第二章
命题逻辑的等值和推理演算

计算机系　黄民烈

Tel: 18901155050

Office: FIT 4-504

http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/

aihuang@tsinghua.edu.cn

本章提纲

本章主要内容

- 本章讨论命题逻辑的**等值和推理演算**，是命题逻辑的核心内容。

- 首先介绍命题公式等值的概念，并通过等值定理给出命题公式等值的充要条件。

2.1 等值定理

◉ 等值

给定两个命题公式 A 和 B，设$P_1,P_2,\ldots,P_n$为出现于 A 和 B 中的所有命题变项，则公式A和B共有2^n个解释。

若在其中的任一解释下，公式 A 和 B 的真值都相同，则称A和 B 是等值的，记作

A=B 或 A⇔B

2.1 等值定理

- 定理2-1-1

  设**A,B**为两个命题公式，**A = B**的充分必要条件是**A↔B**为一个重言式。

- 等值定理的证明

等值定理的证明

- 必要性：$\leftarrow$

若$A\leftrightarrow B$是重言式，则在任一解释下，$A\leftrightarrow B$的真值均为真。

由 $A\leftrightarrow B$的定义，仅当A、B真值相同时，才有$A\leftrightarrow B = T$。

所以在任一解释下，A、B都有相同的真值，从而有$A = B$。

等值定理的证明

- 充分性：→

若有A＝B，则在任一解释下，A、B都有相同的真值，依 A↔B 的定义，A↔B的取值只能为真，故推出A↔B是重言式。

逆命题、否命题与逆否命题

- 逆命题

  若将P→Q视为原命题，则称Q→P为它的<u>**逆命题**</u>。

- 否命题

  若将P→Q视为原命题，则称¬P→¬Q为它的<u>**否命题**</u>。

- 逆否命题

  若将P→Q视为原命题，则称¬Q→¬P为它的<u>**逆否命题**</u>。

逆命题、否命题与逆否命题

- 一个命题与它的逆否命题等值

$$\neg Q \to \neg P \;=\; P \to Q$$

- 一个命题P→Q的逆命题与它的否命题等值

$$Q \to P \;=\; \neg P \to \neg Q$$

数学证明中的反证法

2.2 等值公式

- 2-2-4　子公式

若 X 是合式公式 A 的一部分，且 X 本身也是一个合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式。

- 原公式 ： **$P \wedge (Q \wedge R)$**

2.2 等值公式

- 2-2-5　置换规则

  设 X 为公式 A 的子公式，用与 X 等值的公式Y将 A中的 X代替，称为置换，该规则称为置换规则。

- 置换后公式 A 化为公式 B，置换规则的性质保证公式 A 与公式 B 等值，即A=B。

- 当且当 A 是重言式时，置换后的公式B也是重言式。

置换与代入的差别?

- 置换不要求替换所有的命题变项，代入要求“所有”
- 代入是相对**重言式**而言

2.2 等值公式

- 定理：

  设Φ(A)是含命题公式 A 的命题公式，Φ(B)是用命题公式 B 置换了Φ(A)中的 A 之后得到的命题公式

  如果 **A = B，则Φ(A) = Φ(B)** 。

2.2.6 基本的等值公式

- 双重否定律

  $\neg\neg P = P$

- 结合律

  $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$

  $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

  $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

  $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ (P=F?)

- 交换律

  $P \vee Q = Q \vee P$

  $P \wedge Q = Q \wedge P$

  $P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$

  $P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$

2.2.6 基本的等值公式

- 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

- 等幂律（恒等律）

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = T$$

$$P \leftrightarrow P = T$$

- 吸收律

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

2.2.6 基本的等值公式

- 摩根（De Morgan）律：

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$
$$= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

2.2.6 基本的等值公式

- 同一律：

$$P \lor F = P \qquad P \land T = P$$

$$T \rightarrow P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$$

还有

$$P \rightarrow F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$$

2.2.6 基本的等值公式

- 零律：

$$P \vee T = T$$

$$P \wedge F = F$$

还有

$$P \rightarrow T = T$$

$$F \rightarrow P = T$$

- 补余律：

$$P \vee \neg P = T$$

$$P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$

$$\neg P \rightarrow P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$

常用的等值式

- 蕴涵等值： $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 假言易位： $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$ （逆否命题）
- 前提合并： $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 前提互换： $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

常用的等值式

- 等价等值：

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q = (\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q)$$

- 等价否定等值：

$$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$$

- 归谬论：

$$(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$$

等值与等价的差别?

- A、B为两个命题公式，等值符号不是命题联接词，

  $A \Leftrightarrow B$ 不是复合命题

$$A \leftrightarrow B$$

A	B	A↔B
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$$A \Leftrightarrow B$$

A
T
F

B
T
F

思考题

- 给定由$P_1,P_2,\ldots,P_n$到命题公式 A 的真值表，如何从取T或者F的行来列写命题公式 A 对$P_1,P_2,\ldots,P_n$的逻辑表达式？

P	Q	g_0	g_1
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	F	T

2.3 命题公式与真值表的关系

- 对任一依赖于命题变元$P_1,P_2,\ldots,P_n$的命题公式 A 来说，可由$P_1,P_2,\ldots,P_n$的真值根据命题公式A给出A的真值，从而建立起由$P_1,P_2,\ldots,P_n$到 A的真值表。

- 反之，若给定了由$P_1,P_2,\ldots,P_n$到 A的真值表，可以用下述方法写出命题公式A对$P_1,P_2,\ldots,P_n$的逻辑表达式：

2.3 命题公式与真值表的关系

1. **根据取T的行，**进行枚举

考查 A的真值表中取T的行，若取T的行数共有m行，则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$$

其中$Q_i = (R_1 \wedge R_2 \wedge \cdots \wedge R_n)$，

$$R_i = P_i \text{或} \neg P_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

若该行的$P_i = T$，则$R_i = P_i$，

若$P_i = F$，则$R_i = \neg P_i$

2.3 命题公式与真值表的关系

2. 根据取F的行， 进行枚举

考查真值表中取F的行，若取F的行数共有k行，
则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \land Q_2 \land \cdots \land Q_k$$

其中

$$Q_i = (R_1 \lor R_2 \lor \cdots \lor R_n),$$

$$R_i = P_i \text{ 或 } R_i = \neg P_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

若该行的 $P_i = T$，则 $R_i = \neg P_i$

若该行的 $P_i = F$，则 $R_i = P_i$.

2.4 联接词的完备集

- 介绍联结词的完备集及其简单的判别方法，包括对偶式的概念

- 重点介绍范式和主范式的概念，给出求范式和主范式的步骤，特别是将命题公式化成相应的主析取范式和主合取范式的方法；

两个重要的命题联结词

- 与非联接词
  与非词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非词"↑"联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\uparrow Q$，读作P和Q的"与非"。

- 当且仅当P和Q的真值都是T时，$P\uparrow Q$的真值为F，否则$P\uparrow Q$的真值为T。

$$P\uparrow Q = \neg(P\wedge Q)$$

两个重要的命题联结词

- 或非联接词
  或非词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非词“$\downarrow$”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\downarrow Q$，读作P和Q的“或非”。

- 当且仅当P和Q的真值都是F时，$P\downarrow Q$的真值为T，否则$P\downarrow Q$的真值为F。

$$P\downarrow Q = \neg(P\vee Q)$$

2. 4 联接词的完备集

- 2.4.3 真值函项

对所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项。每一个真值函项就有一个联结词与之对应。

可理解为关于命题变项的函数

N = 2 时的所有真值函项

P	Q	g0	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	g9	g10	g11	g12	g13	g14	g15
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

$g_0 = F$ $\quad g_1 = P \wedge Q$ $\quad g_2 = P \wedge \neg Q$

$g_3 = P$ $\quad g_4 = \neg P \wedge Q$ $\quad g_5 = Q$

$g_6 = P \bigtriangledown Q$ $\quad g_7 = P \vee Q$ $\quad g_8 = P \downarrow Q$

$g_9 = P \leftrightarrow Q$ $\quad g_{10} = \neg Q$ $\quad g_{11} = P \vee \neg Q$

$g_{12} = \neg P$ $\quad g_{13} = P \rightarrow Q$ $\quad g_{14} = P \uparrow Q$ $\quad g_{15} = T$

2.4 联接词的完备集

2.4.4 联接词的完备集

设C是一个联结词的集合，如果任何n元$(n\geqslant 1)$真值函项都可以由仅含C中的联结词构成的公式表示，则称C是完备的联结词集合，或说C是联结词的完备集。

联结词的完备集

- 定理2.4.1
  {¬, ∨, ∧}是完备的联结词集合。

- 从前面介绍的由真值表列写命题公式的过程可知，任一公式都可由¬, ∨, ∧表示出来，从而{¬,∨,∧}是完备的。

- 一般情形下，该定理的证明应用数学归纳法，施归纳于联结词的个数来论证。

定理2.4.1 $\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词集合

另一证法，因为任何n（n≥1）元真值函项都与唯一的一个主析取范式（后面介绍）等值，而在主析取范式中仅含联结词$\neg, \vee, \wedge$，所以$S = \{\neg, \vee, \wedge\}$是联结词的完备集。

联结词的完备集

推论： 以下联结词集都是完备集：

（1） $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2） $S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3） $S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4） $S_4 = \{\uparrow\}$

（5） $S_5 = \{\downarrow\}$

- 课后补充作业：证明（4）和（5）

2.6 范式

2.6.1 文字与互补对

◆ 命题变项P及其否定式$\neg P$统称文字。且P与$\neg P$称为互补对。

2.6 范式

2.6.2 合取式

由文字的合取所组成的公式称为合取式。

2.6.3 析取式

由文字的析取所组成的公式称为析取式。

2.6 范式

- 2.6.4 析取范式

  析取范式是形如

  $$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$$

  的公式，其中$A_i(i=1,\cdots,n)$为合取式。

- 2.6.5 合取范式

  合取范式是形如

  $$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$$

  的公式，其中$A_i(i=1,\cdots,n)$为析取式。

2.6 范式

- 2.6.6 范式存在定理

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式不是唯一的。

由于范式一般不唯一，所以有必要进一步研究主范式。

主范式——极小项和极大项

◉2.6.7 极小项

n 个命题变项 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 组成的合取式：

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。

则称合取式 $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$ 为极小项，并以 m_i 表示。

极小项

- 由P_1 P_2两个命题变项组成的极小项

二进制标记法

- $\neg P_1 \wedge \neg P_2$ 00
- $\neg P_1 \wedge P_2$ 01
- $P_1 \wedge \neg P_2$ 10
- $P_1 \wedge P_2$ 11

“极小”：只有一种赋值可以取到T

主范式——极小项和极大项

2.6.8 极大项

n个命题变项$P_1, P_2, \cdots, P_n$组成的析取式：

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$ 或$\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式$Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$为极大项，并以$M_i$表示。

极大项

- 由P1 P2两个命题变项组成的极大项

	二进制标记法
$\neg P_1 \lor \neg P_2$	00
$\neg P_1 \lor P_2$	01
$P_1 \lor \neg P_2$	10
$P_1 \lor P_2$	11

“极大”：有多种赋值可以取到T

主析取范式与主合取范式

主析取范式

设由n个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。

主析取范式与主合取范式

⦿主合取范式

设由n个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。

主范式

- 2.6.11 主析取范式定理

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主析取范式。

主范式

- 2.6.12 主合取范式定理

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主合取范式。

主范式——极小项的性质

- (1) 任一含有n个命题变项的公式，所有可能的极小项的个数和该公式的解释个数相同，都是2^n。
- (2) 每个极小项只在一个解释下为真。
- (3) 极小项两两不等值，并且

$$m_i \wedge m_j = \mathrm{F}\,(i \neq j)。$$

主范式——极小项的性质（续）

- (4) 任一含有n个命题变项的公式，都可由k个($k \leqslant 2^n$)极小项的析取来表示。

- (5) 恰由2^n个极小项的析取构成的公式必为重言式。即

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = \mathrm{T}$$

主范式——极大项的性质

- (1) 任一含有n个命题变项的公式，所有可能的极大项的个数和该公式的解释个数相同，都是2^n。
- (2) 每个极大项只在一个解释下为假。
- (3) 极大项两两不等值，并且

$$M_i \vee M_j = \mathrm{T} \quad (i \neq j)$$

主范式——极大项的性质(续)

- (4) 任一含有 n 个命题变项的公式，都可由 k 个($k \leqslant 2^n$)极大项的合取来表示。

- (5) 恰由 2^n 个极大项的合取构成的公式必为矛盾式。即

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = \mathrm{F}$$

主析取范式与主合取范式的求法

- 求主析取范式的方法
  - 1. 先求析取范式
  - 2. 再填满变项

主析取范式与主合取范式的求法

- 1 $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$$P \leftrightarrow Q = \underbrace{(P \wedge Q)}_{m_3} \vee \underbrace{(\neg P \wedge \neg Q)}_{m_0}$$

$$= m_0 \vee m_3 = \bigvee_{0,3}$$

- 2 填满命题变项

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$\because \neg P = \neg P \wedge (Q \vee \neg Q)$$

$$= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\because Q = Q \wedge (P \vee \neg P)$$

$$= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

主析取范式与主合取范式的求法

$$P \to Q = (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q)$$

$$\qquad\qquad m_1 \qquad\qquad\quad m_0 \qquad\qquad\quad m_3$$

$$= m_0 \lor m_1 \lor m_3$$

$$= \lor_{0,\,1,\,3}$$

填满变项的简便方法

$$\neg P \vee Q$$

$$= m^{0x} \vee m^{x1}$$

$$= m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

0	0
0	1
0	1
1	1

0 1

主范式的求法与举例

- 综合举例

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$ 求主析与主合范式

原式 $=\neg(P\vee\neg Q)\vee((\neg P\wedge(Q\wedge\neg R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee R)))$

$=(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge R)$

$=m^{01X}\vee m^{010}\vee m^{10X}\vee m^{1X1}$

列写真值表验算

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$Q\wedge\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

主析与主合之间的转换(简化方法)

已知 $A = \bigvee_{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7}$

$= \bigwedge_{(\{0, 1, \cdots\cdots, 7\} - \{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7\})补}$

$= \bigwedge_{(2.3.6)补}$

$= \bigwedge_{5, 4, 1}$

主析与主合之间的转换(简化方法)

已知 $A = \bigwedge_{1,4,5}$

$= \bigvee_{(\{0,1,\cdots\cdots,7\}-\{1,4,5\}补)}$

$= \bigvee_{(\{0,1,\cdots\cdots,7\}-\{2,3,6\})}$

$= \bigvee_{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7}$

Why ?

第二章作业题

- 一：3，4，6
- 三
- 五：3，5，8