第 8 次作业

1. *判断下述说法正确与否，并尝试给出说明：由概率的频率解释知，当试验次数 $n\to\infty$ 时，事件 A 的频率 $\dfrac{m}{n}$ 的极限就是概率，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}=P(A)$.

2. *证明 Chebyshev 弱大数定律：设随机变量 X_i（$i=1,2,\cdots$）两两不相关，具有期望 $E(X_i)=\mu_i$，方差 $Var(X_i)=\sigma_i^2<c$，这里 c 为常数，则 $\forall\varepsilon>0$，有
$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right|\geq\varepsilon\right)=0.$$

3. 利用中心极限定理证明 Khinchin 弱大数定律.

4. **设随机变量 X_i（$i=1,\cdots,n$）独立同分布，其公共期望为 μ，公共方差为 σ^2，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为样本方差. 证明：S^2 依

连续映射定理 ⇒ Slutsky定理

概率收敛至 σ^2.

5. **设 X_n，$Y_n\neq 0$（$n=1,2,\cdots$）为两个随机变量序列，且分别以概率1 收敛于 a 和 $b\neq 0$，证明：$\dfrac{X_n}{Y_n}$ 以概率1 收敛至 $\dfrac{a}{b}$.（提示：考虑事件 $A=\{X_n$ 不收敛于 $a\}$，$B=\{Y_n$ 不收敛于 $b\}$，$C=\{\dfrac{X_n}{Y_n}$ 不收敛于 $\dfrac{a}{b}\}$）

6. 设 X_i（$i=1,2,\cdots$）为独立同分布的随机变量，具有期望 2，Y_i（$i=1,2,\cdots$）为独立同分布的随机变量，具有期望 5，且 $Y_1+\cdots+Y_n$ 不可能为 0. 证明：当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{Y_1+\cdots+Y_n}$ 以概率1 收敛至 $\dfrac{2}{5}$.

7. 以 X 表示抛 40 次均匀硬币出现的正面次数. 求 $P(X=20)$ 及其正态近似值.

8. *某保险公司向 10000 个投保人提供内容相同的汽车保险，假定这 10000 个投保人在一年内由于发生交通事故而造成的损失是独立同分布的，且一辆车在一年内发生事故的概率为 0.001，事故损失为 1000 元.

（1） 如果忽略运营成本，保险公司每份保险卖 2 元合理吗？

（2） 保险公司至少有 20%的毛利润（毛利润=保费-保险赔付-运营成本（忽略））的概率多大？

（3） 以 95%的概率可以保证保险公司至少还有多少毛利润？

9. 假设某物理量的真值为 m，多次对其测量，每次测量产生一个随机误差，一个合理的假设是：在选择适当的单位下，随机误差服从 $U(-1,1)$.

（1） n 次测量的算术平均值与真值之差的绝对值低于微小正数 ε 的概率为多少？请利用中心极限定理给出 $n=25$，$\varepsilon=0.2$ 情形的概率近似值.

（2） 要使得算术平均值与真值之差的绝对值低于微小正数 ε 的概率超过 $1-\alpha$，应该进行至少多少次测量？请利用中心极限定理进行讨论，并给出 $\varepsilon=0.2$， $\alpha=0.05$ 情形的测量数.

（3） 利用 Chebyshev 不等式求解（2），并比较两种方法得出的结果.

10. 假设某批次电子元件中合格品占 80%，从中任意购买 5000 个. 试问把误差限 ε 定为多少才能保证买到的元件的合格率与该批次的合格率之差不超过 ε 的概率至少为 0.99？此时的合格品数的范围是多少？

11. 尝试找出一个公开报道的抽样调查实例，指出其是否与课上选举问题的讨论相符，并简要说明理由.

12. *假设某只股票的价格每天上涨 70% 或下降 50% 的概率都为 0.5，并且不同日子之间相互独立. 设初始股价为 $Y_0=1$， n 天后的股价为 Y_n.

（1） 验证 $\log Y_n$ 近似正态分布，并给出正态分布的参数.

（2） 当 $n\to\infty$ 时， $E(Y_n)$ 会怎样变化？

（3） 证明： $P(\lim\limits_{n\to\infty} Y_n=0)=1.$

（4） 尝试给（2）和（3）的结果一个直观解释.

（提示：考虑随机变量 $X_i=\begin{cases}1 & 第i天上涨\\ 0 & 第i天下跌\end{cases}$）

13. *设 X 的累积分布函数 $F(x)$ 未知，样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自该总体，相互独立，经验分布函数定义为 $F_n(x)=\dfrac{X_1,\cdots,X_n\text{不超过}x\text{的个数}}{n}$.

（1） 求 $F_n(x)$ 的期望和方差.

（2） 证明：$F_n(x)$ 依概率1 收敛于 $F(x)$.

（提示：考虑随机变量 $I_i(x)=\begin{cases}1 & X_i\le x\\ 0 & X_i>x\end{cases}$）

14. （计算机实验）设 X_i（$i=1,\cdots,n$）为独立同分布随机变量，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

（1） 假设 $X_i\sim N(0,1)$，请分别对 $n=1,\,25,100,1000$ 模拟 $\overline{X}$ 的分布.

（2） 假设 $X_i\sim U(0,1)$，请分别对 $n=1,\,25,100,1000$ 模拟 $\overline{X}$ 的分布.

（3） 假设 X_i 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，$x\in R$（Cauchy 分布），

请分别对 $n=1,\,25,100,1000$ 模拟 $\overline{X}$ 的分布.

观察以上的实验结果是否与中心极限定理相符，为什么？