

Calculus T(1) Final

December 30, 2022

1 填空题

1. (3 points) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{x^2} f(t)dt = 2x^5, \forall x \in (0, +\infty)$, 则 $f(1) =$ _____.
2. (3 points) 设 $y(x)$ 是一阶线性方程 $y' - \frac{y}{x} = x(x > 0)$ 满足初值条件 $y(1) = 1$ 的解, 则 $y(2) =$ _____.
3. (3 points) 已知曲线 $y = y(x)$ 经过点 $(-1, 1)$, 且该曲线上任意点 P 处切线的斜率是直线 OP 的三倍, 其中 O 是原点, 则 $y(-2) =$ _____.
4. (3 points) 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx =$ _____.
5. (3 points) 设连续可微函数 $y = y(x)$ 由方程 $x = \int_1^y \sin^2(\frac{\pi t}{4}) dt$ 确定, 则 $y'(0) =$ _____.
6. (3 points) 曲线段 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt (0 \leq x \leq \pi)$ 的弧长为_____.
7. (3 points) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线共有_____条.
8. (3 points) 设 $y(x)$ 是常微分方程 $yy'' + (y')^2 = 1$ 满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的解, 则 $(y(1))^2 =$ _____.
9. (3 points) 积分 $\int_{-1}^1 \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}} =$ _____.
10. (3 points) 已知 $y(x) = xe^{-2x}$ 是常系数二阶线性齐次方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解, 则 $a + b =$ _____.

2 选择题

1. (3 points) 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n}) \frac{k}{n^2} =$
A. $\frac{2}{3}$;
B. $\frac{1}{2}$;
C. $\frac{5}{6}$;
D. $\frac{1}{3}$.
2. (3 points) 积分 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$ 等于

- A. $\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 2)$;
 B. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;
 C. $\frac{1}{2}$;
 D. $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})$.

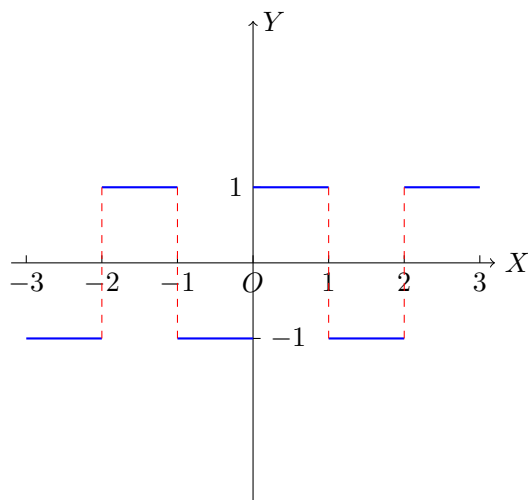
3. (3 points) 设二阶线性常系数常微分方程的通解为 $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x$, 其中 C_1 和 C_2 为任意常数, 则这个微分方程是

- A. $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2$;
 B. $y'' + 2y' + 2y = 2x - 2$;
 C. $y'' - 2y' + 2y = 2x + 2$;
 D. $y'' + 2y' + 2y = 2x + 2$.

4. (3 points) 函数 $e^{\sin x}$ 在一个最小正周期内的拐点个数为

- A. 2;
 B. 4;
 C. 1;
 D. 0.

5. (3 points) 设 $\lambda(x)$ 是周期为 2 的分段常值函数, 其图像如下.



- A. 微分方程 $y' + \lambda(x)y = 0$ 的所有解都是周期函数;
 B. 微分方程 $y' + \lambda(x)y = 0$ 既有无穷多个不恒等于零的周期解, 同时也有无穷多个非周期解;
 C. 微分方程 $y' + \lambda(x)y = 0$ 具有有限多个的非周期解;
 D. 除零解外, 微分方程 $y' + \lambda(x)y = 0$ 没有周期解.

6. (3 points) 曲线段 $y = \sqrt{x} (0 \leq x \leq 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面面积为

- A. $\frac{13\pi}{3}$;

- B. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$;
C. 2π ;
D. $\frac{4(3\sqrt{3}-1)\pi}{3}$.

7. (3 points) 设 $f(x)$ 为定义在闭区间 $[a, b]$ 上的函数. 下列命题中的错误命题是

- A. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积;
B. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负可积且 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则 $f(x)$ 在其连续点处为零;
C. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积;
D. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的(达布)上下积分均存在.

8. (3 points) 定义 $J_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$, $k = 1, 2, 3$. 则这三个积分值从小到大排列依次为

- A. J_2, J_3, J_1 ;
B. J_1, J_2, J_3 ;
C. J_2, J_1, J_3 ;
D. J_3, J_2, J_1 .

9. (3 points) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+x+1}, & x \geq 0, \\ 2x+1, & x < 0. \end{cases}$ 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(-1) = 1$, 则

- A. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1), & x \geq 0, \\ x^2 + x - 1, & x < 0. \end{cases}$
B. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - x + 1) + 1, & x \geq 0, \\ x^2 + x + 1, & x < 0. \end{cases}$
C. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) + 1, & x \geq 0, \\ x^2 + x + 1, & x < 0. \end{cases}$
D. $F(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) - 1, & x \geq 0, \\ x^2 + x - 1, & x < 0. \end{cases}$

10. (3 points) 积分 $\int_0^1 e^{\frac{-\pi^2}{2}} (1 - x^2) dx =$

- A. $\frac{1}{\sqrt{e}}$;
B. $\frac{1}{e}$;
C. e ;
D. \sqrt{e} .

3 解答题

1. (15 points) 设 λ 是实数, 使得 $f(x) = e^x(x^2 - x + \lambda)$ 的图像的渐近线同时也是曲线 $y = f(x)$ 在某点处的一条切线.
 - (a) 求 λ 的值;
 - (b) 求 $f(x)$ 的单调区间, 极值和最值;
 - (c) 求 $f(x)$ 的凹凸性区间, 以及拐点 (写出拐点横坐标即可).
2. (10 points) 已知在平面直角坐标系中, 区域 D 由 x 轴与参数曲线 $x(t) = t + \arctan t, y(t) = 4t(1 - t), (0 \leq t \leq 1)$ 共同围成.
 - (a) 求 D 的面积;
 - (b) 求图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积.
3. (10 points) 求二阶线性Euler方程 $x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3 \ln x (x > 0)$ 的通解.
4. (5 points) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续可微, 满足 $0 < f'(x) < 1, \forall x \in [0, 1]$ 且 $f(0) = 0$.
证明: $\int_0^1 (f(x))^3 dx \leq (\int_0^1 f(x) dx)^2$.