微积分 T（3）
第三次作业答案

2023 年 12 月 27 日

在解答中，红色的标记表示我们需要验证一致收敛性。

1. 证明. 设含参积分

$$F(r)=\int_0^\pi \ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\mathrm{d}x$$

求导后使用万能公式积分得到

$$\begin{aligned}
F'(r)&=\int_0^\pi \frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{r}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}x-\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{r}\left(\pi-\int_0^{+\infty}\frac{1-r^2}{1-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{1}{r}\left(\pi-2\int_0^{+\infty}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}\,\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{1}{r}\left(\pi-2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\right)\\
&=\frac{1}{r}\left(\pi-2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\Big|_0^{+\infty}\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

另一方面，

$$F(0)=\int_0^\pi 0\,\mathrm{d}x=0$$

因此，对 $-1 < r < 1$ 都有 $F(r) = 0$。 □

2. 设被积函数

$$f(x,y) = x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}$$

(1) 证明. 求导得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\alpha}{x} - y\right) x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}$$

因此，

$$\max_{x\geqslant 0} f(x,y) = f\left(\frac{\alpha}{y}, y\right) = \alpha^{\alpha} y^{\beta+1} e^{-y-\alpha}$$

设上面的函数为 $M(y)$，则有

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant M(y)$$

同时，

$$\int_0^{+\infty} M(y)\,\mathrm{d}y < +\infty$$

因此，含参积分 $\Phi(x)$ 一致收敛。 □

(2) 证明. 求导得到

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\alpha+\beta+1}{y} - (1+x)\right) x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}$$

因此，

$$\begin{aligned}\max_{y\geqslant 0} f(x,y) &= f\left(x, \frac{\alpha+\beta+1}{1+x}\right) \\ &= x^{\alpha} (1+x)^{-(\alpha+\beta+1)} (\alpha+\beta+1)^{\alpha+\beta+1} e^{-(\alpha+\beta+1)}\end{aligned}$$

设上面的函数为 $M(x)$，则有

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant M(x)$$

同时，

$$\int_0^{+\infty} M(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

因此，含参积分 $F(y)$ 一致收敛。 □

3. (1) 直接计算：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$$

(2) 设积分

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^n}$$

分部积分得到

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^n} \\
&= \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^n}\bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2ny^2\,\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^{n+1}} \\
&= 0 + 2n\int_0^{+\infty} \frac{y^2\,\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^{n+1}} \\
&= 2n\left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^n} - x^2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^{n+1}}\right) \\
&= 2n\left(I_n(x) - x^2 I_{n+1}(x)\right)
\end{aligned}$$

也就是说，

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{x^2}I_n(x)$$

递推得到

$$I_n(x) = \frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{x^2}\cdots\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}I_1(x) = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2x^{2n-1}}$$

(3) 证明.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}y &= n^n\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\left(n+y^2\right)^n} \\
&= n^n I_n\left(\sqrt{n}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}
\end{aligned}$$

□

(4) 证明. 当 $n\to\infty$ 时 $y^2/n\to 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n}{y^2}}\right)^{-y^2} = e^{-y^2}$$

另一方面，该数列是单调递减的，由 Dini 定理可知 f_n 内闭一致收敛到 f。同时，

$$0 < \left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \left(1+\frac{y^2}{1}\right)^{-1} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} < +\infty$$

由强函数判别法，该无穷积分对 $n = 1, 2, \ldots$ 是一致收敛的：

$$F_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}y$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \qquad \square$$

(5) 证明. 综合 (3) 和 (4) 的结论可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

也就是说，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \square$$

4. 证明. 设含参积分

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2xy \, \mathrm{d}x$$

求导后分部积分得到

$$\begin{aligned} F'(y) &= -\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \sin 2xy \, \mathrm{d}y \\ &= e^{-x^2} \sin 2xy \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2ye^{-x^2} \cos 2xy \, \mathrm{d}x \\ &= 0 - 2yF(y) \end{aligned}$$

这里使用强函数判别法证明一致收敛：

$$\left|2xe^{-x^2} \sin 2xy\right| \leqslant 2xe^{-x^2} \qquad \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \mathrm{d}x < +\infty$$

解上述微分方程得到

$$F(y) = Ce^{-y^2}$$

进而，

$$F(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\implies F(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$$

设含参积分

$$G(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin 2xy\,\mathrm{d}x$$

求导后分部积分得到

$$\begin{aligned}G'(y)&=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\cos 2xy\,\mathrm{d}y\\&=-e^{-x^2}\cos 2xy\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}2ye^{-x^2}\sin 2xy\,\mathrm{d}x\\&=1-2yG(y)\end{aligned}$$

这里使用强函数判别法证明一致收敛：

$$\left|2xe^{-x^2}\cos 2xy\right|\leqslant 2xe^{-x^2}\qquad\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x<+\infty$$

解上述微分方程得到

$$G(y)=e^{-y^2}\left(\int_0^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t+C\right)$$

进而，

$$G(0)=0\sqrt{\pi}\implies G(y)=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$ □

5. 不妨设 $a\leqslant b$。

(1) 设含参积分

$$F(y)=\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{y}$$

这里使用强函数判别法证明上述积分在 $y\in[a,b]$ 上一致收敛：

$$0<e^{-xy}\leqslant e^{-ax}\qquad\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,\mathrm{d}x<+\infty$$

由讲义中的命题 9.5 可知，

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b e^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b F(y)\,\mathrm{d}y\\&=\ln b-\ln a\end{aligned}$$

(2) 设含参积分并换元 $z = xy$ 得到

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}$$

这里使用 Dirichlet 判别法证明上述积分在 $y \in [a, b]$ 上一致收敛：$x \to +\infty$ 时 $1/x$ 单调趋近于 0，并且

$$\left| \int_0^A \sin xy \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{a}$$

由讲义中的命题 9.5 可知，

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b \frac{\sin xy}{x} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b F(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{2} (b - a) \end{aligned}$$