第一次习题课习题（多元函数极限、连续、偏导数及可微性）

第一部分：多元极限与连续

1. 讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的累次极限与二重极限是否存在，若存在求其值，若不存在，说明理由。

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

(2) 记 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$， $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y},\ (x,y)\in D$.

(3) $f\left(x,y\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0. \end{cases}$

2. 解答下列题目：

(1) 请给出 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$ 的定义．然后讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$ 是否存在。

(2) 请给出 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}} f(x,y)$ 的定义。然后讨论 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy)$ 在 $x\to+\infty,\ y\to-\infty$ 时的极限和累次极限的状况。

(3) 设 $\alpha,\beta\geq 0$, 且 $\alpha+\beta>2$. 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}$.

3. 讨论下列函数极限是否存在，若存在并求其值。

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2)$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}} (x^2+y^2)e^{y-x}$.

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0; \\ y, & x=0. \end{cases}$ 讨论其在定义域内的连续性。

第二部分：可微性与偏导数

5. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，

其中a为常数。证明：

(1) f 在 $(0,0)$ 点连续；

(2) f 在 $(0,0)$ 点可微当且仅当 $a=-1$.

6. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性及可微性。

7. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，但偏导数在 $(0,0)$ 不连续。

8. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在。证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

9. 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数存在，且这两个偏导数在点 $(0,0)$ 处连续。

已知 $f_x(0,0)=3,\quad f_y(0,0)=4.$ 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,t)-f(0,0)}{t}$.

10. 求解下列问题：

(1) 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$，且 $f(1,y)=\sin y$，求 $f(x,y)$.

(2) 设函数 f 的全微分为 $\mathrm{d}f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}(y\sin x+\cos x)\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{xy}\sin x\mathrm{d}y$，且 $f(0,0)=1$，求 f.

11. 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域U 内存在且有界，证明：$f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

12. 给定单位向量 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，设 l 是以 $P_0(x_0,y_0)$ 为顶点，$\vec{v}$ 为方向向量的射线，则称极限

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in l}} f(x,y)=\lim_{t\to 0^+} f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)$$

为函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点沿着方向 $\vec{v}$ 的方向极限。讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的方向极限及二重极限，并总结二者的关系。

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad (x,y)\neq(0,0)$;

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

关于重极限和累次极限

若 $\lim\limits_{x\to a, y\to b} f(x,y)=A$， $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=B$ ，则 $A=B$.

关于累次极限交换顺序

若二重极限 $\lim\limits_{x\to a, y\to b} f(x,y)$ 与两个累次极限 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ 都存在，则

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y).$$

证明： $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=\lim\limits_{x\to a, y\to b} f(x,y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$.

关于累次极限交换顺序的一个基本结论

设 $f:U\times V\to\mathbb{R}^n$，其中 U 和 V 分别是 a 和 b 的（去心）邻域。如果

(1) 对任意 $x\in U$， $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=F(x)$ 存在，且对 $x\in U$ 一致：即 $\forall\varepsilon>0$，存在 b 的去心邻域 V_ε 使得

$$\| f(x,y)-F(x)\|<\varepsilon,\quad \forall y\in V_\varepsilon, \forall x\in U\text{；}$$

(2) 对任意 $y\in V$， $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=G(y)$，

则 $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ 和 $\lim\limits_{y\to b} G(y)$ 都存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$.

二重极限 $\lim\limits_{x\to a, y\to b} f(x,y)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a, y\to b} f(x,y)=\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$.

特别地，如果 $f(x,y)$ 关于 x 在 a 连续，则 $F(x)$ 在 a 处连续。

【注:】这个结论适用于：累次极限交换顺序，累次积分交换顺序，极限与含参积分交换顺序，求导与含参积分交换顺序等多种场合