习题讨论课03答案：极限与实数的重要性质

★号（越）多表示题目（越）难

一、单调性与极限

【单调有界收敛】

- 设数列 $\{a_n\}$ 单调不减。则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\{a_n\}$ 有上界且 $A = \sup\limits_{n\geq 1} a_n$ 。
- 设函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 单调不减, 则 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$ 当且仅当 f 在 (a,b) 上有上界且 $A = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ 。
- 对单调不增有类似结论。

例 1. 设 f 是区间 I 上的单调函数。

1. 证明 f 在区间 I 内的间断点都是跳跃间断点。
2. 证明 f 至多只有可数无穷多个间断点。
3. 证明 f 连续当且仅当 $f(I)$ 是区间。
4. 若进一步，f 严格单调，$f(I)$ 是区间，证明 f 有连续的反函数。

证明. 不妨设 f 单调不减。

(1) 对 I 的任何内点 x_0, 任取 $x_1, x_2 \in I$ 使得 $x_1 < x_0 < x_2$, 则 $f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$ 。

因此 $\alpha = \sup\limits_{x\in I, x<x_0} f(x), \quad \beta = \inf\limits_{x\in I, x>x_0} f(x)$ 存在, 并且 $\alpha \leq f(x_0) \leq \beta$ 。

任取 $\varepsilon > 0, \alpha-\varepsilon$ 不是 $\{f(x) \mid x\in I, x<x_0\}$ 的上界，从而存在 $x_3 \in I, x_3 < x_0$ 使得 $\alpha-\varepsilon < f(x_3)$ 。从而对任意 $x\in(x_3, x_0), \alpha-\varepsilon < f(x_3) \leq f(x) \leq \alpha$, 因此 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha$。

同理可证, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \beta$ 。

如果 $\alpha = \beta$, 则 $f(x_0) = \alpha = \beta = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 。从而 f 在 x_0 处连续。

如果 f 在 x_0 处间断, 则 $\alpha < \beta, f$ 在 x_0 处为跳跃间断。

(2) 如果 $x_1, x_2 \in I$ 是 f 的间断点, 满足 $x_1 < x_2$, 则 $f\left(x_1^-\right) < f\left(x_1^+\right) \leq f\left(x_2^-\right) < f\left(x_2^+\right)$。且区间 $\left(f\left(x_1^-\right), f\left(x_1^+\right)\right)$ 内最多只含一个函数值 $f(x_1)$ 。而区间 $\left(f\left(x_1^-\right), f\left(x_1^+\right)\right)$ 与 $\left(f\left(x_2^-\right), f\left(x_2^+\right)\right)$ 不相交。

对于 f 的每个间断点 x_0, 取一个有理数 $r\in\left(f\left(x_0^-\right), f\left(x_0^+\right)\right)$ 与 x_0 对应。而不同间断点对应于不同的有理数，所以 f 的间断点集不会包含比有理数集更多的元素。而有理数集是可数无穷集一即全体有理数可以组成一个数列:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots \quad (*)$$

所以单调函数的间断点集最多是可数无穷集。

(3) (必要性) 设 f 连续。我们证明 $f(I)$ 是区间。任取 $y_1, y_2 \in f(I)$ 以及 $y \in (y_1, y_2)$, 我们证明 $y \in f(I)$.

设 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ 。则 $x_1 < x_2$.

记

$$A = \{x \in I \mid f(x) < y\}.$$

于是 $x_1 \in A, x_2$ 是 A 的上界。所以上确界 $x_0 = \sup A$ 存在, 且 $x_1 \leq x_0 \leq x_2$.

若 $f(x_0) < y$, 则 $x_0 < x_2$, 由连续性知存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset (x_0, x_2), f(x) < y$ 。这与 x_0 是 A 的上界矛盾。

如果 $f(x_0) > y$, 则 $x_0 > x_1$, 由连续性知存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset (x_1, x_0), f(x) > y$ 。这与 x_0 是 A 的上确界矛盾。

所以 $f(x_0) = y$.

(充分性) 设 $f(I)$ 是区间。我们证明 f 连续。由(1)的证明知 f 没有间断点。所以 f 连续。

(4) 由 f 严格单调知 f 由反函数 $f^{-1} : f(I) \to I$，它也是严格单调函数，且 $I = f^{-1}(f(I))$ 是区间，所以由(3)知 f^{-1} 连续。 □

注. (反三角函数的存在性和连续性) 由于在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上 sin 连续且严格增（见第2次习题课解答），所以在该区间中 sin 的值域为 $[-1, 1]$，并且它有连续的反函数 $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 同理，在区间 $[0, \pi]$ 上 cos 有连续的反函数 $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

可以证明 $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续且严格增。又因为对任意正整数 n，

$$\tan\left(\arcsin \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right) = n,$$

且 tan 是奇函数，所以 $[-n, n]$ 中的实数都是 tan 的函数值。从而 tan 的值域为 $\mathbb{R}$。于是 tan 有连续的反函数 $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

根据例1结论，不存在这样的单调函数，它在所有无理数处间断。但以下例题表明存在单调函数，它恰在所有有理数处间断。

例 2. （★★★）设 a_n 是数列

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots \quad (*)$$

记

$$I_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } a_n \leq x; \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

对正整数 N, 记

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} I_n(x).$$

证明:

1. 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 极限 $f(x)=\lim\limits_{N \to +\infty} f_N(x)$ 存在。

2. f 在 $\mathbb{R}$ 上严格增。

3. f 在每个有理数处间断, 在所有无理数处连续。

证明. (1) 对固定的 x, 数列 $\{f_N(x)\}$ 单调不减,

$$0 \leq f_N(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}}<1,$$

所以极限 $f(x)=\lim\limits_{N \to +\infty} f_N(x)$ 存在, 并且 $0 \leq f(x) \leq 1$ 。

(2) 对任意 $x<y$, 由于有理数稠密, 所以存在 N_1 使得 $x<a_{N_1}<y$, 因此对任意 $N \geq N_1$,

$$f_N(y)-f_N(x) \geq \frac{1}{2^{N_1}}.$$

让 $N \to +\infty$, 得到 $f(y)-f(x) \geq \frac{1}{2^{N_1}}>0$ 。所以 f 严格增。

(3) 对于任意 N_0, 以及任意 $x<a_{N_0}$, 对 $N \geq N_0$

$$f_N\left(a_{N_0}\right)-f_N(x) \geq \frac{1}{2^{N_0}}$$

让 $N \to +\infty$, 得到 $f\left(a_{N_0}\right)-f(x) \geq \frac{1}{2^{N_0}}$ 。所以

$$\lim_{x \to a_{N_0}^-} f(x) \leq f\left(a_{N_0}\right)-\frac{1}{2^{N_0}}<f\left(a_{N_0}\right) \leq \lim_{x \to a_{N_0}^+} f(x).$$

所以 f 在 a_{N_0} 间断。

对任何无理数 y, 以及任意正整数 M, 取

$$\delta=\frac{1}{2} \min_{1 \leq n \leq M}\left|a_n-y\right|,$$

则 $\delta>0$, 且: 若 $\left|a_n-y\right|<\delta$, 则 $n>M$ 。

于是对任意 $x \in(y-\delta, y+\delta)$

$$|f(y)-f(x)| \leq \sum_{n>M} \frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^M}.$$

所以 f 在 y 处连续。 □

例 3. 设 $x>0$, 记

$$y_n=\frac{y_{n-1}}{2}+\frac{x}{2 y_{n-1}}, \quad n=1,2, \ldots.$$

证明对任意 $y_0>0$, 数列 y_n 收敛到 $\sqrt{x}$ 。

证法 1. 用数学归纳法可以证明 $y_n > 0, \forall n \geq 0$ 。从而

$$y_n = \frac{y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}}{2} \geq \sqrt{y_{n-1} \cdot \frac{x}{y_{n-1}}} = \sqrt{x}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

从而

$$y_n - y_{n-1} = \frac{\frac{x}{y_{n-1}} - y_{n-1}}{2} \leq 0, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

因此数列 y_n 单调不增有下界, 从而收敛, 且极限 $A = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n \geq \sqrt{x} > 0$ 。

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{x}{2y_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

两边让 $n \to +\infty$, 得到

$$A = \frac{A}{2} + \frac{x}{2A},$$

即 $A^2 = x$, 从而 $A = \sqrt{x}$ 。 □

证法2.

$$y_n - \sqrt{x} = \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{x}{2y_{n-1}} - \sqrt{x} = \frac{\left(y_{n-1} - \sqrt{x}\right)^2}{2y_{n-1}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

由证法 1 知 $y_{n-1} \geq \sqrt{x}, \forall n \geq 2$, 所以

$$\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{2y_{n-1}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2y_{n-1}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

因此对 $n \geq 2$

$$\left|y_n - \sqrt{x}\right| \leq \frac{1}{2}\left|y_{n-1} - \sqrt{x}\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left|y_1 - \sqrt{x}\right| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \sqrt{x}$ 。 □

例 4. 设 $0 \leq x \leq 1$ 。记 $y_0 = 0$,

$$y_n = y_{n-1} + \lambda\left(x - y_{n-1}^2\right), \quad n \geq 1.$$

求正数 λ 的值, 使得数列 y_n 是单调不减数列; 此时, 证明数列 y_n 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 的值。

解. (1) $y_{n+1} \geq y_n$ 当且仅当 $\lambda\left(x - y_n^2\right) \geq 0$, 即 $0 \leq y_n \leq \sqrt{x}$ 。

而 $0 \leq y_{n+1} \leq \sqrt{x}$ 当且仅当 $y_n + \lambda\left(x - y_n^2\right) \leq \sqrt{x}$, 即

$$\left(y_n - \sqrt{x}\right)\left(\lambda y_n + \lambda\sqrt{x} - 1\right) \geq 0.$$

为保证由这个不等式能够推出 $y_n \leq \sqrt{x}$, 只需

$$\frac{1 - \lambda\sqrt{x}}{\lambda} \geq \sqrt{x},$$

即
$$\frac{1}{\lambda} \geq 2\sqrt{x}$$
因此常数 λ 满足
$$\frac{1}{\lambda} \geq 2$$
即 $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

(2) 由(1)和 $y_0=0$ 用数学归纳法可得 $0 \leq y_n \leq y_{n+1} \leq \sqrt{x} \leq 1$ 。

所以极限 $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} y_n$ 存在。

记 $A=\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} y_n$ 。

在 $y_{n+1}=y_n+\lambda\left(x-y_n^2\right)$ 两边对 $n \rightarrow+\infty$ 取极限, 得到
$$A=A+\lambda\left(x-A^2\right),$$
而 $A \geq 0$, 所以 $A=\sqrt{x}$ 。

事实上, 我们不难发现 y_n 是关于 x 的多项式, 这是用多项式来逼近函数 $\sqrt{x}$. 我们将来证明这是一致逼近。 □

例 5. 设 $f:[0,1] \rightarrow[0,1]$ 严格增、连续。证明对任何 $x_0 \in[0,1]$, 极限 $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} f^n\left(x_0\right)$ 存在, 且极限值 x^* 满足 $f\left(x^*\right)=x^*$ 。

证明. 若 $f\left(x_0\right)=x_0$, 则 $f^n\left(x_0\right)=x_0$ 。

若 $f\left(x_0\right)>x_0$, 则用数学归纳法可以证明数列 $x_n=f^n\left(x_0\right)$ 严格增。而它有上界 1 , 所以 $x^*=\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} x_n$ 存在。
$$\left|f\left(x^*\right)-f\left(x_n\right)\right|=\left|f\left(x^*\right)-x_{n+1}\right| \rightarrow\left|f\left(x^*\right)-x^*\right|$$
另一方面，由连续性可得 $\left|f\left(x^*\right)-f\left(x_n\right)\right| \rightarrow 0$, 所以由极限的唯一性, $f\left(x^*\right)=x^*$ 。

类似可证, 若 $f\left(x_0\right)<x_0$, 则命题结论也成立。 □

例 6. 在习题课 1 中我们证明了
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
所以数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增, 有上界 $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}=4$; 数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调减, 有下界 $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$ 。所以极限
$$\lim_{n \rightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
存在。易见它们相等, 记它们的共同的值为 e, 记 $\ln=\log_{\mathrm{e}}$ 。于是
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

从而

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

利用以上事实, 证明数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

收敛。

证明.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0.$$

所以 x_n 单调减。

又

$$x_n > \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0.$$

即 x_n 有下界。

所以 x_n 收敛。 □

例 7. 证明 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 。

证明. 由上题证明知

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

对 $0 < x < \frac{1}{2}$, 存在正整数 N 使得 $\frac{1}{N+1} < x \leq \frac{1}{N}$ 。因此

$$\frac{N}{N+2} = \frac{\frac{1}{N+2}}{\frac{1}{N}} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)}{\frac{1}{N}} < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)}{\frac{1}{N+1}} < \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{N+1}} = \frac{N+1}{N}.$$

于是

$$1 - 2x < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 + 2x,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 。

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln\frac{1}{1-y}}{y} \quad (y = -x) \\
&= \lim_{z\to 0^+} \frac{(1+z)}{1-\frac{1}{1+z}} = \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln(1+z)}{z}(1+z) = 1, \quad \left(z = \frac{1}{1-y} - 1\right).
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 。 □

例 8. 设 $x_1=a>0, y_1=b>0$,

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}, \quad y_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}.$$

证明 $\{x_n\},\{y_n\}$ 都收敛, 且极限相等。

证明. 用数学归纳法可知 $x_n>0, y_n>0$ 。

由平均值不等式知

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2} \geq \sqrt{x_n y_n}=y_{n+1}.$$
$$x_{n+1}-x_n=\frac{y_n-x_n}{2} \leq 0, \quad \frac{y_{n+1}}{y_n}=\sqrt{\frac{x_n}{y_n}} \geq 1, \quad n \geq 2.$$

所以 $\{x_n\},\{y_n\}$ 最终成为单调减、单调增数列, 而 y_2 是前者的下界, x_2 是后者的上界。所以 $\{x_n\},\{y_n\}$ 都收敛。

记 $\alpha=\lim\limits_{n \to+\infty} x_n, \beta=\lim\limits_{n \to+\infty} y_n$ 。对

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

两边取极限, 得到 $\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}$, 从而 $\alpha=\beta$ 。

$$\left|x_{n+1}-y_{n+1}\right|=\frac{\left|x_{n+1}^2-y_{n+1}^2\right|}{x_{n+1}+y_{n+1}}=\frac{\left(x_n-y_n\right)^2}{4\left(x_{n+1}+y_{n+1}\right)} \approx \frac{\left(x_n-y_n\right)^2}{8 \alpha}.$$

上述数列会很快收敛。 □

例 9 (指数函数的一种定义，只涉及乘方，★). 对任何实数 x，定义 $E_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. 证明：

1. 当 $n>-x$ 时，$E_n(x)$ 关于 n 严格增；
2. $E_n(x)$ 关于 n 有上界；
3. $E(x)=\lim\limits_{n \to+\infty} E_n(x)$ 收敛于正数，$E(1)=\mathrm{e}>1$；
4. 对任意实数 x，$\lim\limits_{n \to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n=1$；
5. 对任意实数 x, y，$E(x) E(y)=E(x+y)$；
6. $E(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $E(x)$ 到处连续；
7. $E(x)$ 关于 x 严格增；
8. E 的值域为 $(0,+\infty)$.

证明留作练习。

二、有界闭区间套

$$[a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

等价的

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots \le b_{n+1} \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1,$$

于是存在极限 $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_{n\ge1} a_n, \beta = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \inf\limits_{n\ge1} b_n$ 。于是

$$[\alpha, \beta] = \bigcap_{n\ge1} [a_n, b_n].$$

若进一步, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则 $\alpha = \beta$, 此时

$$\bigcap_{n\ge1} [a_n, b_n] = \{\alpha\}.$$

例 10. （★）设 $0 < \lambda < 1$ 。 $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = (1-\lambda)x_n + \lambda x_{n+1}$ 。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 并求它的值。

证明. 不妨设 $a \le b$, 否则考虑 $y_n = -x_n$ 。用数学归纳法可以证明

$$x_{2n-1} \le x_{2n+1} \le x_{2n+2} \le x_{2n}, \quad n \ge 1.$$

于是 $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ 构成有界闭区间套, 从而 $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1}, \beta = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n}$ 存在。

$$x_{2n+2} = (1-\lambda)x_{2n} + \lambda x_{2n+1}$$

两边取极限, 得到 $\beta = (1-\lambda)\beta + \lambda\alpha$, 所以 $\alpha = \beta$, 因此 $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 。

令 $y_n = \mu(x_n - \alpha)$ 。则

$$\begin{cases} y_{n+2} = \mu\left((1-\lambda)x_n + \lambda x_{n+1} - \alpha\right) = (1-\lambda)y_n + \lambda y_{n+1}, \quad n \ge 1, \\ y_1 = \mu(a-\alpha), \quad y_2 = \mu(b-\alpha). \end{cases}.$$

当 $\mu = 1$ 时, 数列 $\{y_n\}$ 为 $\{x_n - \alpha\}$ 。

$$x_3 - \alpha = (1-\lambda)a + \lambda b - \alpha,$$

于是取 μ 使得

$$\begin{cases} y_1 = \mu(x_1 - \alpha) = \mu(a-\alpha) = b - \alpha = x_2 - \alpha, \\ y_2 = \mu(x_2 - \alpha) = \mu(b-\alpha) = (1-\lambda)a + \lambda b - \alpha = x_3 - \alpha, \end{cases}$$

即

$$\mu = \frac{b-\alpha}{a-\alpha} = \frac{(1-\lambda)a + \lambda b - \alpha}{b-\alpha}$$

解得

$$\alpha = \frac{(1-\lambda)a + b}{2-\lambda}.$$

□

证法 2.

$$(1-\lambda)x_{n+1}+x_{n+2}=(1-\lambda)x_n+x_{n+1}=(1-\lambda)a+b,\quad \forall n\geq 1.$$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-(1-\lambda)\left(x_{n+1}-x_n\right)=(\lambda-1)^n\left(x_2-x_1\right)=(\lambda-1)^n(b-a),$$

所以

$$x_{x+2}=\frac{(1-\lambda)a+b+(\lambda-1)^n(b-a)}{2-\lambda}\to\frac{(1-\lambda)a+b}{2-\lambda},\quad n\to+\infty.$$

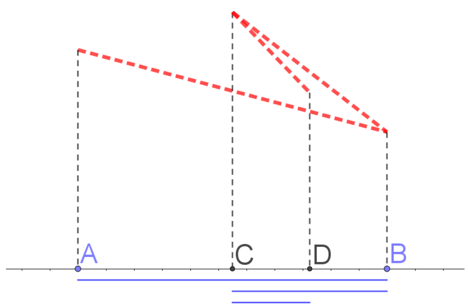
$\square$

例 11 (导数与函数单调性，★★). 设 f 在开区间 I 上可导，即对任意 $x\in I$，极限

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

存在。证明：若对任意 $x\in I$，都有 $f'(x)>0$，则 f 在区间 I 上严格增。

证明. （反证法）假设存在 $x_1,y_1\in I$ 使得 $x_1<y_1$ 且 $f(x_1)\geq f(y_1)$.



若 $\frac{f\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+y_1}{2}-x_1}\leq\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1}$，则取 $x_2=x_1$，$y_2=\frac{x_1+y_1}{2}$.

若 $\frac{f\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+y_1}{2}-x_1}>\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1}$，则必然有 $\frac{f(y_1)-f\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)}{y_1-\frac{x_1+y_1}{2}}<\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1}$，此时取 $x_2=\frac{x_1+y_1}{2}$，$y_2=y_1$.

如此可得有界闭区间套 $[x_n,y_n]$，满足

$$y_{n+1}-x_{n+1}=\frac{y_n-x_n}{2},$$

且

$$\frac{f(y_{n+1})-f(x_{n+1})}{y_{n+1}-x_{n+1}}\leq\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}.$$

由有界闭区间套定理，存在唯一实数 $x_0\in I$ 满足对任意正整数 n，都有 $x_0\in[x_n,y_n]$.

于是必然存在 x_n,y_n 之一（记为 a_n），满足 $a_n\neq x_0$，且

$$\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}\leq\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\leq\frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$，所以上述不等式两端取极限，得到

$$f'(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \leq \frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1} \leq 0.$$

这与 $f'(x) > 0(\forall x \in I)$矛盾。

所以 f 在 I 上严格增。 $\square$

二、 Cauchy 准则

【定义】 $\{a_n\}$ 是一个 **Cauchy 数列**: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得对任意正整数 $m, n \geq N, |a_m - a_n| < \varepsilon$。

与极限概念相似: 是数列尾巴上的项的性质;

与极限概念不同: 这是用数列自身的项进行比较。

【性质】任何收敛数列都是 Cauchy 数列。(直接从定义简单得到)

在实数集中，任何 Cauchy 数列都是收敛的。(这是 Cauchy 准则的本质内容，它并不平凡, 因为这在有理数范围内不成立。)

例 12 (压缩不动点定理，★). 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是闭集 (即 I 中任何收敛数列, 其极限也在 I 中), $f: I \to I$ 是压缩映射, 即存在常数 $0 < \lambda < 1$ 使得对任意 $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

则存在唯一的 $x^* \in I$ 使得 $f(x^*) = x^*$, 且对任意 $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^n(x_0) = x^*$, 且

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\lambda^n |f(x_0) - x_0|}{1 - \lambda}, \quad \forall n \geq 1.$$

证明. 记 $x_n = f^n(x_0)$ 。则

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}|,$$

从而

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=1}^{p} |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda^{n+k-1} |x_1 - x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|.$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列。于是 $x^* \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 且 $x^* \in I$ 。上述不等式中, 令 $p \to +\infty$, 得到

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|.$$

$$\begin{aligned}|f(x^*) - x^*| &\leq |f(x^*) - f(x_n)| + |f(x_n) - x^*| \\ &\leq \lambda |x_n - x^*| + |x_{n+1} - x^*| \to 0, \quad n \to +\infty,\end{aligned}$$

所以 $f(x^*) = x^*$ 。

$$\left|x^{\#} - x^*\right| = \left|f\left(x^{\#}\right) - f(x^*)\right| \leq \lambda \left|x^{\#} - x^*\right|,$$

所以 $x^{\#} = x^*$ 。 $\square$

例 13. 例3, 用压缩不动点定理。

证明.

$$F(y)=\frac{y}{2}+\frac{x}{2y},$$

则

$$\begin{aligned}|F(y_2)-F(y_1)|&=\left|\frac{y_2-y_1}{2}+\frac{x}{2y_2}-\frac{x}{2y_1}\right|\\&=\left|\frac{y_2-y_1}{2}\left(1-\frac{x}{y_1y_2}\right)\right|.\end{aligned}$$

对任意 $y>0, F(y)\geq\sqrt{x}$ 。记 $I=[\sqrt{x},+\infty)$ 。则 I 是闭区间, $F(I)\subset I$, 且对任意 $y_1,y_2\in I$,

所以

$$0<\frac{x}{y_1y_2}\leq 1,$$

$$|F(y_2)-F(y_1)|\leq\frac{1}{2}|y_2-y_1|,$$

是压缩映射。所以 F 有唯一不动点 $y^*=\sqrt{x}$, 且对任意 $y_0>0, y_n=F^n(y_0)\to\sqrt{x}, n\to+\infty$ 。 □

例 14. （★）例 4, $0<\lambda\leq\frac{1}{2}, 0\leq x\leq 1$, 用压缩不动点。

证明. 记 $I=\{y\mid 0\leq y\leq\sqrt{x}\}$,

$$F(y)=y+\lambda\left(x-y^2\right).$$

则对任意 $y\in I, F(y)\geq 0$,

$$0\leq y\leq\sqrt{x}\leq 1,$$

$$0\leq\lambda(\sqrt{x}+y)\leq\frac{1}{2}(1+1)=1,$$

$$\sqrt{x}-F(y)=\sqrt{x}-y-\lambda\left(x-y^2\right)=(\sqrt{x}-y)(1-\lambda(\sqrt{x}+y))\geq 0,$$

所以 $F(y)\in I$ 。

$$\begin{aligned}|F(y_2)-F(y_1)|&=\left|y_2-y_1+\lambda\left(y_1^2-y_2^2\right)\right|=|y_2-y_1||1-\lambda(y_1+y_2)|\\&\leq|y_2-y_1|(1-\sqrt{x})\end{aligned}$$

所以, 当 $0<x\leq 1$ 时, F 是映闭集 I 到 I 的压缩映射, 它有唯一不动点 $y=\sqrt{x}$. □

例 15. （★）设 $0<\lambda<1, y_{n+1}=\frac{1-\lambda}{y_n}+\lambda$ 。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ 存在, 并求它的值。

证明. 令

$$F(y)=\frac{1-\lambda}{y}+\lambda.$$

则对任意 $y>0, F(y)\geq\lambda$。

$$F^2(y)=\frac{1-\lambda}{\frac{1-\lambda}{y}+\lambda}+\lambda.$$

则对任意 $y_1, y_2\in[\lambda,+\infty)$,

$$\begin{aligned}\left|F^2\left(y_2\right)-F^2\left(y_1\right)\right| &=(1-\lambda)^2\left|\frac{y_2-y_1}{\left(1-\lambda+\lambda y_2\right)\left(1-\lambda+\lambda y_1\right)}\right| \\ &\leq\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda+\lambda^2}\right)^2\left|y_2-y_1\right|\end{aligned}$$

所以 F^2 映闭集 $[\lambda,+\infty)$ 到其自身的压缩映射, 所以 $y^*=\lim\limits_{n\to+\infty}F^{2n}\left(y_0\right)$ 存在, 且是 F^2 的唯一不动点。

不难发现 $F(1)=1$ 。所以 $y^*=1$ 。

因此

$$\lim_{n\to+\infty}F^{2n+1}\left(y_0\right)=F\left(\lim_{n\to+\infty}F^{2n}\left(y_0\right)\right)=F(1)=1.$$

于是对任意 $y_0>0$, 都有

$$\lim_{n\to+\infty}F^n\left(y_0\right)=1.$$

□

例 16. （★）每一种收敛都对应一种 Cauchy 准则。试写出极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 收敛所对应的 Cauchy 准则，并给以证明。

证明. Cauchy 准则：极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 收敛当且仅当对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得对任意 $x,y\in I$，只要 $0<|x-a|<\delta, 0<|y-a|<\delta$，就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

必要性是显然的，只证明充分性。

任取数列 $x_n\in I$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 且 $x_n\neq a$. 则对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得对任意 $x,y\in I$，只要 $0<|x-a|<\delta, 0<|y-a|<\delta$，就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 于是存在 N 使得对任意 $n,m\geq N$，$0<|x_n-a|<\delta, 0<|x_m-a|<\delta$. 因此 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. 于是 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 数列，因此收敛。记 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$. 则

$$|f(x_n)-A|\leq\varepsilon,\quad\forall n\geq N.$$

对任意 $x\in I$，只要 $0<|x-a|<\delta$，就有

$$|f(x)-A|\leq|f(x)-f(x_N)|+|f(x_N)-a|<2\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. □

例 17. （★）设 $I\subseteq\mathbb{R}$，$f:I\to\mathbb{R}$. 证明：f 在 I 上连续且所有间断点都是可去间断点当且仅当对于 I 中的任意 Cauchy 数列 x_n，$f(x_n)$ 都是 Cauchy 数列。

证明. （必要性）假设 x_n 是 I 中一个 Cauchy 数列，但 $f(x_n)$ 不是 Cauchy 数列。则存在 $x_0\in I$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$.

若 $x_0\in I$，则 f 在 x_0 处连续，所以

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x_0),$$

这与假设矛盾。

所以 $x_0\notin I$. 此时 x_0 是 f 的可去间断点，且 $x_n\neq x_0$。于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 这也与假设矛盾。

于是假设是不成立的，因而必要性得证。

（充分性）假设 x_0 是 I 的一个聚点，满足极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在。

由 Cauchy 准则知，存在 $\varepsilon>0$ 使得对任意 $\delta>0$ 都存在 $x,y\in I$ 使得 $0<|x-x_0|<\delta,0<|y-x_0|<\delta$，但 $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$. 于是对任意正整数 n 存在 $x_n,y_n\in I$ 满足 $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n},0<|y_n-x_0|<\frac{1}{n}$，但$|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$.

令 $z_{2n-1}=x_n,z_{2n}=y_n$. 则 $\{z_n\}$ 是 Cauchy 列。但 $|f(z_{2n-1})-f(z_{2n})|\geq\varepsilon$，从而 $\{f(z_n)\}$ 不是 Cauchy 列。这与已知矛盾。

所以对 I 的任何聚点 x_0，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在。

若 $x_0\notin I$，则 x_0 是 f 的可去间断点。

若 $x_0\in I$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)\neq f(x_0)$，则取 $z_{2n-1}=x_0$，$z_{2n}\in I$ 满足 $|z_{2n}-x_0|<\frac{1}{n}$，则 $\{z_n\}$ 是 Cauchy 列，但 $\{f(z_n)\}$ 不是 Cauchy 列。矛盾。

所以 f 在 $x_0\in I$ 处连续。 □

例 18. 证明收敛

$$a_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

收敛，并估计 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 的值。

证明. 对任意正整数 n,m，

$$a_{n+m}=a_n+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!},$$

所以

$$\begin{aligned}
a_n &\le a_{n+m}\\
&= a_n + \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right.\\
&\quad \left. + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right]\\
&\le a_n + \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right.\\
&\quad \left. + \cdots + \frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m}\right]\\
&\le a_n + \frac{2}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

因此

$$|a_{n+m} - a_n| \le \frac{2}{(n+1)!}.$$

所以 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 是 Cauchy 数列，从而收敛。

让 $m \to +\infty$，得到

$$a_n \le A \le a_n + \frac{2}{(n+1)!},$$

即

$$0 \le A - a_n \le \frac{2}{(n+1)!}$$

当 $n = 9$ 时，

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(n+1)!} = \frac{2}{10!} &= \frac{2}{10\times 2\times 5\times 3\times 7\times 4\times 8\times 6\times 9}\\
&< \frac{2}{10\times 10\times 20\times 30\times 50} = \frac{1}{1500000},
\end{aligned}$$

所以 $0 \le A - a_9 < \frac{1}{150000} < 6.67\times 10^{-7}$. 因为 $a_9 = 2.7182815\ldots$，所以 A 的精确值位于 2.7182808 和 2.7182823 之间。 □

例 19 (指数函数的另一种定义方式，复数指数，★★). 对复数 $z \in \mathbb{C}$，定义

$$E_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!}.$$

证明：

1. $E_n(z)$ 关于 n 是 Cauchy 列，从而存在极限 $E(z) = \lim_{n\to+\infty} E_n(z)$；

2. 对任意 $z, w \in \mathbb{C}$，

$$
\begin{aligned}
&|E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w) - E_{2n+1}(z+w)| \\
&\qquad\qquad \le E_{n+1}(|z|)\,|E_{2n+1}(|w|) - E_{n+1}(|w|)| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + E_{n+1}(|w|)\,|E_{2n+1}(|z|) - E_{n+1}(|z|)|\,,
\end{aligned}
$$

从而 $E(z)E(w) = E(z+w)$.

3. 对 $|z| < 1$，$|E(z) - 1| \le 2|z|$；

4. $E(z)$ 对 $z \in \mathbb{C}$ 连续；

5. $E(1) = \mathrm{e}$.

证明留作练习。

例 20. （★）(1) 设数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 满足：对任意正整数 n, p，都有 $|x_{n+p} - x_n| \le \frac{p}{n^2}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

（★★）(2) 设 $\beta > 0$，数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 满足：对任意正整数 n, p，都有 $|x_{n+p} - x_n| \le \frac{p}{n^{1+\beta}}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

（★★★）(3) 如果数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 满足：对任意正整数 n, p，都有 $|x_{n+p} - x_n| \le \frac{p}{n}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

请证明你的结论。

解. (1) 收敛。

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\le |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \\
&\le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)^2} \\
&\le \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) \\
&\le \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}
$$

所以，$\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。

(2) 收敛。

方法与(1)相同。只需证明存在正数 γ 使得

$$
\frac{1}{n^{1+\beta}} < \frac{1}{(n-1)^\gamma} - \frac{1}{n^\gamma}.
$$

为此，计算

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^{1+\beta}} \frac{1}{\frac{1}{(n-1)^\gamma} - \frac{1}{n^\gamma}} \right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\gamma (n-1)^\gamma}{n^{1+\beta}(n^\gamma - (n-1)^\gamma)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\gamma \frac{1}{n}}{n^{\beta-\gamma}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\gamma\right]} = \frac{1}{\beta}, \quad \text{若 } \gamma = \beta.
\end{aligned}
$$

所以存在 N 使得对任意 $n \geq N$，

$$\frac{1}{n^{1+\beta}} < \frac{2}{\beta}\left(\frac{1}{(n-1)^{\beta}} - \frac{1}{n^{\beta}}\right).$$

从而对任意 $n \geq N$ 及任意正整数 p，

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{2}{\beta}\frac{1}{(n-1)^{\beta}}.$$

所以，$\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。

(3) $\{x_n\}$ 可能发散。

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\ln(n+p) - \frac{1}{2}\ln n\right|}{\frac{p}{n}} = \frac{1}{2}\frac{\left|\ln\frac{n+p}{n}\right|}{\frac{p}{n}} = \frac{1}{2}\frac{\left|\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)\right|}{\frac{p}{n}} \longrightarrow \frac{1}{2},$$

所以存在 N 使得当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{1}{2}\ln(n+p) - \frac{1}{2}\ln n\right| < \frac{p}{n},$$

令 $x_n = \frac{1}{2}\ln(N+n)$. 则

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{p}{N+n} < \frac{p}{n}, \quad \forall n \geq 1, \forall p \geq 1.$$

□