第3讲
命题逻辑的推理形式
谓词逻辑的基本概念

计算机系　黄民烈

Tel: 18901155050

Office: FIT 4-504

http://coai.cs.tsinghua.edu.cn/hml/

aihuang@tsinghua.edu.cn

提纲

- 命题逻辑的等值演算
- 命题逻辑的推理演算
- 命题逻辑的自动归结
- 谓词逻辑的基本概念

2.7 推理形式

- 将以自然语句描述的推理关系引入符号，抽象化并以条件式的形式表示出来便得到推理形式，推理形式由前提和结论部分组成。

前提真，结论必真的推理形式为正确的推理形式。

2.7.1 重言蕴含

- 给定两个公式 A, B，如果当A取值为真时，B 就必取值为真，便称 A重言（永真）蕴涵B。或称B 是A的逻辑推论。

用符号 A⇒B 表示

2.7.1 重言蕴含

- A⇒B

  需注意：**重言蕴含⇒** 与 **普通蕴含→** 的区别

- 注意：“⇒”不是逻辑联接词

  A⇒B当然也不同于A→B

2.7.2 重言蕴含举例

例1. 如果今天是周一，那么我来上课。

今天是周一，所以我来上课。

- 设 P：今天是周一, Q：今天我来上课

$$(P \to Q) \wedge P \Rightarrow Q$$

前提真,结论也为真,是正确的推理。

2.7.2 重言蕴含举例

例2. 如果今天是周一，那么我来上课。

今天不是周一，所以我不上课。

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg P \Rightarrow \neg Q$

常见的逻辑错误!

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

前提真，结论假！

不是正确的推理！

生活中常见的强盗逻辑

- 小孩子一般都喜欢看动漫 -→ 因为我不是小孩了，所以不能喜欢动漫
- 帅的男孩子一般都有很多女孩喜欢→因为我不帅，所以我不应该有女孩喜欢我
- 漂亮的小姐姐都有男朋友→因为我不漂亮，所以我不该有男朋友

2.7.3 重言蕴含的几个结果

(1) 如果$A \Rightarrow B$成立，若A为重言式，则B 也是重言式。

(2) 若 $A \Rightarrow B$且 $B \Rightarrow A$同时成立，必有$A=B$。反之亦然。

(3) 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$同时成立，则有$A \Rightarrow C$。

(4) 若 $A \Rightarrow B$且 $A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$。

(5) 若$A \Rightarrow C$且$B \Rightarrow C$同时成立，则$A \vee B \Rightarrow C$。

2.7.3 重言蕴含的充要条件

- 定理2.8.1

  $A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是

  $A \rightarrow B$为重言式

- 定理2.8.2

  $A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是

  $A \wedge \neg B$为矛盾式。

2.8 基本的推理公式

- 简单证明定理2.8.2:

由定理2.8.1和命题公式等值式

$A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg (A \wedge \neg B)$，因此，

"$A \rightarrow B$是重言式"即等价于"$A \wedge \neg B$是矛盾式"

** 注意：$A \Rightarrow B$ 中 A自身不能必假!

若A永假，则$A \rightarrow B$ 肯定永真，虽然$A \Rightarrow B$ 也成立,

但已失去意义！

2.8 基本的推理公式

- 证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:
  1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
  2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
  3. 真值表法
  4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
  5. 解释法
  6. ………

2.8 基本的推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$	但 $P \vee Q \not\Rightarrow P$
2. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$	1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$
3. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$	1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$
4. $P \Rightarrow P \vee Q$	
5. $\neg P \Rightarrow P \to Q$	2式的逆否，4式的推论。
6. $Q \Rightarrow P \to Q$	3式的逆否，4式的推论。
7. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	非P，而PVQ又成立，只有Q成立
8. $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$	假言推理，分离规则，7式的变形
9. $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$	7式的变形

2.8 基本的推理公式

10. $(P\to Q)\wedge(Q\to R) \Rightarrow P\to R$ *三段论
11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式
12. $(P\to R)\wedge(Q\to R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 8式的推论
13. $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 8式的推论
14. $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$ 9式的推论
15. $(Q\to R) \Rightarrow ((P\vee Q)\to(P\vee R))$ P=F时左=右，P=T时右=T
16. $(Q\to R) \Rightarrow ((P\to Q)\to(P\to R))$ P=T时左=右，P=F时右=T

第二章 第9、10节

- 介绍基本的推理规则，给出推理演算的过程和方法，该部分内容是谓词逻辑推理演算的基础；

- 介绍用归结推理规则进行归结证明的过程与方法。

2.9 推理演算

- 出发点

　　欲直观看出由前提A到结论B的推演过程，且便于在谓词逻辑中使用。

- 方法

（1）引入几条推理规则

（2）利用基本推理公式

从前提A_1，A_2，…，A_n 出发，配合使用推理规则和基本推理公式，逐步推演出结论B。

2.9 推理演算

- 主要的推理规则

（1） 前提引入规则：推理过程中可随时引入前提

（2） 结论引入规则：中间结论可作为后续推理的前提

（3） 代入规则：仅限于重言式中的命题变项

（4） 置换规则：利用等值公式对部分公式进行置换

（5） 分离规则：由A及A→B成立，可将B分离出来

（6） 条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$等价

2.9 推理演算

例1： 证明$P\rightarrow R$是$P\rightarrow Q$，$Q\rightarrow R$的逻辑推论。

证明：

（1）	$P\rightarrow Q$	前提引入
（2）	P	附加前提引入（条件证明规则）
（3）	Q	（1）（2）分离
（4）	$Q\rightarrow R$	前提引入
（5）	R	（3）（4）分离

注：此题可直接使用推理公式10（三段论），以简化证明步骤。

2.9 推理演算

P34 例3：证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R$

证明：	(1) $P \vee Q$	前提引入
	(2) $\neg P \to Q$	(1)置换
	(3) $Q \to S$	前提引入
	(4) $\neg P \to S$	(2) (3) 三段论
	(5) $\neg S \to P$	(4)置换
	(6) $P \to R$	前提引入
	(7) $\neg S \to R$	(5) (6) 三段论
	(8) $S \vee R$	(7)置换

由该例可见，将 $P \vee Q$ 置换成 $\neg P \to Q$ 更便于推理

2.9 推理演算举例

教材 P54　例5：证明

$$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R \Rightarrow (P\leftrightarrow Q)$$

教材中的证明用了15个步骤，这里用一种简洁方法。

2.9 推理演算举例

证：$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R \Rightarrow (P\leftrightarrow Q)$

(1)	$(Q\rightarrow P)\vee\neg R$	前提引入
(2)	$R\rightarrow(Q\rightarrow P)$	(1) 置换
(3)	R	前提引入
(4)	$Q\rightarrow P$	(2) (3) 分离
(5)	$\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow \neg(R\vee S)$	前提引入
(6)	$(R\vee S)\rightarrow(P\rightarrow Q)$	(5) 逆否置换
(7)	$R\vee S$	(3) + 基本公式4
(8)	$P\rightarrow Q$	(6) (7) 分离
(9)	$P \leftrightarrow Q$	(4) (8)

2.10 归结法(Resolution)

- 出发点

  基于推理规则的方法，规则与公式较多，技巧较高。能否仅建立一条推理规则，便于机器证明与程序实现。

- 理论依据

  定理 2.8.2

  A⇒B 成立当且仅当A∧¬B 是矛盾式。

2.10 归结法(Resolution)

归结法步骤

1. 从$A\wedge\neg B$ 出发（欲证$A\Rightarrow B$，等价于证$A\wedge\neg B$ 是矛盾式）
2. 建立子句集S，将$A\wedge\neg B$ 化成合取范式：

   $$C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n$$

   其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

   $$S=\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$$

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。
4. 直至归结出矛盾式（ □ ）。

2.10 归结法(Resolution)

- 归结推理规则

设　子句1　$C_1 = L \vee C_1'$

　　子句2　$C_2 = \neg L \vee C_2'$

（其中L和¬L为互补对）

新子句　$R(C_1,C_2) = C_1' \vee C_2'$

证明　$C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R(C_1,C_2)$

2.10 归结法(Resolution)

- 归结推理规则（续）

证明： $C_1 \wedge C_2 \rightarrow C_1' \vee C_2'$为永真式

设在任一解释下，C_1和C_2均为真

若$L = T$，则$\neg L = F$，

从而必有$C_2' = T$（$\because C_2$为真）

若$L = F$，则$\neg L = T$，

从而必有$C_1' = T$（$\because C_1$为真）

综合上述均有$C_1' \vee C_2'$为真

$\therefore\ C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R(C_1, C_2)$

2.10 归结法证明举例

例1： 证明 $(P \to Q) \wedge P \Rightarrow Q$

证明：1. 先将$(P \to Q) \wedge P \wedge \neg Q$ 化成合取范式

$$(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$$

2. 建立子句集

$$S = \{\neg P \vee Q, P, \neg Q\}$$

2.10 归结法证明举例

归结过程:

(1) $\neg P \vee Q$

(2) P

(3) $\neg Q$

(4) Q　　　　(1) (2)归结

(5) $\square$　　　　(3) (4)归结

归结出空子句□(矛盾式) 证明结束。

2.10 归结法证明举例

例2：用归结法证明 $((P\to Q)\wedge(Q\to R))$

$$\Rightarrow (P\to R)$$

证明：

先将 $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\wedge\neg(P\to R)$ 化成合取范式

$$(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge P\wedge\neg R$$

建立子句集

$$S=\{\neg P\vee Q, \neg Q\vee R, P, \neg R\}$$

2.10 归结法证明举例

归结过程:

(1) $\neg P \vee Q$

(2) $\neg Q \vee R$

(3) P

(4) $\neg R$

(5) $\neg P \vee R$　　(1) (2)归结

(6) R　　(3) (5)归结

(7) □　　(4) (6)归结

归结出空子句□(矛盾式)　证明结束。

2.10 归结法证明举例

例3：构造下面推理的证明：

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。

或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。

A队没有成为联赛的第一名。小张守第一垒。

因此，小李没向B队投球。

2.10 归结法证明举例

解：先将简单命题符号化。

P：小张守第一垒；

Q：小李向B队投球；

R：A队取胜；

S：A队成为联赛第一名。

前提：$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S$，$P$

结论：$\neg Q$

2.10 归结法证明举例

需证 $(P \wedge Q) \rightarrow R \wedge (\neg R \vee S) \wedge \neg S \wedge P \Rightarrow \neg Q$

先将 $(P \wedge Q) \rightarrow R \wedge (\neg R \vee S) \wedge \neg S \wedge P \wedge Q$化成合取范式

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee S) \wedge \neg S \wedge P \wedge Q$$

建立子句集

$$S = \{\neg P \vee \neg Q \vee R,\ \neg R \vee S,\ \neg S,\ P, Q\}$$

2.10 归结法证明举例

证明：

(1) $\neg P \vee \neg Q \vee R$	
(2) $\neg R \vee S$	
(3) $\neg S$	
(4) P	
(5) Q	
(6) $\neg R$	(2) (3)归结
(7) $\neg P \vee \neg Q$	(1) (6)归结
(8) $\neg Q$	(4) (7)归结
(9) $\square$	(5) (8)归结

第二章作业题

- 七：3，5，7，10，13，15
- 八：2，3，6
- 十一
- 十二：2，3

教学要求

- 掌握和理解命题公式等值的概念，掌握命题公式等值的判别方法；
- 熟悉基本的等值公式，能在理解的基础上熟记并能在等值演算中灵活使用；
- 理解命题公式与真值表的关系，能够由给定的真值表写出相应的命题公式；

教学要求

- 了解联结词完备集的概念，掌握判别联结词完备集的方法；
- 理解范式的概念和范式定理，能够将命题公式熟练地化成相应的主析取范式和主合取范式；
- 理解推理形式的基本结构，掌握重言蕴涵的概念和主要结果；

教学要求

- 熟悉基本的推理公式，掌握推理公式的不同证明方法；
- 理解基本的推理规则，掌握使用推理规则进行推理演算的方法；
- 理解归结推理规则，掌握用归结推理法证明的方法。

第四章 谓词逻辑的基本概念

- 4.1 谓词和个体词
- 4.2 函数和量词
- 4.3 合式公式
- 4.4 自然语句的形式化
- 4.5 有限域下公式的表示法
- 4.6 公式的普遍有效性和判定问题

谓词逻辑与命题逻辑

- 谓词逻辑是命题逻辑的推广(**Generalization**)
- 命题逻辑是谓词逻辑的特殊情形(**Specification**)

命题逻辑的局限性 &
谓词逻辑引入的必要性

P：张三是学生

Q：李四是学生

P，Q两个独立的命题，未能反映或突出二者的共性与特点。因此，有必要深入研究它们的形式结构和逻辑关系。

命题逻辑的局限性 &
谓词逻辑引入的必要性

P：凡有理数都是实数
Q：⅜是有理数

R：⅜是实数

命题逻辑：仅能形式化为（P∧Q）→R

问题：对于任意的P、Q、R来说，这个推理形式不是重言式。

即，在命题逻辑中无法对上述描述给出完整准确的形式化。

命题逻辑的局限性 &
谓词逻辑引入的必要性

- 谓词逻辑：**区分主语、谓语，引入变元，**
  引入谓词，量词
- 谓词逻辑 可理解为
  命题逻辑 + **{变元，谓词，量词，函数}**
- 这里讨论的是一阶谓词逻辑，或称狭谓词逻辑。

4.1 谓词和个体词

◉ 个体词（主词）

◆个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体。

◆在一个命题中，个体词通常是表示思维对象的词，又称作主词。

- ⅜是有理数
- 张三是学生

4.1.2 个体常项与个体变项

- 将表示具体或特定客体的个体词称作**个体常项**，用小写字母***a*, *b*, *c*,…**表示；
- 而将表示抽象或泛指的个体词称作**个体变项**，用小写字母***x*, *y*, *z*, …**表示。
- 并称个体变项的取值范围为**个体域或论域**，以***D***表示。
- 约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为**总论域**。

4.1 谓词和个体词

◉ 谓词(Predicate)

◆谓词是用来刻画个体词的性质或多个个体词间关系的词。

$P(x),\ Q(x,y)$

◆谓词又可看作是由给定的个体域到集合$\{T, F\}$上的一个映射。

- **P(x)：x是有理数**
- **Q(x,y)：x和y是好朋友**

4.1 谓词和个体词

谓词常项与谓词变项

- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项；
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母$P, Q, R, \ldots$表示，可根据上下文区分。

4.1 谓词和个体词

◉ 一元与多元谓词

◆在一个命题中，如果个体词只有一个，这时表示该个体词性质或属性的词便是一元谓词，以 $P(x)$, $Q(x)$, …表示。

◆如果一个命题中的个体词多于一个，则表示这几个个体词间关系的词便是多元谓词，以$P(x, y)$, $Q(x, y, z)$, …等表示。

- **P(x): x是有理数**
- **Q(x,y)：x和y是好朋友**
- **Q(x,y,z)：x, y, z在一个球队中**

4. 1 谓词和个体词

- 一般地，用P(a)表示个体常项a具有性质P，用P(x)表示个体变项x具有性质P。
- 用P(a, b)表示个体常项a,b具有关系P，用P(x, y)表示个体变项x, y具有关系P。
- 更一般地，用$P(x_1, x_2, ..., x_n)$表示含n(n≥1)个命题变项$x_1, x_2, ..., x_n$的n元谓词。

4.1 谓词和个体词

谓词逻辑与命题逻辑

- 有时将不带个体变项的谓词称作零元谓词。当此时的零元谓词又为谓词常项时，零元谓词即化为命题。
- 因此，命题逻辑中的命题均可以表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。

4.1 函数和量词

谓词逻辑中的函数

- 在谓词逻辑中可引入函数，它是某一个体域（不必是实数）到另一个体域的映射。

- 谓词逻辑中的函数一般不单独使用，而是嵌入在谓词中。约定函数符号用小写字母表示。

函数举例

- 函数 father(x)表x的父亲，若P(x)表x是教师
- 则P(father(x))就表示x的父亲是教师。
- 当x的取值确定后，P(father (x))的值或为真或为假。
- “<u>张三的父亲和母亲是夫妻</u>”可描述成

MARRIED(father (张三), mother(张三))

其中谓词*MARRIED*(x, y)表示x和y是夫妻，而father(x)、mother(x)是函数。

量词(Quantifier)

- 表示个体常项或变项之间数量关系的词称为量词。
- 也可将量词看作是对个体词所加的限制或约束的词。
- 一般将量词分为全称量词和存在量词两种。

4.2.3 全称量词

- 日常生活和数学中常用的**"所有的"**，**"一切的"**，**"任意的"**，**"每一个"**，**"凡"**等词可统称为全称量词；
- 将它们符号化为"∀"（any），并用$(\forall x)$, $(\forall y)$等表示个体域中所有的个体。
- 用$(\forall x)P(x)$, $(\forall y)Q(y)$ 等分别表示个体域中所有个体都有性质P和性质Q。

全称量词的定义

- 命题$(\forall x)P(x)$当且仅当对论域中的所有x， $P(x)$均为真时方为真。
- 而$(\forall x)P(x) = F$成立，当且仅当至少存在一个$x_0 \in D$，使$P(x_0) = F$。

4.2.4 存在量词

- 日常生活和数学中常用的“**存在一个**”，“**有一个**”，“**有些**”，“**有的**”等词可统称为存在量词，将它们符号化为“∃”（exist）；
- 用(∃x),(∃y)等表示个体域中有的个体；
- 用(∃x)P(x),(∃y)Q(y)等分别表示在个体域中存在个体具有性质P，存在个体具有性质Q。

4.2.4 约束变元与自由变元

- 量词所约束的范围称为量词的辖域
- 在公式$(\forall x)A$和$(\exists x)A$中，A为相应量词的辖域
- 在$(\forall x)$和$(\exists x)$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现
- 所有约束出现的变元称为约束变元
- A中不是约束出现的其它变元均称为自由变元

4.3 合式公式

一阶谓词逻辑

- 在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项，也不讨论谓词的谓词
- 在这样的限定范围内的谓词逻辑称为一阶谓词逻辑。一阶谓词逻辑是相对于高阶谓词逻辑而言的
- **n阶逻辑与n元谓词的差别？**

4.3.2 一阶谓词逻辑的符号集

- 个体常项：a, b, c, …（小写字母）
- 个体变项：x, y, z, … （小写字母）
- 命题变项： p, q, r, … （小写字母）
- 谓词符号：P, Q, R, … （大写字母）
- 函数符号： f, g, h, … （小写字母）
- 联结词符号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 量词符号：$\forall, \exists$
- 括号与逗号： （ ） ， ,

4.3.3 合式公式定义

1. 命题常项、命题变项、和原子谓词公式（不含联结词的谓词公式）是合式公式。
2. 若A是合式公式，则(¬A)也是合式公式。
3. 若A,B是合式公式，则(A∧B), (A∨B), (A→B),(A↔B)也是合式公式（若A、B中出现同一个变元，则须同为约束出现或同为自由出现）。
4. 若A是合式公式，则(∀x)A, (∃x)A也是合式公式（A中若出现x，则必须为自由变元）。
5. 只有**有限次**地应用(1)-(4)构成的符号串才是合式公式。谓词逻辑中的合式公式也称为谓词公式，简称公式。

哪些是合法公式(互动)

- $(\forall x)(P(x) \to q)$
- $(\exists x)\ Q(x) \wedge (\exists x)\ P(x)$
- $(\exists x)\ Q(x) \wedge P(x)$
- $(\exists x)\ (\forall x)\ A(x,y)$
- $(\forall x)\ P(y)$
- $(\exists\ x)(P(x) \to (\forall y)\ A(x,y))$

4.4 自然语句的形式化

- 利用计算机进行推理的基础工作。
- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定。
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

- **“对任一x而言，如果x是有理数，那么x是实数。”**

设P(x)：x是有理数，Q(x)：x是实数，

这句话的形式描述应为

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

- 需注意这句话不能形式化为

$$(\forall x)(P(x) \land Q(x))$$

上式的意思是说，对所有的x，x是有理数而且又是实数

- “所有的…都是…”，这类语句的形式描述只能使用“→”而不能使用“∧”。

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

- 所有的有理数都是实数，这句话按人们通常的认识肯定是成立的，取值为真，且其真值与论域是无关的。设论域

  D = { 1/2, π, 张三，桌子 }

  含有有理数也含有非有理数。使用

  $$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

  来描述这句话是对的。

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

对所有的$x \in D$，都有$P(x) \to Q(x) = T$， 从而$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) = T$。

如果D中只含有理数或不含任一有理数,

仍有$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) = T$。

从而使用“$\to$”来描述“所有…都是…”符合人们的常规理解。

4.4.2 “有的实数是有理数”的形式化

- 存在一事物它是实数，而且是有理数。
  即有一个(些)x，x是实数并且是有理数

- 以P(x)表x是有理数，Q(x)表示x是实数
  这句话的形式描述应为
  $$(\exists x)(Q(x)\land P(x))$$

- **需注意的是不能使用**
  $$\boldsymbol{(\exists x)(Q(x)\rightarrow P(x))}$$

4.4.3 “没有无理数是有理数”的形式化

- 这句话有否定词，意思是对任一x而言，如果x是无理数，那么x不是有理数。

- 设A(x)：x是无理数，B(x)：x是有理数，这句话的形式描述为

$$\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

其它逻辑上等价的描述包括

$(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$ （自然语句？）

$(\forall x)(B(x) \rightarrow \neg A(x))$ （自然语句？）

4.4.5 自然数集的形式描述

- 论域是自然数集，将下列语句形式化：
  1. 对每个数，有且仅有一个相继后元。
  2. 没有这样的数，0是其相继后元。
  3. 对除0外的数，有且仅有一个相继前元。

* 这三句话描述了**自然数的本质属性**。

4.4.5 自然数集的形式描述

引入谓词：$E(x, y)$表示 $x = y$,

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元,

即 $f(x) = x+1$。

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，

即 $g(x) = x-1$。

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

- 语句1需注意“**唯一性**”的描述，常用的办法是如果存在两个则它们必相等。
- 即若对每个x都存在y， y是x的相继后元，而且对任一 z，如果 z 也是 x 的相继后元，那么 y, z 必相等。

于是对语句1的描述为

$$(\forall x)(\exists y)(E(y, f(x)) \land (\forall z)(E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)))$$

关于“唯一性”的一般描述

- “**唯一性**”的一般描述
  - 常用的办法是：

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

  - 一般可表述为：

$$(\exists x)(P(x)\land(\forall y)(P(y)\rightarrow E(x, y)))$$

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

- **语句 2. 没有这样的数, 0是其相继后元。**

不存在这样的x，它的相继后元等于0。可写成

$$\neg(\exists x)E(0, f(x))$$

或

$$(\forall x)\neg E(0, f(x))$$

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

- **语句3. 对除 0 而外的数, 有且仅有一个相继前元。**

需注意的是对“除 0 而外”的描述，可理解为如果 $x \neq 0$，则...的形式。

于是语句3可描述为

$$(\forall x)(\neg E(x, 0) \rightarrow (\exists y)(E(y, g(x)) \wedge (\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$$

除$\neg E(x, 0)$外，与语句1的结构完全相同

4.4.6 “至少有一偶数是素数”与“至少有一偶数并且至少有一素数”的形式化

- 需注意两者的区别

记A(x)表示x是偶数，B(x)表示x是素数

则两句话可分别形式描述为

$(\exists x)(A(x)\land B(x))$与

$(\exists x)A(x)\land(\exists x)B(x)$

这两个逻辑公式并不等值。

4.4.6 （续）

- 同样，**“一切事物它或是生物或是非生物”**

  $(\forall x)(A(x) \lor B(x))$

  与 **“或者一切事物都是生物，**

  或者一切事物都是非生物”

  $(\forall x)A(x) \lor (\forall x)B(x)$

  这两个逻辑公式也不等值

4.4.6 （续）

- **“一切素数都是奇数”**

  $$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$$

- **“若一切事物都是素数，那么一切事物都是奇数”**

  $$(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$$

  两者显然也不等值

4.4.9 “函数f(x)在[a, b]上的点x_0处连续”的形式描述

- **“函数f(x)在[a, b]上的点x_0处连续”**的形式描述

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \land (\forall x)(|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)))$$

有些语句的形式化可能有多种形式

- **“并不是所有的兔子都比乌龟跑的快。”**

  令R(x)：x是兔子，T(y)：y是乌龟，

  F(x, y)：x比y跑得快，

这句话可形式化为

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x)\land T(y) \rightarrow F(x, y))$$

也可以形式化为 $(\exists x)(\exists y)(R(x)\land T(y)\land \neg F(x, y))$

4.4 自然语句的形式化(续)

- 对谓词变元多次量化的分析
  - $(\forall x)(\forall y)P(x,y) = (\forall x)((\forall y)P(x,y))$
  - $(\forall x)(\exists y)P(x,y) = (\forall x)((\exists y)P(x,y))$
  - $(\exists x)(\forall y)P(x,y) = (\exists x)((\forall y)P(x,y))$
  - $(\exists x)(\exists y)P(x,y) = (\exists x)((\exists y)P(x,y))$

4.5 有限域下公式的表示法

- 有限域下全称量词和存在量词的表示

　将论域限定为有限集，不失一般性，用{1,2, …,k}来表示，这时全称量词和存在量词可化为如下公式：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(k)$$

- 因此可以说，全称量词是合取词的推广；

　存在量词是析取词的推广。

4.5 有限域下公式的表示法

- 在有限域下，可将$(\forall x)P(x)$化成由合取词来描述的命题公式。
- 在有限域下，可将$(\exists y)P(y)$化成由析取词来描述的命题公式。
- **但是在无限域下，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。为什么？**

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式

- $(\forall x)(\forall y)\, P(x, y)$

  $= (\forall y)\, P(1, y) \wedge (\forall y) P(2, y)$

  $= P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge P(2, 1) \wedge P(2, 2)$

- $(\exists x)(\forall y)\, P(x, y)$

  $= (\forall y) P(1, y) \vee (\forall y) P(2, y)$

  $= (P(1, 1) \wedge P(1, 2)) \vee (P(2, 1) \wedge P(2, 2))$

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式

- $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

  $= (\exists x)P(x, 1) \wedge (\exists x)P(x, 2)$

  $= (P(1, 1) \vee P(2, 1)) \wedge (P(1, 2) \vee P(2, 2))$

- $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

  $= (\exists y)P(1, y) \vee (\exists y)P(2, y)$

  $= (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \vee P(2, 1) \vee P(2, 2))$

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式

- 将$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$写成析取范式可明显看出它与 $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$ 的差别：

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$= ((\exists x)P(x, 1)) \wedge ((\exists x)P(x, 2))$

$(P(1, 1) \vee P(2, 1)) \wedge (P(1, 2) \vee P(2, 2))$ （合取范式）

$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$

$= (P(1, 1) \wedge P(1, 2)) \vee (P(2, 1) \wedge P(2, 2))$ （析取范式）

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式

- 从而有

  $(\exists x)(\forall y)\, P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\, P(x, y)$

  注：$(\forall y)(\exists x)\, P(x, y)$可以写成$(\forall y)\, P(f(y), y)$其得到的合取式少；而 $(\exists x)(\forall y)\, P(x, y)$ 可以分配出来的合取式多

- 当对有的谓词公式难于理解时，可在有限域{1, 2}上转换成命题逻辑公式做些分析，常会帮助理解。

- 举例（课本）

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

◉ 普遍有效公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

$$(\forall x)\,(P(x) \lor \neg P(x))$$

$$(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$$

$$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$$

谓词公式的解释

- 假设D={1, 2}
- 谓词公式A= $(\exists x)\ (P(x) \land Q(x))$ 有多少种可能解释?

- 假设D_1={1, 2}，D_2={a,b,c}
- 谓词公式A=$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$有多少种可能的解释（x属于$D_1$，y属于$D_2$）？

- 设谓词公式$\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \lor R(y,z))$，其中$x \in A, y \in B, z \in C$，其中A、B、C分别有2、3、4个元素，则该公式有多少种可能的解释?

谓词公式的解释与命题公式有什么不同?

- 跟公式的结构有关
- 跟个体域的元素个数有关

$$\forall x \forall y \forall z (Q(x,y) \vee R(y,z))$$

$$\forall x \forall y \forall z Q(x,y,z)$$

$$\forall x \forall y \forall z (Q(x,y,z) \vee R(y,z))$$

4.6.2 不可满足公式

◉ 不可满足公式

设A为一个谓词公式，若A**在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式**。

例

$$(\exists x)(P(x) \land \neg P(x))$$

$$(\forall x)P(x) \land (\exists y)\neg P(y)$$

4.6.3 可满足公式

- **可满足公式**

设A为一个谓词公式，若至少存在一个解释使A为真，则称A为可满足的公式。

普遍有效的公式一定是可满足的公式。

判断下面公式的普遍有效性和可满足性

- $(\exists x)\ P(x)$
- $(\forall x)\ P(x)$
- $(\forall x)\ (P(x) \lor \neg P(x))$
- $(\forall x)\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \lor P(x)))$
- $(\exists x)\ P(x) \land (\exists x)\ \neg P(x)$

普遍有效和可满足性

- $(\exists x)\ P(x) \land (\exists x) \neg P(x)$

  在D_1上不可满足，但在D_2上可满足。

- $(\forall x)\ P(x) \lor (\forall x) \neg P(x)$

  在D_1上普遍有效，但在D_2上则不一定。

D_1：是指包含一个元素的个体域，如$\{x_1\}$；

D_2：是指包含二个元素的个体域，如$\{x_1,x_2\}$；

可满足性（补充资料I）

- 在(k)个体域上可满足，但不在(k−1)个体域上可满足

$$\mathrm{k}=2: \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$$

$$\mathrm{k}=3: \exists x P(x) \wedge \exists x(\neg P(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(\neg P(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\begin{aligned} k=4: & \exists x P(x) \wedge \exists x(\neg P(x) \wedge G(x)) \wedge \\ & \exists x(\neg P(x) \wedge \neg G(x) \wedge R(x)) \wedge \\ & \exists x(\neg P(x) \wedge \neg G(x) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

- 在无穷个体域中可满足，但不在有穷个体域中可满足

$$\forall x \neg R(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z(\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \wedge (\forall x \exists y R(x,y))$$

(0, 1)可满足；(0, 1]，{1，2，3}不可满足

普遍有效性（补充资料II）

- 在k个体域上普遍有效，但不在(k+1)个体域中普遍有效

$$\mathrm{k}=1: \forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$$

$$\mathrm{k}=2: \forall x P(x) \vee \forall x(\neg P(x) \vee G(x)) \vee \forall x(\neg P(x) \vee \neg G(x))$$

$$\begin{aligned} k=3: & \forall x P(x) \vee \forall x(\neg P(x) \vee G(x)) \vee \\ & \forall x(\neg P(x) \vee \neg G(x) \vee R(x)) \vee \\ & \forall x(\neg P(x) \vee \neg G(x) \vee \neg R(x)) \end{aligned}$$

- 在有穷个体域中普遍有效但在无穷个体域中不普遍有效

$$\begin{aligned} & (\forall x\, \exists y R(x,y) \wedge \forall x\, \forall y \forall z(\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)) \\ & \rightarrow \exists x R(x,x) \end{aligned}$$

有限传递集合{<a,b>,<b,b>}，但对于R上的<关系不成立

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- 有限域上公式普遍有效性的几个结论
- **有限域上一个公式的可满足性和普遍有效性依赖于且仅依赖于个体域个体的个数。**
- 即在某个含k 个元素的个体域上普遍有效（或可满足），则在任一含k 个元素的个体域上也普遍有效（或可满足）。

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- 如果某公式在k个元素的个体域上普遍有效，则在(k-1)个元素的个体域上也普遍有效。

  大范围内普遍有效 => 小范围内也普遍有效

  有限域上普遍有效，并不保证无限域上普遍有效

- 如果某公式在k个元素的个体域上可满足，则在(k+1)个元素的个体域上也可满足。

  小范围内可满足 => 大范围内也可满足

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- **谓词逻辑的判定问题**
- 谓词逻辑的判定问题，指的是**谓词逻辑任一公式的普遍有效性的判定问题。**
- 若说谓词逻辑是可判定的，就**要求给出一个能行的方法，使得对任一谓词公式都能判定是否是普遍有效**的。

4.6.6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- **一阶谓词逻辑是不可判定的。**

对任一谓词公式而言，没有一个能行的方法判明它是否是普遍有效的。

4.6.6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- **一阶谓词逻辑的某些子类是可判定的。**

其中包括：

(1) 仅含一元谓词变项的公式是可判定的

(2) $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

和$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$型公式，若P中无量词和其它自由变项也是可判定的

(3) 个体域有穷时的谓词公式是可判定的。

4.6.6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

1936年**Turing**和**Church**分别独立地证明：

- **一阶谓词逻辑的普遍有效性是半可判定的**

如果公式本身是普遍有效(或不可满足)的，则存在有限的判定算法，否则不存在有限的判定算法。

4.6.6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- 没有一般的方法使得在有限步内判别一阶逻辑的公式是否普遍有效或不可满足。
- 如果公式本身是普遍有效（或不可满足），那么就能在有限步内完成判定。
- 对于其它类型的公式就不一定能在有限步内得出结论，判定过程有可能永不停止。

谓词逻辑的判定问题的若干定理

- **定理一** 公式在一个体域中的可满足性和普遍有效性依赖于其中个体的数目。 **(补充说明)**
- **定理二** 公式在一个体域中的可满足性和普遍有效性只依赖于个体域中个体的数目。

  (补充说明)
- **定理三** 如个体域是有穷的，则判定方法常有。

谓词逻辑的判定问题的若干定理

- **定理四**（1）如公式A为k普遍有效，则¬A为k不可满足，反之亦然。（2）如公式A普遍有效，则¬A不可满足，反之亦然。
- **定理五** 如公式A为k（k>0）可满足，则A也是k+1可满足.
- **定理六** 如公式A为k（k>1）普遍有效，则A也是k-1普遍有效.
- **定理七** 只含有一元谓词变项的公式是能行可判定的。

谓词逻辑的判定问题的若干定理

- **定理八** $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

和$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)P(x_1, x_2,\ldots, x_n)$型公式，

若P中无量词和其它自由变项也是可判定的（Skolem标准型）

- **定理九** $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)(\exists y_1)(\exists y_2)\ldots(\exists y_m)P(x_1, x_2,\ldots, x_n, y_1,\ldots y_m)$

若P中无量词和其它自由变项也是可判定的（Skolem标准型）

本章作业

- 四：1，2，3
- 五：7，9
- 六：4，6，7，9
- 七：3，5，6，7，9
- 八：2，3，6，7
- 九
- 十：7，8