Задание на программирование 1 по АиСД-2

Артем Стрельцов, группа 186

Дан граф G, для которого требовалось вычислить хроматическое число k и вывести корректную раскраску G в k цветов. Сведем данную задачу к задаче SAT: построим по графу G явно булеву формулу F, для которой требуется найти означивание.

Пусть в графе есть n вершин и m ребер и на данный момент времени проверяется возможность раскрасить граф в k цветов. Зададим для i-ой вершины конъюнкт вида

$$c_i = (v_{i1} \vee v_{i2} \vee \ldots \vee v_{ik}).$$

Он означает, что каждая вершина v_i должна быть покрашена в один из k цветов. Если в итоговом конъюнкте будут означены единицей несколько переменных v_{ic}, то можно выбрать любое такое c, соответствующее цвету (номеру цвета) для данной вершины (конфликтов по цветам между соседними не будет, объяснено ниже).

Также для каждого ребра (v_i, u_j) создадим k конъюнктов вида

$$e_i = (\neg v_{i1} \vee \neg u_{j1}) \wedge (\neg v_{i2} \vee \neg u_{j2}) \wedge \ldots \wedge (\neg v_{ik} \vee \neg u_{jk})$$

Каждый e_i означает, что соседние вершины не должны быть покрашены в один и тот же цвет (из k возможных).

Предъявим итоговую формулу в КНФ:

$$\mathrm{F} = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_m.$$

При нахождении означивания для F, такого что $F = 1$, оба условия будут выполнены: каждая вершина будет покрашена в какой-либо цвет и никакие две соседние вершины не будут иметь один и тот же цвет. Таким образом, предъявленное означивание и будет решением задачи о раскраске графа в k цветов. Теперь для поиска хроматического числа достаточно перебрать все k от 1 до n и для каждого такого проверить раскрашиваемость графа в k цветов. Очевидно, решение найдется, так как раскрасить граф на n вершинах в n цветов можно всегда.