1 (卓里奇下册习题) 利用含参积分的求导定理, 证明对 $|r|<1$ 有

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)dx=0.$$

2 (卓里奇下册例题) 给定正数 α,β.

(1) 证明含参积分

$$\Phi(x)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dy$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 证明含参积分

$$F(y)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dx$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

3 (卓里奇下册习题)

(1) 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}$.

(2) 利用 (1) 的结果计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}$.

(3) 证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(1+(\frac{y^2}{n})\right)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n},$$

其中 $(2m-1)!!=(2m-1)\cdot(2m-3)\cdots3\cdot1$, $(2m)!!=(2m)\cdot(2m-2)\cdots4\cdot2$ 表示双阶乘.

(4) 证明: 当 $n\to+\infty$ 时有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+(\frac{y^2}{n})\right)^{-n}=e^{-y^2},$$

进而证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(1+(\frac{y^2}{n})\right)^n}=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy.$$

(5) 利用前述结果证明 Wallis 公式

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

4 (卓里奇下册习题) 利用 Gauss 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 证明:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-y^2}$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2xy) dx = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt.$$

(提示: 计算 $F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy) dx$ 的导函数, 再求解微分方程.)

5 (卓里奇下册习题) 假设 a, b 是给定的正数.

(1) 利用讲义上命题 9.5 计算如下积分的值

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy.$$

(2) 利用讲义上命题 9.5 以及 Dirichlet 积分, 计算如下积分的值

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_a^b \sin(xy) dy.$$