第13讲　函　数（2）

计算机系　黄民烈
Tel: 18901155050
Office: FIT 4-504
http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/
aihuang@tsinghua.edu.cn

11.2 函数的合成与函数的逆

函数的合成

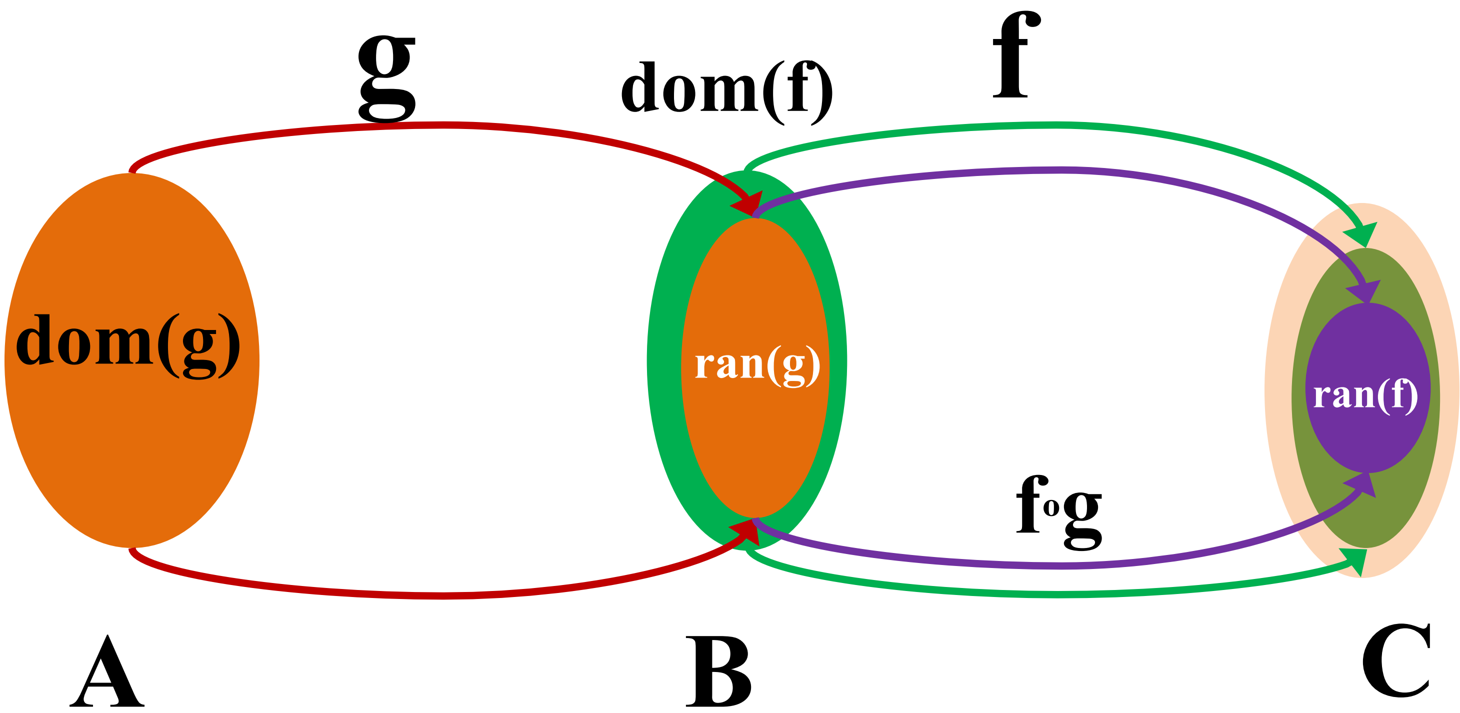
- 定理11.2.1：设$g: A \to B$（函数），$f: B \to C$（函数），那么
  - (1) $f \circ g$是函数：A→C
  - (2) 对于A中任意的x，有$f \circ g(x)=f(g(x))$；

证明思路：

1) $f \circ g$关系的定义域：$dom(f \circ g)=A$

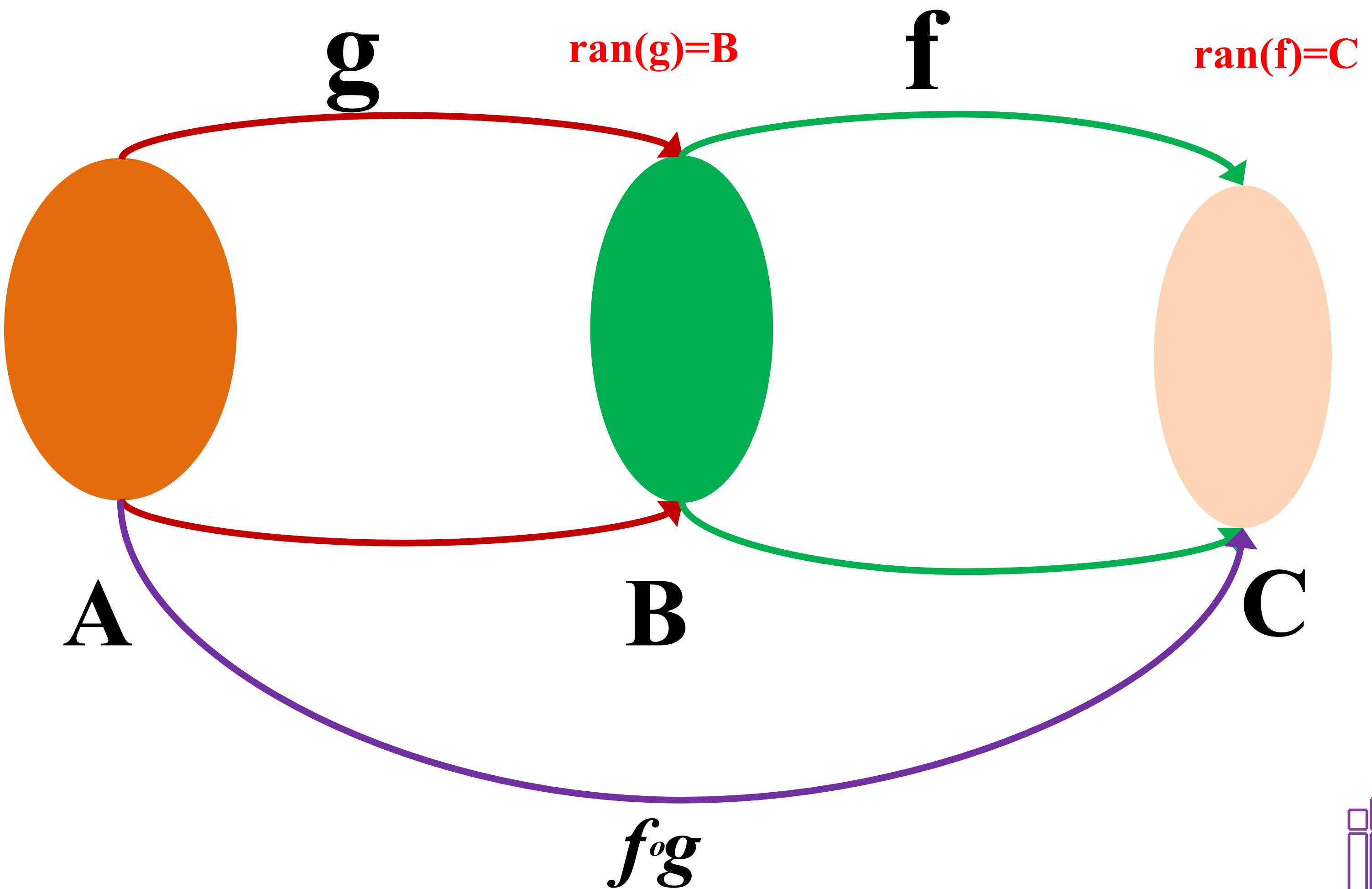
2) 定义域中的每个x，有唯一y对应

映射过程

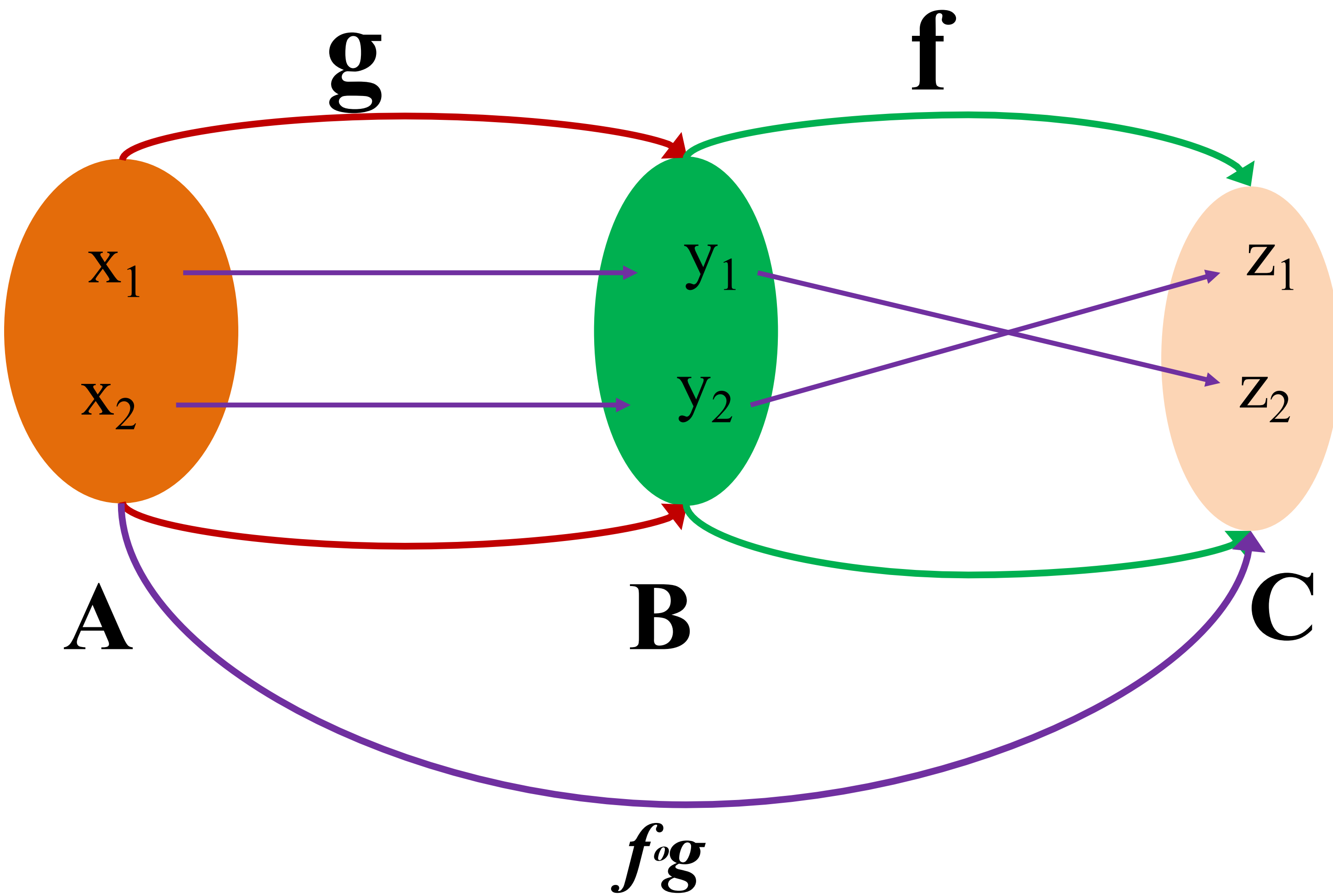


- 定理11. 2. 2：设g:A→B, f: B→C，那么
  - 若f, g是满射，那么$f\circ g$是满射；
  - 若f, g是单射，则$f\circ g$是单射；
  - 若f, g是双射，则$f\circ g$是双射。

g, f都是满射



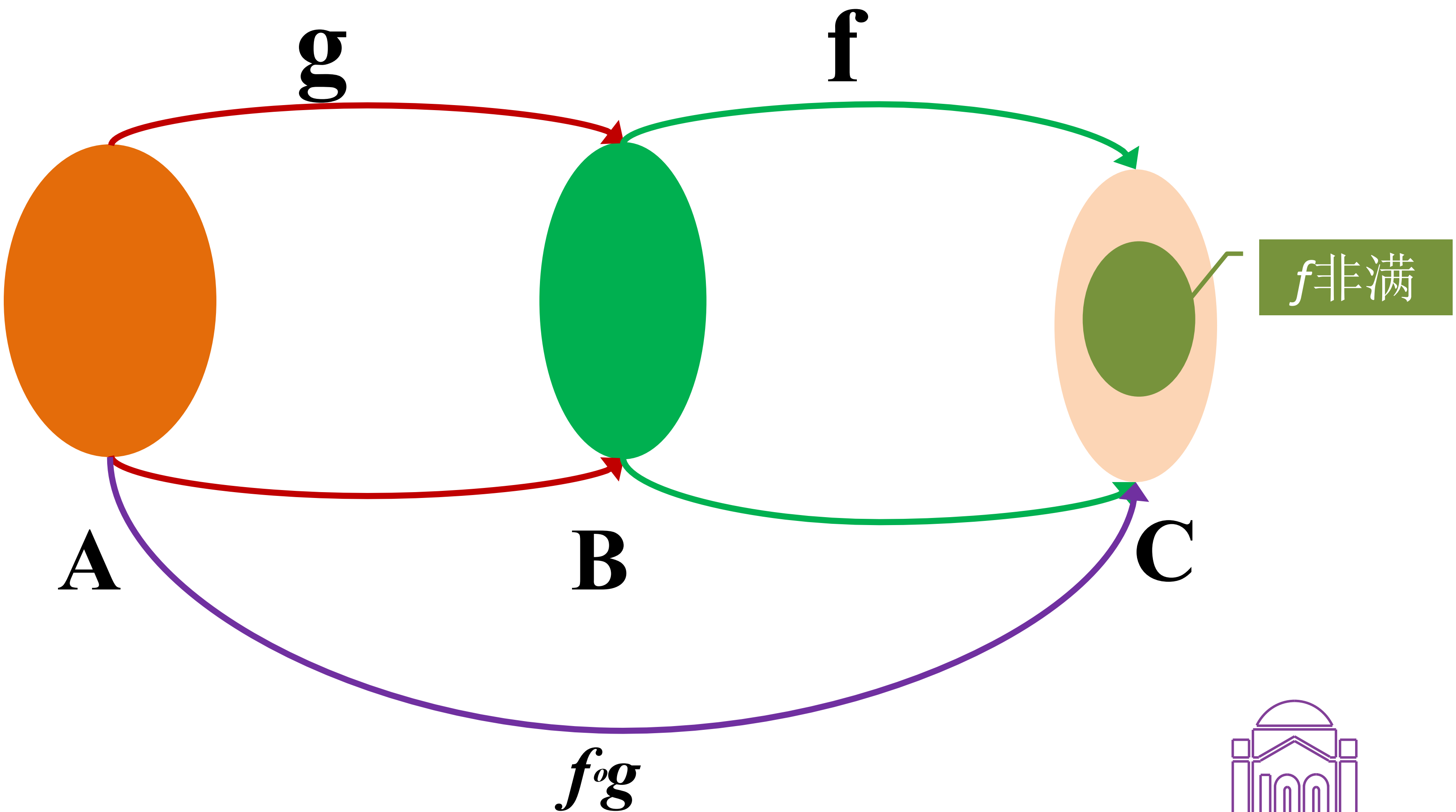
g, f都是单射



- 定理11. 2. 3： 设g: A→B, f: B→C， 那么
  - 若$f \circ g$是满射， 那么f是满射；
  - 若$f \circ g$是单射， 则g是单射；
  - 若$f \circ g$是双射， 则f是满射， g是单射。

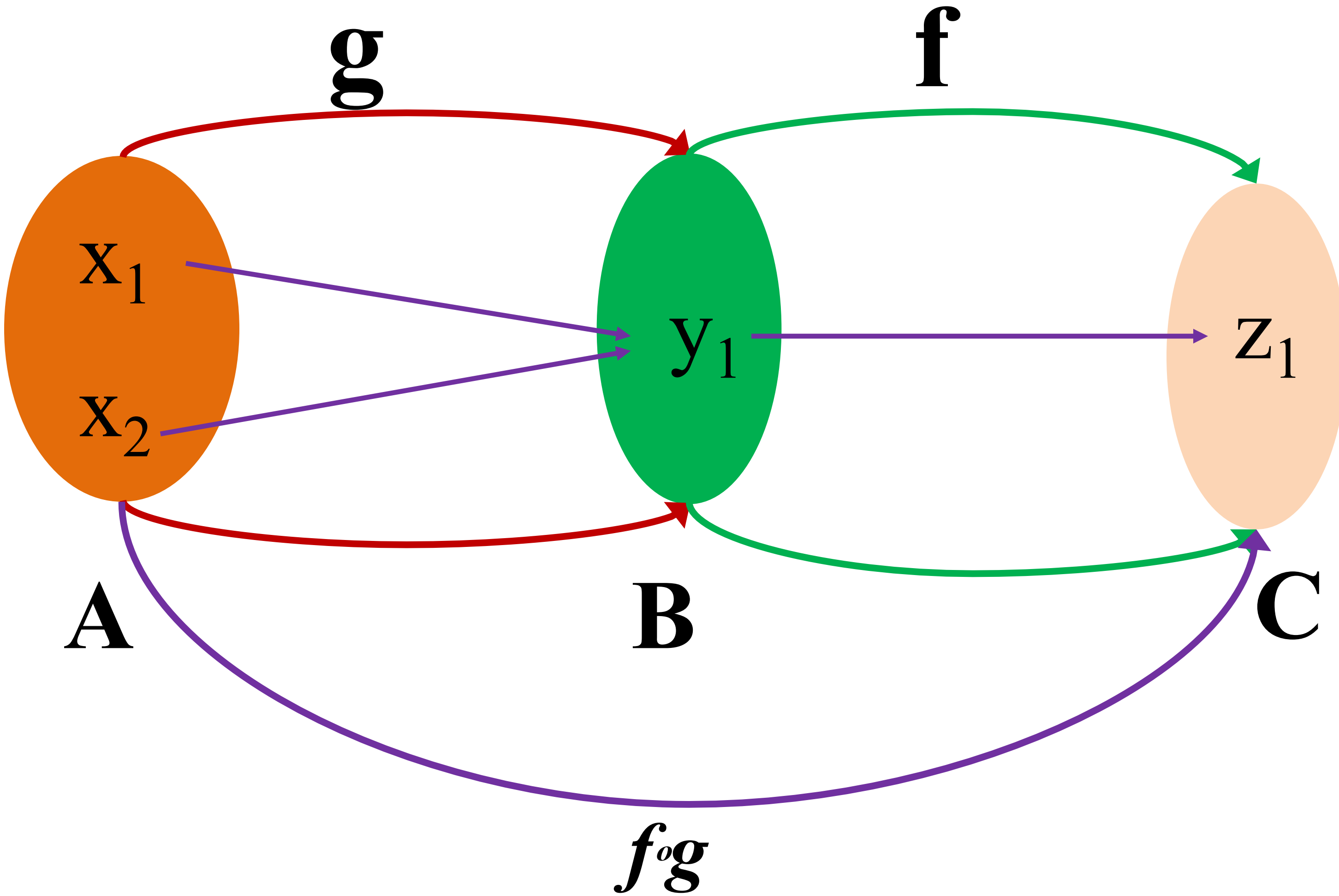
$f\circ g$是满射

只需保证每个c
能对应到某个b，
而这些b能找到相应a即可。

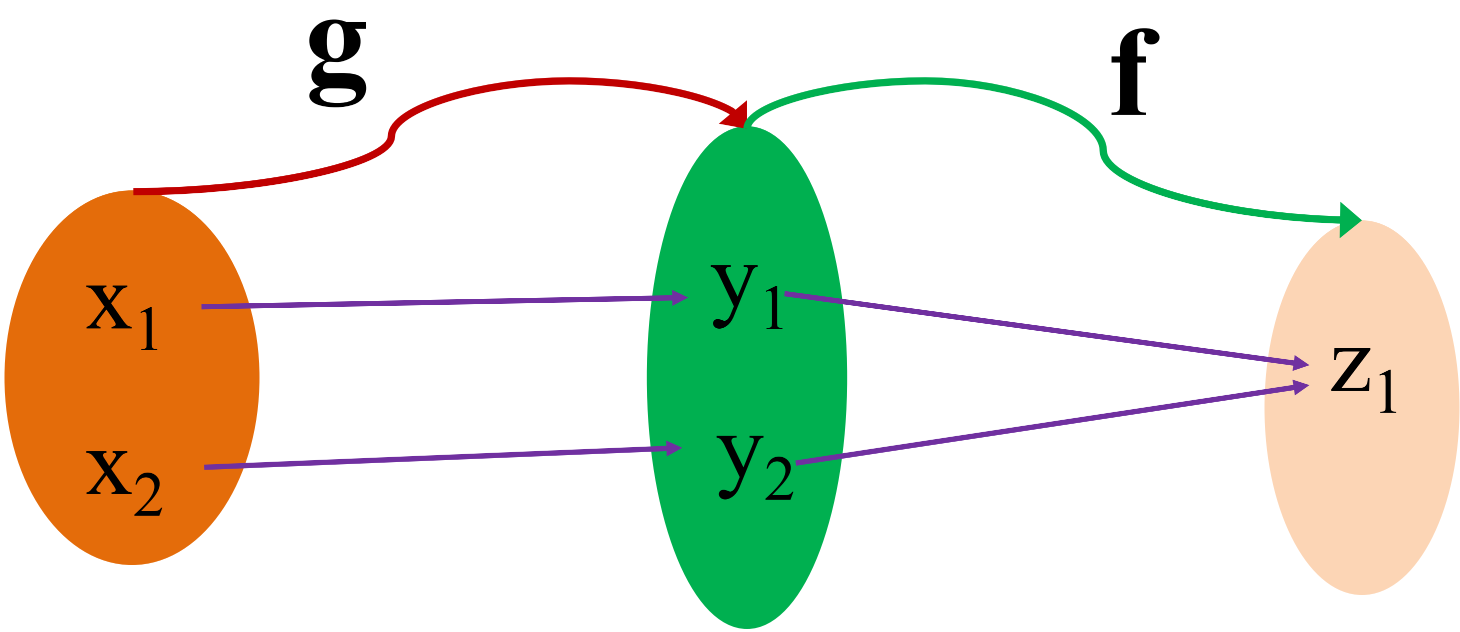


$f \circ g$是单射

g不是单射，那f∘g 一定不是单射

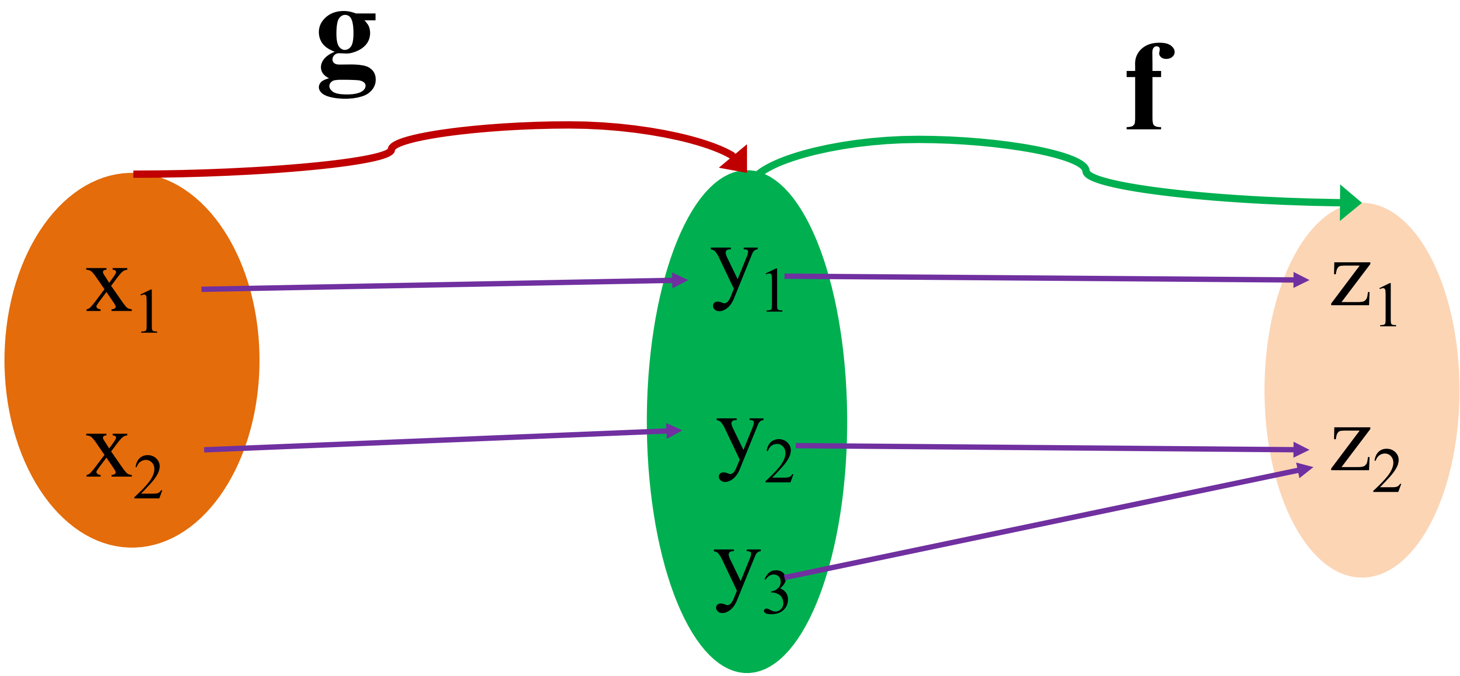


如果f不是单射，那$f\circ g$是不是单射?



f不是单射，在本例中$f\circ g$ 也不是单射

如果f不是单射，那f∘g是不是单射?



f不是单射，但f∘g可以是单射

举例 1

- 设g: A→B, f: B→C, A={a}, B={b, d}, C={c}, g= {<a, b>}, f={<b, c>,<d, c>}
- $f \circ g = \{<a, c>\}$ 是满射，单射，双射；
  - f：满射但不是单射
  - g：不是满射，是单射

举例 2

- 定理11. 2. 4 设f: A→B, 那么$f=f\circ I_A=I_B\circ f$
- 课后作业

函数的逆

- 关系的逆一定是函数吗？
- 关系的逆一定是关系

- 函数的逆一定是函数吗？
- 函数的逆一定是关系

举例

- $A=\{a,b,c\}$ 定义A上的
  - 关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,a\rangle\}$
  - 函数 $f=\{\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$
- 对应的逆关系
  - $R^{-1} = \{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,a\rangle\}$, 是A→A的函数
  - $f^{-1} = \{\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$, 不是A→A的函数

- 关系的逆有可能是函数
- 函数的逆有可能不是函数

函数的逆

- 定理11.2.5：若f:A→B是双射，则f^{-1}是函数f^{-1} :B→A。
- 定理11.2.6：若f:A→B是双射，那么f^{-1} :B→A是双射
- 定义：若f:A→B是双射，则f^{-1} :B→A称为f的反函数

反函数举例

- 对实数集合R，正实数集合R_+，$g(x)=\exp(x):R\rightarrow R^+$;
- $g^{-1}(x)=\ln(x)$

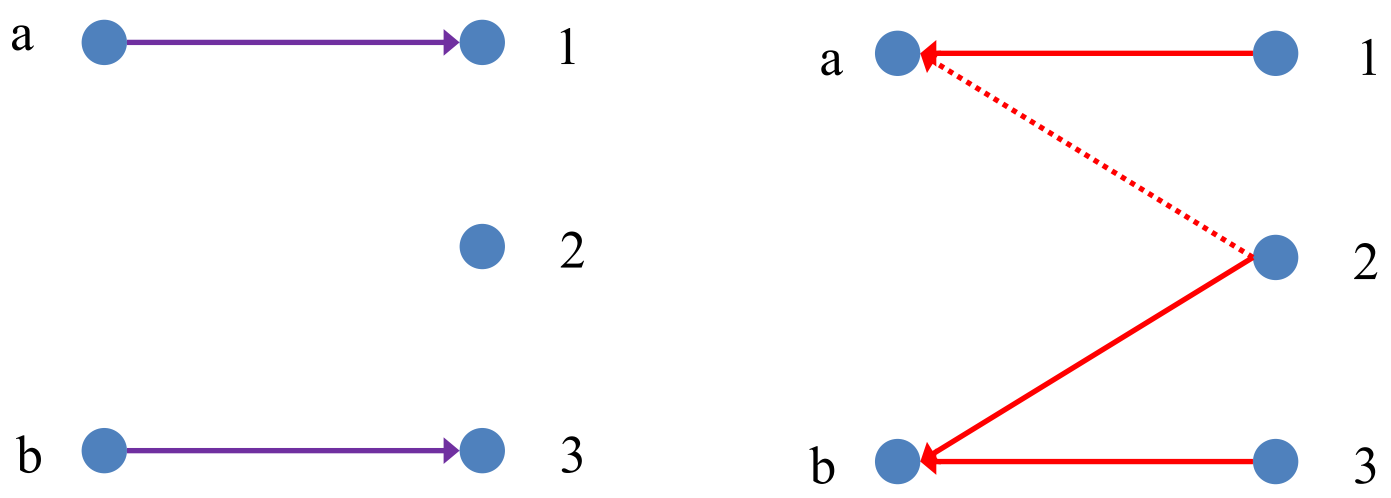
函数的逆

- 定理11. 2. 7　若$f:A\to B$是双射，则
  - $\forall x\in A$，$f^{-1}(f(x))=x$
  - $\forall y\in B$，$f(f^{-1}(y))=y$

函数的左逆和右逆

- 设$f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$, 如果
  - $f \circ g = I_B$ 称g为f的右逆;
  - $g \circ f = I_A$ 称g为f的左逆;
- **注意：f, g都是函数**

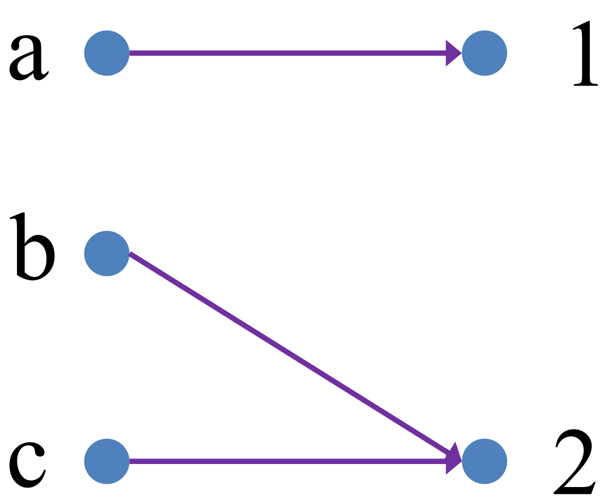
函数的左逆



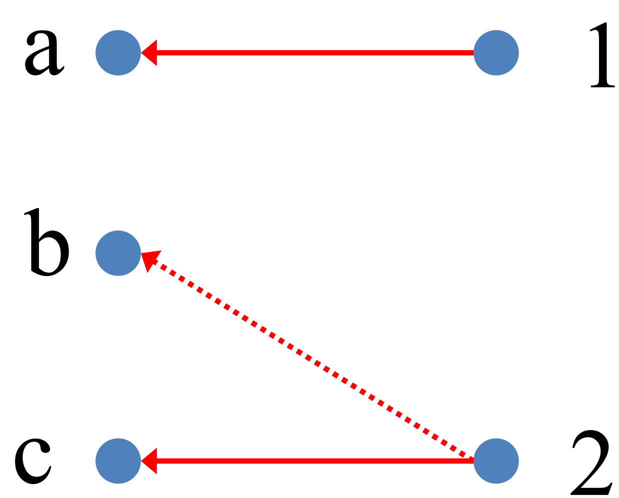
单射f　　　　　　　　左逆g

f为什么没有右逆$f \circ g = I_B$？

函数的右逆



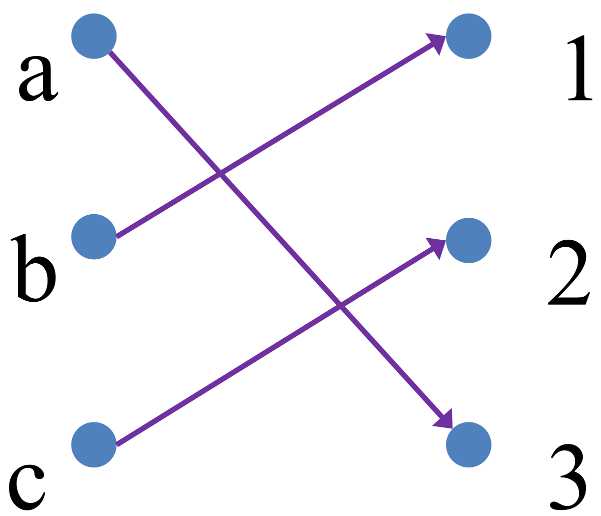
满射f



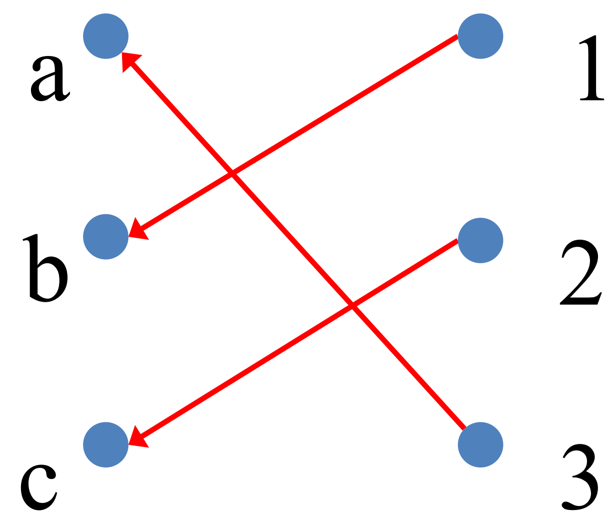
右逆g

f为什么没有左逆$g \circ f = I_A$?

函数的左逆和右逆



双射f



反函数g

函数的左逆和右逆

- 定理11. 2. 8　　若f:A→B，且A不为空；
  - f存在左逆，当且仅当f是单射
  - f存在右逆，当且仅当f是满射
  - f存在左逆又存在右逆，当且仅当f是双射
  - 若f是双射，则f的左逆等于右逆

思考题

- 非空有限集合A和B，设f: A→B，f是单射，且|A|<|B|
- 请问：f存在多少种不同的左逆？

11.3 函数的性质

函数的相容性

函数$f: A \to B$;　$g: C \to D$

满足 $\forall x,\ x \in A \cap C, f(x) = g(x)$

两个函数在定义域的交集上，对应x的函数值相同

- 例：

$$f: \{a, b\} \to \{1,2\}, f = \{< a, 1 >, < b, 2 >\}$$
$$g: \{a, c\} \to \{1,2\}, g = \{< a, 1 >, < c, 2 >\}$$

则f和g相容

11.3 函数的性质

函数集合的相容性

设C是一些由函数组成的集合，如果C中任意两个函数f和g都是相容的，就说C是相容的

- 例：设$C=\{f,g,h\}$,其中

$$f:\{a,b\}\to\{1,2\}, f=\{<a,1>,<b,2>\}$$
$$g:\{a,c\}\to\{1,2\}, g=\{<a,1>,<c,2>\}$$
$$h:\{b,c\}\to\{2\}, h=\{<b,2>,<c,2>\}$$

则C相容

11.3 函数的性质

- 定理11. 3. 1
  - 若$f:A\to B$，$g:C\to D$，则f和g是相容的当且仅当$f\cup g$是函数

$f\cup g$的定义域是什么？值域呢？

思路：“$f\cup g$是函数”要求同一个x不能有多个y，这正好由f和g的相容性保证

11.3 函数的性质

- 定理11.3.3
  - 对函数集合C，若C是相容的，且$\boldsymbol{F} = \cup \boldsymbol{C}$，则$F$是函数$F: dom(F) \to ran(F)$，且
$$dom(F) = \cup\{dom(f) | f \in C\}$$

先分析结构

思考：定理11.3.3是定理11.3.1是什么关系

11.3 函数的性质

- **函数与等价关系的相容性：** R是A上的等价关系， $f: A \to A$; 满足

$$\forall x, y, \quad < x, y > \in R \Longrightarrow < f(x), f(y) > \in R$$

则R和f是相容的。 $< x, y > \in R$ *说明x, y在同一个等价类中*

- 例：设$A = \{1,2,3\}, R$是A上的等价关系，商集$A/R = \{\{1,2\}, \{3\}\}$，设$f: A \to A$定义为$f(1) = 3, f(2) = 3, f(3) = 1.$ 则R和F是相容的.

思考：给定一个等价关系，这样的函数有多少个?

11.3 函数的性质

- 定理11. 3. 4 设R是A上的等价关系，且f:A→A，如果R和f是相容的，则存在唯一的函数F：A/R→A/R，使得$F([x]_R)=[f(x)]_R$；如果R和f不相容，则不存在这样的函数。

- 思路：
  - 相容的定义： $\forall x, y, < x, y > \in R \Rightarrow < f(x), f(y) > \in R$
  - 即“同一个等价类中的元素会被f映射到另一个等价类中”
  - 根据此，可以定义一个从等价类映到等价类的函数F：如果F把等价类P映射到等价类Q，那么P中的每个元素都会被f映到Q

11.3 函数的性质

- 设A={1，2，3，4，5，6，7}
- R是A上的等价关系，A/R={{1，2，3}，{4，5}，{6，7}}
- 设$f: A \to \mathrm{A}$ f ={<1,4>, <2,5>, <3,5>, <4,3>, <5,2>, <6,1>, <7,3>}
- 则R与f是相容的
- 可以构造$F: A/R \to \mathrm{A}/R$ F={<{1,2,3},{4,5}>,
  <{4,5},{1,2,3}>,
  <{6,7},{1,2,3}> }

有$F([x]_R) = [f(x)]_R$

《第11章 函数》总结

- 函数的定义：与关系的联系与区别;关系图，关系矩阵
- 函数的类型：单射、满射、双射
- 函数的合成与逆：关系的合成和逆，左逆右逆，与函数类型的关系
- 函数选择公理：任何关系都存在对应的函数
- 特殊函数：特征函数、常函数、泛函
- 相容性：函数与函数的相容；函数与关系的相容