

1.填空题 (3分)

答案保存成功

曲线 $L: |x| + |y| = \sqrt{2}$ 的线密度为 $\mu(x, y) = 3 + x^2 - y^2$, 则曲线 L 的质量为

24

2.填空题 (3分)

设 \mathbb{R}^3 中曲面 Σ :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = \theta, \end{cases} \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

取 Σ 朝上一侧为正向, 则

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Sigma^+} 2y dy \wedge dz - 2x dz \wedge dx + dx \wedge dy =$$

输入答案

3

3.填空题 (3分)

已知曲线积分 $\int_{L^+} (2x^2 + axy) dx + (x^2 + 3y^2) dy$ 与积分路径无关 (只与曲线的起点和终点有关), 则实数 $a =$

输入答案

2

4.填空题 (3分)

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -4$ 处条件收敛, 记 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^n$ 的收敛半径为 R , 则 R 的最小值是

输入答案

16

5.填空题 (3分)

设幂级数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数是微分方程初值问题

$$\begin{cases} xy'' = y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解, 则 $\frac{1}{a_3} =$

输入答案

12

6.填空题 (3分)

设 \mathbb{R}^3 中曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 - 2z = 0 (0 \leq z \leq 8)$. 则

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dS =$$

输入答案

16

7.填空题 (3分)

设 $\lambda > 0$, 记 L_{λ}^+ 为单位圆周 $x^2 + y^2 = \lambda^2$, 逆时针为正向, 则

$$\frac{1}{\pi \lambda^2} \left(\oint_{L_{\lambda}^+} (\sin x + y + e^y) dx + (3x + xe^y) dy \right) =$$

输入答案

2

8.填空题 (3分)

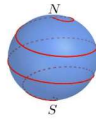
三重积分 $\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} \sqrt{|x| + y^2 - \cos z + 1} \sin(xy^2 z^3) dx dy dz =$

输入答案

0

9. 填空题 (3分)

如图, L^+ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的一条 C^1 曲线.



以 $S(0, 0, -1)$ 为起点, 以 $N(0, 0, 1)$ 为终点. 则

$$\int_{L^+} (y^2 + z^2)dx + 2(z^2 + x^2)dy + 3(x^2 + y^2)dz =$$

输入答案

4

10. 填空题 (3分)

函数 $f(x) = x^2$ 在区域 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2\}$ 中的积分平均值

$$\frac{\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} =$$

输入答案

5

11. 填空题 (3分)

答案保存成功

设 $\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, x^2)$, 则 $\text{div}(\text{rot} \vec{F}(x, y, z)) =$

输入答案

0

12. 填空题 (3分)

设有向曲线 $L^+ : x = t, y = t^2, z = t^4, 0 \leq t \leq 1$, 参数 t 增加方向与曲线正向一致, 则 $\int_{L^+} 9y dx - 3x dy + 4z dz =$

输入答案

3

13. 填空题 (3分)

设 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), x^2 + y^2 \neq 0$, 则 $\text{div}(\text{grad} f)(1, 1) =$

输入答案

0

14. 填空题 (3分)

积分 $\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx =$

输入答案

2

15. 填空题 (3分)

设 $L : x = 2t, y = t, z = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 1$, 则 $\int_L (xy + 2y + z) dl =$

输入答案

8

二、选择题(共10题, 满分30分)

1. 单选题 (3分)

设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 记

$$I_1 = \iint_D \left(\cos \sqrt{x^2 + y^2} + 100(x + y) \right) dx dy$$

$$I_2 = \iint_D \left(\cos(x^2 + y^2) + 10(x + y) \right) dx dy$$

$$I_3 = \iint_D \left(\cos \left((x^2 + y^2)^2 \right) + x + y \right) dx dy.$$

以下结论正确的是 _____.

(A) $I_3 < I_1 < I_2$

(B) $I_1 < I_2 < I_3$

(C) $I_3 < I_2 < I_1$

(D) $I_2 < I_1 < I_3$

2. 单选题 (3分)

积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 + xy) dx dy =$ _____.

(A) π

(B) 2π

(C) $\frac{3\pi}{2}$

3. 单选题 (3分)

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$ 在 \mathbb{R} 上 _____.

(A) 条件收敛, 且一致收敛

(B) 条件收敛, 但不一致收敛

(C) 绝对收敛, 且一致收敛

(D) 绝对收敛, 但不一致收敛

4. 单选题 (3分)

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^n}$ 的收敛域为 _____.

(A) $\{0\}$

(B) $(-1, 1)$

(C) $(-\infty, +\infty)$

(D) $(-1, 1]$

5.单选题 (3分)

记 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数为 $S(x)$, 则 $S'(\frac{1}{2}) =$ _____.

- ☐ A $\ln 2 - \ln 3$
- ☒ B $\ln 2$
- ☐ C $\ln 3 - \ln 2$
- ☐ D $-\ln 2$

6.单选题 (3分)

设 Ω 为单位球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. 则流速场

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + yz, y + zx, z + xy)$$

在单位时间中流出 Ω 的流量 $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS =$ _____.

- ☒ A 4π
- ☐ B π
- ☐ C 2π
- ☐ D 0

7.单选题 (3分)

设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(na)}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ _____.

- ☐ A 收敛性与 a 的取值有关
- ☐ B 绝对收敛
- ☐ C 发散
- ☒ D 条件收敛

8.单选题 (3分)

已知 2π 周期函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi]$ 上满足

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pi, \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

利用 $f(x)$ 的Fourier级数, 可得级数 $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$ 的和为 _____.

- ☐ A $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$
- ☒ B $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
- ☐ C $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
- ☐ D $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

9.单选题 (3分)

积分 $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx =$ _____.

- ☐ A 6π
- ☒ B 2π
- ☐ C 4π
- ☐ D 8π

10.单选题 (3分)

空间曲线 L^+ 为柱面 $|x| + |y| = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 它围绕 z 轴的正方向逆时针旋转. 则 $\oint_{L^+} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz =$ _____.

- ☒ A 12
- ☐ B $12\sqrt{3}$
- ☐ C 6
- ☐ D $4\sqrt{3}$

三、计算(共2题, 满分20分)

1.主观题 (10分)

设 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 2\}$, 计算二重积分 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$.

B I U Σ 代码语言

字数统计

2.主观题 (10分)

计算曲面积分:

$$I = \iint_{S^+} \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

其中 S^+ 为曲面 $1 - \frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16}$ ($z \geq 0$) 的上侧.

B I U Σ 代码语言

字数统计




四、证明(共1题, 满分5分)

1.主观题 (5分)

已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ 由以下等式确定

$$b_n = \ln(e^{a_n} - a_n), \quad \forall n \geq 1.$$

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛。

B I U    代码语言