面向计算机科学的离散数学

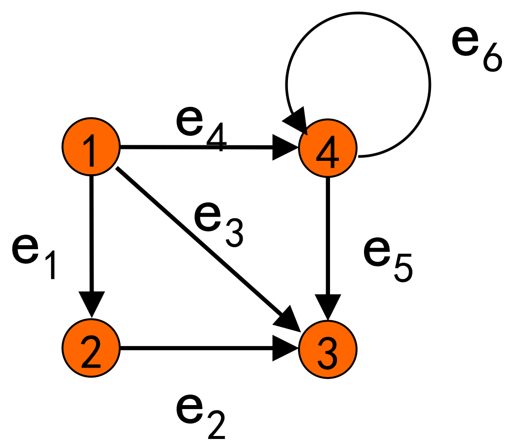
图论—道路和回路

苏航
suhangss@mail.tsinghua.edu.cn
清华大学 计算机系

图的代数表示

- **发明：邻接矩阵（点&点）**

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \qquad a_{ij}=\begin{cases}1 & (v_i,v_j)\in E\\ 0 & other\end{cases}$$



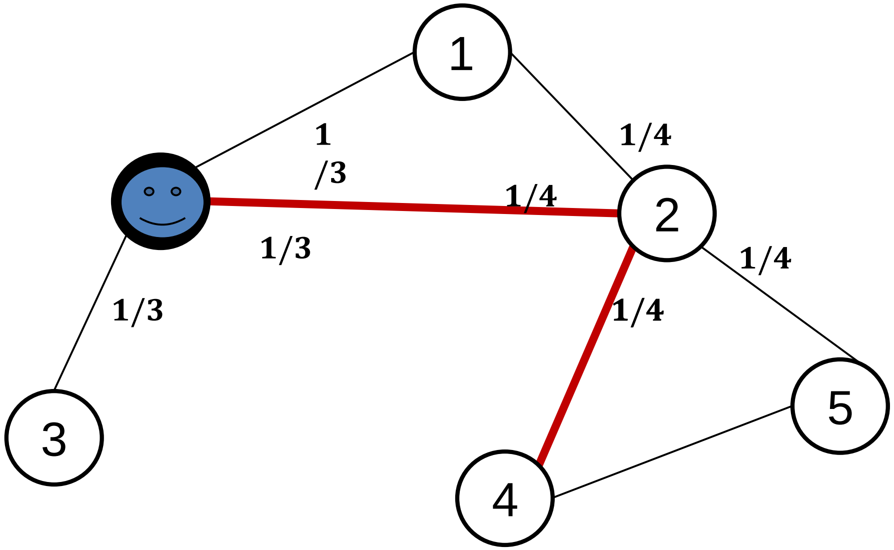
$$\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4\\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}$$

- 对于有向图的邻接矩阵中， v_i的正度和v_i的负度？
  - 第i行的1的个数表示v_i的正度，第i列的1的个数表示v_i的负度
- 邻接矩阵可表示自环，但是不能表示重边

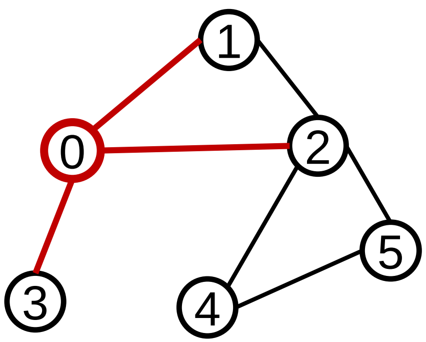
随机游走

- 每步游走时随机走向当前节点的邻居节点
- 概率转移矩阵$P = AD^{-1}$



随机游走

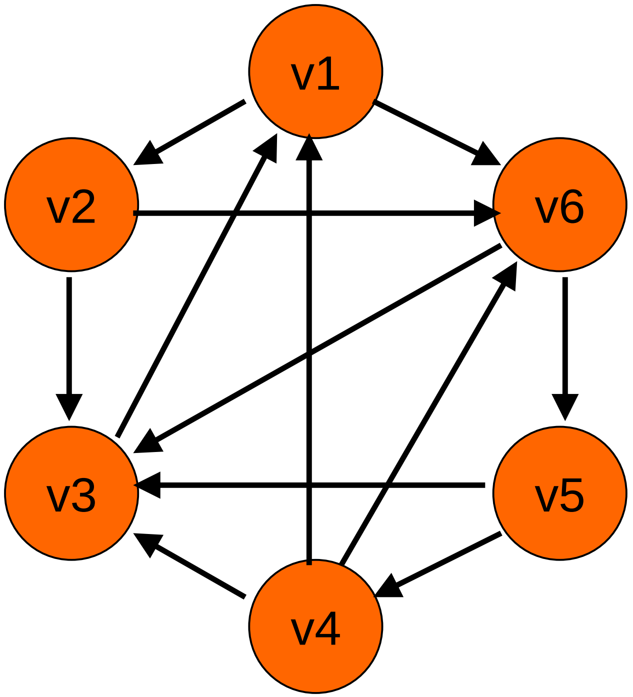
- **随机游走的矩阵形式：**
  - 概率转移矩阵：　$P = AD^{-1}$
  - 一步游走：　$\pi^{(\ell+1)} = P \cdot \pi^{(\ell)}$



$$
\underset{\pi^{(\ell+1)}=}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}
\quad
\underset{P}{\begin{bmatrix}
 & 1/2 & 1/4 & 1 & & \\
1/3 & & 1/4 & & & \\
1/3 & 1/2 & & & 1/2 & 1/2 \\
1/3 & & & & & \\
 & & 1/4 & & & 1/2 \\
 & & 1/4 & & 1/2 &
\end{bmatrix}}
\cdot
\underset{\pi^{(\ell)}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}
$$

道路与回路的判定(5)

- 广探法(BFS)
  - BFS是从G的任一结点v_1开始，找它的直接后继集$\Gamma^+(v_1)$，记为A_1
  - 对A_1中的每一个结点分别找它们的直接后继集，这些第二批后继集的并记为A_2
  - 依此类推，直至达到目的结点。
  - 可能存在的问题？
    - 回路避免



道路与回路的判定(6)

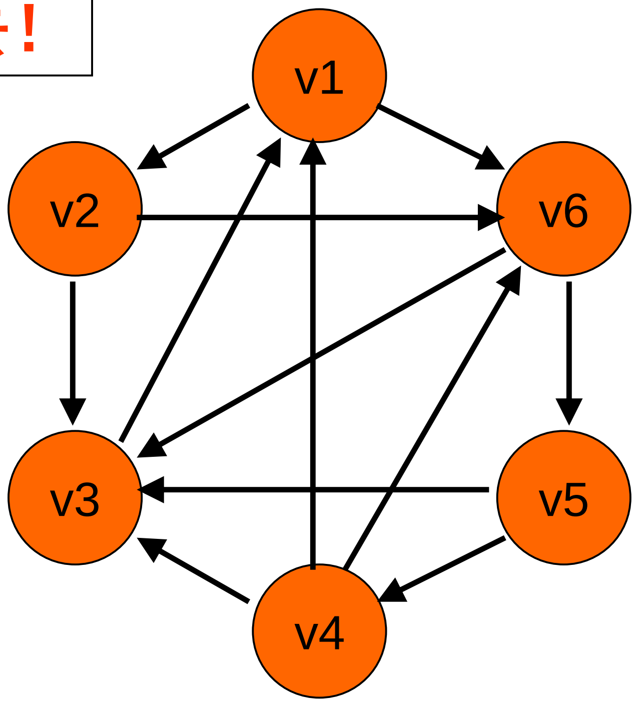
- **广探法（BFS）**
  - 为避免结点的重复搜索可对结点进行标记
    - 开始时所有结点标记为0
    - 搜索时若新搜到的结点标记为0，则加入后继集，同时将其标记改为1
    - 搜索时若新搜到的结点标记为1，则忽略该点

道路与回路的判定(8)

深探法(DFS)

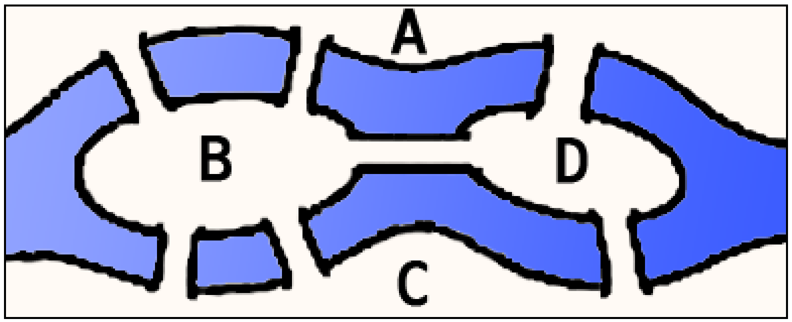
- DFS从结点v_0开始，只查找v_0的某一直接后继v_1
- 记下v_1的前趋v_0 ，然后再找v_1的某个未搜索过的后继v_2
- 依此类推
- 当从某个结点v_j无法再向下搜索时，退回到它的父亲v_{j-1}，然后再找 v_{j-1} 的另一个未查过的直接后继
- DFS的特点是尽量向下搜索，只有碰壁才回头

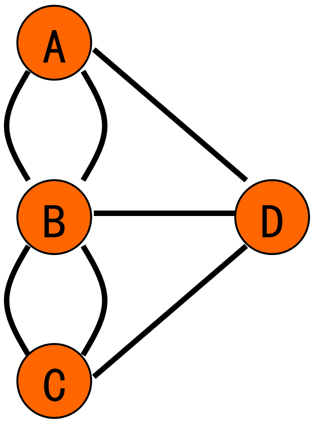
回头时要能回得去！



欧拉道路与回路

7桥问题（一笔画问题）：能否从某处出发，经过各桥一次且仅一次，最后返回原处？





如何求解？定义性质

- **欧拉道路（回路）**
  - 无向连通图G=(V,E)中的一条经过所有边的简单道路（回路）称为G的欧拉道路（回路）

即问在上图中是否存在欧拉回路？呼唤存在性定理？

欧拉道路与回路(2)

- **定理**
  - 无向连通图G有欧拉回路的充要条件是各顶点的度都是偶数。
  - 证明（充要条件？）
    - 必要性
      - 已知存在欧拉回路，要证明度都是偶数
      - 欧拉回路经过每边一次且仅一次
      - 沿该回路进入某点后，必定经由另一条边出去
      - 对每一点的进出次数相同
      - 因此，各点的度都是偶数

欧拉道路与回路(3)

- **证（续）：**
  - 充分性
    - “无向连通图G有欧拉回路的充要条件是各顶点的度都是偶数”（证明思路？）
    - 采用构造法证明

欧拉回路的特点

  - 从任意点v_0出发，构造G的一条简单回路C
    - 由于v_i的度为偶，所以不可能停留在某点$v_i \in V-v_0$上，而不能继续向前构造
    - 由于G是有穷图，因此最终一定能够回到v_0，构成简单回路C
  - 若C包含了G中的所有边，它即是G的欧拉回路

欧拉道路与回路(4)

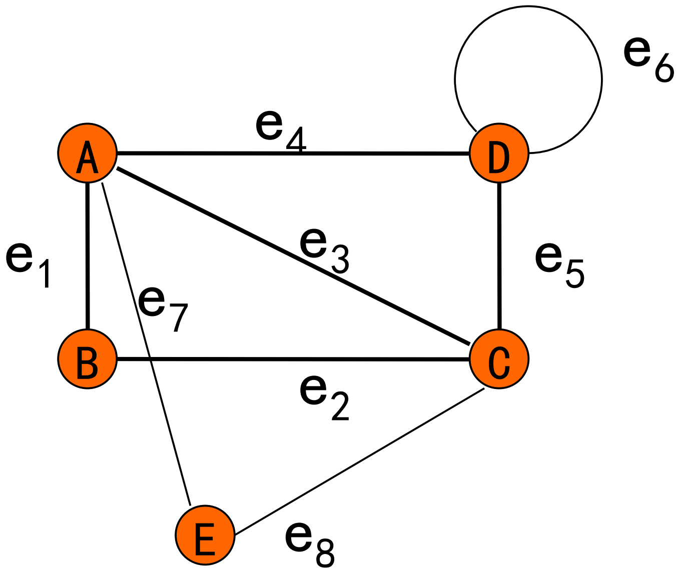
- **证（续）：**
  - 否则，从G中删去C的各边，得到G_1 = G-C
  - 显然G_1中每点的度仍然是偶数
  - 此时，G_1中一定存在度非0的顶点v_i ，它同时还是回路C经过的顶点（否则G是非连通图）
  - 这时，在v_i所在的G_1的连通支中，同理可构造简单回路C'，令C=C∪C'，得到包含边数比原来更多的简单回路
  - 继续上述构造过程，最终该简单回路必包含了所有边，即构造出了的一条欧拉回路
  - 充分性证毕“无向连通图G有欧拉回路的充要条件是各顶点的度都是偶数”

存在问题用构造法

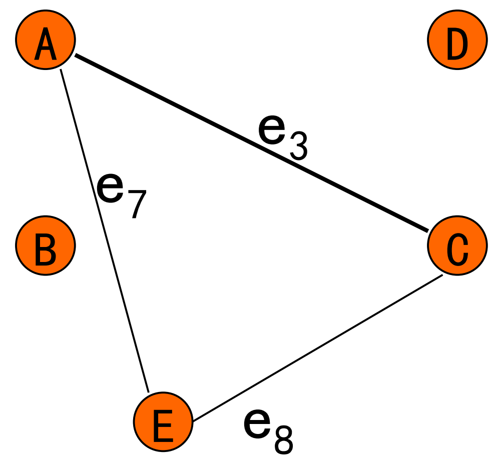
欧拉道路与回路(5)

化繁为简，靠算法不靠天才！

- **例**
  - 找出下图G中欧拉回路



G



G_1

从任意一点，如A开始，构造简单回路C=(e_1, e_2, e_5, e_6, e_4)
G_1=G−C中，A，C度非零，且为G中结点
从A开始构造简单回路C_1=(e_3, e_8, e_7)
则C ∪ C_1=（e_1, e_2, e_5, e_6, e_4 , e_3, e_8, e_7)是G的一条欧拉回路。

欧拉道路与回路(6)

欧拉回路存在性，然后？

- 全是偶度则欧拉回路，那存在奇度呢？

推论（欧拉道路存在性）

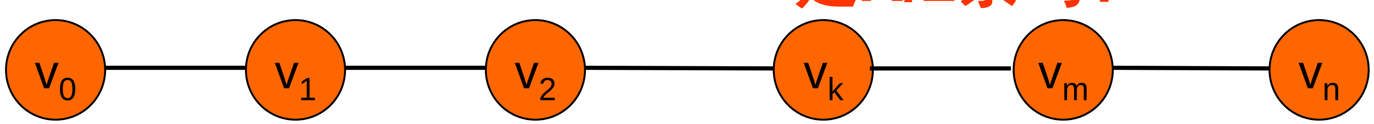
- 若无向连通图G中只有两个奇顶点，则G存在欧拉道路。
- 证明（思路？）
  - 构造法
  - 设这两个奇顶点是v_i，v_j，
  - 在图G中加入一条边(v_i，v_j)，则所有的顶点的度都为偶，此时其中必然存在一条欧拉回路。
  - 然后将边(v_i，v_j)去掉，可得从v_i到v_j的欧拉道路。

欧拉道路与回路(7)

- **例**
  - 设连通图中有K个度为奇数的顶点。证明E(G)可以划分成K/2条简单道路
  - 证明（基本思路？）
    - 构造法
    - 由图的性质可得，K是偶数
    - K个顶点两两配对，增添K/2条边，得到G’
    - G’ 中每点的度都是偶数，由定理，G’中有欧拉回路C
    - 在C中删去这K/2条边，便得到了K/2条简单道路，它们包含了原图G中的所有边
    - 即这K/2条简单道路就是E(G)的一个划分

互不相邻

是K/2条吗？



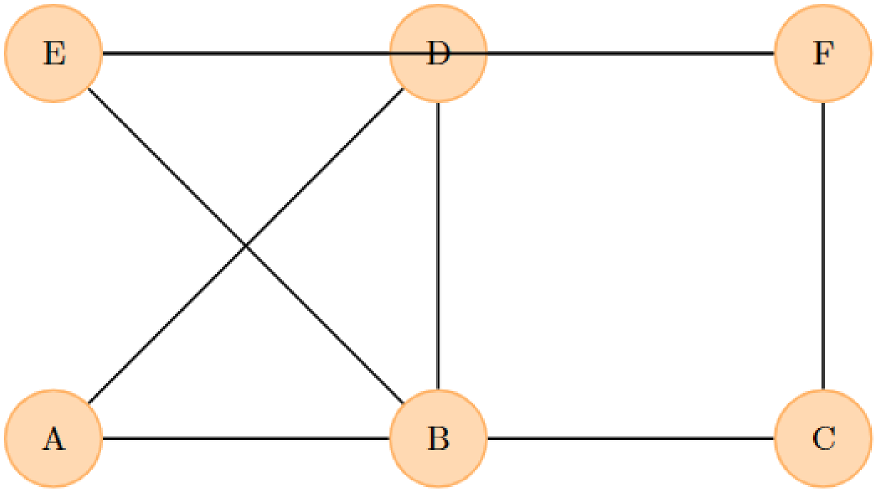
欧拉道路与回路(8)

- 研究了无向图欧拉回路/道路的存在性，那有向图呢？
- 推论
  - 若有向连通图G中各个结点的正度与负度相等，则G中存在有向欧拉回路。
  - 证明
    - 略

欧拉道路与回路(9)

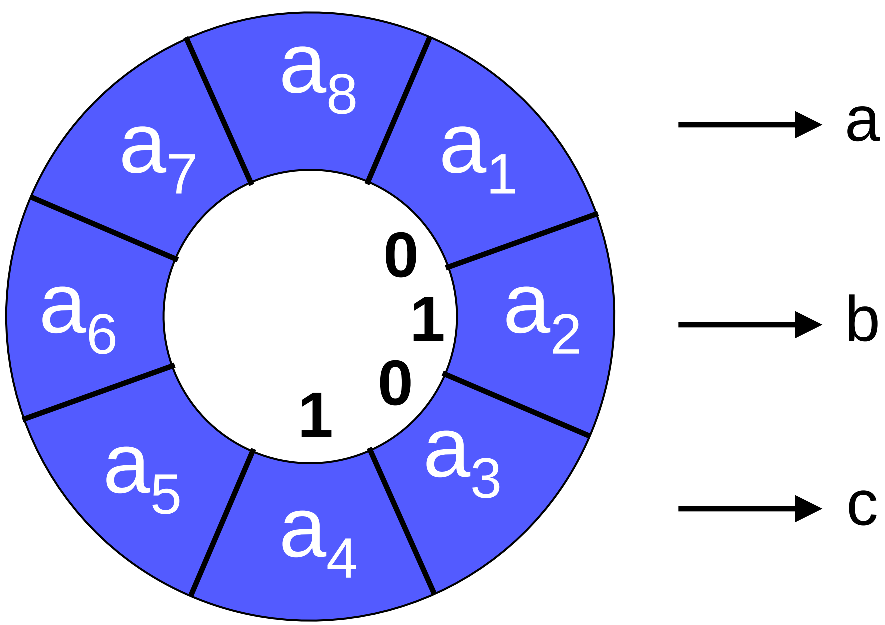
- 假设你需要设计一个简单的电路板，电路板上有6个端点，分别为A、B、C、D、E和F。这些端点之间的连接如下：

- 为了降低生产成本，你希望设计一种方法，使得电路板上的导线可以在不提起笔的情况下绘制。
  - 你希望找到一条欧拉道路。是否存在这样一条路径？



欧拉道路与回路(10)

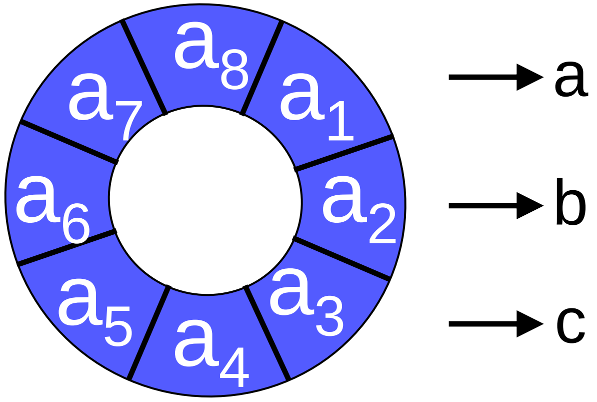
- **例**
  - 如下图，一个编码盘分成8个扇面，每个表示1或者0，其中a，b，c三个位置组成一组输出
  - 当圆盘按照逆时针旋转一格的时候，就会产生一组输出
  - 试问，圆盘上的数怎么排列，可以使圆盘旋转一周能不重复的输出000 ~ 111 这8个二进制数(不需要按顺序)？



欧拉道路与回路(11)

- 例（续）
  - 如何进行建模？

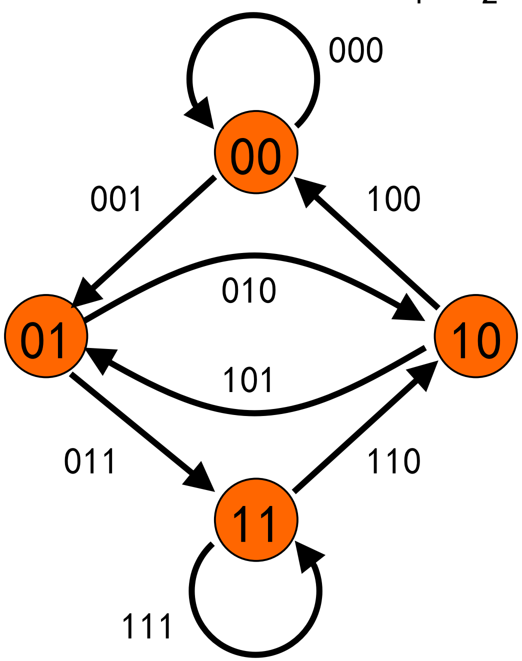
动态！

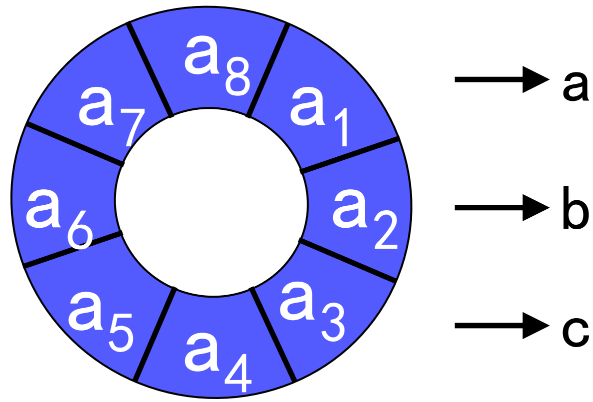


  - 每次旋转时，输出中有两位不变，如abc变成bcd
  - 结点：三位数字的前两位
    - 如这里的abc中的ab， bcd中的bc
    - 用0/1组成前两位ab，四种组合情况作为四个结点
  - 边：结点数字之间的变化关系
    - 每次旋转可以从一个结点ab到另一个结点bc
  - 有两种可能的旋转变化：c ＝ 0 ／ 1
    - ab输出为ab1或者ab0，即下一状态为b0或b1

欧拉道路与回路(12)

- 例（续）
  - 画出这种转换关系图（结点为a_1/a_2位置的数）





1. 八条边表示八个输出值
2. 每个结点的度都是偶数，因此存在欧拉回路
3. 任何一条欧拉回路都是一种可行方案
4. 例如：（上）上左右左　下下右上
5. 所有的a3构成序列"01011100"

主要内容 道路与回路

- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法

如何深入研究？
寻址特殊情况？
细分？ 性质？

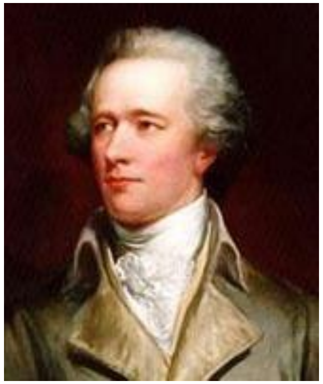
不断给出：定义、定理、证明
（注意相同点和不同点）

基本数学方法和创新思维

哈密顿道路与回路(1)

- **欧拉道路（回路）**
  - 无向连通图中的一条经过所有边的简单道路（回路）称为G的欧拉道路（回路）
- **“清华道路（回路）？”**
  - 过所有边/点的简单/初级道路？
- **哈密顿道路（回路）**
  - 无向图连通图的一条过全部结点的初级道路（回路）称为哈密顿(Hamilton)道路（回路）（H-道路，H-回路）
- **哈密顿图：含有 H-回路的图**

哈密顿



- 1805年生于爱尔兰都柏林
- 1823-24年间完成多篇几何学和光学的论文
- 年仅22岁的哈密顿被任命为敦辛克天文台的皇家天文研究员和三一学院的天文学教授
- 1834年，哈密顿发表了历史性论文“一种动力学的普遍方法”，成为动力学发展过程中的新里程碑
- 在1843年正式提出了四元数(quaternion)，这是代数学中一项重要成果
- 1836年，皇家学会因他在光学上的成就而授予皇家奖章
- 哈密顿家庭负担很重，为减轻父亲经济压力……
- 发表的论文一般都很简洁，别人不易读懂，但手稿却很详细，因而很多成果都由后人整理而得

哈密顿道路与回路(2)

- **哈密顿回路的研究范畴**
  - H回路是初级回路
  - 将任一图中的重边与自环去掉，得到的简单图的H回路的存在性与原图等价
  - 因此，一般考虑简单图…

如何进一步研究?

H道路存在性?

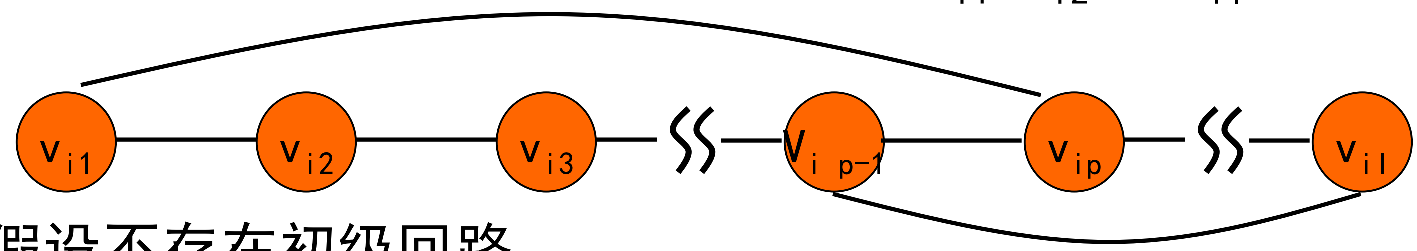
哈密顿道路与回路(3)

- **定理(什么情况下更可能存在H道路?)**
  - 若简单图G中任两点u,v, 恒有 $d(v)+d(u)\geq n-1$, 则G中存在Hamilton道路
  - 证明（基本思路？）：
    - 基本思路：构造法
    - (1) 证G连通（思考）
    - (2) 构造G中的H道路
    - **设P为G的长为l的极长初级道路，P=(v_{i1}, v_{i2}, …v_{il})**，则与v_{i1}和v_{il}相邻的点都在P上
    - 若l=n, 则P为H道路

道路不断加点?

哈密顿道路与回路(4)

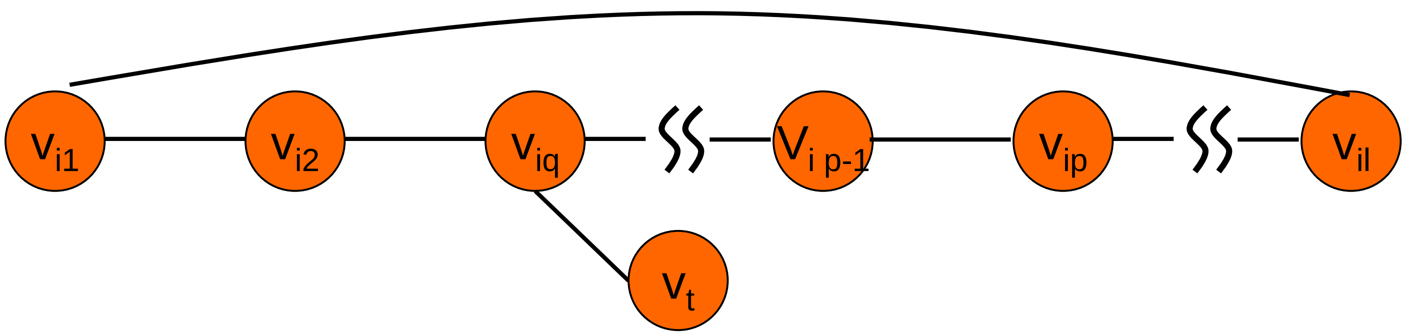
- **证（续）**
  - 若 $l<n$，可证明G中一定存在经过结点 $v_{i1}, v_{i2}, \cdots v_{il}$ 的初级回路C



  - 假设不存在初级回路
  - 设 $(v_{i1}, v_{ip}) \in E(G)$，则不能有 $(v_{i,p-1}, v_{il}) \in E(G)$，否则删除 $(v_{i,p-1}, v_{ip})$，上图形成一个回路
  - 设 $d(v_{i1})=k$，则 v_{il} 至少与这k个点的左邻居不能相邻，即 $d(v_{il}) \leqslant l-k$，考虑 v_{il} 本身无自环，则 $d(v_{il}) \leqslant l-k-1$
  - 则 $d(v_{i1})+d(v_{il}) \leqslant l-1 < n-1$，与已知 $d(v)+d(u) \geq n-1$ 矛盾
  - 因此 $l<n$，则存在回路C

哈密顿道路与回路(5)

- **证（续）**
  - 若l<n， 已证明G中一定存在经过结点$v_{i1}, v_{i2}, \cdots v_{il}$的初级回路C。



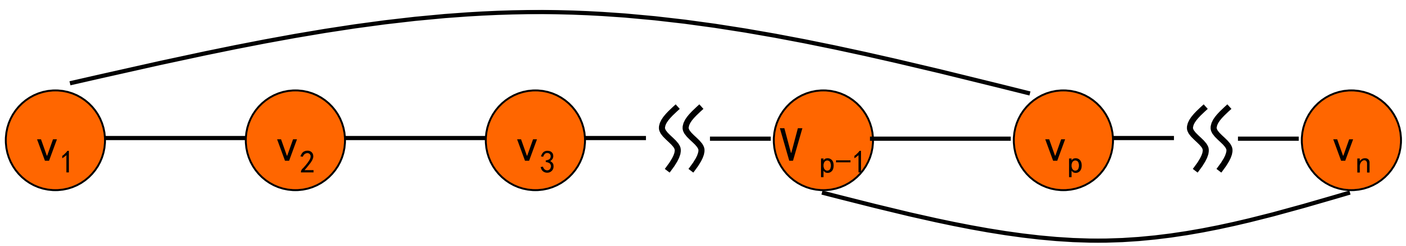
  - 设$C=(v_{i1}, v_{i2}, \cdots v_{il}, v_{i1})$， 由于G连通，故存在C之外的结点$v_t$ ，必然与C中的某点v_{iq}相邻
  - 可构造长为l+1的初级道路 $P=(v_t, v_{iq}, v_{iq+1}, \cdots v_{il}, v_{i1} \cdots v_{iq-1})$,
  - 如此构造直到l=n, 从而P为H道路

H道路存在性充分条件：

$$\boxed{d(v)+d(u)\geq n-1}$$

哈密顿道路与回路(6)

- **推论**
  - 如简单图G中任两点u, v，恒有 $d(v)+d(u)\geq n$ 则G中存在Hamilton回路。
    - 由定理可知，G中存在哈密顿道路，设H为$v_1, v_2, \cdots, v_n$



    - 假设H不是回路
    - 设$d(v_1)=k$，则$d(v_n)\leqslant n-k-1$（v_n无自环）
    - 则$d(v_n)+d(v_1)\leqslant n-1 < n$，与已知矛盾
    - 因此存在初级回路C，即H回路

自己能发明出来吗？

  - 如简单图G中任意点v，恒有 $d(v)\geq \frac{n}{2}$ ，则G中存在Hamilton回路。

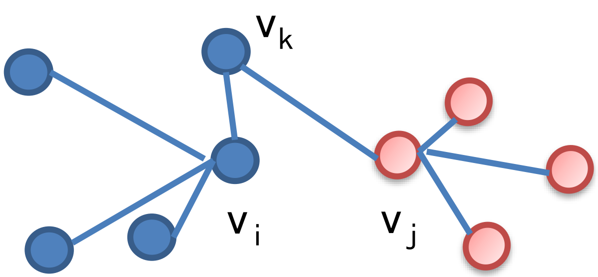
哈密顿道路与回路(7)

- **例**
  - n（n>2）个人中，设任意两人合在一起能认识其余n-2个人，则他们可以站成一排，使相邻者相识
  - 证明
    - 图论建模
    - 每个人看成一个结点
    - 人之间的相识关系作为边
    - 那么以上问题就是这样构造出来的图中存在一条哈密顿道路
    - “任意两人合在一起能认识其余n-2个人”？

哈密顿道路与回路(8)

- 证（续）：
  - 根据题意，任意两个结点v_i，v_j，合在一起能认识其余n−2个人，即有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n-2$
  - 若v_i，v_j认识，则有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$；
  - 若v_i，v_j不认识，则任意v_k必同时认识v_i和v_j
    - 否则v_i，v_k合起来不认识v_j，与已知矛盾
    - 因此由n>2，除v_i，v_j外至少还有1人v_k，即存在1人v_k 同时认识v_i，v_j

$$\Rightarrow \quad d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$$



  - 根据定理，存在哈密顿道路

哈密顿道路与回路(9)

- 引理2.4.1　呼唤：H回路存在性的充要条件

$$d(v)+d(u)\geq n$$

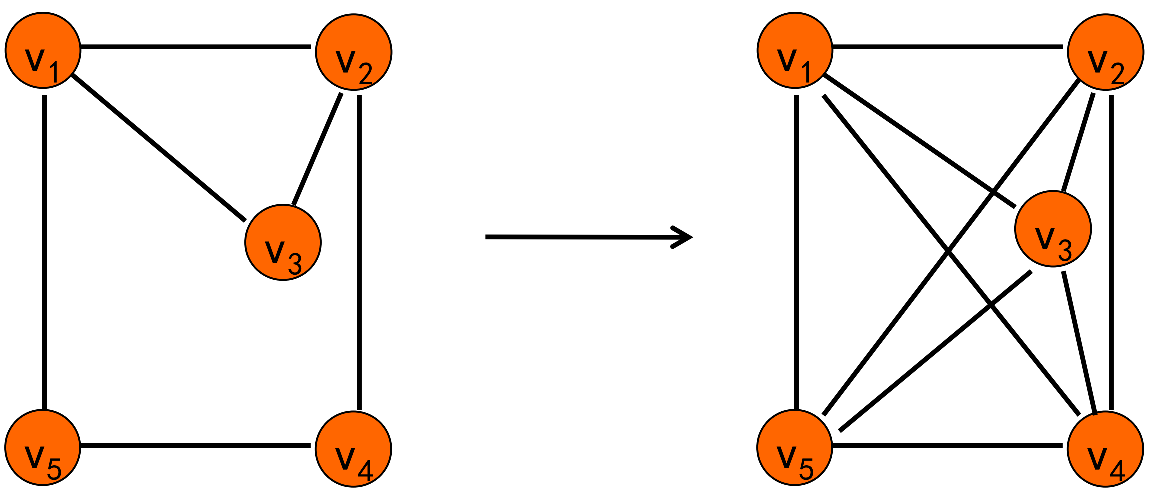
- 简单图G中v_i和v_j不相邻，且$d(v_i)+d(v_j)\geqslant n$，则G存在H回路的充要条件是$G+(v_i,v_j)$有H回路
- 证：（必要性显然，下面证明充分性）
  - 由$G+(v_i,v_j)$存在H回路，考虑H回路是否包含边(v_i,v_j)，若不包含则已得证
  - 若包含(v_i,v_j)，删去此边(v_i,v_j)，G中存在以v_i,v_j为端点的H道路
  - 根据条件$d(v_i)+d(v_j)\geqslant n$，则H道路可以扩展为H回路，G存在H回路
- 充分性得证。

能否不断增加这样的边？
给出定义！

哈密顿道路与回路(10)

◆ 闭合图

- 若v_i和v_j是简单图G的不相邻结点，满足$d(v_i)+d(v_j) \geqslant n$，则令$G'=G+(v_i, v_j)$，对G'重复上述过程，直到不再有这样的结点对。最终得到的图称为G的闭合图，记为C(G)



存在性，唯一性？

哈密顿道路与回路(11)

- 引理2.4.2
  - 简单图G的闭合图C(G)是唯一的
  - 证明
    - 设C_1(G)和C_2(G)是G的两个闭合图
    - $L_1=\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$， $L_2=\{a_1, a_2, \cdots, a_s\}$是$C_1$(G)和$C_2$(G)中新加入的边集合
    - 需证$L_1=L_2$
    - 假设$L_1 \neq L_2$，为不失一般性，假设$e_{i+1}=(u, v) \in L_1$是构造时第一条不属于L_2的边，令$H=G \cup \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$，则H是$C_2$(G)的子图
    - 由于构造L_1时加入了e_{i+1}，则H有$d(u)+d(v) \geqslant n$，但是$(u,v) \notin C_2(G)$，与C_2(G)是G的闭合图矛盾

哈密顿道路与回路(12)

定理

- 简单图G存在哈密顿回路的充要条件是其闭合图存在哈密顿回路
- 证明：
  - 设C(G)=G∪L，L={e_1, e_2, …, e_t}
  - 由引理2.4.1和2.4.2
  - G有H回路 ⇔G+e_1有H回路⇔…⇔ G∪L有H回路
  - 由于C(G)唯一，定理得证。

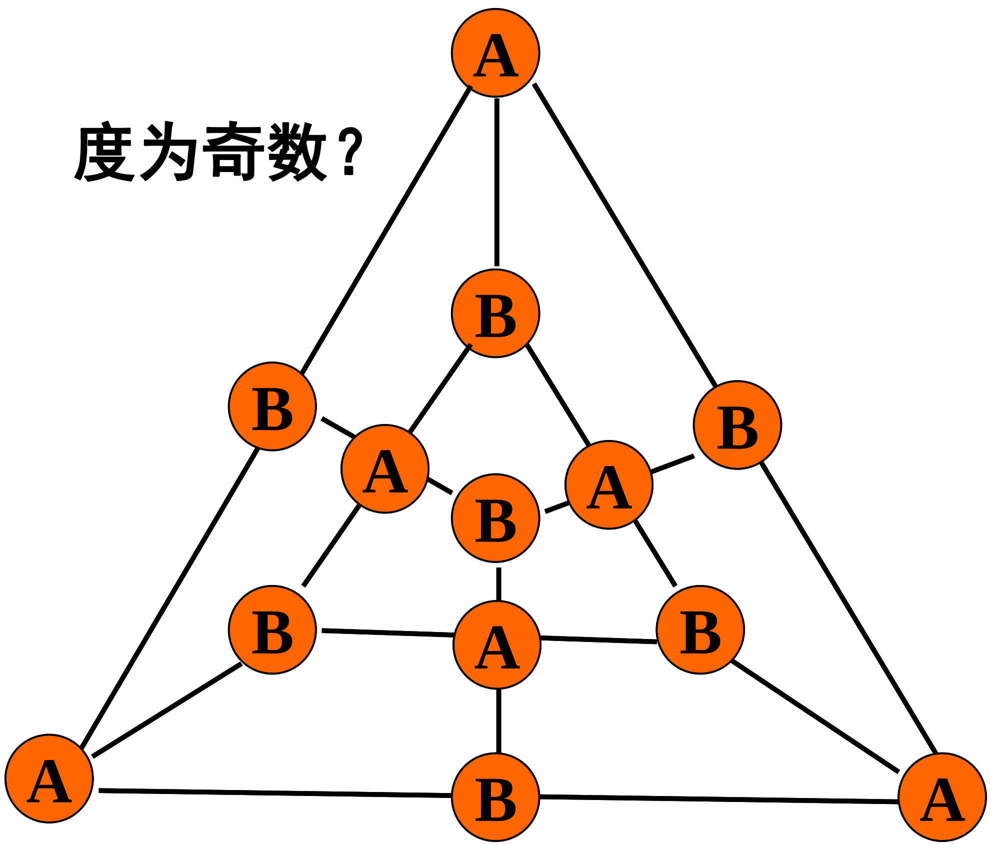
哈密顿道路与回路(13)

- **回顾**
  - 若简单图G中任两点u, v，恒有d(u)+d(v) ≥n-1，则G中存在Hamilton道路
  - 若简单图G中任两点u, v，恒有d(u)+d(v) ≥n，则G中存在Hamilton回路
  - 若简单图G中任意一点v，有d(v) ≥n/2，则G中存在Hamilton回路
- **推论**
  - 若简单图G(n>2)的闭合图是完全图，则G有Hamilton回路

哈密顿道路与回路(14)

- 例（脑筋急转弯）
  - 证明下图没有H回路

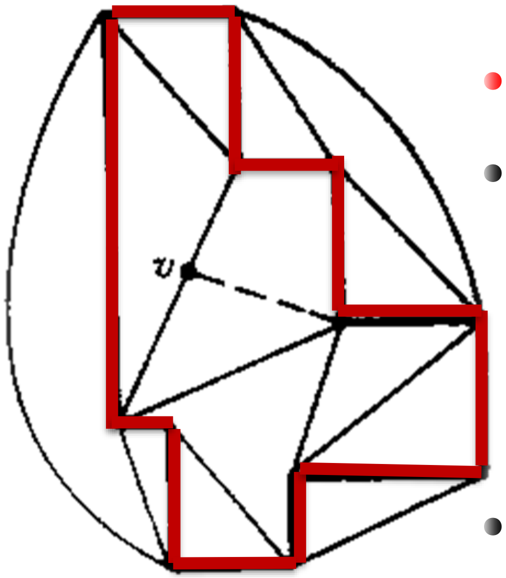
度为奇数？



- 若给某个结点标记A，其相邻结点标记B，B的邻结点标为A，恰好把图标完
- 若G中有H回路，则必是ABAB…AB的形式，但由于A与B数目不同，所以不存在H回路

哈密顿道路与回路(15)

- **例：4色猜想……**
  - 若一个地图中有H回路，则可用4种不同颜色对域进行着色，使相邻域(共边)颜色不同。



- **找到图中一个H回路（红粗线表示）**
- **H将图分成回路内外两部分**
- **每部分内都不存在三个(以上)区域互相相邻的情形**
  - **否则会存在如图中v这样的点！**
  - **存在这样的点与H是哈密顿回路矛盾**
- **因此回路内或外都只用两种颜色可以区分**

哈密顿道路与回路(16)

- 哈密顿回路与欧拉回路

回路名称	欧拉回路	哈密顿回路
回路类型?	简单回路	初级回路
回路定义?	过所有边	过所有点
如何判断?	有充要条件	无直接判断的充要条件

哈密顿道路与回路(17)

- 哈密顿回路与欧拉回路

回路名称	欧拉回路	哈密顿回路
回路类型?	简单回路	初级回路
回路定义?	过所有边	过所有点
如何判断?	有充要条件	无直接判断的充要条件

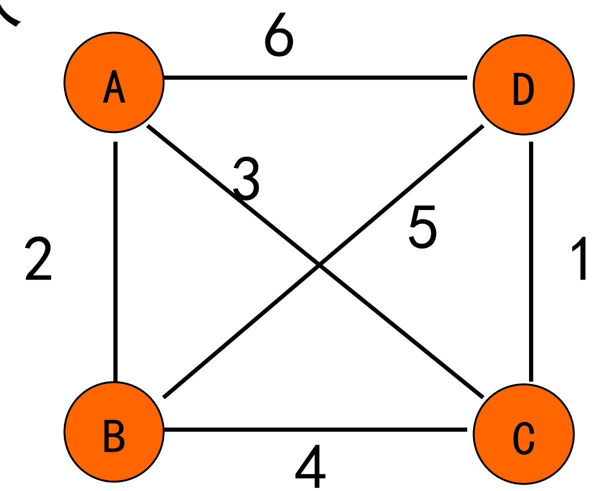
存在性之后呢？ 唯一性？最优回路？

旅行商问题与分支定界法

游览下述城市并返回，
如何规划路线?

北京、广州、天津、厦门、
青岛、深圳、大连、三亚

- 旅行商问题
  - 给定一个**正权完全图**，求其长最短的H 回路

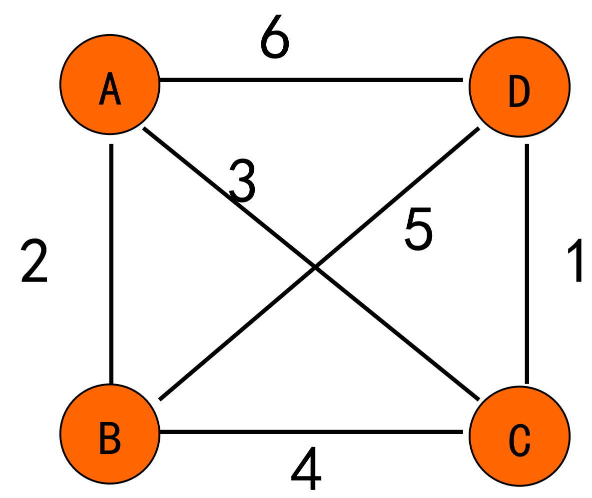


最短的H回路是
(A,B,D,C,A)，长为11

旅行商问题与分支定界法(2)

- **求解旅行商问题**
  - 枚举法
    - n个结点的完全图有多少个不同的H回路？

$$\frac{1}{2}(n-1)!$$



    - 完全穷举复杂度太大
  - 求解精确解的最佳方法
    - 分支定界法
    - 考虑最短的H回路是(A,B,D,C,A)，长为11？
    - 先选较短边，探测次短边，利用现有“最佳”路径的结果！

旅行商问题与分支定界法(3)

分支定界法

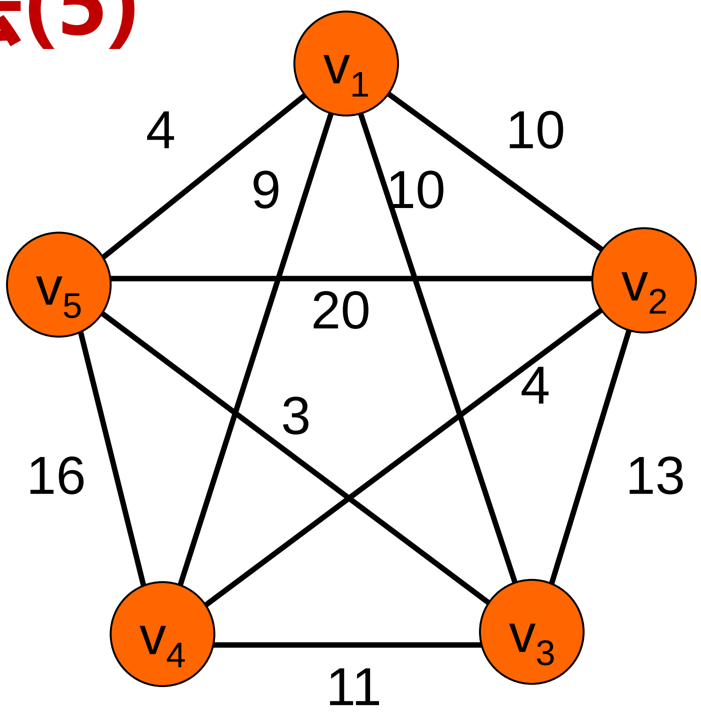
1. 将权由小到大排序，初始界为d_0足够大。

$$\begin{array}{c} l_{ij} \\ e_{ij} \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 9 & 10 & 10 & 11 & 13 & 16 & 20 \\ e_{35} & e_{24} & e_{15} & e_{14} & e_{12} & e_{13} & e_{34} & e_{23} & e_{45} & e_{25} \end{pmatrix}$$

2. 在边权序列中依次选边进行深探，直到选取n条边，记为s，判断是否构成H回路
   - 每个结点标号只出现两次
   - 若构成H回路，用d(s)替换d_0，结束。
3. 若尚未构成H回路：继续深探
   - 依次删除当前s中最长的边，加入后面第一条待选边，进行深探。若它是H回路，且d(s)< d_0 ，则用d(s)替换d_0 ，转4;否则转3
4. 退栈过程
   - 不能再深探或d(s)>= d_0时，需要退栈
   - 若栈空则结束，最佳值为d_0 ;否则，如果新分支的d(s)>= d_0，继续退栈；若d(s)< d_0 则转3

旅行商问题与分支定界法(5)

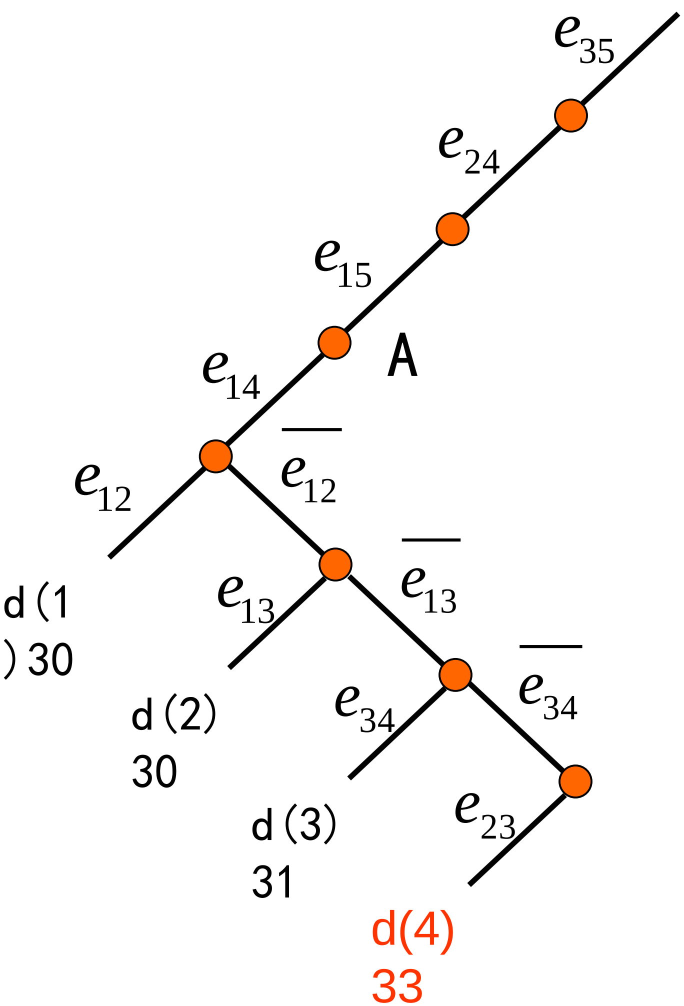
- 例：求图的最短H回路

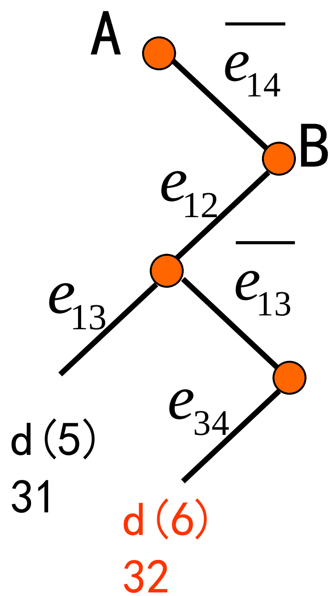


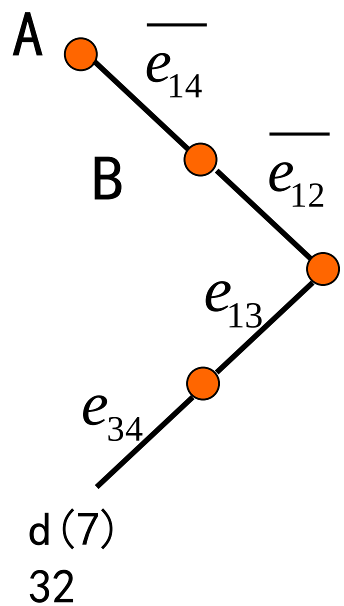
  - 使用分支定界法
  - 将边权排序后可得
  - $$\begin{array}{c} l_{ij} \\ e_{ij} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 9 & 10 & 10 & 11 & 13 & 16 & 20 \\ e_{35} & e_{24} & e_{15} & e_{14} & e_{12} & e_{13} & e_{34} & e_{23} & e_{45} & e_{25} \end{pmatrix}$$
  - 使用深探法构造分支

旅行商问题与分支定界法(6)

$$\begin{array}{c} l_{ij} \\ e_{ij} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 9 & 10 & 10 & 11 & 13 & 16 & 20 \\ e_{35} & e_{24} & e_{15} & e_{14} & e_{12} & e_{13} & e_{34} & e_{23} & e_{45} & e_{25} \end{pmatrix}$$



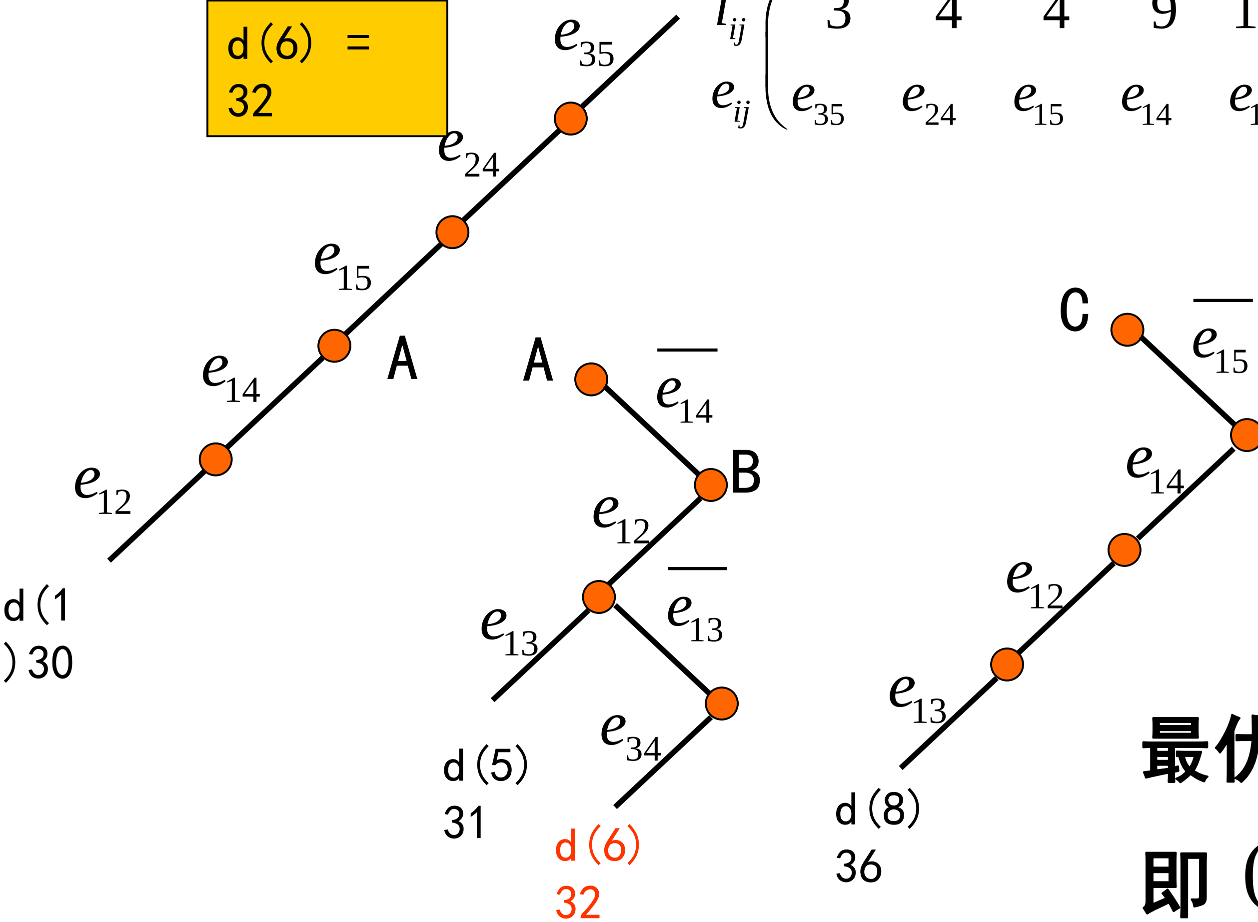




旅行商问题与分支定界法(7)

d(6) = 32

$$\begin{array}{c} l_{ij} \\ e_{ij} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 9 & 10 & 10 & 11 & 13 & 16 & 20 \\ e_{35} & e_{24} & e_{15} & e_{14} & e_{12} & e_{13} & e_{34} & e_{23} & e_{45} & e_{25} \end{pmatrix}$$



最优解是d(6)=32

即 $(e_{35}, e_{51}, e_{12}, e_{24}, e_{43})$

旅行商问题与分支定界法(8)

分支定界法特点

$$\begin{array}{c} l_{ij} \\ e_{ij} \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 9 & 10 & 10 & 11 & 13 & 16 & 20 \\ e_{35} & e_{24} & e_{15} & e_{14} & e_{12} & e_{13} & e_{34} & e_{23} & e_{45} & e_{25} \end{pmatrix}$$

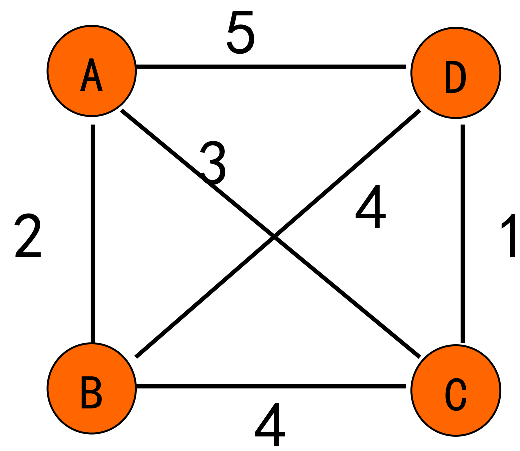
- 搜索过程实质
  - 不断构造分支与确定新界值
  - 不搜索大于界值的分支
  - 最后得到的界值是最佳解吗？

搜索多少次？

- 复杂度
  - 由于使用“剪枝”，该法显然比枚举法优越
  - 最坏情况下（不断尝试），复杂度仍为0(n!)
  - 怎么办呢？？？

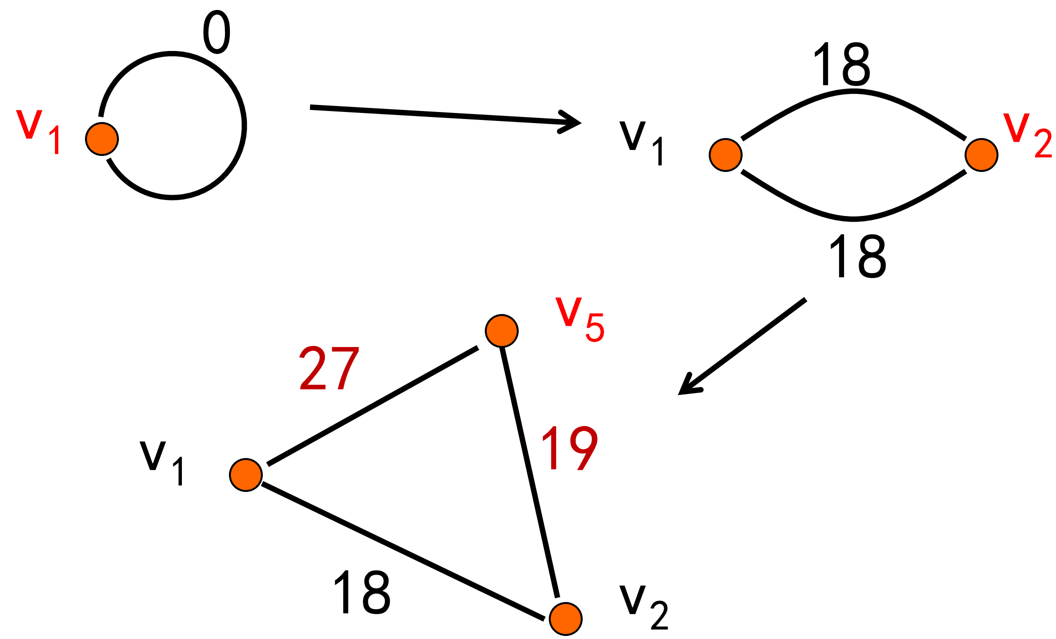
根源：每次尝试均不敢肯定！

旅行商问题与分支定界法(9)



- **例：求旅行商问题近似解：“便宜”算法**
  - 已知图G的权矩阵，使用便宜算法求解其旅行商问题的近似解

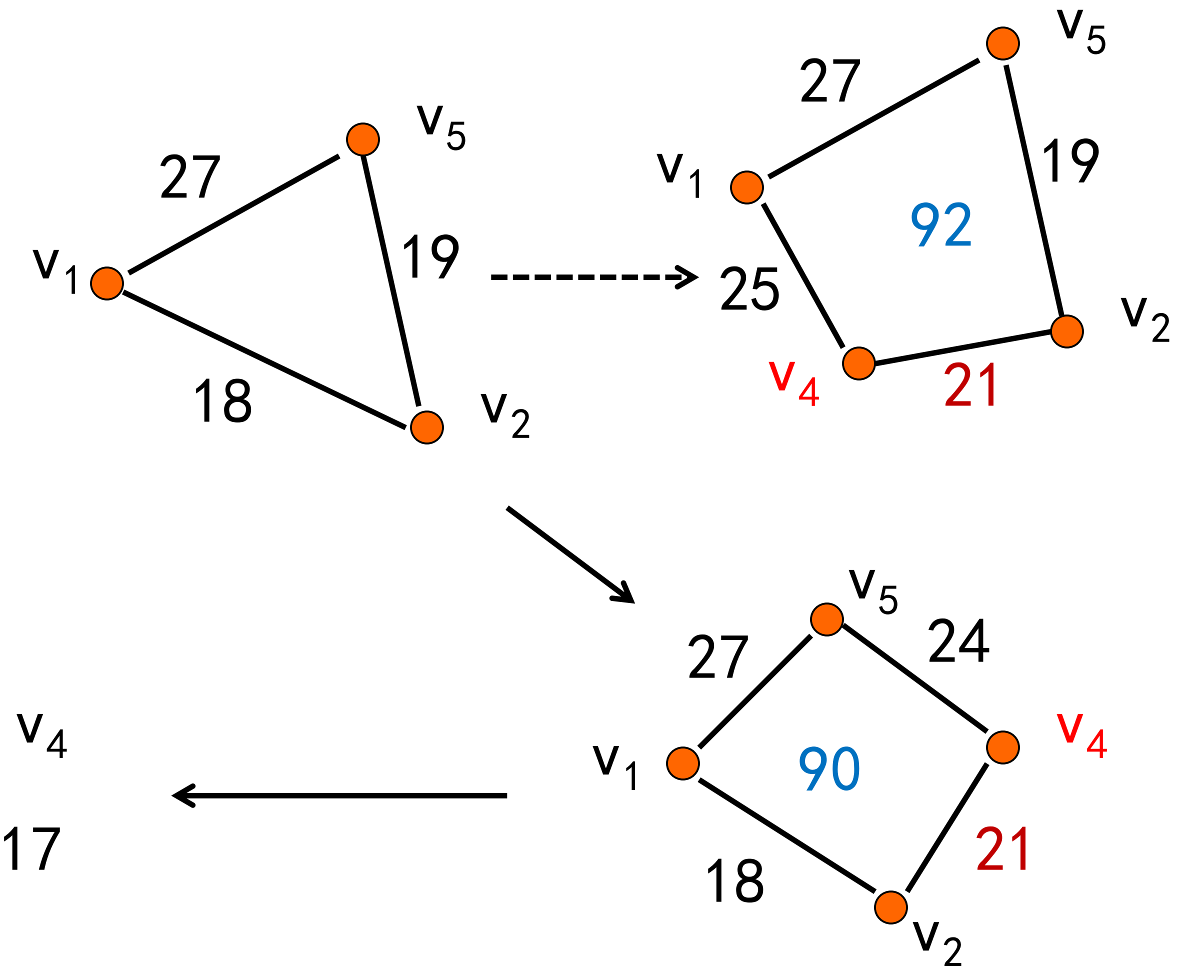
$$\begin{bmatrix} 0 & 18 & 35 & 25 & 27 \\ 18 & 0 & 23 & 21 & 19 \\ 35 & 23 & 0 & 17 & 28 \\ 25 & 21 & 17 & 0 & 24 \\ 27 & 19 & 28 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

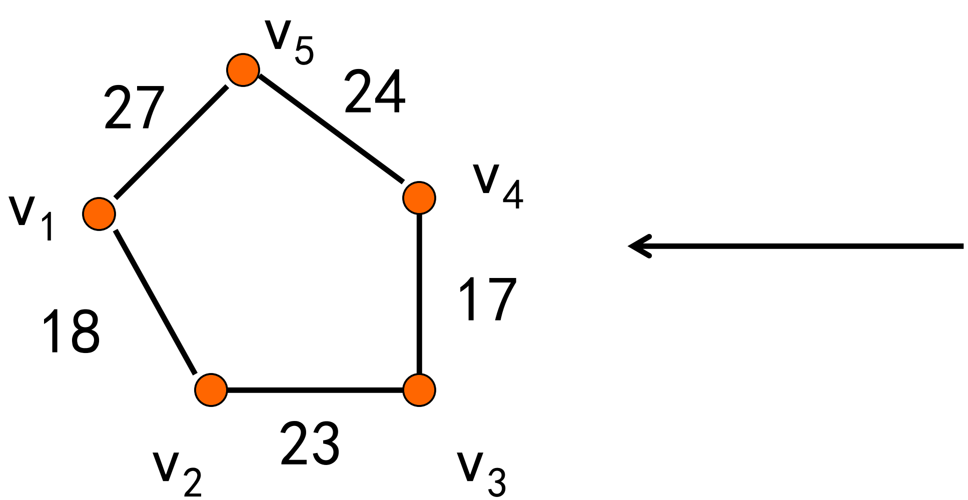


旅行商问题与分支定界法(10)

- **例（续）**

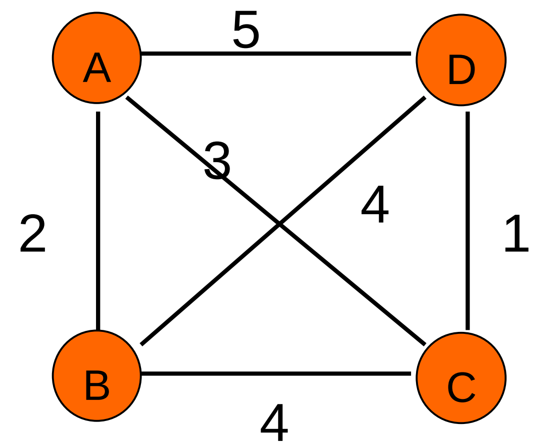
$$\begin{bmatrix} 0 & 18 & 35 & 25 & 27 \\ 18 & 0 & 23 & 21 & 19 \\ 35 & 23 & 0 & 17 & 28 \\ 25 & 21 & 17 & 0 & 24 \\ 27 & 19 & 28 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$



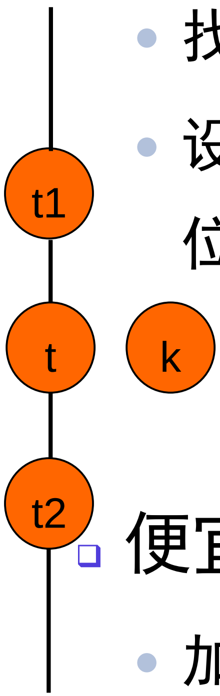


旅行商问题与分支定界法(11)

求旅行商问题近似解——“便宜”算法



- 构造不断扩充的初级回路T
  - 最初T是一个自环
  - 找与T最近的结点k，将k插入T
  - 设k与T中的t最近，具体插入t的位置，依据k插入后回路T长度增量的大小而定



若$w(k,t)+w(k,t_1)-w(t,t_1) \le w(k,t)+w(k,t_2)-w(t,t_2)$

则k插到t与t_1之间；否则k在t与t_2之间

- 便宜算法的计算复杂度为$O(n^2)$
  - 加入一个点O(n)（寻找n+更新n)），加入n个点

循环n次

旅行商问题与分支定界法(12)

- **便宜算法是启发式算法**
  - 启发式规则：加入当前最近的节点（距离当前回路圈）
  - 现在的决定是局部最优还是全局最优？
  - 将来还会修改现在的决定吗？

发明定理：
近似性定理

- **定理（便宜算法的性能）**
  - 设正权完全图的边权满足三角不等式，其旅行商问题的最优值为Q，便宜算法的值是T，则T/Q<2。

旅行商问题与分支定界法(13)

- 分支定界法与“便宜”算法
  - 质量（性能）
    - 从理论上讲“便宜”算法近似程度并不理想，便宜值T与最优值Q相比只能保证T/Q<2
    - 实际中与最优解非常接近：上例中，便宜算法的解是109，使用分支定界法是107
  - 效率（计算复杂度）
    - “便宜”算法大大优于分支定界法：$O(n^2)$ vs. $O(n!)$

实际生活的例子：游览下述城市并返回，如何规划路线（北京、广州、天津、厦门、青岛、深圳、上海）？

考虑哪些因素？　距离、列车时刻、停留时间……

主要内容 道路与回路

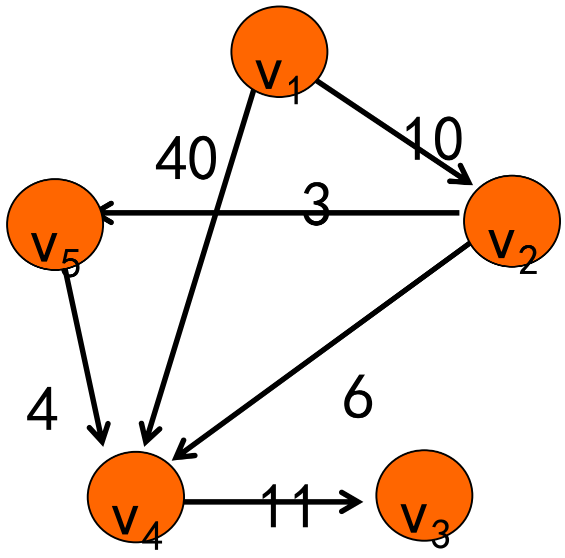
- 欧拉、哈密顿、旅行商……
- 最短路径
- 关键路径
- 中国邮路

假如我是欧拉，如何写书？
特殊的道路？
存在性、唯一性……

问题提出-定义定理-求解算法-特色分析
基本数学方法和创新思维

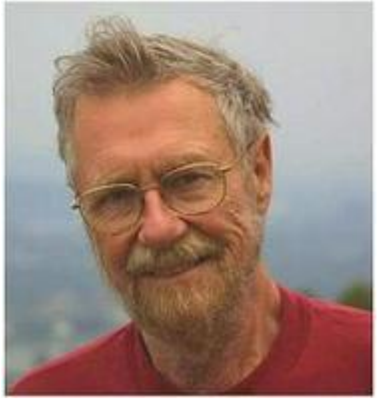
最短路径 (1)

- 最短路径可研究的情况包括
  - 某两点之间的最短路
  - 某点到其它各个结点的最短路
  - 任意两点之间的最短路
- 边的权值可分为
  - 均为1
  - 正数
  - 任意实数
- 这里仅讨论权值为正的情况下某点到其他各个结点最短路径的问题



广探法&深探法？

最短路径 (2)



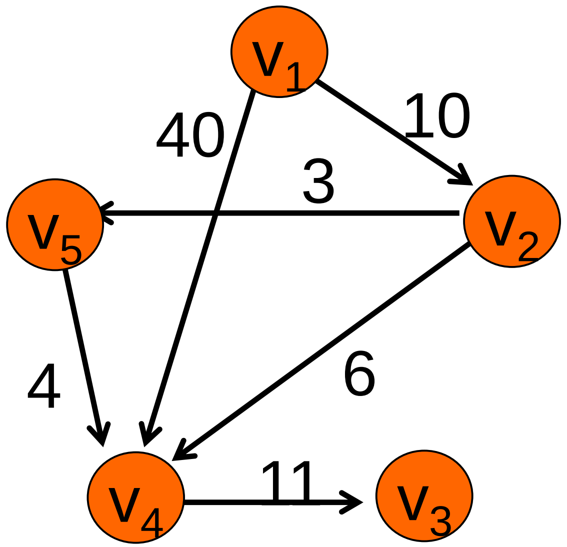
- 荷兰人Edsger Wybe Dijkstra
  - 提出“goto有害论”；
  - 提出信号量和PV原语；
  - 解决了有趣的“哲学家聚餐”问题；
  - 最短路径算法(SPF)的创造者(Dijkstra 算法)；
  - 第一个Algol 60编译器的设计者和实现者；
  - THE操作系统的设计者和开发者；
- 我们这个时代最伟大的计算机科学家
  - 程序设计大师Donald E. Knuth
  - 《计算机程序设计的艺术》
- 1972年获得图灵奖

最短路径 (3)

- 定义：路径长度
  - v_1到v_i的一条路径P(i)长度记为π(i)

$$\pi(i) = \sum_{e \in P(i)} w(e)$$

v_1->v_3最短路?子路径?



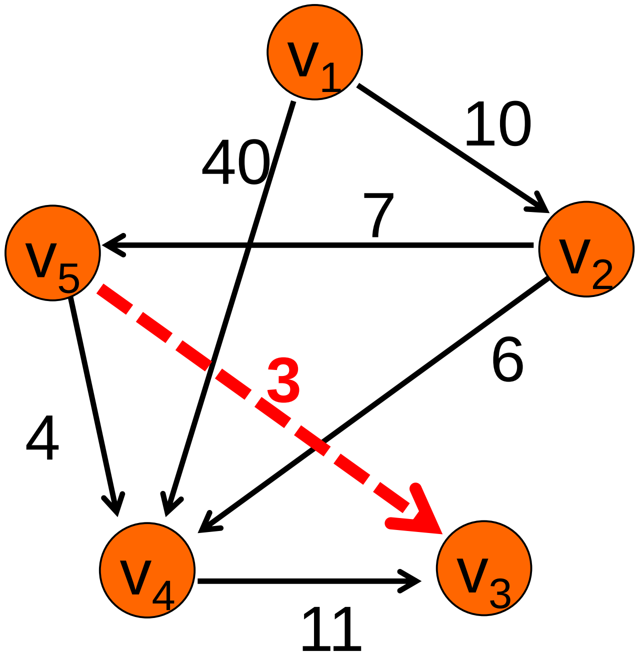
- 引理1
  - 若P(i)是v_1到v_i的最短路，$v_j \in p(i)$，则P(i)的子路径P(j)也是v_1到v_j最短路。
  - 证明：
    - 若P(j)不是最短路，即存在最短路P'(j)，使得 $\pi'(j) < \pi(j)$

      这样 $$\pi'(i) = \pi'(j) + \pi(j,i) < \pi(i) = \pi(j) + \pi(j,i)$$

      与P(i)是最短路矛盾。

最短路径 (4)

- 引理2. 6. 2
  - 对正权图中任一条最短路径，其总长度大于其局部路径长度。
  - 证：由于正权图中每一条边的权值为正，结论显然成立。



- 从两个引理可知
  - 最短路的子路径必然是最短路
  - 最短路不断增长构成新的最短路时，权值不断增大
- 算法设计核心
  - v_1到v_3的最短路依赖哪些节点呢？

如果？ v_4依赖谁？

最短路径 (5)

- 最短路径算法

核心是先算谁?

- 若已知从v_1到各个结点的最短路径$P(i_k)$ ($k=1, 2, \cdots, n$)，满足

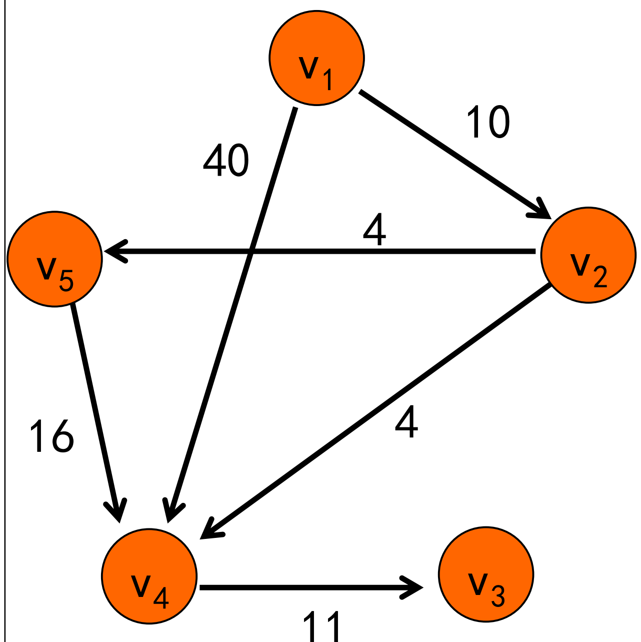
$$\pi(1)=\pi(i_1)\le\pi(i_2)\le\cdots\le\pi(i_n)$$

- 由引理可知，若$l<k$，则：
  - $P(i_l)$可能是$P(i_k)$的子路径
  - $P(i_k)$不可能是$P(i_l)$的一部分，即计算$P(i_l)$时不用考虑$P(i_k)$
- 思路：不断找距v_1最近的节点l（通过更近的点j）

$$\pi(i_l)=\min_{i\le j<l}(\pi(i_j)+W_{i_j i_l})$$

最短路径 (6)

- 例
  - 使用我们AI算法求下图中v_1到其余各点的最短路径



还会变吗？其他数呢？

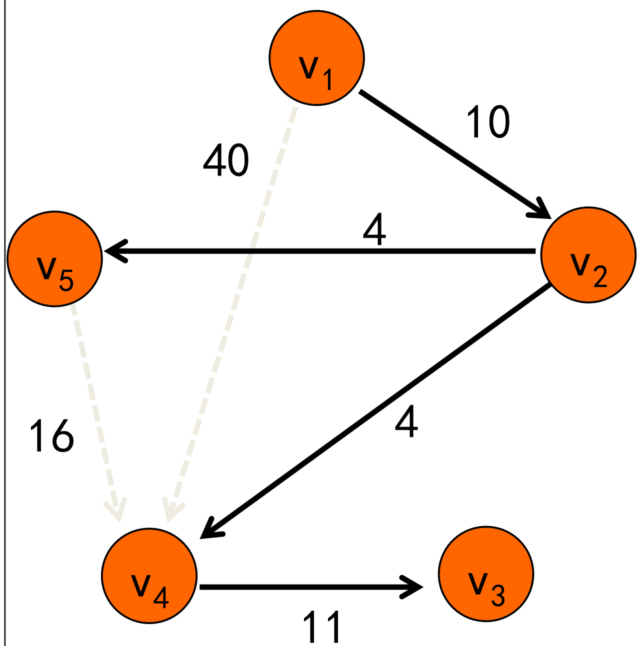
π (2)	π (3)	π (4)	π (5)	–S	访问
10	∞	40	∞	2, 3, 4, 5	2
10	∞	14	14	3, 4, 5	4
10	25	14	14	3, 5	5
10	25	14	14	3	3
10	25	14	14	Φ	–

特点：每个节点仅被访问一次而不迭代

需要记录：每个节点的前驱

最短路径 (6)

- 例
  - 使用我们AI算法求下图中v_1到其余各点的最短路径



还会变吗？其他数呢？

π（2）	π（3）	π（4）	π（5）	–S	访问
10	∞	40	∞	2, 3, 4, 5	2
10	∞	14	14	3, 4, 5	4
10	25	14	14	3, 5	5
10	25	14	14	3	3
10	25	14	14	Φ	–

构成最短路径树：
沿着树到达任何节点均为最短路径（从v_1开始）

最短路径 (7)

◆ Dijkstra算法（1959）

1. 置 $\overline{S}=\{2,3,\cdots,n\},\pi(1)=0,\pi(i)=\begin{cases} l_{1i} & i\in\Gamma_1^+ \\ \infty & other \end{cases}$

$\overline{S}$ 为尚未找到最短路径的节点集

访问最近节点j

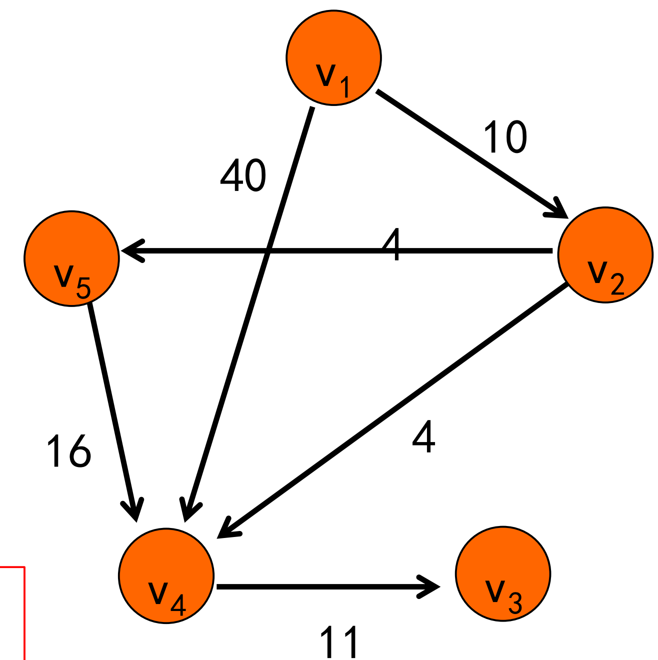
2. 在 $\overline{S}$ 中寻找j满足 $\pi(j)=\min\limits_{i\in\overline{S}}\pi(i),\overline{S}\leftarrow\overline{S}-\{j\}$

若 $\overline{S}=\Phi$，结束；否则转3。

3. 对全部 $i\in\overline{S}\cap\Gamma_j^+$ 置：

$\pi(i)\leftarrow\min(\pi(i),\pi(j)+l_{ji})$

转2　更新*j*的直接后继(各*i*)的距离并记录前驱



Dijkstra算法复杂度？ O(n²)

最短路径 (8)

- 边权为1时v_1到各点的最短路径
  - 使用广度优先算法

1. 置 $\pi(1)=0, \pi(i)=\infty, i \geq 2$

   $k=0, S=\{1\}, S_0=\{1\}$

   第0步访问根节点

2. 第k+1步

   置 $S_{k+1}=\Gamma^{+}_{S_k} \cap \overline{S}$

   第k+1层子节点

   置 $\pi(i)=k+1, i \in S_{k+1},$

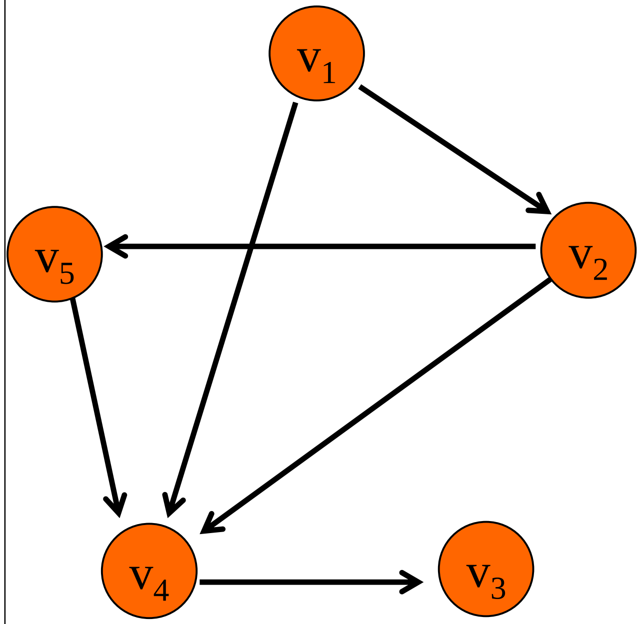
   置 $S=S \cup S_{k+1}$

   已经访问的全部节点

3. 若 $|S|=|V(G)|$ ，结束；否则 $k \leftarrow k+1$ ，转2

最短路径 (9)

- 例
  - 求下图中v_1到其余各点的最短路径长度

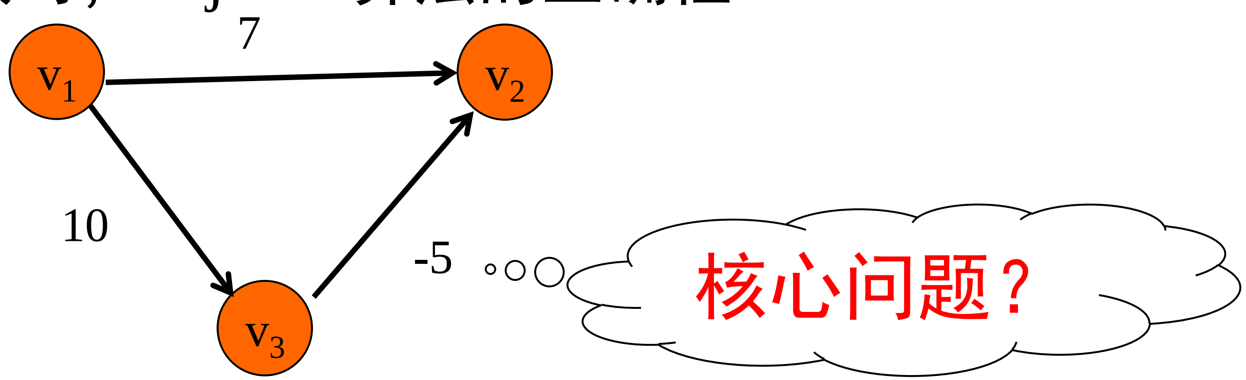


π(2)	π(3)	π(4)	π(5)	k	S	S_{k+1}
1	∞	**1**	∞	**0**	**1,2,4**	**2,4**
1	**2**	**1**	**2**	**1**	**1,2,3,4,5**	**3,5**

Dijkstra与BFS适用性区别？
假如我是欧拉，如何写书？
Dijkstra算法不足之处？

最短路径 (10)

- 边权任意时最短路
  - 边权存在负数时，Dijkstra算法的正确性？



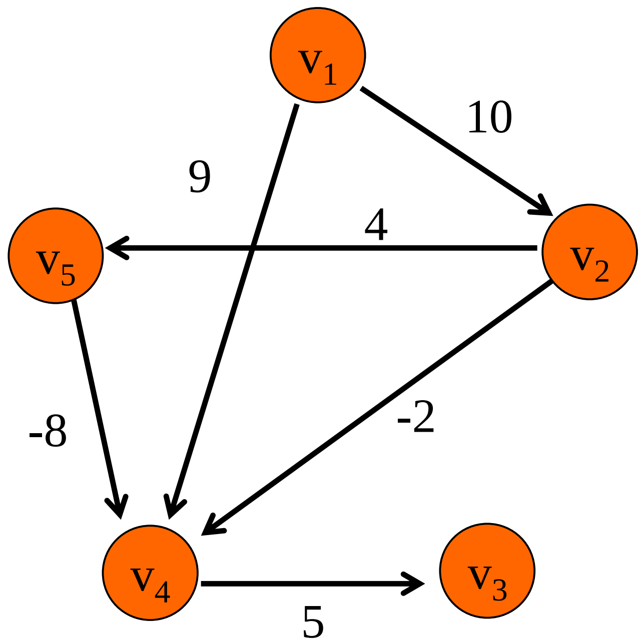
    - Dijkstra算法中，$\pi(2)=7$
    - 正确解是$\pi(2)=5$
  - 负权破坏了依赖关系！
  - 如何解决这一问题？

透过现象看本质
连问三个为什么！

1. **为什么D算法错误？**
2. **为什么有负不行？**
3. **为什么不先算v_3?**

最短路径 (11)

- 例: 使用Ford算法计算下图中v_1到各点的最短路径长度。



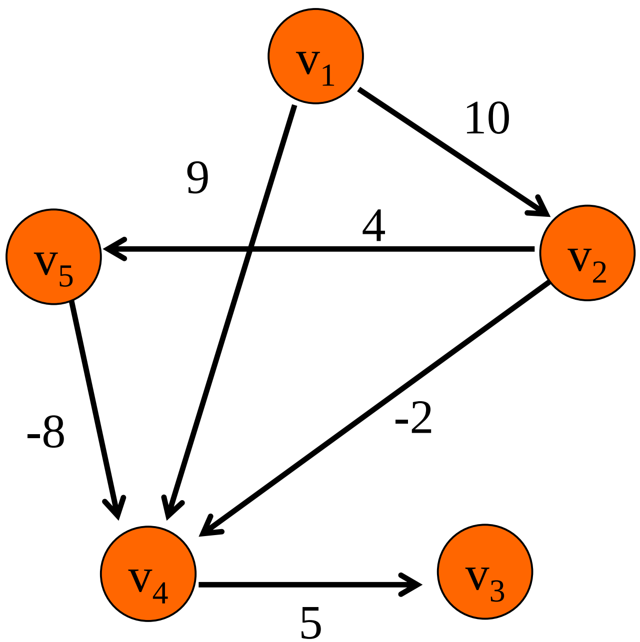
π(1)	π(2)	π(3)	π(4)	π(5)	k
0	∞	∞	∞	∞	0
0	10	∞	8	14	1
0	10	13	6	14	2
0	10	11	6	14	3
0	10	11	6	14	4

潜在问题与改进方法?

节点序和初始化：当负边权数较少时，可先忽略负边而使用Dijkstra算法得到一个结点序，将所得的结果取代Ford的步骤1，再进行迭代。

最短路径 (12)

- 例:使用改进的算法计算v_1到各点的最短路径



使用Dijkstra算法得到的结果(忽略负边):

$\pi(2)=10$, $\pi(3)=14$, $\pi(4)=9$, $\pi(5)=14$

结点序为v_4, v_2, v_3, v_5

$\pi(1)$	$\pi(4)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(5)$	k
0	**9**	**10**	**14**	**14**	**0**
0	**6**	**10**	**11**	**14**	**1**

潜在问题与改进方法?

非连通图则采用权值为0使用D算法

进一步考虑依赖关系优化节点序!

最短路径 (13)

- 回顾：Ford算法

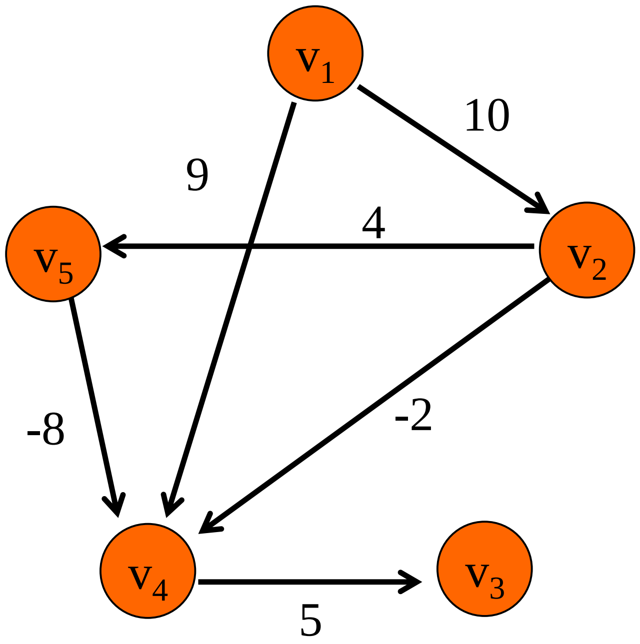
1. 置 $\pi(1)=0, \pi(i)=\infty, i=2,3,\cdots,n$
2. i从2到n，令

循环n次吗？

$$\pi(i) \leftarrow \min[\pi(i), \min_{j\in\Gamma_i^-}(\pi(j)+w_{ji})]$$

3. 若 全部π(i)都没变化，结束；

否则转2



能分布式协作运行吗？

v_4告诉v_3什么内容？ v_3如何计算？

D算法呢？

第二章 道路与回路

- 道路与回路的定义
- 道路与回路的判定
- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法
- 最短路径
- 关键路径
- 中国邮路

假如我是欧拉，如何写书？

最短路径v. s. 最长路径？

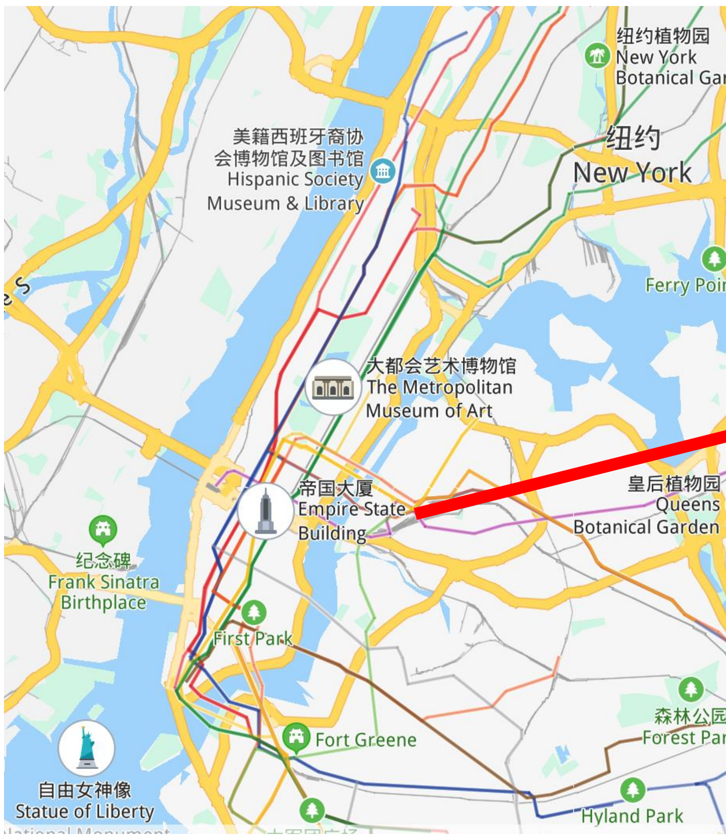
关键路径(0)

- 盖大楼啦
  - 钢筋、水泥、混凝土
  - 油漆、玻璃、瓷砖
  - 农民工住房
  - 建筑工人
  - 装修工人
  - 挖地基
  - 载重汽车运输
  - 大楼选址和工程设计

- 面临的问题
  - 工程时间与预算
    - 各部分需要多少人力
    - 各部分需要多少设备
  - 不要过早开始?
    - 占用资金
    - 占用场地
    - 产品保质
  - 不要过晚开始
    - 影响工程进度

关键路径(0)

- 纽约downtown
  102层帝国大厦
  仅410天(1930年)

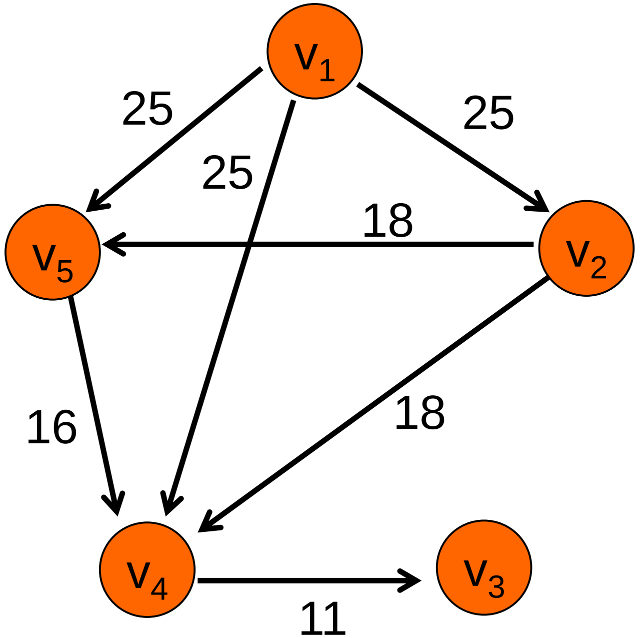


关键路径(1)

- 关键路径
  - 一项工程都要由很多工序组成
    - 每个工序的执行时长是可预知的
    - 这些工序相互约束，只有在某些工序完成之后，一个新的工序才能开始，这种关系也是预知的
  - 需要求解
    - 完成整个工程任务最少需要多少时间？
    - 影响工程进度的关键工序是哪几个？
    - 每项工序的最早/最晚启动时间？
  - 这就是这里所讨论的关键路径问题

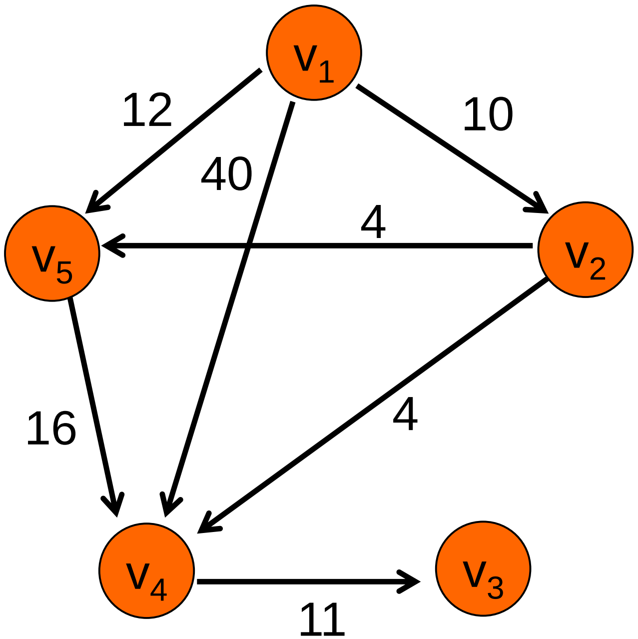
关键路径(2)

- 图论建模
  - 图的要素：点，边，边权
  - 实际问题的要素
    - 工作（工序），工序之间的依赖关系，工序的时长？
- PT图
  - 用结点i表示工序i
  - 用有向边e_{ij}表示工序i和工序j之间的依赖关系
  - 边权l_{ij}表示该工序i的时长
- 存在的缺点及其他表示方法？



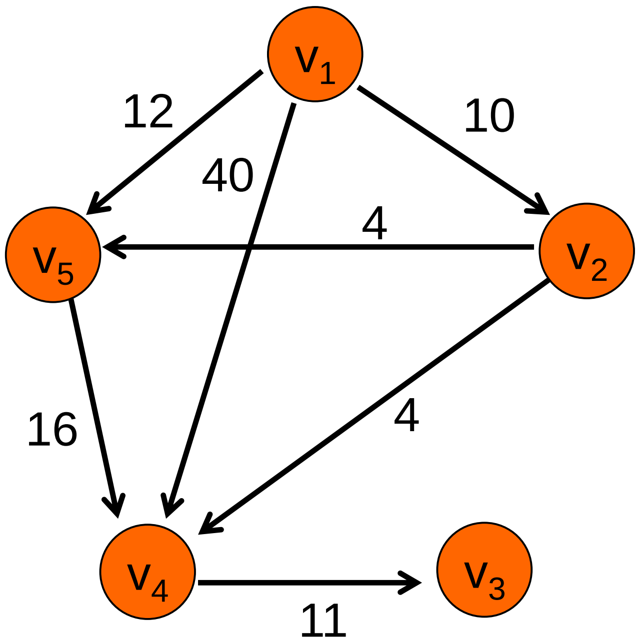
关键路径(3)

- PERT图建模
  - 用有向边e_{ij}表示工序(i, j)
  - 边权l_{ij}表示该工序花费的时间
  - 结点为工序之间的关系
- PERT图举例
  - v1是整个工程的起点
  - v3是终点
  - 含有7项工序



关键路径(4)

- 工序(5,4)的最早开始时间?
  - 12 v.s. (10+4)?
  - 工序(5,4)必须在工序(1,5)和(2,5)完成之后才能开始
  - (5,4)最早开始时间是14?
- 工程的最短完成时间
  - 从起点到终点的最长路径长度
  - 这个最长路径就是关键路径



含7项工序的PERT图

想写程序了？ 是否存在开始结点和终了结点?

关键路径(5)

- 引理2.7.1

是否存在开始节点?

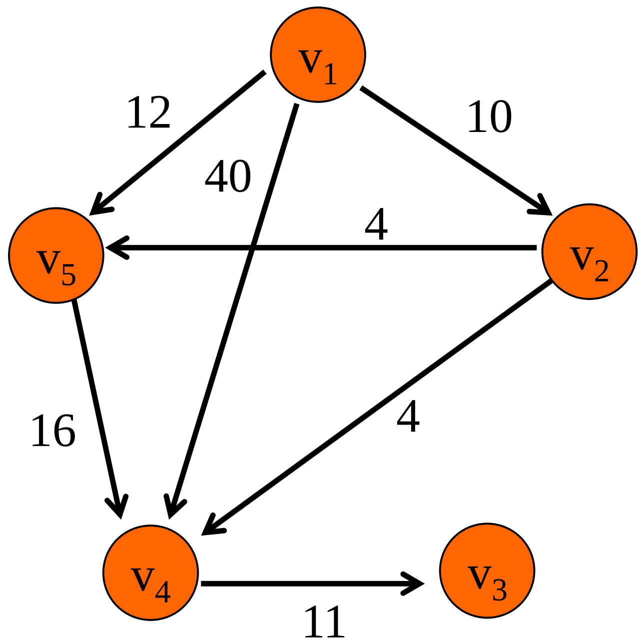
  - PERT图是否存在回路?
  - 若有向图G无有向回路，则存在负度为0的顶点
  - 证明:
    - 在G中构造一条极长的有向初级道路$P(v_1, v_2, \cdots, v_l)$，考虑 $d^-(v_1)=0$?
    - 若$d^-(v_1)\neq 0$，即v_1有直接前趋v_i
      - 假设该前趋v_i在P之外，那么$(v_i, v_1, v_2, \cdots, v_l)$构成更长的道路，与P是极长道路矛盾
      - 若v_i属于P，那么$(v_1, v_2, \cdots, v_i)$构成有向回路，与已知矛盾
    - 因此有$d^-(v_1)=0$
    - 存在开始和结束结点

- 是否存在多个开始结点?
- 增设虚拟的超结点!

关键路径(6)

- 如何求解关键路径？
  - 已知存在开始结点和终了结点
  - 从起点到终点的最长路径

最长路径依赖谁？
最长子路径又依赖哪些节点呢？
先算哪些节点呢？



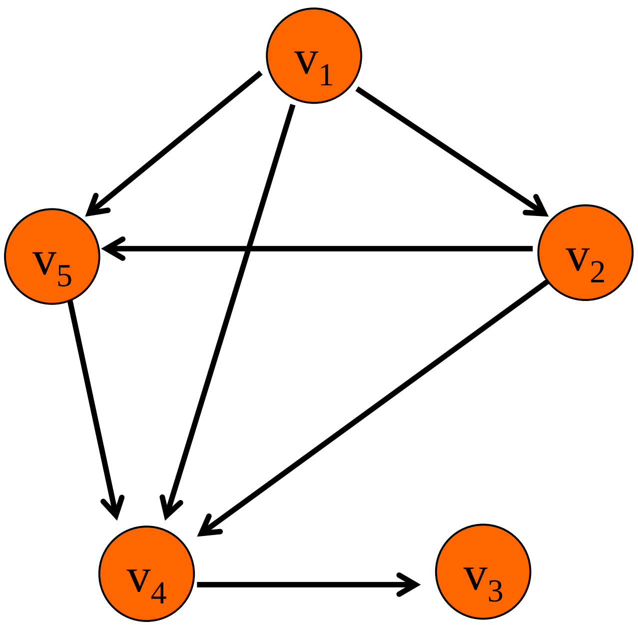
含有7项工序的PERT图

关键路径(7)

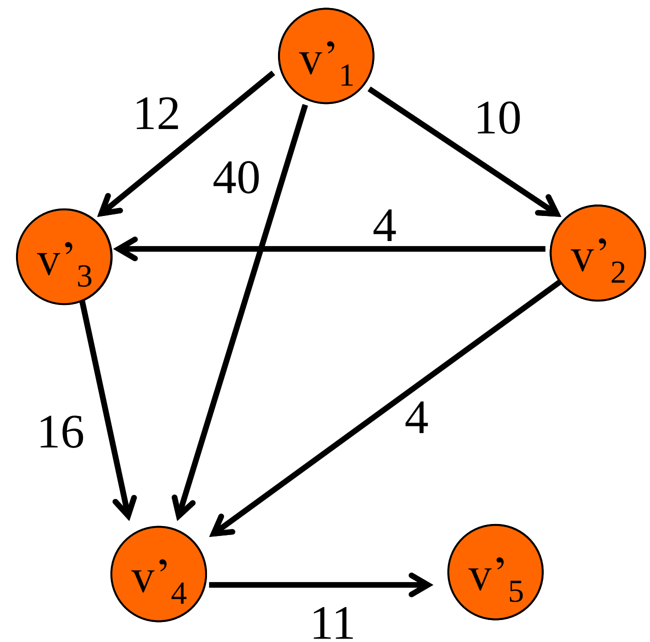
- 定理
  - 设有向图G没有有向回路，则可以将其顶点重新编号：v_1'，v_2'，…，v_n'，使得对G的任意边 (v_i', v_j')，都有 $i<j$。
  - 证明（思路？）
    - 构造法：构造结点序列
    - 由引理2.7.1，G中存在负度为0的点
    - 取一个这样的点编号为v_1'，令$G \leftarrow G - v_1'$，得到的子图仍然没有回路
    - 再取一个负度为0的点编号为v_2'
    - 重复这个过程，直到所有点都编号为止
    - 这时所有的编号都满足定理的条件

关键路径(8)

- 例
  - 将下图中结点重新编号为v_1'~v_5'，使得对任意边(v_i',v_j')，都有$i<j$



- $v_1'=v_1$
- $v_2'=v_2$
- $v_3'=v_5$
- $v_4'=v_4$
- $v_5'=v_3$



关键路径(9)

- 关键路径算法
  1. 对顶点重新编号为 $v_1', v_2', \cdots, v_n'$
  2. $\pi(1) \leftarrow 0$
  3. 对j'从2到n令

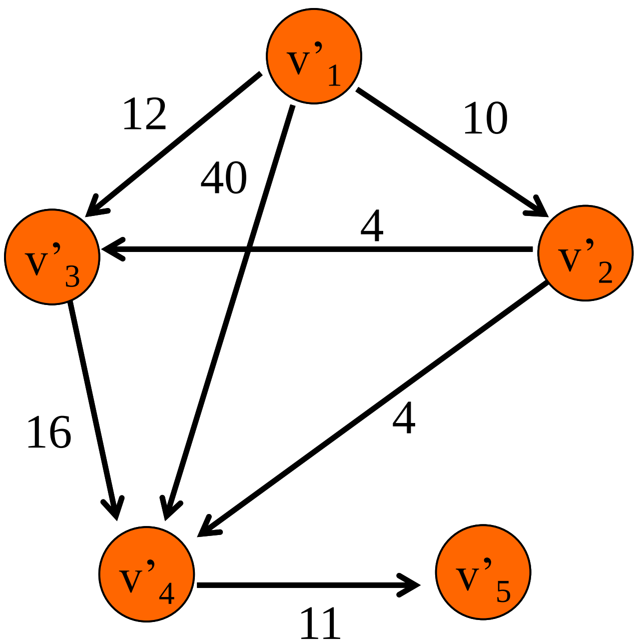
  $$\pi(j') = \max_{i' \in \Gamma_{j'}^-}(\pi(i') + l_{i'j'})$$
  4. 结束

重新编号的重要性?

其中π(i)就是工序(i, k)的最早启动时间

关键路径(10)

- 例
  - 求下图所示表示的工序的关键路径



- 对结点重新编号
- $\pi(2')=10$
- $\pi(3')=\max(12,10+4)=14$
- $\pi(4')=\max(14+16,40,10+4)=40$
- $\pi(5')=40+11=51$
- 关键路径是 **(v_1',v_4',v_5')，**
  其长度是51

关键路径的物理意义？非关键路径呢？

关键路径(11)

- 最大允许延误时间
  - 显然关键路径上的工序是不允许延误的，否则不可能按时完成工程项目
  - 而对非关键工序的允许延误时间将可以给工程规划人员带来工作上的灵活性？
  - 设工序(i，j)：

    最早启动时间为$\pi(i)$

    最晚启动时间为$\tau(i,j)$
  - 则最大允许延误时间为

    $\Delta_{ij} = \tau(i,j) - \pi(i)$

关键路径(12)

- 计算最晚启动时间

（v_3依赖谁呢）

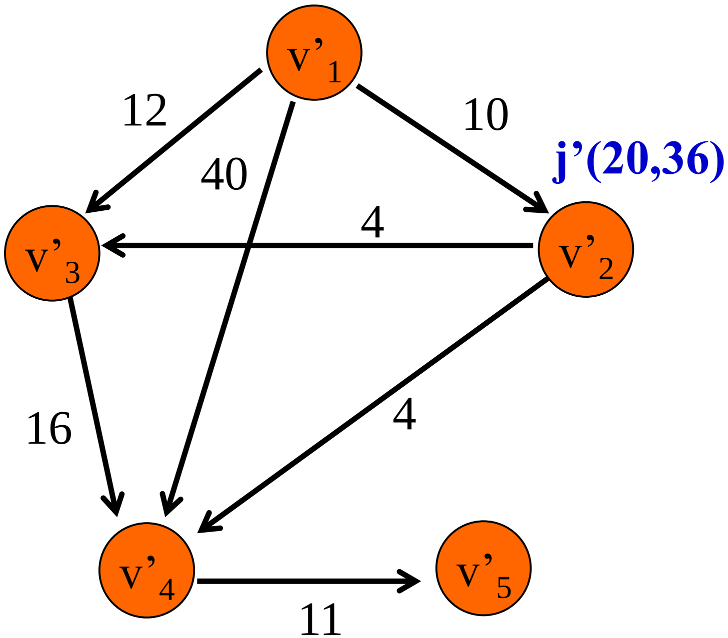
$$\tau\left(n'\right)=\pi\left(n'\right)$$

1. j'从(n-1)'到1'，结点j’最晚完工时间依赖于后续节点

$$\tau(j')=\min_{i'\in\Gamma_{j'}^{+}}(\tau(i')-l_{j'i'})$$

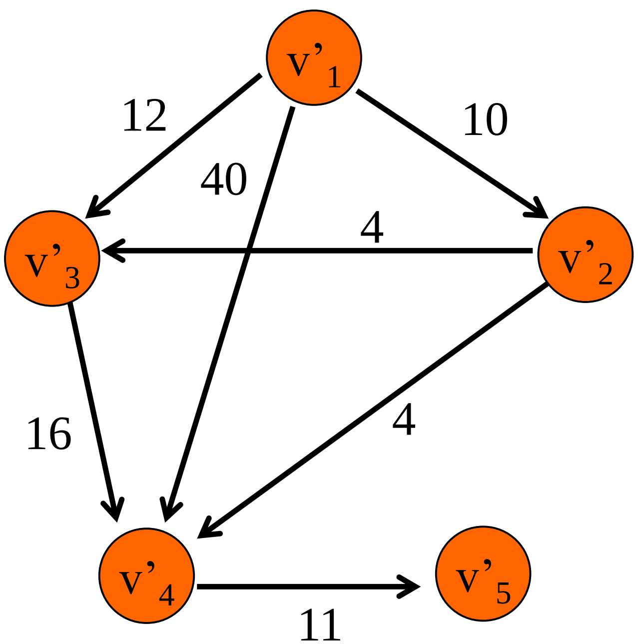
2. 对每一条边(i',j')，则工序(i',j')的最晚启动时间

$$\tau(i',j')=\tau(j')-l_{ij}$$



关键路径(14)

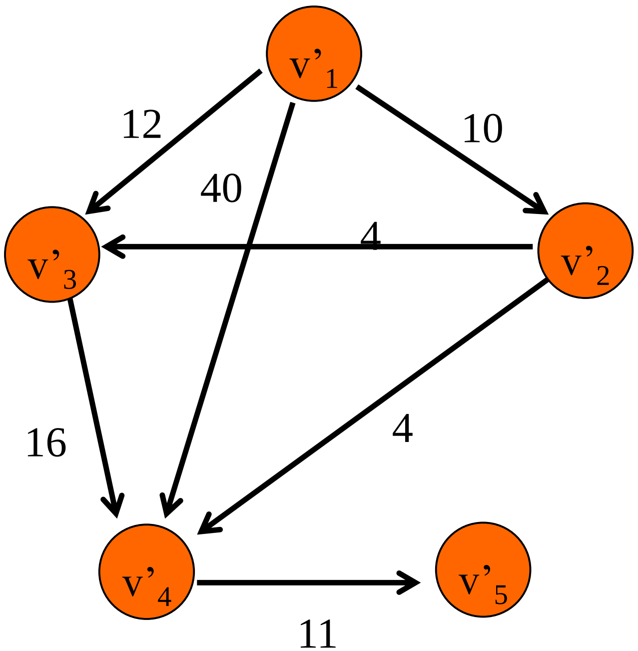
- 例
  - 求下图中各工序的最晚启动时间和最大允许延误时间



- 已知关键路径和最早完工时间
- 计算“结点”最晚完工时间
  - $\tau(5')=51$
  - $\tau(4')=51-11=40$
  - $\tau(3')=40-16=24$
  - $\tau(2')=\min(24-4, 40-4)=20$
  - $\tau(1')=\min(20-10, 24-12, 40-40)=0$

关键路径(15)

◆ 例(续)



- 已知结点最晚完工时间

τ(1')=0 ; τ(2')=20; τ(3')=24;

τ(4')=40; τ(5')=51

- 计算工序最晚启动时间

τ(1',2')= τ(2')-10= 10

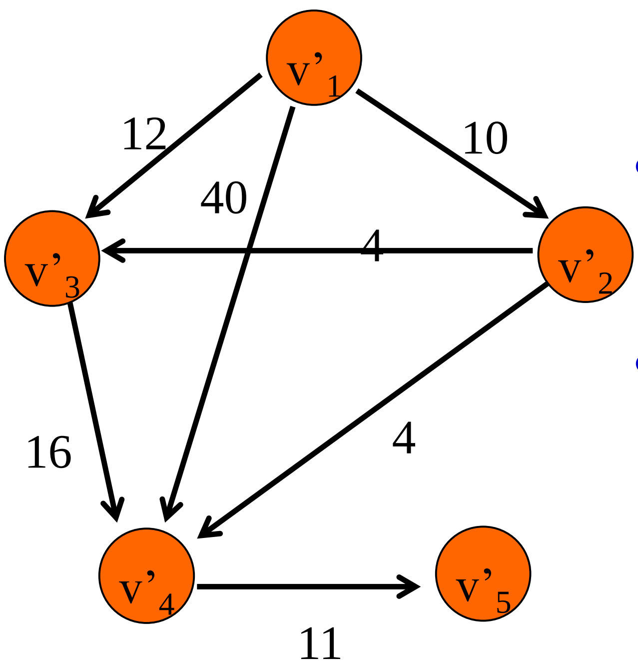
τ(1',3')=12 τ(1',4')=0

τ(2',3')=20 τ(2',4')=36

τ(3',4')=24 τ(4',5')=40

关键路径(16)

- 例(续)



- 已知工序最晚启动时间

$\tau(1',2')=10$　　$\tau(1',3')=12$

$\tau(1',4')=0$　　$\tau(2',3')=20$

$\tau(2',4')=36$　　$\tau(3',4')=24$

$\tau(4',5')=40$

- 最早启动时间:$\pi(1')=0, \pi(2')=10, \pi(3')=14, \pi(4')=40, \pi(5')=51$

- 计算最大允许延误时间

$\Delta_{1'2'}=10-0=10$　　$\Delta_{1'3'}=12-0=12$

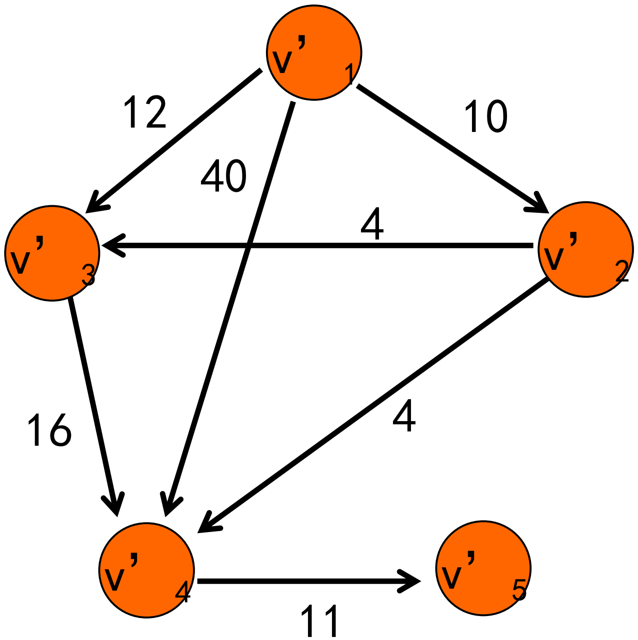
$\Delta_{1'4'}=0-0=0$　　$\Delta_{2'3'}=20-10=10$

$\Delta_{2'4'}=36-10=26$　$\Delta_{3'4'}=24-14=10$

$\Delta_{4'5'}=40-40=0$

关键路径(17)

- 关键路径小结
  - 工程问题图论建模
    - PERT图
  - 关键路径
    - 从前向后计算的最长路径
    - 完工时间(工序最早启动时间)
  - 工序最晚启动时间
    - 结点/工序最晚完工时间
    - 从后向前倒推回来
  - 工序最大允许延误时间



第二章 道路与回路

- 道路与回路的定义
- 道路与回路的判定
- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法
- 最短路径
- 关键路径
- 中国邮路

旅行商问题：最短H回路
最短欧拉回路是什么?
再创新一步?

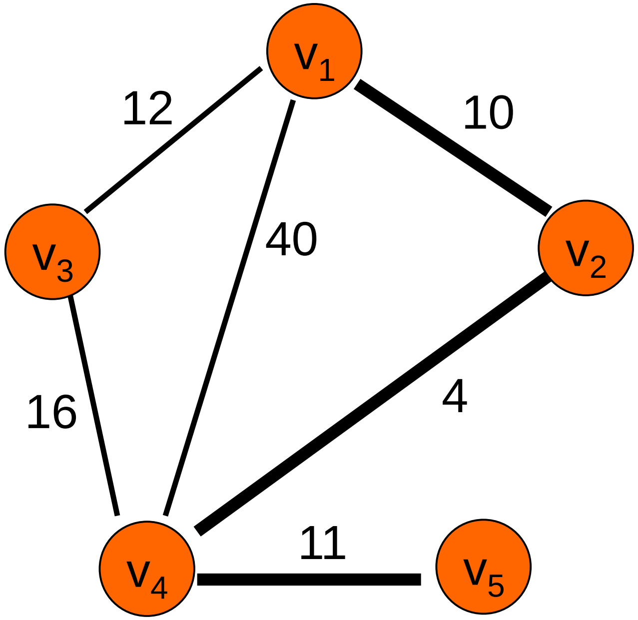
中国邮路

- 从欧拉回路到——最佳邮路（中国邮路）
  - 在一个正权连通图G中，从某点出发经过每条边至少一次最后返回出发点的最短回路称为最佳邮路（中国邮路）
  - 欧拉回路？
    - 当G所有结点度都是偶数时，即G有欧拉回路，该回路就是最佳邮路
  - 当G只有1个节点的度为奇时……
  - 当G只有2个节点的度为奇时……
    - 则存在一条欧拉道路，该道路加上从起点到终点的最短路径组成的回路就是最佳邮路
  - 当奇结点的个数大于2时，如何确定最佳邮路？

管梅谷教授

中国邮路(2)

- 最佳邮路中的边重复走？
  - 什么样的边会被重复走？
  - 某边最多被重复多少次？
  - 加上重边后，是否为欧拉回路？



- 呼唤个定理？
  - L是无向连通图G的最佳邮路的条件：
    1. G中的每条边最多重复一次；
    2. 在G的任一个回路上，重复边的长度之和不超过该回路长度的一半。

    充要条件!
  - 证明（分必要性和充分性两部分）

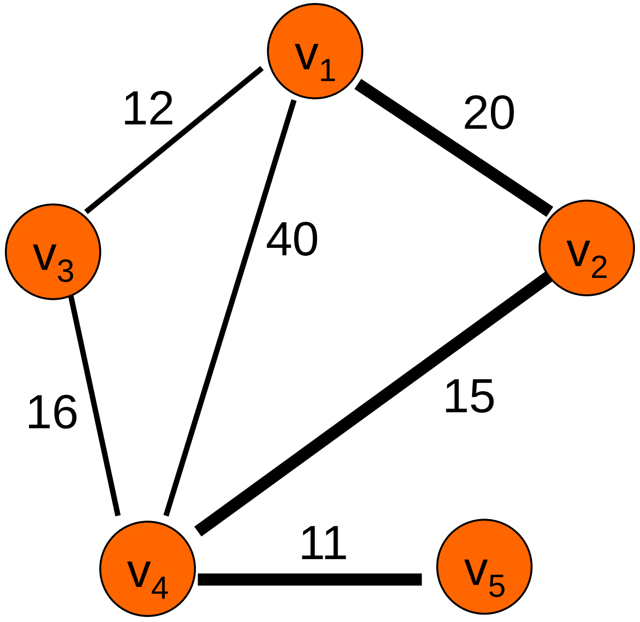
中国邮路(3)

- **证明（续）**
  - 必要性（ 1.最佳邮路G中每条边最多重复一次）
    - 若一条最佳邮路重复经过图的某些边，将G中k次重复的边画k次，得到G’
    - 设最佳邮路L’使G中边e_{ij}重复n(n>1)次，这时G’中有欧拉回路L’,即G’各点度均为偶数
    - 若使e_{ij}重复n-2次，得到G”，G”各点度仍是偶数
    - G”的欧拉回路L”也是G的一条中国邮路，且L”长度小于L’，与L’是最佳邮路矛盾
    - 因此边e_{ij}最多重复一次。

凡是邮路，将重复的边画为重边后均是欧拉图

中国邮路(4)

- 证明（续）
  - 必要性(2. 任一回路重复边长不超过回路一半)
    - 假设G中某个回路C的重复边的长度，大于C总长度的一半
    - 令C中重复的边不重复，不重复的边重复，得到G’’
    - G’’仍是欧拉图，且L’’长度小于L’，与L’是最佳邮路矛盾
    - 因此，在任意一个回路上，重复边的长度之和不会超过回路的一半
    - 必要性证毕



中国邮路(5)

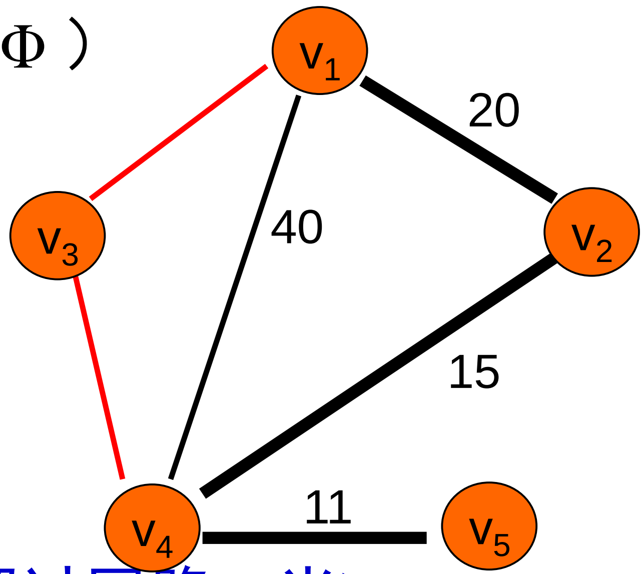
- **证明（续）**

凡是邮路，加上重复的边后均是欧拉图

- 充分性：最多重复一次；重复边和不超过回路一半
  - 假设任意两个不同邮路L_1和L_2满足定理的两个条件，我们将证明$\pi(L_1)=\pi(L_2)$
    - （最佳邮路L’满足定理条件，但最佳邮路不唯一）
  - 设$L_1=E(G)+Q+Q_1$，$L_2=E(G)+Q+Q_2$
    - 其中Q是L_1和L_2共同的重复边集，Q_1和Q_2是分别只属于L_1和L_2的重复边集
    - L_1和L_2的结点度数均为偶数
  - 设L_1和L_2的对称差为$E'(G)=Q_1+Q_2$，结点度数均为偶数
  - 若$E'(G)=\Phi$，显然$\pi(L_1)=\pi(L_2)$

中国邮路(6)

- 证明（续）
  - 充分性: 最多重复一次；重复边和不超过回路一半
    - 否则（L_1和L_2的对称差$E'(G)=Q_1+Q_2\neq\Phi$ ）
    - 构造$G'=(V(G),E'(G))$
    - 因为G'是简单图，各结点度是偶数
    - 可以将G'划分成若干简单回路C，对任一回路C，设C_1和C_2分别是L_1和L_2的重复边集
    - 由已知条件(2. 任一回路重复边长不超过回路一半) $\pi(C_1)\leq\pi(C_2), \pi(C_2)\leq\pi(C_1)$
    - 因此$\pi(C_1)=\pi(C_2)$，$\pi(Q_1)=\pi(Q_2)$，$\pi(L_1)=\pi(L_2)$，得证

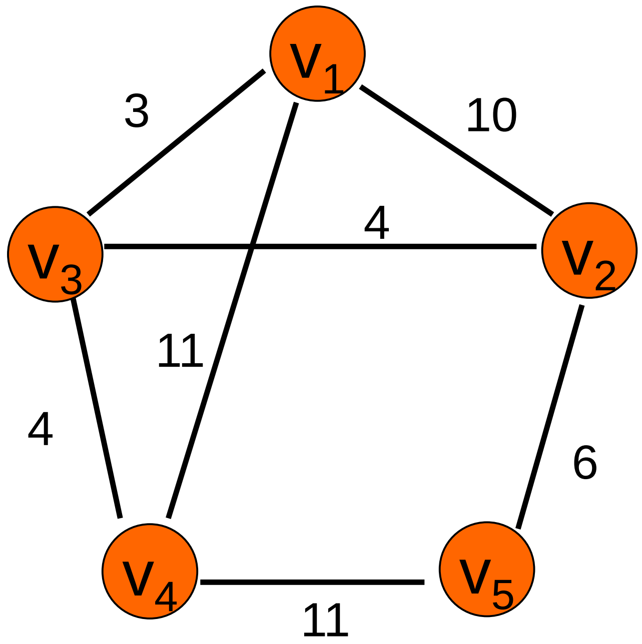


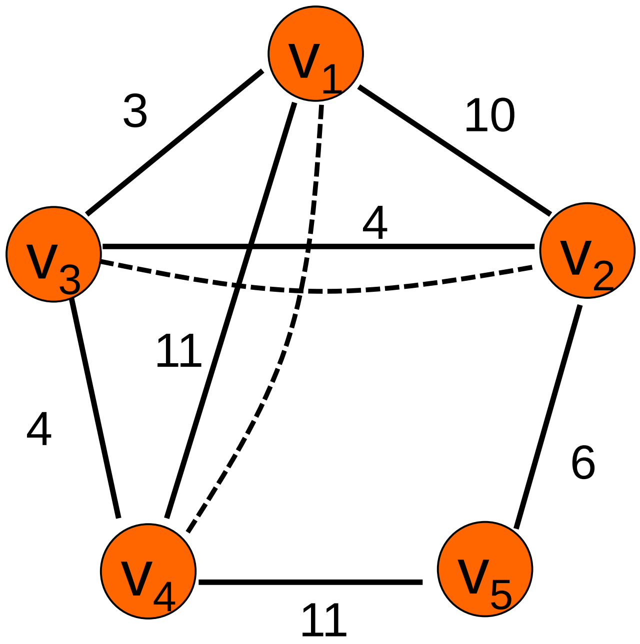
中国邮路(7)

- 回顾所证明的定理
  - L是无向连通图G的最佳邮路的充要条件是：
    1. G中的每条边最多重复一次；
    2. 在G的任一个回路上，重复边的长度之和不超过该回路长度的一半。
- 构造中国邮路
  - 找出度为奇的点
  - 依据条件1构造邮路，保证计算重复边之后度都是偶数
  - 由条件2对所有回路进行判断，若不满足条件，则令回路中的重复边不重复，不重复边变为重复

中国邮路(8)

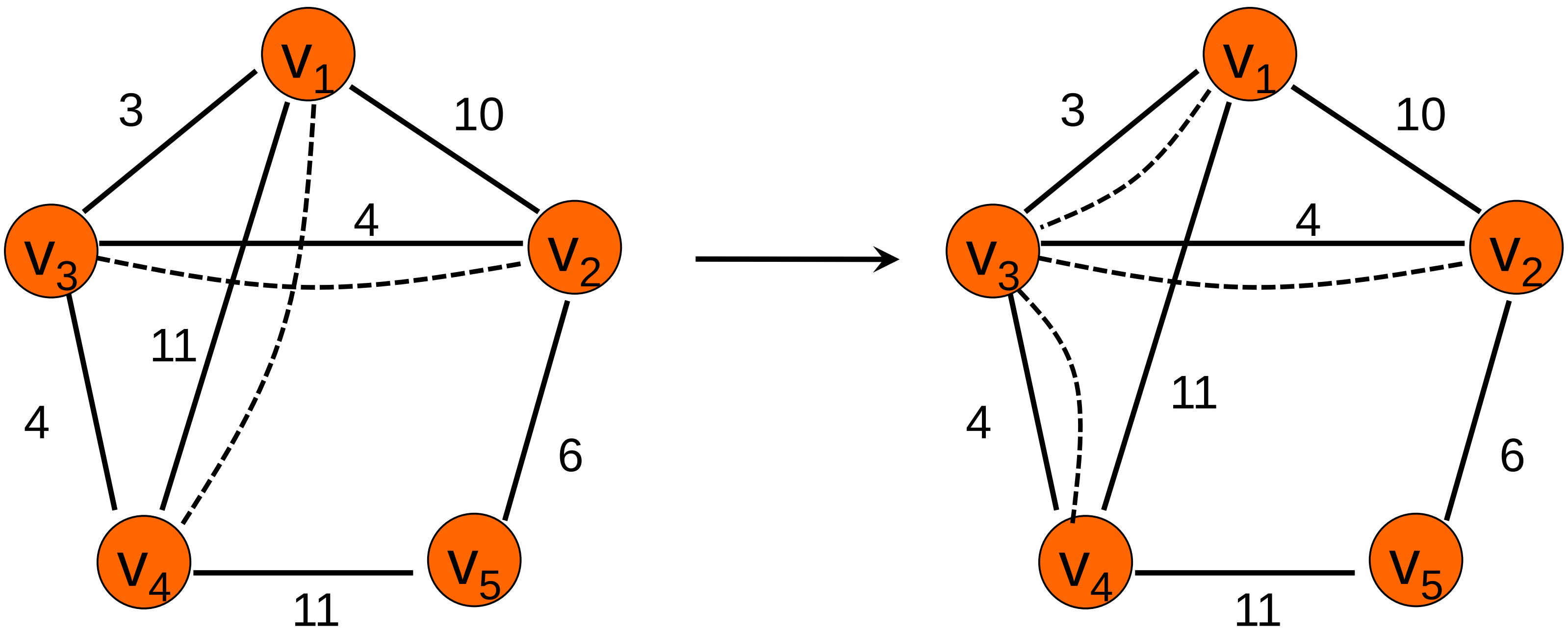
- 例
  - 使用构造法找出下图中的中国邮路





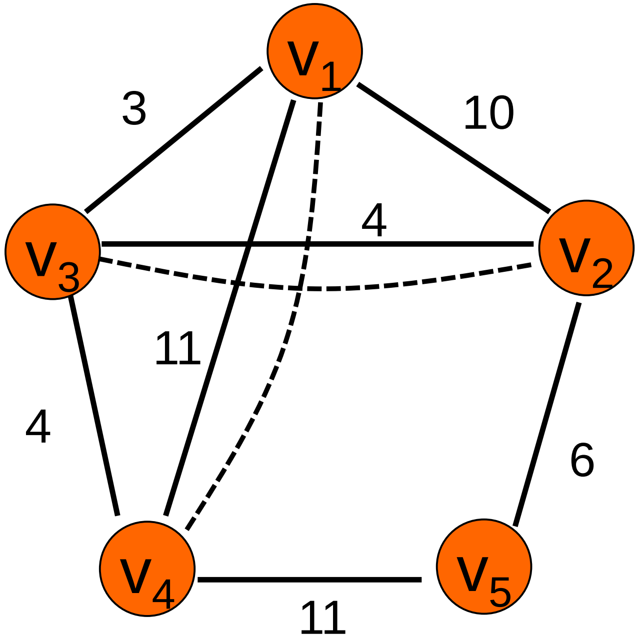
中国邮路(9)

- 例（续）



中国邮路(10)

- 求解中国邮路
  - 上述构造法求解中国邮路
    - 由于回路数量很多，所以计算量很大
  - Edmonds提出的最小权匹配算法
    - 基本思路为构造欧拉回路
    - 中国邮路的好算法



第二章 道路与回路

- 道(回)路的定义、判定
  - 邻接矩阵$P=A+A^2+\cdots+A^n$
  - 道路存在性：深度优先、广度优先搜索道路
- 欧拉、哈密顿道(回)路
  - 一笔画问题、偶数度、构造法(回路、极长初级道路)
- 旅行商问题
  - 分支定界法、便宜算法
- 最短路径
  - Dijkstra（正权）、BFS（权为1）、Ford（无负回路）
- 关键路径
  - PERT图：最早、最晚启动时间和最大允许延误时间
- 中国邮路
  - 无向图：充要条件与构造法

讲课太快/太慢?
找问题，定义、定理、算法
设计而不仅仅学习

透过现象看本质
连问三个为什么！

思维拓展?

- 严格的一次且仅一次——存在性问题
  - 欧拉回路：经过每边一次且仅一次
  - 哈密顿回路：经过每点一次且仅一次
- 优化问题
  - 旅行商：过所有点（点不重复），求最短
  - 中国邮路：过所有边（边可重复），求最短
  - 关键路径：求最长路径，从后向前算
- 更通常的优化问题
  - 过所有点（点可重复）？
  - 经过给定的点？经过给定的边?
  - 给定边和点的集合？经过给定集合中不少于k个元素？
  - 权值在节点上?

期待发掘新问题和求解

Questions?