# 《微积分 T3》第三次习题课材料

时间：周二与周六第 6 节。地点：旧水利馆 301。

1. 设 $[0,1]\times[0,1]$ 上的函数

$$K(x,y)=\begin{cases} y, & 0\leqslant y<x\leqslant 1 \\ y-1, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1 \end{cases}$$

设 $v$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数。定义 $[0,1]$ 上的函数

$$u(x)=\int_0^1 K(x,y)\,v(y)\,\mathrm{d}y$$

(a) 证明：

$$\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x=0$$

证明. 对于给定的 $y\in[0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 K(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_0^y (y-1)\,\mathrm{d}x+\int_y^1 y\,\mathrm{d}x \\ &= y\,(y-1)+(1-y)\,y \\ &= 0\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\int_0^1 K(x,y)\,v(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 v(y)\left(\int_0^1 K(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 v(y)\cdot 0\,\mathrm{d}y \\ &= 0\end{aligned}$$

□

(b) 证明 $u$ 是可微函数，并且 $u'(x) = v(x)$。

证明. 注意到

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^1 K(x,y)\,v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x yv(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (y-1)\,v(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

由变上下限积分的求导公式可知，

$$
u'(x) = xv(x) - (x-1)\,v(x) = v(x) \qquad \square
$$

2. Зорич《数学分析》中第 17 章第 1 节的例 3：证明其中的关系式。

**例 3.** **全椭圆积分**

$$
E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}
$$

**是参变量 $k$ 的函数, $0 < k < 1$. 它们满足关系式**

$$
\frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k}, \quad \frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}.
$$

**参变量 $k$ 称为椭圆积分的模数.**

证明. 由含参积分的求导定理可知，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial k}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{k}\,(E-K)
\end{aligned}
$$

同理可知，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{k}\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\varphi - K \right)
\end{aligned}
$$

与结论对比，我们只需证明

$$
E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\varphi
$$

直接上手操作：[1]

$$
\begin{aligned}
& E - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \frac{1-k^2}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^2 - \left(1-k^2\right)}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + k^4\sin^4\varphi}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \left. \frac{k^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

3. Зорич《数学分析》中第 17 章第 2 节习题的第 4 题：

[1] 希望不要有同学问我这一步原函数是怎么看出来的。我凑了好一会儿才凑出来的，在网上也没有找到好的解释……

**4.** a) 请利用等式 $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}$ 证明: $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}$.

b) 请验证: $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+y^2/n)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}$.

c) 请证明: 当 $n\to+\infty$ 时, 在 $\mathbb{R}$ 上 $(1+y^2/n)^{-n}\searrow e^{-y^2}$, 并且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+y^2/n)^n}=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy.$$

d) 请推导沃利斯公式 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

其中，双阶乘的定义是

$$m!!=\prod_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ m-2k>0}}(m-2k)=m\,(m-2)\,(m-4)\cdots\big(2\text{ 或者 }1\big)$$

快速通道：在 (c) 中使用 Dini 定理，可以由单调收敛性得到所需的一致收敛性。

（除这道题的方法外，也可以尝试用 $B$ 函数证明 Wallis 公式。）

证明. 读者自证不难。 □

用 $B$ 函数的方法：换元 $y=x\sqrt{t}$ 立马得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+y^2)^n}\,\mathrm{d}y&=\frac{1}{2x^{2n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2x^{2n-1}}B\left(\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

然后用 $B$ 函数的递推公式即可。

4. 对于 $x>0$ 定义 0 阶的 Bessel 函数 $J_0(x)$ 和 Neumann 函数 $Y_0(x)$ 为

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$
$$Y_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\left(x\cosh\beta\right)\mathrm{d}\beta$$

(a) 通过换元积分证明：[2]

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$
$$Y_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

请一并说明上述的广义积分当 $x > 0$ 时都是收敛的。

证明. 设 $t = \cos\varphi$ 则有

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos xt\,\mathrm{d}(\arccos t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

原始的积分是正常积分，因此换元得到的反常积分是收敛的。另一方面，设 $t = \cosh\beta$ 则有

$$Y_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \cos xt\,\mathrm{d}(\operatorname{arccosh} t) = \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

原始的积分在 $\beta = 0$ 处是正常积分，因此换元得到的反常积分在 $t \to 0^+$ 时是收敛的；由 Dirichlet 判别法可知，上述反常积分在 $t \to +\infty$ 时收敛。 □

(b) 证明 $J_0(x)$ 和 $Y_0(x)$ 是线性无关的函数。
（提示：研究两个函数在 $x \to 0^+$ 的极限行为。）

证明. 由含参积分的连续性可知

$$\lim_{x\to 0^+} J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{x\to 0^+} \cos(x\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}$$

对于 $Y_0(x)$ 不能直接求极限，但可以将其与简单的函数比较：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\left(Y_0(x) - \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\cos xt}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \lim_{x\to 0^+} \cos xt\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

[2]这题里 $Y_0(x)$ 的正确定义好像应该是这里的 $-2$ 倍，是助教搬运时记错了。这题的结论不受影响因此就不改回去了。

这是一个有限量，但是做换元 $y = xt$ 可知

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\cos xt}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\pi}\int_x^{+\infty}\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y = +\infty$$

因此，我们有

$$\lim_{x\to0^+} Y_0(x) = +\infty$$

假设常数 $a, b$ 使得

$$aJ_0(x) + bY_0(x) = 0 \qquad \forall\ x > 0$$

令 $x \to 0^+$，即可知 $b = 0$，进而 $a = 0$。 □

(c) 0 阶 Bessel 方程的形式是

$$xy'' + y + xy = 0 \qquad (x > 0)$$

证明，$y = J_0(x)$ 是 0 阶 Bessel 方程的解。

证明. 老师上课证了 $n$ 阶的结论，把 $n = 0$ 代入即可。 □

(d) 我们接下来证明 $y = Y_0(x)$ 也是 0 阶 Bessel 方程的解，但最大的困难是此时求 $Y_0'(x)$ 不能直接对被积函数求导：

$$\frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{t\sin xt}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{发散！}$$

为此，我们将 $Y_0(x)$ 分为两部分 $L_T(x) + R_T(x)$：

$$L_T(x) = \frac{1}{\pi}\int_1^{T}\frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$
$$R_T(x) = \frac{1}{\pi}\int_T^{+\infty}\frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

- 证明 $L_T(x)$ 满足恒等式

$$xL_T''(x) + L_T'(x) + xL_T(x) = -\frac{\sqrt{T^2-1}\sin xT}{\pi}$$

（提示：仿照 $J_0(x)$ 的情形。）

- $R_T(x)$ 不能直接求导，但可以先分部积分：

$$\begin{aligned}
xR_T(x) &= \frac{1}{\pi}\int_T^{+\infty}\frac{x\cos xt}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_T^{+\infty}\frac{(\sin xt)_t'}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_T^{+\infty}\frac{(\sin xt)_t'}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin xt}{\pi\sqrt{t^2-1}}\right|_T^{+\infty} - \frac{1}{\pi}\int_T^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)_t'\sin xt\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\sin xT}{\pi\sqrt{T^2-1}} + \frac{1}{\pi}\int_T^{+\infty}\frac{t\sin xt}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \qquad (1)
\end{aligned}$$

对 (1) 式的的两端求导，进而证明

$$xR_T'(x) = -\frac{T\cos xT}{\pi\sqrt{T^2-1}} + \frac{1}{\pi}\int_T^{+\infty}\frac{\cos xt}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \qquad (2)$$

- 对 (2) 式的两端求导，进而证明

$$xR_T''(x) + R_T'(x) + xR_T(x) = \frac{\sqrt{T^2-1}\sin xT}{\pi}$$

- 证明 $Y_0(x)$ 满足 Bessel 方程，也就是说

$$xY_0''(x) + Y_0'(x) + xY_0(x) = 0$$

证明. 证明过程如上所述，这里补充 $L_T(x)$ 性质的证明：

$$\begin{aligned}
L_T'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_1^T\frac{t\sin xt}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\
L_T''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_1^T\frac{t^2\cos xt}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

只有 $L_T'(x)$ 项中出现了 $\sin xt$，我们用分部积分：

$$\begin{aligned}
L_T'(x) &= -\frac{1}{\pi}\left.\sqrt{t^2-1}\sin xt\right|_1^T + \frac{x}{\pi}\int_1^T\sqrt{t^2-1}\cos xt\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\pi}\sqrt{T^2-1}\sin xT - x\left(L_T(x) + L_T''(x)\right)
\end{aligned}$$

移项即得所求结论。 □

> 注意：对含参反常积分求导时要对导数验证含参积分的（内闭）一致收敛性！

注：根据常微分方程的理论可以知道，0 阶 Bessel 方程所有的解构成 2 维线性空间，因此都可以写成 $c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$ 的形式。类似的结论对于一般阶数的 Bessel 方程也是成立的。[3]

[3] 如果你觉得这题有点难了，这不是你的错而是助教的错。他自己也没想到证个结论这么麻烦。