微积分 A(2) 期末试题参考答案 2020 年 6 月 8 日

1. 已知 $y=y(x),z=z(x)$ 是方程组 $\begin{cases}x^3+y^3-z^3=10\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 附近确定的隐函数，求 $y=y(x),z=z(x)$ 在 $x_0=1$ 点处的导数 $y'(1),z'(1)$.

解：方程组两端对 x 求导，有 $\begin{cases}3x^2+3y^2y'-3z^2z'=0\\1+y'+z'=0\end{cases}$，令 $(x,y,z)=(1,1,-2)$ 得

$\begin{cases}3y'-12z'=-3\\y'+z'=-1\end{cases}$，解得 $y'(1)=-1,z'(1)=0.$

2. 设 $f\in C^{(2)}(\mathbf{R})$，$z=f(x^2+xy+y^2)$，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $(1,1)$ 处的值。

解：记 $u=x^2+xy+y^2$，有 $z_y=f'(u)u_y=(x+2y)f'(u),z_y(1,1)=3f'(3).$

$$z_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\big((x+2y)f'(u)\big)=f'(u)+(x+2y)f''(u)u_x=f'(u)+(x+2y)(2x+y)f''(u),$$

$z_{xy}(1,1)=f'(3)+9f''(3).$

3. 求 $u=(\sin x)(\sin y)(\sin z)$ 在约束条件 $x+y+z=\frac{\pi}{2}(x>0,y>0,z>0)$ 下的极值，并说明所求的极值是极大值，还是极小值。

解法一：$u=\sin x\sin y\sin\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)=\sin x\sin y\cos(x+y),$

$(x,y)\in D=\left\{(x,y):x,y>0,x+y<\frac{\pi}{2}\right\}.$

令 $0=u_x=\sin y\big(\cos x\cos(x+y)-\sin x\sin(x+y)\big)=\sin y\cos(2x+y),$

$0=u_y=\sin x\cos(x+2y)$，解得 $x=y=z=\frac{\pi}{6}$，此时 $u=\frac{1}{8}.$

注意连续函数 u 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上必有最值，而在 ∂D 上 u=0（最小值），因此上述驻点处必取最大值，当然也是极大值。

解法二：令 $L(x,y,z,\lambda)=\sin x\sin y\sin z+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right).$

令$\begin{cases}0=L_x=\cos x\sin y\sin z+\lambda\\0=L_y=\sin x\cos y\sin z+\lambda\\0=L_z=\sin x\sin y\cos z+\lambda\end{cases}$，结合约束$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$得到$x=y=z=\dfrac{\pi}{6}$,下同解法一。

4. 计算$\iint\limits_D\left|\dfrac{y}{x}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2x\}$.

解：使用极坐标代换，原式$=2\int_0^{\pi/3}\tan\theta d\theta\int_1^{2\cos\theta}rdr=\int_0^{\pi/3}\tan\theta\left(4\cos^2\theta-1\right)d\theta$

$=\int_0^{\pi/3}(2\sin 2\theta-\tan\theta)d\theta=\dfrac{3}{2}-\ln 2.$

5. 设$D=\{(x,y)\,|\,x>0\}$。

（I）若$A,B\in D$，L为D内连接A,B两点的逐段光滑的曲线，问$\int_{L(A)}^{(B)}\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$是否与路径$L$有关？说明理由；

（II）是否存在二元函数$z=z(x,y)$，使得$\mathrm{d}z=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$？

若存在，求$z(x,y)$；若不存在，说明理由。

解：（I）记$P=\dfrac{y}{x^2+2y^2},Q=\dfrac{-x}{x^2+2y^2}$,有

$$P_y=\frac{(x^2+2y^2)-y(4y)}{(x^2+2y^2)^2}=\frac{x^2-2y^2}{(x^2+2y^2)^2},Q_x=\frac{-(x^2+2y^2)+x(2x)}{(x^2+2y^2)^2}=\frac{x^2-2y^2}{(x^2+2y^2)^2},\ P_y=Q_x.$$

由于D是单连通域，因此题设积分在D内与路径无关。

（II）注意到$dz=\dfrac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}=\dfrac{ydx-xdy}{x^2}\dfrac{x^2}{x^2+2y^2}=-\dfrac{1}{1+2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}d\left(\dfrac{y}{x}\right)$，所以

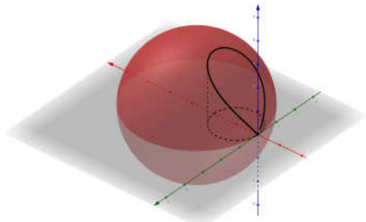
$$z=\int-\frac{1}{1+2\left(\frac{y}{x}\right)^2}d\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}y}{x}\right)+C.$$

评注：不可写作$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}y}\right)$，因为这个函数当y=0时不连续。但如分段加上不同的常数使之连续则可以。

6. 求$\iiint\limits_\Omega\sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$.

解：使用球坐标代换，原式$=\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^3}dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\dfrac{4\pi}{3}\int_0^1\sqrt{1-t}dt=\dfrac{8\pi}{9}.$

7. 设 $a>1$，有向曲线 $L^{+}:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2ax\\x^2+y^2=2x\end{cases}$ $(z\ge 0)$，从 z 轴正向看去，为逆时针方向。



求 $\int_{L^{+}}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

解：记 $\vec{F}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$，由 Stokes 公式得原式 $=\iint\limits_S(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$，这里 S 是 $x^2+y^2+z^2=2ax$ 被 $x^2+y^2=2x$ 截下的区域上侧。

$\vec{\nabla}\times\vec{F}=(2y-2z,2z-2x,2x-2y)$，取 S 的法向 $\vec{n}_1=(-z_x,-z_y,1)=\left(\frac{x-a}{z},\frac{y}{z},1\right)$，有

（这里 D：$x^2+y^2\le 2x$）原式 $=\iint\limits_D(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}_1dxdy=\iint\limits_D 2a\left(1-\frac{y}{z}\right)dxdy=2a\iint\limits_D dxdy=2a\pi.$

8. 设 2π 周期函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

（I）求 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数；

（II）利用（I）的结论求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

解：（I） $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2},a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2},b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$

因此 $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right).$

（II）令 x=0，由于 f 在 0 连续，上述傅里叶级数收敛到 $f(0)=0$，因此

$$0=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi(2k-1)^2},\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

9. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是包含原点的有界开区域，其边界 $\partial\Omega$ 是 $C^{(1)}$ 类光滑正则曲面。记 $\mathbf{r}=(x,y,z)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

求证：$\frac{1}{2}\iint\limits_{\partial\Omega}\cos<\mathbf{r},\mathbf{n}>\mathrm{d}S=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}$，其中 $\Omega_\varepsilon=\{(x,y,z)\in\Omega\,|\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\varepsilon\}$，$<\mathbf{r},\mathbf{n}>$ 表示向量 $\mathbf{r}$ 与 $\partial\Omega$ 的单位外法向量 $\mathbf{n}$ 的夹角。

证明：由高斯公式有 $\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\cos<\vec{r},\vec{n}>dS=\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r}dS=\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{2}{r}dxdydz.$

（$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}{r}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{r}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}=\frac{2}{r}$）

记 $S_\varepsilon: r=\varepsilon$，有 $\iint\limits_{S_\varepsilon}\cos<\vec{r},\vec{n}>dS=\iint\limits_{S_\varepsilon}dS=4\pi\varepsilon^2$．因此

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{r}dxdydz=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{\partial\Omega}\cos<\vec{r},\vec{n}>dS-\iint\limits_{S_\varepsilon}\cos<\vec{r},\vec{n}>dS\right)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\partial\Omega}\cos<\vec{r},\vec{n}>dS-2\pi\varepsilon^2,$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即得结论。

10. 设 $a_n\ge 0, n=0,1,2,\cdots$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n n!$ 收敛，记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 。求证：

（I）级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$；

（II）广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n n!$。

（提示：$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x=n!$）。

证明：(I)法一：由条件有 $a_n n!\to 0$，因此存在 N，当 n>N 时 $a_n<\frac{1}{n!},|a_n x^n|<\frac{|x|^n}{n!}$. 而 $\sum\frac{|x|^n}{n!}$ 收敛，因此 $\sum a_n x^n$ 绝对收敛。上述收敛性对任意实数 x 成立，因此收敛半径为∞。

法二：任给实数 x，$\sum|a_n x^n|=\sum a_n n!\frac{|x|^n}{n!}$, 由于 $\sum a_n n!$ 收敛，而当 $n>|x|$ 时，$\frac{|x|^n}{n!}$ 关于 n 递减有界，由阿贝尔判别法得到 $\sum|a_n x^n|$ 收敛，收敛半径为∞。

（II）任给 A>0，当 $x\in[0,A]$ 时有 $|a_n x^n e^{-x}|\le a_n A^n$ 。由（I）$\sum a_n A^n$ 收敛，因此 $\sum a_n x^n e^{-x}$ 关于 $x\in[0,A]$ 一致收敛。因此，

$$\int_0^A e^{-x}f(x)dx=\int_0^A e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^A e^{-x}x^n dx<\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!<+\infty.$$

上式左边作为 A 的函数当 $A\to+\infty$ 时递增有上界，因此广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

记 $g_N(x)=\sum\limits_{n=0}^{N}a_n x^n e^{-x}$，则 $g_N(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负，逐点收敛到 $g(x)=e^{-x}f(x).$

为证明题设等式成立，只需 $R_N=\int_0^{+\infty}\big(g(x)-g_N(x)\big)dx\to 0.$ 易知 $R_N\ge 0.$

写 $R_N=\int_0^A\big(g(x)-g_N(x)\big)dx+\int_A^{+\infty}\big(g(x)-g_N(x)\big)dx\le\int_0^A\big(g(x)-g_N(x)\big)dx+\int_A^{+\infty}g(x)dx.$ 令 $N\to\infty$，前面已证明右边第一项趋于 0，因此 $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}R_N\le\int_A^{+\infty}g(x)dx.$ 再令 $A\to+\infty$，有

$R_N \to 0$. 结论得证。

评注：可以证明 $g_N(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上也是一致收敛到 $g(x)$ 的。但一般来说，只有一致收敛性不足以保证极限可以与无穷积分换序。例如， $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n},0\le x\le n\\ 0,x>n\end{cases}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛到 0，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx=1\ne 0$.

11. 附加题：设 $0<p\le\frac{1}{2}$.

（I）证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$ 关于 x 在区间 $[0,2\pi]$ 上收敛，但不一致收敛；

（II）判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$ 是否为某个连续的 2π 周期函数 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数，并说明理由。

解：（I）当 $x=0$ 或 $x=2\pi$ 时，每项都是 0，当然收敛。

对其他的 x，由于 $\left|\sum\limits_{n=1}^{N}\sin nx\right|=\left|\dfrac{\cos x-\cos\frac{2N+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$，而 $\frac{1}{n^p}$ 关于 n 递减趋于 0，由狄利克雷判别法得到收敛性。

对任意正整数 N，取 $x_0=\frac{\pi}{6N}$，有 $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{2N}\frac{\sin nx_0}{n^p}\right|>\sin\frac{\pi}{6}\sum\limits_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{n^p}>\frac{1}{2}\frac{N}{(2N)^p}=\frac{N^{1-p}}{2^{p+1}}\ge\varepsilon_0$，这里 $\varepsilon_0=\frac{1}{2^{p+1}}$，由柯西准则得到不一致收敛。

（II）否。如是，则 $f(x)$ 作为连续函数当然可积而且平方可积。由 Parseval 等式，应当有

$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)\right)^2dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$，但上式右边发散，矛盾。

评注：可以证明题设级数是傅里叶级数，但其和函数并非平方可积。