体定轴转动 $M_z = \dfrac{d(J_z\omega)}{dt}$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$$

——刚体定轴转动的角动量定理

【例题】一质量为m 的子弹以水平速度射入一静止

悬于顶端长棒的下端，穿出后速度损失3/4，求子弹穿出后棒的角速度ω



解：棒对子弹的阻力为f

对子弹的冲量 $\int f dt = m(\upsilon - \upsilon_0) = -\dfrac{3}{4} m\upsilon_0$

子弹对棒的反作用力 f' 对棒的冲量矩

$$\int f' l dt = l \int f' dt = -l \int f dt = \frac{3}{4} l m \upsilon_0 = J\omega$$

$$\omega = \frac{3}{4J} l m \upsilon_0 = \frac{9 m \upsilon_0}{4Ml}$$

5.7 定轴转动的功能原理

刚体定轴转动的角动量定理

$$M_z = \frac{d(J_z\omega)}{dt}$$

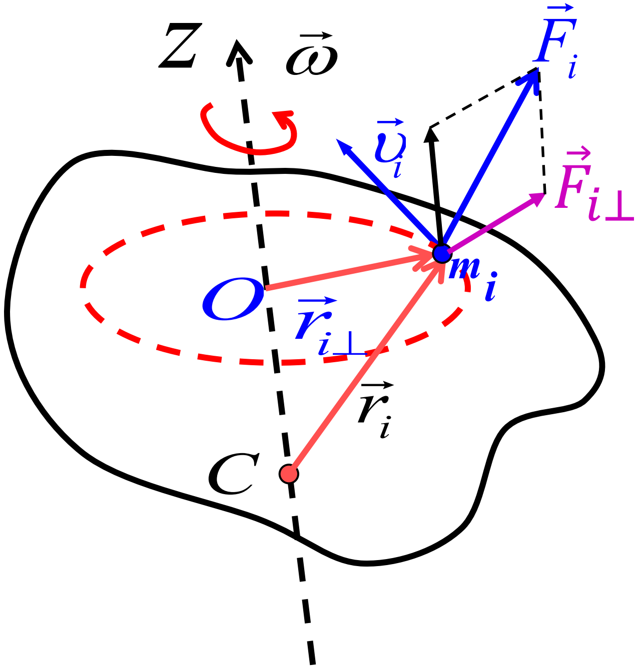
力矩对时间的积累效应：

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$$

力矩的空间积累效应：

力矩的功

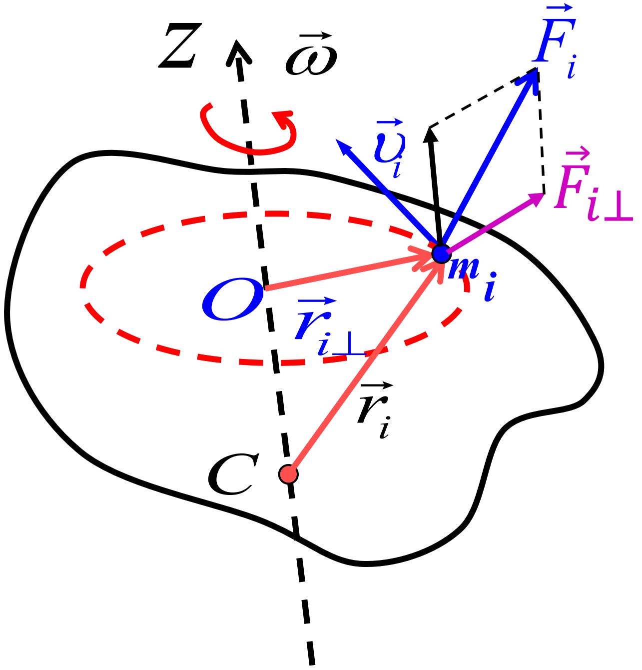
一.力矩的功



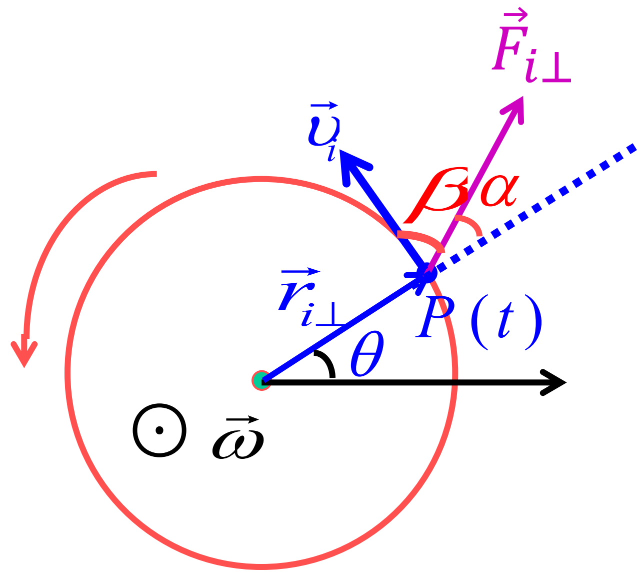
m_i在垂直于Z轴的平面内做圆周运动

$$\mathrm{d}W_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{i\perp} \cdot d\vec{r}_i$$

一.力矩的功



力对轴的力矩M



$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{i\perp} \cdot d\vec{r}_i$$
$$= \vec{F}_{i\perp} \cdot \vec{\upsilon}_i dt$$

$$= F_{i\perp} \upsilon_i \cos\beta \, dt = F_{i\perp} r_{i\perp} \omega \sin\alpha \, dt$$
$$= (F_{i\perp} r_{i\perp} \sin\alpha)\omega dt = M_{iz} d\theta$$

$$dW = \sum_i dW_i = \sum M_{iz} d\theta = M_z d\theta$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d\theta$$

直接用矢量推导

$$\mathrm{d}W_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{\upsilon}_i dt$$

$$= \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt$$

$$= (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_i dt$$

$$= \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) dt = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i dt = \vec{k} \cdot \vec{M}_i \omega dt$$

$$= M_{iz} \omega dt = M_{iz} d\theta$$

力矩的功 $$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d\theta}$$

力矩的空间积累效应

二、定轴转动动能定理

回顾：质点系动能定理

$$\boxed{W_{ext} + W_{\text{int}} = E_{k2} - E_{k1}}$$

对刚体 $W_{\text{int}} = 0$

$$\boxed{W_{ext} = E_{k2} - E_{k1}}$$

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\alpha\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

$$M=J\alpha$$

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$

定轴转动动能

$$\boxed{W=\int M d\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

刚体定轴转动动能定理

$$W=\int \vec{f}d\vec{r}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}J\omega^2 \overset{?}{=} \sum \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2$$ （所有质点动能的求和）

$$E_k = \sum \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 = \sum \frac{1}{2}m_i r_{i\perp}^2\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\sum m_i r_{i\perp}^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

（$\omega \uparrow \to E_k \uparrow\uparrow$）（飞轮储能）

白天、晚上用电量不同

单选题 1分

设置

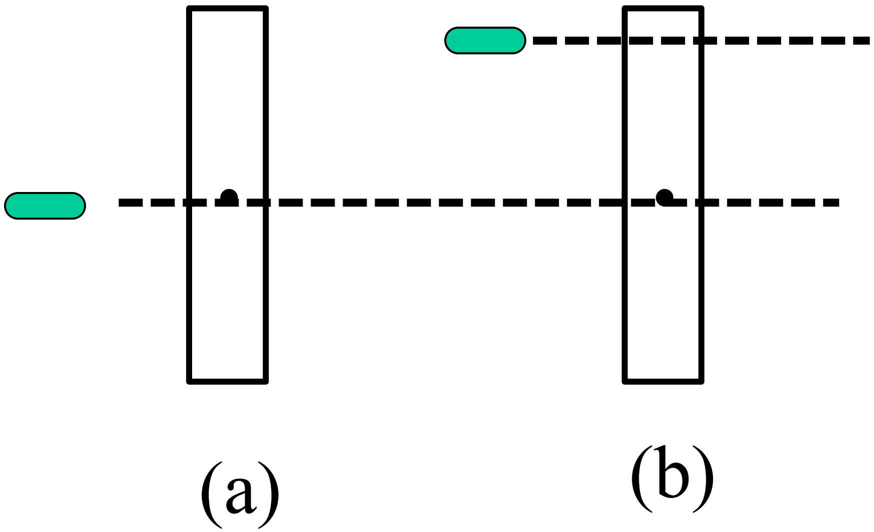
有个均匀木棒放在光滑的水平面上，一子弹水平射入其中，如图所示的（a）和（b）两种情况，哪种情况木棒和子弹最终的动能更大？

A （a）种情况；

B （b）种情况

C 一样大

D 无法判断

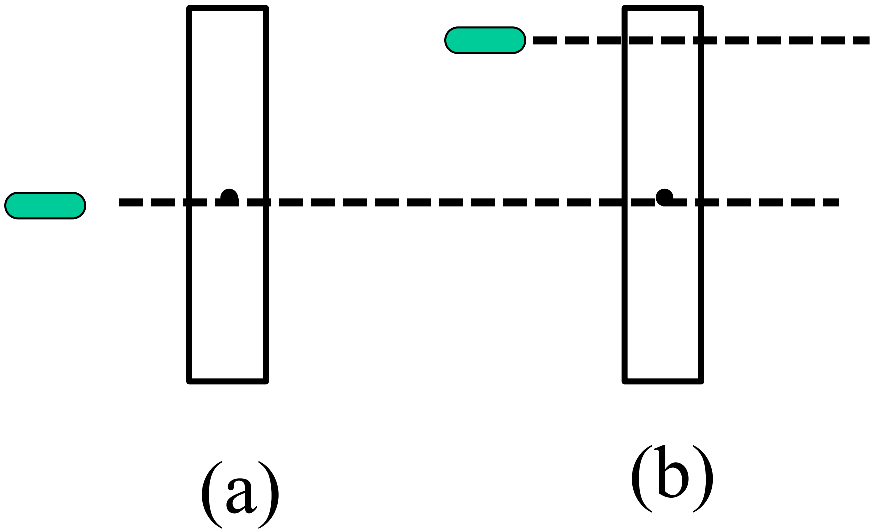


提交

单选题 1分

设置

有个均匀木棒放在光滑的水平面上，一子弹水平射入其中，如图所示的（a）和（b）两种情况，哪种情况木棒（不包含子弹）的动能更大？



A （a）种情况；

B （b）种情况

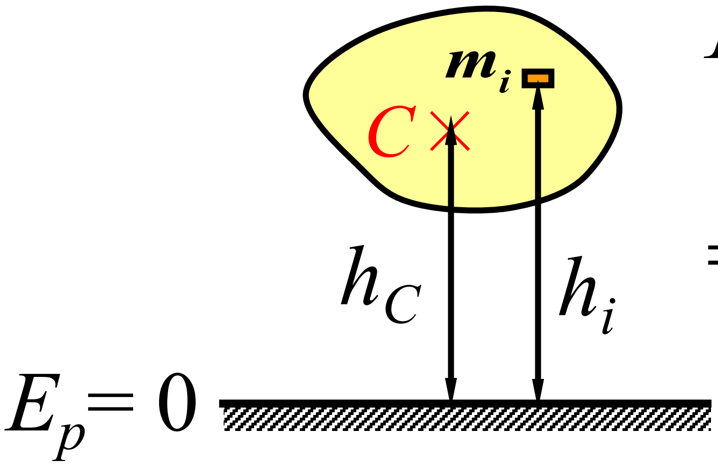
C 一样大

D 无法判断

提交

三、刚体的重力势能

重力场中的刚体　　　　刚体+地球



$$E_p=\sum m_i g h_i$$

$$=mg\frac{\sum m_i h_i}{m}$$

$$=mgh_c$$

刚体上各点重力加速度的变化忽略

四、刚体的机械能守恒

刚体和地球系统，只有重力做功

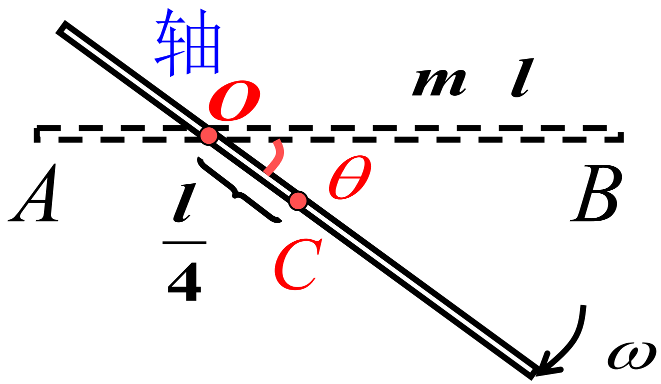
刚体的机械能守恒

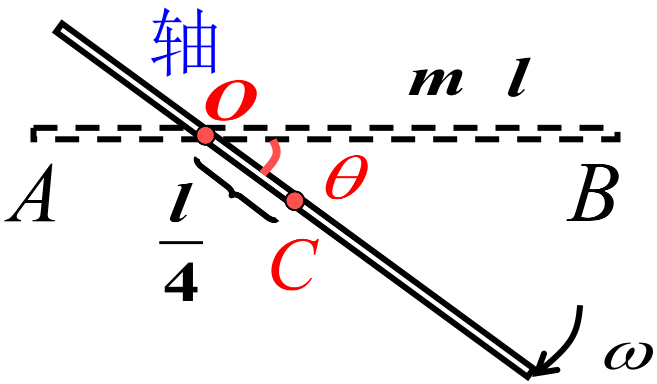
$$E_p + E_k = const.$$

【例题】 均匀直杆 $m \quad l$ 轴光滑，

$\overline{AO} = l/4$ 。 初始水平静止。

求：杆下摆到θ角时， 角速度 $\omega = ?$





（杆+地球）系统，只有重力作功，E守恒

水平面为重力势能零点

机械能守恒 $$\frac{1}{2}J_O\omega^2 - mg\frac{l}{4}\sin\theta = 0 \quad (1)$$

平行轴定理 $$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ml^2 \quad (2)$$

(1)、(2)解得： $$\omega = 2\sqrt{\frac{6g\sin\theta}{7l}}$$

角加速度？
质心速度、加速度?
轴上受力情况如何？