习题课 204 题目：隐函数逆映射定理、多元微分学几何应用

一、隐函数定理和逆映射定理

1. 证明在 $(x,y)=(1,1)$ 的一个邻域内对于任给 (x,y) 有唯一 $z=z(x,y)$ 满足方程 $(z+y)^x=x^2y$，并且 $z(x,y)$ 是 C^∞ 函数，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}$ 和 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$ 以及 $z(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式.

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定满足 $z(1,0)=-1$，求 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,0)}$.

3. 设 f，g，$h\in C^1$. 若矩阵 $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ 可逆，且函数 $u=u(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases}u=f(x,y,z,t)\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 确定，求 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y,\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_x$. 注：这里 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ 表示当 u 是关于自变量 x,y 的函数时对 x 的偏导数。

4. 验证在 $P_0(1,1,1)$ 附近由方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 确定了可微的隐函数 $y=y(x,z)$. 对 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，求 $\left.\dfrac{\partial(f(x,y(x,z),z))}{\partial x}\right|_{x=1,z=1}$.

5. 设 $F(x,y)$ 是定义在第一象限并有连续偏导数的二元函数。又设 (x_0,y_0) 是第一象限中的一点，$F(x,y)$ 在该点满足条件 $x_0F_x(x_0,y_\partial)+y_0F_y(x_0,y_0)\neq 0,$ 且 $F(x_0,y_0)=0$. 证明：由方程 $F(x+uy^{-1},y+ux^{-1})=0$ 在点 (x_0,y_0) 的一个邻域上唯一地确定了一个满足 $u(x_0,y_0)=0$ 的 C^1 隐函数 $u=u(x,y)$。

二、多元微分学的几何应用

6. 求解下列各题：

(1) 求螺线 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\\ z=t\end{cases}$ 在点 $M(1,1,\dfrac{\pi}{4})$ 处的切线、法平面、密切平面.

(2) 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\ z-x^2-y^2=0\end{cases}$ 在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程.

7. 求曲面 $S:2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

8. 证明球面 $S_1:x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2:x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

9. 已知曲面 S 的方程 $\mathrm{e}^z = xy + yz + zx$ ，求曲面 S 在 $(1,1,0)$ 处的切平面方程；若曲面 S 的显式方程为 $z = f(x,y)$ ，求 $\mathrm{grad} f(1,1)$.

10. 已知 f 可微，证明曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c}, \dfrac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.

11. 设 G 是可导函数且在自变量取值为零时，导数为零，否则函数的导数都不等于零。曲面 S 由方程 $ax + by + cz = G(x^2 + y^2 + z^2)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

12. 求过直线 $\begin{cases} 3x - 2y - z = -15 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$ 且与曲面 $S: x^2 - y^2 + z = 10$ 相切的平面方程。

13. 证明：设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个非空区域，且 $z = f(x,y) \in C^2(D)$. 则在旋转变换 $u = x\cos\theta + y\sin\theta,\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta$ 下，表达式 $f_{xx} + f_{yy}$ 不变。

14. Mercator 投影与地图绘制

圆柱面与球面沿赤道相切，从球心连直线将球面上的点投影到圆柱面上，球面上的经线成为圆柱面上垂直于赤道的直线，球面上的纬线成为圆柱面上与赤道平行的圆周。把柱面沿一条经线剪开得到平面地图。

(1) 问这样的地图是否保距（即地图上曲线的长度与地球上相应曲线的长度成比例）？是否保角（即地图上两条曲线的夹角与它们在地球上对应曲线的夹角相等）？

(2) 通过怎样的处理可以使上述地图成为保距或成为保角？