人们对待风险的态度

1

- A person will pay less than the mathematical expectation for the right to play a gamble.
- Similarly, an insurer will demand a “risk premium” in addition to the expected loss in order to cover a risk.

2

预期效用理论为我们提供了一个非常方便的描述不确定情形下经济行为的方法，是一把开启不确定经济学理论体系大门的钥匙。效用函数$u(x)$表示了个人对场景集合的偏好关系，可以被视作为一个“算子”，使得决策人或他的计算机能够选择可行概率分布中最优的概率分布。任一决策原则，只要与我们前面定义的三个公理相一致，就能以这种形式进行描述。三个公理对函数$u(x)$的形状都没有提及，只有公理 2 暗示$u(x)$必须是x的增函数，即$u'(x)>0$。从而函数$u(x)$的特定形状将代表特定的个人对待风险的态度。下面我们将选择几个简单的函数，研究一下它们所代表的人们对待风险的态度。

3

$u(x)$最简单的形式是$u(x)=x$。这意味着，当且仅当$\sum xf(x)>\sum xg(x)$时，场景$f(x)$优于场景$g(x)$。也就是说，我们仅考虑场景的预期值，或描述场景的概率分布的一阶矩（first moment）。我们将选择预期收益最大的场景，而不考虑场景偏离预期值的“风险”。显然，我们在 2.1 中讨论过的圣彼得堡悖论中人们的偏好就不能用区间$(0,\infty)$上这样的线性效用函数来表示。

函数$u(x)$必须有界。否则考虑一个任意小的概率$\varepsilon>0$，如果$u(x)$无界，对任一x我们都可找到一个$N>x$，使得不等式$u(x)<(1-\varepsilon)u(0)+\varepsilon u(N)$成立。也就是说，不管中奖的概率如何，我们总可以找到一个奖金N，使得彩券比任意确定性的货币更有吸引力。这与圣彼得堡悖论中人们的选择不相符。

4

假设$u(x)$在我们所考虑的区间上为凹函数（一个有界的连续函数必然为凹函数）。如果在相应的区间上对于所有的x和y，当$0\le p\le 1$时关系式$u\left[(1-p)y+px\right]\ge(1-p)u(y)+pu(x)$成立，则函数$u(x)$为凹函数。

当$y=0$时，关系式变为：$u(px)\ge(1-p)u(0)+pu(x)$。函数的形状如图 2.1 所示：

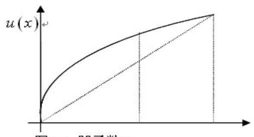


图 2.1 凹函数

可以看出，如果一个人对待风险的态度可以用$u(x)$来表示，并且拥有货币px，他将不会用px作赌注进行这样的一个赌博：以概率p得到x，以概率$1-p$得到 0（这样的一个赌博被称之为“公平的”赌博，其中赌注等于赌博的预期收益）。

于是我们得到一个一般的结论：一个人的偏好如果可以用一个凹的效用函数（或至少在一定的区间上是凹函数）来表示，在这一区间他将不会接受一个“公平的”赌博。

5

举例：假设一彩券的奖金为$50，中奖概率为 0.4。购买彩券的价格等于彩券的预期值$20。这是一个“公平的”赌博。

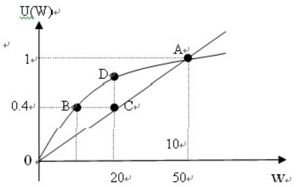


图 2.2 “公平的”赌博

从效用函数图形可以推导出彩券预期值 EV 与预期效用 EU 的关系，由上图所示，

U(50)=A，U(0)=0，EV=0.4×50+0.6×0=20；

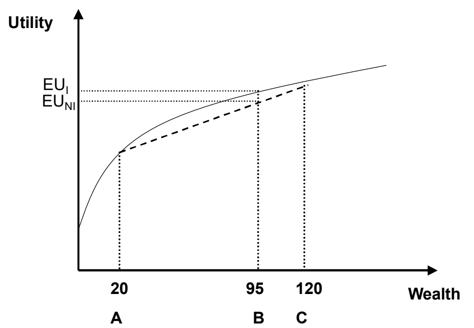
EU=0.4×U(50)+0.6×U(0)=C。

即在效用函数中由彩券的 EV 值与$\overline{A0}$之交点即为彩券获得的 EU 值。可以看出，确定性所得（$20）之效用（点 D）大于公平彩券之 EU（点 C），即该消费者不会购买此彩券。

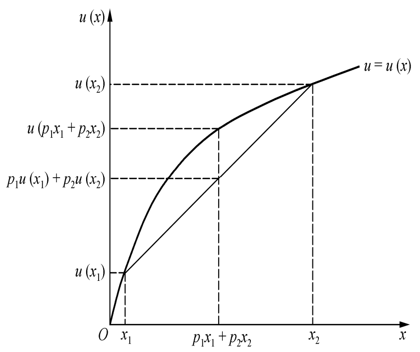
6

但是，这个人可能会对保险感兴趣，即使他面对的是一个“不公平的 ”赌博。为了解释这一点，我们假设他拥有的资产价值为 x，该资产有 $1-p$ 的概率会丢失。也就是说，这个人拥有的场景为：拥有 x 的概率为 p，拥有 0 的概率为 $1-p$。如果他能对其面对的损失风险投保，支付的公平保费为 $(1-p)x$，他将可以把其原来拥有的场景替换为这样的一个场景：以概率 1 拥有 $x-(1-p)x=px$。从凹函数的定义，我们可以立即得知，这样一个退化的场景要优于原来有风险的场景。

7



8



9

General statements:

- 1. An individual who has a concave utility curve would not rationally gamble at fair odds (the entry price for the gamble is equal to the expected payoff).
- 2. The odds would have to be loaded in the individual's favor in order to induce him or her to gamble.

10

- An insurance policy has the opposite risk effect to a gamble.
- A gamble involves the sacrifice of certain wealth in order to acquire the possibility of an increase in wealth.
- An insurance policy involves the sacrifice of certain wealth in order to avoid the possibility of a loss of wealth.

11

现在假设一个人的偏好可以用一个凸的效用函数来表示，或函数的形状如图 2.3 所示：

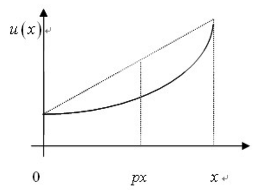
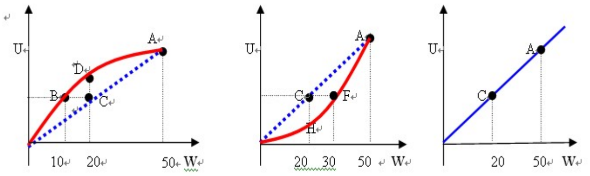


图 2.3 凸函数

这样的一个函数，使得 $u(px) < (1-p)u(0) + pu(x)$，人们将愿意赌博，即使赌博的条款不是那么公平。这时，如果一个人拥有的现金为 px，即他的效用为 $u(px)$，他将愿意用拥有的现金作赌注，来换取以概率 p 得到 x、以概率 $1-p$ 失去所有现金的机会。

12

- 一个人的效用函数为凹函数，这样的人通常被称为风险规避者（**risk aversion**）。他不会参与公平的赌博，只有当赌博的条件对他进行足够的倾斜，才有可能诱使他参与赌博。他会对保险感兴趣，作为降低其原有场景风险的一种手段。
- 一个人的效用函数为凸函数，这样的人通常被称为风险爱好者（**risk lover**）或爱好赌博者（**gambler**）。这样的一个人将接受公平的赌博，甚至愿意倾其所有参与赌博。
- 一个人的效用函数为线性函数，这样的人通常被称为风险中立者（**risk neutral**）。他仅考虑场景的预期值，而不考虑场景的“风险”，对风险持无所谓的态度。



（风险规避者）　（风险爱好者）　（风险中立者）

图 2.4 人们对待风险的态度

效用函数特性 V.S.风险态度：

风险规避者：U（20）＞EU ； U′＞0 ， U" ＜0

风险爱好者：U（20）＜EU ； U′＞0 ， U" ＞0

风险中立者：U（20）＝EU ； U′＞0 ， U" ＝0

The insurance and gambling paradox

- 1. Gamblers act on subjective rather than objective probabilities.
- 2. The attraction of gambling is not confined to the money outcomes.
- 3. Individuals do not respond mathematically to the odds, but instead focus their attention on particular outcomes that exert an undue influence on their decision.
- 4. The utility function may not be uniformly concave.

但是，有迹象表明，人们的偏好关系只能用某一区间的凸函数和其他区间的凹函数来表示，这一观点最早由 Friedman 和 Savage 提出。我们假设决策人的效用函数在真实的财富 w_3 附近有一个折点（inflection point）。这个假设意味着，对现状的改善会带来非常高的效用，但与此同时达不到现状又会带来非常高的效用损失。

不过，我们也没有必要为了解释 Friedman 和 Savage 假设而改变我们的模型，我们的模型不是针对 Friedman 和 Savage 假设中较为复杂的人群，为了对他们进行解释，我们需要设计较为复杂的模型。

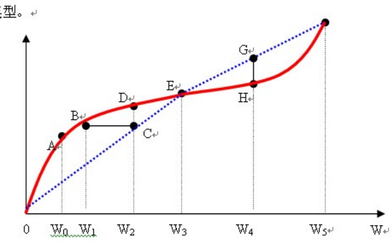


图 2. 5 Friedman 和 Savage 假设

Gambling at Unfair Odds

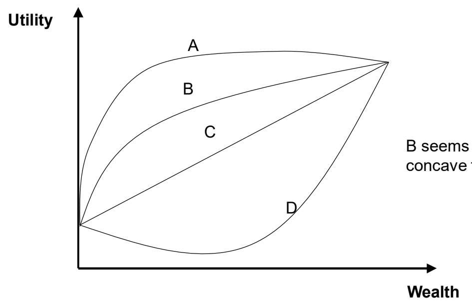
- What will induce a risk-averse person to gamble?
- (1) keep the stakes the same, but change the odds in the gambler's favor;
- (2) keep the odds, but change the stakes in the gambler's favor.

风险规避的度量

- 在人们对待风险的三种态度中，风险规避的态度最为重要。很多经济问题都要用风险规避的角度进行解释。
  - 保险
  - 普通股股东的有限责任
  - 风险共担合约
- 在这一节中，我们将详细讨论如何对风险规避进行度量，以及如何与预期效用定理一起，得到经济理论的定量结果，而不仅仅是定性结果。

19

Utility Functions and Risk Aversion



B seems to be less concave than A.

20

假设一个人拥有的财富量为随机变量w，他的目标是使得$E[U(w)]$最大。

为简单起见，我们这里的财富仅为一种商品，而不考虑许多商品加总带来的困难。

假设财富w的效用函数一阶、二阶可导。那么，我们可以得到：

- ✓ $U'(w)>0$，即财富越多，个人的效用越大，$U(w)$是w的严格增函数。
- ✓ 随着财富w的增加，$U'(w)$严格递减，即$U''(w)<0$。

第二点因为根据预期效用定理，$U(w_0)-U(w_0-h)>U(w_0+h)-U(w_0)$。

因此，风险规避与效用函数的$U''(w)$有关。效用函数的凹度或$-U''(w)$度量了风险的规避程度。

21

下面我们引入两个术语：风险溢价（Risk Premium）和概率溢价（Probability Premium），可以从中得到直观的感受。

假设有两个人 1 和 2，初始财富均为 A，面对这样的一个场景：$\begin{cases}0, p\\ A, 1-p\end{cases}$，即有 p 的概率财富变为 0，有 $1-p$ 的概率维持原有财富不变。1 和 2 的效用函数如图 2.6 所示：

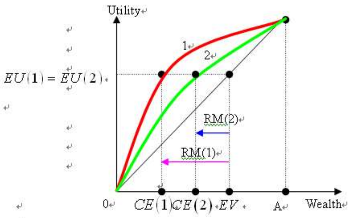


图 2.6 风险溢价和确定性等值

1 和 2 对待风险的态度均为风险规避。对 1 和 2 而言，这样一个有风险的场景给其带来的财富预期值均为 $EV = p\times 0+(1-p)\times A$，预期效用为 $EU(1)=EU(2)$。这时，1 愿意接受确定性的货币 $CE(1)$，2 愿意接受确定性的货币 $CE(2)$。即对 1 来说，其对确定性的货币 $CE(1)$ 和有风险的场景持无所谓的态度；对 2 来说，其对确定性的货币 $CE(2)$ 和有风险的场景持无所谓的态度。其他条件相同，确定性货币 $CE(1)$ 和 $CE(2)$ 不同。1 对同一有风险的场景要求的确定性货币较少，说明其对风险规避的程度比 2 较大。我们把风险溢价 π 定义为有风险的场景财富预期值与确定性货币的差，即 $\pi = EV - CE$[7]。图中的箭头表示出了 1 和 2 的风险溢价。风险溢价越大，说明风险规避程度越大。

另外，还可以从概率溢价的角度判断风险规避程度的大小。假设一个人拥有的初始财富为 w，现在有一个赌博 $\tilde{z}$，有 p 的概率他会获得 h，有 $1-p$ 的概率他会失去 h。如果 p 足够的大，这个人将愿意进行赌博（如果 $p=1$，他一定会进行赌博）；如果 p 较小，这个人将拒绝进行赌博（如果 $p=0$，他一定不会进行赌博。如果 $p=\frac{1}{2}$ 或更小，一个风险规避的人将拒绝进行赌博）。我们把 $p(\tilde{z}=h)-p(\tilde{z}=-h)$ 定义为 $\tilde{z}$ 的概率溢价，使得决策人对保持现状和进行赌博持无所谓的态度，即 $u(w)=E\{u(w+\tilde{z})\}$。概率溢价越大，说明风险规避程度越大。

假设有两个人 1 和 2，初始财富均为 EV ，面对这样的一个场景：$\begin{cases} A-EV, p \\ -EV, 1-p \end{cases}$ ，即有 p 的概率财富变为 A ，有 $1-p$ 的概率财富变为 0 。1 和 2 的效用函数如图 2.7 所示：

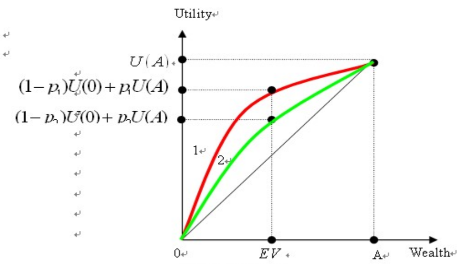


图 2.7 概率溢价

在上图中，要使得 $u(EV)=E\{u(EV+\tilde{z})\}$ ，对 1 而言，$p_1-(1-p_1)=2p_1-1>p_2-(1-p_2)=2p_2-1$ ，即 1 规避风险的程度要大于 2。

可以看出，风险的规避程度与函数的凹度有关，函数的凹度或 $-U''(w)$ 度量了风险的规避程度。这是一个很直观的结论。但是，$-U''(w)$ 有一个非常不好的特征。我们知道，效用函数是偏好关系的一种表示方式，是偏好关系而不是效用函数具有行为上的意义。而我们已经证明，Von Neumann 和 Morgenstern 的效用函数满足正仿射变换，即对效用函数进行正仿射变换不会改变效用函数对场景偏好关系的表示。

取效用函数 $U(w)$ ，并对 $U(w)$ 进行正仿射变换，得到 $\hat{U}(w)=aU(w)+b$ ，则 $-\hat{U}''(w)=-aU''(w)$ 。因此，对效用函数 $U(w)$ 进行正仿射变换，改变了 $-U''(w)$ 的数值（如果 $a>1$ 则 $-U''(w)$ 增加）。而这种变换，不应该影响到对风险规避程度的度量。因此，$-U''(w)$ 的数值本身没有意义。

我们希望寻求另外一种对风险规避程度的度量，它建立在 $-U''(w)$ 的基础之上，但又对 $-U''(w)$ 进行了修改，使得对效用函数的正仿射变换不会影响其数值。可以很容易地看出，这样的一种度量要满足以上的条件，又不能取效用函数二阶以上的值，它只能利用 $U'(w)$ 和 w 。我们可以进行更正式的推导：

考虑这样的一个决策人，他的初始财富为 w ，效用函数为 $U(w)$ ，面对风险 x 的风险溢价为 π 。根据风险溢价的定义，他将对风险 x 和获得确定性货币 $E(x)-\pi$ 持无所谓的态度。因此，我们有 $U(w+E(x)-\pi)=E\{U(w+x)\}$ 。

我们只考虑 $E\{U(w+x)\}$ 存在且有限的情形，则 π 存在，且是一个由上式确定的一个唯一的值。假设 x 为一个简单的随机变量（random variable, r.v.），其 $E(x)=0$ ，$\sigma^2(x)$ 很小。

现在，$U(w-\pi)=E\{U(w+x)\}$，对等式两边分别进行 Taylor 展开[8]，得到：

$$U(w-\pi)=U(w)-\pi U'(w)+h.o.t,$$

$$E\{U(w+x)\}=E\left\{U(w)+xU'(w)+\frac{x^2}{2!}U''(w)+h.o.t\right\}=U(w)+\frac{\sigma_x^2}{2!}U''(w)+h.o.t,$$

由于 $E(x)=0$，$E(x^2)=E[(x-0)^2]=\sigma_x^2$，忽略所有的高阶项，得到：

$$U(w)-\pi U'(w)\approx U(w)+\frac{\sigma_x^2}{2!}U''(w)$$

$$\pi\approx-\frac{\sigma_x^2}{2!}\frac{U''(w)}{U'(w)}=\frac{\sigma_x^2}{2}R_A$$

$$\pi=\frac{\sigma_x^2}{2}R_A$$

我们把 $R_A=-U''(w)/U'(w)$ 定义为绝对风险规避系数（coefficient of absolute risk aversion, CARA）。注意，风险溢价 π 取决于场景的特征 σ_x^2 以及个人的效用特征 R_A。

28

现在让我们再来看一下效用函数 $U(w)$ 的正仿射变换是否改变对风险规避的度量：

$$\hat{U}(w)=aU(w)+b,$$

$$R_A=-\frac{\hat{U}''(w)}{\hat{U}'(w)}=-\frac{aU''(w)}{aU'(w)}=-\frac{U''(w)}{U'(w)}。$$

当一个人对待风险的态度为风险规避时，R_A 为正（这时，$U''(w)<0$，$U'(w)>0$）。注意，R_A 是一个局部的度量，且为绝对值（LOCAL AND ABSOLUTE）。当我们沿着效用函数移动的时候，函数的斜率会发生变化，所以 R_A 仅在函数的既定一点上才有意义。

R_A 作为风险规避的局部度量，最早由 Kenneth Arrow（1971）和 John Pratt（1964）提出。对我们常常使用的线性效用函数和指数效用函数，R_A 取常数值。因此，这样的一个系数捕捉到了预期效用函数的重要特征：从线性效用函数和指数效用函数得到的风险偏好并不会受到个人财富量变化的影响。

29

除了 R_A 之外，还有另外一个度量风险规避的系数 R_R：$R_R=-w\dfrac{U''(w)}{U'(w)}$，被称之为风险规避相对系数（Coefficient of Relative Risk Aversion, CRRA）。风险规避相对系数是一个财富边际效用的弹性系数，效用单位的变化、财富单位的变化都不会影响其数值。我们在后面会看到，在不同的场合下两个度量风险规避的系数都有用，但相比之下，R_R 比 R_A 更有用。

在经济上，R_A 和 R_R 都有很简单的行为解释。假设一个人拥有的初始财富为 w，现在有一个赌博，有 p 的概率他会获得 h，有 $1-p$ 的概率他会失去 h。如果 p 足够的大，这个人将愿意进行赌博；如果 p 较小，这个人将拒绝进行赌博。另外，一个人接受或拒绝进行一个既定赌博的意愿一般还取决于他目前的财富 w。在既定的 h 和 w 条件下，根据连续性，总存在一个概率 $p(w,h)$ 使得一个人对接受还是拒绝该赌博持无所谓的态度。

在所能赢的钱 h 较小的情况下，R_A 直接度量了一个人对赢钱概率较大的赌博的坚持程度。如果我们把上面分析中所能赢的钱不用绝对的货币量 h，而用财富 w 的一个比例来衡量，R_A 要用 R_R 来代替。

30

一般情况下，两个风险规避系数 R_A 和 R_R 都是财富 w 的函数。在特殊情况下可以均为常数。其中，R_A 度量了在当前财富下愿意以绝对货币参与赌博的程度，R_R 则度量了在当前财富下愿意以比例财富参与赌博的程度。当财富发生变化时，系数的变化对不确定情形下经济行为的预测具有格外重要的意义。我们考虑两种假设：

Decreasing Absolute Risk Aversion（DARA），R_A 为财富 w 的减函数，即 $R_A' < 0$，它等价于 $U'''(w)U'(w) > U''^2(w)$。如果随着财富的增加，绝对风险规避系数增加，那么当一个人变富时，他将减少所持有的风险资产的数量。这与我们的日常观察不符。

Increasing Relative Risk Aversion（IRRA），R_R 为财富 w 的增函数。这种假设不能很容易地找到直观上的证据，它所要表达的是，如果个人拥有的财富和赌额按照相同的比例增加，个人参与赌博的意愿（用参与赌博要求的赢钱概率来度量）降低。这一假设一方面可以通过其与一般理论模型的一致性，另一方面可以通过其对现实中经济行为的成功解释来加以证实。从理论上来说，相对风险规避系数随着财富的变化而变化与效用函数的有界性密切相关。从数学上可以证明，财富量趋于无穷时效用有界，R_R 不可能趋于一个低于 1 的极限值；同时，财富量趋于 0 时效用有界，R_R 不可能趋于一个大于 1 的极限值。因此，一般而言，R_R 值在 1 的附近徘徊，财富较低时低一点，财富较高时高一点。

可以得到两个基本的结论：

- 一般可假设 R_R 为财富的增函数，尽管理论上并不排除 R_R 会出现一些波动；
- 若出于简化的考虑，需要假设 R_R 为一常数，那么合适的数值为 1。

一些有用的效用函数

Quadratic二次型效用函数

$U=a+bW+cW^2$，其中$b>0$，

风险规避的条件要求$c<0$，另外我们可以计算出：

$$R_A=-\frac{2c}{b+2cw}=\frac{1}{-\frac{b}{2c}-W}=\frac{1}{n-W}，$$

其中$n=-\frac{b}{2c}>0$，U在$W=n$时达到最大值。我们只对低于n的W值感兴趣。对大于n的W值，财富的边际效用为负。对大于0，低于n的W值，R_A递增，在$W=n$时为无穷大，即$\frac{dR_A}{dW}=\frac{d(n-W)^{-1}}{dW}=\frac{1}{(n-W)^2}$，绝对风险规避系数递增。

$W=n$时效用最大，任何赌博，不管赢钱的概率如何，都会导致效用的损失。当W接近n时，人们参与固定金额赌博的意愿降低，这一结论显示出了二次型效用函数的不合理性。

34

Exponential指数型效用函数

$U=ae^W$

有$U'=ae^W$，$U''=ae^W$，

则$R_A=-\frac{U''}{U'}=-\frac{ae^W}{ae^W}=-1$，

即绝对风险规避系数为常数。

另外有$U=e^{f(W)}$，$R_A=-\frac{f''(W)e^{f(W)}}{f'(W)e^{f(W)}}=-\frac{f''(W)}{f'(W)}$，

如果 $f(W)=a+bW+cW^2$，则其R_A与二次型效用函数相同。

35

Power幂效用函数

$U=W^a$，其中$0<a<1$，

$$R_A=-\frac{a(a-1)W^{a-2}}{aW^{a-1}}=-\frac{a-1}{W}，$$

因为$a<1$，$\frac{dR_A}{dW}<0$，绝对风险规避系数递减。

另外，$R_R=-W\frac{a(a-1)W^{a-2}}{aW^{a-1}}=-\frac{a(a-1)}{a}=-(a-1)$，相对风险规避系数为常数。

36

Hyperbolic risk aversion (HARA)效用函数

$$U(W)=\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{aW}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma},b>0,$$

$$U'(W)=(1-\gamma)\left(\frac{aW}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma-1}\frac{a}{1-\gamma}=a\left(\frac{aW}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma-1},$$

$$U''(W)=a(\gamma-1)\left(\frac{aW}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma-2}\frac{a}{1-\gamma}=-a^{2}\left(\frac{aW}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma-2},$$

定义风险容忍系数（risk tolerance）为风险规避系数的倒数，则

$T(W)=\frac{1}{R_A}=\frac{W}{1-\gamma}+\frac{b}{a}$，其与财富呈线性关系。

如果 $\gamma=1$，则风险态度为风险中性；

如果 $\gamma>2$，则为 Quadratic 二次型效用函数；

如果 $b=0$， $\gamma<1$，则为 Isolastic 或 Power 幂效用函数；

如果 $b=\gamma=0$，则为 Logarithmic 对数效用函数。

37