第8讲 集合论公理系统（3）

计算机系 黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

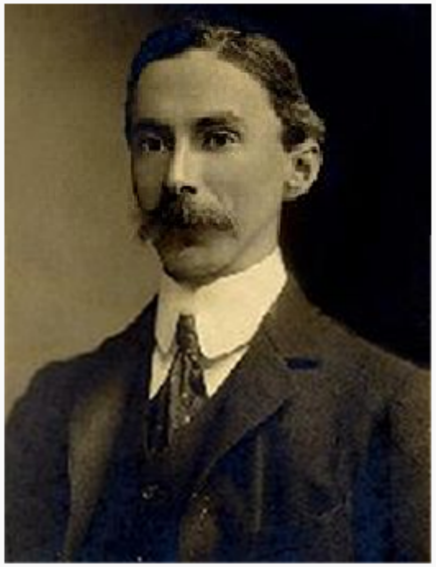
集合(set)的定义

- 集合是无法给出严格精确定义的基本数学概念之一。
- 康托的定义

"将具有某种特征或满足一定性质的所有对象或事物视为一个整体时，这一整体就称为集合，而这些事物或对象就称为属于该集合的元素"

Russell悖论

把所有的集合分成2类，第一类中的集合以其自身为元$P=\{A \mid A \in A\}$；第二类集合不以自身为元素$Q=\{A \mid A \notin A\}$。



伯特兰·罗素(1907年)

那么Q应该属于P还是Q?

如何从理论上防止悖论的出现?

9.7 集合论公理系统

- 一阶谓词公理系统的扩展，它包括一阶谓词公理系统和几个集合论公理。集合论公理系统可以推出一阶谓词的所有定理，也可以推出集合论的定理。**它从理论上防止了集合论中悖论的出现**。

- 基本思想："**任一集合的任一元素都是集合**"。

  集合外的其它对象（如有序对、数字、字母）都要用集合定义。

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统的主要目的：

  (1) 判定集合的存在性；

  (2) 由已知集合构造出所有合法的集合（合法性）

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

- ZF公理系统是著名的集合论公理系统
- 其它还有GB(Godel & Bernays)公理系统等
- ZF公理系统共包含10条集合论公理,但并非彼此独立

  第（3）无序对集合存在与

  第（5）子集公理模式可由其它公理推出

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（1）外延公理

两集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素。

$$(\forall \boldsymbol{x})(\forall \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \leftrightarrow (\forall \boldsymbol{z})(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{y}))$$

- 注意：这里x, y, z 均为集合

回顾：集合相等的定义。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

(2) 空集存在公理

存在不含任何元素的集合(空集Φ)。

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$$

- 该公理定义了集合论中的第一个集合——空集Φ 。
- 且由外延公理可知，空集是唯一的。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（3）无序对集合存在公理

对任意的集合 x 和y，存在一个集合 z，它的元素恰好为 x 和y。

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow ((u = x) \vee (u = y)))$$

- 已知 x 和y 是集合，由该公理可构造

z = { x, y} 也是集合。

有了该公理，便可无休止地构造许多具体的集合。

$\Phi \rightarrow \{\Phi\} \rightarrow \{\Phi,\{\Phi\}\}$，$\{\{\Phi\}\}$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（4）并集合存在公理

对任意的集合 x，存在一个集合y，它的元素恰好为 x 的元素的元素。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(z \in u \land u \in x))$$

- 解决了集合的广义并的存在性

（集合的广义并是集合）

(5) 子集公理模式(分离公理模式)

对**任意的谓词公式** **P(z)**，对任意的集合 x，存在一个集合y, y的元素 z 恰好既是 x 的元素又使 P(z) 为真。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \land P(z)))$$

对任意的集合x，存在x的子集y, y的元素z使P(z)为真。

不只是一条公理，而是无限多条有同样模式的公理，可解决交集、差集、广义交、广义并和笛卡儿积的存在性。

子集公理模式

◎ **定理9.7.1 交集存在定理**

对任意的集合 A和 B，交集 A∩B是集合。

◎ **定理9.7.2 差集存在定理**

对任意的集合 A和 B，差集 A－B是集合。

◎ **定理9.7. 3　广义交存在定理**

对任意的非空集合 A，广义交∩A是集合。**（证明过程的严谨性）**

① A是集合
② $p(x) =: x \in B$
③ $A_0 = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$ 是集合
④ 根据定义 $A_0 = A \wedge B$
⑤ 因此，交集是合法集合

定理9.7.3 广义交存在定理

- **定理9.7.3.** 对任意的非空集合A，广义交$\cap A$是集合。

证明： 对非空集合A，存在$A_1 \in A$。选取公式$(\forall y)(y \in A \to x \in y)$为$p(x)$。

依据**子集公理**，对集合A_1和上述公式，存在合法集合

$$A_0 = \{x | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_1} \wedge (\forall y)(y \in A \to x \in y)\}.$$

此外 $$\cap A = \{x | (\forall y)(y \in A \to x \in y)\}.$$

由$\boldsymbol{A_1} \in \boldsymbol{A}$和$(\forall y)(y \in A \to x \in y)$（即 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A_1}$）可以推出$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_1}$。

所以$A_0 = \cap A$，$\cap A$是集合。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

例：以交集和差集为例

- **定理9. 7. 1　对任意的集合A，交集$A\cap B$是集合。**

对任意的集合x，　存在x的子集y，　y的元素z使P(z)为真

对任意的集合A，存在A的子集$A\cap B$，　其元素使$z\in B$为真

$$y = \{ z \mid z\in x \ \wedge P(z)\} \qquad y\subseteq x,\ y是\ x的子集，$$

$$A\cap B = \{ z \mid z\in A \wedge z\in B\}$$

子集公理保证了上述集合的存在性。

$$A-B = \{z \mid z\in A \wedge z\notin B\}$$ 差集仅需将P(z) 代为$z\notin B$。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（6）幂集合公理（集合的幂集是集合）

对任意的集合 x，存在一个集合y，它的元素恰好是 x 的子集。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\forall u)(u \in z \to u \in x))$$

$$(\forall A)(\exists P(A))(\forall x)(x \in P(A) \leftrightarrow x \subseteq A)$$

对任意的集合A，存在一个集合P(A)，恰好以A的一切子集为元素。故集合的幂集是集合。

（7）正则公理

对任意的非空集合 x，存在 x 的一个元素，它和 x 不相交。

$$(\forall x)(x \neq \Phi \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge (x \cap y = \Phi)))$$

- 此时称该元素为集合 x 的一个极小元。

定义9.7.1 极小元

极小元:对任意的集合 A和 B，当满足 $A \in B$且$A \cap B = \Phi$时，就称 A为B的一个极小元。

举例:

$A=\{\boldsymbol{\Phi}, \{\boldsymbol{\Phi}\}\}$，**极小元?**

$B=\{\boldsymbol{\Phi}, \{\boldsymbol{\Phi}\}, \{\boldsymbol{\Phi}, \{\boldsymbol{\Phi}\}\}\}$，**极小元?**

$C=\{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$，**极小元?**

集合的重要性质（利用正则公理证明）

- **定理9.7.6　集合的重要性质1**

  对任意的集合A，$A \notin A$。

假设$A \in A$
1. 根据无序对集合存在公理，$\{A\}$存在
2. 根据正则公理$A \cap \{A\} = \Phi$
3. 但$A \in A$，所以$A \cap \{A\} = \{A\}$，矛盾

- **定理9.7.7　集合的重要性质2**

  对任意的集合 A和 B，有

  $$\neg(A \in B \wedge B \in A)$$

反证法。
构造集合$\{A, B\}$（存在）
由正则公理，不存在最小元

- **定理9.7.8　传递集合的性质7**

  对任意非空的传递集合 A，有$\Phi \in A$。

补充资料（正则公理）

定理9.5.16：若非空集合A是传递集合，则A的广义交是传递集合且为空

$\exists y\ (y \in \cap A)$

$\Leftrightarrow \forall z\,(z \in A \rightarrow y \in z)$

$\Rightarrow y \in A$ --A是传递集合

$\Rightarrow\ \forall z \exists y(z \in A \wedge y \in A \wedge y \in z)$

$\Rightarrow \forall z\,(z \in A \wedge (z \cap A \neq \phi))$

与正则公理矛盾。因此A的广义交是空集，空集是传递集合。

补充资料（正则公理）

- **定理9.7.5 不存在集合A，任何集合都是A的元素**
- 证明：假设存在这样的集合A，p(x) = $x \notin x$。根据子集公理，构造

$$A_0 = \{x | x \in A \land x \notin x\}$$

A_0存在。根据假设$A_0 \in A$ 。

1. 假设$A_0 \in A_0 \Longrightarrow A_0 \notin A_0$

2. 假设 $A_0 \notin A_0$，同时$A_0 \in A$，根据A_0定义，$A_0 \in A_0$

以上都矛盾。

Tsinghua University 清華大學

（8）无穷公理

存在一个由所有自然数组成的集合

$$(\exists x)(\Phi \in x \land (\forall y)(y \in x \to (y \cup \{y\}) \in x))$$

通俗理解：

$$(\exists N)(\Phi \in N \land (\forall y)(y \in N \to y^+ \in N))$$

自然数的前驱后继描述（回顾）

- 论域是自然数集，将下列语句形式化：
  1. 对每个数，有且仅有一个相继后元。
  2. 没有这样的数，0是其相继后元。
  3. 对除0外的数，有且仅有一个相继前元。

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 自然数的集合表示方法：
- Zermelo 1908年给出一种方法：
  - $0 = \Phi$， $1 = \{\Phi\}$， $2 = \{\{\Phi\}\}$， …

- 存在什么问题?
  - 满足$0 \in 1 \in 2 \in \ldots$。但‘$\in$’ 关系不满足传递性。即由 $A \in B \wedge B \in C$ 成立，却推不出 $A \in C$ 成立。
  - 未能准确刻画自然数本身所固有的性质。

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 每个自然数所包含的两方面信息：

（1）序数（排序） order

（2）基数（对应的个数） cardinal

- 1924年，Von Neumann在满足序数与基数两种性质的意义下，通过定义后继，给出了另一种自然数的表示.

后继与自然数

- 定义9.7.3　前驱与后继

对任意的集合A，定义集合

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

A^+ 称为 A的后继， A称为A^+的前驱。

- 定义9.7.4　用后继定义自然数

集合$0 = \Phi$是一个自然数。若集合n是一个自然数，则集合$n+1 = n^+$也是一个自然数。

自然数的集合表示

- 按照上述定义，每个自然数可表示为：

$0 = \Phi$

$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\Phi\}$

$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = \{\Phi, \{\Phi\}\}$

$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\} = \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$

…

$n + 1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0,1,2, \dots, n\}$

◉ 自然数集合

性质1：每个集合都是传递集合。

性质2：相邻数满足属于、子集关系。

性质3：具有偏序关系、传递性。

98　　　101

思考：自然数的广义并，比如$\cup 99$，$\cup\{99,100,101\}$？

广义交呢？

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（10） 选择公理

对任意的关系R，存在一个函数 F，F 是 R 的子集，而且 F 和 R 的定义域相等。

$$(\forall 关系R)(\exists 函数F)(F \subseteq R \wedge dom(R) = dom(F))$$

- **什么是关系？什么是函数？**
- 在第11章函数中还将详细介绍该公理。

集合的存在性

- **定理9.7.4　笛卡儿积存在定理**

  对任意的集合 A和 B，笛卡儿积 A×B是集合。**（证明过程的严谨性）**

- **定理9.7.5　万有集不存在定理**

  不存在集合A，使任一集合都是 A的元素。
  为什么$\cap\Phi$必须定义为不存在？

定理9.7.4 笛卡儿积存在定理

- **定理9.7.4.** 对任意的集合A和B，笛卡尔积$A\times B$是集合。

证明: 对任意的$<x,y>$，有

$$x\in A\wedge y\in B$$

$$\Rightarrow x\in A\cup B\wedge y\in A\cup B$$

$\Rightarrow <x,y>\in PP(A\cup B)$（定理9.5.18）

显然$PP(A\cup B)$是合法集合(幂集合公理)，选取公式$\boldsymbol{p(z)}$为

$$z=<x,y>\wedge x\in A\wedge y\in B$$

可以构造它的子集，也是合法集合(子集公理)

$$\{z|z\in PP(A\cup B)\wedge z=<x,y>\wedge x\in A\wedge y\in B\}$$

这就是$A\times B$，所以$A\times B$是集合。

定理9.7.5　万有集不存在定理

- 证明：假设存在这样的集合A，任意集合都是它的元素。

设p(x) = $x \notin x$。根据子集公理，构造

$$A_0 = \{x | x \in A \wedge x \notin x\} \qquad (1)$$

A_0存在。根据假设$A_0 \in A$ 。

1. 假设$A_0 \in A_0 \Longrightarrow A_0 \notin A_0$（即1式中x= A_0 ）

2. 假设 $A_0 \notin A_0$，同时$A_0 \in A$，根据A_0定义，$A_0 \in A_0$

以上都矛盾。

$\cap\emptyset$的存在性

$$\forall x(x \in \cap\emptyset \leftrightarrow (\forall y)(y \in \emptyset \to x \in y))$$

由于右式为永真式，意味着$x \in \cap\emptyset$永真，

意味着存在一个集合，所有x都是这个集合的元素。

与万有集不存在定理矛盾。

因此，只能规定$\cap\emptyset$是一个非法不存在的集合。

在公理系统下的证明范式

- 首先找到一个存在集合（存在性）
- 根据公理，构造新的合法集合
- 演绎推理

第九章小结

- 基本概念和定义
- 介绍了集合间的关系和特殊集合以及并、交、差、余、对称差、广义并、广义交，笛卡儿积等多种运算。
- 特殊集合：差集、序偶、幂集、传递集合
- 详细介绍了集合运算的性质（11个运算定律）和两种证明方法（谓词逻辑与集合恒等式）。

第九章小结

- 集合论公理系统的基本思想
- ZF公理系统的10条集合论公理：由满足存在性的少数集合构造所有合法集合的理论(存在性和合法性)。

补充资料

定义9.7.2 奇异集合

- 如果集合A中有集合的序列

$$A_0 \in A, A_1 \in A, \ldots, A_n \in A, \ldots$$

- 使得满足

$$\ldots \in A_{n+1} \in A_n \in A_{n-1} \in \cdots \in A_2 \in A_1 \in A_0$$

就称 A为奇异集合。

奇异集合不是集合

奇异集合的性质(正则公理)

- **定理9.7.9　奇异集合的性质1**

  奇异集合不满足正则公理。

- **定理9.7.10　奇异集合的性质2**

  若非空集合 A不是奇异集合，则 A满足正则公理。

逆否命题：A不满足正则公理，则A是奇异集合

奇异集合 $\Longleftrightarrow$ 不满足正则公理

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 定义9.7.5 自然数的性质

- 对任意的自然数 m 和 n

$$m < n \Leftrightarrow m \subset n \Leftrightarrow n > m$$

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \Leftrightarrow n \geq m$$

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- **定义9.7.6　集合的三歧性**

  对集合A，如果对任意的集合$A_1 \in A$和$A_2 \in A$，使

  $$A_1 \in A_2,\quad A_1 = A_2,\quad A_2 \in A_1$$

三式中恰好有一个成立，就称集合A有三歧性。

9.7.4 无穷公理和自然数集合

定理9.7.11　自然数的三歧性

- 自然数集合N有三歧性。
- 每个自然数都有三歧性。即

$$(\forall m)(\forall n)(m \in N \land n \in N \to m < n \lor m = n \lor m > n)$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（9） 替换公理模式

对于任意的谓词公式P(x,y)，如果对任意的 x 存在唯一的y使得P(x,y)为真，那么对所有的集合**t** ={$\mathbf{z_1,z_2,\ldots}$}就存在一个集合**s**={$\mathbf{u_1,u_2,\ldots}$}，使 s中的元素**u**恰好对应t中元素**z** 。

$$(\forall x)(\exists!\, y)P(x,y) \rightarrow (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \wedge P(z,u)))$$

- 其中$(\forall x)(\exists!\, y)P(x,y)$表示$(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge (\forall z)(P(x,z) \rightarrow z = y))$

  符号$(\exists!\, y)$表示存在唯一的y。

- 替换公理是子集公理模式的二元推广。

用替换公理等的举例证明(P152)

- 已知u和v是集合, 下面证明 {u, v}也是集合。由空集公理， Φ是集合。

  由幂集公理，P(Φ)={Φ}是集合。

  P ({Φ})={Φ, {Φ}}也是集合。

  令集合 t ={Φ, {Φ}}，定义 Q(x, y)为Q(Φ, u)=T；Q({Φ}, v)=T。

则 t 和 Q(x, y)满足替换公理的前提。
由替换公理可得，存在由u和v构成的集合s ={u, v}。

$$\{\Phi, \{\Phi\}\} \Rightarrow \{u, v\}$$