概率论与数理统计

授课教师：唐宏岩

前言

本讲义用于清华大学数学系唐宏岩老师于 2023-2024 学年秋季学期开设的《概率论与数理统计》课程。

本讲义主要基于唐老师的授课内容，用于辅助同学们课后复习，助教尽量做到每周课后两天内更新。

提醒大家，由于时间与能力所限，本讲义可能不会出现大段的文字论述（但会包含重要的定义、定理与公式等）。但是，对许多基本概念的深入理解是非常有必要的，同学们可以在浏览时检查自己是否能够回忆起课上的内容，对掌握不够扎实的地方，鼓励大家查阅参考书或在微信群提问以解决问题。

由于此为课程组第一年尝试整理讲义，诸如格式编排、内容完整度方面可能存在许多不足，欢迎大家联系我提出宝贵的意见与建议。

曹子尧

2023 年 9 月

目录

第一部分

概率论

第一章　事件的概率

1.1　概率的发展史

赌博中的 de Méré's Problem: 连续掷一个均匀六面骰 4 次，获得至少一次“6”的概率为 $1-(\frac{5}{6})^4 \approx 0.5177$；而连续掷两个均匀六面骰 24 次，获得至少一次“对 6”的概率为 $1-(35/36)^{24} \approx 0.4914$。

Pascal 和 Fermat 的通信中使用初等数学的方法，首创了概率论相当多的数学理论，虽然当时没有总结成通用的定理。

Laplace 创立了采用分析方法的分析概率论。

Kolmogorov 利用测度论方法发展了现代概率理论。

1.2　试验与事件

定义 1.1. 概率论中的随机试验指的是符合下面两个特点的试验：

1. 不能预先确知结果
2. 可以预测所有可能的结果

定义 1.2. 样本空间是指一个试验的所有可能结果的集合，常用 Ω 表示。

定义 1.3. 事件是样本空间的一个良定义的子集。

一次随机试验中，一个事件可能发生或不发生。

截止本节课，“良定义”的概念尚未阐述，感兴趣的同学可以搜索 σ-代数。

目前大家只要知道，当样本空间是无限的时候，特别是不可数的时候，就常常不能定义所有的子集为事件了，否则可能会产生公理系统上的矛盾。

一般地，所有事件组成的集合是 2^Ω 的子集。（2^Ω 表示 Ω 的幂集，即 Ω 的所有子集组成的集合）

下面是一些常见的事件：

1. 全事件 Ω（必然事件）
2. 空事件 $\emptyset$（不可能事件）
3. 基本事件 $\{a\}$，其中 $a \in \Omega$，即仅包含单一试验结果的事件

1.3 事件的运算

由于事件是集合，因此事件之间可以进行集合之间的运算，如：

1. 余 $A^C = \Omega \setminus A$
2. 和 $A + B = A \cup B = (A^C \cap B^C)^C$
3. 差 $A - B = A \setminus B$
4. 积 $AB = A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$

集合的 De Morgan's laws 也适用于事件：$(\bigcup_n A_n)^C = \bigcap_n A_n^C$。

事件的运算像集合的运算一样，可以用 Venn 图来表示。

1.4 概率的几种解释

对于概率这一数学概念，人们形成了几种从不同角度出发的解释：

1. 古典解释：基于等可能性的解释
2. 频率解释：基于大量重复试验的解释（频率学派采用的解释）
3. 主观解释：概率是一种对确信程度的度量（Bayes 学派采用的解释）