面向计算机科学的离散数学

图论—道路和回路

苏航

suhangss@mail.tsinghua.edu.cn

清华大学 计算机系

第二章 道路与回路

- 道路与回路的定义
- 道路与回路的判定
- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法
- 最短路径
- 关键路径
- 中国邮路

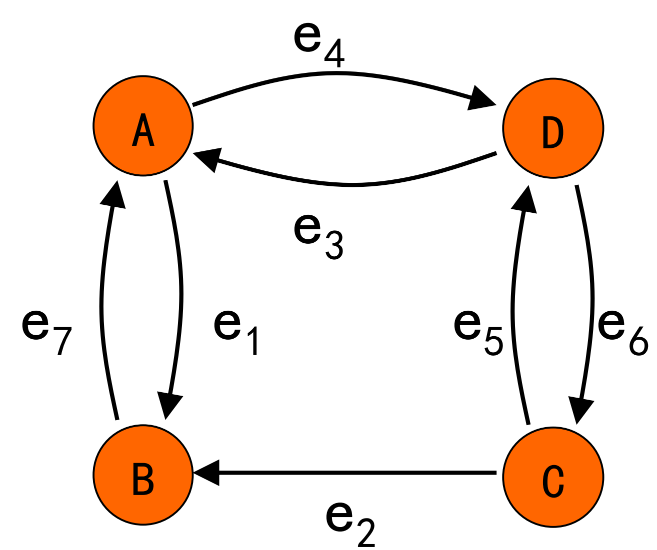
道路与回路的定义

- **有向道路的定义**

发明一下？

  - 有向图G的一条有向道路P是一个边序列 $(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_q})$ 满足

$$e_{i_k} = (v_{i_{k-1}}, v_{i_k}), k = 1, 2, \cdots, q$$



利用已有定义
定义要严格

- **有向回路**
  - 若在图G的道路P中， $v_{i_0} = v_{i_q}$，
  - 则称P是G的一条有向回路。

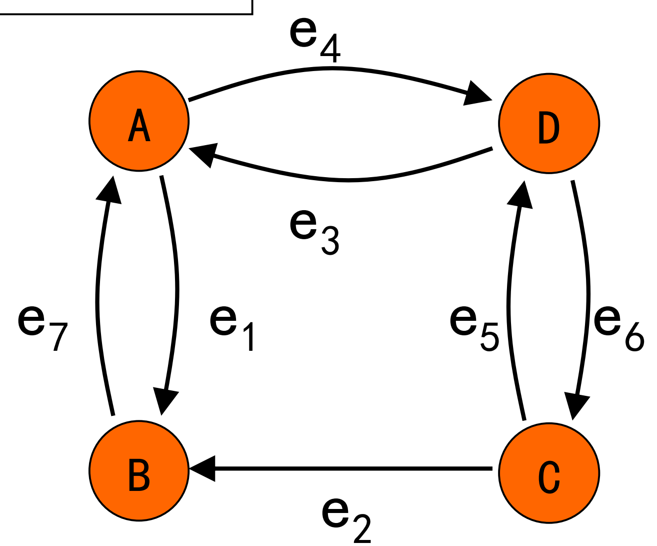
不断细致
如何细分？

寻找
特殊情况

道路与回路的定义(2)

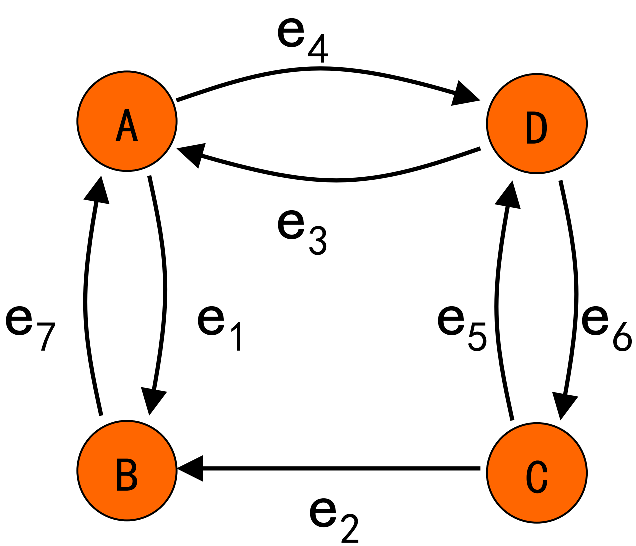
- 简单有向道路和回路
  - P中的边没有重复出现，则称P为简单有向道路或回路
- 初级有向道路和回路
  - P中的边和结点均不重复出现，则称P为初级有向道路或回路，简称为路或回路。

点可否重复?



道路与回路的定义(3)

- **有向道路与回路**



$(e_4, e_3, e_4, e_6, e_5, e_3, e_1)$	**有向道路**
$(e_4, e_3, e_4, e_6, e_5, e_3)$	**有向回路**
$(e_4, e_6, e_5, e_3, e_1)$	**简单道路**
(e_4, e_6, e_5, e_3)	**简单回路**
(e_4, e_6, e_2)	**初级道路**
(e_4, e_6, e_2, e_7)	**初级回路**

道路与回路的定义(4)

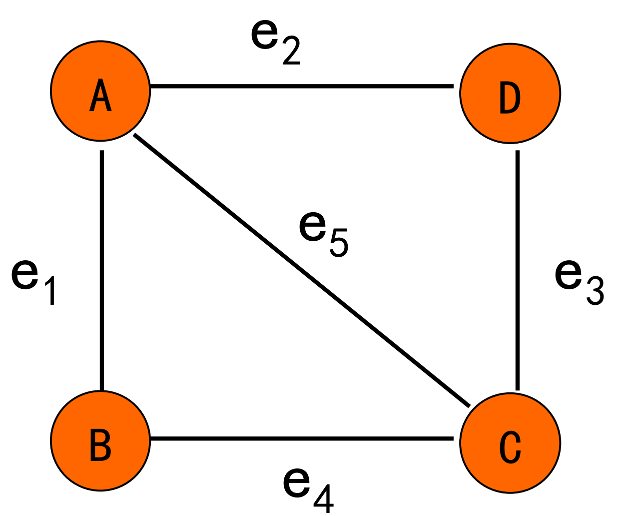
- **无向图的道路与回路**
  - 道路（链）与回路（圈）
  - 简单道路与回路（边不重复）
  - 初级道路与回路（顶点不重复）
- **与有向图的道路、回路定义类似，其区别只是无向图中的边没有方向。**

道路与回路的定义(5)

- **弦**
  - 设C为简单图G中含结点数大于3的一个初级回路，若结点v_i和v_j在C中不相邻，则称(v_i, v_j)是C的一条弦。

$$C=(e_1,e_2,e_3,e_4)$$

e_5是C的一条弦

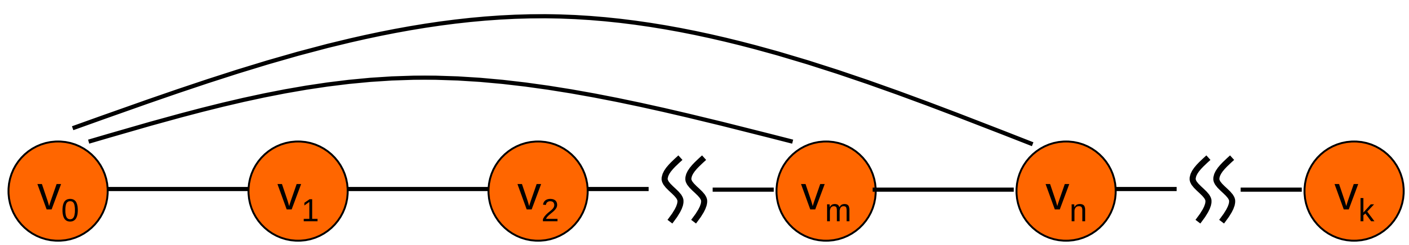


给出牛定义后呢？

存在性：三人行必有吾师！

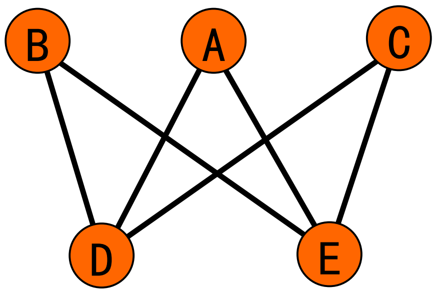
道路与回路的定义(6)

- **例**
  - 若G中每一点的度大于等于3，则G中必含带弦的回路。
  - 证明（构造法）：
    - 假设G中的一条极长的初级道路P为 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$ $e_i=(v_{i-1},v_i)$
    - 由于P是极长道路，v_0的所有邻结点均在此道路上
    - v_0的度不小于3，所以除了v_1以外，v_0至少与P上的另外两个结点相连
    - 设其为v_m，v_n，n>m，则 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)+(v_n,v_0)$ 是一个初级回路，边 (v_0,v_m) 是其一条弦。



道路与回路的定义(7)

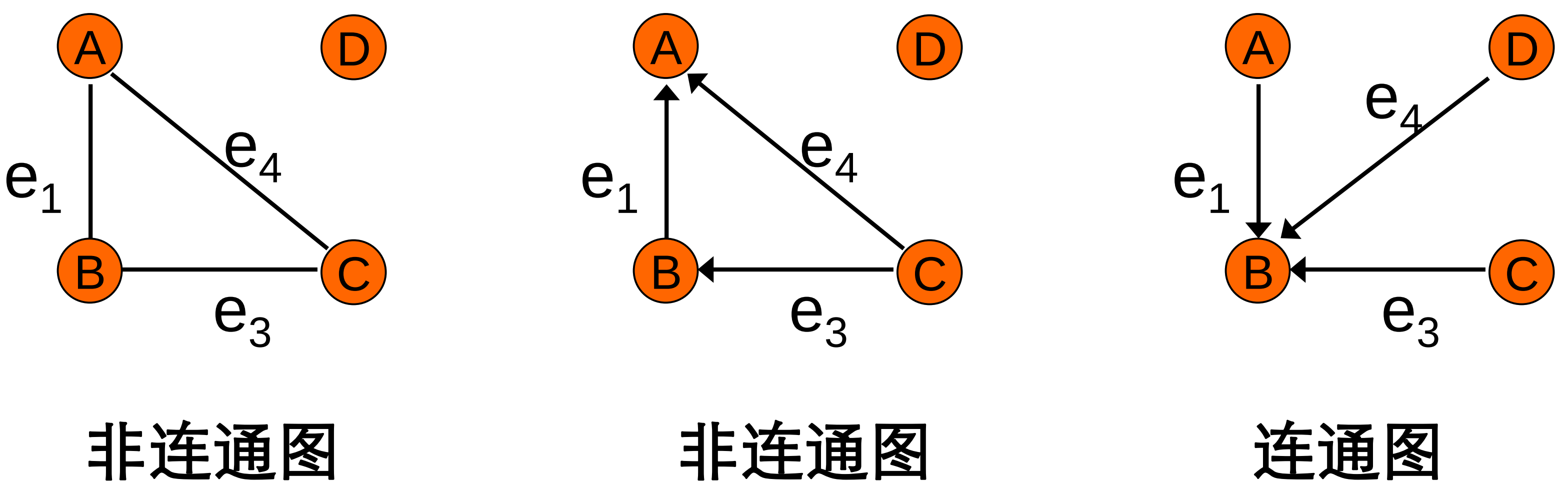
- **例：二分图**
  - 设G=(V,E)是无向图，如果V(G)可以划分为子集X和Y，使得对所有的e=(u,v),u和v分属于X或Y，则称G为二分图。
  - 如果二分图中有回路，回路边数有什么特点？
  - 答案：二分图回路的边数为偶数
  - 证明：
    - 设C是二分图G的回路
    - 假设C的起点是$v_0 \in X$，根据二分图的性质，回路从v_0出发后，经过奇数条边到达Y，经过偶数条边到达X，因此需要偶数条边才能回到v_0。



道路与回路的定义(8)

连通图、非连通图

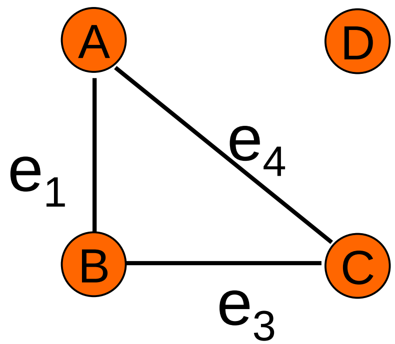
- 无向图G的任意两个结点之间都存在道路，就称G为连通图，否则称G为非连通图
- 对于有向图，若不考虑其边的方向，即视之为无向图，若它是连通的，则称G是连通图。



道路与回路的定义(9)

- **极大连通子图**
  - 若连通子图H不是G的任何连通子图的真子图，称H是G的极大连通子图，或连通支

有几个连通支?



有两个连通支，结点集分别是{A, B, C}, {D}

性质？存在性？
连通图的判定？

道路与回路的定义(10)

- 例
  - 若G是简单图，当 $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 时，G是连通图。
  - 证（反证法）：
  - 假定G非连通，则至少存在2个连通支，
    不妨设不相连子图G_1=（V_1, E_1），G_2=（V_2, E_2）.
  - 其中 $|V_1|=n_1$，$|V_2|=n_2$， $|E_1|=m_1$， $|E_2|=m_2$
    故有 $n_1+n_2=n$， $m_1+m_2=m$.
    因为G是简单图，所以G_1，G_2也都是简单图

道路与回路的定义(11)

- 证（续）：
  - 反证法，假定G非连通，G_1、G_2都是简单图
  - 有

$$m_1 \le \frac{n_1(n_1-1)}{2}$$

$$m_2 \le \frac{n_2(n_2-1)}{2}$$

$$\therefore m \le \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2}$$

$$\because n_1, n_2 \le n-1$$

$$\therefore m \le \frac{(n-1)(n_1-1+n_2-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

能发明出来吗?

  - 与已知条件 $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 矛盾，因此G连通

第二章 道路与回路

- 道路与回路的定义
- 道路与回路的判定
- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法
- 最短路径
- 关键路径
- 中国邮路

连通图的牛定义后

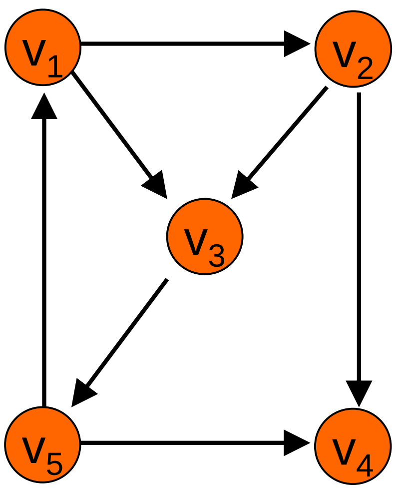
性质？存在性？
连通图的判定？

道路与回路的判定

◈ 用邻接矩阵或搜索法判定两结点间是否存在通路。

v_1->v_4的可达性

v_1-v_4, 两步能到吗?



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

三步能到吗?

道路与回路的判定

- **邻接矩阵判定法：**
  - 设图G的邻接矩阵A $=(a_{ij})$
  - 若$a_{ij}=1$
    - 表示（v_i, v_j）为G的一条边，则v_i, v_j间有道路
  - $A^2=(a_{ij}^{(2)})$ $a_{ij}^{(2)}=a_{ik}\cdot a_{kj}$之和$(k=1\cdots n)$
  - 若$a_{ij}^{(2)}$不为零
    - 当且仅当存在k，使得$a_{ik}=a_{kj}=1$
    - （v_i, v_k）和（v_k, v_j）为G的边
    - v_i, v_j间有长度为2的道路

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

道路与回路的判定(2)

- 邻接矩阵判定法(续)：
  - 若$A^l=(a_{ij}^{(l)})$ $(l<=n)$当中 $a_{ij}^{(l)}$ 不为零，表示存在v_i, v_j间有长为l的道路。
  - n步判断可达性的表示方法?
  - $P=(p_{ij})=A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^n$
  - P的含义：一般若$p_{ij}=t$ 从v_i有t条道路到达v_j，$p_{ij}=0$，n步内从v_i不能到达v_j，则在G中不存在从v_i到达v_j的路。

道路与回路的判定(3)

- 邻接矩阵判定法(续)：
  - $P=(p_{ij})=A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^n$
  - n步是否足够?
    - 基于抽屉原理的构造?
    - 若从v_i经过l步（l>=n)能到达v_j，根据抽屉原理，必在该路中有相同的v_k，即存在回路，删掉这段回路，仍存在从v_i到达v_j的路。
  - 因此有v_i，v_j间有道路，当且仅当p_{ij}不为0

道路与回路的判定(4)

- 若只关心v_i与v_j之间有无道路可用逻辑运算法
  - $a_{ij}^{(l)} = \vee_{(k=1,n)} (a_{ik}^{(l-1)} \wedge a_{kj})$
  - 图G的道路矩阵：

    $P = A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 \vee \cdots A^n$
- 计算道路矩阵 – Warshall算法
  - 算法复杂度：$O(N^3)$

道路与回路的判定(5)

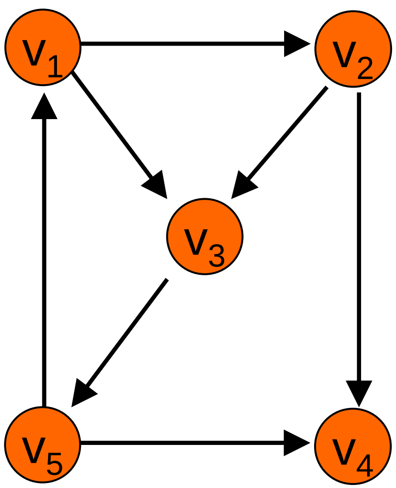
- **Warshall算法**

```
begin
        i = 1 to n
            j=1 to n
                k=1 to n
                 p_jk=p_jk V (p_ji ∧ p_ik)
end
```

- 对内部循环变量j,k，逐一更新p_{jk}，即(v_j, v_k)的可达性（是否能找到经过v_i的路径）
- 遍历所有的v_i，不断更新P矩阵

道路与回路的判定(6)

- **例**
  - 使用Warshall算法计算下图的道路矩阵
  - 依次循环i, j, k计算：$p_{jk}=p_{jk}\vee(p_{ji}\wedge p_{ik})$

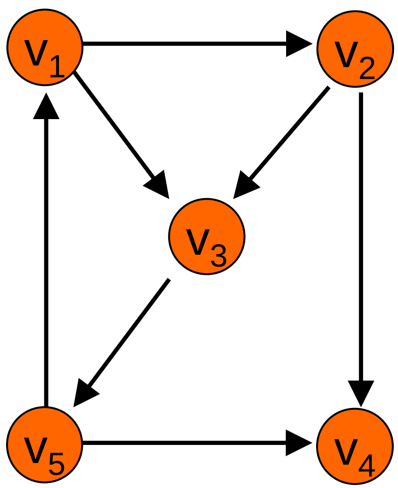


$$P=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

人工执行算法
（结合图）

道路与回路的判定(6)

- **例**
  - 使用Warshall算法计算下图的道路矩阵
  - 依次循环i, j, k计算：$p_{jk}=p_{jk} \vee (p_{ji} \wedge p_{ik})$



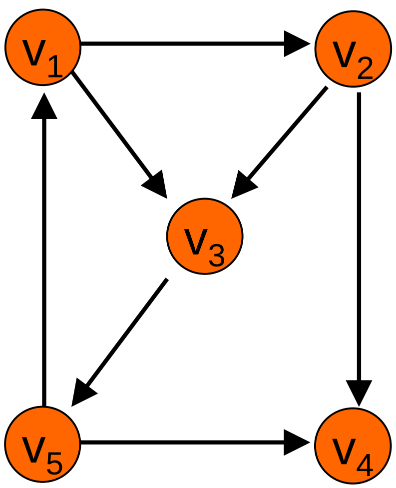
人工执行算法
（结合图）

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i=1$ j=5
k=2,3

道路与回路的判定(6)

- 例
  - 使用Warshall算法计算下图的道路矩阵
  - 依次循环i,j,k计算：$p_{jk}=p_{jk} \vee (p_{ji} \wedge p_{ik})$



人工执行算法
（结合图）

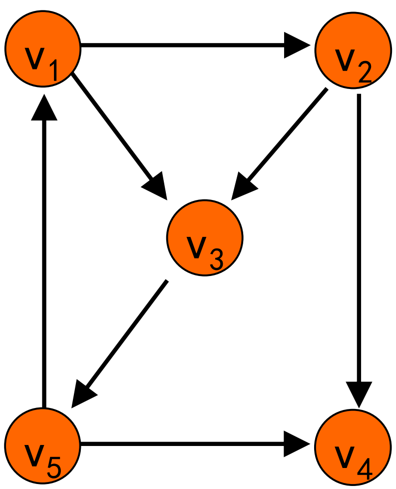
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i = 2$

j=1,5
k=3,4

道路与回路的判定(6)

- **例**
  - 使用Warshall算法计算下图的道路矩阵
  - 依次循环i, j, k计算：$p_{jk}=p_{jk}\vee(p_{ji}\wedge p_{ik})$



人工执行算法
（结合图）

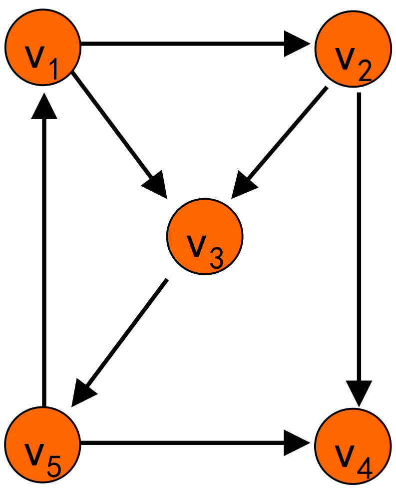
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$i=3$

j=1, 2, 5
k=5

道路与回路的判定(6)

- **例**
  - 使用Warshall算法计算下图的道路矩阵
  - 依次循环i, j, k计算：$p_{jk}=p_{jk}\vee(p_{ji}\wedge p_{ik})$



人工执行算法
（结合图）

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

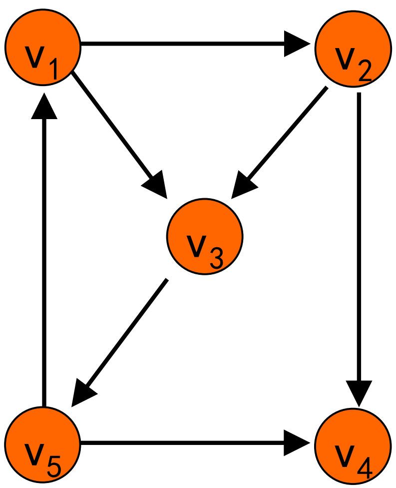
$i=4$

j=1, 2, 5

k=/

道路与回路的判定(6)

- **例**
  - 使用Warshall算法计算下图的道路矩阵
  - 依次循环i, j, k计算：$p_{jk}=p_{jk} \vee (p_{ji} \wedge p_{ik})$



人工执行算法
（结合图）

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$i=5$

j=1, 2, 3, 5

k=1, 2, 3, 4, 5

补充-算法复杂度

- ## 时间复杂度
  - 一般是指问题随规模的增长算法所需消耗的运算时间的增长趋势。
  - 问题规模即要处理的数据增长时， 基本操作要重复执行的次数必定也会增长。
  - 我们关心这个执行次数以什么样的数量级增长
  - 基本操作的执行次数是问题规模n的一个函数T(n)

可惜我们很难得到T(n) ☹，怎么办呢？

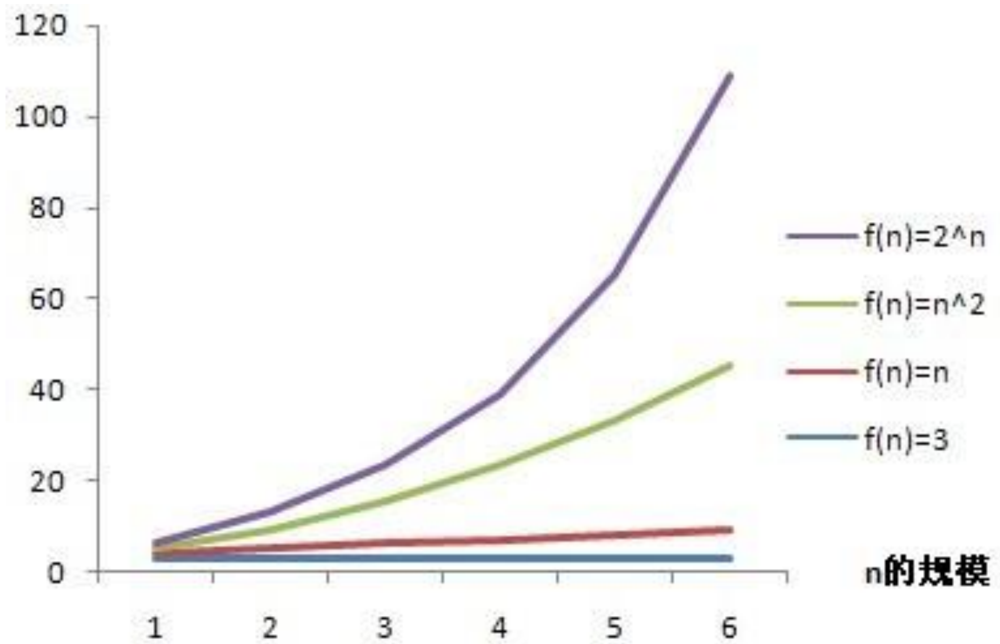
补充-算法复杂度

时间复杂度

- 同数量级函数
  - 考虑辅助函数f(n)
  - 使得当n趋近于无穷大时，T(n)/f(n)的极限值为不等于零的常数，则称f(n)是T(n)的同数量级函数
- 如果存在辅助函数f(n)，与T(n)是同数量级函数，记作T(n)=O(f(n))，称O(f(n))为算法的渐进时间复杂度，简称时间复杂度。
- 如f(n)= C 或logn或n或 n^k或k^n (k > 1)

补充-算法复杂度

- 不同复杂度的比较



举例说明算法复杂度的概念

10000, N+500

10N, N^2, N^3

N! , N^N

N^a, b^N,

某问题复杂度为N! 当N=100时，用世界上最快的超级计算机“神威·太湖之光”，需要1s完成计算。当问题规模增长10%，计算用时多少？

约100^{10}s=10^{12}年

补充-算法复杂度

- **计算道路矩阵 – Warshall算法**

begin

    i=1 to n

        j=1 to n

            k=1 to n

                $p_{jk}=p_{jk} \vee (p_{ji} \wedge p_{ik})$

End

- **算法复杂度:**

$O(n^3)$

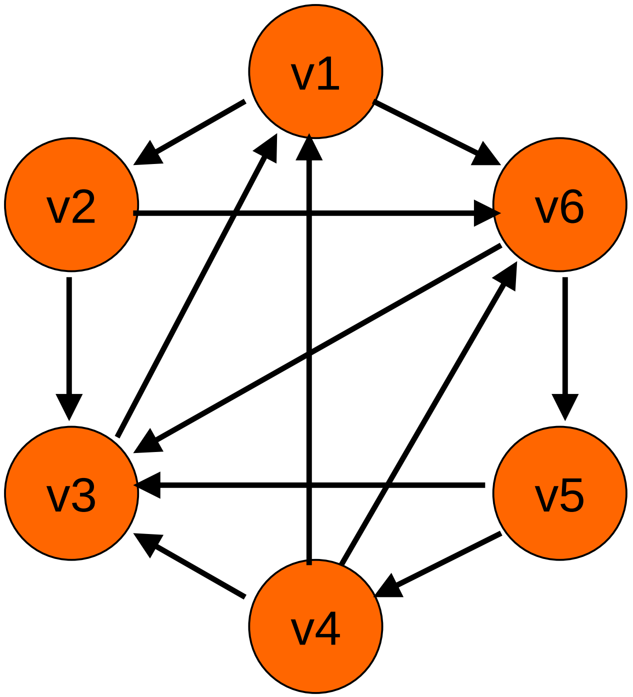
近似算法！！

道路与回路的判定(7)

- **判断两个结点间有无道路的方法**
  - 广探法(Breadth First Search)
  - 深探法(Depth First Search)

道路与回路的判定(8)

- 广探法(BFS)
  - BFS是从G的任一结点v_1开始，找它的直接后继集$\Gamma^+(v_1)$，记为A_1
  - 对A_1中的每一个结点分别找它们的直接后继集，这些第二批后继集的并记为A_2
  - 依此类推，直至达到目的结点。
  - 可能存在的问题？
    - 回路避免



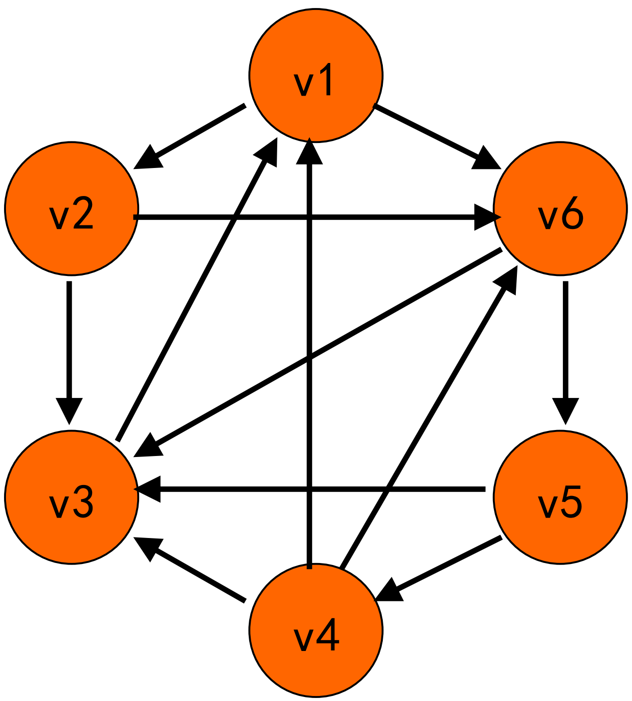
道路与回路的判定(9)

广探法（BFS）

- 为避免结点的重复搜索可对结点进行标记
  - 开始时所有结点标记为0
  - 搜索时若新搜到的结点标记为0，则加入后继集，同时将其标记改为1
  - 搜索时若新搜到的结点标记为1，则忽略该点

道路与回路的判定(10)

- **例**
  - 用BFS找下图中v_1到v_4的一条道路。



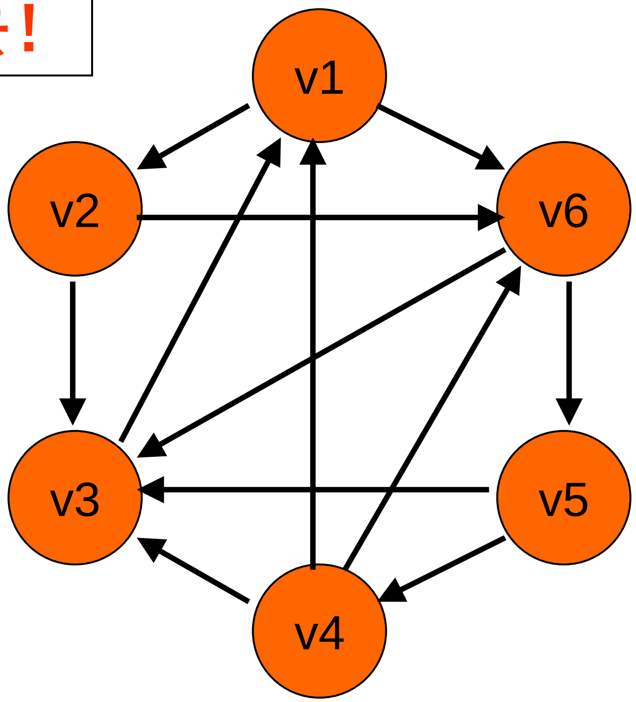
访问节点	后继集
$\Gamma^+(v_1)=\{v_2,\ v_6\}$	$A_1=\{v_2,\ v_6\}$
$\Gamma^+(v_2)=\{v_3,\ v_6\}$	
$\Gamma^+(v_6)=\{v_3,\ v_5\}$	$A_2=\{v_3,\ v_5\}$
$\Gamma^+(v_3)=\{v_1\}$	
$\Gamma^+(v_5)=\{v_3,\ v_4\}$	$A_3=\{v_4\}$

路径信息？

道路与回路的判定(11)

- **深探法(DFS)**
  - DFS从结点v_0开始，只查找v_0的某一直接后继v_1
  - 记下v_1的前趋v_0 ，然后再找v_1的某个未搜索过的后继v_2
  - 依此类推
  - 当从某个结点v_j无法再向下搜索时，退回到它的父亲v_{j-1}，然后再找 v_{j-1} 的另一个未查过的直接后继
  - DFS的特点是尽量向下搜索，只有碰壁才回头

回头时要能回得去！

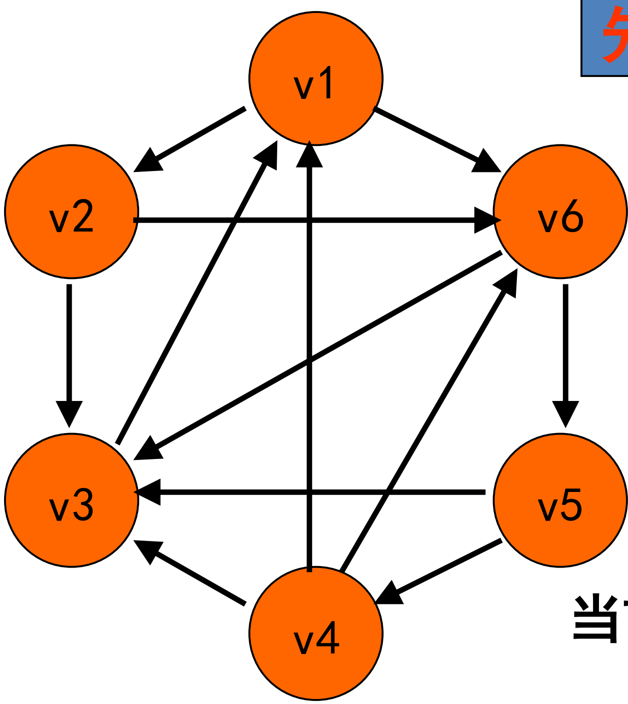


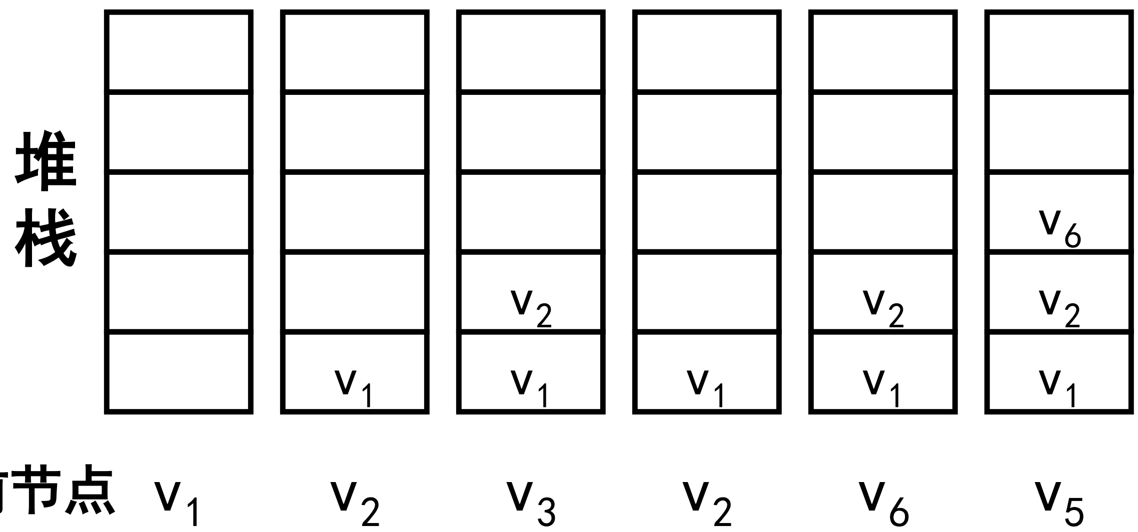
道路与回路的判定(12)

- 例：使用DFS找出下图中v_1到v_4的道路

相关知识：队列和堆栈　　　　使用栈结构

先进先出　　先进后出





DFS和BFS的优缺点？　BFS保证最短路径

第二章 道路与回路

- 道路与回路的定义
- 道路与回路的判定
- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法
- 最短路径
- 关键路径
- 中国邮路

天才: 成就

欧拉

莱昂哈德·欧拉

- 欧拉（1707-1783年 ）是历史上最伟大的数学家之一
- 初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法到数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数的欧拉公式等等
- 共写下了886本书籍和论文，其中分析、代数、数论占40%，几何占18%，物理和力学占28%（创立了分析力学、刚体力学等力学学科 ），天文学占11%，弹道学、航海学、建筑学等占3%
- 历史学家把欧拉和阿基米德、牛顿、高斯列为有史以来贡献最大的四位数学家

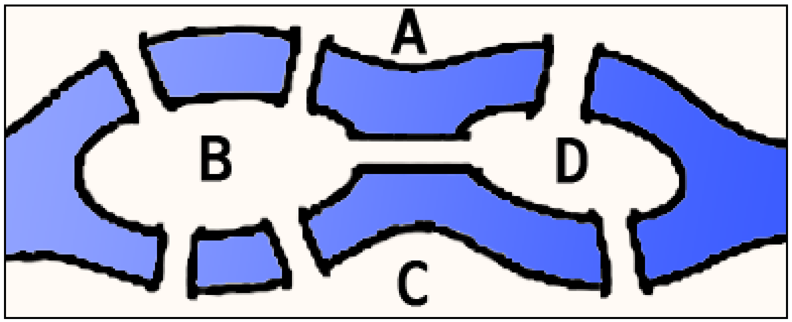
天才: 勤奋与自强

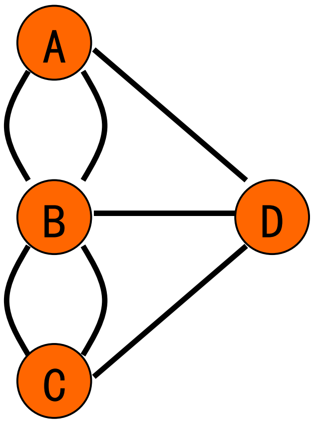
- 欧拉
  - 过度工作使他得了眼病，不幸右眼失明了，这时他才28岁
  - 直到1766年，后来在沙皇喀德林二世的诚恳敦聘下重回彼得堡，左眼视力衰退，最后完全失明（60岁）
  - 1771年彼得堡的大火灾殃及欧拉住宅，带病而失明的64岁的欧拉被围困在大火中，虽然他被别人从火海中救了出来，但他的书房和大量研究成果全部化为灰烬
  - 仍然以惊人的毅力与黑暗搏斗，凭着记忆和心算进行研究，直到逝世，竟达17年之久，如口述论著和400篇论文。
  - 欧拉生活、工作过的三个国家：瑞士、俄国、德国，都把欧拉作为自己的数学家，为有他而感到骄傲。
  - 推动青年科学家成长：拉格朗日与等周问题
  - 热心于数学的普及工作
    - 《无穷小分析引论》、《微分法》和《积分法》产生了深远影响
    - 用德、俄、英文发表过大量的通俗文章，还编写过大量中小学教科书

欧拉！贝多芬！霍金！有什么困难不能克服呢？！

欧拉道路与回路

7桥问题（一笔画问题）：能否从某处出发，经过各桥一次且仅一次，最后返回原处？





如何求解？
定义性质

- 欧拉道路（回路）
  - 无向连通图G=(V,E)中的一条经过所有边的简单道路（回路）称为G的欧拉道路（回路）

即问在上图中是否存在欧拉回路？呼唤存在性定理？

欧拉道路与回路(2)

- **定理**
  - 无向连通图G有欧拉回路的充要条件是各顶点的度都是偶数。
  - 证明（充要条件？）
    - 必要性
      - 已知存在欧拉回路，要证明度都是偶数
      - 欧拉回路经过每边一次且仅一次
      - 沿该回路进入某点后，必定经由另一条边出去
      - 对每一点的进出次数相同
      - 因此，各点的度都是偶数

欧拉道路与回路(3)

- **证（续）：**
  - 充分性
    - “无向连通图G有欧拉回路的充要条件是各顶点的度都是偶数”（证明思路？）
    - 采用构造法证明

欧拉回路的特点

  - 从任意点v_0出发，构造G的一条简单回路C
    - 由于v_i的度为偶，所以不可能停留在某点$v_i \in V-v_0$上，而不能继续向前构造
    - 由于G是有穷图，因此最终一定能够回到v_0，构成简单回路C
  - 若C包含了G中的所有边，它即是G的欧拉回路

欧拉道路与回路(4)

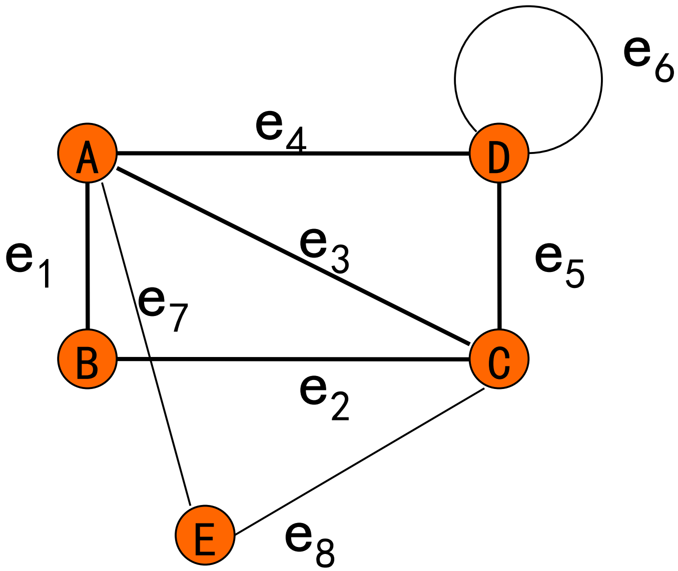
- 证（续）：
  - 否则，从G中删去C的各边，得到G_1 = G-C
  - 显然G_1中每点的度仍然是偶数
  - 此时，G_1中一定存在度非0的顶点v_i ，它同时还是回路C经过的顶点（否则G是非连通图）
  - 这时，在v_i所在的G_1的连通支中，同理可构造简单回路C'，令C=C∪C'，得到包含边数比原来更多的简单回路
  - 继续上述构造过程，最终该简单回路必包含了所有边，即构造出了的一条欧拉回路
  - 充分性证毕“无向连通图G有欧拉回路的充要条件是各顶点的度都是偶数”

存在问题用构造法

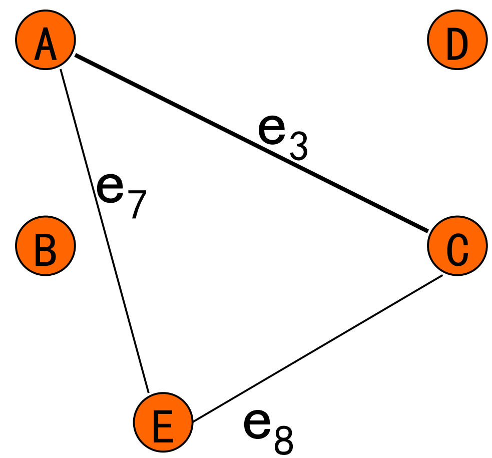
欧拉道路与回路(5)

化繁为简，靠算法不靠天才！

- **例**
  - 找出下图G中欧拉回路



G



G_1

从任意一点，如A开始，构造简单回路C=(e_1, e_2, e_5, e_6, e_4)
G_1=G-C中，A，C度非零，且为G中结点
从A开始构造简单回路C_1=(e_3, e_8, e_7)
则C ∪ C_1= （e_1, e_2, e_5, e_6, e_4 , e_3, e_8, e_7)是G的一条欧拉回路。

欧拉道路与回路(6)

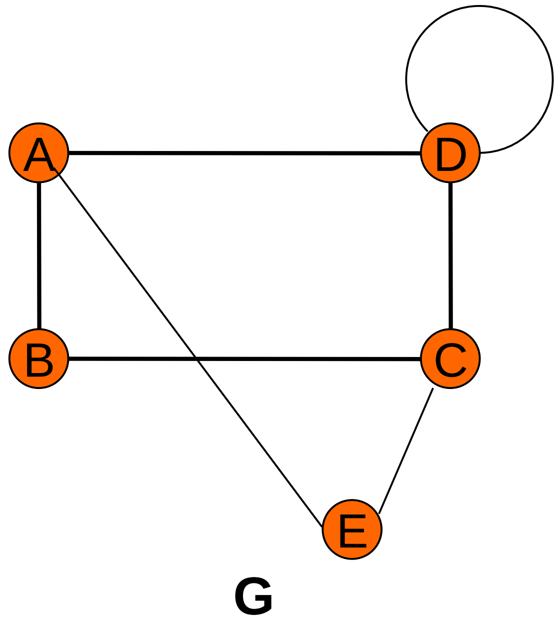
- 全是偶度则欧拉回路，那存在奇度呢？

欧拉回路存在性，然后？

◈ **推论（欧拉道路存在性）**
  - 若无向连通图G中只有两个奇顶点，则G存在欧拉道路。
  - 证明（思路？）
    - 构造法
    - 设这两个奇顶点是v_i，v_j，
    - 在图G中加入一条边(v_i, v_j)，则所有的顶点的度都为偶，此时其中必然存在一条欧拉回路。
    - 然后将边(v_i, v_j)去掉，可得从v_i到v_j的欧拉道路。

设置

无向连通图G如下所示，则图G：



A 没有欧拉道路

B 有欧拉道路但没有欧拉回路

C 有欧拉回路

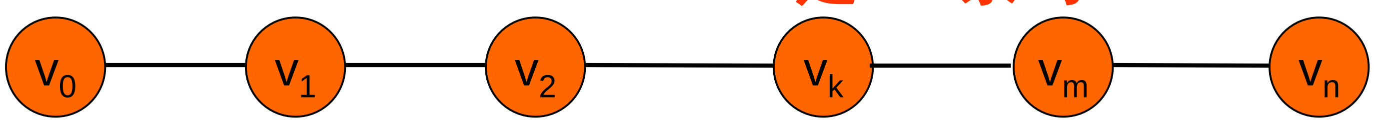
提交

欧拉道路与回路(7)

- **例**
  - 设连通图中有K个度为奇数的顶点。证明E(G)可以划分成K/2条简单道路
  - 证明（基本思路？）
    - 构造法
    - 由图的性质可得，K是偶数
    - K个顶点两两配对，增添K/2条边，得到G’
    - G’ 中每点的度都是偶数，由定理，G’中有欧拉回路C
    - 在C中删去这K/2条边,便得到了K/2条简单道路，它们包含了原图G中的所有边
    - 即这K/2条简单道路就是E(G)的一个划分

互不相邻

是K/2条吗？

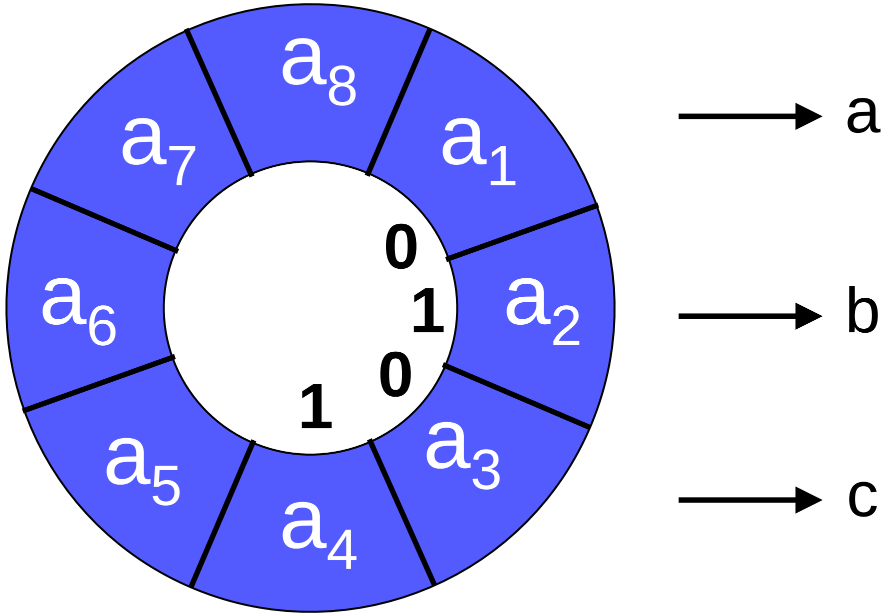


欧拉道路与回路(8)

- 研究了无向图欧拉回路/道路的存在性，那有向图呢？
- 推论
  - 若有向连通图G中各个结点的正度与负度相等，则G中存在有向欧拉回路。
  - 证明
    - 略

欧拉道路与回路(9)

- **例**
  - 如下图，一个编码盘分成8个扇面，每个表示1或者0，其中a，b，c三个位置组成一组输出
  - 当圆盘按照逆时针旋转一格的时候，就会产生一组输出
  - 试问，圆盘上的数怎么排列，可以使圆盘旋转一周能不重复的输出000 ~ 111 这8个二进制数(不需要按顺序)？

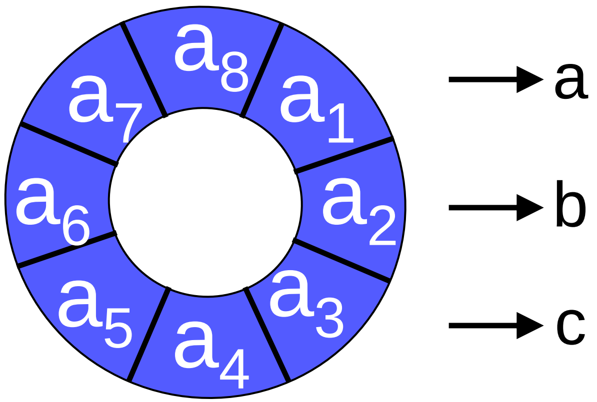


欧拉道路与回路(10)

例（续）

- 如何进行建模？

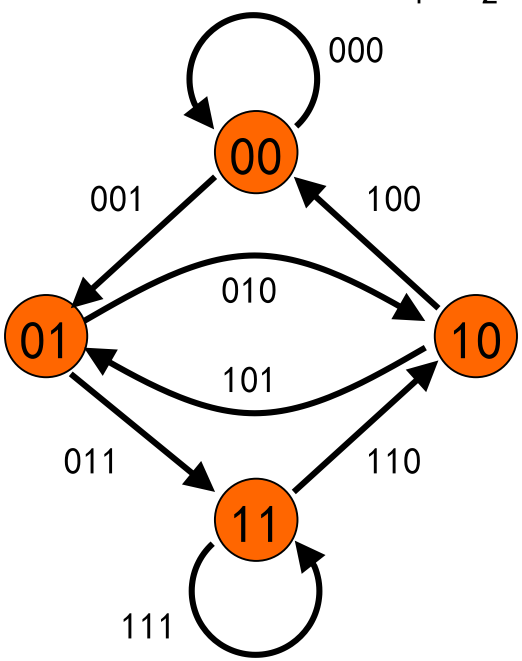
动态！

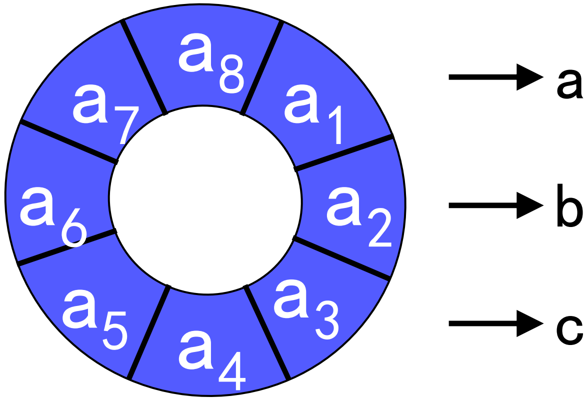


- 每次旋转时，输出中有两位不变，如abc变成bcd
- 结点：三位数字的前两位
  - 如这里的abc中的ab， bcd中的bc
  - 用0/1组成前两位ab，四种组合情况作为四个结点
- 边：结点数字之间的变化关系
  - 每次旋转可以从一个结点ab到另一个结点bc
- 有两种可能的旋转变化：c = 0 / 1
  - ab输出为ab1或者ab0，即下一状态为b0或b1

欧拉道路与回路(11)

- 例（续）
  - 画出这种转换关系图（结点为a_1/a_2位置的数）





1. 八条边表示八个输出值
2. 每个结点的度都是偶数，因此存在欧拉回路
3. 任何一条欧拉回路都是一种可行方案
4. 例如：(上)上左右左　下下右上
5. 所有的a3构成序列"01011100"

主要内容 道路与回路

- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法

如何深入研究？
寻址特殊情况？
细分？ 性质？

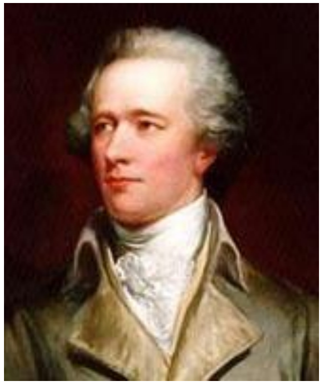
不断给出：定义、定理、证明
（注意相同点和不同点）

基本数学方法和创新思维

哈密顿道路与回路(1)

- **欧拉道路（回路）**
  - 无向连通图中的一条经过所有边的简单道路（回路）称为G的欧拉道路（回路）
- **“清华道路（回路）？”**
  - 过所有边/点的简单/初级道路？
- **哈密顿道路（回路）**
  - 无向图连通图的一条过全部结点的初级道路（回路）称为哈密顿(Hamilton)道路（回路）（H-道路，H-回路）
- **哈密顿图：含有 H-回路的图**

哈密顿



- 1805年生于爱尔兰都柏林
- 1823-24年间完成多篇几何学和光学的论文
- 年仅22岁的哈密顿被任命为敦辛克天文台的皇家天文研究员和三一学院的天文学教授
- 1834年，哈密顿发表了历史性论文“一种动力学的普遍方法”，成为动力学发展过程中的新里程碑
- 在1843年正式提出了四元数(quaternion)，这是代数学中一项重要成果
- 1836年，皇家学会因他在光学上的成就而授予皇家奖章
- 哈密顿家庭负担很重，为减轻父亲经济压力……
- 发表的论文一般都很简洁，别人不易读懂，但手稿却很详细，因而很多成果都由后人整理而得

哈密顿道路与回路(2)

- **哈密顿回路的研究范畴**
  - H回路是初级回路
  - 将任一图中的重边与自环去掉，得到的简单图的H回路的存在性与原图等价
  - 因此，一般考虑简单图…

如何进一步研究?

H道路存在性?

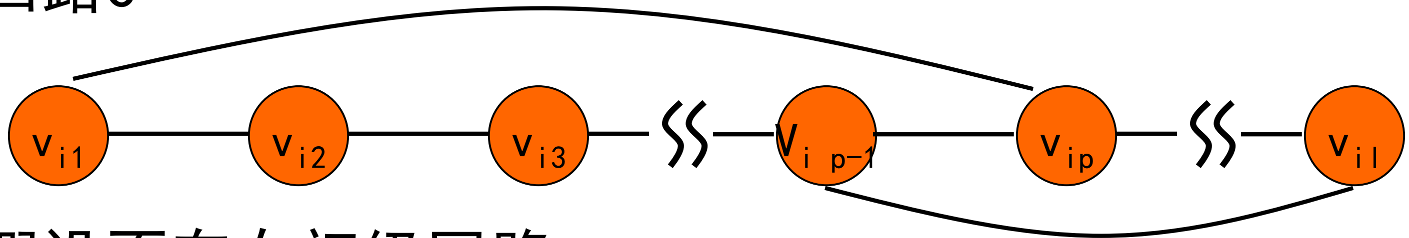
哈密顿道路与回路(3)

- **定理(什么情况下更可能存在H道路?)**
  - 若简单图G中任两点u, v, 恒有 $d(v)+d(u)\geq n-1$ ，则G中存在Hamilton道路
  - 证明（基本思路？）：
  - 基本思路：构造法
  - (1)证G连通（思考）　　(2)构造G中的H道路
  - 设P为G的长为l的极长初级道路， P=(v_{i1}, v_{i2}, …v_{il})，则与v_{i1}和v_{il}相邻的点都在P上
  - 若l=n, 则P为H道路

道路不断加点?

哈密顿道路与回路(4)

- **证（续）**
  - 若l<n，可证明G中一定存在经过结点$v_{i1}, v_{i2}, \cdots v_{il}$的初级回路C

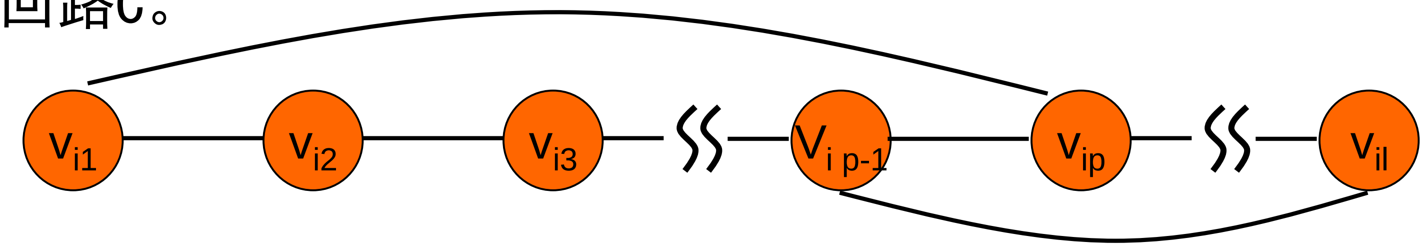


  - 假设不存在初级回路
  - 设$(v_{i1}, v_{ip}) \in E(G)$，则不能有$(v_{i,p-1}, v_{il}) \in E(G)$，否则删除$(v_{i,p-1}, v_{ip})$，上图形成一个回路
  - 设$d(v_{i1})=k$，则v_{il}至少与这k个点的左邻居不能相邻，即$d(v_{il}) \leqslant l-k$，考虑v_{il}本身无自环，则$d(v_{il}) \leqslant l-k-1$
  - 则$d(v_{i1})+d(v_{il}) \leqslant l-1 < n-1$，与已知矛盾
  - 因此l<n，则存在回路C

$$d(v)+d(u) \geq n-1$$

哈密顿道路与回路(5)

- **证（续）**
  - 若l<n, 已证明G中一定存在经过结点$v_{i1}, v_{i2}, \cdots v_{il}$的初级回路C。



  - 设$C=(v_{i1}, v_{i2}, \cdots v_{il}, v_{i1})$, 由于G连通，故存在C之外的结点$v_t$，必然与C中的某点$v_{iq}$相邻
  - 可构造长为l+1的初级道路

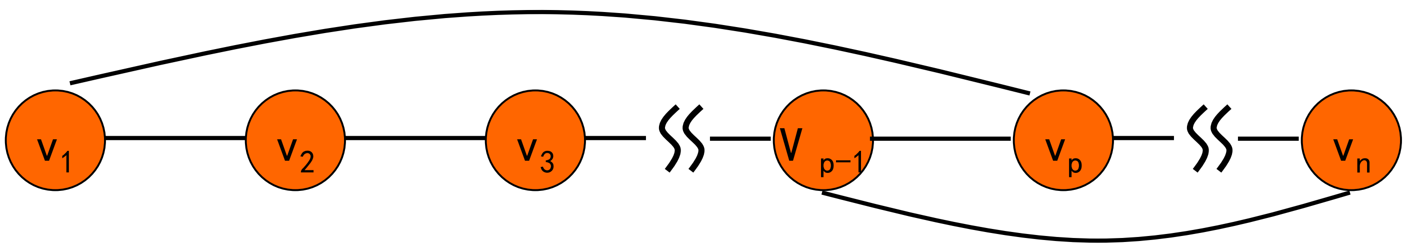
    $P=(v_t, v_{iq}, v_{iq+1}, , \cdots v_{il}, v_{i1} \cdots v_{iq-1})$,
  - 如此构造直到l=n, 从而P为H道路

H道路存在性充分条件:

$$\boxed{d(v)+d(u)\geq n-1}$$

哈密顿道路与回路(6)

- **推论**
  - 如简单图G中任两点u, v, 恒有 $d(v)+d(u)\geq n$ 则G中存在Hamilton回路。
    - 由定理可知，G中存在哈密顿道路，设H为$v_1, v_2, \cdots, v_n$



    - 假设H不是回路
    - 设$d(v_1)=k$，则$d(v_n) \leqslant n-k-1$（v_n无自环）
    - 则$d(v_n)+d(v_1) \leqslant n-1 < n$，与已知矛盾
    - 因此存在初级回路C，即H回路
  - 如简单图G中任意点v，恒有 $d(v)\geq \frac{n}{2}$ ，则G中存在Hamilton回路。

自己能发明出来吗？

Questions?