

微积分作业 第5次

请直接拍照上传照片，切勿用附件形式上传
拍照上传时，请注意调整图片方向

主观题 10分

第1题. 设 $a \neq \frac{1}{2}$. 讨论以下函数的单调性

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+a}.$$

用 GeoGebra 画图检查你的结果.

提交

主观题 10分

第2题. 设 f 为 \mathcal{C}^∞ 函数. 请用 f 的导数和高阶导数表达函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ($x \neq 0$) 的 n 阶导函数的表达式。

【提示：用 Leibniz 公式】

提交

主观题 10分

第3题. 考虑笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 = 3xy$.

欧拉通过引进 $t = \frac{y}{x}$ 可以得到该曲线的参数方程。

- (1) 试写出参数方程 $(x(t), y(t))$, 并说明它们都是 \mathcal{C}^∞ 函数;
- (2) 讨论函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的单调性和极值, 以此确定曲线的大致走向和位置。

提交

主观题 10分

第4题. 考虑笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 = 3xy$.
利用第3题得到的参数方程计算二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$,
并用它来解释曲线的凹凸性态。

提交

主观题 10分

第5题. 考虑笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 = 3xy$.
利用第3题得到的参数方程求曲线的渐近线,
并确定曲线与渐近线的位置关系。
用GeoGebra画一下曲线的图形, 结合图形
检查你在第3-5题中的计算结论。

提交

主观题 10分

第6题. 设 f 是区间 (a, b) 上的可微的凸函数。证明 f' 是连续函数。

提交

主观题 10分

第7题. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导, $f(a) \neq 0$.

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{x}\right)}{f(a)} \right)^x$.

提交

主观题 10分

第8题. 用 Newton 迭代证明 $8 < \sqrt{65} < 8 + \frac{1}{16}$.

提交

主观题 10分

第9题. 证明 Legendre 多项式 $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ 在区间 $[-1, 1]$ 中恰有 n 个不同实根。

【提示：考虑 $\frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^n]$ 的实根】

提交

主观题 10分

第10题. 已知 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续,
在开区间 $(0, +\infty)$ 内可微, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2} (\forall x \geq 0)$.

证明: 存在 $\xi > 0$ 使得 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

提交