微积分 A1 期中考试样题参考解答

填空题

1．极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+6}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\underline{(e^{-3/2})}$

2．函数 $xe^{1/x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上取得最小值点是 $\underline{x=1}$。

3．函数 $(1+x^2)\arctan x$ 的二阶导数是 $\underline{2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}}$。

4．极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\underline{\dfrac{1}{2}}$。

注：$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}+1}\to\dfrac{1}{2}$，$x\to+\infty$。

5．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{(\sin x)^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\underline{\dfrac{1}{3}}$

注：由于 $\dfrac{1}{(\sin x)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-(\sin x)^2}{x^2(\sin x)^2}=\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-(\sin x)^2}{x^4}$，

而 $x^2-(\sin x)^2=x^2-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^2=\dfrac{1}{3}x^4+o(x^4)$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{(\sin x)^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3}$。

6．函数 $y=\arctan x+e^x$ 的反函数导数为 $\dfrac{dx}{dy}=\underline{\dfrac{x^2+1}{e^x(x^2+1)+1}}$。

7．若可微函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $x=t+e^t$，$y=t^2+e^{2t}$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=\underline{\dfrac{2(t+e^{2t})}{1+e^t}}$。

8．极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\underline{\ 2\ }$。

注：利用 Stolz 定理即可。

9．函数 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{2}{x}}}$ 的间断点 $x=0$ 的类型为 <u>跳跃间断（或第一类间断）</u>。

10. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=\underline{-2}$。

11. 函数 $y=\mathrm{x}^{\sin(2x+1)}$（$x>0$）的微分 $dy=\underline{x^{\sin(2x+1)}\left(2\cos(2x+1)\ln x+\dfrac{\sin(2x+1)}{x}\right)dx}$。

12. 若当 $x\to 0$ 时，函数 $\ln(1+x\sqrt{1+x})$ 与函数 x^p 为等价无穷小，则 $p=\underline{\ 1\ }$。

13. 函数 $\dfrac{x}{1-x^2}$ 的 n 阶导数为 $\underline{\dfrac{n!}{2}\left(\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)}$。

14. 在 x-y 平面上，参数曲线 $x=t^2+\sin t$, $y=t+\cos t$ 于点 $(0,1)$ 处（即 $t=0$）的切线方程为 $\underline{y=x+1}$。

15. 函数 $\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=1$ 处的带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展式为

$$\underline{\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=1-(x-1)+(x-1)^2-\cdots+(-1)^n(x-1)^n+o\left((x-1)^n\right)}。$$

计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解法一：
$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|\sin x|-\ln|x|}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}=-\frac{1}{3}$$

所以原极限=$e^{-1/3}$

解法二：由于 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\frac{\sin x-x}{x}\frac{1}{1-\cos x}}$，

而 $\dfrac{\sin x-x}{x}\dfrac{1}{1-\cos x}=\dfrac{-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x[\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)]}\to-\dfrac{1}{3}$，$x\to 0$。

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-1/3}$。解答完毕。

2．假设由方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 确定了一个在 $x=0$ 的一个邻域内二阶可导的函数 $y=y(x)$。试求 $y(x)$ 的 Maclaurin 二阶展式，带 Peano 余项。

解：于方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 令 $x=0$，得 $y^3-1=0$。因此 $y(0)=1$。

对方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 两边关于 x 求导得

$3x^2+3y^2y'+y+xy'=0$。（*）

于上式中令 $x=0$， $y=1$ 得 $3y'+1=0$。这表明 $y'(0)=-1/3$。

关于式（*）求导得

$6x+6y(y')^2+3y^2y''+2y'+xy''=0$

于上式中令 $x=0$， $y=1$， $y'=-1/3$ 得 $3y''=0$。这说明 $y''(0)=0$。

因此所求的 Maclaurin 展式为 $y(x)=1-\dfrac{1}{3}x+o(x^2)$。解答完毕。

3．求函数 $f(x)=|x(x^2-1)|$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值。

解：为求 $f(x)$ 的最大值，先求 $f(x)$ 的驻点。注意，函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,2)$ 上仅有一个不可微点 $x=1$。 简单计算得 $f'(x)=[\mathrm{sgn}(x(x^2-1))](3x^2-1)$， $\forall x\in(0,1)$， $x\neq 1$。故 $f(x)$ 在开区间 $(0,2)$ 内有且仅有一个驻点 $1/\sqrt{3}$。

根据极值理论，函数 $f(x)$ 的最值点只可能出现在极值点，不可微点和区间的端点中间。因此函数 $f(x)$ 的最大值 M 为

$$M=\max\left\{f(0),f\left(1/\sqrt{3}\right),f(1),f(2)\right\}=\max\{0,2/3\sqrt{3},0,6\}=6。$$

并且 $f(x)$ 仅在闭区间 $[0,2]$ 的右端点 $x=2$ 处取得它的最大值 6。解答完毕。

4．求抛物线 $y=x^2$ 上一个点 (x_1,y_1)，以及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上一个点 (x_2,y_2)，使得抛物线

在点(x_1,y_1)处的切线与双曲线$y=\dfrac{1}{x}$在点(x_2,y_2)处的切线相同。并写出这条公共切线的方程。

解：抛物线$y=x^2$在点$(x_1,y_1)=(x_1,x_1^2)$的切线方程为

$$y-x_1^2=2x_1(x-x_1) \text{ 或 } y=2x_1x-x_1^2 \quad (*)$$

双曲线$y=\dfrac{1}{x}$在点$(x_2,y_2)=(x_2,\dfrac{1}{x_2})$的切线方程为

$$y-\frac{1}{x_2}=-\frac{1}{x_2^2}(x-x_2) \text{ 或 } y=-\frac{1}{x_2^2}x+\frac{2}{x_2} \quad (**)$$

假设点(x_1,y_1)和点(x_2,y_2)满足题目的要求，则由式（*）和（**）所定义的直线相同。于是x_1和x_2应满足方程组$2x_1=-\dfrac{1}{x_2^2}$，$-x_1^2=\dfrac{2}{x_2}$。 不难确定这个方程组有且仅有一组解$(x_1,x_2)=(-2,-\dfrac{1}{2})$。于是所求的两个点分别为$(x_1,y_1)=(-2,4)$和$(x_2,y_2)=(-1/2,-2)$。并且所求公共切线方程为$y=-4x-4$。解答完毕。

证明题

1． 证明方程 $x^5-2x^3-1=0$有且仅有一个正根。

证明：记$f(x):=x^5-2x^3-1$。则$f(0)=-1$，$f(+\infty)=+\infty$。因此方程 $x^5-2x^3-1=0$至少有一个正零点。由$f'(x)=5x^4-6x^2=x^2(5x^2-6)$可知，函数$f(x)$有唯一的正临界点$\xi=\sqrt{\dfrac{6}{5}}$。 进一步我们不难看出，

$f'(x)<0$，$\forall x\in(0,\xi)$。 故$f(x)$在区间$(0,\xi)$上严格单调下降；

$f'(x)>0$，$\forall x\in(\xi,+\infty)$。故$f(x)$在区间$(\xi,+\infty)$上严格单调上升。

因此，$f(\xi)<f(x)<f(0)=-1$，$\forall x\in(0,\xi)$。 由此可见函数$f(x)$有且仅有一个正零点，并且这个零点位于开区间$(\xi,+\infty)$。证毕。

2． 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且满足$|f'(x)|<1$，$\forall x\in(0,1)$，以及$f(0)=f(1)$。证明 $|f(x_1)-f(x_2)|<1/2$，$\forall x_1$，$x_2\in(0,1)$。

证明：当$|x_1-x_2|\le 1/2$时，由假设和 Lagrange 中值定理可知

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2|<1/2$。结论成立。

当$|x_1-x_2|>1/2$时，不妨设$0<x_1<x_2<1$，则$x_2-x_1>1/2$。于是

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f(0)+f(1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|\le$

$|f'(\xi_1)||x_1-0|+|f'(\xi_2)||1-x_2|<x_1+1-x_2=1-(x_2-x_1)<1/2$， 这里

$\xi_1\in(0,x_1)$， $\xi_2\in(x_2,1)$。证毕。