

2023 秋概统期中自测参考解答

基础部分

1.

(1) $1/4$

(2) $3/4$

(3) 0.1

(4) -7

(5) $3/4$

(6) 13

(7) 14

(8) 68

2.

(1) 设事件 A 为次品, 产品由甲、乙、丙三车间生产分别设为事件 B_1, B_2, B_3 , 则 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.04$ 。

(2) $P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = 9/20$ 。

3.

(1) $f_X(x) = \int_0^2 \frac{x}{4} dy = \frac{x}{2}, 0 < x < 2; f_Y(y) = \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2}, 0 < y < 2$ 。

(2) $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 所以随机变量 X, Y 相互独立。

(3) $\text{Corr}(X+Y, X-Y) = \frac{\text{Cov}(X+Y, X-Y)}{\sqrt{\text{Var}(X+Y)}\sqrt{\text{Var}(X-Y)}} = \frac{\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)}{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}$ 。

$E(X) = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = 4/3, E(X^2) = \int_0^2 x^2 \frac{x}{2} dx = 2$, 即 $\text{Var}(X) = 2/9$ 。

$E(Y) = \int_0^2 y \frac{1}{2} dy = 1, E(Y^2) = \int_0^2 y^2 \frac{1}{2} dy = 4/3$, 即 $\text{Var}(Y) = 1/3$ 。

因此 $\text{Corr}(X+Y, X-Y) = -1/5$ 。

强化部分

1.

(1) 根据概率的归一化可确定 $c = 1$ 。

(2) Y 的边际 PDF 为 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-(y+\frac{x}{y})} dx = e^{-y}$, 于是 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$, 即 $Y \sim \text{Exp}(1), X|Y = y \sim \text{Exp}(\frac{1}{y})$, 因此 $E(Y) = 1, E(X) = E(E(X|Y)) = E(Y) = 1, E(XY) = E(E(XY|Y)) = E(YE(X|Y)) = E(Y^2) = 2$, 故协方差 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1$ 。

(3) $E(e^{-X}|Y = 1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-x} dx = 1/2$ 。

2.

(1) 此为次序统计量的 PDF, 可参考第三次习题课录屏。答案为 $f_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1}, 0 < x < 1; f_{X_{(n)}}(x) = nx^{n-1}, 0 < x < 1$ 。

(2) $f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}, 0 < x < y < 1$ 。

(3) $E(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1}, E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}$, 故 $E(X_{(1)} + X_{(n)}) = 1$ 。

(4) $R = X_{(n)} - X_{(1)}$, 构造从 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 到 $(R, X_{(n)})$ 的变换, 其 Jacobian 行列式绝对值为 1, 故 $f_{R, X_{(n)}}(r, x) = n(n-1)r^{n-2}, 0 < r < x < 1$, 进而求出 R 的边缘 PDF 为 $f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r), 0 < r < 1$ 。

3.

对于某个固定的教室, 可设随机变量 $X_i = 1$ 代表第 i 个学生会去该教室, $X_i = 0$ 代表去其他教室, 则各 X_i 独立同分布且 $P(X_i = 1) = \frac{1}{5}, i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $n = 1600$ 。那么去该教室总人数 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ 。根据中心极限定理, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ 趋于标准正态分布。假设教室座位数为 N , 令 $P(\sum_{i=1}^n X_i \leq N) = P(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{N - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) \geq 95\%$, 则 $\frac{N - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq 1.64$, 其中 $\mu = \frac{1}{5}, \sigma = \frac{2}{5}$ 。得出 $N \geq 346.24$, 因此 N 至少为 347。

4.

可利用性质一: 矩母函数能唯一确定分布函数; 性质二: 独立随机变量和的矩母函数等于诸随机变量各自矩母函数的乘积。

则有 $M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = M_{X_1+X_2}(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$, 因此有 $M_{X_1}(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{4} + \frac{\mu t}{2}}$, 故 $X_1 \sim N(\frac{\mu}{2}, \frac{\sigma^2}{2})$ 。