第三次习题课讨论题目

1. 第 5、6 次作业题目选讲.
2. 设 (X,Y) 表示平面上一个随机点的直角坐标，假设 X,Y 相互独立且都服从标准正态分布，记点 (X,Y) 的极坐标为 (R,Θ).

（1） 求 R,Θ 的联合概率密度函数以及 Θ 的边际概率密度函数.

（2） 求 R^2,Θ 的联合概率密度函数以及 R^2 的边际概率密度函数.

（3） 根据（2）给出自由度为 2 的卡方分布与指数分布的关系.

3. （Box-Muller 算法）令 $V_i \sim U(0,1)$（$i=1,2$）相互独立，定义

$$X=\sqrt{-2\ln V_1}\cos 2\pi V_2\text{，}\quad Y=\sqrt{-2\ln V_1}\sin 2\pi V_2$$

（1） 计算 (X,Y) 的联合概率密度函数以及 X,Y 的边际概率密度函数，并指出 X,Y 是否相互独立.

（2） 尝试给出一个上述结果的应用.

4. （多元正态分布）

（1） 设 Z_i（$i=1,2$）为独立的标准正态随机变量，

$$X=a_1Z_1+a_2Z_2+\mu_1\text{，}\quad Y=b_1Z_1+b_2Z_2+\mu_2\text{，}$$

这里 a_i,b_i,μ_i（$i=1,2$）均为常数，且矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ 非奇异，证明：(X,Y) 服从二元正态分布.

（2） 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，证明：存在常数 a_i,b_i（$i=1,2$）和独立的标准正态随机变量 Z_i（$i=1,2$），使得（1）条件中的关系式

$$A=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\end{bmatrix}$$

成立. 请给出 a_i, b_i（$i=1,2$）一组具体值以及相应的 Z_i（$i=1,2$）.

（3） 可否将（1）条件中的关系式作为二元正态分布的定义?

（4） 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，利用（2）中结果证明：$X+Y$ 服从正态分布 $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$.

（5） 一般的 n 元正态分布可以如何定义？相应的概率密度函数如何表示？

$$f(\vec{x})=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{\det\Sigma}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right)$$