第一次习题课讨论题目

1. 第 1、2 次作业部分题目.
2. 盒子里装有 5 枚外观一样的硬币，投掷硬币时每枚硬币正面向上的概率分别为 $p_1,\cdots,p_5$. 假设 $p_1=\dfrac{1}{10},p_2=\dfrac{1}{4},p_3=\dfrac{1}{2},p_4=\dfrac{3}{4},p_5=\dfrac{9}{10}$.

    （1） 随机选一枚硬币投掷，假设正面出现了，求选中的是第 i（$i=1,\cdots,5$）枚硬币的概率；

    （2） 再一次投掷这枚硬币，又出现正面的概率为多少？

    （3） 随机选一枚硬币投掷直到正面出现，若已知第 4 次才掷得正面，求选中的是第 i（$i=1,\cdots,5$）枚硬币的概率.

3. 概率的连续性.

    （1）设 $A_1,A_2,\cdots$ 为单调递增的事件序列，即 $A_n\subset A_{n+1}$（$n=1,2,\cdots$），令 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，证明 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)$.

    （2）设 A_1,A_2,Λ 为单调递减的事件序列，即 $A_n\supset A_{n+1}$（$n=1,2,\cdots$），令 $A=\prod\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，证明 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)$.

4. 令 A_1,A_2,A_3,A_4 为相互独立的事件，$P(A_3A_4)>0$.

    （1） 证明：$P(A_3)>0$.

    （2） 证明：A_1,A_2 关于事件 A_3 条件独立.

    （3） 证明：$P(A_1+A_2\mid A_3A_4)=P(A_1+A_2)$.

5. *考虑有两个孩子的全部家庭，假定生男孩和女孩是等可能的. 分别在以下情况考虑家里另外一个孩子也是女儿的概率.

    （1） 从这些家庭中随机选择一个家庭，发现其中一个孩子是女孩.

    （2） 从这些家庭中随机选择一个孩子发现其为女孩.

（3） 从这些家庭中随机选择一个家庭，发现较大的那个孩子是女孩.

（4） 从这些家庭中随机选择一个家庭，某天遇到母亲带着一个女儿在散步.

6. **警方从案发现场罪犯的身体遗留物中提取了 DNA，法医研究后注意到能够辨认的只有5对染色体，而且每个无罪的人与这5对染色体相匹配的概率为10^{-5}，警方认为罪犯就是该城镇 100 万居民之一. 在过去 10 年内，该城镇有 1 万人曾坐过牢，他们的 DNA 资料都记录在案. 在检查这些 DNA 文档之前，警方认为这 1 万有前科的人每人犯此罪的概率为α，而其余 99 万居民每人犯此罪的概率为β，其中$\alpha = c\beta$. 将 DNA 分析结果与这 1 万有前科的人的数据文档对比之后，发现只有甲的 DNA 符合. 假设警方关于α和β之间的关系是准确的，那么以此判断甲作案的可能性有多大？对比c分别取值 100, 10 和 1 这三种情形的结果.