《微积分 T(3)》第一次作业

1. 设 f 是周期为 2π 的可积函数.

   (1) 证明: f 的 Fourier 级数可以写成

   $$f(x) \sim \widehat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}(\widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n))\cos nx + i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n))\sin nx.$$

   (2) 证明: 如果 f 是偶函数, 则有 $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$, 且 f 的 Fourier 级数是余弦级数.

   (3) 证明: 如果 f 是级函数, 则有 $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$, 且 f 的 Fourier 级数是正弦级数.

   (4) 证明: 如果对任何 x 都有 $f(x+\pi) = f(x)$, 则对任何奇数 n 有 $\widehat{f}(n) = 0$.

   (5) 证明: 若 f 是实值函数, 则对任何 n 都有 $\overline{\widehat{f}(n)} = \widehat{f}(-n)$.

2. 设 f 是周期为 2π 的 C^2 光滑函数 (即 f 有连续的二阶导函数). 通过两次分部积分证明: 存在常数 C, 使得对任何非零整数 n 都有

   $$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^2}.$$

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 且在 $[0,\pi]$ 上有 $f(x) = x(\pi - x)$. 求 f 的 Fourier 级数.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 $f(x) = |x|$, 求 f 的 Fourier 级数, 要求用正弦与余弦级数表示.

5. 设 f 是周期为 2π 的连续函数, 其 Fourier 系数为 $\widehat{f}(n)$. 已知级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|$ 收敛.

   (1) 证明: 利用 Weierstrass 强级数判别法证明: f 的 Fourier 级数

   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛.(记此函数级数的和函数为 $g(x)$)

(2) 求 g 的各个 Fourier 系数.

(3) 利用参考书 Fourier analysis: an introduction(by E.Stein and R. Shakarchi) 上定理 2.1 的结论证明: 函数 g 与 f 相等. (此即该书上推论 2.3)

(4) 利用 (3) 的结论, 与讲义上 $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ 的 Fourier 级数的计算结果, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$