离散数学图论部分习题课

助教：王征翊

2023 年 6 月 6 日

期末考试安排:
6 月 8 日 (周四) 下午 14：00 开始在 FIT 楼 1-312
题目类型

- 选择题
- 填空题
- 证明与计算题

部分计算题会设计成实际的问题，需要用图论进行建模并用具体的图论方法来求解

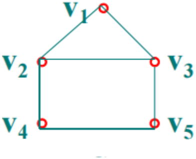
今天主要内容

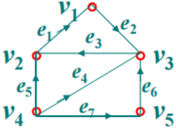
- 部分作业题讲解
- 部分往年期末考试题目讲解
- 部分重点内容介绍

道路与回路重点内容

- 图的基本概念
- 如何把一个实际的问题建模为一个图论问题
- 图的代数表示 (关联矩阵、邻接矩阵)
- 道路与回路的定义
- 欧拉回路和哈密顿回路
- 最短路径和相应算法 (Dijkstra)

分别写出如下两个图的关联矩阵和邻接矩阵，并计算 v_1 到 v_3 的长为 4 的道路数量（道路允许边重复）





解：左边图的关联矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

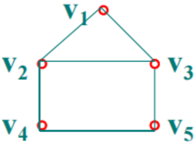
右边图的关联矩阵为：

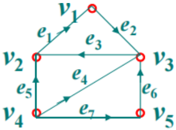
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分别写出如下两个图的关联矩阵和邻接矩阵，并计算 v_1 到 v_3 的长为 4 的道路数量（道路允许边重复）





解题思路：计算长为 4 的道路即求邻接矩阵 4 次方的第一行第三列的元素，分别为 8 和 1.

设计一种 n = 4 的格雷码 (具体见多西参考书例 4.16)
n 位格雷码指的是所有 n 位串 (每个 n 位串是 n 个符号的序列，每个符号要么是 0，要么是 1，一共 2^n 个) 的一个排列，满足每个 n 位串和前面一个恰好相差一个字符，而且最后一个 n 位串也和第一个恰好相差一个字符。
当 n = 3 时，000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100 就是一个格雷码。

设计思路：（迭代设计）对 n=3 序列

- (加 0) 0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100
- (加 1) 1000, 1001, 1011, 1010, 1110, 1111, 1101, 1100

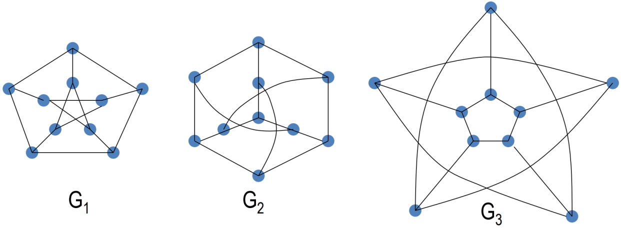
证明：在一个连通图中，如果对某个顶点 U 有一条长度为奇数的 U-U 通路 (从 U 到 U 的通路)，则该图有长度为奇数的回路。

证明思路：不妨假设这个 U-U 通路为 $U - V_1 - V_2 - ... - V_{2k} - U$，如果其中有重复的点，不妨假设 $V_p = V_q$，这里 $1 \le p \le q \le 2k$，若 $q - p$ 是 2 的倍数，我们考虑回路 $U - V_1 - V_2 - ... - V_p - V_{q+1} ... - V_{2k} - U$，此时回路长度为 $(2k+1) - (q-p)$ 为奇数；否则，我们考虑回路 $V_p - V_{p-1} - ... V_1 - U - V_{2k} - V_{2k-1} - ... - V_q$，此时回路长度为 $q - p$ 为奇数。反复进行这样的操作直到没有重复的边为止即可 (因为边的数量有限，因此这样的操作肯定会终止，又因为每次操作后得到的回路仍为奇数长，因此结论成立)。

思考题

没有自环的简单无向图 G 有 10 个顶点，且没有长度为 3 的回路和长度为 4 的回路。问：图 G 最多有几条边？证明你的结论。

概念回顾：回路的边和结点均不重复出现
解：最多 15 条边。构造如下



$$G_1 \cong G_2 \cong G_3$$

思考题（续）

解：（续）如果 $\forall i \leq 10, \deg(v_i) \leq 3$, 那么边数 k

$$k = \frac{1}{2}\sum_{1}^{10} \deg(v_i) \leq 15 \tag{1}$$

如果 $\exists i, \deg(v_i) \geq 4$，不妨设 $\deg(v_1) = n \geq 4$，且 v_1 与 $v_2, \ldots, v_{n+1}$ 相连，则 $v_2, \ldots, v_{n+1}$ 互相没有连边，$v_2, \ldots, v_{n+1}$ 与 $v_{n+2}, \ldots, v_{10}$ 之间至多 n-9 条边，$v_{n+2}, \ldots, v_{10}$ 内部没有长度为 3 的回路，至多 $\left\lfloor \frac{(9-n)^2}{4} \right\rfloor$ 条边。因此

$$k \leq n + (9-n) + \left\lfloor \frac{(9-n)^2}{4} \right\rfloor \leq 15 \tag{2}$$

在一次大学聚会上，有许多青年男女出席，其中一些最近相互之间约会。这种情况可以用图来表示，顶点表示出席的人，用最近有约会来定义相邻。如果这个图有哈密顿回路，证明男人和女人的数目相同。

证明思路：图论建模：男生和女生构成二分图。哈密顿回路必然是“...-女生-男生-女生-男生-...”的男女交错形式。

思考题

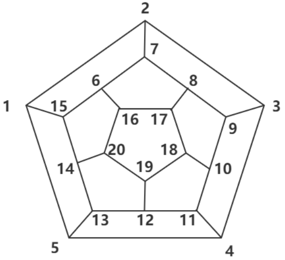
证明：围着圆桌至少坐着五个人，那么一定可以调整他们的座位，使得每人两侧出现新的邻座

解: 构造图 G 有 $n \geq 5$ 个顶点, 其中若 v_i, v_j 不相邻则连边。只需证明 G 存在 H 回路。易知 $\forall i \leq n$, $\deg(v_i) = n - 3$

错误证明：$\forall i, j \leq n, n \geq 5$, $deg(v_i) + deg(v_j) = 2 * n - 6 \geq n - 1$, 故存在 H 回路

正确证明：$\forall i, j \leq n, n \geq 6$, $deg(v_i) + deg(v_j) = 2 * n - 6 \geq n$, 故存在 H 回路。n=5 时，把 ABCDE 重排为 ACEBD 即可

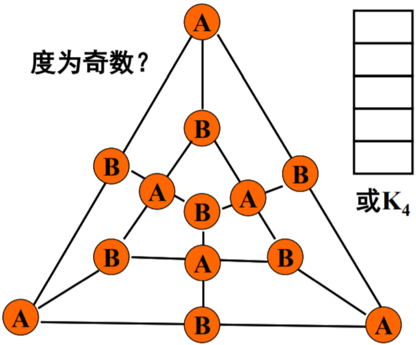
下图是否有哈密顿回路？如果没有，请证明。如果有，请给出它的哈密顿回路。



解答思路：1-2-3-4-5-13-12-11-10-9-8-7-6-16-17-18-19-20-14-15-1
思考：如何证明一个图没有哈密顿回路？

如何证明一个图没有哈密顿回路？标记法

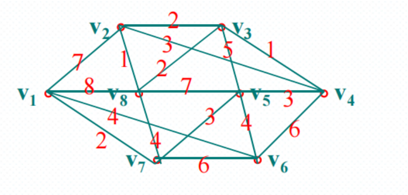
- 例（脑筋急转弯）
  - 证明下图没有H回路



- 若给某个结点标记A，其相邻结点标记B，B的邻结点标为A，恰好把图标完
- 若G中有H回路，则必是ABAB...AB的形式，但由于A与B数目不同，所以不存在H回路

其他方法：连通分支数法，二部图法等。

使用 Dijkstra 算法求下图中 v_1 到每个点的最短路径 (要求写出每一步的过程)



- Step1: 访问节点 [1], $\bar{S} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$
  $\pi(1) = 0, \pi(7) = 2, \pi(6) = 4, \pi(2) = 7, \pi(8) = 8$
- Step2: 访问节点 [7], $\bar{S} = \{2,3,4,5,6,8\}$
  $\pi(1) = 0, \pi(7) = 2, \pi(6) = 4, \pi(2) = 7, \pi(8) = 6, \pi(5) = 5$
- ...
- 重点掌握计算过程

树重点内容

- 树的一些基本概念
- Huffman 树
- 支撑树的计数
- 最小生成树和对应的算法 (Prim, Kruskal)

课上的重要定理

- 当有向连通图 G 的完全回路矩阵 C_e 和完全割集矩阵 S_e 的边次序一致时，有 $S_e C_e^T = \mathbf{0}$。
- 连通图 G 的完全割集矩阵 S_e 的秩是 $n-1$

重要考点：Huffman 树

对如下给定的权构造最优二叉树。

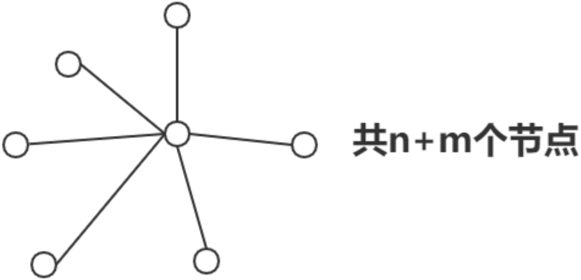
- 2, 4, 6, 8, 10
- 4, 6, 8, 14, 15
- 1, 4, 9, 16, 25
- 10, 12, 13, 16, 17, 17

解题思路：（以第一小题为例）

- Step0: 2, 4, 6, 8, 10
- Step1: 6, 6, 8, 10
- Step2: 8, 10, 12
- Step3: 12, 18
- Step4: 30

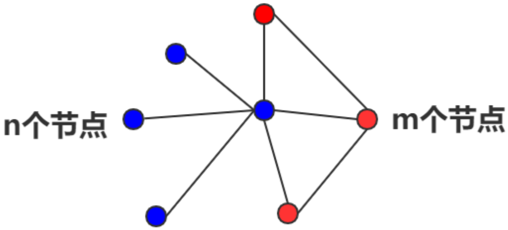
(思考题) 一个有 $n+m$ 个节点的无向连通图 G。对于任一将 G 分割成含有 n 个和 m 个节点的子图的割集 S，割集 S 至少有 $\min(n,m)$ 条边。(至少存在一个割集 S)
问：图 G 至少有多少条边

证明 1（错误证明）：含有 $m+n$ 个节点的连通图至少有 $m+n-1$ 条边。如图所示的树恰好满足题设



证明 2：设图被分割为连通图 G_m 和 G_n。G_m 和 G_n 分别至少有 m-1 和 n-1 条边。加上割集有 min(n,m) 条边，加起来是 m+n+min(m,n)-2

不妨设 n>m，如图所示的树恰好满足题设

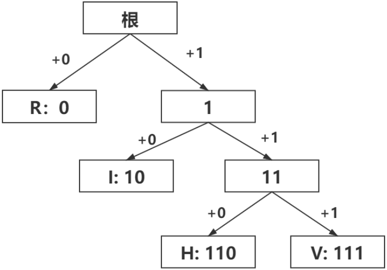


证明：对于连通图 G 的任意生成树，连通图 G 的一个割集 S 至少包含这个生成树的一个树枝。

证明思路：（反证法）如果不包含任意树枝，那么这棵树将连通整个图。

国家安全局正在帮助驻外的美国外交官将编成 0/1 码的信息发回华盛顿国务院。这些消息要用 R，I，H，V 发送。每一百个字符中，这些字符的预期使用率分别是 40，35，20，5。给出一种码字指定，使发送消息所需的位数最少。

证明思路：构建 huffman 树

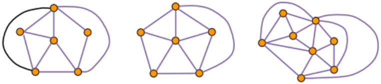


1. 简单图 $G(V, E)$ 中含有 7 个顶点，当 G 至少有（ C ）条边时，G 一定是连通图。

A. 6　B.15　C.16　D.21

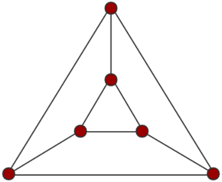
2. 下面三个图中有（ B ）个极大平面图。

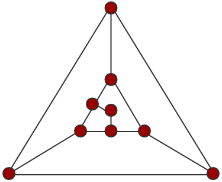
A. 0　B.1　C.2　D.3



(1)　(2)　(3)

4. 下面关于欧拉回路和哈密顿回路的说法正确的是：(D)
A. 下左图有 **Euler** 回路。
B. 不存在有 **Euler** 回路但是没有 **Hamilton** 回路的图。
C. 若简单图 G 中任两点 u, v, 恒有 $d(u)+d(v) \geq n-1$，则 G 中一定存在 **Hamilton** 回路。
D. 下右图有 **Hamilton** 回路。





6. 一个有 $n+m$ 个节点的无向完全图 G。割集 S 将 G 分割成含有 n 个和 m 个节点的子图。则割集 S 有 $\underline{\quad mn \quad}$ 条边。
8. 简单无向图 G 有 4 个顶点和 5 条边，它的关联矩阵如下图所示，第一行到第四行分别表示 v_1, v_2, v_3, v_4，则图 G 中有 $\underline{\quad 14 \quad}$ 条长度为 4 的从 v_1 到 v_2 的道路 (允许有重复边和重复点)。

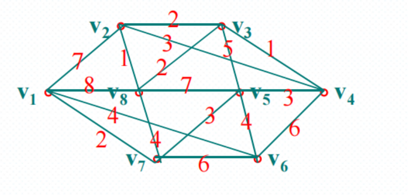
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

对如下给定的权构造分别最优二叉树 (Huffman 树) 并写出构造过程。

- 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^{100}
- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

思路：
(1) $1 + 2 + ... + 2^{n-1} < 2^n$
(2) 无规律，手动计算

10.(20 分)(1) 写出下图的邻接矩阵、权矩阵和关联矩阵。
(2) 使用 Prim 算法或 Kruskal 算法求下图的最小生成树 (要求注明自己用的算法并写出每一步的过程)



11.(15 分) 求有向完全二部图 $K_{10,10}$ 的支撑树数量，其中 $K_{10,10}$ 包含 20 个顶点 $A_1, A_2, ..., A_{10}$, $B_1, B_2, ..., B_{10}$ 和有向边 $A_i \to B_j, 1 \leq i, j \leq 10$。

解: 10^{18}

更一般的，我们证明完全二部图 $K_{m,n}$ 的树的数目是 $m^{n-1}n^{m-1}$.

(续)

我们假设完全二部图 $K_{m,n}$ 的顶点分别为 $a_1 \ldots a_m, b_1 \ldots b_n$，给完全二部图的边规定方向 $a_i -> b_j$，考虑完全二部图 $K_{m,n}$ 的关联矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 & \ldots & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & -1 & \ldots & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

(续)

我们假设它的行向量分别为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_m, \vec{b}_1 \ldots \vec{b}_n$，根据完全二部图的定义，我们可以知道：

$$\begin{aligned} \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j &= n\delta_{ij} \\ \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j &= -1 \\ \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j &= m\delta_{ij} \end{aligned} \tag{4}$$

根据有向连通图的生成树的计数公式，完全二部图 $K_{m,n}$ 的树的数量是上述矩阵删去最后一行后乘上自己的转置的行列式。由上面的公式，上述矩阵删去最后一行后乘上自己的转置为：

$$\begin{pmatrix} n & \ldots & 0 & -1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & n & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & \ldots & -1 & m & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m \end{pmatrix}$$

（续）

我们可以简记为：

$$\begin{pmatrix} nI_m & -E_{m,n-1} \\ -E_{n-1,m} & mI_{n-1} \end{pmatrix}$$

其中 $E_{i,j}$ 表示大小为 $i*j$ 每个元素均为 1 的矩阵。因此完全二部图 $K_{m,n}$ 的树的数目即为上述矩阵的行列式，我们可以通过简单的初等变换将上述矩阵变成如下形式：

$$\begin{pmatrix} nI_m & 0 \\ -E_{n-1,m} & mI_{n-1} - \frac{1}{n}E_{n-1,m}E_{m,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nI_m & 0 \\ -E_{n-1,m} & mI_{n-1} - \frac{m}{n}E_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

（续）

而这个矩阵的行列式为 $|nI_m|\cdot|mI_{n-1}-\frac{m}{n}E_{n-1,n-1}|=n^m m^{n-1}|I_{n-1}-\frac{1}{n}E_{n-1,n-1}|=n^{m-n+1}m^{n-1}|nI_{n-1}-E_{n-1,n-1}|$，所以我们只需要求 $nI_{n-1}-E_{n-1,n-1}$ 的行列式，利用填行法，我们有：

$$\begin{vmatrix} n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

因此完全二部图 $K_{m,n}$ 的树的数目为 $n^{m-n+1}m^{n-1}|nI_{n-1}-E_{n-1,n-1}|=n^{m-n+1}m^{n-1}n^{n-2}=n^{m-1}m^{n-1}$。即证！

平面图重点内容

- 平面图的一些基本概念
- 图的平面性检测
- 色数多项式
- 五色定理

课上的重要定理：（五色定理）每一平面图都是 5-可着色的 (域着色)

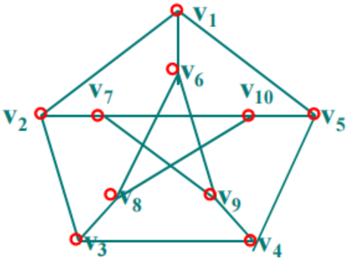
设 G 是顶点数大于 10 的简单图，证明图 G 和图 G 的补图 $\bar{G}$ 至少有一个是非平面图。

$$\begin{aligned} & m+\bar{m}=\frac{n(n-1)}{2} \\ & m,\bar{m}\leq 3n-6 \\ & 2\leq 11^2-13*11+24\leq n^2-13n+24\leq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

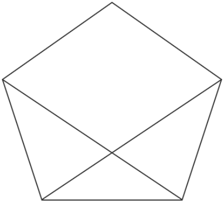
试证：不存在这样的平面图，它有五个面，且任意两个面之前至少有一个公共的边界 (提示：用对偶图)

对偶图包含一个 K_5

用三种颜色对如下的彼得森 (Petersen) 图进行点染色 (要求相邻顶点的颜色不同)

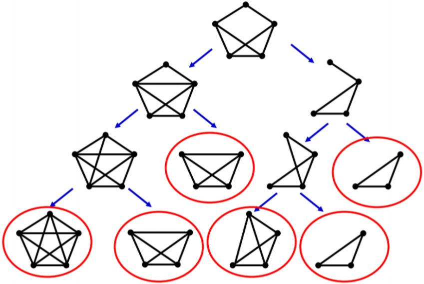


色数多项式
计算这个图的色数多项式



解题思路：$f(G, t) = f(\bar{G}_{ij}, t) + f(\mathring{G}_{ij}, t)$

$$f(G,t)=f\left(\overline{G_{ij}},t\right)+f\left(\mathring{G}_{ij},t\right)$$



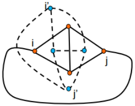
$$f(G,t)=f(K_5,t)+3\cdot f(K_4,t)+2\cdot f(K_3,t)$$

若干完全图！

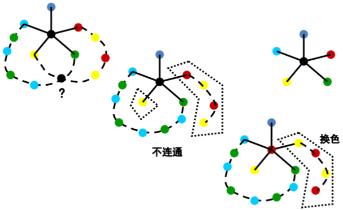
五色定理

四色猜想(2)

- **四色猜想**
  - 对于任意一个平面图，只需4种不同的颜色就可以对它的域进行染色，满足相邻的域染以不同的颜色。
- **定理4.5.2**
  - 每一平面图都是5—可着色的(域着色)
  - 证明（转变为点？简单平面图？）
    - 作G的对偶图G*，命题转为证G*的结点5-可着色
    - G*也是可平面的
    - 由于自环和重边不影响点染色，所以可以移去G* 中的自环、重边，得到简单图G_0
    - 命题又转化为任意简单平面图G_0可以结点5着色



五色定理证明示意图



四色猜想(3)

◆ **证（续）**

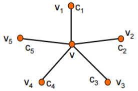
- 以下对简单平面图G_0的结点进行归纳证明
- 当n≤5时，结论显然成立
- 假设n-1时成立
- 要证结点数为n时成立，怎么办？
- 由于G_0是结点数为n的简单平面图，由定理4. 2. 2(简单平面图G中存在度小于6的结点)，G_0中存在结点v， d(v)<6
- 移去v以后得到G_0’，由假设条件，G_0’ 的结点5-可着色，着好色之后，再把v放回

图中一定存在孤立点就好了☹

四色猜想(4)

◆ **证（续）**

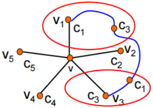
- 考虑将v放回G_0’ 的过程， 注：d(v)<6
- 如果d(v) ≤4，或者d(v)=5且v 的邻接点没有用完5种颜色，则v可以着第5种颜色，即G_0 的点可以5着色
- 如果v的邻接点恰好用了5种颜色，怎么办呢？
- 如c_1～c_5，其中设结点v_i用c_i着色



四色猜想(5)

◆ 证（续）

- 考虑能否将v_1结点换成c_3颜色？
- 令G_{13}是G_0' $=G_0-v$的一个子图，由c_1和c_3着色的结点导出
- 若v_1和v_3分属G_{13} 的不同连通支
  - 将v_1所在连通支各结点的c_1、c_3颜色互换，v可以着c_1
  - 得到G_0 的一个5着色
- 如果v_1和v_3属于G_{13}的同一个连通支
  - 则一定存在v_1到v_3的结点交替c_1和c_3颜色的道路P
  - 道路P加上边(v, v_1)和(v, v_3)构成一个封闭回路
  - 封闭回路把v_2与v_4、v_5分割在不同的区域
  - 道路P上任意节点颜色为c_1或c_3

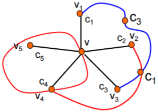


怎么办?

四色猜想(6)

◆ 证（续）

- 考虑c_2和c_4对结点染色，是否构成连接v_2和v_4的道路P'
  - 不会存在由c_2和c_4交替对结点染色的道路连接v_2和v_4
  - 否则与G_0 是平面图矛盾
- 在G_0-v的子图G_{24}中，v_2和v_4分属于不同的支
- 将v_2所在连通支各结点的c_2、c_4颜色对换，此时v_2着以c_4，可令v着以c_2，则G_0可5着色
- 证毕



思考该方法能够证明四色问题?
v_5可能与v_1、v_3、v_4均连着

匹配内容

- 相异代表系
- 最大匹配和最小覆盖的定义
- 二分图的最大匹配
- 匈牙利算法
- 最佳匹配及其算法
- 最大基数匹配

最大匹配和最小覆盖

设一个图 G 有一个具有 m 条边的最大匹配和一个具有 c 个顶点的最小覆盖。证明：不超过 $\frac{c+1}{2}$ 的最大整数小于或等于 m。(提示：对 m 使用数学归纳法)

证明思路：m=1 显然。

若 m=k 时成立，当 m=k+1 时，去掉图 G 的最大匹配的一条边以及这条边关联的两个顶点的连边，得到子图 G'。子图的最大匹配数为 k，则 G' 的最小覆盖 c' 有 $[\frac{c'+1}{2}] \leq k$。设图 G 最小覆盖为 c，则 c≤c'+2。因此 $[\frac{c+1}{2}] \leq [\frac{c'+2+1}{2}] \leq k+1 = m$。

期末考试安排:
6 月 8 日 (周四) 下午 14: 00 开始在 FIT 楼 1-312

预祝大家取得好成绩!