

# 大学物理 B(1)

清华大学物理系

## § 9.5 理想气体的压强与温度

• 本节是典型的微观研究方法。

一般气体分子热运动的概念：

分子的密度  $3 \times 10^{19}$  个分子/cm<sup>3</sup> = 3千亿亿/cm<sup>3</sup>；

分子之间有一定的间隙，有一定的作用力；

分子热运动的平均速度约  $\bar{v} = 500\text{m/s}$ ；

分子的平均碰撞次数约  $\bar{Z} = 10^{10}$  次/秒。

一. 微观模型



二. 理想气体压强公式的推导



三. 理想气体的温度和分子平均平动动能



# 一. 微观模型

## 1. 对单个分子的力学性质的假设 (理想气体的微观假设)

- 分子当作质点，不占体积；  
(因为分子的线度 $\ll$ 分子间的平均距离)
- 分子之间除碰撞的瞬间外，无相互作用力  
(忽略重力)
- 弹性碰撞 (动能不变)
- 服从牛顿力学

分子数目太多，无法解这么多的联立方程。即使能解也无用，因为碰撞太频繁，运动情况瞬息万变，必须用统计的方法来研究。

## 2. 对分子集体的统计假设

什么是统计规律性？

大量偶然事件从整体上反映出来的一种规律性，是以**概率**的形式表现出来的。

定义：某一事件  $i$  发生的概率为  $P_i$

$N_i$  ---- 事件  $i$  发生的 次数

$N$  ---- 各种事件发生的 总次数

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}$$

例. 扔硬币

•统计规律有以下几个特点：

- (1) 只对大量偶然（随机）事件才有意义.
- (2) 它是不同于个体规律的整体规律(量变到质变).
- (3) 总是伴随着涨落.

•对大量分子组成的气体系统的统计假设:

- (1) 分子的速度各不相同, 而且通过碰撞不断变化着;
- (2) 平衡态时分子按位置的分布是均匀的,  
即分子数密度到处一样 (忽略重力影响);

$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V} \quad dV \text{---体积元 (宏观小, 微观大)}$$

- (3) 平衡态时分子的速度按方向的分布是各向均匀的

$$\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0 \qquad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

$$\overline{v_x} = \frac{\sum_i n_i v_{xi}}{\sum_i n_i} \qquad \overline{v_x^2} = \frac{\sum_i n_i v_{xi}^2}{\sum_i n_i}$$



## 二. 理想气体压强公式的推导

一定量的理想气体处于平衡态。把分子按速度分组，在每一组内的分子速度大小、方向都差不多。

设第  $i$  组分子的速度在  $\vec{v}_i \sim \vec{v}_i + d\vec{v}_i$  区间内。

以  $n_i$  表示第  $i$  组分子的分子数密度

总的分子数密度为  $n = \sum_i n_i$

设  $dA$  法向为  $x$  轴

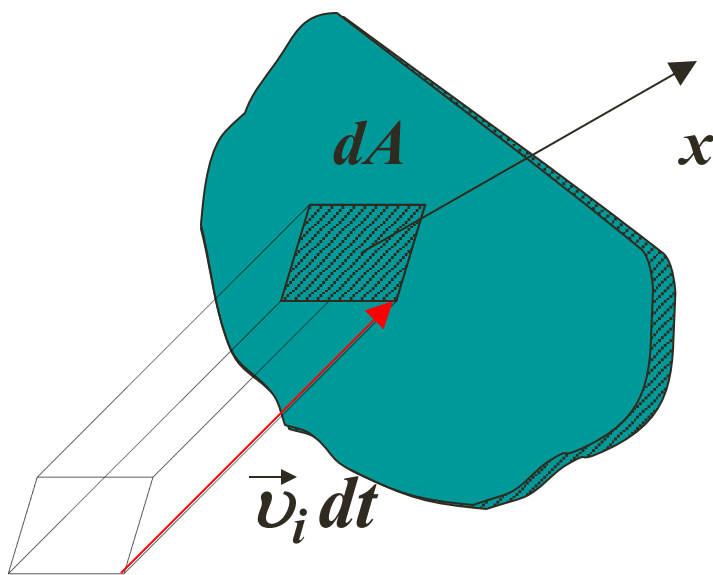
一次碰撞单分子动量变化

$$2m v_{ix}$$

在  $dt$  时间内与  $dA$  碰撞的分子数

$$n_i v_{ix} dt dA$$

斜柱体体积



$dt$  时间内传给  $dA$  的冲量为

$$dI = \sum_{i \in (v_{ix} > 0)} 2m v_{ix} n_i v_{ix} dt dA \quad \overline{v_x^2} = \frac{\sum_i n_i v_{ix}^2}{n}$$

$$P = \frac{dI}{dt dA} = nm \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} n \overline{\epsilon_k}$$

这里的压强只是统计概念

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$$

思考：

推导过程中是否应考虑小柱体内，会有速度为  $\vec{v}_i$  的分子被碰撞出来而未打到  $dA$  面上？

# 腔内光压

$$E = pc$$

$$dI = \sum_{i \ni (v_{ix} > 0)} 2 p_{ix} n_i v_{ix} dt dA$$

$$\overline{p_{ix} v_{ix}} = \frac{1}{3} \overline{\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i}$$

$$\sum_{i(v_{ix} > 0)} 2 p_{ix} v_{ix} n_i = \frac{1}{3} \sum_i n_i \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{3} \sum_i n_i p_i c = \frac{1}{3} \sum_i n_i u_i$$

$$P = \frac{dI}{dt dA} = \frac{1}{3} n \bar{u} = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$$





### 三. 理想气体的温度和分子平均平动动能

$$P = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k$$

$$P = nkT$$

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT$$

理想气体温标或热力学温标

平均平动动能只与温度有关

温度是统计概念，只能用于大量分子，温度标志物体内部分子无规运动的剧烈程度。

### 三. 理想气体的温度和分子平均平动动能

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \overline{\varepsilon_k} = \frac{3}{2}kT$$

方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

例. 在 0 °C 时,

$$\text{H}_2\text{分子} \quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 273}{2.02 \times 10^{-3}}} = 1836 \text{ m/s}$$

$$\text{O}_2\text{分子} \quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 273}{32 \times 10^{-3}}} = 461 \text{ m/s}$$

水分子是否做热运动？水对容器壁的压强是否可看做分子热运动的碰撞结果？

- ☐ A 水分子做热运动，所以压强就是热运动撞击产生的
- ☒ B 水分子做热运动，但压强不是热运动撞击产生的
- ☐ C 水分子不做热运动，压强也不是热运动撞击产生的
- ☐ D 水分子做热运动，热运动撞击对压强有部分贡献，但不是全部

提交

## § 9.6 能量均分定理

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{2} \overline{mv^2} = \frac{1}{2} \overline{mv_x^2} + \frac{1}{2} \overline{mv_y^2} + \frac{1}{2} \overline{mv_z^2} = 3 \times \frac{1}{2} kT$$

每个平方项的平均值 =  $\frac{1}{2} kT$  普遍?

能量均分定理：由经典统计力学描述的气体在绝对温度  $T$  时处于平衡，其能量的每个独立平方项的平均值等于  $kT/2$ 。

利用该定理研究多原子分子气体的能量

研究气体的能量时，气体分子不能再看成质点（为了讨论更简便原子仍旧看成是质点），**微观模型要修改**，因为分子有平动动能，还有转动动能，振动能。这些能量是平方项，**数目与自由度相关**。

## 自由度：

确定一个物体的空间位置 所需要的独立坐标数目。

### 1.单原子分子（**monatomic molecule**）



如：He, Ne...可看作质点，只有平动。

$t$  — 平动自由度

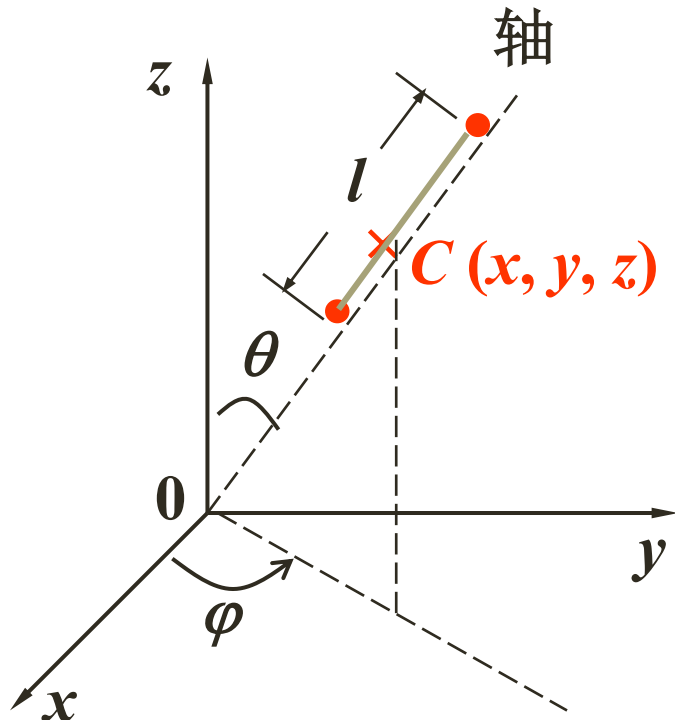
**(degree of freedom of translation)**

$$i = t = 3$$

## 2. 双原子分子 (biatomic molecule)

如:  $\text{O}_2$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{CO}$  ... 总自由度?

整体角度考虑



质心C平动:  $(x, y, z)$

$t=3$  — 平动自由度

轴取向:  $(\theta, \varphi)$

$r$  — 转动(rotation)自由度

$r=2$

距离  $l$  变化:

$v$  — 振动(vibration)自由度,

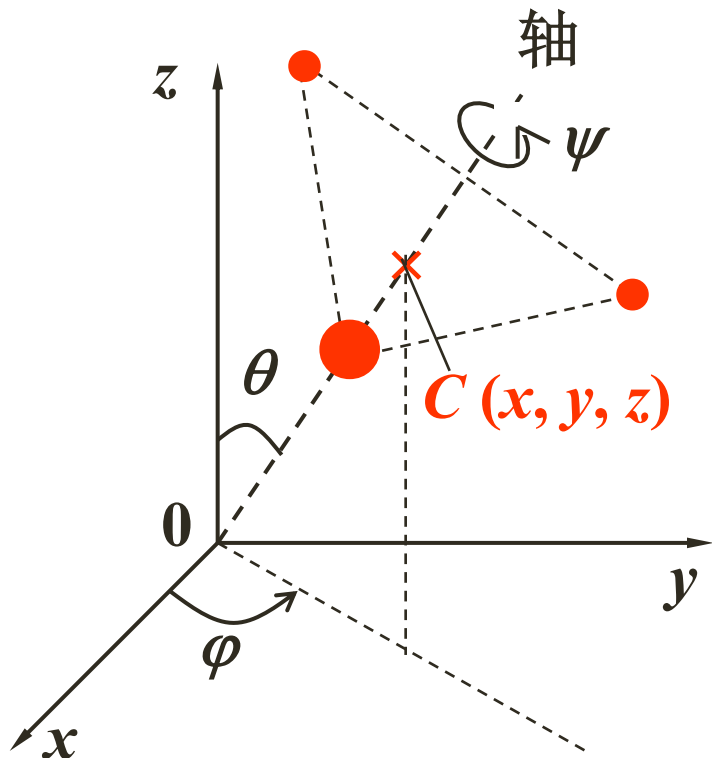
$v=1$

总自由度6:

$$i = t + r + v = 6$$

### 3. 多原子分子 (multi-atomic molecule)

如:  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ , ...



$N$ : 分子中的原子数

总自由度  $3N$

$$i = t + r + v = 3N$$

$$t = 3$$

$$r = 3 \quad (\theta, \varphi, \psi)$$

$$v = 3N - 6$$

若  $N$  个原子都在一条直线 ( $\text{CO}_2$ ), 整体转动自由度  $r = 2$

$$N \text{ 个原子振动自由度} \quad v = 3N - 5$$

由理想气体模型  
单原子分子：

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$$

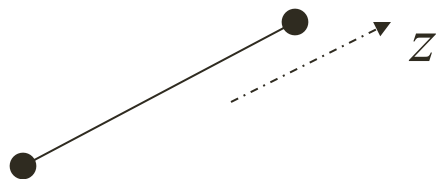
$$\text{平均热能} = 3 \times \frac{1}{2} kT$$

$$\text{每个平动自由度分配平均能 } \frac{1}{2} kT$$

刚性双原子分子  
除平动能，还有  
转动能：

$$E_{\text{转动}} = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2$$

$$\text{每个转动自由度分配平均能 } \frac{1}{2} kT$$



非刚性双原子分子  
除平动能、转动能，  
还有振动能：

$$E_{\text{振动}} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

$$\text{每个振动自由度分配平均能 } 2 \text{ 倍 } \frac{1}{2} kT$$

$$\text{振动自由度} = 1$$



设平动自由度  $t$ ，转动自由度  $r$ ，振动自由度  $\nu$ ，  
分子平均总能：

$$\overline{\varepsilon} = (t + r + 2\nu) \frac{1}{2} kT \quad 300\text{K}: kT \sim 1/40 \text{ eV}$$

理想气体内能

$$E = N \overline{\varepsilon} = (t + r + 2\nu) \frac{N}{2} kT$$
$$= (t + r + 2\nu) \frac{\nu}{2} RT$$

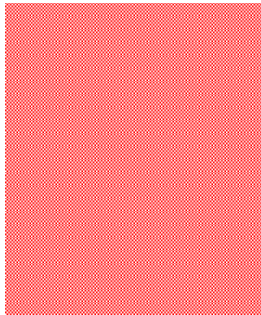
理想气体内能只是温度的函数, 与热力学温度成正比。

$$\text{单原子分子 } \overline{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT \quad \text{刚性双原子分子 } \overline{\varepsilon} = \frac{5}{2} kT$$

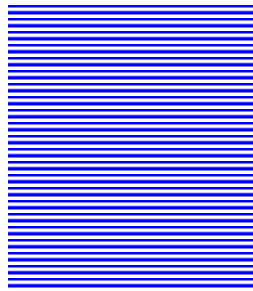
$$\text{非刚性双原子分子 } \overline{\varepsilon} = \frac{7}{2} kT \quad \text{水蒸气?} \quad \text{刚性非刚性?}$$

\* 分子平均能量  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_t + \bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_v = (t + r + 2v) \cdot \frac{1}{2} kT$

根据量子理论，能量是分立的，且  $t$ ， $r$ ， $v$   
的能级间距不同。



平动能级连续



转动能级间隔小  
( $\sim 10^{-3}$  eV)



振动能级间隔大  
( $\sim 10^{-1}$  eV)

一般情况下 ( $T < 10^3$  K)

振动能级极少跃迁，

对能量交换不起作用

— 振动自由度  $v$  “冻结”，

分子可视为刚性。

刚性分子 (**rigid molecule**)

$$\nu = 0, \quad i = t + r$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT = \begin{cases} \frac{5}{2} kT & (\text{双}) \\ \frac{6}{2} kT & (\text{多}) \end{cases}$$

当温度极低时，转动自由度  $r$  也被“冻结”，

任何分子都可视为只有平动自由度。

$$\nu = r = 0, \quad i = t$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$$

当温度升高，但分子还没有分解，振动被激发

$$\bar{\varepsilon} = \frac{t + r + 2\nu}{2} kT$$

分子的经典转速:

$$\frac{1}{2} J \overline{\omega^2} = \frac{1}{2} kT \rightarrow \overline{\omega} \approx \sqrt{\overline{\omega^2}} = \sqrt{\frac{kT}{J}}$$

在  $T = 300\text{K}$  时:

气体	$J(10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)$	$\overline{\omega}(\text{s}^{-1})$
$\text{H}_2$	0.0407	$3.19 \times 10^{13}$
$\text{O}_2$	1.94	$4.62 \times 10^{12}$
$\text{N}_2$	1.39	$5.45 \times 10^{12}$
$\text{CO}_2$	1.45	$5.34 \times 10^{12}$

$\overline{\omega} \gg \bar{\nu}$  (看成球形)

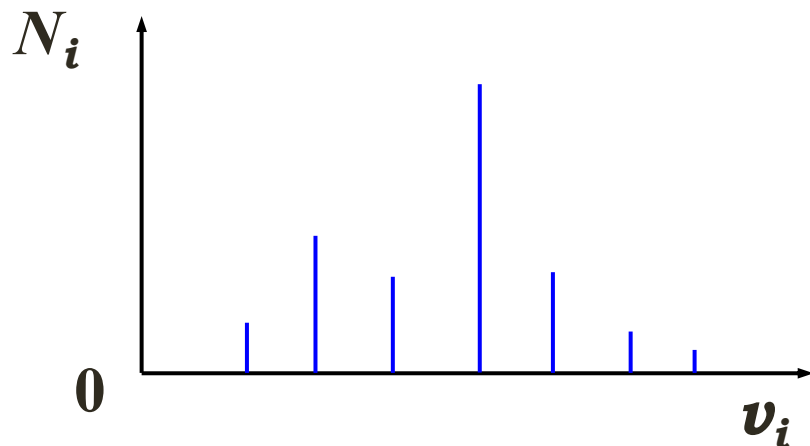


## § 9.7 麦克斯韦速率分布律

单个分子速率不可预知，大量分子的速率分布是遵循统计规律，是确定的。

像前面那样用分立数据描写：

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_i & \dots & & \\ N_1, & N_2 & \dots & N_i & \dots & & \end{array}$$



粒子数太多，这种描写既繁琐也不一定能做到，还可能时刻在变

## 用连续的分布函数来描述:

**速率分布函数:** 按统计假设分子速率通过碰撞不断改变, 不好说正处于哪个速率的分子数多少, 但用某一速率区间内分子数占总分子数的比例为多少的概念比较合适, 这就是分子按速率的分布。平衡态时, 这是个稳定的分布。

设总分子数 $N$ , 速率区间  $v \sim v+dv$ , 该速率区间内分子数  $dN_v$

则

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)dv$$

速率分布函数

速率  $v$  附近单位速率区间内  
分子数占总分子数的百分比。

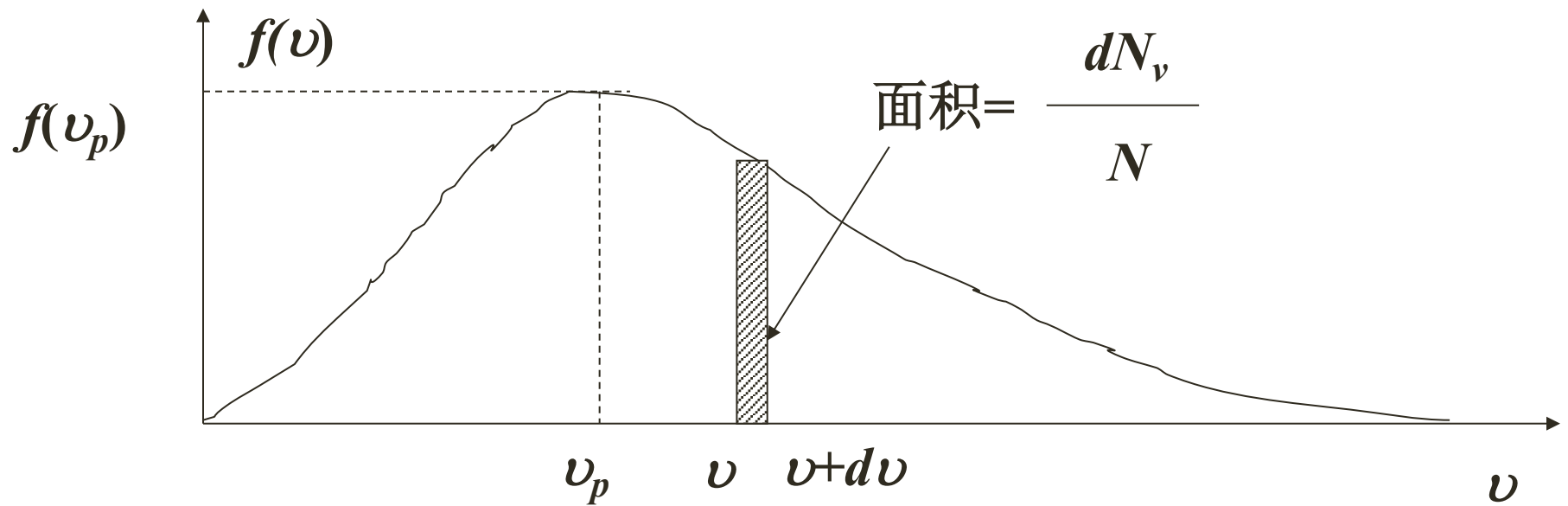
显然

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$

归一化条件

# 麦克斯韦速率分布函数

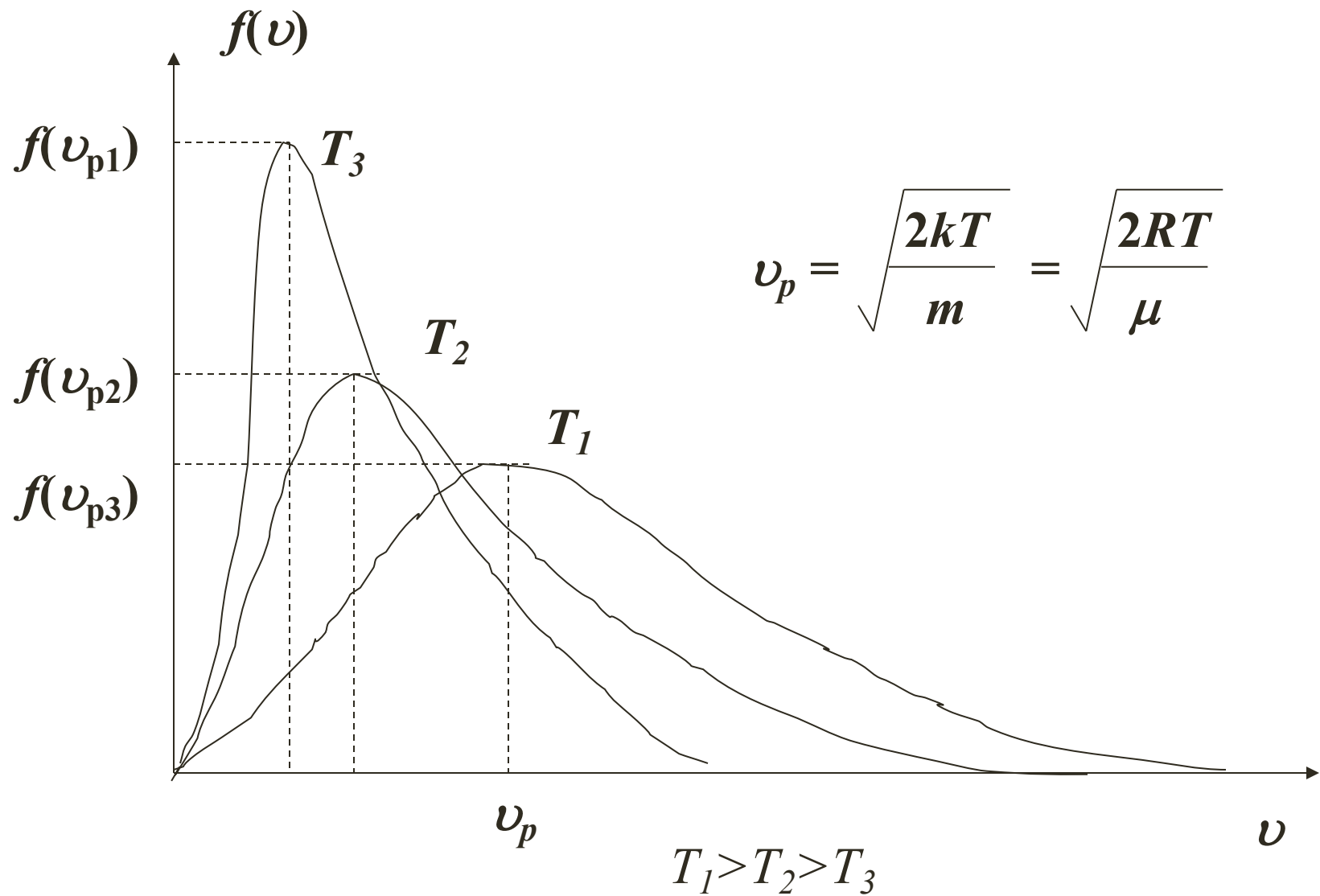
$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$



最概然速率  $v_p$

$$f'(v) = 0$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

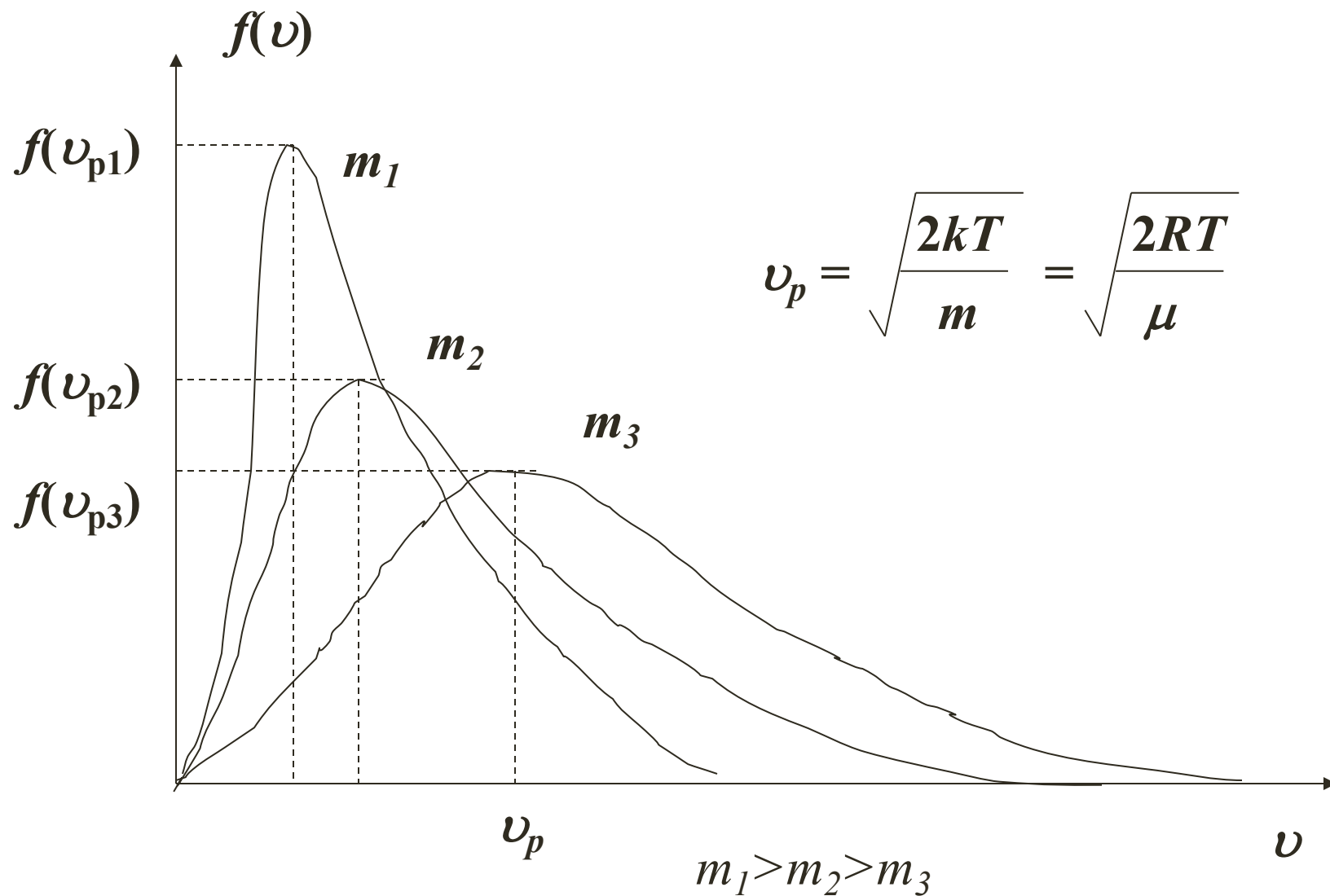


温度越高，速率大的分子数越多



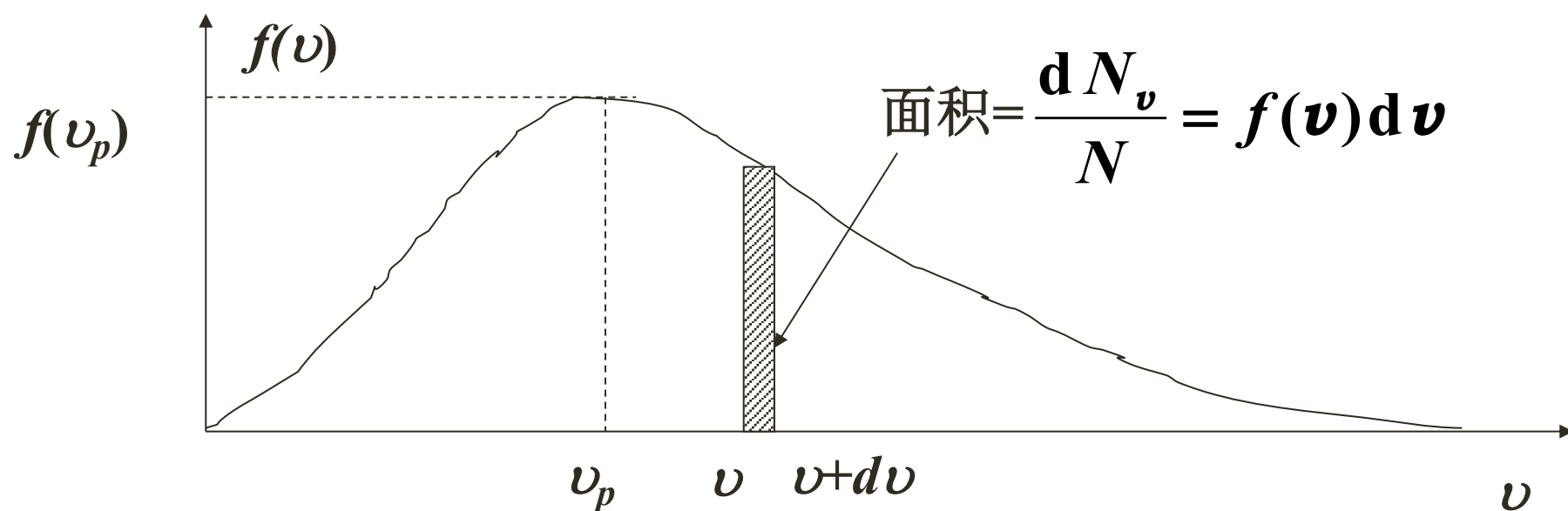


清华大学出版社



分子质量越小，速率大的分子数越多

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m v^2 / 2kT}$$



不要问速率刚好等于某一值的分子数多少，没有意义。

平均速率

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \left( \sum_i^N v_i \right) / N = \int v dN_v / N = \int_0^\infty v f(v) dv \\ &= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv\end{aligned}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

方均根速率

$$\overline{v^2} = \left( \sum_i^N v_i^2 \right) / N = \int v^2 dN_v / N = \int_0^\infty v^2 f(v) dv$$

$$\overline{v^2} = 3kT/m$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

最概然速率  $v_p$

$$f'(v) = 0$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

麦克斯韦速率分布函数的另一种表示:

令  $u = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}_p}$  — 简化 (约化) 速率, 则有:

$$\begin{aligned}\frac{dN_v}{N} &= f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = f(uv_p) v_p du \\ &= \varphi(u) du \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot du\end{aligned}$$

$$\Delta u \text{ 很小时: } \frac{\Delta N}{N} = \varphi(u) \cdot \Delta u, \quad \Delta u = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\mathbf{v}_p}$$

[例]  $T = 300\text{ K}$ 时,  $v_p = 395\text{ m/s}$ ,

速率为790 – 800m/s的分子数占总分子数的比例?

取  $v = 790\text{ m/s}$ ,  $\Delta v = 10\text{ m/s}$ , 则  $u = \frac{v}{v_p} = 2$ ,

$$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_p} = \frac{10}{395}$$

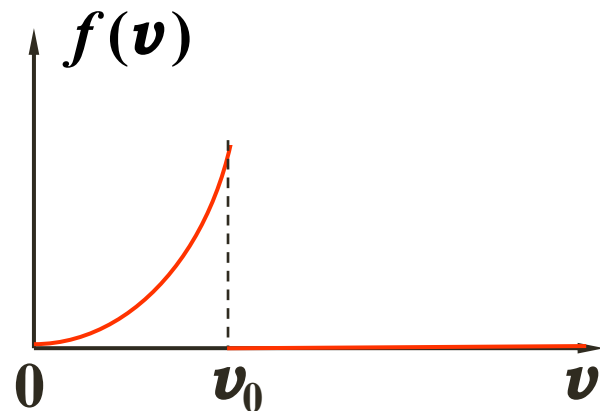
$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \cdot \Delta u$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-2^2} \cdot 2^2 \cdot \frac{10}{395} \doteq 0.42\%$$

即：速率为790 – 800m/s的分子数占总分子数的比例为0.42%

**[例]** 设某气体的速率分布函数

为  $f(v) = \begin{cases} av^2, & (0 \leq v \leq v_0) \\ 0, & (v > v_0) \end{cases}$



**求：** (1) 常量  $a$  和  $v_0$  的关系

(2) 平均速率  $\bar{v}$

(3) 速率在  $0 - \frac{v_0}{2}$  之间分子的平均速率  $\bar{v}'$

**解：** (1) 归一化条件

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty f(v) dv &= 1 \\ \int_0^\infty f(v) dv &= \int_0^{v_0} av^2 dv = \frac{1}{3} av_0^3 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{3}{v_0^3}$$

(2) 设总分子数为 $N$ , 则

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\int_0^\infty \mathbf{v} \cdot Nf(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{N} = \int_0^\infty \mathbf{v} \cdot f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= \int_0^{v_0} \mathbf{v} \cdot a\mathbf{v}^2 d\mathbf{v} = \frac{a}{4} \mathbf{v}_0^4 = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{v_0^3} \right) \mathbf{v}_0^4 = \frac{3}{4} \mathbf{v}_0\end{aligned}$$

(3)  $\bar{v}' = \frac{\int_0^{v_0/2} \mathbf{v} \cdot Nf(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{N} = \int_0^{v_0/2} \mathbf{v} \cdot f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$  对否?

—— 不对! 上式分母上的 $N$ 应为  $\int_0^{v_0/2} Nf(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$

$$\therefore \bar{v}' = \frac{\int_0^{v_0/2} \mathbf{v} \cdot f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\int_0^{v_0/2} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}} = \frac{\frac{a}{4} \left( \frac{v_0}{2} \right)^4}{\frac{a}{3} \left( \frac{v_0}{2} \right)^3} = \frac{3}{8} \mathbf{v}_0 \neq \bar{v}$$



## 麦克斯韦速度分布函数

速度  $\vec{v} \sim (v_x, v_y, v_z)$

设总分子数  $N$ ，速度分量区间  $v_x \sim v_x + dv_x$ ，  
该速度分量区间内分子数  $dN_{v_x}$

速度分量分布函数

$$\frac{dN_{v_x}}{N} = g(v_x) dv_x$$

$$g(v_x) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-m v_x^2 / 2kT}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(v_x) dv_x = 1$$

同理对  $y$ 、 $z$  分量

速度在区间  $v_x \sim v_x + dv_x$  ,  $v_y \sim v_y + dv_y$  ,  $v_z \sim v_z + dv_z$

既, 区间  $\vec{v} \sim \vec{v} + d\vec{v}$  , 分子数  $dN_{\vec{v}}$

$$\frac{dN_{\vec{v}}}{N} = G(\vec{v}) d\vec{v} = g(v_x) g(v_y) g(v_z) dv_x dv_y dv_z$$

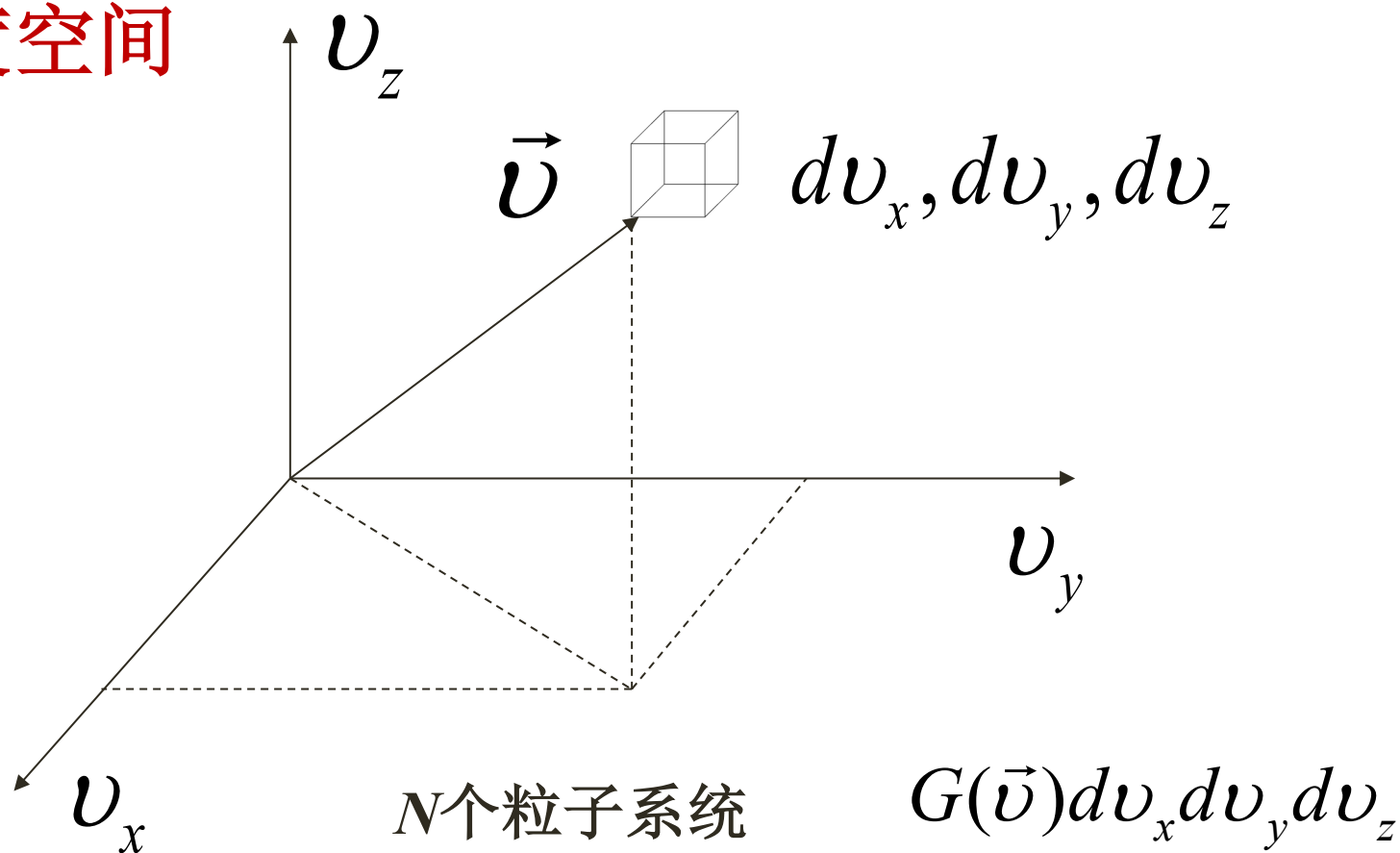
$$G(\vec{v}) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m v^2 / 2kT}$$

平均速度

$$\overline{v_x} = \left( \sum_i^N v_{ix} \right) / N = \int v_x dN_{vx} / N = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x g(v_x) dv_x = 0$$

同理对  $y$ 、 $z$  分量, 故平均速度为零。

## 速度空间



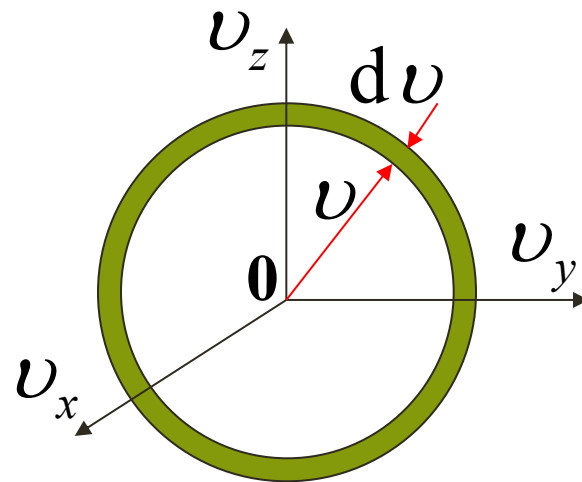
在某一速度附近粒子数占总粒子数的百分比  
粒子处于某一速度附近的概率密度  $G(\vec{v})$

讨论：由  $G(\vec{v}) \xrightarrow{\text{可得}} f(v)$

分子速度的大小

在  $v \rightarrow v + dv$  内，方向可以任意

这些分子的速度矢量端点都在  
半径为  $v$ ，厚度为  $dv$  的球壳内。



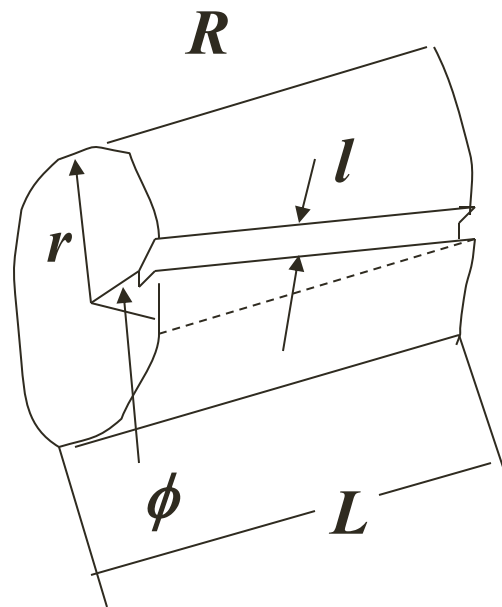
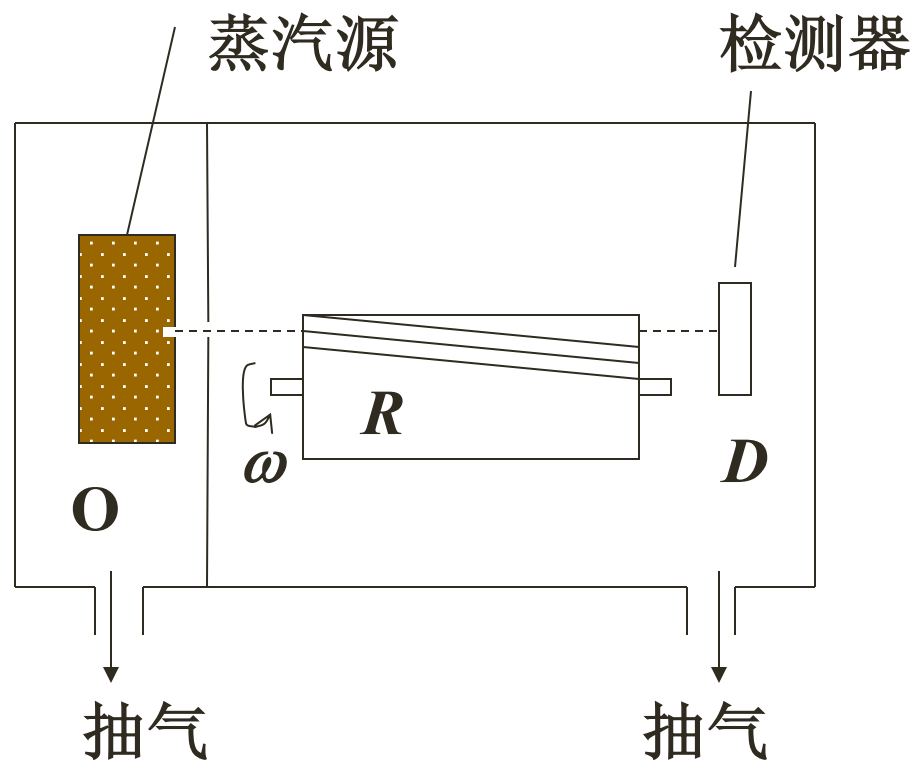
平衡态时速度分布各向同性，球壳内概率密度都相同

取球壳的体积  $4\pi v^2 dv$  作为体积元，有

$$\frac{dN_v}{N} = G(\vec{v}) 4\pi v^2 dv = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

$$\frac{dN_v}{N dv} = f(v) = 4\pi v^2 G(\vec{v})$$

## § 9.8 麦克斯韦速率分布律的实验验证



给定  $\omega$

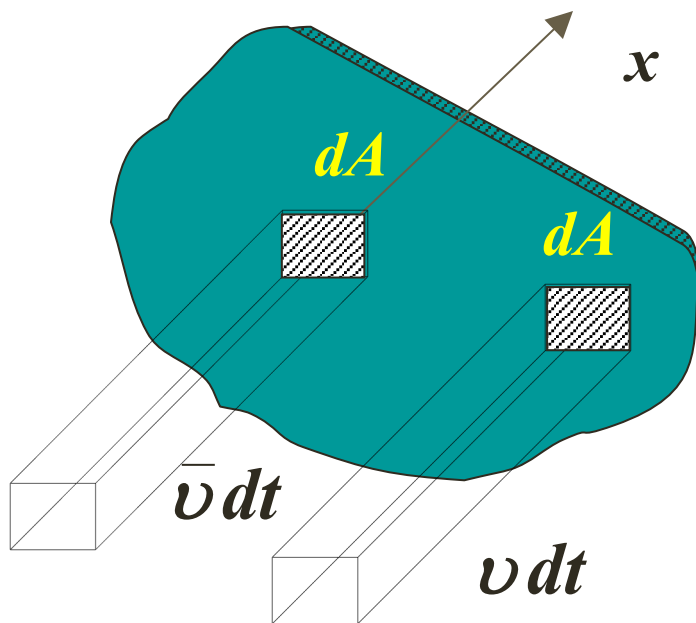
$$\frac{L}{\Delta t \cdot v} = \frac{\phi}{\Delta t \cdot \omega}$$

$$v = \frac{\omega}{\phi} L$$

$$|\Delta v| = \frac{v}{\phi} \Delta \phi = \frac{l}{\phi r} v$$

小孔充分小，改变  $\omega$ ，测  $D$  上的沉积厚度，就可测气体速率分布

# 从小孔出射的气体分子数目



单位时间内打到单位面积上的分子数目（分子数密度  $n$ ）

$$\Gamma \approx \frac{1}{6} n \bar{v} \quad (dA = dt = 1)$$

其中速率在  $v \sim v + dv$  的分子数目

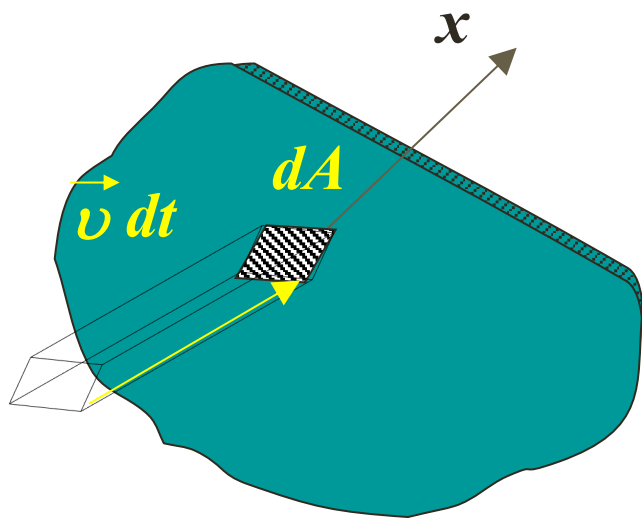
$$\Gamma(v)dv \approx \frac{1}{6} \left[ n f(v)dv \right] v$$

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m v^2 / 2kT}$$

泻流的速率分布率  $\Gamma(v) \propto v^3 e^{-m v^2 / 2kT}$

$$\Gamma(v)dv \propto v^4$$

## 严格推导



速度在  $\vec{v} \sim \vec{v} + d\vec{v}$ ，斜柱体内的分子数目

$$\left[ G(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z n \right] \left[ dA dt v_x \right]$$

速度在  $\vec{v} \sim \vec{v} + d\vec{v}$  的分子，  
单位时间打到单位面积上的数目

$$\tilde{N}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = n G(\vec{v}) v_x dv_x dv_y dv_z$$

只有  $v_x > 0$  的才打到墙壁

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(v_y) dv_y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v_z) dv_z = 1$$

$$\Gamma = \int \tilde{N}(v) dv_x dv_y dv_z = n \int_0^{+\infty} g(v_x) v_x dv_x = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{1}{4} n \bar{v}$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{4} n \bar{v}} \longrightarrow \Gamma(v) dv = \frac{1}{4} n v f(v) dv$$

$$\tilde{N}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z$$

速率在  $v \sim v+dv$  泄流分布

$$n G(\vec{v}) v_x dv_x dv_y dv_z = n G(\vec{v}) v \sin \theta \cos \varphi v^2 \sin \theta d\theta d\varphi dv$$

积分所有与方向有关的量

只有  $v_x > 0$  的才打到墙壁  $\varphi \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\Gamma(v)dv = \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} n G(\vec{v}) v \sin \theta \cos \varphi v^2 \sin \theta d\theta d\varphi dv = n\pi G(\vec{v}) v^3 dv$$

$$4\pi G(\vec{v}) v^2 = f(v)$$

$$\Gamma(v)dv = \frac{1}{4} n v f(v) dv$$



## 压强

$$\begin{aligned} P &= \int 2m v_x \tilde{N}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = 2nm \int_0^{+\infty} g(v_x) v_x^2 dv_x \\ &= nm \int_{-\infty}^{+\infty} g(v_x) v_x^2 dv_x = nm \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} \end{aligned}$$

## 泄流中速度平均值

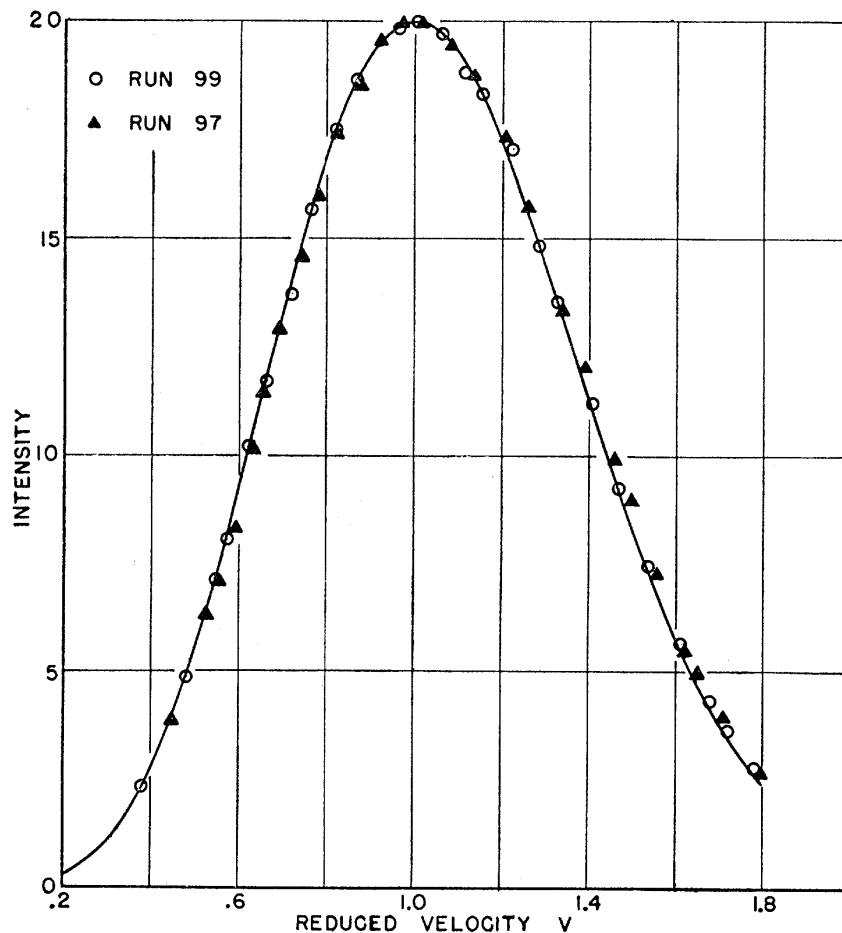
$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \iiint v_x \tilde{N}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z / \iiint \tilde{N}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z \\ &= \int_0^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x / \int_0^{\infty} v_x g(v_x) dv_x \end{aligned}$$

$$\bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$$

泄流中速率平均值？

# Velocity Distributions in Potassium and Thallium Atomic Beams\*†

R. C. MILLER‡ AND P. KUSCH  
*Columbia University, New York, New York*



$$\Gamma(v)\Delta v \propto v^4 e^{-m v^2/2kT}$$