4.1

row operations column operations

1. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&1\\1&4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&2&-3\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\-1&0&1&0&0\\-1&0&0&1&0\\-1&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\1&3&3&1&0\\1&4&6&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&3&3&1&0\\0&4&6&4&1\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}^k=\begin{cases}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix} & (k \bmod 4=1) \qquad \begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \ (k \bmod 4=3)\\ \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix} & (k \bmod 4=2) \qquad \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \ (k \bmod 4=0)\end{cases}$

$1 \ -\tfrac{1}{2} \ 0 \ 0 \ \tfrac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0$

4.2

1. $\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&-1&0&0&1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0&1&0&0\\0&-1&2&-1&0&0&1&0\\0&0&-1&2&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1/2&0&0&1/2&0&0&0\\0&3/2&-1&0&1/2&1&0&0\\0&-1&2&-1&0&0&1&0\\0&0&-1&2&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1/2&0&0&1/2&0&0&0\\0&1&-2/3&0&1/3&2/3&0&0\\0&-1&2&-1&0&0&1&0\\0&0&-1&2&0&0&0&1\end{array}\right]$

$=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1/2&0&0&1/2&0&0&0\\0&1&-2/3&0&1/3&2/3&0&0\\0&0&1&-3/4&1/4&1/2&3/4&0\\0&0&0&1&1/5&2/5&3/5&4/5\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&4/5&6/5&6/5&4/5\\0&1&0&0&3/5&6/5&6/5&4/5\\0&0&1&0&2/5&4/5&6/5&4/5\\0&0&0&1&1/5&2/5&3/5&4/5\end{array}\right]$

2. $\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0&1&0&0\\0&-1&2&-1&0&0&1&0\\0&0&-1&2&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&1&0&0&0\\0&1&-1&0&1&1&0&0\\0&0&1&-1&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&1&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&4&3&2&1\\0&1&0&0&3&3&2&1\\0&0&1&0&2&2&2&1\\0&0&0&1&1&1&1&1\end{array}\right]$

3. $\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1&0&0\end{array}\right]$

4. $\begin{bmatrix}&&1\\&\cdots&\\1&&\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}&&1\\&\cdots&\\1&&\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&1&2\\0&0&3&4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\3/2&-1/2&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&3/2&-1/2\end{bmatrix}$

6. $\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&-1&-1&1&0&0\\-1&3&-1&0&1&0\\-1&-1&3&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&-1&-1&1&0&0\\-3&9&-3&0&3&0\\-3&-3&9&0&0&3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&-1&-1&1&0&0\\0&8&-4&1&3&0\\0&-4&8&1&0&3\end{array}\right]$

$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&-1&-1&1&0&0\\0&12&0&3&6&3\\0&0&12&3&3&6\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&1/4&1/4\\0&1&0&1/4&1/2&1/4\\0&0&1&1/4&1/4&1/2\end{array}\right]$

7. $\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-a&0&0&1&0&0&0\\0&1&-b&0&0&1&0&0\\0&0&1&-c&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&a&ab&abc\\0&1&0&0&0&1&b&bc\\0&0&1&0&0&0&1&c\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$

4.3 suppose $n=4$

A: northwest: $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & i & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ B: southeast: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$

$(cn+sd=0=bl+cp+dt=fl+gp=ak+bm+cq+du=ek+fm+gq=hk+im)$

A^T: northwest A^{-1}: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & m & p & q \\ r & s & t & u \end{bmatrix}$ A^2: an arbitrary matrix

northwest $\times$ southeast $= \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$

4.4 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\left(A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} = A^{-1} - \dfrac{(A^{-1}\vec{e_1})(\vec{e_3}^T A^{-1})}{1+\vec{e_3}^T \vec{e_1}}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \vec{e_1}\vec{e_3}^T$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4.5 1. $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -A & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$

4.6

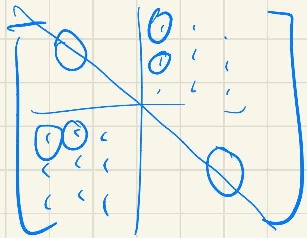
1. $A=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&c&0\end{bmatrix}$

let $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ $A\vec{x}=\begin{bmatrix}ax_2+bx_3\\-ax_1+cx_3\\-bx_1-cx_2\end{bmatrix}=\vec{v}\times\vec{x}=\begin{bmatrix}v_2x_3-v_3x_2\\v_3x_1-v_1x_3\\v_1x_2-v_2x_1\end{bmatrix}$

$\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}v_1=-c\\v_2=b\\v_3=-a\end{cases}$

2.



$$\boxed{A=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\quad a_{ij}=-a_{ji}\neq 0\ (i\neq j)}$$

3. $n=1$: $A=\begin{bmatrix}0&a\\-a&0\end{bmatrix}$ $A^2=\begin{bmatrix}-a^2&0\\0&-a^2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow a=\pm1$ $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

$A^2=-I$

$I=-A\cdot A=A^T\cdot A=A^{-1}\cdot A$

$\Rightarrow A^T=A^{-1}=-A$

$\therefore A=\begin{bmatrix}0&-I_n\\I_n&O\end{bmatrix}$ (the anti-diagonal entries are 1 or -1, others are all zero, also $(i, n+1-i)$ entry is the oppsite of $(n+1-i, i)$ entry)

4. let $A=\underset{\text{symmetric matrix}}{B}+\overset{\text{skew symmetric matrix}}{C}$

just let $b_{ii}=a_{ii}$, $c_{ii}=0$

$(i\neq j)$ $b_{ij}=b_{ji}=\dfrac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$, $c_{ij}=-c_{ji}=\dfrac{a_{ij}-a_{ji}}{2}$

So the work is done

4.7

1. $\begin{bmatrix} R & 2R \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} R & R \\ O & O \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} R & O \\ O & R \end{bmatrix}$

4.8

1. $\begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}+\vec{b} \\ 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{x}) \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $f(\vec{x}) = A\vec{x}+\vec{b}$

let $g(\vec{x}) = C\vec{x}+\vec{d}$

$f \circ g(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$

$= A(C\vec{x}+\vec{d})+\vec{b}$

$= (AC)\vec{x} + (A\vec{d}+\vec{b})$

$M_f M_g = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \vec{d} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} AC & A\vec{d}+\vec{b} \\ \vec{0}^T & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC & A\vec{d}+\vec{b} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$

✓

3. ① f is invertible $\Rightarrow$ A is invertible & $M_f^{-1} = M_{f^{-1}}$

$\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ only $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = A\vec{x}+\vec{b}$ (f is bijective)

so $(\vec{y}-\vec{b}) = A\vec{x}$ $\Rightarrow$ A is bijective

$\therefore$ A is invertible

also $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}(\vec{x}-\vec{b})$ $\Rightarrow M_{f^{-1}} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\vec{b} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$

$= A^{-1}\vec{x} - A^{-1}\vec{b}$

$M_f^{-1} = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}\vec{b} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ O & (1-\vec{0}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \vec{0} \\ -\vec{0}^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} I & -A^{-1}\vec{b} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ O & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\vec{b} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\vec{b} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$

so $M_f^{-1} = M_{f^{-1}}$

② A is invertible & $M_f^{-1} = M_{f^{-1}}$ $\Rightarrow$ f is invertible

as long as f^{-1} can be written as a condition, then f^{-1} exists, then f is invertible

③ the block inverse $M_f^{-1} =$

4.9

1. $$(A \diamond B) \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X^{-1} = X$$

2. $$X\big((A_1B_1) \diamond (A_2B_2)\big)X^{-1} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix}$$

$$X\big((A_1 \diamond A_2)(B_1 \diamond B_2)\big)X^{-1} = X(A_1 \diamond A_2)\cdot(X^{-1}X)(B_1 \diamond B_2)X^{-1}$$

$$= \big(X(A_1 \diamond A_2)X^{-1}\big)\big(X(B_1 \diamond B_2)X^{-1}\big)$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A_1B_1) \diamond (A_2B_2) = (A_1 \diamond A_2)(B_1 \diamond B_2)$$

3. $$X(A^{-1} \diamond B^{-1})X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\big(X(A \diamond B)^{-1}X^{-1}\big)\cdot\big(X(A \diamond B)\cdot X^{-1}\big) = X(A \diamond B)^{-1}(X^{-1}X)(A \diamond B)X^{-1}$$

$$= X\big((A \diamond B)^{-1}(A \diamond B)\big)X^{-1}$$

$$= X \cdot X^{-1} = I$$

$$\therefore X(A \diamond B)^{-1}X^{-1} = \big(X(A \diamond B)\cdot X^{-1}\big)^{-1} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} \diamond B^{-1} = (A \diamond B)^{-1}$$