面向计算机科学的离散数学

图论—平面图与色数

苏航
suhangss@mail.tsinghua.edu.cn
清华大学 计算机系

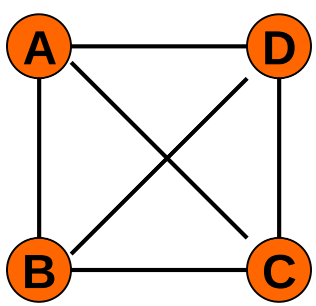
第四章 平面图与图的着色

道路/回路、树

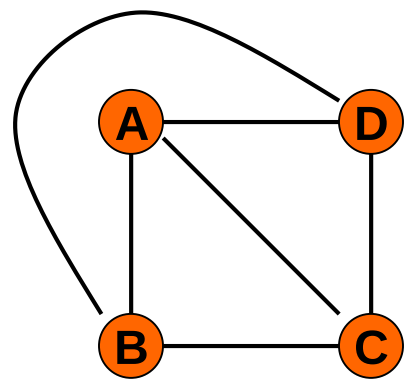
存在、唯一、计数、最短、最长、图到矩阵

仔细观察、发挥想象

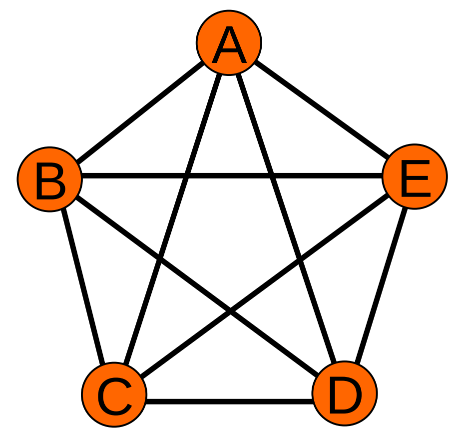
实际需求?



a

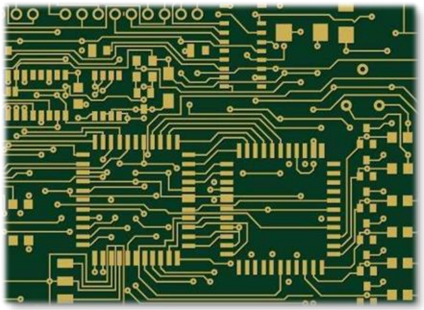


b



c

第四章 平面图与图的着色



印刷电路板设计

高速公路设计

不交叉！

现实中这种平面图并不多见，但我们能将许多实际模型抽象为平面图模型：如景区空调管道的设计、房屋内设施的连线

因此我们研究抽象的平面图的定义、判定与性质，对我们解决实际问题有着重要价值

第四章 平面图与图的着色

道路/回路、树
存在、唯一、计数、最短、最长、图到矩阵

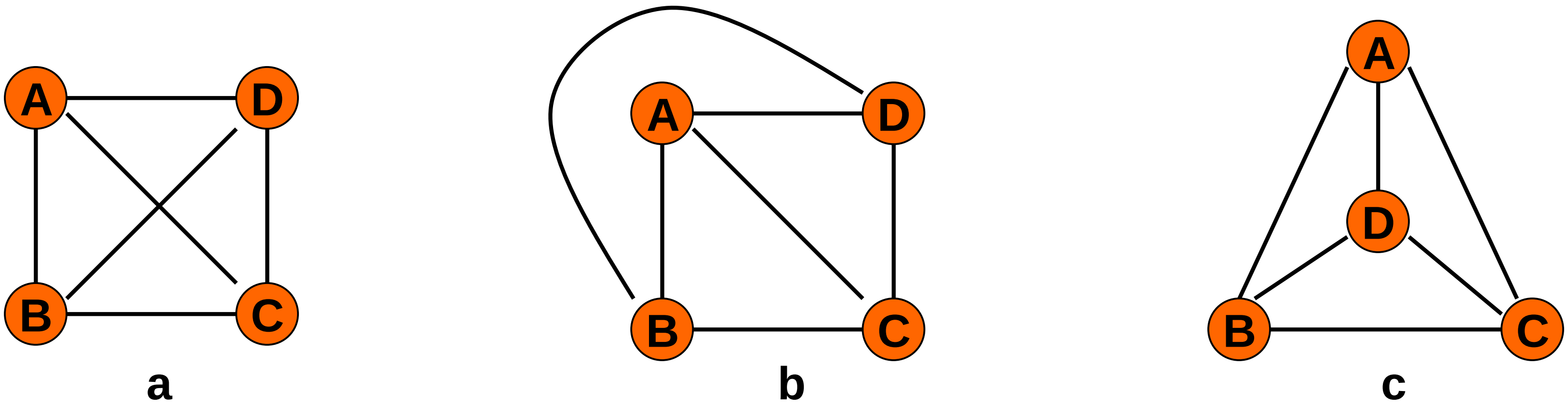
- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

重点：

1. 平面图的概念和性质
2. 欧拉公式及其变形和应用
3. 极大平面图与非平面图的性质和证明
4. 对偶图概念和特点
5. 五色定理和四色猜想

平面图

- 定义4.1.1
  - 若能把图G画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称G可嵌入平面，或称G是可平面图
  - 可平面图在平面上的一个嵌入，是平面图

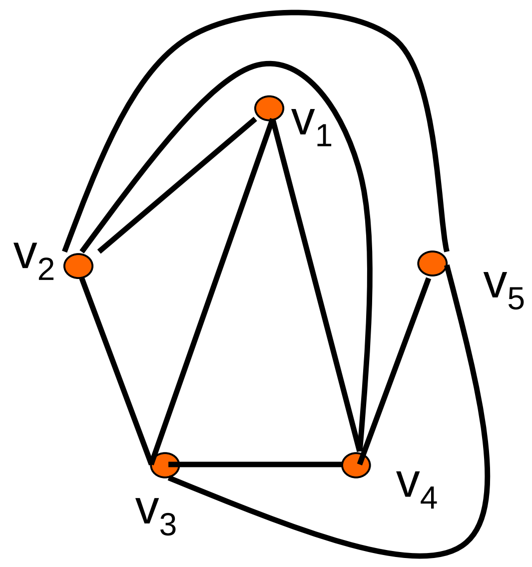


- 例：b和c都是a的一个平面嵌入,因此a是一个可平面图, b和c都是平面图

平面图(2)

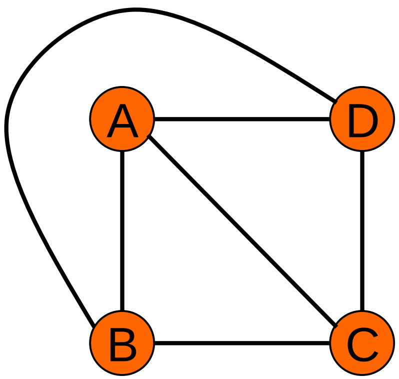
- **若G是可平面图，那么它导出子图是否是可平面图？为什么？**
  - 可平面图的任何导出子图也是可平面图。

点—》线—》？



平面图(3)

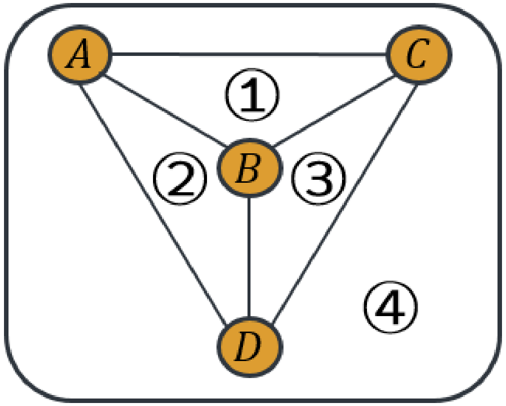
- **定义4.1.2**
  - 设G是一个平面图，由它的若干边所构成的一个区域，若区域内不含任何结点及边，就称该区域为G的一个面或域
  - 包围这个域的诸边称为该域的边界
- **如果两个域有共同的边界，就说它们是相邻的，否则是不相邻的**
- **将平面图G外边无限区域称为无限域，其他区域叫内部域**
- **如果e不是割边，则它必为某两个域的公共边界**



上图有几个域?

平面图（4）

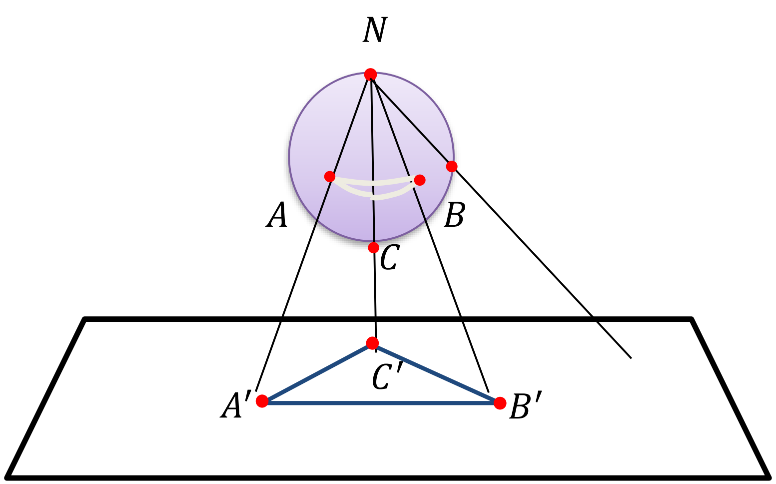
- 域：设G是一个平面图，由它的若干边构成的一个区域内如果不含任何节点及边，就称该区域为G的一个域
- 平面图G外的无限区域称为无限域，所有其他域称为内部域
- 本图中
  - ④为无限域
  - ①②③为内部域
- 有限域和无限域一样吗？



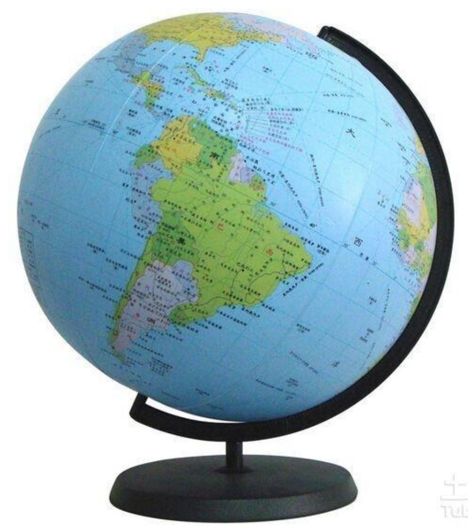
无限大的平面

测地变换（1）

- 光源N点所在的域（也即球面上三角形ABC以外的部分）对应平面上的无限域
- 无限域对应光源所在区域

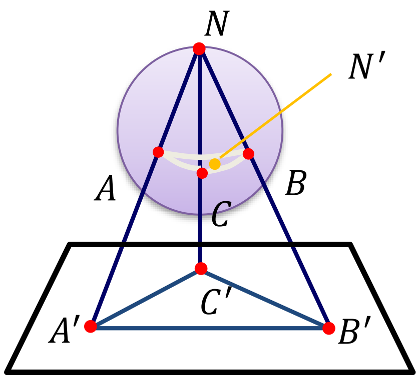


无限大的平面

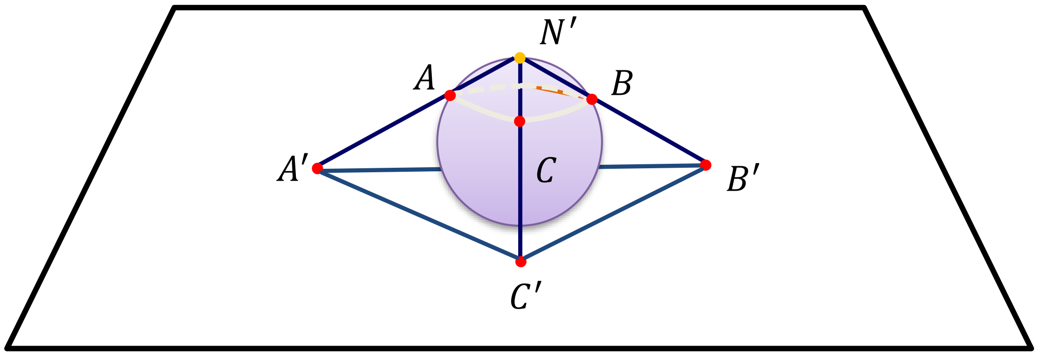


测地变换（2）

- **无限域对应光源所在区域**
- 光源的选择是任意的！
- 若选择ABC内的某点 N'作为光源重新进行球到平面的测地变换，此时**三角形ABC对应平面上的无限域**



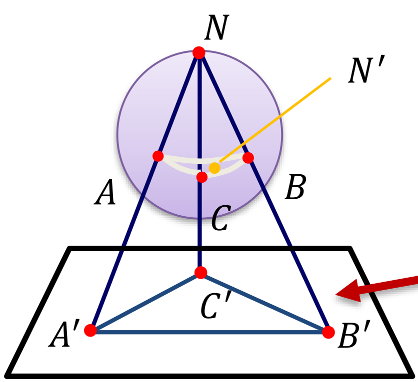
(a)



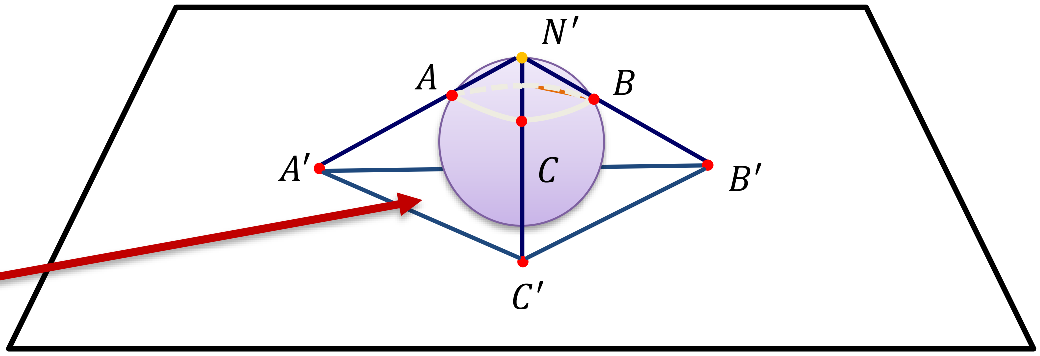
(b)

测地变换（3）

- 无限域对应光源所在区域
- 光源的选择是任意的！
- 若选择ABC内的某点 N'作为　　光源重新进行球到平面的测地变换，此时**三角形ABC对应平面上的无限域**



(a)



(b)

测地变换（4）

- 无限域对应光源所在区域
- 光源的选择是任意的！
- 若选择ABC内的某点 N'作为　　光源重新进行球到平面的测地变换，此时**三角形$\boldsymbol{ABC}$对应平面上的无限域**
- 可以通过“**先将平面图用测地变换画到球面上，重新选取任意一个域 $\boldsymbol{d}$ 中的一点作为光源，再进行到平面的测地变换**”的方式，**来使平面图$\boldsymbol{G}$的任意一个域 $\boldsymbol{d}$ 变为无限域**
- 内部域和无限域可以进行转换：不同的嵌入方式

测地变换（5）

- **平面图中相邻的两个域经过测地变换到球面，再重新选择“北极点”测地变换到平面，这两个域是否仍然相邻?**
  - 某两个域的公共边经过测地变换后，仍然是公共边

- **我们将球面投射到平面的方法有什么缺陷?**

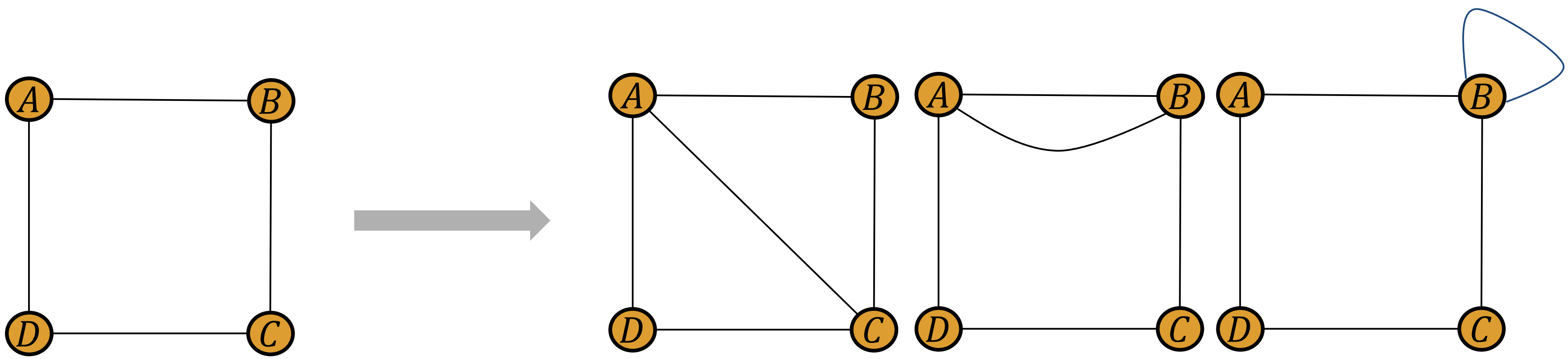
你是否有更好的方法?

- ✓ 我们把球面投射到一个无限大的平面，这在现实中是不可行的；
- ✓ 球面上的图案会出现严重的比例失真

欧拉公式

欧拉公式：设 G 是平面连通图，则 G 的域的数目是

$$d = m - n + 2$$



$$m\text{增加}1 \Rightarrow d\text{增加}1$$

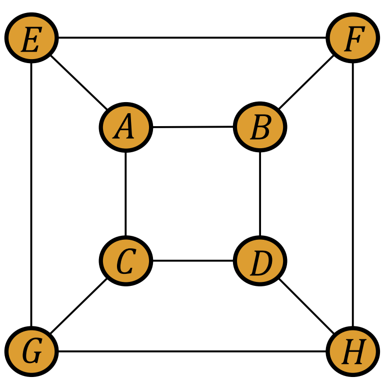
$$d = 1 \Rightarrow m = n - 1$$

欧拉公式

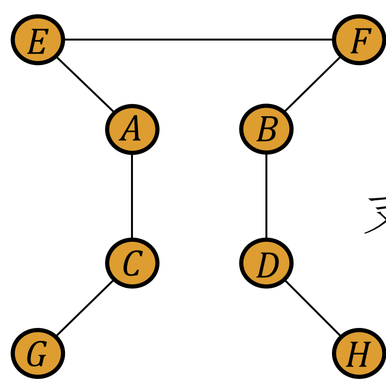
欧拉公式：设 G 是平面连通图，则 G 的域的数目是

$$d = m - n + 2$$

G 是连通图，有支撑树 T，它包含 $n-1$条边，不产生回路，因此对T来说只有一个（无限）域。



$n = 8, m = 12, d = 6$

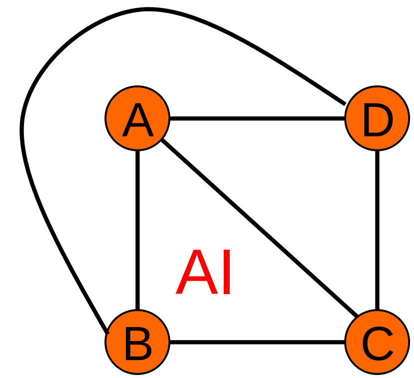


支撑树T

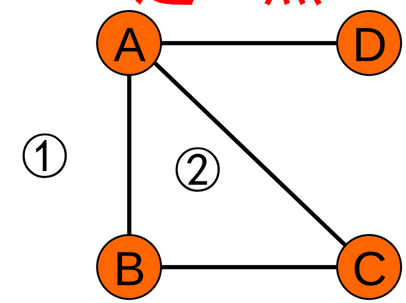
$m = 7$， $d = 1$

平面图(5)

- **定理4.1.1(欧拉公式：域的数目d)**
  - 设G是平面连通图，则G的域的数目是d=m-n+2，（即n-m+d=2）
  - 证明(构造法)：
    - G是连通图，有支撑树T，它包含n-1条边，不产生回路，因此对T来说只有一个无限域
    - 由于G是平面图，可加入一条余树边，它一定不与其他边相交，即一定是跨在某个域的内部，把该域分成两部分
    - 共有m-n+1条余树边，构成m-n+2个域

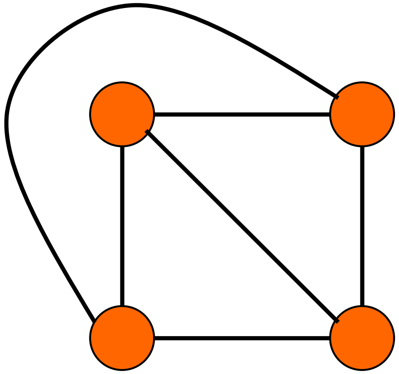


边？点？

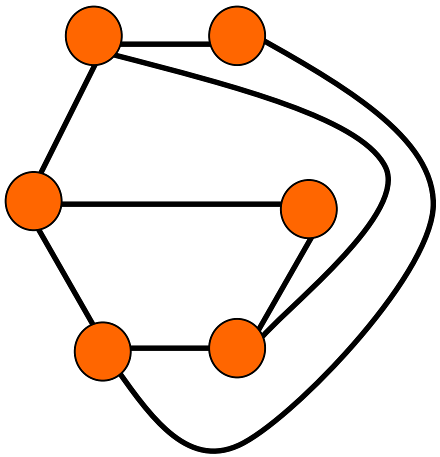


平面图(6)

- **例**
  - 考察下列平面图的域数量



d=m-n+2=6-4+2=4



d=m-n+2=8-6+2=4

平面图(7)

- 欧拉公式：对平面连通图G有n-m+d=2，那么非连通图呢？

推论4.1.1

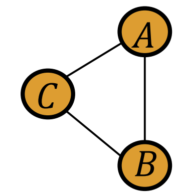
- 若平面图有k个连通分支，则n-m+d=k+1
  - 考虑如何将k个连通分支连通
  - 设G'(m')为将k个连通支连通后的新图
  - m'=m+(k-1)， n-m'+d=2

推论4.1.2

- 对一般平面图G，恒有 n-m+d≥2

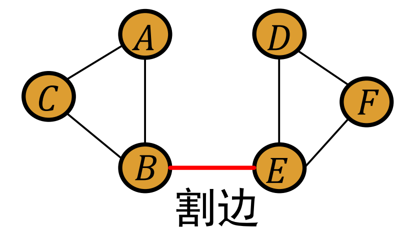
域边界数和公式

考虑域的边界数之和与边数m的关系



设平面连通图G有d个域，f_i $(1 \le i \le d)$为其域，记记$\varphi(f)$表示f的边界数，m_{cut}表示G的割边数

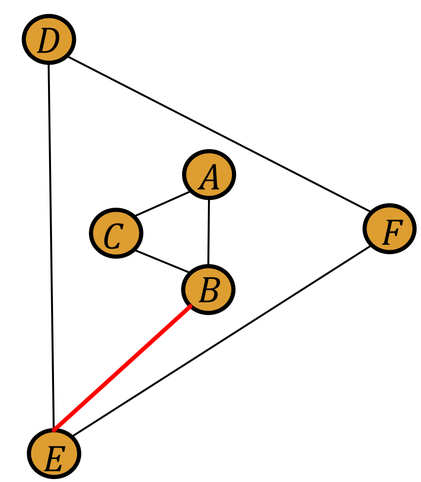
$$\sum_{i=1}^{d} \varphi(f_i) + m_{cut} = 2m$$



$n = 6, m = 7, d = 3$

$\varphi = 3, 3, 7, m_{cut} = 1$

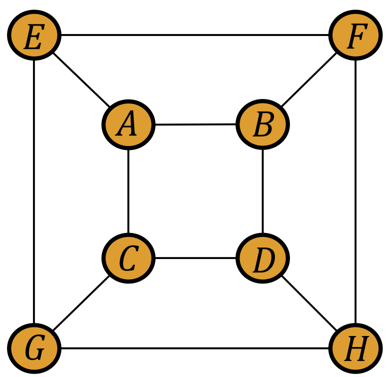
证明：任取$e \in G$，若 e 是两个域的公共边，则被计算两次；否则e为割边，仅被某一个域计算一次，此时e在等式左端m_{cut}中被计算一次。



- 割边数和每个域的边数不因嵌入方式不同而变化

域边界数和公式

例

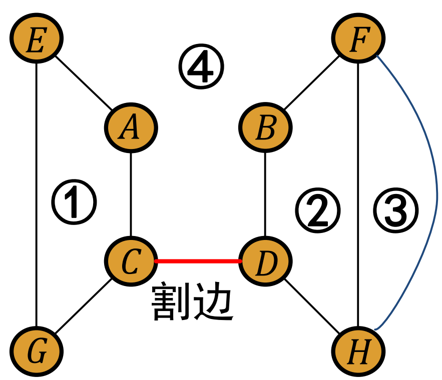


$n = 8, m = 12, d = 6$

域边界数和公式： $\sum_{i=1}^{d} \varphi(f_i) + m_{cut} = 2m$

$$\varphi(f_i) = 4$$

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi(f_i) = 24 = 2m$$



$n = 8, m = 10, d = 4$

$$\varphi(f_1) = 4 \quad \varphi(f_2) = 4$$

$$\varphi(f_3) = 2 \quad \varphi(f_4) = 9$$

$$\sum_{i=1}^{4} \varphi(f_i) + 1 = 19 + 1 = 2m$$

注意无穷域！

平面图(8)

- **定理4.1.3**
  - 设平面图没有割边，且每个域的边界数至少为t，则 $m \leqslant t(n-2)/(t-2)$
  - 证明（思路？）
    - 因为没有割边，所以每条边都与两个不同的域相邻
    - 将域边界数对域求和等于2m
    - 设G有d个域，每个域的边界数至少是t，有 $td \leqslant 2m$
    - 代入欧拉公式

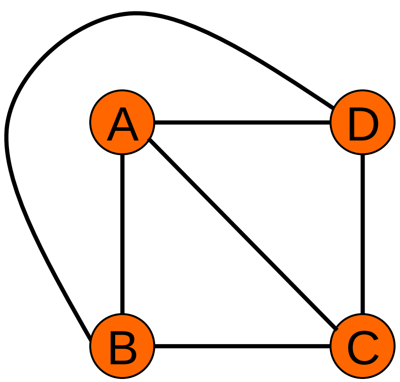
$$(2m/t) \geqslant d = m-n+2$$

    - 亦即 $2m \geqslant tm-t(n-2)$

$$m \leqslant t(n-2)/(t-2)$$

m/n/t的关系？

欧拉公式
d = m-n+2



回顾

回顾：已经学习的三个基本的定量公式

①欧拉公式 $d = m - n + 2$

②域边界数和公式 $\sum_{i=1}^{d} \varphi(f_i) + m_{cut} = 2m$

③对$n \geq 3$简单平面连通图G

有$3d \leq 2m$, G为极大平面图时取等

上述公式的推论

①$n - m + d = k + 1$

②$m \leq \frac{t(n-2)}{t-2}$，t为最少边界数

重要思路

1. 反证法
2. 内部域和无限域相互转换

第四章 平面图与图的着色

平面图的特殊情况？

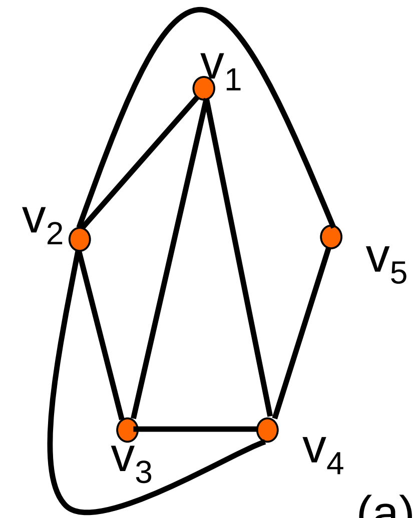
- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

极大平面图

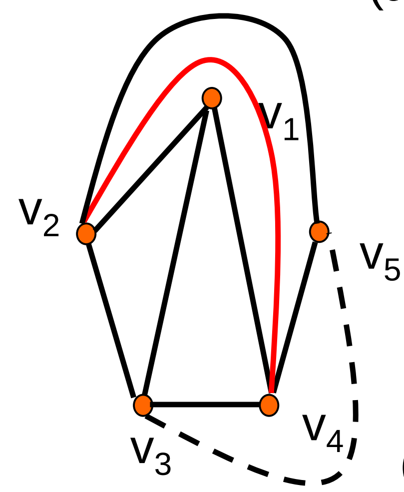
- **本节只限于讨论简单平面图**
- **定义4.2.1：极大平面图**
  - 设G是n≥3的简单平面图
  - 若在任意两个不相邻的结点V_i，V_j之间加入边(V_i，V_j)，就会破坏图的平面性，则称G是极大平面图

极大平面图(2)

- **示例**
  - 图中加入(v_3, v_5)是否一定与某些边相交?
  - 能否改画一下边(v_2, v_4)后，就可以加入(v_3, v_5)并不破坏其平面性?
  - 因此(a)不是极大平面图
- **非极大平面图**
  - 对画好的G，加入某边e总会与其他边相交，但换种画法G+e仍然是可平面的，则G并非是极大平面图



(a)



(b)

究竟如何才是极大平面图呢?

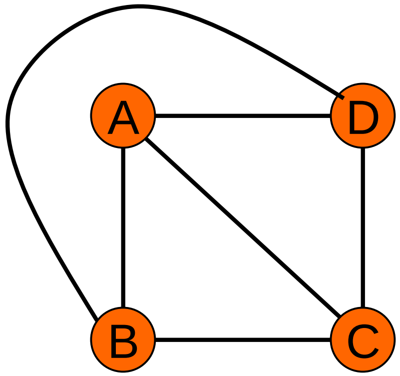
极大平面图(3)

- 极大平面图G的性质：
  1. G是连通的
  2. G不存在割边
  3. G的每个域的边界数？

  都是3！

  4. 3d=2m

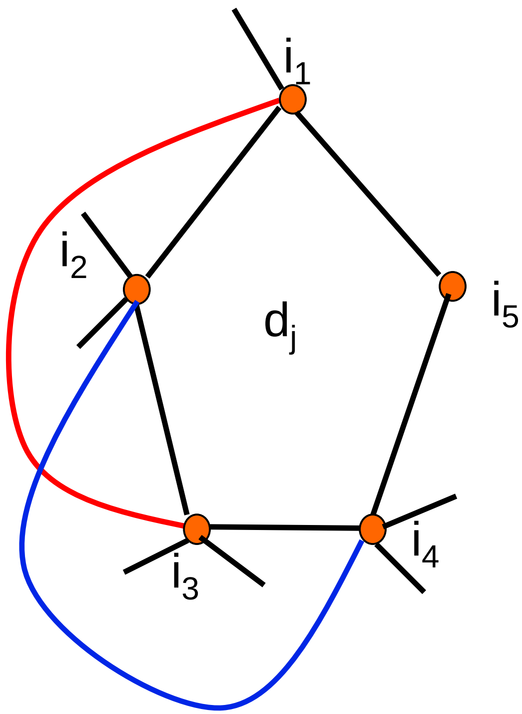
域边界数之和
=度数之和
=2m



极大平面图(4)

- **证明(极大平面图G的每个域的边界数都是3)**
  - 因为G是简单图，没有自环和重边，因此不存在边界数为1和2的域
  - 假定G存在边界数大于3的域d_j，不妨设d_j是其内部域，如右图所示
  - 若结点i_1和i_3不相邻，则在域d_j内加入(i_1, i_3)仍然是平面图，与G是极大平面图矛盾，因此一定存在边$e(i_1, i_3)$且位于域d_j之外
  - 而此时，在d_j之外不可能存在边(i_2, i_4)
  - 亦即i_2, i_4不相邻，但在域d_j内加入(i_2, i_4)并不影响G的平面性。矛盾。证毕

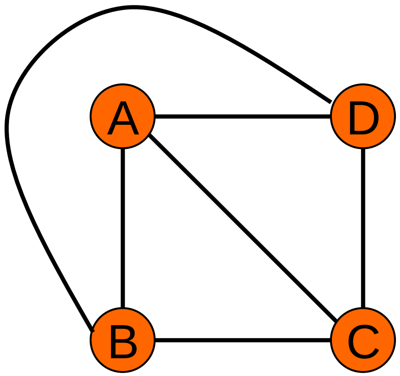
$3d=2m$



是否能加边？

极大平面图(5)

- **定理4. 2. 1**
  - 极大平面图G中，有m=3n-6， d=2n-4
  - 证明
    - 由极大平面图的性质4：3d=2m
    - 代入欧拉公式：d=m-n+2
    - 整理后即得以上结论
  - 该定理可以用于极大平面图的判定
    - 前提是简单平面图



极大平面图(7)

简单平面图的一般情况呢?

- 例4.2.1
  - 若简单平面图G有6个结点12条边，则每个域的边界数都是3
  - 证明
    - 由于n=6,m=12，满足定理4.2.1（极大平面图G中有m=3n-6）
    - 因此G是极大平面图，每个域的边界数都是3

极大平面图(6)

- **推论4.2.1**
  - 简单平面图G满足m≤3n-6, d≤2n-4
  - 证明(考虑G是否含有割边)
    - 设G中没有割边
    - 因为G中没有自环和重边, 所以每个域的边界数至少为3, 故3d≤2m, 代入欧拉公式:

      d=m-n+2
    - 如果G里有割边e，由于e并不能增加G的域数，也有

      $$3d < 2m$$
    - 代入欧拉公式即得以上结论

极大平面图(8)

- 例4.2.2
  - 若简单图G不含K_3子图，则有

$$m \leqslant 2n-4$$

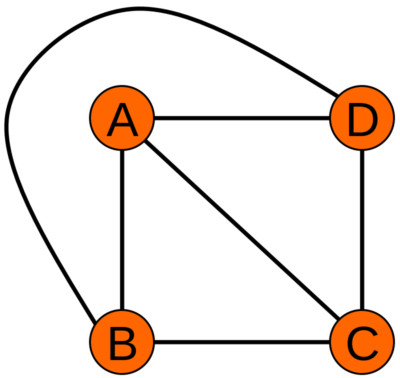
  - 证明
    - 显见每个域的边界数至少为4，因此可得

$$4d \leqslant 2m$$

    - 代入欧拉公式

$$(m/2) \geqslant d = m-n+2$$

    - 即 $m \leqslant 2n-4$



极大平面图(9)

- **定理4.2.2**
  - 简单平面图G中存在度小于6的结点
  - 证明（反证法：欧拉公式n−m+d≥2）
    - 设每个结点的度都不小于6
    - 由度数之和 $\sum d(v_i)=2m$，得到6n≤2m
    - 因为G是简单平面图，又有3d ≤2m
    - 代入欧拉公式的一般形式n−m+d≥2
    - 有 $\frac{1}{3}m-m+\frac{2}{3}m\geq 2$
    - 矛盾

极大平面图(10)

- **例4.2.3**
  - 结点数不超过11的简单平面图G一定存在度小于5的结点
  - 证明（反证法）
    - 假定每个结点的度都不小于5，则$5n \leqslant 2m$
    - 因为G是简单平面图，满足$m \leqslant 3n-6$
    - 因此得$n \geqslant 12$，与已知矛盾

极大平面图(11)

- 例4.2.4
  - K_7图不是平面图
  - 证明
    - 因为K_7图每个结点的度都为6
    - 由定理4.2.2（简单平面图G中存在度小于6的结点）即得证

第四章 平面图与图的着色

- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

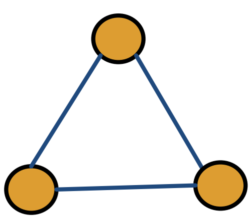
特殊的非平面图

$n=3$:　K_3是可平面图

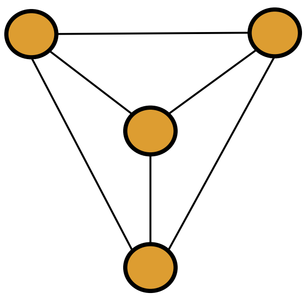
$n=4$:　K_4是可平面图

$n=5$:　K_5是非平面图，K_5-e是可平面图

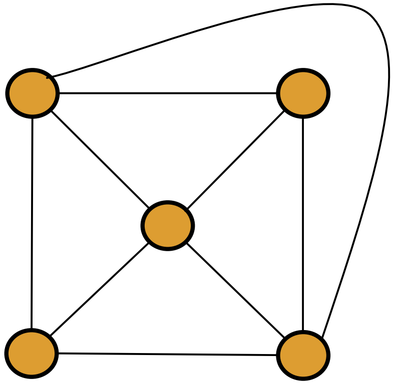
K_5是点数最少的非平面图



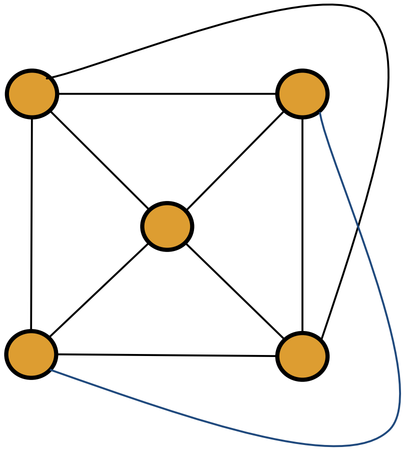
K_3



K_4



K_5-e



K_5

特殊的非平面图

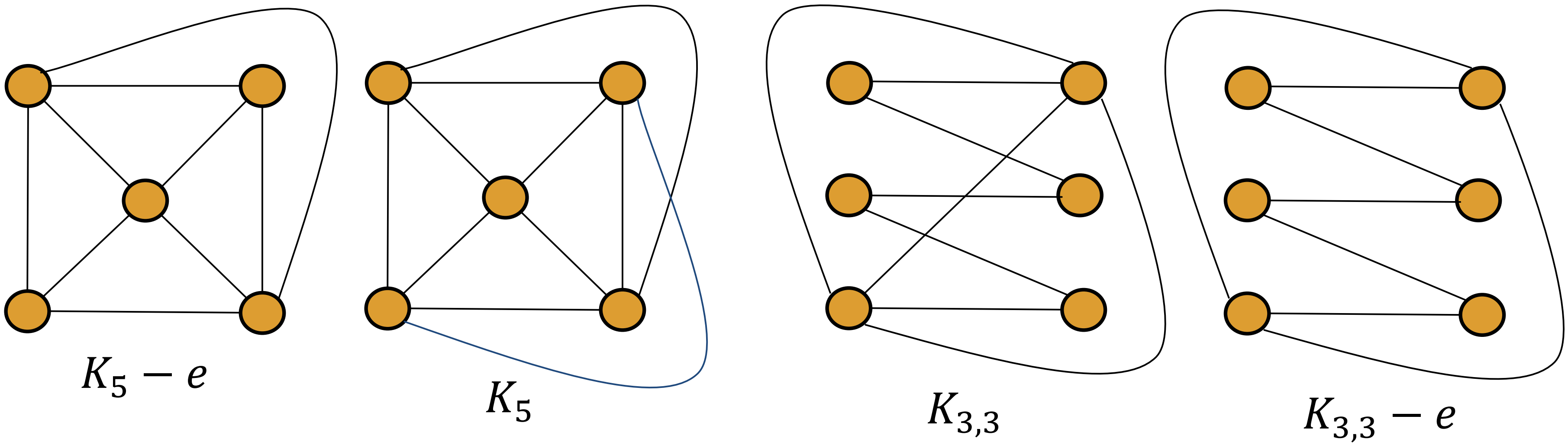
$n = 5$:　K_5不是可平面图，$K_5 - e$是可平面图

$n = 6$:　K_6包含K_5,不是可平面图，$K_{3,3}$是非平面图

$K_{3,3}$: 二分图

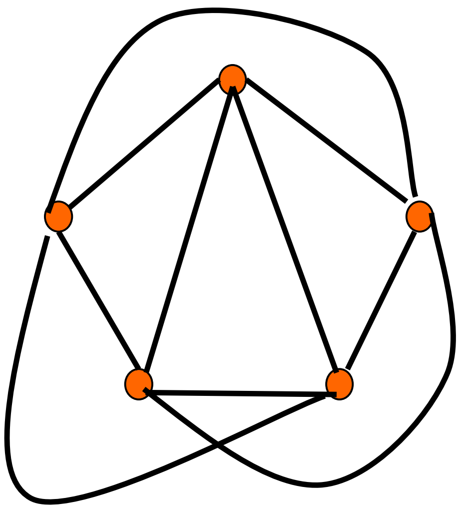
三个设施与三个用户的模型 $m = 3 \times 3 = 9$

$K_{3,3}$是边数最少的非平面图



非平面图

- **非平面图**
  - 如果图G不能嵌入平面使得任意两边只能在结点处相交，那么G就称为非平面图
  - K_5是非平面图吗？
- **定理4.3.1：K_5是非平面图！**
  - 证明（反证法）
    - 在K_5中，$n=5$，$m=10$，如果它是可平面图，应有$m \leqslant 3n-6$
    - 而此时$3n-6=9$，矛盾
- **结点最少？边数最少？**

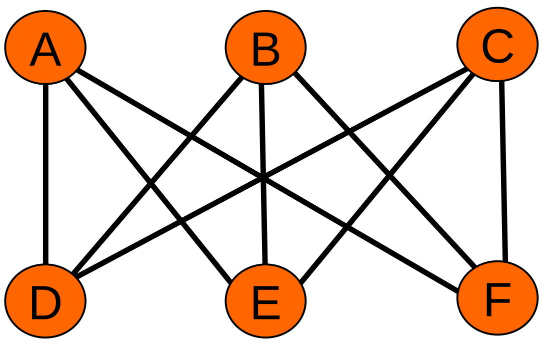


非平面图的特殊情况？

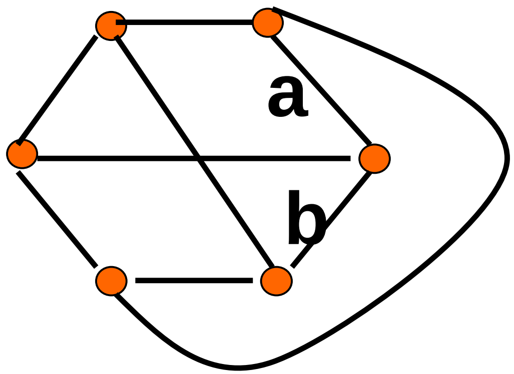
非平面图(2)

- 图G是可平面图吗？
- 去掉一条边，G’可平面吗？
  - 移去一条对角边，G’可平面
  - 移去任一边，G’可平面
- 图G似曾相识？

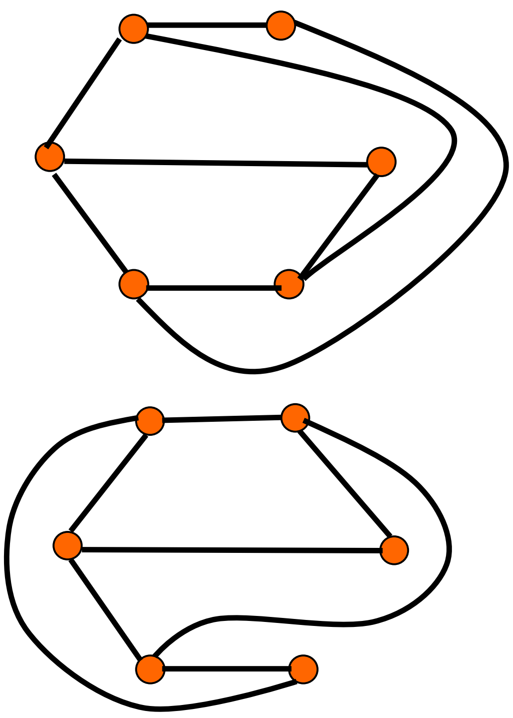
6个点
9条边



二分图$K_{3,3}$

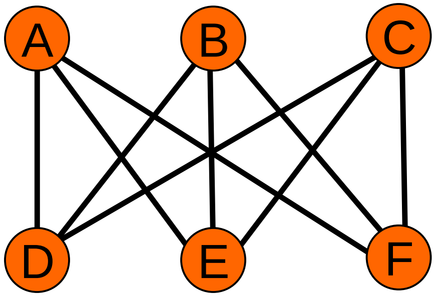


8条边：YES



非平面图(3)

- **定理4.3.2**
  - $K_{3,3}$是非平面图
  - 证明（反证法）
    - 假定$K_{3,3}$是可平面图
    - 由于n=6, m=9，考虑$m \leqslant 3n-6$?
    - 由欧拉公式 d=m−n+2，得到d=5
    - G是二分图，即G中没有K_3子图
    - 因此$4d \leqslant 2m$，亦即$20 \leqslant 18$，矛盾。证毕。



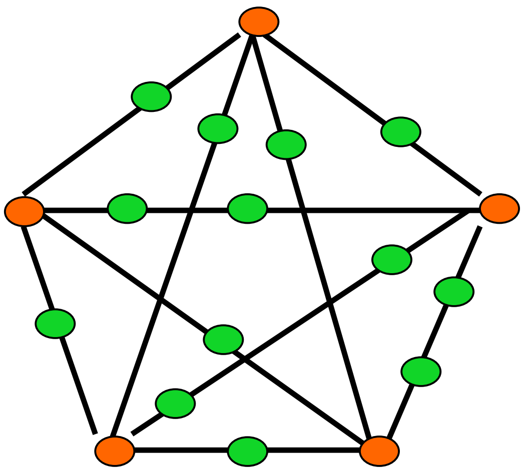
考虑:
域的边界数
之和=2m

- **K_5和$K_{3,3}$分别记为$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图**

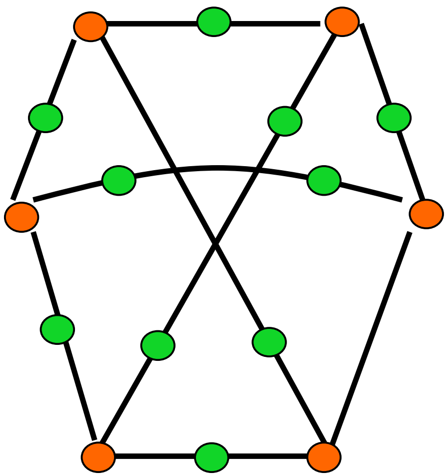
什么图是
非平面图?

非平面图(4)

- **定义4.3.1**
  - 在$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图上任意增加一些度为2的结点(绿色)，得到的图称为$K^{(1)}$型图和$K^{(2)}$型图，统称为K型图



$K^{(1)}$ 型



$K^{(2)}$ 型

定理4.3.3(库拉图斯基Kuratowski)：

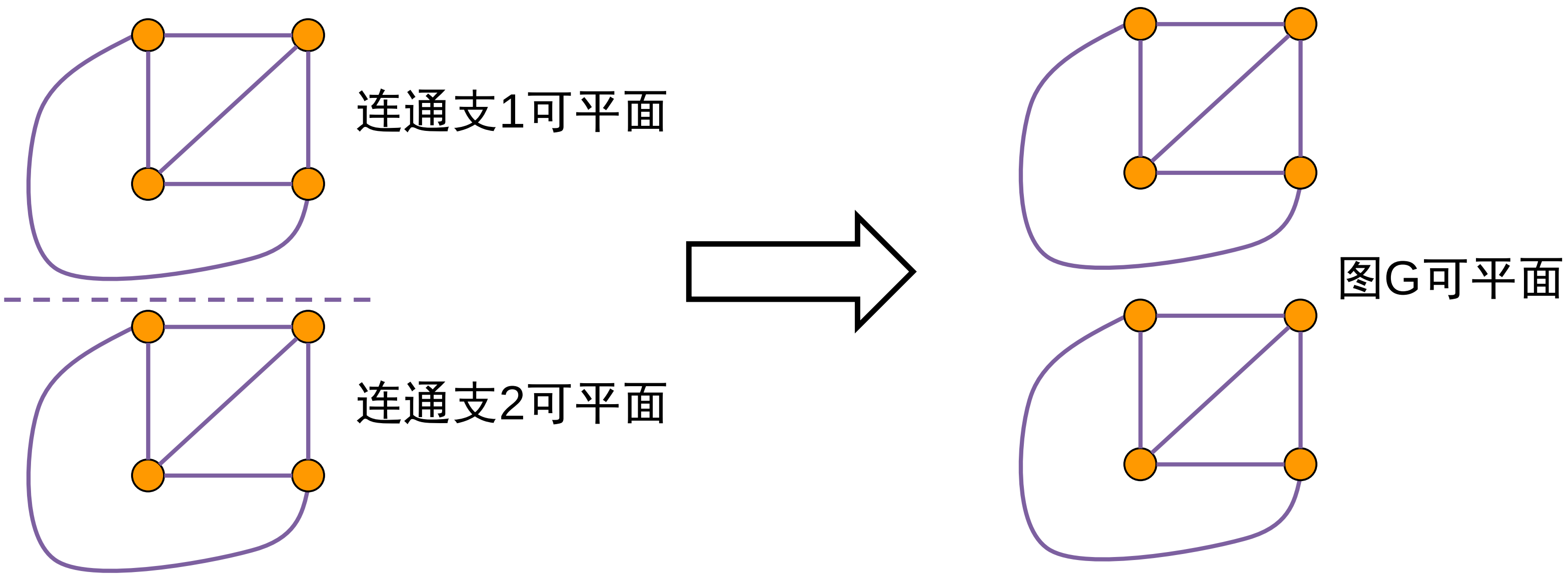
G是可平面图的充要条件是G不存在K型子图

第四章 平面图与图的着色

- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图
- 色数与色数多项式

图的平面性检测

- **判断一个图的可平面性的预备工作（化简图）：**
  1. 若G是非连通的，则分别检测每个连通支。
     仅当所有的连通分支都是可平面的，G就是可平面的

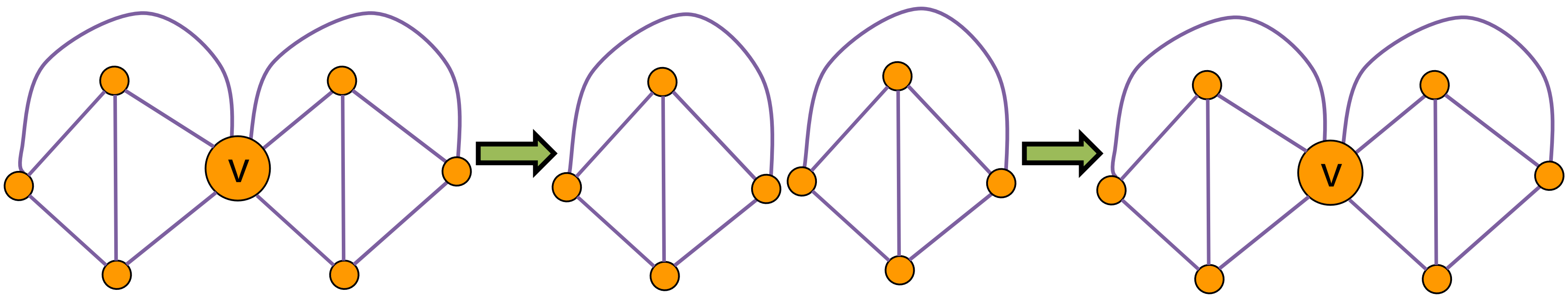


图的平面性检测

- **判断一个图的可平面性的预备工作（化简图）：**

2. 如果G中存在割点v，这时可将图G从割点处分离，构成若干个不含割点的连通子图，或称块，然后检测每一块。

G是可平面的当且仅当每一块都是可平面的



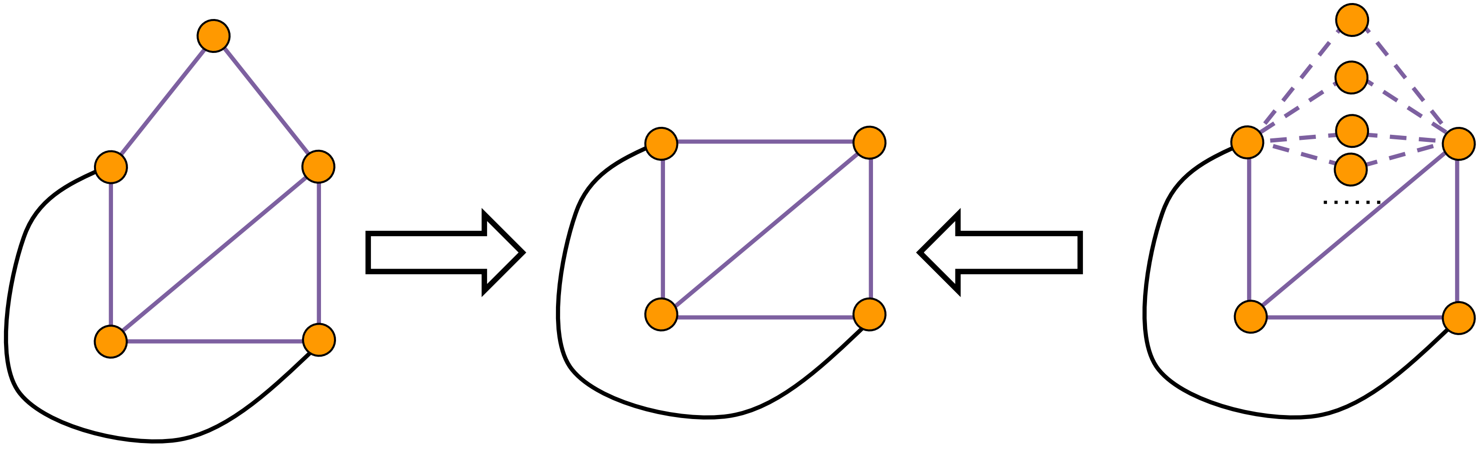
图G　　块1可平面　　块2可平面　　图G可平面

3.移去自环

图的平面性检测(2)

预备工作(续)

4. 移去度为2的结点v_i及其关联的边，而在它的两个邻点v_j, v_k之间加入边(v_j, v_k), 原图是可平面的当且仅当新图是可平面的



图的平面性检测(2)

- **预备工作(续)**

  5. 移去重边

- **反复运用4、5。最后如下判断**

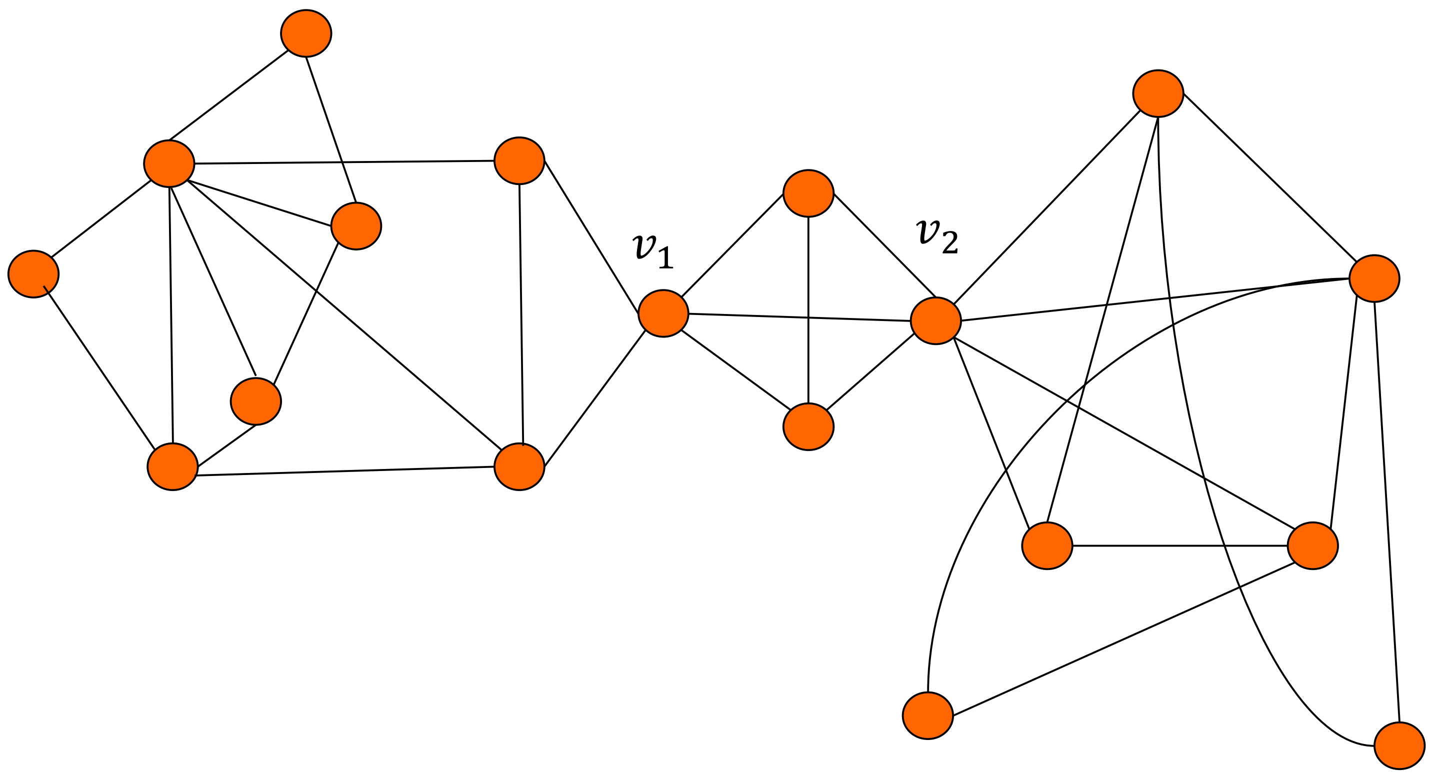
  a. 若$m<9$或$n<5$，则G是可平面图

  b. 若$m>3n-6$，则G是非平面图

  c. 不满足a和b，需要进一步测试

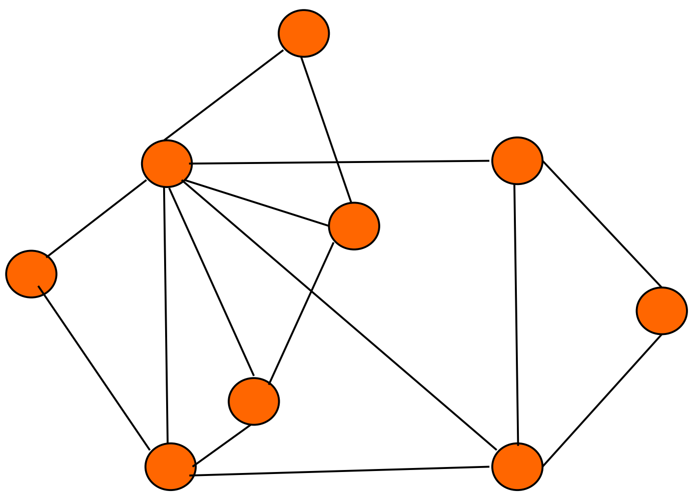
图的平面性检测

- 例4. 4. 1 判断下图的可平面性
- 解：运用前述判定规则，G有两个割点v_1, v_2；可分成三个块分别检测。

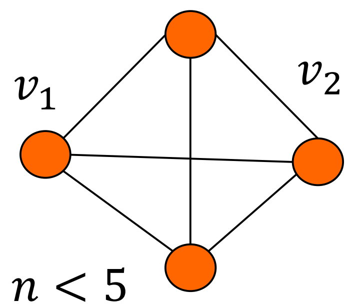


图的平面性检测

- 例4. 4. 1 判断下图的可平面性
- 解：运用前述判定规则，G有两个割点v_1, v_2；可分成三个块分别检测。

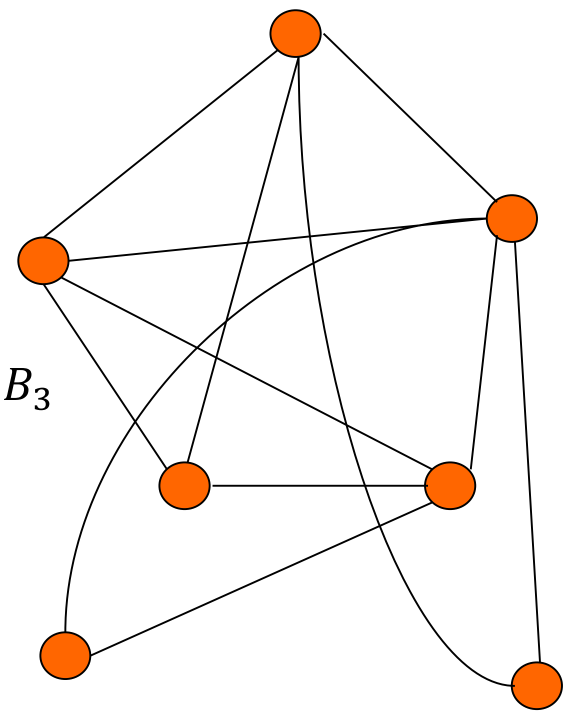


B_1

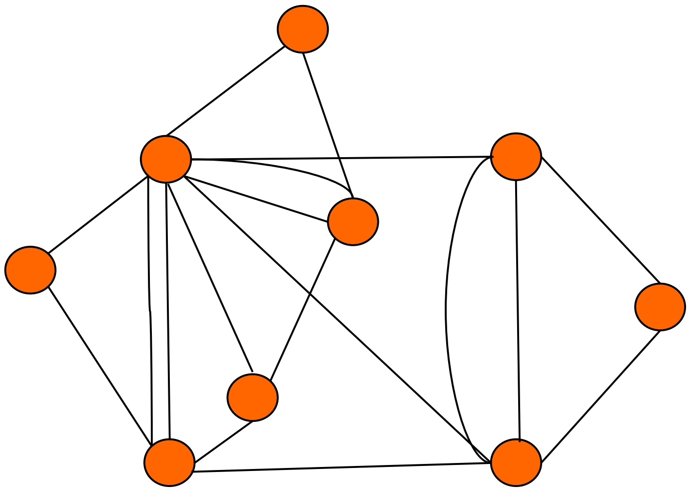


B_2

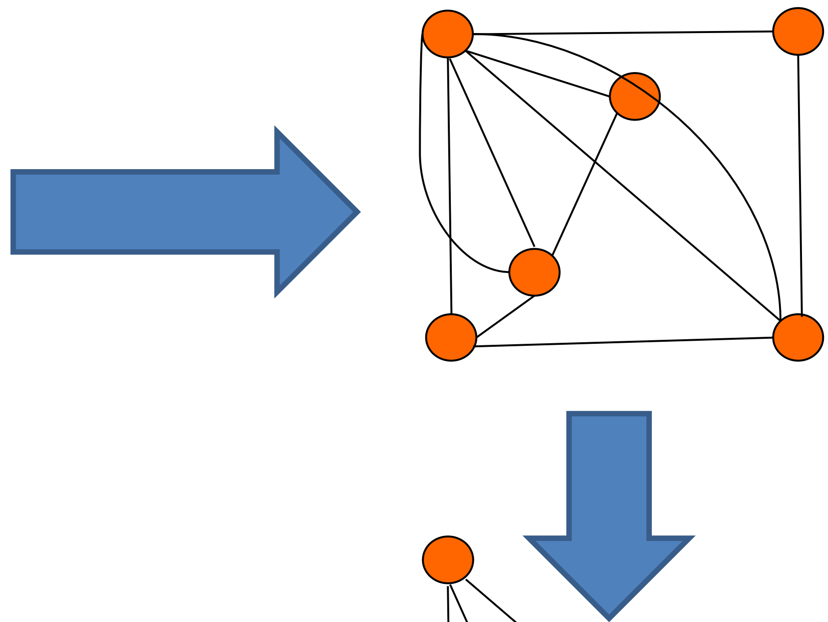
B_3



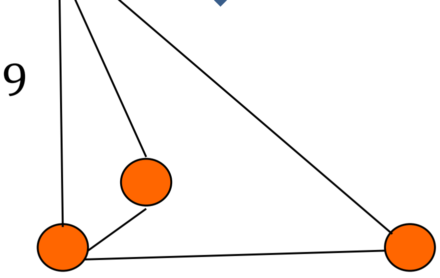
图的平面性检测—例题



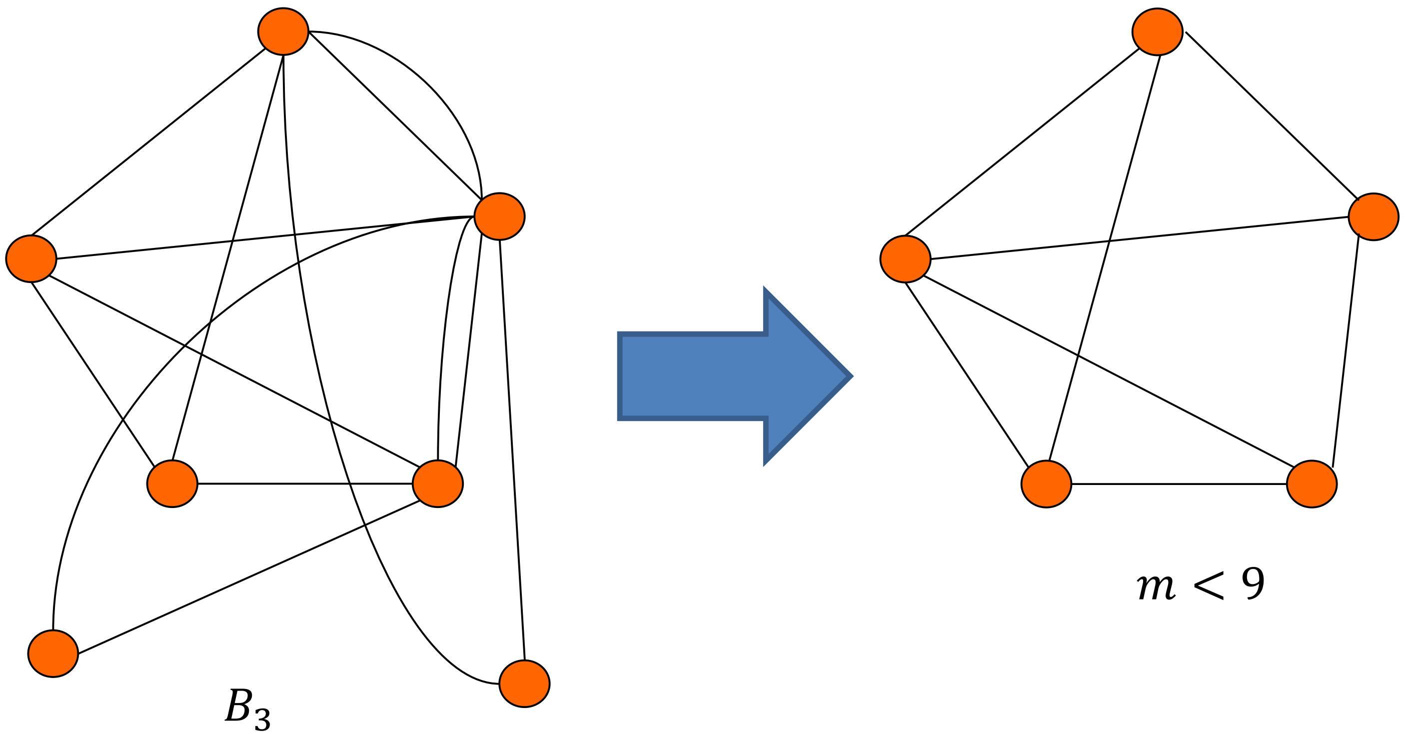
B_1



$m < 9$



图的平面性检测



- 最后要么$n < 5$，要么$m < 9$，因此G是可平面的。

图的平面性检测(4)

- **如果在预处理之后无法判定**
  - 需要进一步检测
  - 具体过程详见DMP算法(教材P74-P79)
  - 利用平面嵌入的思路

第四章 平面图与图的着色

- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

对偶图(序)

- **对偶**
  - 对语文中字数相等、语法相似、词性相同的文句，成双成对地排列，借以表达相对或相关意思的修辞方法，称为“对偶”
  - 泛函分析理论：对偶空间
  - 线性规划：对偶问题
    - 任何一个求极大化的线性规划问题都有一个求极小化的线性规划问题与之对应，反之亦然
    - 如果我们把其中一个叫原问题，则另一个就叫做它的对偶问题，并称这一对互相联系的两个问题为一对对偶问题
  - 图论中什么是对偶？

对偶图(序)

- **放飞你的想象力**

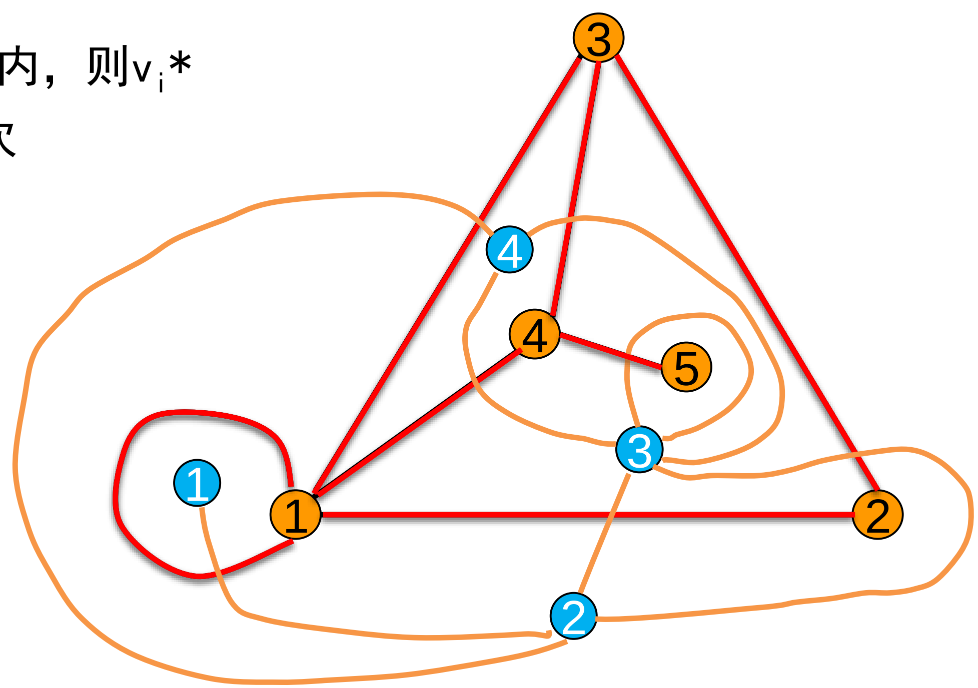
1. 对称？
2. 图与补图？
3. 对偶道路？
4. 平面图与非平面图（已有余补共轭等修饰）
5. 最长道路与最短道路（转换后为对方？）
6. 最长图与最短图，回路v. s. 道路？
7. 点对边、边对点（对偶的对偶？）
8. 区域对点、点对区域？

如果不看书的话，想破头也想不出来居然是这么定义的

域边界数之和
=度数之和
=2m

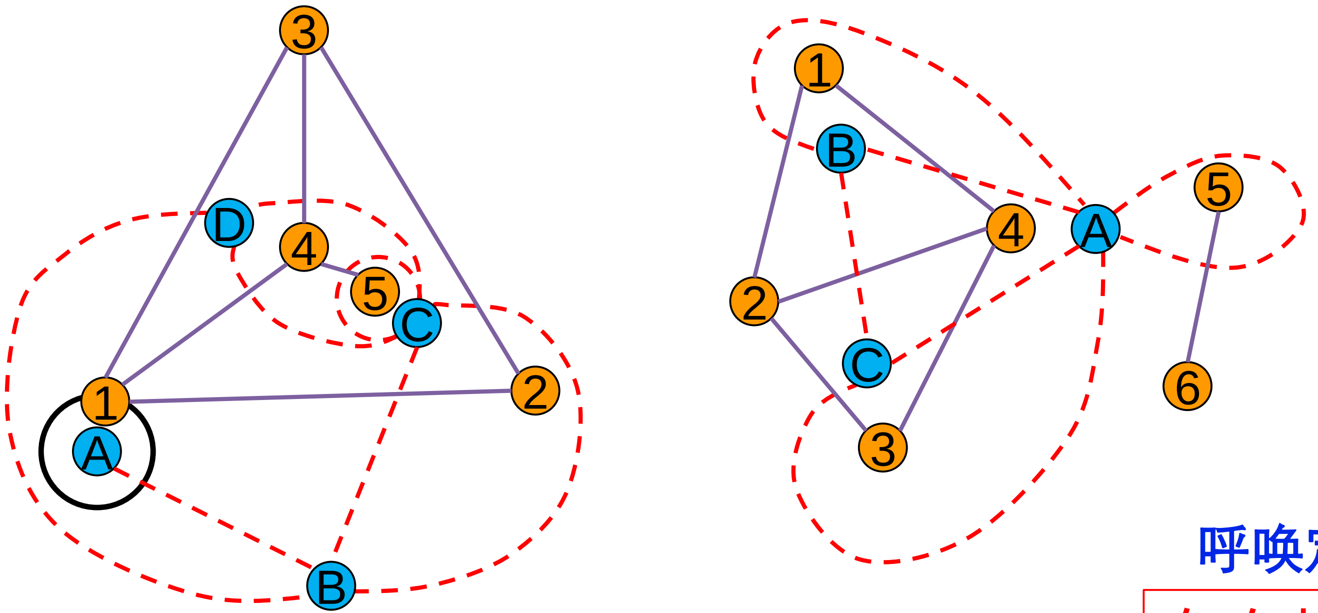
对偶图

- **定义4.5.1：对偶图**
  - 由原图G来构造对偶图G*的做图方法
    1. G中每个确定的域f_i内设置一个结点v_i*
    2. 对域f_i与f_j的共同边界e_k，有一条边e_k*=(v_i*, v_j*) ∈E(G*)，并与e_k相交一次
    3. 非共同边界：若e_k处于f_i之内，则v_i*有一个自环e_k*与e_k相交一次
- **对偶图作图过程**
  - 给出了求对偶图G*的方法，也称为对偶图D (drawing)过程
  - G*是平面图，避免边交叉



对偶图(1)

- 例4. 5. 1
  - 以下两个图的对偶图如虚线边所示



呼唤定理

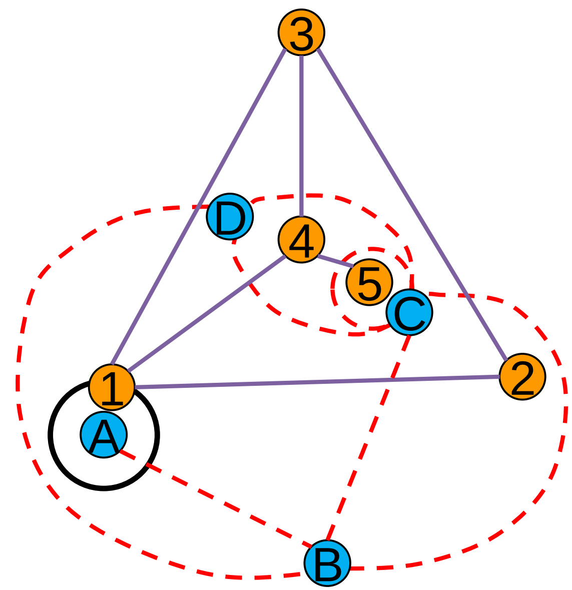
存在性?
唯一性?

G*中的点数和边数?

G*中结点的度数?　G中域边界数　割边加倍

对偶图(2)

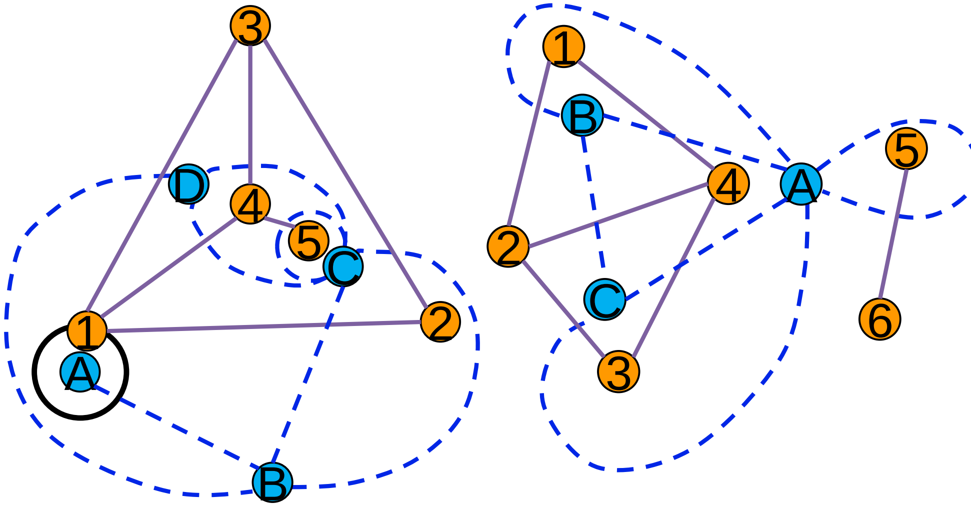
- **性质4.5.1**
  - 如果G是平面图，G一定有对偶图G*，而且G*是唯一的
    - 由D过程可确定点和边



- **回顾定义4.5.1：对偶图**
  - 由原图G来构造对偶图G*的做图方法
    1. G中每个确定的域f_i内设置一个结点v_i*
    2. 对域f_i与f_j的共同边界e_k，有一条边e_k*=(v_i*, v_j*) ∈E(G*)，并与e_k相交一次
    3. 非共同边界：若e_k处于f_i之内，则v_i*有一个自环e_k*与e_k相交一次

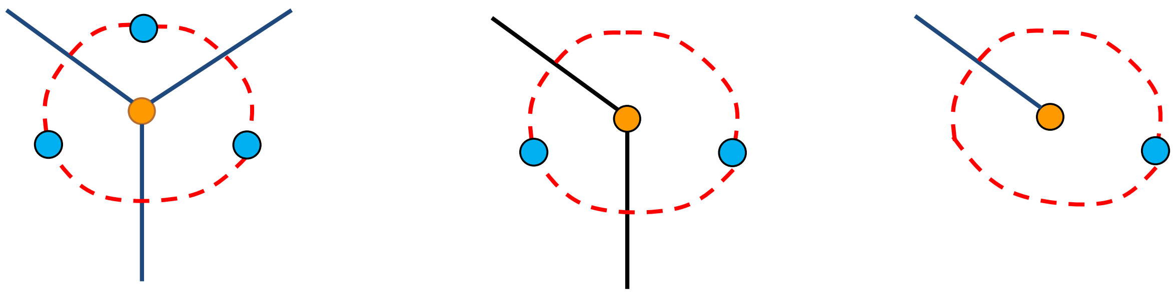
对偶图(3)

- 性质4.5.1：对平面图G，对偶图G*存在且唯一
  - 思考(G*)*=G吗？
- 性质4.5.2
  - G*是连通图
  - 证明：
    - G*中的结点对应G中的域
    - 在平面图G里，每个域f都存在相邻的域
    - 对G的任何部分域来说，剩余的域中都存在与他们之中某个域相邻的域
    - 这样由对偶图的定义可知， G*连通



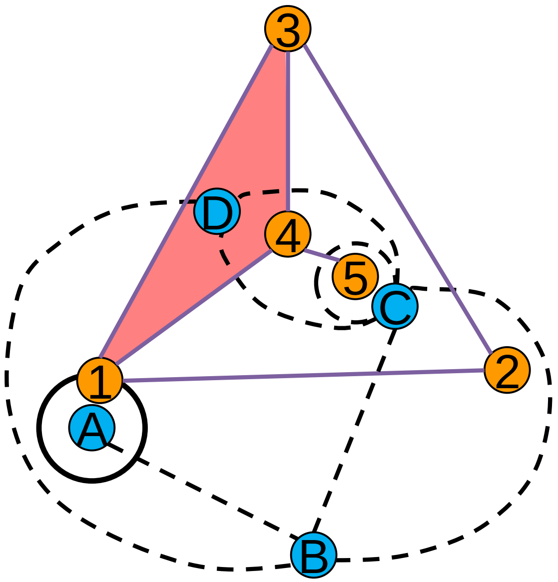
对偶图的性质

- 性质4.5.3
  - 若G是平面连通图，则(G*)*=G。
- 性质4.5.4：
  - 平面连通图G与其对偶图G*的结点n、边m、域d之间有对应关系：
    - m*=m，n*=d：由定义过程即可知
    - d*=n：考虑G中一个点的所有出边，对应的G*的边，围成了G*当中的一个域



对偶图(5)

- **性质4.5.5**　　图G与G*对应的特性？如边集？
  - 设C是平面图G的一个初级回路，S*是G*中与C的各边e_i对应的e_i*的集合，则S*是G*的一个割集。
  - 证明
    - C把G的域分成了两部分，即把域所对应G*的节点集分成两部分
    - 因此E(G*)-S*把G*的结点分成不连通的两部分
    - 由性质4.5.2(即G*是连通图)，G*这两部分分别是连通的，因此S* 是G* 的一个割集



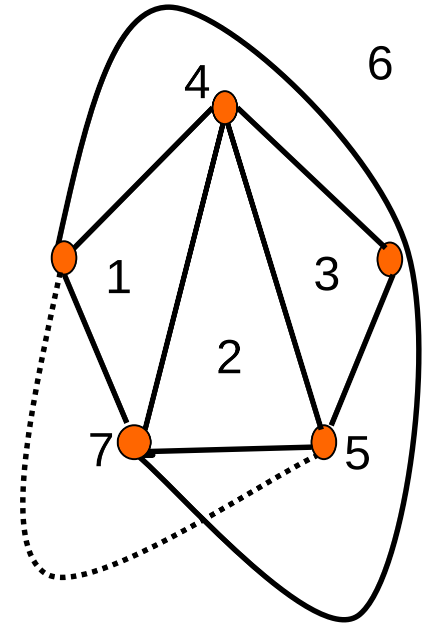
对偶图(6)

- **定理4.5.1 G有对偶图的充要条件是G为平面图**
  - 证明
  - 充分性由性质4.5.1(平面图G存在唯一G*)得证
  - 必要性(反证法)，即非平面图没有对偶图
    - 由库拉图斯基定理，非平面图一定含有$K^{(1)}$和$K^{(2)}$型子图
    - 而$K^{(1)}$、$K^{(2)}$型子图是$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图中增加了一些度为2的结点
      - 不影响对偶图的存在性，只增加重边而已
    - 因此如果$K^{(1)}$、$K^{(2)}$图没有对偶图，那么$K^{(1)}$、$K^{(2)}$型，进而非平面图也没有对偶图

对偶图(7)

- **证（续）**
  - 对$K^{(1)}$图，m=10， n=5， d=?
  - 假定$K^{(1)}$有对偶图，由性质4.5.4（边域点的对应关系），
  - m*=10， n* ≥7
  - 由于$K^{(1)}$中没有自环和重边， 即$K^{(1)}$中每个域边界数≥3, 即度数d(v_i*) ≥3，则 $\sum d(v_i^*) \geq 3\times 7 > 2m^*$
  - 因此$K^{(1)}$没有对偶图

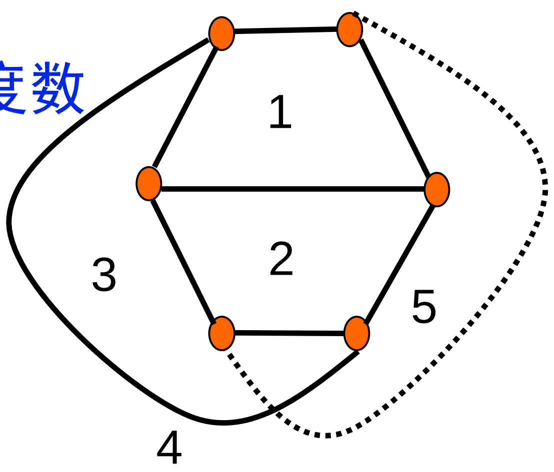
d≥7



对偶图(8)

- **证（续）**
  - 对$K^{(2)}$图，m=9, n=6, d≥5
  - 假定$K^{(2)}$有对偶图，由性质4.5.4，m*=9， n*≥5
  - 由于$K^{(2)}$中每个域的边界数至少为4，故度数$d(v_i^*)\geq 4$，则

$$\sum d(v_i^*) \geq 4\times 5>2m^*$$

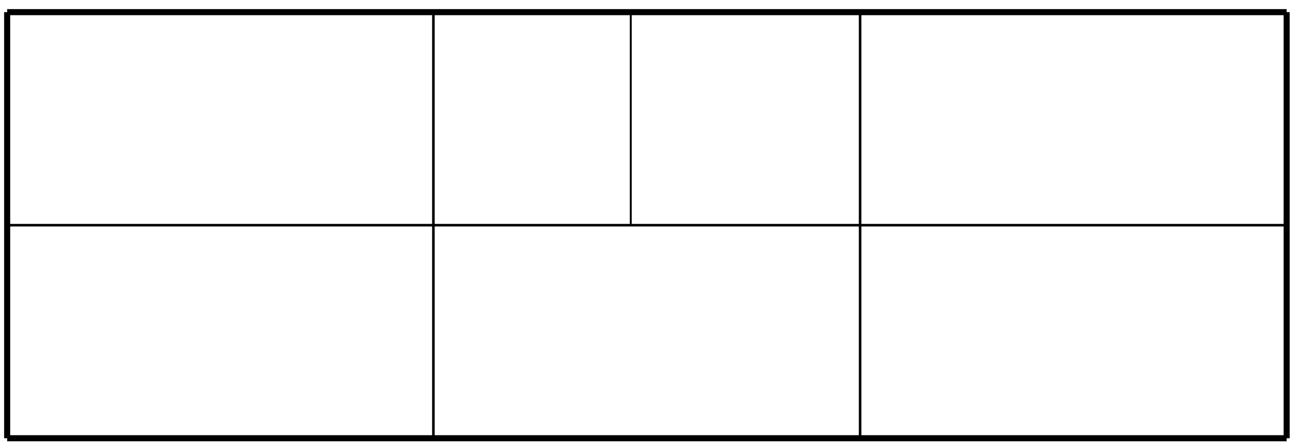


  - 因此$K^{(2)}$没有对偶图
  - $K^{(1)}$、$K^{(2)}$型无对偶图，即非平面图没有对偶图

- **综上，G有对偶图的充要条件是G为平面图**

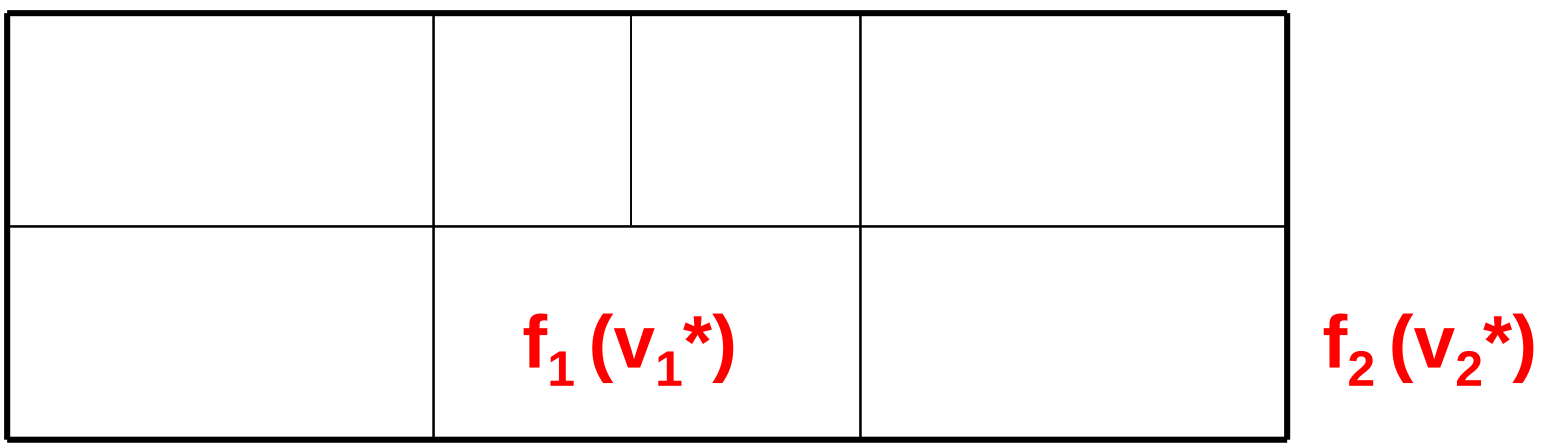
对偶图(9)

- **例4.5.2**
  - 图4.16是一所房子的俯视图，设每一面墙都有一个门
  - 问能否从某个房间开始过每扇门一次最后返回?
    - 考虑结点和边的位置?



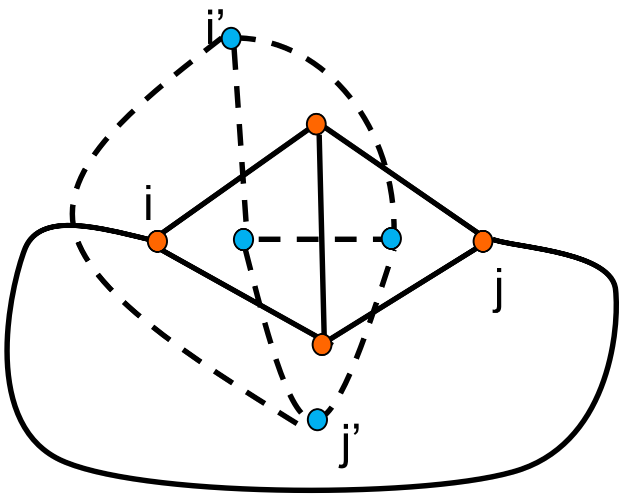
对偶图(10)

- **解:**
  - 做G的对偶图G*，原问题得到转换
  - 原问题(过每扇门一次最后返回)就转化为G* 是否存在欧拉回路
  - 显见与G的域f_1和f_2所对应的G* 的结点v_1*和v_2*的度为奇，因此不存在欧拉回路



对偶图(11)

- 例4.5.3
  - 设i, j是平面连通图无限域上的两个结点，求G中分离i, j的所有割集 **割集v.s. 回路?**
  - 解:
  - 在无限域中填入边(i, j)，得到G_1
  - 做G_1的对偶G_1*
  - G_1*中除了(i’, j’)之外的从i’到j’的初级道路所对应的G的诸边都构成了G中分离i和j的割集

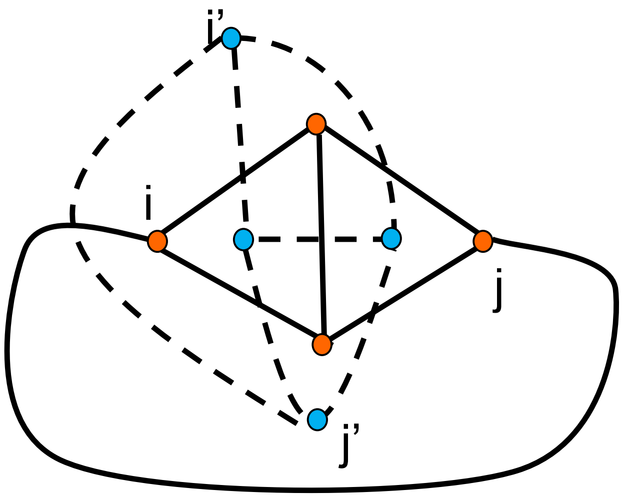


四色猜想(1)

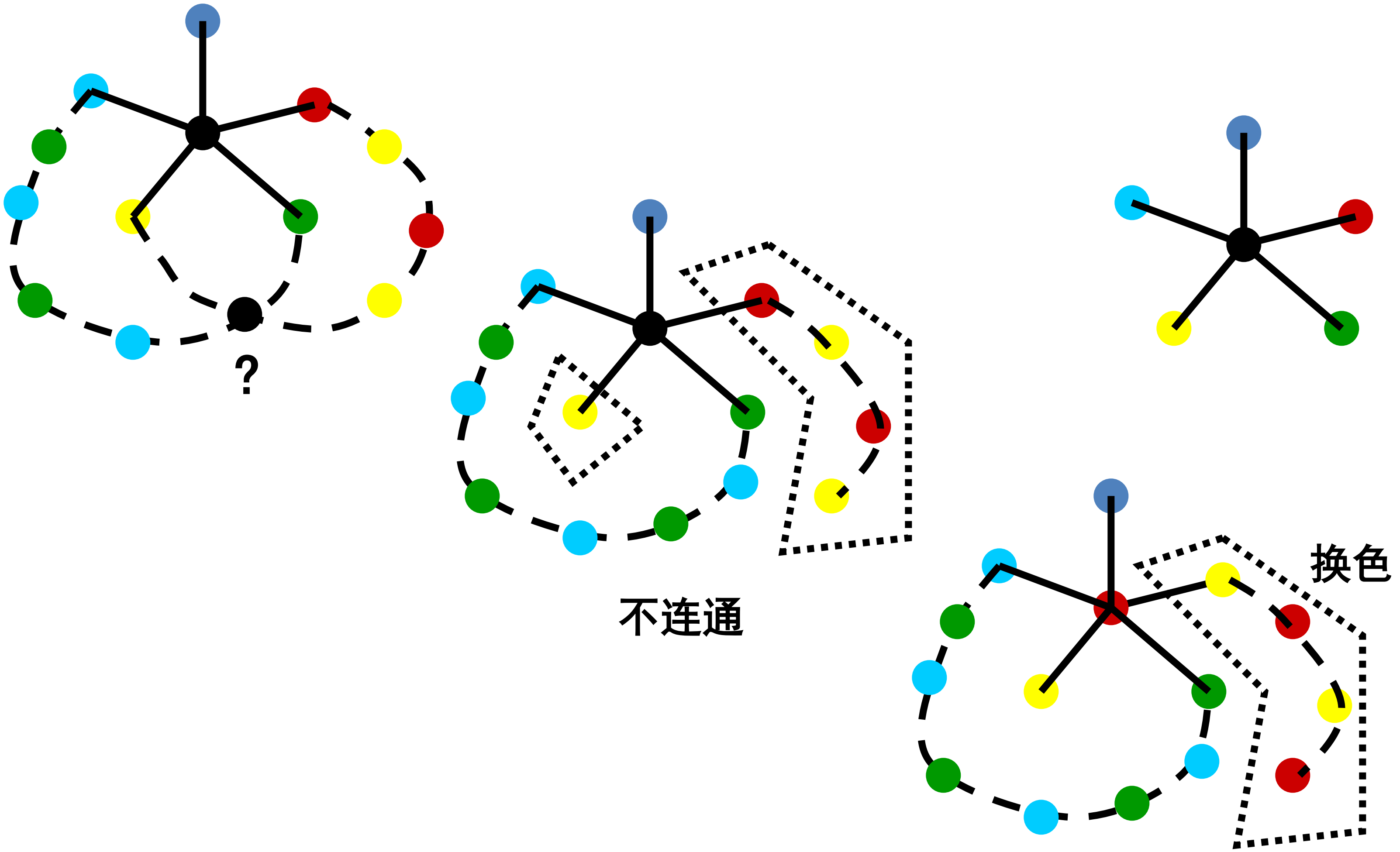
- **四色猜想**
  - 1852年，Francis Guthrie猜测，对任何地图，只需用四种颜色对地图上的国家涂色，就能使任何两个相邻的国家涂有不同的颜色,这一猜测就是著名的“四色问题”
  - 1878～1880年两年间，著名的律师兼数学家肯普（Kempe）和泰勒（Tait）两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理
  - 1890年，数学家赫伍德（Heawood）以自己的精确计算指出肯普的证明是错误的。不久，身为英国皇家学会院士的肯普向英国皇家学会正式报告了他的错误!不久，泰勒的证明也被人们否定了
  - 到目前为止，关于四色问题的研究，最为著名的是W. Haken和K. Appel在1976年所给出的计算机证明：将地图上的无限种可能情况减少为1,936种状态（稍后减少为1,476种），这些状态由计算机一个挨一个的进行检查
  - 但是，四色问题的手写证明，即逻辑推理形式的证明，至今未果
  - 世界近代三大数学难题之一(另外两个是费马定理和哥德巴赫猜想)
  - 时代在等待名垂千古的英雄!

四色猜想(2)

- **四色猜想**
  - 对于任意一个平面图，只需4种不同的颜色就可以对它的域进行染色，满足相邻的域染以不同的颜色。
- **定理4. 5. 2**
  - 每一平面图都是5—可着色的(域着色)
  - 证明（转变为点？简单平面图？）
    - 作G的对偶图G*，命题转为证G*的结点5-可着色
    - G*也是可平面的
    - 由于自环和重边不影响点染色，所以可以移去G* 中的自环、重边，得到简单图G_0
    - 命题又转化为任意简单平面图G_0可以结点5着色



五色定理证明示意图



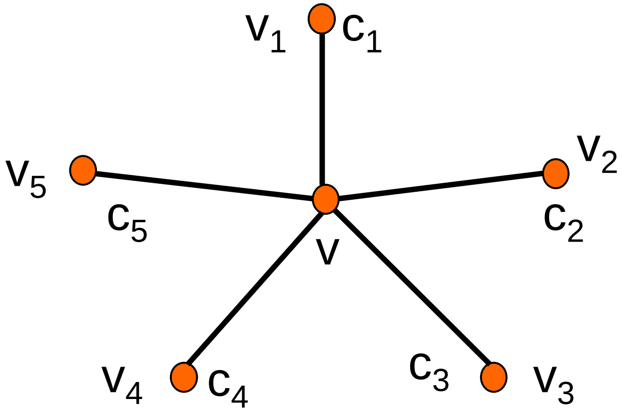
四色猜想(3)

- 证（续）
  - 以下对简单平面图G_0的结点进行归纳证明
  - 当n≤5时，结论显然成立
  - 假设n-1时成立
  - 要证结点数为n时成立，怎么办？
  - 由于G_0是结点数为n的简单平面图，由定理4.2.2(简单平面图G中存在度小于6的结点)，G_0中存在结点v，$d(v)<6$
  - 移去v以后得到G_0'，由假设条件，G_0'的结点5-可着色，着好色之后，再把v放回

图中一定存在孤立点就好了

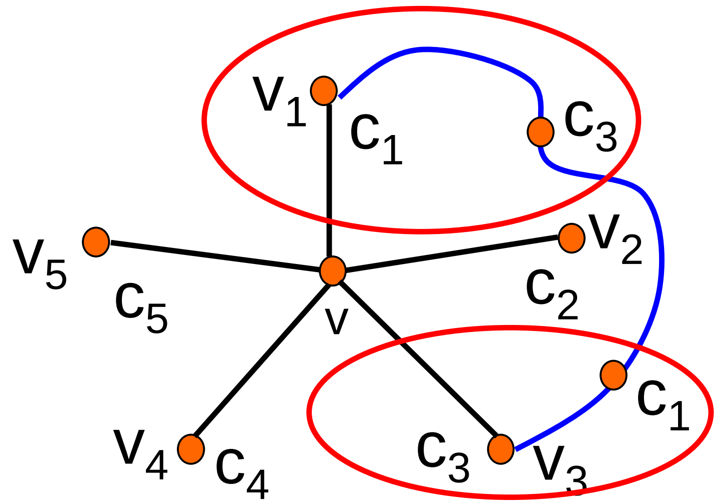
四色猜想(4)

- **证（续）**
  - 考虑将v放回G_0’的过程， 注：d(v)<6
  - 如果d(v) ≤4，或者d(v)=5且v 的邻接点没有用完5种颜色，则v可以着第5种颜色，即G_0 的点可以5着色
  - 如果v的邻接点恰好用了5种颜色，怎么办呢？
  - 如c_1～c_5，其中设结点v_i用c_i着色



四色猜想(5)

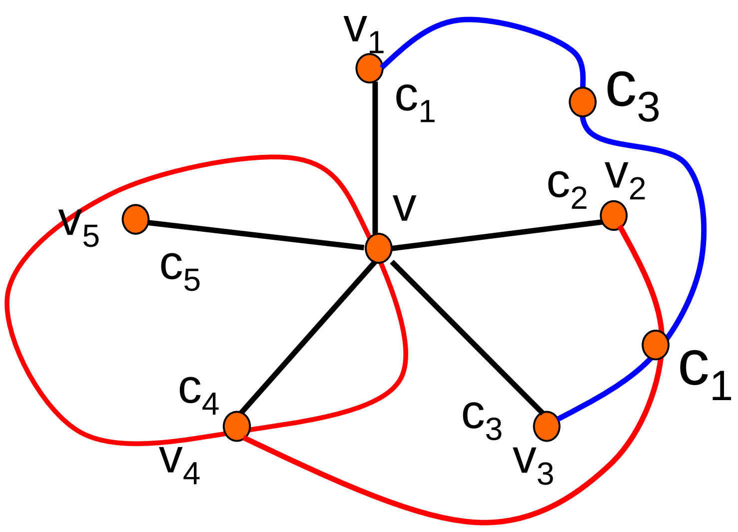
- 证（续）
  - 考虑能否将v_1结点换成c_3颜色？
  - 令G_{13}是$G_0' = G_0 - v$的一个子图，由c_1和c_3着色的结点导出
  - 若v_1和v_3分属G_{13} 的不同连通支
    - 将v_1所在连通支各结点的c_1、c_3颜色互换，v可以着c_1
    - 得到G_0 的一个5着色
  - 如果v_1和v_3属于G_{13}的同一个连通支
    - 则一定存在v_1到v_3的结点交替c_1和c_3颜色的道路P
    - 道路P加上边(v, v_1)和(v, v_3)构成一个封闭回路
    - 封闭回路把v_2与v_4、v_5分割在不同的区域
    - 道路P上任意节点颜色为c_1或c_3



怎么办?

四色猜想(6)

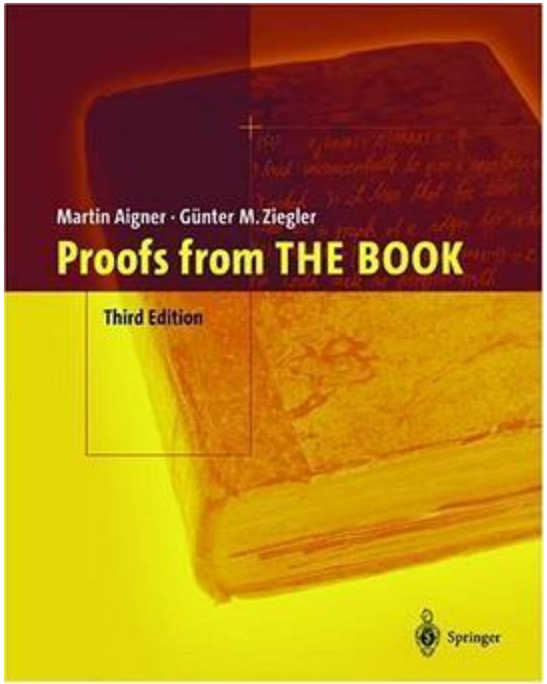
- **证（续）**
  - 考虑c_2和c_4对结点染色，是否构成连接v_2和v_4的道路P’
    - 不会存在由c_2和c_4交替对结点染色的道路连接v_2和v_4
    - 否则与G_0 是平面图矛盾
  - 在G_0-v的子图G_{24}中，v_2和v_4分属于不同的支
  - 将v_2所在连通支各结点的c_2、c_4颜色对换，此时v_2着以c_4，可令v着以c_2，则G_0可5着色
  - 证毕



思考该方法能够证明四色问题？
v_5可能与v_1、v_3、v_4均连着

四色猜想(7)

- 介绍了35个著名数学问题的极富创造性和独具匠心的证明。
- 其中有些证明不仅想法奇特、构思精巧，作为一个整体更是天衣无缝。
- 有些虔诚的数学家将这类杰作比喻为上帝的创造。
- 数学天书中的证明



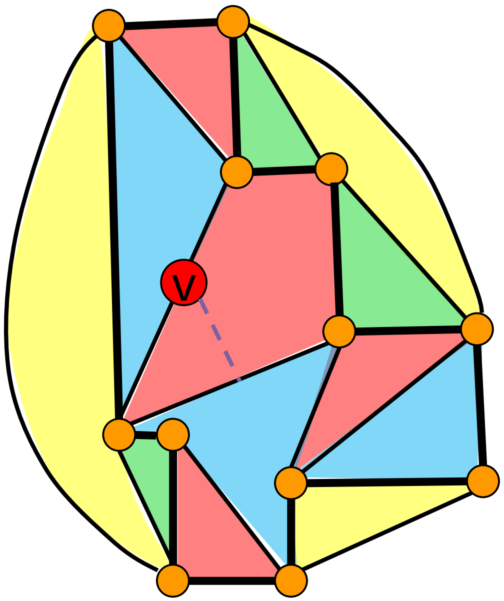
四色猜想(7)

- **定理4.5.3**
  - 如果平面图有Hamilton回路，则四色猜想成立
  - 证明
    - 此结论已在第二章中给出
    - 请回忆……

四色猜想(8)

- 证明
  - 用一个示意图来加以直观的说明
  - 设粗线边是G中的一个哈密顿回路，则它将G的域划分成内外两部分
  - 每一部分的域用两种颜色可以染色，满足相邻域染不同颜色
  - 不然，一定存在三个以上的域互相连接的情形
  - 此时必出现v这样的结点。这与H是哈密顿回路相悖
  - 因此结论正确

无限域染绿色



如何用H回路来证明四色猜想?

四色猜想(9)

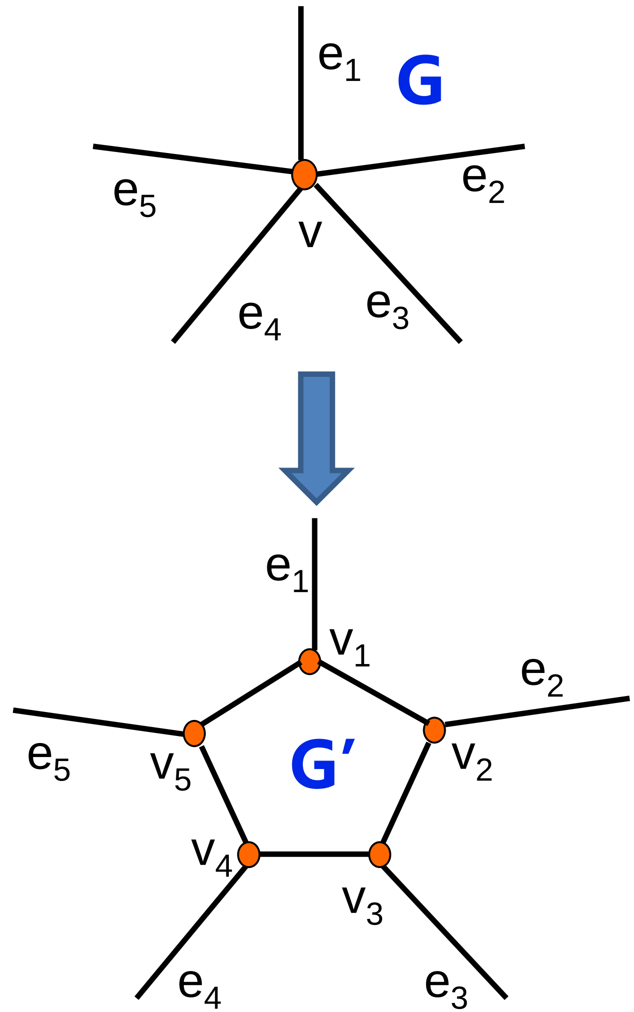
- **定理4.5.4**
  - 3-正则平面图是指每个结点的度都是3的平面图
  - 若任何一个3-正则平面图的域可4着色，则任意平面图的域也可以4着色

构造：将图改造为3-正则平面图，不影响着色

- **证明（基本方法？）**
  - 任何一个平面图G，如果存在度为1的结点v，则它一定处于某个域的内部，移去v 并不影响这个域的染色
  - 如果存在度为2的结点v_i，删去v_i及其关联的边(v_i, v_j)，(v_i, v_k)，同时增加一条边(v_j, v_k)，也不会影响域的染色

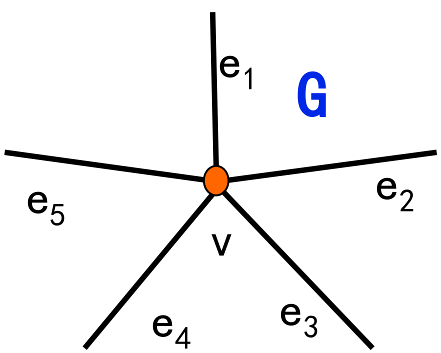
四色猜想(10)

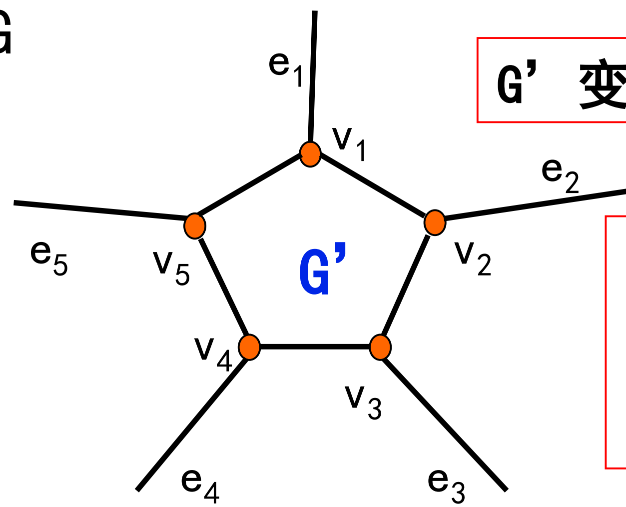
- 证（续）
  - 如果存在结点v，满足d（v） ≥4。它关联于边e_1, e_2, …e_k, 设这些边依次环绕于v
  - 我们对应每一条e_i构造一个新结点v_i，然后移去v，并加入新的边（v_1, v_2），（v_2, v_3），…，（v_k, v_1）
  - 新加入的每一个结点的度为3
  - 即图G转化为3-正则平面图G'



四色猜想(11)

- 证（续）
  - 已将原图G转化为：3-正则平面图G’
  - 原命题要证“若任何一个3-正则平面图（G’ ）的域可4着色，则任意平面图（G）的域也可以4着色”
  - 转化为要证“若G’ 的域可4着色，则G可域4着色”
  - 由已知条件G’ 的域可以四着色，再把由v_1， v_2，…， v_k作为边界点的域收缩，最后还原成一个结点v，那么G’ 的域染色仍然是用于G



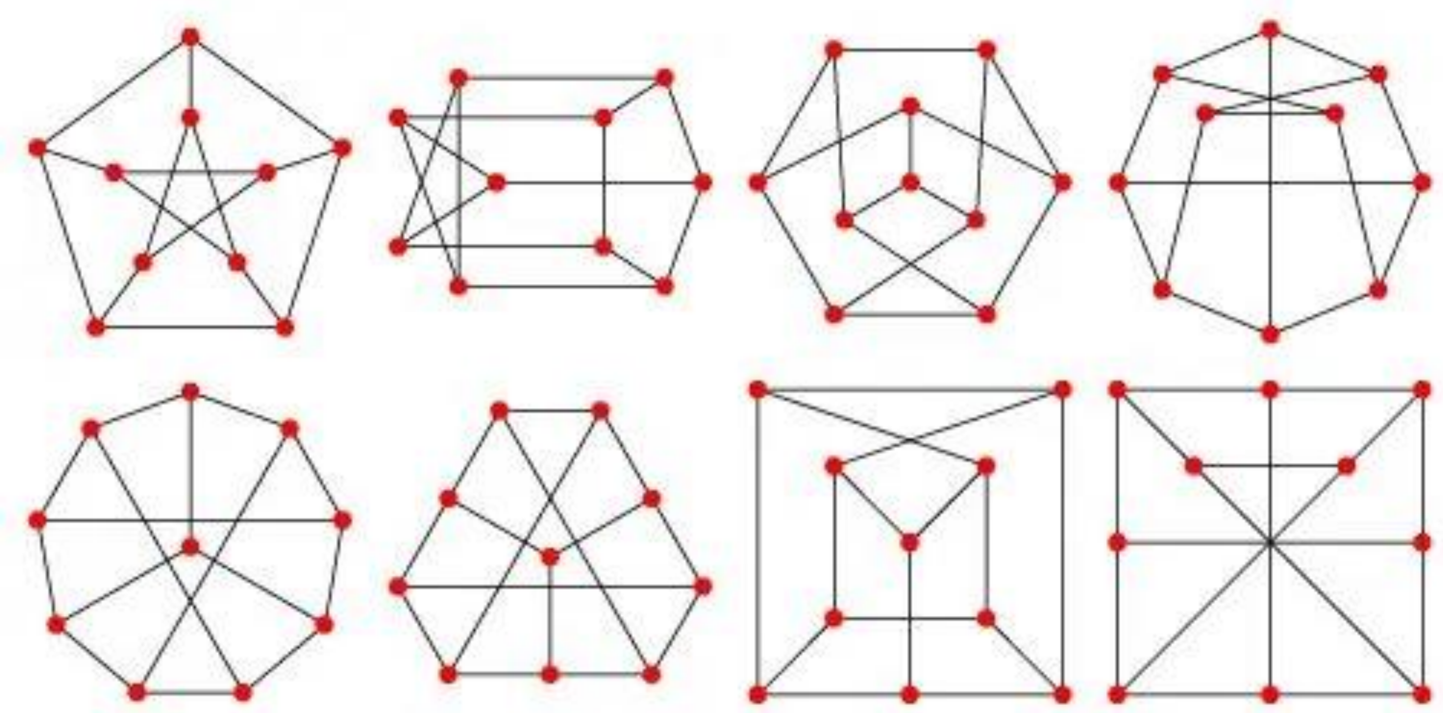


G’ 变换到G不影响着色，证毕

Tait猜想(1878年)：
任何一个3-正则平面图都存在H回路

彼德森图(3正则图)

- 由10个顶点和15条边构成的连通简单图
- 有哈密顿路但不是哈密尔顿图，常常作为**反例**出现在图论之中



继续开启梦想之旅

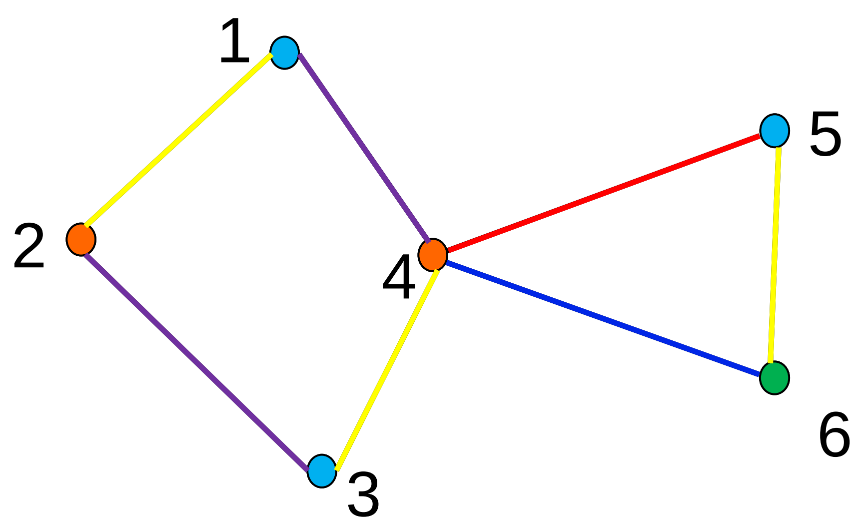
- **四色猜想？**
  - 从对域着色还能想到什么？
  - 可否对点着色、对边着色？
  - 点4着色？
  - 特殊情况？
  - 联系之前的内容（如欧拉回路）

色数与色数多项式

- 基本概念
- 结合对偶图的证明方法
- 通过信道分配问题，了解图论建模的不同方法及其在着色当中的应用

色数与色数多项式

- **定义4.6.1**
  - 给定图G，满足相邻结点着以不同颜色的最少颜色数目称为G的色数，记为γ(G)
- **定义4.6.2**
  - 给定图G，满足相邻边着以不同颜色的最少颜色数目称为G的边色数，记为β(G)



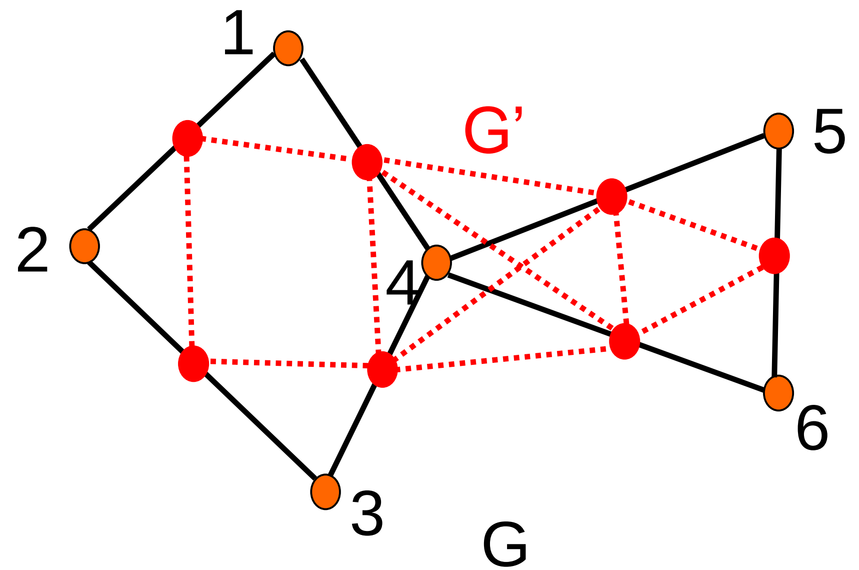
$\gamma(G) = 3$

$\beta(G) = 4$

色数与色数多项式(2)

- **边着色与点着色是否有什么联系？**
  - 在G的每条边e_i上设置一个结点v_i'
  - 如果e_i与e_j关联于同一结点v_k，则G'中有边(v_i'，v_j')
  - G的边着色问题等价于虚线边所示G'的结点着色问题
  - 本课程仅讨论：

    结点着色问题



$\gamma(G)=3$

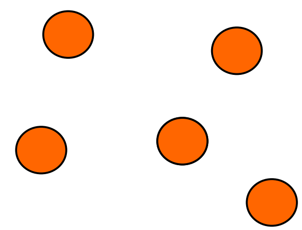
$\beta(G)=4$

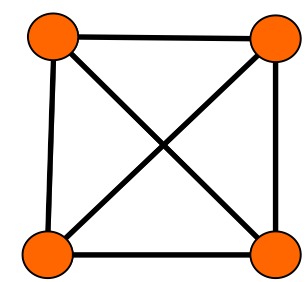
色数与色数多项式(3)

一些直观结论

1. 若G是空图：

   γ (G) ＝1



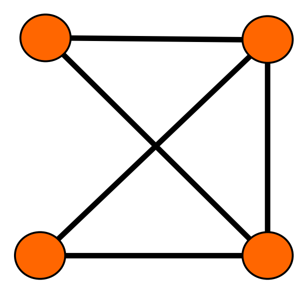


2. 若G是n个结点的完全图：

   则γ (G) ＝n

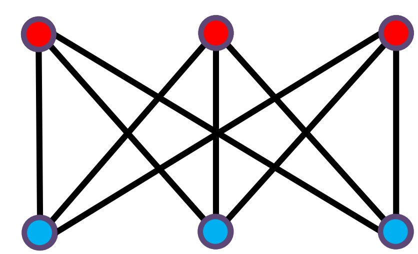
3. $G=K_n-e$， 则：

   γ (G)=n−1



4. G是二分图，则：

   γ (G) ＝2



色数与色数多项式(3)

一些直观结论

5. G是2n个节点的回路

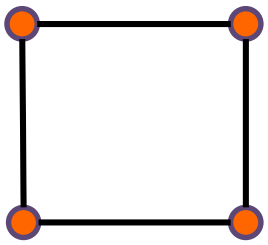
   $\gamma(G)=2$

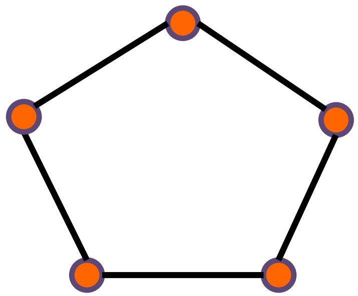
6. G是2n+1个节点的回路

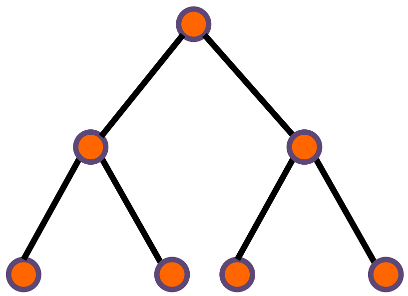
   $\gamma(G)=3$

7. G是n(n>=2)个结点的树

   $\gamma(G)=2$



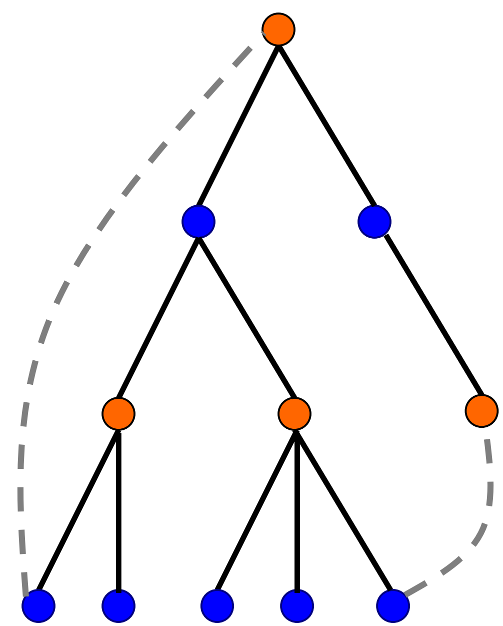




$\gamma(G)=2$的一般情况？

色数与色数多项式(4)

- **定理4.6.1：非空图G，γ(G)＝2当且仅当它没有奇回路**
- **证明**
  - 充分性（构造法）
  - 在G中确定一个林T'，其每个连通子图都是树T，按树层次结构，从树根开始可以构造出：γ(T)＝2
  - 由于每个回路都是偶回路
  - 所以加入的每条余树边，都是连接某个奇数层节点v_i和某个偶数层节点v_j的，不会使结点着色发生变化
  - 因此γ(G)＝2
  - 必要性（反证法）
  - 如果G中有奇回路，则γ(G)≥3，矛盾

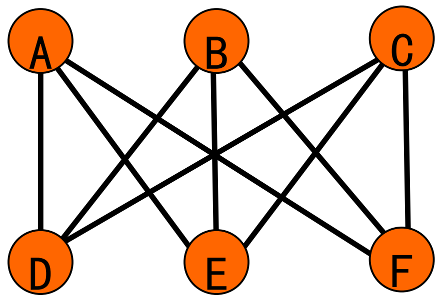


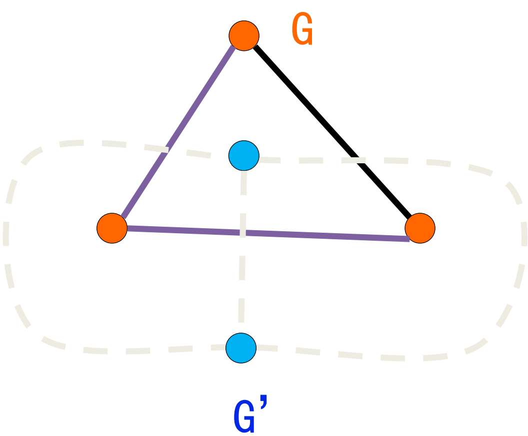
色数与色数多项式(5)

- **推论：二分图中的回路都是偶回路**
  - 思考：如何证明？
- **例4.6.2**
  - 平面连通图G的域可2着色当且仅当G中存在欧拉回路
- **证明**

域着色转化为点着色

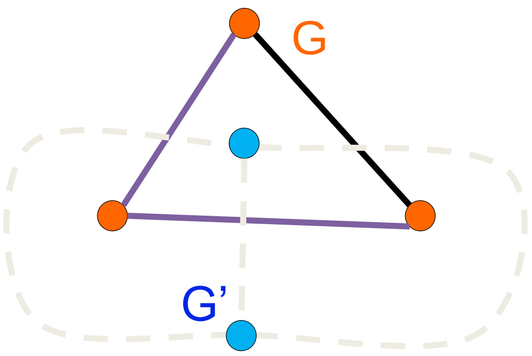
  - G存在对偶图G*，原命题变为：G*点2着色，当且仅当连通图G有欧拉回路。





色数与色数多项式(6)

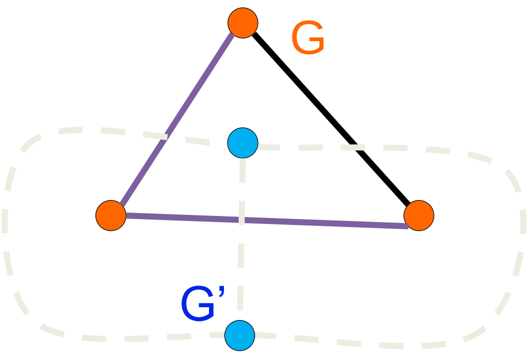
- **证明**
  - 要证：G*点2着色当且仅当连通图G有欧拉回路



  - 必要性
  - 因为G*可点2着色，由定理4.6.1(即γ(G)＝2当且仅当它没有奇回路)，G*无奇回路，即每个回路都是偶回路
  - 考虑G*中回路围成的域，则G*每个域f_i*的边界数都是偶数
  - 由于(G*)*=G，G*每个域f_i*对应G的一个结点v_i，由D过程知，域f_i*的边界(数)对应结点v_i的边(度)
  - 因此对任意v_i，度$d(v_i)$是偶数，故G有欧拉回路

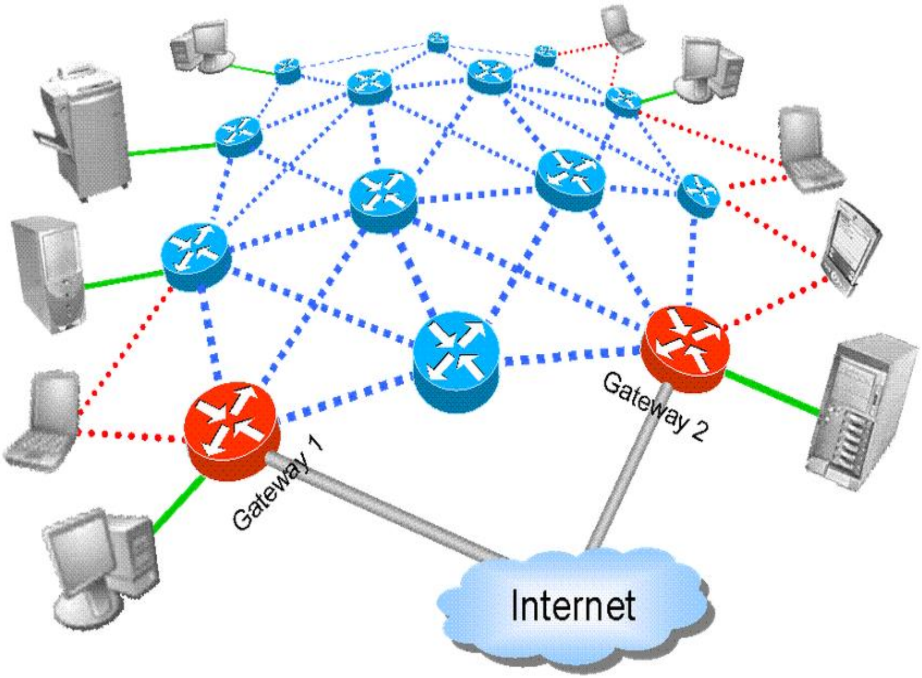
色数与色数多项式(7)

- 要证：G*点2着色当且仅当连通图G有欧拉回路
- 充分性
  - G有欧拉回路
  - 即G 中每个结点的度都是偶数
  - G*中每个域的边界数都是偶数
  - 因此G*中包围每个域的回路都是偶回路
  - 由于任意两个偶回路的对称差依然是偶回路
  - 所以G* 中没有奇回路， γ(G*)＝2



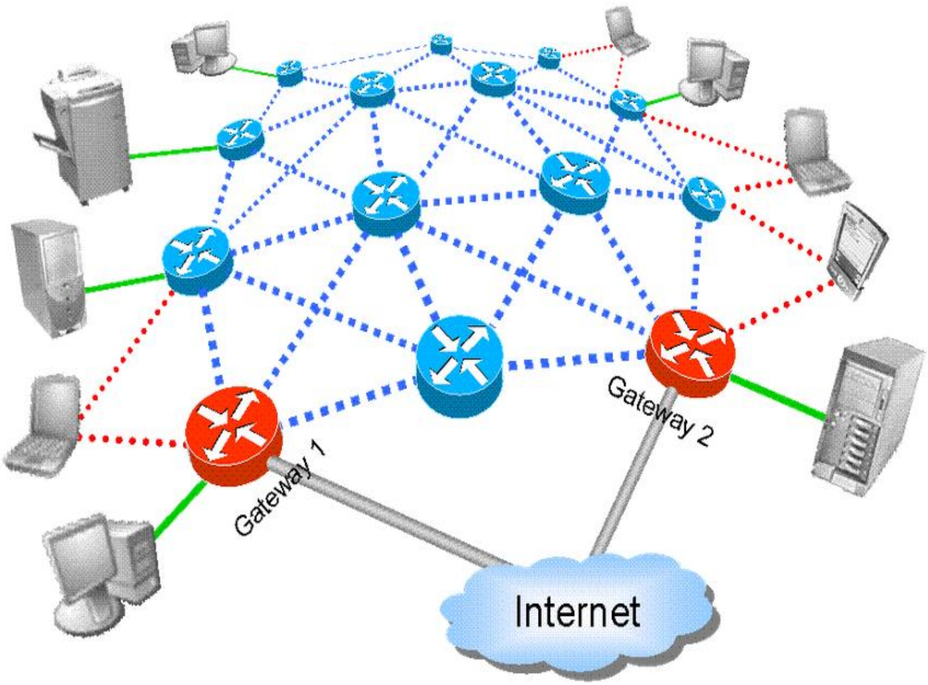
色数与色数多项式(8)

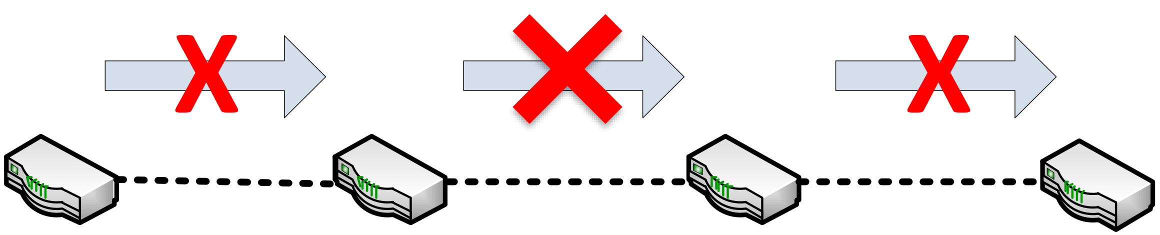
- 着色应用：无线Mesh网络中的信道分配
- 无线Mesh网络
  - 提供大范围高速无线接入
  - 两类节点
    - Mesh路由器
    - Mesh客户端
  - 多跳无线传输



色数与色数多项式(9)

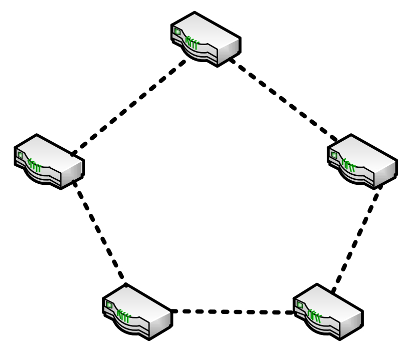
- 信道特性
  - 信道广播造成干扰
  - 多跳无线传输受干扰的影响尤其严重
  - 需要避免干扰冲突
  - 如何建模？？？

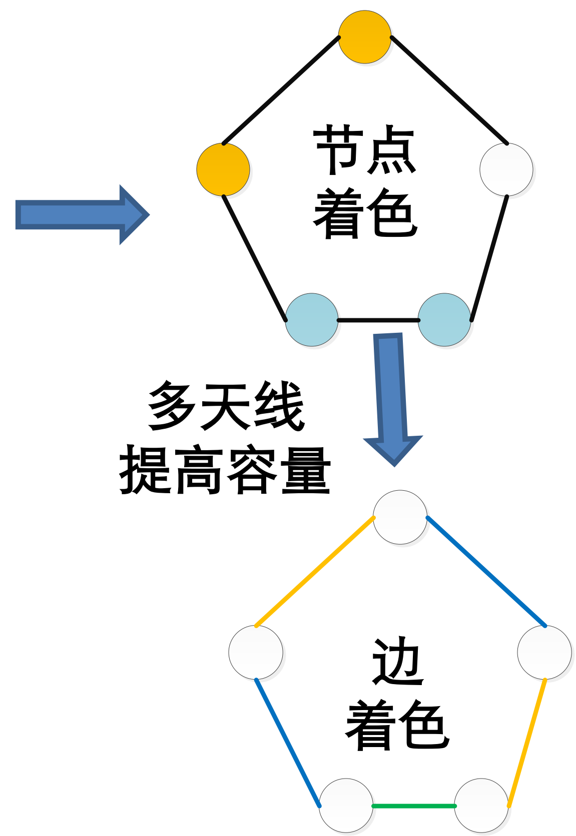




色数与色数多项式(10)

- **基于网络节点的信道分配模型**
- **单天线：每个节点任意时刻处于某一个信道**
  - 结点着色模型
    - 网络节点→结点
    - 无线链路→边
    - 信道→结点的颜色



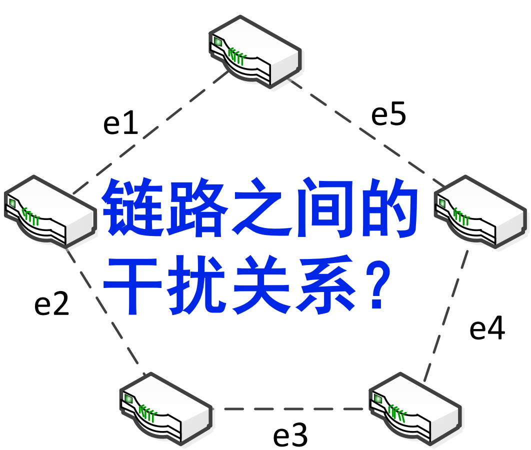


- **多天线**
    - 每个节点可以同时与多个节点通信
  - 边着色模型
    - 用边的颜色代表链路的信道分配
    - 所需要的信道数量：是边色数吗？

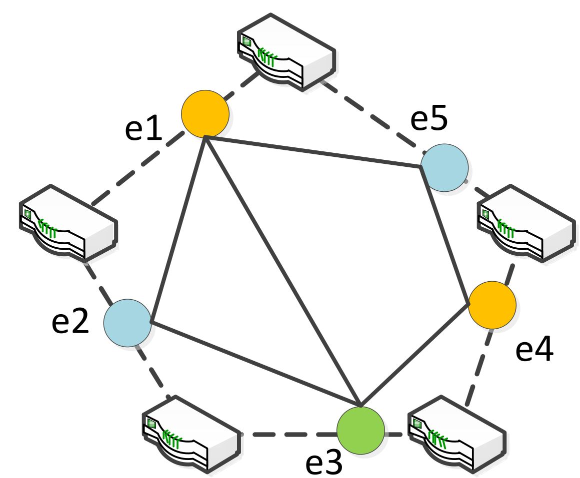
色数与色数多项式(11)

- **基于干扰链路集合的信道分配模型**
  - 如何表示链路的相互干扰情况？
  - 干扰图建模（干扰图的点着色：信道分配）
    - 干扰关系➙边
    - 无线链路➙结点
    - 无线链路的信道➙结点的颜色

哪个是正确的？点着色、边着色、干扰图

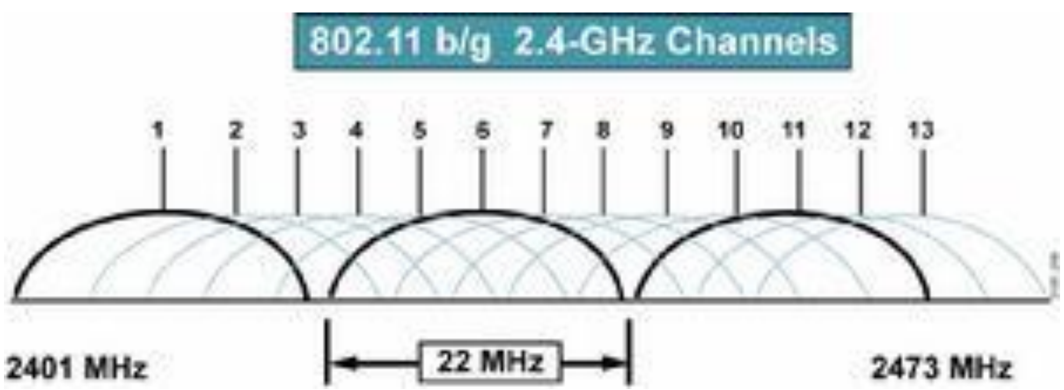


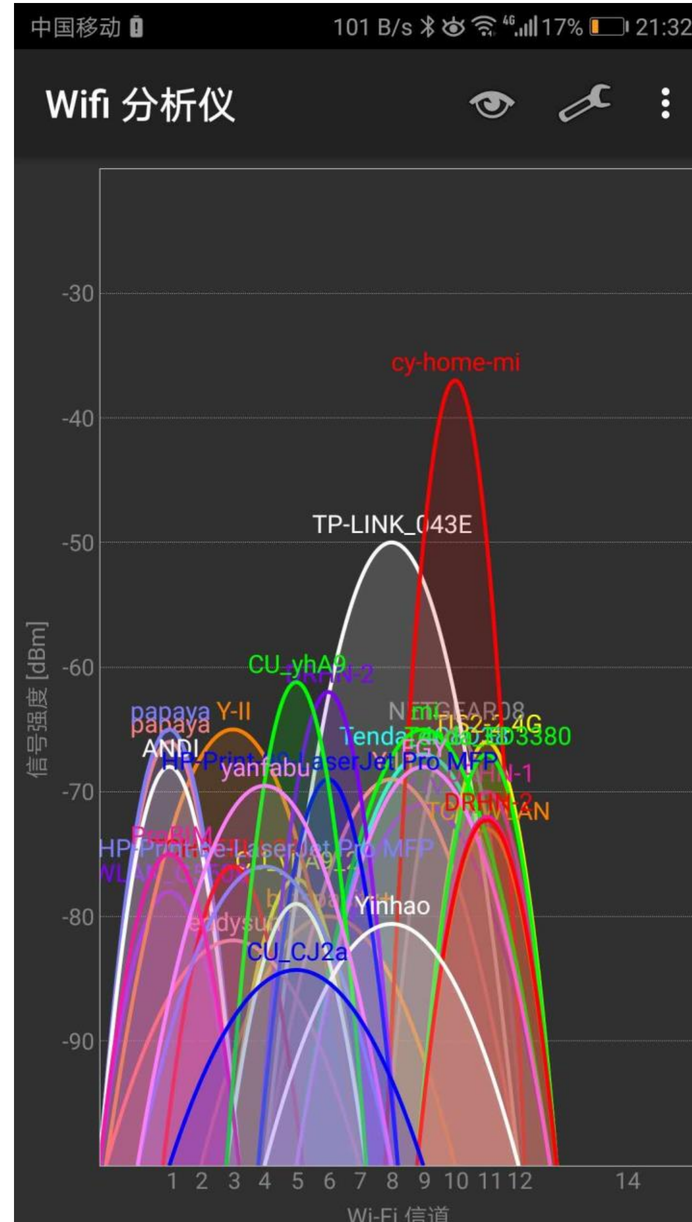
链路	干扰链路
e1	e2, e3, e5
e2	e1, e3
e3	e1, e2, e4
e4	e3, e5
e5	e1, e4



色数与色数多项式(12)

- 更多的实际问题
  - 着色问题的复杂度
    ——NP难问题
    - 启发式算法
  - 信道数量有限，难以避免冲突
    - 允许出现相同颜色的相邻结点，但应尽量减少冲突





边的着色

- 某一天内有n个教师给m个班上课.每个教师在同课时只能给一个班上课.

（1） 这一天内至少排多少节课?

（2） 不增加节数情况下至少需要几个教室?

边的着色

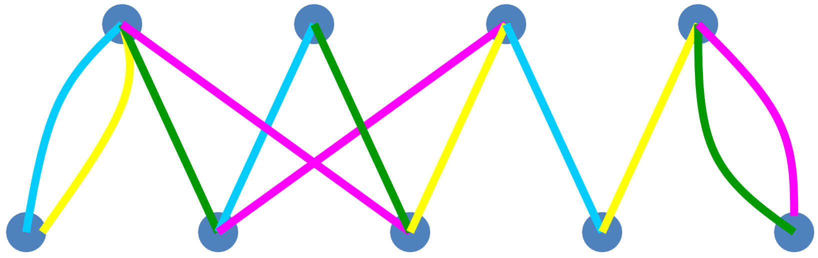
- 令二部图 G = <T, C; E>，其中

$$T = \{ t_1, t_2, \cdots, t_n \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, \cdots, c_m \}$$

$$E = \{ (t_i, c_j) \mid t_i \text{给} c_j \text{上一节课} \}$$

给G进行边着色.



边的着色

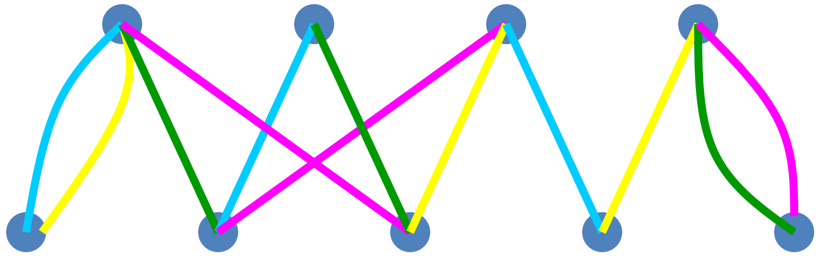
- 同色边代表的教学可以同时进行.

  所以颜色数就是节数，同色边数就是教室数.

(1) 最少节数 = β(G).

(2) 最少教室数 = $\min_{\Delta\text{-边着色}} \max \{k_1, k_2, \cdots, k_\Delta\}$.

其中k_i是着颜色i的边数.



第四章 小结

- 欧拉公式
  - 平面图：连通d=m−n+2，n−m+d=2；k支:n−m+d=k+1
  - 一般平面图G，恒有 n−m+d≥2
- 极大平面图
  - 极大平面图每个域的边界数都是3，即3d=2m
  - 极大平面图中，m=3n−6， d=2n−4
  - 简单平面图G满足3d≤2m，m≤3n−6，d≤2n−4
  - 简单平面图G中存在度小于6的结点
  - G是可平面图的充要条件是G不存在K型子图
- 对偶图
  - 域和节点的关系转化
  - G是平面连通图，则(G*)*=G
  - m=m*， n=d*，   d=n*
  - 每一平面图都是5−可着色的(域着色)

Questions?