

HOMEWORKS CON SOLUZIONI

L'ignoranza non deve impoverirsi con il sapere. Per ogni risposta deve saltare fuori - lontano e apparentemente non in rapporto con essa - una domanda che prima dormiva appiattata. Chi ha molte risposte deve avere ancor più domande. Il saggio rimane bambino per tutta la vita, le sole risposte inaridiscono il corpo e il respiro.

E. Canetti, 1973

1.1 INTRODUZIONE

A volte, durante le lezioni in aula del corso di Fondamenti di Macchine e Azionamenti Elettrici, ai frequentanti sono posti quesiti inerenti approfondimenti o richiami della materia trattata. Non viene data subito la risposta, perché si ritiene che la ricerca della soluzione, meglio se eseguita in gruppo, abbia la duplice valenza di ripasso di concetti propedeutici e di strumento di autovalutazione del proprio metodo di studio. Infatti, la risposta a tale domande solitamente non è direttamente mostrata nelle dispense e costituisce una piccola sfida che aiuta a comprendere quanto solida sia la propria preparazione. Uno studente ben preparato, con un metodo di studio appropriato e con libera consultazione di qualunque ausilio cartaceo o informatico dovrebbe riuscire a risolvere ogni quesito in un tempo ragionevole (massimo 1 ora). Questo documento riporta le domande e le risposte relative, in forma sintetica. Serve per valutare la correttezza delle proprie conclusioni. Leggere direttamente le risposte, pur rimanendo cosa utile, non fa cogliere gli obiettivi principali sopra delineati.

- 1.1.1 *Dimostrare che per un sistema lineare vale l'uguaglianza tra energia e coenergia.*

La linearità implica $\lambda = Li$. L'energia e la coenergia sono funzioni di stato e si possono calcolare ad esempio bloccando il rotore e dunque supponendo $\vartheta = \text{costante}$. In tal caso si ha:

$$w_m = \int_0^{w_m} dw_m(\lambda, \vartheta) \stackrel{\vartheta \text{ cost.}}{=} \int_0^\lambda id\lambda = \int_0^\lambda \frac{\lambda}{L} d\lambda = \frac{\lambda^2}{2L} = \frac{1}{2} Li^2.$$

Per la coenergia il calcolo è simile:

$$w'_m = \int_0^{w'_m} dw'_m(i, \vartheta) \stackrel{\vartheta \text{ cost.}}{=} \int_0^i \lambda di = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2 = w_m.$$

- 1.1.2 *Dimostrare che le linee di campo magnetico sono perpendicolari a rotore e statore.*

Si consideri un rettangolino $ABCD$, con i lati lunghi paralleli e quelli brevi ortogonali alla superficie di separazione tra rotore (in materiale ferromagnetico, con permeabilità μ_{fe} infinita) e l'aria del traferro (con permeabilità magnetica finita μ_0) come riportato in figura 1. Dato che la superficie di cui tale percorso è bordo non taglia correnti, per la legge di Ampere si ha:

$$\oint H(l) dl = 0. \quad (1)$$

Tale uguaglianza deve valere sia per le componenti tangenziali di H (indicate con il pedice t) sia per quelle ortogonali alla superficie. Per costruzione, nei tratti AB e CD il campo tangenziale è nullo, per cui la (2) porge:

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{\mu_{\text{fe}}} = \frac{B_{2t}}{\mu_0} \quad (2)$$

e quindi per $\mu_{\text{fe}} \rightarrow \infty$ si ha $B_{2t} \rightarrow 0$, ovvero nel traferro vi sono solo componenti di induzione ortogonale alla superficie del rotore (e dello statore, con analogo ragionamento).

- 1.1.3 *Trovare l'andamento della coppia in funzione della posizione per un sistema elettrodinamico con magneti permanenti nello statore.*

Una interessante variante allo schema relativo ad un sistema elettrodinamico con due avvolgimenti è rappresentata dalla sostituzione del circuito 1, che crea

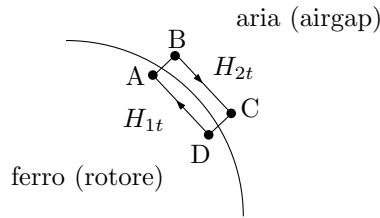


Figura 1: Andamento delle linee di campo tra rotore e traferro in aria.

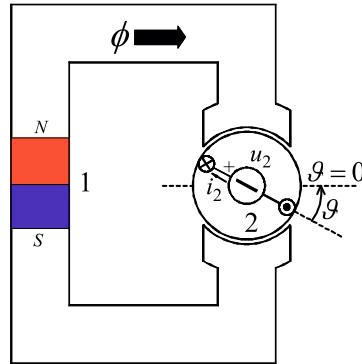


Figura 2: Variante con magnete permanente.

il campo magnetico *statorico* con un magnete permanente, come illustrato nella figura seguente. Si tratta di ricavare la coppia in tale situazione. Il flusso concatenato con il circuito 2 vale:

$$\lambda_2 = L_2 i_2 + \lambda_{mg} \cos \vartheta.$$

Per analogia formale con il sistema elettrodinamico della figura ??, vale dunque la relazione $\lambda_{mg} \cos \vartheta = M_0 I_1 \cos \vartheta$, dove la *fittizia* corrente I_1 è costante per rappresentare la costanza del flusso del magnete permanente. Il flusso concatenato dall'*ipotetico* circuito 1 si può scrivere come:

$$\lambda_1 = L_1 I_1 + M_0 \cos \vartheta i_2 = L_1 \frac{\lambda_{mg}}{M_0} + M_0 \cos \vartheta i_2.$$

In forma differenziale si ha (considerando le variabili i_2 e ϑ):

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial i_2} di_2 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \vartheta} d\vartheta = M_0 \cos \vartheta di_2 - M_0 \sin \vartheta i_2 d\vartheta \\ d\lambda_2 &= \frac{\partial \lambda_2}{\partial i_2} di_2 + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \vartheta} d\vartheta = L_2 di_2 - \lambda_{mg} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

L'energia magnetica si può calcolare in una situazione qualsiasi, ad esempio a rotore bloccato ($d\vartheta = 0$). L'unica grandezza che varia in tal caso è la corrente i_2 . Si può scrivere pertanto:

$$\begin{aligned} w_m(i_2) &= \int_0^{\lambda_1, \lambda_2} I_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 \\ &= \int_0^{i_2} (I_1 M_0 \cos \vartheta + L_2 i_2) di_2 \\ &= I_1 M_0 i_2 \cos \vartheta + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \\ &= \Lambda_{mg} i_2 \cos \vartheta + \frac{1}{2} L_2 i_2^2. \end{aligned}$$

Si ricava l'espressione della coppia per il circuito con il magnete permanente:

$$\tau = \frac{\partial w_m(i, \vartheta)}{\partial \vartheta} \rightarrow \tau(i_2) = -\Lambda_{mg} i_2 \sin \vartheta.$$

- 1.1.4 *In un sistema elettrodinamico, se trasciniamo la parte mobile, essa ci oppone resistenza crescente. Se però aumentiamo la velocità di trascinamento la coppia resistente cala sempre di più. Perché?*

All'aumentare della velocità di rotazione, aumenta la frequenza della *fem* indotta e con essa il modulo e l'argomento dell'impedenza del circuito di rotore. Per tale motivo la corrente sul circuito diminuisce e con essa la coppia.

- 1.1.5 *Calcolare come sono dirette le forze elettromotrici indotte dal campo magnetico della reazione d'indotto di un motore in corrente continua per i conduttori 1, 8, 5, 12.*

Nei conduttori 1, 8 il campo dovuto alla corrente di armatura (reazione di indotto) ha verso uguale a quello dell'eccitazione, pertanto le forze elettromotrici indotte avranno lo stesso segno di quelle dovute all'interazione tra corrente di armatura e campo di eccitazione di statore (conduttore 8 polo positivo frontale, conduttore 1 polo positivo posteriore). Al contrario, i conduttori 5, 12 sono investiti da un campo di reazione d'indotto *di verso opposto* a quello dovuto al campo di eccitazione. Pertanto, tali conduttori saranno sede di forze elettromotrici indotte di segno opposto a quello legato all'interazione tra corrente di armatura e campo di eccitazione, ovvero si avrà il conduttore 5 con *fem* e_i con polo positivo frontale e conduttore 12 con polo positivo posteriore. In

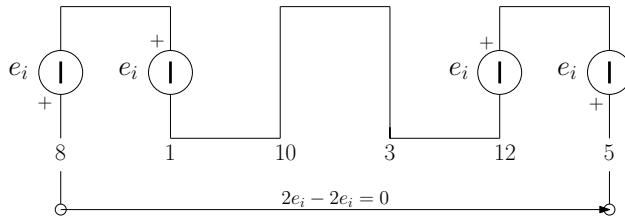


Figura 3: Generatori nella via superiore dovute alla reazione d'indotto.

prima approssimazione, i conduttori 3, 10 non sono interessati da *fem* indotte perché il campo d'indotto è parallelo alla direzione del loro moto. la situazione complessiva è riassunta nella figura 3.

Si nota che l'effetto complessivo alle spazzole (collegate tra i conduttori 8 e 5, nell'istante considerato nella presente analisi) sia nullo, ovvero la reazione d'indotto non influenza significativamente la *fem* generata dal campo di eccitazione. Naturalmente trascurando i fenomeni di saturazione del ferro, che com'è noto provocano uno sbilanciamento da accrescimento di campo e sua riduzione tale che le *fem* indotte su 1, 8 siano inferiori a quelle indotte su 5, 12.

1.1.6 *Trovare casi in cui serve un funzionamento nel primo e nel quarto quadrante per i motori in corrente continua. Trovare casi in cui serve un funzionamento in tutti i quadranti.*

Un funzionamento nel primo e quarto quadrante implica velocità positiva e coppia bipolare (positiva o negativa). In particolare, nel quarto quadrante si ha un motore trascinato dal carico, che il motore cerca di rallentare opponendo una coppia frenante. Un esempio di funzionamento di questo tipo è il sollevamento di un carico con contrappeso, ad esempio un ascensore. Solitamente il contrappeso è tarato sul carico medio, in modo che una cabina vuota tenda a salire e una a pieno carico tenda a scendere. In tal caso, il funzionamento è nel primo quadrante quando l'ascensore sale a pieno carico, mentre è nel quarto quadrante quando l'ascensore sale con la cabina vuota.

Il funzionamento con coppia sempre motrice e velocità bipolare è costituito dal *montacarichi* senza contrappeso. Mentre il carico sale, il motore lavora nel primo quadrante. quando il carico viene rallentato, in discesa (motore trascinato dal carico), il funzionamento è nel secondo quadrante.

Un caso di applicazione che richiede il funzionamento in 4 quadranti è il *carro ponte*, che deve essere in grado di muoversi avanti/indietro accelerando e frenando in entrambe le direzioni. Oppure un ascensore con contrappeso, si

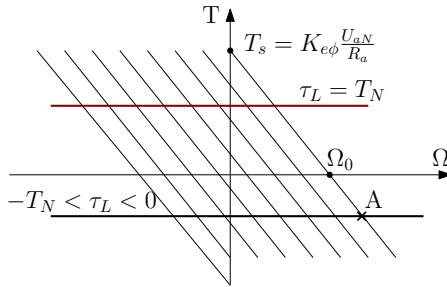


Figura 4: Caratteristiche a tensione impressa di un motore CC.

veda sopra.

- 1.1.7 *Un motore CC alimentato con tensione nominale e con coppia di carico negativa si porta a lavorare ad una velocità maggiore della nominale. Stabilire se si tratti di un punto di funzionamento possibile.*

La figura 4 mostra le caratteristiche coppia-velocità di un motore CC alimentato imprimendo la tensione di armatura. In particolare, la retta che passa per i punti A e Ω_0 è la caratteristica alla tensione di armatura nominale. In presenza di carico $T_L < 0$ il sistema motore-carico si porta a funzionare nel punto A . Il punto A è di funzionamento stabile (il sistema tende a ritornare in A in seguito a piccole perturbazioni) ed è pure di funzionamento possibile dal punto di vista elettrico, perché rispetta i limiti di flusso (non è modificato), di corrente (dato che il motore produce una coppia negativa inferiore al valore nominale) e di tensione (imposta al valore nominale). L'equazione di bilancio è infatti:

$$I_a(A) = \frac{U_{aN} - K_{e\phi}\Omega(A)}{R_a} \quad (3)$$

Lavorare nel punto A significa che il carico sta accelerando il motore, ovvero gli sta fornendo coppia motrice ($T_L < 0$). Il sistema trova l'equilibrio quando la coppia elettromagnetica prodotta dal motore diventa frenante, ovvero quando la *fem* $K_{e\phi}\Omega$ supera la tensione U_{aN} e viene prodotta corrente di armatura negativa.

Un possibile elemento che può sconsigliare un funzionamento continuativo in A è legato al superamento non solo della velocità nominale, ma anche di quella a vuoto Ω_0 e questo potrebbe non essere tollerato dalle componenti meccaniche (giunto motore-carico e/o cuscinetti).

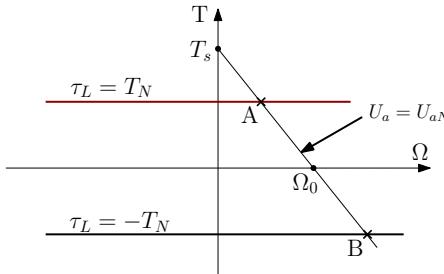


Figura 5: Caratteristiche a corrente impressa di un motore CC.

- 1.1.8 *In un motore CC, alimentato a corrente impressa con un generatore di tensione avente limite pari alla tensione nominale, stabilire la velocità di funzionamento quando la corrente è impostata al suo valore nominale, con carico nullo.*

Le caratteristica a corrente impressa è riportata in figura 5. Nel caso di funzionamento a corrente impressa nominale vi sono essenzialmente due possibilità:

1. La coppia di carico uguaglia la coppia (nominale) del motore \rightarrow ogni velocità fino al punto A può essere raggiunta. La velocità $\Omega(A)$ non può essere superata perché si raggiunge il limite di tensione del convertitore.
2. La coppia di carico è inferiore alla coppia prodotta dal motore: il motore accelera e l'unica velocità alla quale si porta il sistema è $\Omega(A)$.

Nel caso in cui la corrente impressa fosse negativa ed il carico rimanesse nullo, il sistema si porterebbe a lavorare nel punto B.

1.1.9 *Efficienza teorica in un motore CC*

L'efficienza (teorica) si può anche dedurre in modo analitico, se si dispone dei dati del motore. Ovviamente le formule sono ricavate nelle ipotesi di sistema conservativo, per cui qualche discrepanza può sicuramente emergere. Le equazioni sono sempre le stesse, manipolate per ottenere l'efficienza in funzione della coppia. In particolare, si fissano la tensione di armatura (costante) e la coppia all'albero T (variabile in un range). Da queste due grandezze, unite alla conoscenza dei parametri del motore, si ottiene la corrente di armatura:

$$I_a = \frac{U_{aN} B}{R_a B + K_{e\Phi}^2} + \frac{T K_{e\Phi}}{R_a B + K_{e\Phi}^2} \quad (4)$$

Dalla corrente (dunque indirettamente dalla coppia) si ottiene la velocità

$$\Omega_T = \frac{(U_a - R_a I_a)}{K_{e\Phi}} \quad (5)$$

ed infine si calcola l'efficienza, che a questo punto è funzione solo di U_a e T :

$$\eta = \frac{R_a T^2 + K_{e\Phi} U_a T}{K_{e\Phi} U_a T + B U_a^2} \quad (6)$$

Il codice Matlab per eseguire una semplice simulazione è il seguente:

Stima dell'efficienza teorica.

```

Ua=12;
Ra=0.5;
Io=0.93;
KeF=0.0282;
k=0;
%
% Coefficienti per il calcolo dell'efficienza
a=-Ra; b=KeF*Ua; c=KeF*Ua; d=B*Ua^2;
%
for T=0:0.01:0.64
k=k+1;
Tau(k)=T;
Ia=Ua*B/(Ra*B+KeF^2)+T*KeF/(Ra*B+KeF^2);
Omega=(Ua-Ra*Ia)/KeF;
eta(k)=(a*T^2+b*T)/(c*T+d);
% o, in alternativa:
eta(k)=T*Omega/(Ua*Ia);
end
clear fig
figure(1)
plot(Tau, eta)
hold on
[M,I]=max(eta);
plot(Tau(I), eta(I), '*')

```

Un esempio di grafico $\eta = f(T)$ è riportato nella Figura 6, relativa al motore i cui dati di targa offrono $U_a = 12 V$, $R_a = 0.5 \Omega$, $K_{e\Phi} = 0.0282 \text{ Vs/rad}$.

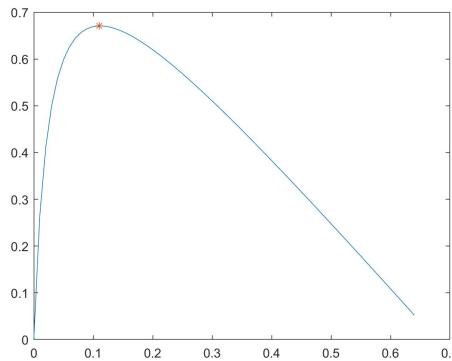


Figura 6: Curva di efficienza teorica di un motore CC.

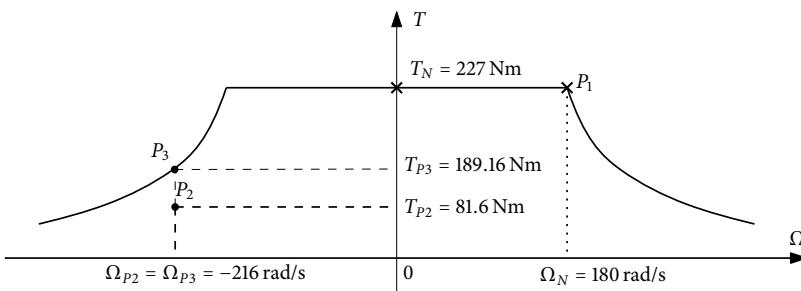


Figura 7: Caratteristiche a corrente impressa di un motore CC.

- 1.1.10 Un motore con $T_N = 227 \text{ Nm}$ e $P_N = 40.8 \text{ kW}$ viene portato a lavorare in deflussaggio alla velocità di 216 rad/s , ove sviluppa una coppia di 81.6 Nm . Valutare quanto devono valere flusso, corrente e coppia in percentuale dei valori nominali. Spiegare infine perché le ultime due percentuali non coincidono.

Il punto P_2 (figura 7) è nella zona di funzionamento a potenza (disponibile) costante. La massima potenza disponibile è 40.8 kW , mentre la potenza richiesta nel punto P_2 è $81.6 \cdot 216 = 17.6 \text{ kW}$. La velocità nel punto P_2 è comunque $\Omega_{Nf} > \Omega_N$, pertanto il flusso deve essere inferiore al nominale. Infatti, la *fem* nel punto P_2 non può essere superiore alla *fem* nominale, per non superare il limite di tensione. Pertanto, il flusso Φ_{P_2} si calcola come:

$$K_e \Phi_{P_2} \Omega_{P_2} = K_e \Phi_N \Omega_N \rightarrow \Phi_{P_2} = \frac{\Omega_N}{\Omega_{P_2}} \Phi_N = \frac{180}{216} \Phi_N = 0.83 \Phi_N \quad (7)$$

La coppia nel punto P_2 vale

$$T_{P_2} = K_e \Phi_{P_2} I_{P_2} \quad (8)$$

Nel punto P_3 si calcola una coppia (relativa alla corrente nominale) pari a

$$T_{P_3} = \frac{P_N}{\Omega_{P_3}} = \frac{40\,800}{216} = 189.16 \text{ Nm} \quad (9)$$

I punti P_2 e P_3 sono caratterizzati dalla stessa velocità e pertanto hanno lo stesso flusso. Dunque, la corrente in P_2 si otterrà semplicemente considerando la proporzione tra le coppie sviluppate nei due punti:

$$T_{P_3} : T_{P_2} = I_N : I_{P_2} \rightarrow I_{P_2} = \frac{T_{P_2}}{T_{P_3}} I_N = \frac{81.6}{189.16} I_N = 0.43 I_N \quad (10)$$

Il rapporto tra la coppia sviluppata in P_2 ed il valore nominale T_N è $81.6/227 = 0.36$. Esso indurrebbe ad una scelta della corrente $I_{P_2} = 0.36 I_N$, mentre la (10) mostra che ne serve di più. La ragione sta nel fatto che nel punto P_2 il flusso è inferiore al valore nominale (responsabile della coppia di 227 Nm alla corrente nominale) e dunque serve in proporzione più corrente, proprio per supplire al minor flusso.

1.1.11 *Valutare il grado di approssimazione della funzione di trasferimento velocità-tensione attraverso l'analisi della risposta di velocità ad un gradino di tensione, tramite simulazione.*

La funzione di trasferimento approssimata si esprime come

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{k_e \Phi \tau_a \tau_m}}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (11)$$

Lo schema della simulazione si costruisce affiancando alla (11) il modello reale del *motore CC*, come riportato nella figura 8. Le due risposte al gradino di riferimento sono confrontate tramite oscilloscopio.

Dal grafico in figura 9 si nota che i due andamenti coincidono per un determinato intervallo di tempo e poi si discostano di un valore costante. La motivazione risiede nell'applicazione di una coppia di carico T_L nel sistema reale, che naturalmente non trova corrispondente nel modello matematico della (11). L'invito è a riprodurre in Simulink lo schema, provare a plottare la *differenza* tra le risposte di velocità prima dell'applicazione della copia di carico e in seguito di analizzare tale differenza al variare dei parametri, per capire quale siano gli elementi che inficiano l'approssimazione data dalla (11).

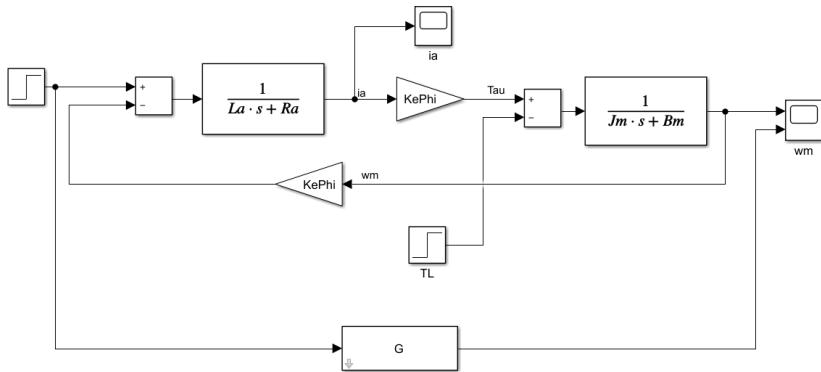


Figura 8: Modello Simulink approssimato e reale del motore CC.

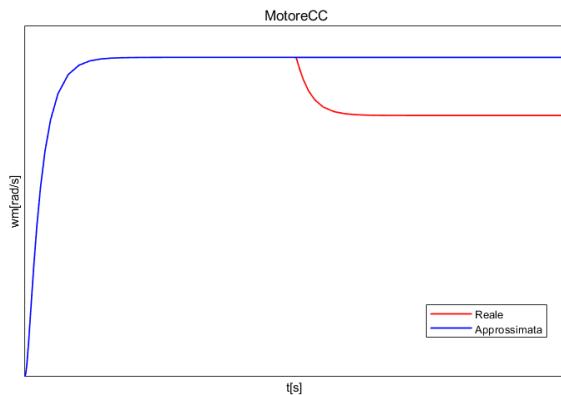


Figura 9: Confronto con il modello approssimato e reale del motore CC.

- 1.1.12 *La tecnica di modulazione PWM a sottooscillazione sinusoidale, con rapporto tra la frequenza portante e quella modulante $P = 10$, contempla nel suo spettro la presenza di una componente continua?*

Affinché non ci siano componenti continue nell'espressione di:

$$U_{aN}(\vartheta) = K_M U_{dc} \sin(\omega_s t + \varphi) + \\ + 2 \frac{U_{dc}}{\pi} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} \left\{ \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q \left(\frac{\pi r K_M}{2} \right) S(r+q) \sin[(rP+q)\omega_s t + q\varphi] \right\} \quad (12)$$

deve essere verificata la relazione $rP+q \neq 0$, come di seguito esposto, prendendo in considerazione i primi valori di r :

$$r = 1 \rightarrow q = -10 \rightarrow S(r+q) = S(-9) = 1$$

da cui risulterebbe presente una componente continua¹. Proseguendo la verifica sui gruppi successivi:

$$r = 2 \rightarrow q = -20 \rightarrow S(r+q) = S(-18) = 0$$

$$r = 3 \rightarrow q = -30 \rightarrow S(r+q) = S(-27) = 1$$

Si può evidentemente concludere che $P = 10$ genera componenti continue per i gruppi (r) dispari.

- 1.1.13 *Considerazioni sulla componente omopolare nella trattazione dei vettori spaziali.*

Una terna di tensioni è simmetrica se ciascuna componente ha la stessa ampiezza ed è sfasata dalle altre di 120° . Una terna di grandezze sinusoidali isofrequenziali può essere sempre ricondotta alla somma di una terna diretta, una terna inversa ed una terna omopolare (Trasformata di Fortescue). Applicando la definizione di vettore spaziale ad una terna di grandezze isofrequenziali qualunque è facile dimostrare che l'eventuale componente omopolare non venga conservata.

Di seguito, si pone il problema più generale di come agisca la trasformazione secondo i vettori spaziali (TFS) sulla componente omopolare di una terna di grandezze qualunque. Data una terna $g_a(t), g_b(t), g_c(t)$, si può sempre ricavare la componente omopolare

¹ Si ricorda che $S(\text{pari}) = 0, S(\text{dispari}) = 1$.

$$g_{op} = \frac{g_a(t) + g_b(t) + g_c(t)}{3} \quad (13)$$

Si può poi ricavare (per costruzione) una terna priva di componente omopolare:

$$\begin{bmatrix} g'_a(t) \\ g'_b(t) \\ g'_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_a(t) \\ g_b(t) \\ g_c(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{op}(t) \\ g_{op}(t) \\ g_{op}(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

L'applicazione della definizione di vettore spaziale alla terna $g_a(t), g_b(t), g_c(t)$ di partenza porta ad un vettore spaziale indistinguibile da quello relativo alla terna $g'_a(t), g'_b(t), g'_c(t)$, perché il vettore spaziale della terna omopolare è nullo, come si può facilmente verificare in modo diretto.

La proiezione del vettore spaziale $\mathbf{g}_{a,b,c} = \mathbf{g}'_{a,b,c}$ lungo i tre assi restituisce la terna $g'_a(t), g'_b(t), g'_c(t)$, ovvero un vettore costituito dalle componenti originarie tutte private della componente omopolare (in egual misura).

Non c'è modo di riavere le grandezze originarie, anche sapendo la componente omopolare: infatti, rimane in ogni caso l'incognita di come ciascuna grandezza di partenza abbia contribuito alla sua formazione, informazione che si perde nel computo della (13).

Si può pertanto concludere che quando la terna di partenza non è simmetrica, non solo la componente omopolare non viene mantenuta, ma neppure sapendola c'è modo di recuperare le tre grandezze originarie, dopo che hanno subito una trasformazione nel dominio dei vettori spaziali bidimensionali.

Esempio

A partire dalla terna di grandezze sinusoidali simmetriche g'_a, g'_b, g'_c si costruisca la terna di grandezze non simmetriche

$$\begin{bmatrix} g_a = g'_a + k \\ g_b = g'_b \\ g_c = g'_c \end{bmatrix} \quad (15)$$

con k reale. La componente omopolare vale chiaramente $k/3$. La proiezione del vettore spaziale relativo alla terna originaria sarà dunque una terna di sinusoidi con offset diversi:

$$\begin{bmatrix} g''_a(t) \\ g''_b(t) \\ g''_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_a(t) \\ g_b(t) \\ g_c(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k/3 \\ k/3 \\ k/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g'_a(t) + 2/3k \\ g'_b(t) - k/3 \\ g'_c(t) - k/3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

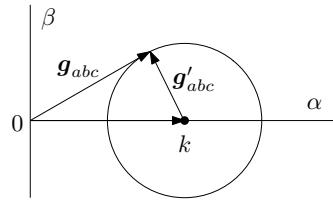


Figura 10: Modifica della traiettoria dell' vettore spaziale di una terna simmetrica ad opera di un offset k sulla fase a .

e non corrisponde alla terna originaria. Per comprendere appieno in che modo la costante k aggiunta alla grandezza g'_a influisca sulla traiettoria del vettore spaziale, è sufficiente applicare la definizione alla (15). Il vettore spaziale sarà il risultato di una circonferenza (legata alla terna simmetrica g'_a, g'_b, g'_c) e di un vettore adagiato sull'asse reale di ampiezza k , come riportato nella figura 10.

- 1.1.14 *Predisporre uno script in Matlab che permetta di visualizzare la traiettoria del vettore spaziale di corrente $\mathbf{i}(t)$, prodotto applicando una tensione $U = U_m e^{j\omega t}$ ad un circuito RL , ponendo $U_m = 100$ V, $L = 30$ mH, $R = 2\Omega$, $\omega = 2\pi * 50$ rad/s.*

Sono di seguito riportati i listati relativi a due possibili realizzazioni di quanto richiesto, gentilmente forniti da due studenti del corso. Entrambi sono funzionanti e adempiono al compito.

% Script per lo studio della traiettoria del vettore spaziale.
% [M. Passarelli, 2017]

```
t = [0:0.0001:100];

% DATI:
Um = 100;           % Volt
L = 30*10^(-3);    % Henry
R = 2;               % Ohm
W = 2*pi*50;        % Radiani/Secondo

io = -Um/(R+i*W*L)*exp(-t/(L/R));
ip = (Um/(R+j*W*L))*exp(i*W*t);
itot = io + ip;

hold on
plot(real(io),imag(io),'r')
```

```

plot(real(ip),imag(ip),'g')
plot(real(itot),imag(itot),'b')
hold off


---


% Script per lo studio della traiettoria del vettore spaziale.
% [I. Granata, 2017]

Um = 100;
R = 2;
L = 30*10^(-3);
w = 2*pi*50;
t = [0:0.00001:10];
tau = L/R;
fi = atan((L*w)/R);
z = sqrt(R^2+(w*L)^2)*exp(j*fi);
%vettore spaziale corrente
i = (-Um/z)*exp(-t/tau)+(Um/z)*exp(j*(w*t));
plot(real(i),imag(i))

```

1.1.15 *Disegnare il diagramma di attivazione degli switch di un inverter trifase nel caso di modulazione simmetrica con il riferimento posto nel 5° quadrante. Noti i tempi di attivazione dei vettori di stato adiacenti, calcolare gli istanti di commutazione (t_1, \dots, t_6).*

Nel 5° settore i vettori adiacenti da considerare sono $\mathbf{v}_4 = Ve^{j4\pi/3}$ e $\mathbf{v}_5 = Ve^{j5\pi/3}$, con $V = 2/3U_{dc}$. I periodi di applicazione T_4 e T_5 si calcolano di conseguenza, risolvendo l'equazione vettoriale:

$$\mathbf{u}_{\alpha\beta}^* = \frac{\mathbf{v}_4 T_4 + \mathbf{v}_5 T_5}{T_c} \quad (17)$$

dove si è indicato con T_c il periodo di commutazione. Il tempo di applicazione del vettore nullo è dunque $T_0 = T_c - T_4 - T_5$.

La figura 11 mostra la sequenza degli impulsi da applicare secondo i principi della tecnica di modulazione simmetrica. La sequenza di applicazione dei vettori di stato è

$$\mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{v}_5 \rightarrow \mathbf{v}_6 \rightarrow \mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{v}_6 \rightarrow \mathbf{v}_5 \rightarrow \mathbf{v}_0$$

e pertanto gli istanti di commutazione si calcolano come segue:

$$t_1 = \frac{T_0}{4} \quad t_2 = t_1 + \frac{T_5}{2} \quad t_3 = t_2 + \frac{T_6}{2} \quad t_{4,5,6} = T_c - t_{3,2,1}. \quad (18)$$

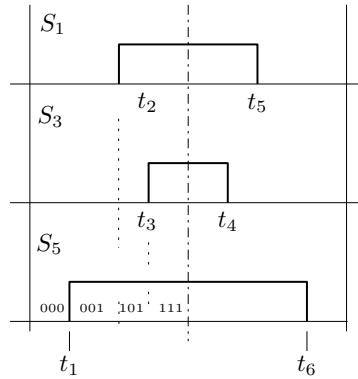


Figura 11: Diagramma delle commutazioni nel settore 5 con modulazione simmetrica.

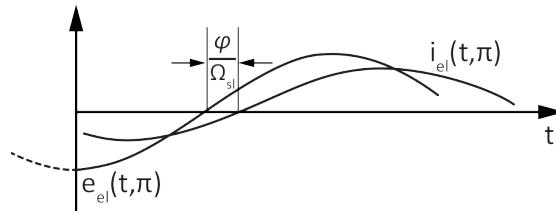


Figura 12: Andamento temporale di fem e i valutate $i \varepsilon = \pi$.

- 1.1.16 Determinare gli andamenti temporali della forza controllalettromotrice elementare e della corrente elementare ($e_{el}(t, \pi)$ e $i_{el}(t, \pi)$) in un motore asincrono trifase

L'andamento, rappresentato nella figura 12, è stato dedotto dai diagrammi spaziali rispettivamente di e_{el} e i_{el} .

- 1.1.17 Disegnare l'andamento spaziale di $B_{el}(\varepsilon)$, $e_{el}(\varepsilon)$, $i_{el}(\varepsilon)$ nell'ipotesi in cui $\Omega_{sl} < 0$, ovvero $p\Omega_m > \Omega_s$

Nel caso in cui la velocità del rotore sia superiore alla velocità del campo di statore la pulsazione Ω_{sl} risulta negativa quindi la fem e la corrente i risultano invertite di segno così come l'angolo di sfasamento φ tra esse. L'andamento è rappresentato nella figura 13.

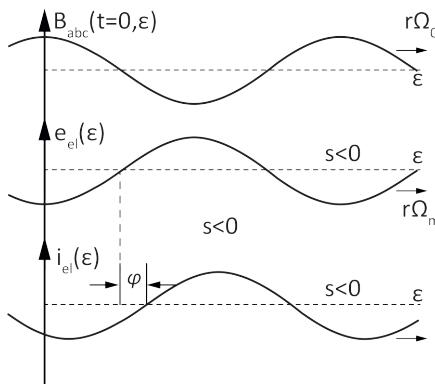
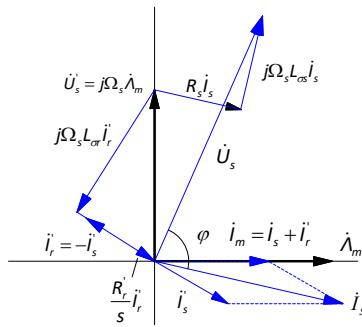
Figura 13: Andamento spaziale di B , e_{el} e i con scorrimento negativo.

Figura 14: Diagramma vettoriale motore asincrono con scorrimento negativo.

1.1.18 *Disegnare il diagramma vettoriale di un motore asincrono nel caso di $s < 0$*

A partire dai dati di targa (vedi dispense) è stato ricavato il diagramma vettoriale in figura 14, utilizzando le relazioni del circuito equivalente. E' importante ricordare l'espressione

$$\dot{U}'_s = j\Omega_s \lambda_m = \frac{R'_r}{s} \dot{I}'_s + j\Omega_s L'_{sr} \dot{I}'_s$$

ed in particolare ricordare che nel calcolo della caduta resistiva di statore $s < 0$.

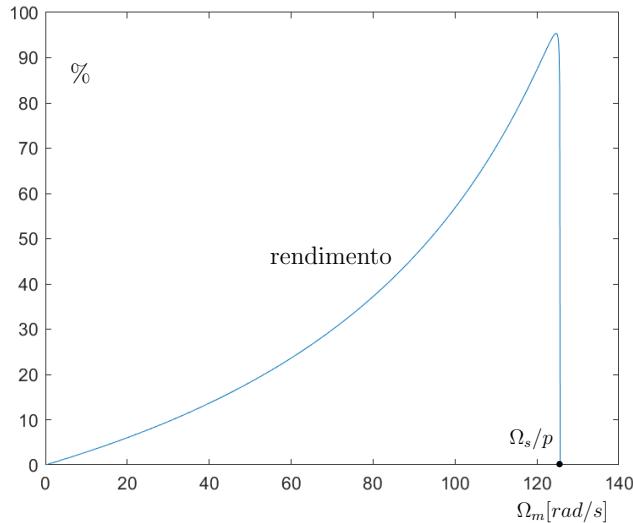


Figura 15: Rendimento del motore asincrono in condizioni nominali di alimentazione.

- 1.1.19 *Studiare come si può ricavare il rendimento μ_N dato lo script MATLAB del motore asincrono.*

Dato che la potenza meccanica del motore è una frazione della potenza elettrica fornita $P_{mecc} = \mu P_{el}$ e considerando che la prima è un dato di targa, per ottenere il rendimento è sufficiente ricavare la potenza elettrica nominale. Nell'espressione:

$$P_{el} = U_{dc} I_{dc} = 3U_{seff} I_{seff} \cos(\varphi) \quad (19)$$

compaiono i valori di tensione e corrente efficaci con il relativo sfasamento. Nello script è possibile individuare i valori complessi di tale grandezze per ogni Ω_m . Considerando il caso nominale con i valori di P_{mN} e Ω_{mN} da cui si ricavano le relative U_{seff} , I_{seff} e Φ , si ricava il valore di μ_N dalla formula (20):

$$\mu_N = \frac{P_{mN}}{3U_{seff} I_{seff} \cos(\varphi)} \quad (20)$$

La figura 15 riporta il grafico relativo al motore in condizioni di funzionamento nominale, ovvero in funzionamento con flusso nominale ma limitato alla tensione nominale (c.d. V/Hz).

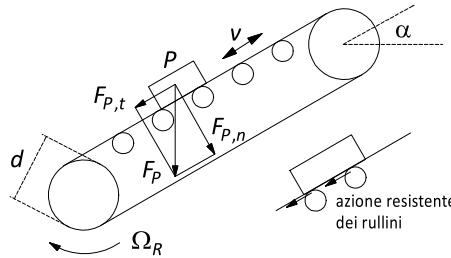


Figura 16: Schema dell'impianto trasportatore.

- 1.1.20 *Esercizio applicativo con motori asincroni. Valutare la scelta di una coppia motore-riduttore diversa, analizzando comparativamente i risultati con la soluzione a 4 poli e rapporto di riduzione 1 : 50. Cosa succederebbe montando il riduttore in modo tale che i versi di "salita" e "discesa" si scambino, sarebbe vantaggioso o svantaggioso? E svolgere poi la soluzione con 6 poli e rapporto di riduzione 1 : 30.*

Un nastro trasportatore, riportato nella figura 16, è inclinato di un angolo $\alpha = \pi/6$ rad, ha un carico utile $P = 4000$ N e deve funzionare alla velocità costante approssimativa $v = 0.3m/s$.

Il nastro deve funzionare sia in salita sia in discesa. Il nastro è sostenuto tramite una serie di rullini in folle. I due rulli alle estremità, uno dei quali serve a movimentare il nastro, hanno un raggio $r = 0.1$ m. Il rullo traente è azionato da un motore asincrono alimentato da rete. L'azione resistente dei rulli in folle è rappresentata tramite un coefficiente d'attrito equivalente $\mu_e = 0.1$, inteso come rapporto tra la *reazione tangente* e la *reazione normale* alla direzione del moto. È presente anche un ulteriore coppia resistente $T_F = 20$ Nm. I riduttori disponibili sono indicati nella tabella 1 ($K_R = \Omega_R/\Omega_m$), assieme ai relativi rendimenti in salita η_s e in discesa η_d . Si scelgano il motore e il riduttore adeguati e si determini la velocità effettiva del carico.

Tabella 1: Riduttori e relativi rendimenti.

$K_R = \Omega_R/\Omega_m$	η_s	η_d
1/30	0.48	0.43
1/40	0.46	0.41
1/50	0.43	0.38
1/60	0.39	0.35

Tabella 2: Nuovi dati iniziali.

grandezza	valore
Ω_n	1000 rpm
K_r	$1 : 34.9 \rightarrow 1 : 30$
η_s	0.48
η_d	0.43
$T_{r,s}$	254.6
$T_{r,d}$	145.6

Nell'esempio di progetto, la scelta è caduta sul modello AA-4-18,1-7, 4 poli, riduttore 1 : 50, ricavando $T_{m,s} = 11.84$, Nm e $T_{m,d} = 1.1$, Nm. Scambiando i versi del riduttore, ossia inserendo il rendimento μ_d nel calcolo di $T_{m,s}$ e μ_s nel calcolo di $T_{m,d}$, si nota immediatamente che in entrambe le situazioni di funzionamento al motore è richiesta più coppia:

$$\begin{aligned} T_{m,s} &= (1/50) \cdot (254.6/0.38) = 13.4 \text{ Nm} \\ T_{m,d} &= (1/50) \cdot (145.6 \cdot 0.43) = 2.18 \text{ Nm} \end{aligned} \quad (21)$$

(I valori della coppia al riduttore derivano dai calcoli svolti a lezione.) Essendo la coppia richiesta per questo funzionamento maggiore, risulta svantaggioso. Un utile esercizio consiste nel provare a ripetere il procedimento con una scelta diversa, ad esempio considerando un motore a tre coppie polari (che consente un accoppiamento con un riduttore 1 : 30, dal rendimento più alto). I dati di partenza sono riassunti nella tabella 2.

I dati del catalogo relativi ai motori a 3 coppie polari sono riportati nella figura 17. Le coppie motrici sono:

$$\begin{aligned} T_{m,s} &= (1/30) \cdot (254.6/0.48) = 17.68 \text{ Nm} \\ T_{m,d} &= (1/30) \cdot (145.6 \cdot 0.43) = 2.08 \text{ Nm} \end{aligned} \quad (22)$$

La potenza richiesta è dunque:

$$P_{\text{mot}} = 17.68 \cdot [3/(1/30)] = 1.59 \text{ kW} \quad (23)$$

Si deduce che non sia possibile diminuire la taglia del motore, anche a fronte di un maggior rendimento dei riduttori (almeno con i motori di questo catalogo). Anzi, in questo caso è necessario scegliere il motore AA-6-18, 6-2, che pesa 4.3 kg

MOTORE	N_n <i>giri min</i>	C_n <i>Nm</i>	P <i>kW</i>	I_n <i>CV</i>	$\cos \varphi$ <i>A</i>	η -	$\frac{C_a}{C_n}$ -	$\frac{C_{max}}{C_n}$ -	$\frac{I_a}{I_n}$ -	P_v <i>W</i>	Q_v $\frac{m^3}{min}$	$J \cdot 10^3$ kgm^2	M <i>kg</i>	
AA-6-2,2-0,5-1	810	0,54	0,05	0,06	0,29	0,54	0,42	1,6	1,7	2,3	14	0,75	0,15	2,5
AA-6-0,6-2	810	0,72	0,06	0,08	0,34	0,56	0,46	1,8	2,1	2,3	14	0,75	0,22	3,1
AA-6-0,8-2	850	0,91	0,08	0,11	0,41	0,60	0,47	2,1	2,2	3,1	16	2,5	0,23	3,7
AA-6-1,0-3	850	1,17	0,10	0,14	0,48	0,63	0,50	2,4	2,2	3,2	16	2,5	0,39	4,1
AA-6-1,7-1	865	1,89	0,17	0,23	0,67	0,66	0,56	2,4	2,5	3,1	16	2,5	0,60	5,8
AA-6-2,4-2	875	2,62	0,24	0,32	0,94	0,66	0,56	2,5	2,5	3,2	16	2,5	0,80	6,3
AA-6-3,4-3	885	3,71	0,34	0,46	1,23	0,66	0,61	2,5	2,6	3,2	16	2,5	0,95	6,4
AA-6-3,6-1	920	3,75	0,36	0,48	1,18	0,68	0,65	2,4	2,6	3,3	39	5,3	2,03	8,6
AA-6-5,5-2	920	5,72	0,55	0,73	1,70	0,72	0,65	2,4	2,5	3,7	39	5,3	2,52	10,4
AA-6-7,7-3	920	7,96	0,77	1,02	2,23	0,74	0,67	2,5	2,5	3,8	39	5,3	2,61	11,2
AA-6-7,7-5	930	7,89	0,77	1,02	2,05	0,75	0,72	2,5	2,5	3,9	39	5,3	3,45	12,2
AA-6-11,1-6	930	11,4	1,11	1,48	2,81	0,77	0,74	2,5	2,7	4,1	39	5,3	4,55	14,1
AA-6-15,1-7	935	15,4	1,51	2,01	3,98	0,77	0,71	2,2	2,8	4,3	39	5,3	5,21	16,2
AA-6-15,2-1	950	15,3	1,52	2,03	3,76	0,78	0,75	2,6	2,9	4,6	39	5,3	8,72	19,3
AA-6-18,6-2	950	18,7	1,86	2,48	4,53	0,78	0,76	2,6	2,8	4,8	39	5,3	10,3	20,5
AA-6-22,1-3	955	22,1	2,21	2,95	5,24	0,78	0,78	2,5	2,6	4,9	39	5,3	11,5	22,5
AA-6-22,9-1	960	22,8	2,29	3,06	5,24	0,77	0,82	2,5	2,5	5,0	39	5,3	14,9	29,0
AA-6-27,5-2	845	31,1	2,75	3,67	6,13	0,79	0,82	2,1	2,3	5,5	39	5,3	16,8	34,5
AA-6-36,1-5	955	36,1	3,61	4,81	8,04	0,79	0,82	2,2	2,4	5,5	39	5,3	28,9	42,0
AA-6-44,8-6	955	44,8	4,48	5,97	9,63	0,79	0,85	2,3	2,4	5,7	39	5,3	31,0	50,5
AA-6-52,1-7	955	52,1	5,21	6,95	10,9	0,81	0,85	2,4	2,5	5,9	39	5,3	41,5	56,0
AA-6-75,8-6	975	74,2	7,58	10,1	15,3	0,82	0,87	2,3	2,1	5,3	116	27	86,0	72,0
AA-6-111-8	980	109	11,1	14,8	22,5	0,82	0,87	2,3	2,5	5,5	116	27	127	105

Figura 17: Dati di targa di motori asincroni commerciali a 6 poli.

in più. Inoltre l'errore di velocità è superiore a quello che si otteneva col motore a quattro poli:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= 1000 \text{ rpm} \\ \Omega_{m,n} &= 950 \text{ rpm} \end{aligned} \quad (24)$$

e dunque:

$$\begin{aligned} v_s &= \left(950 \cdot \frac{2\pi}{60} \right) \cdot (1/30) \cdot 0.1 = 0.33 \text{ m/s} \\ v_d &= \left(1000 \cdot \frac{2\pi}{60} \right) \cdot (1/30) \cdot 0.1 = 3.49 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (25)$$

Anche raffinando il calcolo, l'errore rimane superiore a quello ottenuto con la soluzione adottata in precedenza:

$$\begin{aligned} k_\tau &= \frac{2\pi}{60} \frac{1000 - 950}{18.7} = 0.28 \\ \Omega_{m,s} &= 1000 - (0.28 \cdot 17.68) = 99.77 \text{ rad/s} \\ \Omega_{m,d} &= 1000 - (0.28 \cdot 2.08) = 104.12 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (26)$$

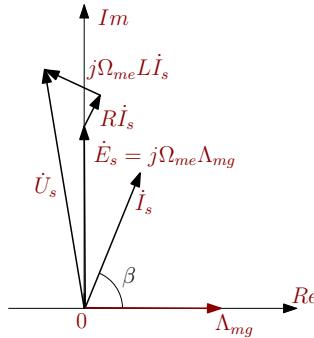


Figura 18: Diagramma fasoriale per un bilancio di tensione generico.

Ricalcolando la velocità lineare del pezzo si ottiene:

$$\begin{aligned} v_s &= \left(99.77 \cdot \frac{2\pi}{60}\right) \cdot 1/30 \cdot 0.1 = 0.33 \text{ m/s} \\ v_d &= \left(101.12 \cdot \frac{2\pi}{60}\right) \cdot 1/30 \cdot 0.1 = 0.347 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (27)$$

Tutte le altre soluzioni (es. motore a quattro coppie polari con accoppiamento a riduttore 1 : 30, oppure motore a tre coppie polari con accoppiamento a riduttore 1 : 40) danno risultati peggiori, com'è intuibile senza eseguire esplicitamente i calcoli.

1.1.21 *Disegnare il diagramma fasoriale relativo ad un motore sincrono a magneti permanenti in orientamento di campo, ipotizzando un funzionamento nel primo e quarto quadrante*

L'equazione fasoriale di bilancio della tensione è la seguente:

$$\dot{U}_s = R \dot{I}_s + j \Omega_{me} L_s \dot{I}_s + j \Omega_{me} \Lambda_{mg} \quad (28)$$

dalla quale emerge che il termine induttivo è ortogonale alla corrente di statore, mentre quello di forza controelettromotrice è ortogonale al fasore di flusso prodotto dal magnete permanente, convenzionalmente adagiato sull'asse reale. Il diagramma fasoriale relativo alla (28) è riportato in figura 18. Denotando con β (angolo di coppia) la fase tra il vettore di corrente e quello di flusso, l'equazione della coppia è:

$$T = \frac{3}{2} \Lambda_{mg} I_s \sin(\beta) \quad (29)$$

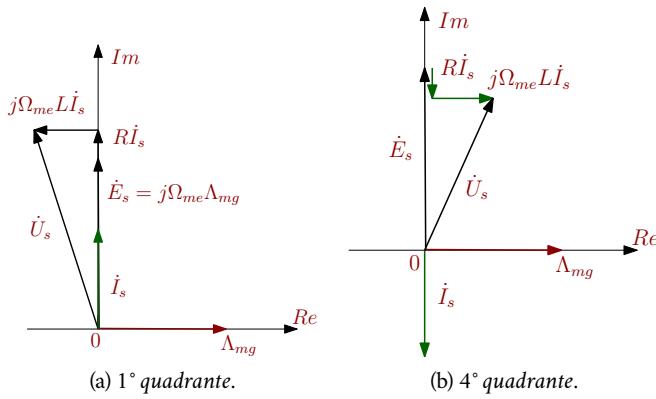


Figura 19: Diagramma fasoriale per un bilancio di tensione generico.

In orientamento di campo viene prodotta solo la componente della corrente in quadratura al fasore di flusso; nel funzionamento da motore (1° quadrante) la coppia e la velocità sono entrambe positive e $\beta = \pi/2$. Al contrario, nel funzionamento da freno (4° quadrante) la velocità si mantiene positiva, ma la coppia richiesta al motore risulta negativa ($\beta = -\pi/2$). La figura 19 riassume la situazione nei due quadranti succitati.

1.1.22 Scrivere uno script in MATLAB (con animazione) che mostri le traiettorie dei vettori spaziali di flusso e di corrente per $0 < \vartheta_{me} < 2\pi$ in un BLDCM

Di seguito le righe di codice per ottenere l'animazione:

Traiettoria dei vettori spaziali di flusso e corrente in un BLDCM.

```
%[Lorenzo Alessandro Parise, 2018]
%theta_me = [-pi/6:0.1:2*pi-pi/6];
lambda_mg=1; %default value
hold on;
grid on;
xlabel('Re')
ylabel('Im')
set(gca,'xticklabel',[]); %remove plot x labels
set(gca,'yticklabel',[]); %remove plot y labels
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5]); % set plot limits

for theta_me=-pi/6:pi/150:2*pi-pi/6 % for a complete spin
if theta_me>=-pi/6 && theta_me<=pi/6
```

```

m=1;
%set magnetic induction
lambda_a=lambda_mg;
lambda_b=-lambda_mg/2+lambda_mg/(pi/3)*theta_me;
lambda_c=-lambda_mg/2-lambda_mg/(pi/3)*theta_me;
lambda=2/3*(lambda_a+lambda_b*exp(j*2*pi/3)+lambda_c*exp(j*4*pi
/3)); %calculate induction space vector
[line_me,arrow_me]=vectarrow([0,0],[real(lambda),0],'g');%plot
the induction real part
lambda_me=text(real(lambda),0,'lambda_m_e','Color','g'); %
induction label
%current space vector
i=2/3*(0+exp(j*2*pi/3)-exp(j*4*pi/3));
elseif theta_me>pi/6 && theta_me<=pi/2
m=2;
%set magnetic induction
lambda_a=lambda_mg/2-lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-pi/3);
lambda_b=lambda_mg/2+lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-pi/3);
lambda_c=-lambda_mg;
lambda=2/3*(lambda_a+lambda_b*exp(j*2*pi/3)+lambda_c*exp(j*4*pi
/3)); %calculate induction space vector
[line_me,arrow_me]=vectarrow([0,0],[real(real(lambda*exp(-j*pi/3)
)*exp(j*pi/3)),imag(real(lambda*exp(-j*pi/3))*exp(j*pi/3))],'
g');%plot the induction real part
lambda_me=text(real(real(lambda*exp(-j*pi/3))*exp(j*pi/3)),
imag(real(lambda*exp(-j*pi/3))*exp(j*pi/3)),'lambda_m_e',
'Color','g'); %induction label
%current space vector
i=2/3*(-1+exp(j*2*pi/3)+0*exp(j*4*pi/3));
elseif theta_me>pi/2 && theta_me<=5*pi/6
m=3;
%set magnetic induction
lambda_a=-lambda_mg/2-lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-2*pi/3);
lambda_b=lambda_mg;
lambda_c=-lambda_mg/2+lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-2*pi/3);
lambda=2/3*(lambda_a+lambda_b*exp(j*2*pi/3)+lambda_c*exp(j*4*pi
/3)); %calculate induction space vector
[line_me,arrow_me]=vectarrow([0,0],[real(real(lambda*exp(-j*2*pi
/3))*exp(j*2*pi/3)),imag(real(lambda*exp(-j*2*pi/3))*exp(j*2*
pi/3))],'g');%plot the induction real part
lambda_me=text(real(real(lambda*exp(-j*2*pi/3))*exp(j*2*pi/3)
),imag(real(lambda*exp(-j*2*pi/3))*exp(j*2*pi/3)),'lambda_m_e
','Color','g'); %induction label
%current space vector

```

```

i=2/3*(-1+0*exp(j*2*pi/3)+exp(j*4*pi/3));
elseif theta_me>5*pi/6 && theta_me<=7*pi/6
m=4;
%set magnetic induction
lambda_a=-lambda_mg;
lambda_b=lambda_mg/2-lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-pi);
lambda_c=lambda_mg/2+lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-pi);
lambda=2/3*(lambda_a+lambda_b*exp(j*2*pi/3)+lambda_c*exp(j*4*pi
/3)); %calculate induction space vector
[line_me,arrow_me]=vectorarrow([0,0],[real(lambda),0],'g');%plot
the induction real part
lambda_metext=text(real(lambda),0,'lambda_m_e','Color','g'); %
induction label
%current space vector
i=2/3*(0-exp(j*2*pi/3)+1*exp(j*4*pi/3));
elseif theta_me>7*pi/6 && theta_me<=3*pi/2
m=5;
%set magnetic induction
lambda_a=-lambda_mg/2+lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-4*pi/3);
lambda_b=-lambda_mg/2-lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-4*pi/3);
lambda=2/3*(lambda_a+lambda_b*exp(j*2*pi/3)+lambda_c*exp(j*4*pi
/3)); %calculate induction space vector
lambda_c=lambda_mg;
[line_me,arrow_me]=vectorarrow([0,0],[real(real(lambda*exp(-j*4*pi
/3))*exp(j*4*pi/3)),imag(real(lambda*exp(-j*4*pi/3))*exp(j*4*pi
/3))], 'g');%plot the induction real part
lambda_metext=text(real(real(lambda*exp(-j*4*pi/3))*exp(j*4*pi/3)
),imag(real(lambda*exp(-j*4*pi/3))*exp(j*4*pi/3)), 'lambda_m_e
','Color','g'); %induction label
%current space vector
i=2/3*(1-exp(j*2*pi/3)+0*exp(j*4*pi/3));
elseif theta_me>3*pi/2 && theta_me<=11*pi/6
m=6;
%set magnetic induction
lambda_a=lambda_mg/2+lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-5*pi/3);
lambda_b=-lambda_mg;
lambda=2/3*(lambda_a+lambda_b*exp(j*2*pi/3)+lambda_c*exp(j*4*pi
/3)); %calculate induction space vector
lambda_c=lambda_mg/2-lambda_mg/(pi/3)*(theta_me-5*pi/3);
[line_me,arrow_me]=vectorarrow([0,0],[real(real(lambda*exp(-j*5*pi
/3))*exp(j*5*pi/3)),imag(real(lambda*exp(-j*5*pi/3))*exp(j*5*pi
/3))], 'g');%plot the induction real part
lambda_metext=text(real(real(lambda*exp(-j*5*pi/3))*exp(j*5*pi/3)
),imag(real(lambda*exp(-j*5*pi/3))*exp(j*5*pi/3)), 'lambda_m_e
'
);

```

```

    ', 'Color','g'); %induction label
%current space vector
i=2/3*(1+0*exp(j*2*pi/3)-exp(j*4*pi/3));
end
[linecurr(m),arrowcurr(m)]=vectarrow([0,0],[real(i),imag(i)],'r')
    ; %plot the current space vector
[linemagn,arrowmagn]=vectarrow([0,0],[real(lambda),imag(lambda)],
    'b');%plot the magnetic induction space vector
if imag(i) > 0 %for a better visualization, transpose current
    label
textcurr(m)=text(real(i)+0.05,imag(i)+0.05, strcat('i',num2str(m))
    , 'Color','r','FontSize',14);
else
textcurr(m)=text(real(i)+0.05,imag(i)-0.05, strcat('i',num2str(m))
    , 'Color','r','FontSize',14);
end
lambdatext=text(real(lambda),imag(lambda),'lambda','Color','blue'
    ); %induction label
scatter(real(lambda),imag(lambda),2.5,'b','filled'); %lambda
    vector path
%plot(real(lambda),imag(lambda),'b.');
pause(0.02); %wait to visualize
%hide current vector
set(linecurr(m),'visible','off');
set(arrowcurr(m),'visible','off');
set(textcurr(m),'visible','off');
%delete magnetic induction vectors
delete(line_me);
delete(arrow_me);
delete(lambda_metext);
delete(linemagn);
delete(arrowmagn);
delete(lambdatext);
end

%make visible the current vectors
for m=1:6
set(linecurr(m),'visible','on');
set(arrowcurr(m),'visible','on');
set(textcurr(m),'visible','on');
end
text(1,0,'lambda','Color','blue'); %induction label

function [line,arrow]=vectarrow(p0,p1,color) %draw an arrow

```

```

x0 = p0(1);
y0 = p0(2);
x1 = p1(1);
y1 = p1(2);
line=plot([x0;x1],[y0;y1],color); % Draw a line between p0 and
p1
p = p1-p0;
alpha = 0.1; % Size of arrow head relative to the length of the
vector
beta = 0.1; % Width of the base of the arrow head relative to
the length
hu = [x1-alpha*(p(1)+beta*(p(2)+eps)); x1; x1-alpha*(p(1)-beta*(p
(2)+eps))];
hv = [y1-alpha*(p(2)-beta*(p(1)+eps)); y1; y1-alpha*(p(2)+beta*(p
(1)+eps))];
arrow=plot(hu(:,hv(:,color); % Plot arrow head
end

```

- 1.1.23 Se la coppia di riferimento fosse negativa in un controllo di coppia per BLDCM, che corrente occorrerebbe portare in retroazione dal MUX al regolatore?

Si ricorda che il *multiplexer* ha come entrate le correnti, di cui una positiva, una negativa e una nulla e come uscita una corrente che porta in retroazione per il calcolo dell'errore di corrente.

Nel caso in cui la coppia di riferimento sia $\tau^* < 0$ si ottiene una corrente $i^* < 0$ (per la relazione $\tau = K_\tau \Delta_{mg} i$).

Per semplicità, ci si focalizzi sull'intervallo $[7/6\pi \dots 3\pi/2]$. In tale range, la logica di controllo attribuisce il comando del duty cycle δ alla coppia S_1, S_4 . La tensione applicata influenza le correnti i_a e $i_b = -i_a$. In particolare, significa controllare la corrente i_a (e solo di riflesso i_b), nel senso che ad una crescita di δ corrisponde una crescita della tensione e dunque una crescita della corrente i_a e viceversa.

La corrispondenza tra la derivata del duty cycle e quella della corrente (indipendentemente dal segno del riferimento) è condizione necessaria per un corretto funzionamento dell'anello di controllo.

Se si comandasse con lo stesso duty cycle l'altra coppia di interruttori (S_2, S_3) si introdurrebbe un'inversione di segno (non voluta) nella catena di controllo, in quanto con δ crescenti la tensione al morsetto della fase a , rispetto a quello della fase b , calerebbe invece di crescere come ci si aspetta.

Sempre con riferimento all'intervallo $[7/6\pi \dots 3\pi/2]$, va dunque portata in retroazione *sempre* la corrente i_a . Un semplice esempio numerico può aiutare a comprenderne la ragione: sia il riferimento $i_a^* = -1A$ e la corrente misurata $i_a = -0.8A$. L'errore di corrente risulta $i_a^* - i_a = -0.2A$; il regolatore di corrente (con azione proporzionale e integrale) abbassa il duty cycle (portandolo ad esempio da $\delta = 0.4$ a $\delta = 0.3$), ovvero aumentando la tensione *negativa* applicata e dunque provocando un'ulteriore abbassamento della corrente i_a , come necessario. Questo dimostra come il meccanismo di controllo funzioni anche con riferimenti di corrente negativi.

- 1.1.24 *Facendo riferimento alla logica di commutazione per un BLDCM si sintetizzi una rete digitale di comando del ramo S_3, S_4 , oppure S_5, S_6 .*

L'interruttore S_3 deve essere comandato con duty cycle diretto δ negli intervalli $[-\pi/6 \dots \pi/6]$ e $[\pi/6 \dots \pi/2]$, corrispondenti alle combinazioni binarie delle sonde Hall $(1, 0, 1)$ e $(1, 0, 0)$ e con duty cycle negato $\bar{\delta}$ negli intervalli $[5\pi/6 \dots 7\pi/6]$ e $[7\pi/6 \dots 3/2\pi]$, individuati dalle combinazioni binarie delle sonde Hall $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Questo si traduce nella sintesi dei segnali di abilitazione seguenti:

$$\begin{aligned} \delta \rightarrow S_3' &= H_1 \overline{H_2} H_3 + H_1 \overline{H_2} \overline{H_3} = H_1 \overline{H_2} = S_4'' \\ \bar{\delta} \rightarrow S_3'' &= \overline{H_1} H_2 \overline{H_3} + \overline{H_1} H_2 H_3 = \overline{H_1} H_2 = S_4' \end{aligned} \quad (30)$$

La figura 21 rappresenta la rete digitale per il comando degli interruttori S_3, S_4 .

- 1.1.25 *Con riferimento al circuito equivalente classico, si calcoli la coppia di un motore asincrono nel caso sia alimentato in continua e trascinato da un carico esterno ($\Omega_s = 0, \Omega_{sl} \neq 0$).*

Si può partire dall'espressione generale della coppia relativa al circuito equivalente classico:

$$T = 3 \frac{p}{\Omega_{sl}} R'_r I'_{s,eff}^2 \quad (31)$$

La corrente efficace $I'_{s,eff}$ si calcola a partire dalla $I_{s,eff}$, che per effetto della alimentazione a frequenza nulla vale semplicemente

$$I_s = \frac{U_{s,eff}}{R_s} \quad (32)$$

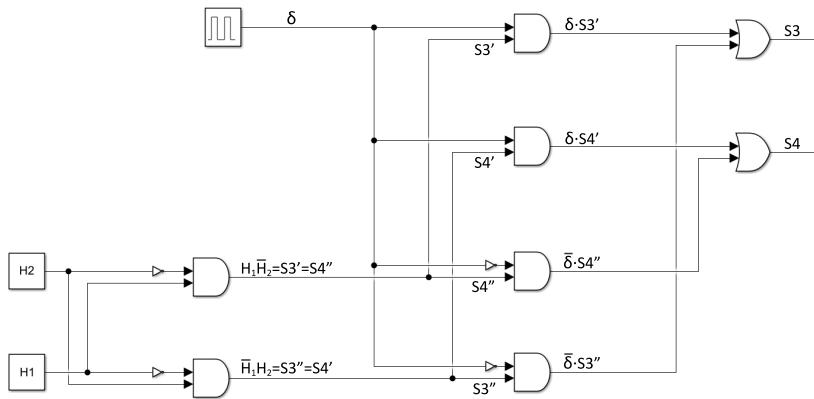
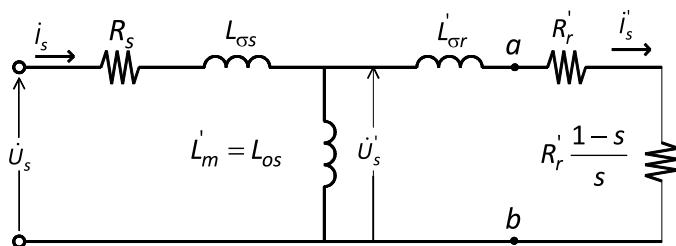
Figura 20: Schema delle reti digitali di comando del ramo S_3, S_4 .

Figura 21: Circuito equivalente classico di un motore asincrono.

Dunque, applicando la formula di ripartizione della corrente in due rami in parallelo:

$$\begin{aligned}
 I'_{s,\text{eff}} &= I_{s,\text{eff}} \frac{j\Omega_s L_m}{R'_r + j\Omega_s(L_m + L'_{\sigma r})} \\
 &= I_{s,\text{eff}} \frac{js\Omega_s L_m}{R'_r + js\Omega_s(L_m + L'_{\sigma r})} \\
 &= \frac{U_{s,\text{eff}}}{R_s} \frac{j\Omega_s L_m}{R'_r + j\Omega_{sl}(L_m + L'_{\sigma r})}
 \end{aligned} \tag{33}$$

Pertanto la coppia diventa

$$\begin{aligned}
 T &= 3 \frac{p}{\Omega_{sl}} R'_r \left(\frac{U_{s,\text{eff}}}{R_s} \right)^2 \frac{\Omega_{sl}^2 L_m^2}{R'^2 + \Omega_{sl}^2 (L_m + L'_{\sigma r})^2} \\
 &= 3p R'_r \left(\frac{U_{s,\text{eff}}}{R_s} \right)^2 \frac{\Omega_{sl} L_m^2}{R'^2 + \Omega_{sl}^2 (L_m + L'_{\sigma r})^2}
 \end{aligned} \tag{34}$$

ACKNOWLEDGEMENTS

Si ringraziano Irene Granata, Lorenzo Alberto Parise e Teresa Aldovini per la gentile collaborazione a queste note.

APPLICAZIONI TIPICHE ED ESEMPIO DI LETTURA DEI CATALOGHI

I libri non servono per sapere ma per pensare, e pensare significa sottrarsi all'adesione acritica per aprirsi alla domanda, significa interrogare le cose al di là del loro significato abituale reso stabile dalla pigrizia dell'abitudine; è evitare che i testi divengano testi sacri per coscienze beate che, rinunciando al rischio dell'interrogazione, confondono la sincerità dell'adesione con la profondità del sonno.

U. Galimberti, 2004

1.1 OPERAZIONI A VELOCITÀ FISSA.

I BLDCM stanno guadagnando notevole popolarità in applicazioni a velocità costante, specialmente come propulsori in ventilatori e pompe (*brushless blowers, pumps*), in azionamenti per scanner ottici (*optical scanner*) e respiratori artificiali (*respirator blower*). Questi motori sono caratterizzati da un'ottima durata (*long-life motors*), che li differenzia nettamente dalla loro controparte a spazzole. Il tempo di accelerazione, per queste applicazioni, non è un parametro critico, mentre per la scelta vanno valutati la tensione di ingresso, la coppia continuativa e la velocità richiesta. Molto spesso il carico è direttamente accoppiato al motore, per cui non è critico il mantenimento di un determinato rapporto tra le inerzie.

1.1.1 Esempio di scelta da catalogo

Si consideri una applicazione in cui si disponga di un bus in continua di 48 V e siano richieste una velocità costante di 4000 rpm ed una potenza di 1/6 hp. Si scelga il motore tra quelli disponibili nel catalogo riportato nella figura 1. Un esempio di motore è riportato nella figura 2.

Il costruttore riporta anche il seguente glossario:

- Peak torque (T_P): The torque that can be produced for 10 seconds without exceeding the maximum allowable winding temperature.
- Continuous stall torque (T_{CS}): This is the amount of torque that can safely be produced over an indefinite period of time under a stalled rotor condi-

TABLE 1						
Standard Motor Parameters***	UNITS	SYMBOL	DIN34-20		DIN34-26	
Max. Recommended Speed	RPM	ω_m	18,000		18,000	
Peak Torque*	oz • in	T_p	120		250	
Continuous Stall Torque**	oz • in	T_{cs}	50		100	
Motor Constant	$\frac{\text{oz} \cdot \text{in}}{\sqrt{\text{Watt}}}$	K_m	11.1		19.4	
Electrical Time Constant	Milli-sec	τ_e	1.9		3.1	
Mechanical Time Constant	Milli-sec	τ_m	8.8		5.7	
Power I^2R @ Peak Torque	Watts	P_p	116.1		166.4	
Damping Factor (Zero Impedance)	$\frac{\text{oz} \cdot \text{in}}{\text{rad/sec}}$	F_o	0.88		2.65	
Friction Torque	oz • in	T_f	3.0		6.0	
Rotor Inertia	$\text{oz} \cdot \text{in} \cdot \text{sec}^2$	J_m	7.7×10^{-3}		1.5×10^{-2}	
Thermal Resistance	°C/Watt	θ_{th}	3.2		2.5	
Max. Allowable Winding Temp.	°C		125		125	
Phases/Winding Type			3/Y		3/Y	
Poles			6		6	
Weight	oz.	W	32		48	
Length	in.	l	2.0		2.6	
Standard Winding Constants***	Units	Tol	Symbol	DIN34-20	DIN-34-26	DIN34-32
				A	B	C
DC Resistance	Ohms	±12.5%	R	0.30	0.45	0.36
Voltage @ Peak Torque	Volts	Nominal	V_p	5.90	8.65	9.00
Current @ Peak Torque	Amperes	Nominal	I_p	19.7	19.2	25
Torque Sensitivity	$\text{oz} \cdot \text{in}/\text{Amp}$	±10%	K_t	6.1	13.0	14.0
Back EMF Constant	Volts/(rad/sec)	±10%	K_b	0.043	0.092	0.099
Inductance	Milli-Henry	±30%	L	0.57	1.40	1.33

* 10 Sec at 25 °C Ambient, 125 °C Winding Temperature
** 25 °C Ambient, 125 °C Winding Temperature and Heatsink to 12" x 12" x 1/2" Aluminum Plate.
*** Other operating speeds and torques are available to suit specific application requirements.

GENERAL CHARACTERISTICS
Ambient Operating Temperature: -55 °C to 65 °C
Insulation Resistance @ 500VDC: 1000 MΩ Min.
Bearings: Grease Packed, Double Shielded

Figura 1: Catalogo motori BLDC (BEI-Kimco Magnetic Division, USA).



Figura 2: Esempio di motore BLDCM (BEI-Kimco Magnetic Division, USA).

Tabella 1: Tabella di conversione di alcune unità di misura anglosassoni

Unità di misura	Formula di conversione
Watt	oz. in rpm/1351
Watt	1/746 hp
m	3.281 feet (ft), 39.37 inch (in.)
Kg	0.2248 pounds (lb), 35.27 ounces (oz), 0.0685 slugs
N	7.233 poundals, 10^5 dynes
Nm	0.7376 pond-feet (lb · ft), 141.6 oz. in.
$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$	141.6 oz. in. s^2/rad (momento di inerzia)
oz. in.	$(\text{hp} \cdot 10^6)/\text{rpm}$, Watt · 1351/rpm
J	1 Ws, 0.2388 cal, $9.48 \cdot 10^{-4}$ BTU, 10^7 erg
Wb	10^8 maxwells

tion. This value is measured with the motor mounted on an aluminium plate (6" x 6" x 1.8") heat sink, to the maximum allowable temperature of the windings.

- Motor constant (K_m): A figure of merit of the motor. The higher the value for a given volume of the motor, the more powerful the motor.
- Electrical time constant (T_E): This value is equal to L/R (inductance divided by resistance). It is also equal to the time it takes for the current to reach 63% of its steady state value when the winding is energised by a step input voltage.

Il problema della scelta del motore può essere affrontato per passi.

1. Innanzitutto si può notare che, data l'applicazione, non è richiesta alcuna considerazione sulla coppia di picco (peak torque).
2. Le applicazioni a velocità e coppia costante non richiedono un calcolo della coppia efficace.

Si può invece ricavare il valore di coppia medio a partire dai dati sulla potenza e sulla velocità. A questo scopo, risulta utile disporre di una tabella di conversione, che permetta di accedere più facilmente ai cataloghi USA, che spesso esprimono grandezze in unità non conformi al sistema internazionale (SI). A titolo d'esempio, la tabella 1 riporta alcune conversioni per le grandezze elettriche. Dai dati numerici del problema e la terzultima riga della tabella 1 si ottiene una richiesta di coppia continuativa pari a

$$\tau_L = P[\text{hp}] \frac{10^6}{4000} = 41.6 \text{ oz.in.} \quad (1)$$

Osservando i dati di catalogo riportati nella figura 1, si nota che tra i BLDCM della serie DIN34 (ovvero quelli che presentano una flangia quadrata di dimensioni in

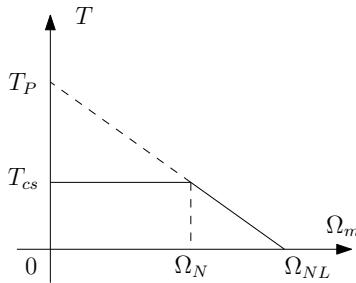


Figura 3: Caratteristica meccanica del motore BEI-Kimco DIN34 – 20.

accordo con lo standard NEMA 34, che prevede un lato di 86 mm) il DIN34 – 20 ha una coppia di stallo di $T_{cs} = 50$ oz.in. (maggiore di quella richiesta). Occorre assumere l'approssimazione che il motore sia in grado di mantenere tale coppia anche durante la rotazione. A tal fine si può considerare la caratteristica meccanica fornita dal Costruttore, riportata nella figura 3, che richiama quella di un motore in corrente continua alimentato a tensione impressa. Si evince che T_{cs} possa essere ottenuta fino alla velocità di

$$\Omega_N = \Omega_{NL} \left(1 - \frac{T_{cs}}{T_P}\right) = 18000 \left(1 - \frac{50}{120}\right) = 10500 \text{ rpm} \quad (2)$$

Dunque il motore è un candidato valido. Esso presenta una coppia costante di attrito (*friction torque*) pari a 3 oz.in., che va sommata a quella richiesta dal carico, portando la coppia complessivamente richiesta dall'applicazione a:

$$\tau_T = \tau_L + \tau_m = 41.6 + 3 = 44.6 \text{ oz.in.} \quad (< T_{cs}). \quad (3)$$

Si tratta ora di vedere se l'alimentazione a disposizione sia sufficiente. La *fem* generata dal motore si sottrae alla tensione disponibile di alimentazione, così che solo la differenza risulta utile per produrre la corrente che genera la coppia motrice. È dunque molto importante lasciare un margine di tensione appropriato. Sempre con riferimento alla figura 1, si può notare che l'avvolgimento A presenta una costante di *fem* $K_B = 0.043 \text{ V}/(\text{rad/s})$. Alla velocità di $\Omega_m = 4000 \text{ rpm}$ la *fem* di fase risultante è dunque pari a

$$e_M = K_B \Omega_m = 0.043 \cdot 4000 \frac{2\pi}{60} = 18 \text{ V} \quad (4)$$

Il motore è connesso a stella, senza disponibilità di un collegamento a triangolo, quindi il convertitore deve alimentare due fasi in serie (36 V). Alla velocità di

lavoro considerata $\Omega_m = 4000$ rpm, la tensione disponibile per il controllo di corrente risulterebbe in tal caso pari a

$$U_\tau = U_{DC} - 2e_M = 48 - 36 = 12 \text{ V} \quad (5)$$

che consente di imporre una corrente a regime di

$$I_\tau = \frac{U_\tau}{2R} = \frac{12}{2 \cdot 0.3} = 20 \text{ A} \quad (6)$$

La corrente richiesta dalla applicazione si calcola a partire dalla costante di coppia (*torque sensitivity*) riportata nella figura 1:

$$I_T = \frac{\tau_T}{K_T} = \frac{44.6}{6.1} = 7.3 \text{ A} \quad (7)$$

Pertanto il modello DIN34-20, con avvolgimento di tipo A rispetta, apparentemente, tutte le richieste contenute nelle specifiche. Va comunque tenuto conto che la resistenza di statore cresce con la temperatura. Aumenteranno dunque le perdite per effetto Joule (I^2R) e vanno tenute in conto tutte le tolleranze. Nel caso in analisi, esse riguardano K_T , K_B ed R e il calcolo va fatto considerando le condizioni più sfavorevoli, ovvero quelle che portano ad un aumento della corrente richiesta dal carico:

$$I_T = \frac{\tau_T}{K_T} = \frac{44.6}{0.9 \cdot 6.1} = 8.12 \text{ A} \quad (8)$$

che rimane comunque entro il limite della corrente nominale (8.2A).

1.2 OPERAZIONI CON ELEVATE ACCELERAZIONI

Applicazioni di questo tipo per i motori BLDCM sono le centrifughe (*centrifuges*), i sistemi di memorizzazione di massa (*mass storage*) e i lettori e scrittori CD. In queste applicazioni si richiede che il motore riesca ad accelerare il carico alla velocità prefissata in un determinato periodo di tempo. Raggiunta tale velocità, la coppia richiesta al motore si riduce sensibilmente, rimanendo solo quella necessaria a mantenere la rotazione. Per la selezione del motore, sono da considerare in questi casi la tensione di ingresso, l'accelerazione, l'inerzia del motore e del carico e la velocità nominale, come appare dal seguente esempio, relativo ad un sistema CD.

Tabella 2: Densità dei materiali

Materiale	densità (oz/in ³)	densità (kg/m ³)
Acciaio inossidabile	4.48	7751.2
Acciaio	4.51	7803.2
Alluminio	1.54	2664.5
Ceramica	2.83	4896.5
Rame	5.12	8858.6
Ottone	4.94	8547.2
Titanio	2.60	4500.0
Vetro	1.50	2595.3
Plastica	0.64	1107.3

1.2.1 Esempio di scelta da catalogo – sistema per il test dei Compact Disk.

Si consideri una applicazione in cui si disponga di convertitore AC/DC in grado di fornire una tensione continua $U_{DC} = 48$ V con una assorbimento di corrente nominale di 20 A. La velocità operativa sia $\Omega_m = 3600$ rpm, da raggiungere in $T_{acc} = 2$ s (poi si toglie l'alimentazione e il carico frena per attrito) con un duty cycle “attivo” del ciclo di lavoro inferiore al 10%. Un mandrino di supporto (*supporting chuck*) plastico, del diametro di 5” e spessore di 1/2” è calettato direttamente sull'albero del motore. Il carico è costituito da un disco di alluminio del diametro di 8”, dello spessore di 0.3”. Selezionare il motore più opportuno, scegliendolo dalla figura 1. Per completezza, la tabella 2 riporta la densità dei principali materiali, in unità di misura SI ed anglosassoni. Si parte con il calcolo dei momenti di inerzia significativi.

1. *Disco di alluminio.* L'espressione per il calcolo dell'inerzia di un cilindro solido di lunghezza L , raggio R e densità ρ è la seguente:

$$\begin{aligned}
 J_{al} &= \frac{V\rho R^2}{2} = \frac{\pi\rho L(D/2)^4}{2} = \\
 &= \frac{\pi \cdot 2664.5 \cdot 0.3 \cdot 2.54 \cdot 10^{-2} (8 \cdot 2.54 \cdot 10^{-2})^4}{32} = \\
 &= 3.4 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

2. *Inerzia del supporto plastico.* Vale una formula del tutto analoga alla precedente:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{pl}} &= \frac{V\rho R^2}{2} = \frac{\pi\rho LD^4}{32} = \\
 &= \frac{\pi \cdot 1107.3 \cdot 0.5 \cdot 2.54 \cdot 10^{-2} (5 \cdot 2.54 \cdot 10^{-2})^4}{32} = \\
 &= 0.359 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2
 \end{aligned} \tag{10}$$

A questi momenti di inerzia andrà sommato il momento di inerzia del rotore, che per il momento è ancora incognito, visto che il motore non è ancora stato scelto.

3. *Calcolo della accelerazione.* L'accelerazione si calcola semplicemente come

$$\alpha = \frac{\Omega_m}{T_{\text{acc}}} = 3600 \frac{2\pi}{60} \frac{1}{2} = 188.5 \text{ rad/s}^2. \tag{11}$$

4. *Calcolo della coppia di picco.* La coppia di picco è la somma delle coppie dovute all'inerzia, al carico e all'attrito. In apparati come i certificatori di CD la coppia di carico dovuta al CD è spesso trascurabile. La coppia di attrito dipende dal motore e per il momento sarà per questo trascurata. La selezione del motore si baserà dunque solo sulla coppia di origine inerziale, che deve essere calcolata inizialmente senza ovviamente poter includere l'inerzia propria del rotore:

$$\tau_p = (J_{\text{al}} + J_{\text{pl}})\alpha = (3.4 \cdot 10^{-3} + 0.359 \cdot 10^{-3}) \cdot 188.5 = 0.708 \text{ Nm} \tag{12}$$

che corrispondono = 100 oz.in.

5. *Calcolo della coppia nominale efficace.* Agli effetti termici, la coppia si calcola tenendo conto del ciclo di lavoro della macchina. Si può dunque scrivere:

$$\tau_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\tau_p^2 T_{\text{acc}}}{T_{\text{ciclo}}}} = 0.708 \cdot \sqrt{0.1} = 0.223 \text{ Nm} = 31.7 \text{ oz.in} \tag{13}$$

6. *Selezione del motore.* Deve naturalmente essere scelto un motore avente coppie nominale e di picco maggiori di quelle calcolate. Facendo riferimento alla figura 1, si può provare a scegliere il modello DIN34 – 20, che è in grado di erogare una coppia all'albero di 50 oz.in., che è erogabile fino

alla velocità di 10500 rpm. Il motore DIN34-20 presenta inoltre una coppia di picco di 120 oz. in., con una inerzia di rotore $J_m = 7.7 \cdot 10^{-3}$ oz.in.s², che corrisponde a $7.7 \cdot 10^{-3} / 141.6 = 0.054 \cdot 10^{-3}$ Kgm². Il ricalcolo delle (12) e (13), porta al valore aggiornato

$$\begin{aligned}\tau_p &= (J_{al} + J_{pl} + J_m)\alpha \\ &= (3.4 \cdot 10^{-3} + 0.359 \cdot 10^{-3} + 0.054 \cdot 10^{-3}) \cdot 188.5 \\ &= 0.719 \text{ Nm} = 102 \text{ oz.in}\end{aligned}\quad (14)$$

E' anche da notare che il motore prescelto presenta una coppia costante di attrito (indipendente dalla velocità) di 3 oz.in., che porta la coppia di picco al valori di 105 oz.in. (0.741 Nm) e quella efficace a

$$\tau_{eff} = 0.741 \cdot \sqrt{0.1} = 0.234 \text{ Nm} = 33.2 \text{ oz.in} \quad (15)$$

che comunque è minore della coppia nominale disponibile.

7. *Analisi del convertitore.* L'avvolgimento deve garantire che vi sia sufficiente tensione per il corretto controllo di corrente. Il momento più critico è a velocità nominale, un istante prima che termini l'accelerazione. In tali condizioni, scegliendo un avvolgimento di tipo A (connesso obbligatoriamente a stella), la tensione richiesta vale

$$\begin{aligned}U &= 2R \underbrace{\frac{\tau_p[\text{oz.in.}]}{K_T}}_{I_p[A]} + 2 \underbrace{K_B \Omega_m}_{e_M} = \\ &= 2 \cdot 0.3 \cdot \frac{105}{6.1} + 2 \cdot 0.043 \cdot 3600 \frac{2\pi}{60} = \\ &= 10.33 + 32.42 = 42,75 \text{ V}\end{aligned}\quad (16)$$

Essa è inferiore alla tensione disponibile. Una procedura più prudente dovrebbe prevedere la considerazione delle tolleranze nei parametri indicate nel catalogo, scegliendo naturalmente il caso peggiore. Per il calcolo di cui sopra risulterebbe:

$$\begin{aligned}U &= 2 \cdot (0.3 \cdot 1.125) \cdot \frac{105[\text{oz.in.}]}{(6.1 \cdot 0.9)} + 2 \cdot (0.043 \cdot 1.1) \cdot 3600 \frac{2\pi}{60} = \\ &= 12.9 + 35.66 = 48.56 \text{ V}\end{aligned}\quad (17)$$

comunque accettabile, anche se veramente senza margine. In questo caso, forse una tensione maggiore (es. 60 V) garantirebbe un progetto più

robusto, a fronte ad esempio ad incertezze non calcolate nell'analisi sopra esposta, come la variazione delle resistenze di statore con la temperatura e/o l'imprecisione con la quale sono note le inerzie del sistema.

La corrente del convertitore deve essere almeno il 15 – 20% maggiore di quella di picco richiesta dal motore, che si può calcolare a partire dalla massima coppia richiesta e dalla costante di coppia fornita dalla Costruttore. Essa risulta:

$$I_{\text{conv}} = 1.2 \cdot \frac{105[\text{oz.in}]}{(6.1 \cdot 0.9)} = 1.2 \cdot 19.13 = 22.95 \text{ A} \quad (18)$$

Pertanto, un convertitore da 20 A è una scelta al limite, e criteri di durata del prodotto e/o prudenziali potrebbero indurre a scegliere un margine leggermente superiore.

MOTORI SINCRONI A CAMPO COMMUTATO

1.1 INTRODUZIONE

I motori sincroni a magnete permanente possono presentare *fem* di forme diverse, a seconda della sagomatura dei magneti e della disposizione degli avvolgimenti di statore. Se le *fem* sono di tipo sinusoidale (BLACM, Brushless AC Motor) generalmente si adotta un sistema di controllo che imponga delle correnti pure sinusoidali ed in fase con le rispettive *fem* (macchine a campo rotante). In altri casi, le *fem* presentano volutamente una zona in cui sono costanti, ed in sistema di controllo agisce mantenendo sincronizzate e costanti le correnti nei tratti in cui sono costanti le *fem* (macchine a campo commutato). Ne sono esempi i motori con *fem* quasi quadre (a simmetria a quarto d'onda), o di tipo trapezoidale (BLDCM, Brushless DC Motors). La popolarità di questi ultimi azionamenti, soprattutto negli Stati Uniti, è legata alla semplicità del controllo, unita alla economicità dei sensori richiesti per il funzionamento, quando addirittura essi non siano sostituiti da opportuni algoritmi di stima (*sensorless control*).

Ci sono aziende che producono studi dettagliati sulle previsioni di crescita di determinati prodotti nel mercato globale. Per i BLDCM, KBV Research (USA) prevede che il mercato globale dei BLDCM raggiungerà i 22,8 miliardi di dollari entro il 2025, con una crescita del 6,7% nel periodo di previsione. Il motivo è essenzialmente legato alla previsione di un notevole aumento di veicoli elettrici, dovuto ai crescenti problemi di dipendenza dal petrolio, al riscaldamento globale e all'inquinamento ambientale. La domanda sarà anche stimolata dai vari programmi governativi volti a promuovere la produzione e l'uso dei veicoli elettrici. Nel confronto con altre soluzioni, i motori BLDCM offrono vantaggi quali il minor calore sviluppato nel rotore, la maggiore efficienza, i bassi costi di manutenzione, la velocità di funzionamento e le prestazioni di picco, nonché la rapidità di risposta. Tutti questi fattori li rendono ideali per un'ampia gamma di applicazioni, in particolare nei veicoli elettrici e ibridi. Una previsione degli impieghi dei BLDCM, suddivisa per segmenti applicativi, è riportata a titolo d'esempio nella figura 1.

Il BLDCM viene spesso presentato come una versione rovesciata del motore in corrente continua, in cui i magneti di campo, invece che sullo statore, siano sul rotore. Quest'ultimo viene posto in rotazione per reazione alle forze che

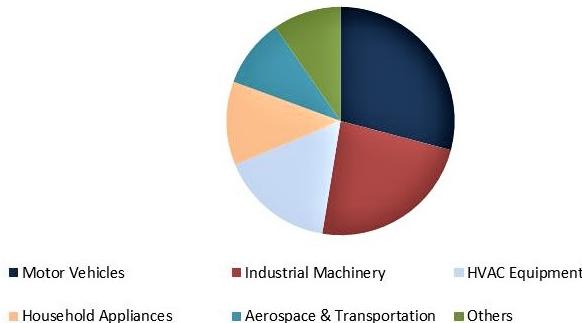


Figura 1: Distribuzione degli impieghi dei BLDCM, 2022. Courtesy of KBV Research, <https://www.kbvresearch.com/brushless-dc-motor-market/>.

agiscono sui conduttori di statore, che rimane naturalmente fermo. L'assenza di spazzole comporta notevoli vantaggi: maggiore durata, migliori prestazioni, ridotta emissione elettromagnetica ed elevata sovraccaricabilità, per citarne alcuni. Ai motori si è affiancata la produzione di *application notes* per microprocessori a basso costo, che rendono particolarmente breve il tempo di sviluppo di azionamenti basati su BLDCM.

1.2 STRUTTURA E PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

I motori sincroni a magnete permanente a campo rotante, detti anche nel lessico industriale *brushless sinusoidali*, presentano, nel funzionamento a vuoto a velocità costante e per tutte le conformazioni di rotore, *fem* nelle fasi di statore di tipo sinusoidale, di uguale ampiezza¹ ed equamente e reciprocamente sfasate di $2\pi/3$. L'alimentazione con una terna equilibrata di correnti, anch'esse sinusoidali, isofrequenziali e sincronizzate con le *fem* assicura in tal caso l'assorbimento di una potenza elettrica istantanea costante² che coincide³ con la potenza elettromeccanica prodotta dal motore. Quest'ultima, di conseguenza, è costante e, a

¹ Nei limiti della simmetria con cui viene costruita la macchina.

² In un circuito monofase, la *potenza istantanea* è la somma di un termine costante (*potenza attiva*) e di uno alternato (*potenza fluttuante*): $p = U_M I_M \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) = UI \cos(\varphi) + UI \sin(2\omega t - \varphi - \pi/2)$. La media della potenza istantanea in un periodo è detta *potenza attiva*. In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato, si comprende subito che la potenza istantanea è priva della componente fluttuante (le componenti di un sistema simmetrico hanno somma nulla in ogni istante) e pertanto la potenza istantanea coincide con quella media, è costante e vale $3UI \cos(\varphi)$.

³ Se si trascurano le perdite nel ferro.

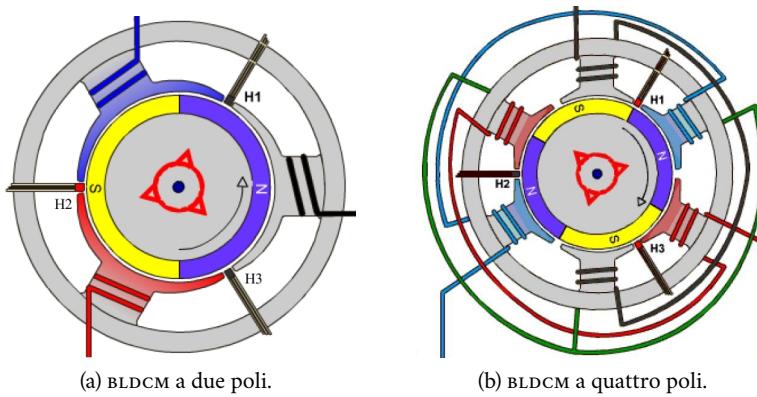


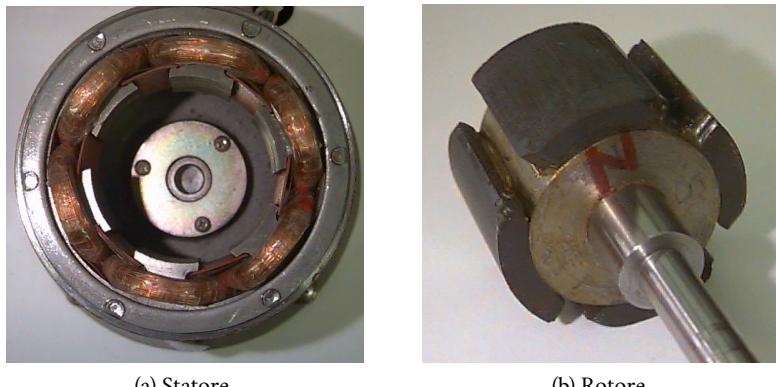
Figura 2: Struttura di un BLDCM (Courtesy of *Servo Magnetics INC, USA*).

fronte di velocità meccanica costante, si traduce in una coppia elettromagnetica costante. Com'è noto, alcuni motori a magnete permanente presentano anche anisotropia magnetica, che concorre alla produzione di coppia, la cui costanza a regime è garantita sempre dalla sinusoidalità delle correnti e dalla loro sincronizzazione con la posizione rotorica. In tal modo, infatti, il vettore spaziale delle correnti di statore è fisso con l'asse polare, ovvero esse generano un campo magnetico⁴ che ha una conformazione fissa rispetto al rotore e gira sincrono con quest'ultimo. Ci si convince allora facilmente che, in queste condizioni, la coppia di riluttanza che nasce come interazione tra il campo magnetico prodotto dalle correnti di statore e la struttura anisotropa del rotore risulta senz'altro costante e indipendente dalla posizione del rotore. Forze elettromotrici e correnti sinusoidali tra loro isofrequenziali non sono la sola combinazione di forme d'onda che produca una potenza istantanea costante. Una struttura elettromagnetica diversa, come quella schematizzata nella figura 2, presenta *fem* alternate⁵ di forma quasi quadra che, abbinate alla generazione di correnti quasi quadre opportunamente sincronizzate, producono coppia costante.

La struttura della figura 2a si riferisce ad un motore trifase con una coppia polare ($p = 1$), mentre nella figura 2b è raffigurata la struttura a 4 poli. Il principio di funzionamento rimane identico, con la sola differenza legata al rapporto tra le frequenze delle grandezze elettriche rispetto alla velocità meccanica di rotazione. Con riferimento alla struttura a due poli, si notano nel rotore due magneti, rappresentati da due archi giallo e blu, fissati sulla superficie di un

⁴ Reazione d'indotto.

⁵ Ovvero periodiche a valore medio nullo.



(a) Statore.

(b) Rotore.

Figura 3: Esempio di realizzazione prototipale di un BLDCM (Courtesy of T. Kikuchi, T. Kenjo, Polytechnic University of Japan, Kanagawa, Japan).

cilindro, costituito da lamierini impaccati, che costituiscono l'asse di rotore (*rotor hub*). Anche lo statore è costituito da una serie di lamierini impaccati ed isolati tra loro, con tre denti che si affacciano al rotore, sui quali vengono avvolti tre bobinotti (*fasi*). È importante notare che nella struttura di statore trovano posto anche tre sensori ad effetto Hall, che vengono utilizzati per rilevare la posizione del rotore. Essi sono posizionate ad intervalli di 120° e sono in grado di discriminare le polarità del campo magnetico che le interessa. Una descrizione analoga vale per la struttura a quattro poli della figura 2b. Vi sono ora sei denti di statore, sui quali trovano posto altrettanti bobinotti, che sono collegati a coppie in serie, per formare le tre fasi. Si vede chiaramente che si tratta di una duplicazione, all'interno dei 360° , della struttura a due poli sopra analizzata. Esempi di realizzazione di questi motori sono riportati nella figura 3.

Si noti che lo statore presenta sei bobine. Esse possono essere collegate in modo da ottenere differenti polarità magnetiche in ciascuna coppia di poli diametralmente opposti, per realizzare uno statore a due poli. Se invece le bobine sono connesse in modo da produrre polarità uguali, lo statore diventa a quattro poli.⁶ Il rotore è realizzato incollando dei magneti permanenti ad un supporto ferromagnetico laminato, e risulta isotropo. Le realizzazioni industriali sono naturalmente più sofisticate, e prevedono solitamente una forma rotorica di tipo cilindrico; inoltre la soluzione a magneti unici (come quella riportata nella figura 3b) è efficace solo per rotori di piccole dimensioni, mentre per taglie maggiori ciascun polo magnetico è realizzato affiancando più barre rettangolari

⁶ Il numero di poli di statore e di rotore deve coincidere.

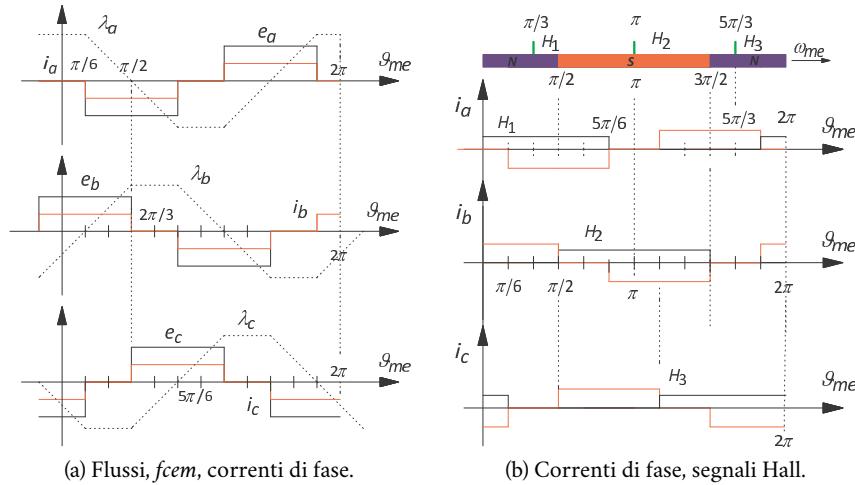


Figura 4: Forme d'onda del BLDCM.

di magnete, più robuste e facili da realizzare.

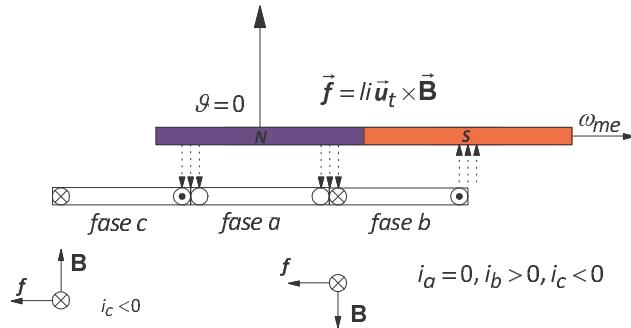
1.2.1 Modello del BLDCM e principio di generazione della coppia

Le $fcem$ del BLDCM, generate dal flusso prodotto dal rotore che si concatena con ciascuna fase di statore,⁷ sono riportate nella figura 4a. Nella stessa figura sono riportate, in rosso, anche le correnti da produrre tramite un apposito convertitore che alimenti il BLDCM e, in tratteggio, i flussi concatenati con ciascuna fase. L'origine delle ascisse (posizione elettrica⁸) è stato fissata corrispondente all'asse del campo magnetico di rotore, in analogia al caso dei motori a *fem* sinusoidale, e per $\vartheta_{me} = 0$ corrisponde alla posizione del rotore indicata nella figura 2a.

Nella stessa figura sono anche riportate tre sonde ad effetto Hall, sensibili al campo magnetico prodotto dal magnete di rotore. Esse forniscono tre segnali logici (0/1) che, opportunamente interpretati, permettono la sincronizzazione delle correnti con la posizione del rotore e, dunque, delle *fem* prodotte, per garantire la generazione di una coppia costante.

⁷ Si ricordi che nella scrittura delle equazioni di tensione la e_a appare a secondo membro, tra gli utilizzatori, e dunque è considerata una forza controelettromotrice. Portata a primo membro essa cambia di segno e, in accordo con la legge di Lenz ($-e_a = -d\lambda_a/dt$), è una forza elettromotrice. Per convenzione, inoltre, il verso delle linee di campo va dal nord al sud.

⁸ Si ricordi che la posizione elettrica ϑ_{me} è definita come $p\vartheta_m$, p =numero di copie polari, m =posizione angolare meccanica del rotore.

Figura 5: Relazioni tra induzione e correnti di statore, nella condizione $\vartheta = 0$.

Le sonde Hall sono sensibili al verso dell'induzione magnetica, e si assume che forniscano un segnale logico alto quando sono affacciate alla polarità *N* del magnete di rotore ed un livello logico basso quando sono affacciate alla polarità *S*.

La generazione delle forze sui conduttori di statore (e, per reazione, sul rotore) possono essere studiate agevolmente analizzando il moto del rotore rispetto allo statore nella struttura *rettificata* del BLDCM, come illustrato nella figura 5.

Si evidenzia come la forza agisca sui conduttori alimentati cercando di spostarli verso sinistra,⁹ mentre per reazione il rotore si sposti verso destra (rotazione antioraria).

Si osservi che con le correnti quasi quadre riportate nella figura 4, solo due fasi per volta (*fasi attive*) portano corrente, una positiva e l'altra negativa, uguale ed opposta alla prima. Ad ogni $\pi/3$ si presenta una commutazione della corrente, alternativamente positiva e negativa, da una fase alla successiva, secondo lo schema riportato nella tabella 1.

Il vettore spaziale delle correnti presenta dunque un movimento a scatti,¹⁰ che lo fa avanzare di 60° elettrici ad ogni commutazione, analogamente a quanto succede per il vettore di tensione di un invertitore trifase in onda quadra. Da qui la possibile catalogazione del motore come *macchina a fasi commutate*, per distinguere da quelle a campo magnetico rotante, e per ricordare che l'alimentazione viene ciclicamente commutata da una fase alla successiva secondo una sequenza prestabilita. Pertanto, a differenza del motore sincrono a magneti permanenti con *fem* e correnti sinusoidali, nel motore con *fem* e correnti quasi

⁹ \mathbf{u}_t rappresenta il vettore unitario tangente all'asse dei conduttori.

¹⁰ In base alla origine prescelta per le ascisse, il vettore di corrente parte dalla posizione $7\pi/6$, e avanza in senso antiorario.

Tabella 1: Generazione dei riferimenti di corrente in funzione della posizione.

	$\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right]$
i_a/I_N	0	-1	-1	0	1	1
i_b/I_N	1	1	0	-1	-1	0
i_c/I_N	-1	0	1	1	0	-1

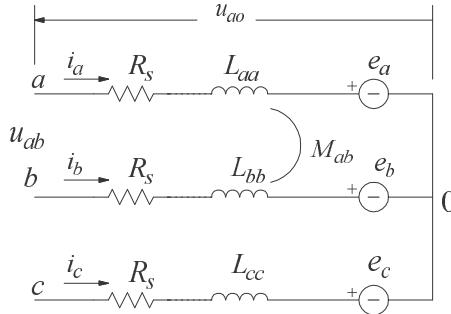


Figura 6: Circuito elettrico equivalente del BLDCM, connessione bipolare a stella.

quadre la posizione reciproca tra asse polare e vettore spaziale delle correnti statoriche, ovvero tra asse polare e distribuzione spaziale del campo magnetico prodotto da tali correnti, non è costante.

L'eventuale presenza di una anisotropia sul rotore sarebbe dunque causa di una coppia di riluttanza non costante, ma contenente una ondulazione con periodo di 60° elettrici (*ripple di coppia legato alla riluttanza*). Per evitare tale ondulazione è essenziale che il rotore abbia struttura magnetica isotropa, come nell'esempio della figura 2.¹¹

Data la forma delle grandezze elettriche coinvolte, il sistema di riferimento più adeguato per la descrizione matematica del BLDCM rimane quello stazionario, solidale allo statore. Il modello è ricavato nell'ipotesi che le correnti che si inducono nel rotore a causa dei campi armonici di statore siano trascurabili, come pure le perdite nel ferro (*iron losses*) e quelle addizionali (*stray losses*). Le equazioni sono ricavate per un motore trifase, anche se la procedura rimane valida per un numero di fasi qualunque. Il circuito al quale fare riferimento è riportato nella figura 6.

Nell'ipotesi che la struttura sia isotropa, le induttanze e le mutue induttanze non dipendono dalla posizione del rotore. Assumendo inoltre che i tre avvolgi-

¹¹ Si ricordi che la permeabilità magnetica relativa di un magnete permanente è pressoché unitaria.

menti siano realizzati con cura e che dunque formino un sistema simmetrico ed equilibrato, si può scrivere:

$$L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L \quad \text{e anche} \quad M_{ab} = M_{bc} = M_{ca} = M. \quad (1)$$

Il modello matematico è dunque espresso in forma matriciale come segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{ao} \\ u_{bo} \\ u_{co} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{Bmatrix} \\ &= R_s \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

L'assenza di filo neutro che collega il centro stella 0 degli avvolgimenti alla sorgente di alimentazione impone che la somma delle correnti entranti nelle fasi sia nulla. Con questa ulteriore ipotesi, la matrice delle induttanze nella (2) si semplifica in $\text{diag}(L - M)$ e può poi confluire nella seguente equazione vettoriale¹², dove si è posto $L_s = L - M$:

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + L_s \frac{d\mathbf{i}_s}{dt} + \mathbf{e}_s \quad (3)$$

La singola forza contro-elettromotrice (ad esempio, e_a) si può esprimere come

$$e_a(t) = \frac{d\lambda_{a,\text{mg}}}{dt} = \frac{d\lambda_{a,\text{mg}}}{d\vartheta_{\text{me}}} \frac{d\vartheta_{\text{me}}}{dt} = \frac{d\lambda_{a,\text{mg}}}{d\vartheta_{\text{me}}} \omega_{\text{me}} \quad (4)$$

Detto Λ_{mg} il valore massimo del flusso concatenato con ciascuna fase, dalla figura 4a si deriva subito la pendenza della variazione (lineare) del flusso rispetto alla posizione meccanico-elettrica ϑ_{me} :

$$\frac{d\lambda_{\text{mg}}}{d\vartheta_{\text{me}}} = \pm \frac{2\Lambda_{\text{mg}}}{2\pi/3} = \pm \frac{3}{\pi} \Lambda_{\text{mg}} \quad (5)$$

che, sostituita nella (6), permette di definire la costante di forza controelettromotrice k_e :

$$e_a(t) = \pm \frac{3}{\pi} \Lambda_{\text{mg}} \omega_{\text{me}} = \pm k_e \Lambda_{\text{mg}} \omega_{\text{me}} \quad k_e = \frac{3}{\pi}. \quad (6)$$

¹² Ai vettori spaziali. Si noti che le terne di grandezze coinvolte sono a somma nulla istante per istante, dunque non si perde di generalità nel passaggio, perché esse sono già prive di componente omopolare.

dove il segno dipende dalla posizione considerata. Naturalmente in alcuni tratti, quando il flusso concatenato con la fase a è costante, la relativa $fcem$ è nulla.

Si può ora ricavare la coppia elettromagnetica da un bilancio energetico, moltiplicando le righe della (2) per le rispettive correnti e per dt e sommando membro a membro¹³:

$$\begin{aligned} u_{ao}i_a dt + u_{bo}i_b dt + u_{co}i_c dt &= R_s(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2)dt + \\ &+ L_s i_a di_a + L_s i_b di_b + L_s i_c di_c + \\ &+ (e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c)dt \end{aligned} \quad (7)$$

Il primo membro rappresenta l'energia elettrica fornita in dt ; il primo e secondo termine a secondo membro rappresentano le perdite per effetto Joule negli avvolgimenti e l'energia magnetica immagazzinata nelle fasi di statore. Nell'ipotesi consueta di sistema conservativo (ovvero trascurando le altre perdite, nel ferro) l'ultimo termine equivale all'energia meccanica ceduta nell'intervallo dt , ovvero (in termini di potenza):

$$\tau \omega_m = e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c \quad (8)$$

Come appare dalla figura 4a, in ogni intervallo di $\pi/3$ vi sono solo due fasi attive, mentre la $fcem$ (e la relativa corrente) rimangono a zero. Ricordando la (6) e definendo I il valore massimo (e costante) della corrente di fase, la coppia si può esprimere come:

$$\tau = \frac{e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c}{\omega_m} = \frac{2k_e \Lambda_{mg} \omega_{me} I}{\omega_m} = 2p k_e \Lambda_{mg} I = k_\tau \Lambda_{mg} I \quad (9)$$

dove si è definita la costante di coppia $k_\tau = 2p k_e$. Tale costante, in generale, è legata all'entità del flusso prodotto dai magneti permanenti e dalle caratteristiche geometriche della macchina e dell'avvolgimento.

È ora più chiaro che l'alimentazione delle fasi nei tratti in cui è indotta una $fcem$ costante implica la necessità di una corrente costante (a tratti) per ottenere una coppia elettrodinamica (continuativa) generata costante.¹⁴

¹³ Naturalmente tenendo conto della sostituzione $L_s = L - M$.

¹⁴ È interessante osservare che con la forma d'onda quasi quadra ideale delle correnti della figura 4, non ha alcuna importanza l'andamento delle fem nel passaggio dal valore massimo positivo a quello negativo e viceversa, essendo sulle le correnti in tale intervallo. Se invece, come invece accade in realtà, i fronti delle correnti non hanno durata nulla, si hanno ripercussioni nella potenza istantanea, che si riflettono poi anche sulla coppia generata (*ripple di coppia*).

Estensione al caso di *fem* di forma qualunque

Le forze controelettromotrici istantanee possono essere derivate dalla figura 4a. Sono di tipo continuo a tratti, funzione della posizione del rotore. In generale, per *fem* di forma qualunque, si ha:

$$\begin{aligned} e_a &= f_a(\vartheta_{\text{me}})\omega_{\text{me}} \\ e_b &= f_b(\vartheta_{\text{me}})\omega_{\text{me}} \\ e_c &= f_c(\vartheta_{\text{me}})\omega_{\text{me}}, \end{aligned} \quad (10)$$

dove le funzioni f_a, f_b, f_c hanno la stessa forma di e_a, e_b ed e_c .¹⁵

Sostituendo le (10) nella (8) si trova l'espressione per la coppia elettromagnetica istantanea:

$$\tau = p[f_a(\vartheta_{\text{me}})i_a + f_b(\vartheta_{\text{me}})i_b + f_c(\vartheta_{\text{me}})i_c], \quad (11)$$

che può essere mantenuta costante sia mantenendo costanti le correnti opportune, come rappresentato nella figura 4a nel caso ideale, sia mantenendo costanti i prodotti $e \cdot i$ qualora le *fem* non fossero perfettamente costanti negli intervalli di interesse.¹⁶

1.3 IL CONTROLLO DI COPPIA

Controllare la coppia significa sostanzialmente controllare la corrente in modo sincronizzato con la posizione del rotore. Si può fare riferimento allo schema della figura 7, che si riferisce al caso ideale riportato nella figura 4.

A seconda della posizione del rotore, individuata in base ai segnali delle sonde Hall, va controllata una coppia di correnti uguali e di segno opposto, come già emerso nella figura 4. Il multiplexer (blocco MUX) sceglie, nella coppia di correnti, quella positiva¹⁷, e la pone in retroazione nell'anello di controllo

¹⁵ Va considerato che, in realtà, le *fem* non hanno spigli vivi, come usualmente si schematizza. Esse sono infatti le derivate dei flussi concatenati, che sono funzioni continue. Dunque le *fem* presentano spigli generalmente arrotondati.

¹⁶ È chiaro che in tal caso la costanza della coppia non può prescindere dalla capacità del controllo di corrente di seguire le variazioni della *fem*, dunque dalla sua dinamica. Inoltre, non valendo più l'ipotesi di costanza della *fem*, essa va memorizzata in apposite tabelle in funzione della posizione meccanico elettrica.

¹⁷ Il motivo è che il riferimento di corrente, con il suo segno, è indice della richiesta di coppia, *con lo stesso segno*, naturalmente. Il riferimento di corrente va confrontato con la corrente che, se positiva, produce coppia positiva e, se negativa, produce coppia negativa. Se la retroazione si basasse sulla corrente di segno opposto avrebbe luogo una retroazione positiva, con conseguente saturazione del controllore.

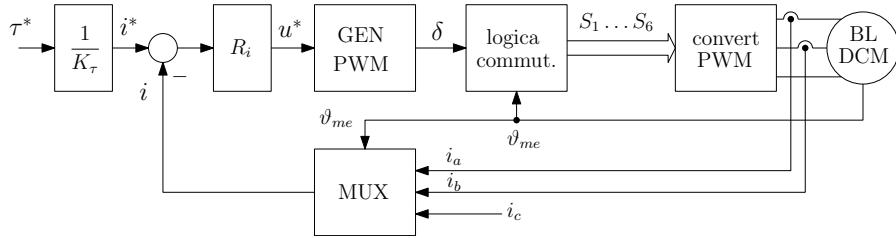


Figura 7: Controllo di coppia del BLDCM.

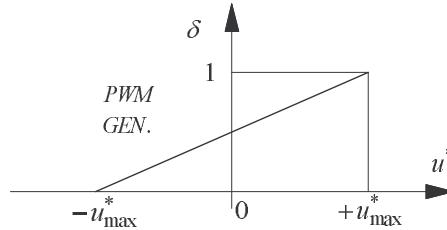


Figura 8: Caratteristica del generatore di PWM.

della corrente della figura 7. Il regolatore di corrente R_i richiede la tensione u^* necessaria ad annullare l'errore di corrente, agendo sul duty cycle δ di un chopper virtuale a quattro quadranti. La caratteristica del blocco di generazione della PWM è riportata nella figura 8.

Di fatto, il chopper è realizzato tramite un inverter di tensione trifase, in cui vengono comandati solo quattro interruttori per periodo di $\pi/3$ rad.el.; la scelta degli interruttori dipende dalle fasi che via via si vogliono alimentare, ed è dunque gestita tramite una opportuna logica di commutazione. Per comodità, si riportano nella figura 9 gli andamenti delle correnti in un periodo elettrico completo.

Si consideri ad esempio il periodo compreso tra $7\pi/6$ e $3\pi/2$: il controllo prevede un riferimento di corrente positivo per i_a e negativo per i_b . Gli interruttori interessati sono pertanto S_1 , S_2 , S_3 ed S_4 , che alimentano le due fasi a e b in serie. Questi quattro interruttori formano un chopper all'interno del convertitore trifase, che verrà pilotato secondo la caratteristica riportata nella figura 8. Il duty cycle si riferisce in questo caso alla coppia S_1, S_4 , mentre gli altri interruttori saranno comandati in logica negata.¹⁸ La tabella 2 riassume

¹⁸ Si presti attenzione al fatto che l'attribuire il duty cycle alla coppia S_1, S_4 significa controllare la corrente i_a , che è quella positiva nell'intervallo considerato. Se si comandasse con lo stesso duty cycle l'altra coppia di interruttori, si introdurrebbe un'inversione di segno (non voluta) nella catena di controllo, in quanto per δ crescenti la tensione al morsetto della fase a , rispetto a quello

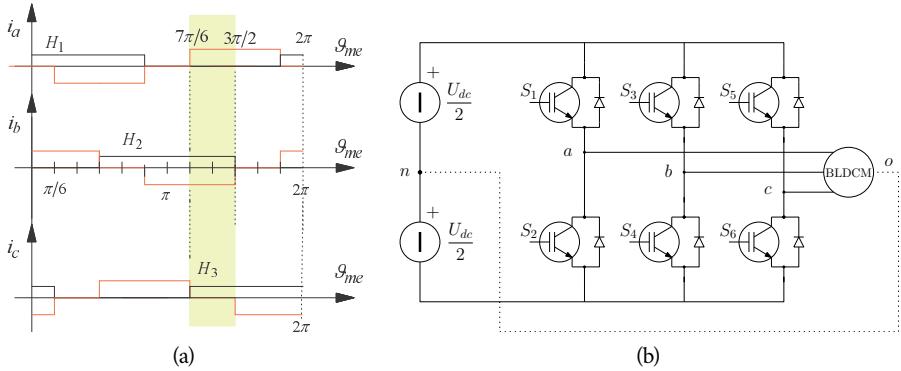


Figura 9: Andamento delle correnti di fase (a) e topologia (b) del convertitore (blocco iv della figura 7).

Tabella 2: Logica di commutazione in funzione della posizione del rotore.

	$[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$	$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$	$[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$	$[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}]$
δ	$S_3 S_6$	$S_2 S_3$	$S_2 S_5$	$S_4 S_5$	$S_1 S_4$	$S_1 S_6$
$\bar{\delta}$	$S_4 S_5$	$S_1 S_4$	$S_1 S_6$	$S_3 S_6$	$S_2 S_3$	$S_2 S_5$
H_1	1	1	1	0	0	0
H_2	0	0	1	1	1	0
H_3	1	0	0	0	1	1

le coppie di interruttori da comandare, in funzione della posizione. La tabella riporta anche lo stato dei segnali logici provenienti dalle sonde Hall, in modo da costituire utile riferimento per la sintesi della rete combinatoria che andrà a pilotare i singoli interruttori dell'inverter.

Dalla tabella 2 si evince, ad esempio, che l'interruttore S_1 debba essere pilotato con il duty cycle diretto nel periodo compreso tra $7\pi/6$ e $11\pi/6$, che è individuato univocamente dalla combinazione di segnali delle sonde Hall 011 e 001. Si può scrivere:

$$S'_1 = \overline{H}_1 H_2 H_3 + \overline{H}_1 \overline{H}_2 H_3 = \overline{H}_1 H_3 (H_2 + \overline{H}_2) = \overline{H}_1 H_3 = S''_1 \quad (12)$$

dove l'ultima uguaglianza rende conto del fatto che gli interruttori dello stesso ramo devono essere sempre entrambi aperti oppure pilotati in logica negata

della fase b , calerebbe invece di crescere come ci si aspetta. Considerare anche a quale coppia di interruttori debba essere riferito il duty cycle consente di evitare un ulteriore controllo sul verso delle correnti, appunto perché questo viene implicitamente considerato nella sintesi della rete combinatoria di controllo dell'inverter.

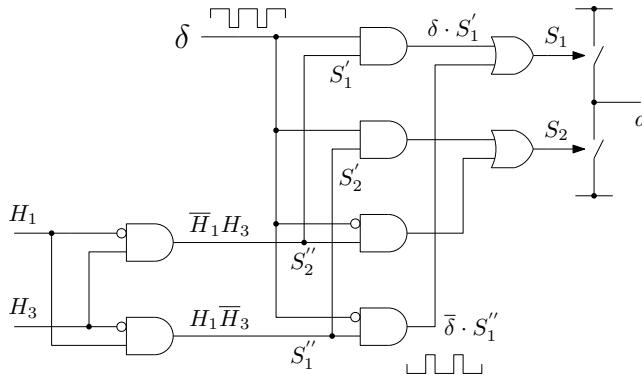


Figura 10: Schema della logica di commutazione.

tra loro. Analogamente, S_1 sarà "slave", ovvero comandato con il duty cycle negato, nel periodo compreso tra $\pi/6$ e $5\pi/6$, anch'essi individuabili tramite una opportuna combinazione dei segnali delle sonde Hall (100 e 110):

$$S'_2 = H_1 \overline{H}_2 \overline{H}_3 + H_1 H_2 \overline{H}_3 = H_1 \overline{H}_3 (H_2 + \overline{H}_2) = H_1 \overline{H}_3 = S''_1 \quad (13)$$

Lo schema del circuito combinatorio, relativo al ramo a dell'inverter, è riportato in Figura 10. Schema analoghi valgono per i pilotaggi degli altri due rami dell'inverter. Va ancora una volta sottolineato che le correnti di riferimento di Figura 9 sono rettangolari, con ampiezza di $2\pi/3$ per ogni semiperiodo, ma è impossibile ottenere effettivamente variazioni a gradino, perché le fasi del motore presentano carattere induttivo. Quindi vi sono tempi finiti di commutazione delle correnti, che le rendono approssimativamente trapezoidali invece che rettangolari. L'effetto è che la potenza elettrica, data dalla sommatoria dei contributi delle diverse fasi in successione, non sia più perfettamente costante, ed insorgono discontinuità ad ogni commutazione, dunque sei volte in un periodo elettrico. In letteratura sono presenti diverse soluzioni, basate su un opportuno controllo dell'anticipo della commutazione e/o su un rapido controllo di corrente, per ridurre il più possibile il ripple di coppia generato. Per quanto riguarda il progetto del regolatore di corrente, si può fare riferimento allo schema della Figura 11. Come si può notare, il BLDCM è stato idealizzato, ovvero non sono state considerate le commutazioni di corrente, per cui lo schema appare del tutto simile a quello di un motore in corrente continua. In realtà, le commutazioni agiranno come disturbi sia nel nodo di tensione sia in quello di corrente. Lo schema di Figura 11, nella sua semplicità, è però utile per un dimensionamento di massima del regolatore di corrente, che si è supposto

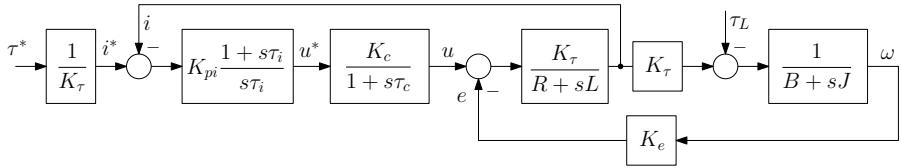


Figura 11: Schema per il progetto del regolatore di coppia.

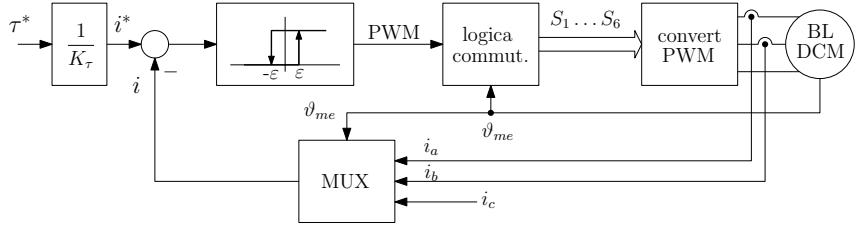


Figura 12: Schema di controllo della coppia, con regolatore ad isteresi.

di tipo proporzionale-integrale. La sintesi delle costanti K_{pi} e τ_i segue i metodi convenzionali del progetto degli azionamenti in corrente continua.

Lo schema proposto, realizzato in modo digitale, fissa la frequenza di campionamento e da questa scelta deriva l'ampiezza del ripple di corrente legato al funzionamento del chopper. In alternativa, per capovolgere le priorità, il regolatore PI di corrente ed il blocco GEN PWM possono essere sostituiti da un controllo ad isteresi, come riportato in Figura 12. Il vantaggio del regolatore ad isteresi è essenzialmente legato alla sua estrema prontezza e robustezza nei confronti delle variazioni parametriche. Per contro, il duty cycle δ , che nel blocco GEN PWM veniva calcolato sulla base di un tempo di commutazione costante e prefissato, nel regolatore ad isteresi risulta imposto dall'andamento dell'errore di corrente in relazione alla banda prescelta per il ripple (2ϵ). Non è dunque possibile imporre sia l'ampiezza del ripple della corrente controllata sia la frequenza delle commutazioni dell'inverter, e questo può provocare problemi di dimensionamento del convertitore e/o di prestazioni dell'azionamento legate ad eccessivo ripple di coppia.

1.4 CONFIGURAZIONI DI ROTORE

Come già accennato, i motori sincroni a magnete permanente possono essere considerati essenzialmente come la versione rovesciata di un motore in corrente continua a magnete permanente, ove i magneti permanenti siano inseriti nel rotore e l'avvolgimento di armatura sia invece stato spostato nello statore. Anche

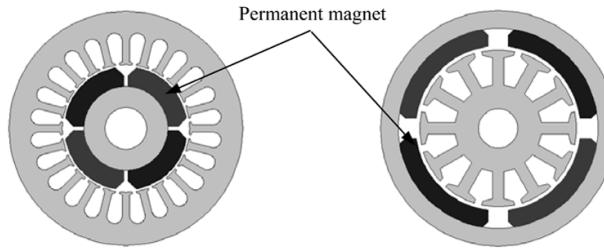


Figura 13: Rotore interno (sx) ed esterno (dx) (Courtesy of H-W. Lee, T-H. Kim and M. Ehsani, in *"Practical Control for Improving Power Density and Efficiency of the BLDC Generator"*, Kanagawa, Japan).

Tabella 3: Confronto tra topologie con rotore interno ed esterno

Caratteristica	rotore esterno	rotore interno
Momento d'inerzia	↑	↓
Coppia	↑	↓
Componenti costruttivi	↑	↓

per i BLDCM, come per i PMSM, esistono due versioni, con rotore interno o esterno, come rappresentato nella Figura 13. In entrambi i casi, va sottolineato, viene alimentata la parte fissa (dunque, ruota sempre la parte con i magneti permanenti), a differenza del motore CC in cui viene alimentata l'armatura tramite il sistema spazzole-collettore. Ciascuna delle due strutture riportate nella Figura 13 presenta vantaggi e svantaggi, riassunti per convenienza della Tabella 3. La Figura 14 mostra la diffusione delle due tipologie negli anni.

1.4.1 *Momento di inerzia*

Uno degli elementi fondamentali nella scelta del motore è la selezione del più opportuno rapporto tra inerzia del motore e quella del carico. Il rapporto consigliato è al massimo di 1 : 10 in sistemi meccanici rigidi che utilizzino cambi riduttori (*gear reducers*) o sistemi vite-madrevite (*worm gear*) e al massimo di 1 : 3 in sistemi meccanici che impieghino sistemi puleggia-cinghia¹⁹ (*belt and pulley*).

Un sistema con il rotore esterno ha un'inerzia maggiore, perché le dimensioni del rotore stesso sono maggiori. Esso dunque è vantaggioso, perché ha un

¹⁹ Queste indicazioni derivano da studi sulla difficoltà con cui il sistema di controllo riesce a stabilizzare il sistema.

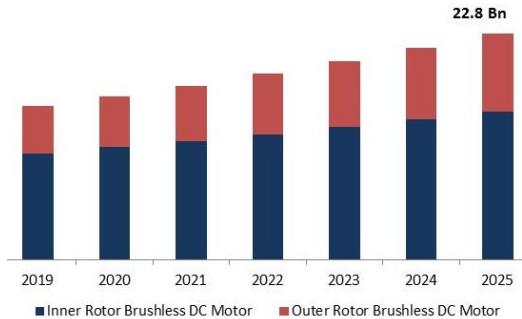


Figura 14: Previsione per la diffusione delle topologie a rotore interno ed esterno. Courtesy of KBV Research, <https://www.kbvresearch.com/brushless-dc-motor-market/>.

effetto stabilizzante dell’azione di controllo, nei sistemi in cui vi sia un notevole momento di inerzia riportato all’albero motore. D’altro canto, un motore a bassa inerzia consente di attuare rapide accelerazioni, ed è dunque da privilegiarsi nelle applicazioni, ad esempio in robotica, dove la rapidità di esecuzione dei movimenti rappresenta un aspetto cruciale, perché legato alla produttività della macchina azionata.

Un ulteriore vantaggio della configurazione a bassa inerzia (rotore interno) risiede nel migliore bilanciamento strutturale ottenibile, che porta ad operare silenziosamente ad alte velocità (*high speed smooth operations*) comprese tra i 9000 e i 12000 rpm. Per altro verso, la forza centrifuga che agisce sui magneti impedisce di superare i 15000 rpm, senza dover introdurre particolari sistemi di incamiciamento (*mechanical sleeving*). I motori a rotore esterno, sebbene più difficili da bilanciare, possono invece raggiungere i 30000 rpm, perché il contenimento della forza centrifuga è intrinseco nella struttura meccanica del rotore.

1.4.2 Coppia erogata

Nell’ambito dello studio della Progettazione Elettromeccanica, si dimostra che la coppia prodotta è proporzionale al volume della macchina al traferro (D^2L). Nel caso di rotore esterno, a parità di lunghezza L , il diametro al traferro D è maggiore, come si evince dalla Figura 13. Per un dato volume del motore, la configurazione con rotore esterno presenta dunque maggiore coppia d’uscita. Questo vantaggio è particolarmente importante ad alte velocità, quando la tensione di alimentazione (che ha dei vincoli sui valori massimi) è chiamata quasi

completamente a contrastare le f.e.m. indotte, e dunque si riescono a forzare correnti inferiori. Per contro, è più facile raffreddare un motore con rotore interno, perché la maggior parte del calore viene prodotto negli avvolgimenti di statore, che in tale struttura rimangono all'esterno. La situazione è poi influenzata dall'eventuale presenza di sistemi di ventilazione forzata.

1.4.3 *Numero dei componenti costruttivi*

Da questo punto di vista il motore con rotore interno offre un paio di vantaggi rispetto alla configurazione con rotore esterno. Quest'ultimo infatti richiede più componenti e una particolare attenzione alla calibratura, elementi che comportano minore affidabilità ed un costo maggiore. Dunque, se le considerazioni sull'inerzia e la velocità massima lo consentono, la scelta migliore è quella di una struttura a rotore interno.

1.5 TOPOLOGIE DI ALIMENTAZIONE DEI BLDCM

Le due topologie principali si riferiscono all'alimentazione con connessione a stella (*star bipolar connection*) e a triangolo. Della prima (riportata nella Figura 9b) occorre solo evidenziare che, essendo in serie, ciascuna fase riceve al più una tensione pari a metà di quella del bus in continua. Questo pone un limite di velocità del motore che, a parità di tensione del bus, è restrittivo rispetto alla connessione a triangolo (*wye bipolar connection*), illustrata nella Figura 15.

Le tre estremità degli avvolgimenti sono connesse tra loro, a formare un triangolo, i cui vertici sono connessi alla sorgente di alimentazione in continua (DC bus) tramite interruttori elettronici bipolari (indicati con $S_1 \dots S_6$). Con un opportuno pilotaggio, è possibile controllare in modo indipendente la corrente in ciascuna fase, posto che in ciascun istante conducano sempre e solo due fasi. La Tabella 4 riporta i dettagli dei segnali di pilotaggio, per ottenere correnti delle corrette polarità in ciascuna possibile coppia di avvolgimenti.

Si noti che per ciascuna configurazione degli switch, uno di essi è chiamato, a turno, a sopportare la somma delle correnti di fase alimentate in quel momento. Questo chiaramente è uno svantaggio rispetto alla configurazione a stella, in cui ciascun interruttore deve sopportare solo la corrente di fase.

Occorre infine ricordare che ciascuna configurazione è alimentata in parzializzazione, per ottenere la corrente opportuna a contrastare il carico. All'interno del singolo periodo di controllo il duty cycle stabilisce quando saranno comandati in chiusura gli interruttori alti dei rami e quando quelli in basso. La Tabella 4 indica solo i pilotaggi dei rami alti, che agiscono nel senso di far crescere la cor-

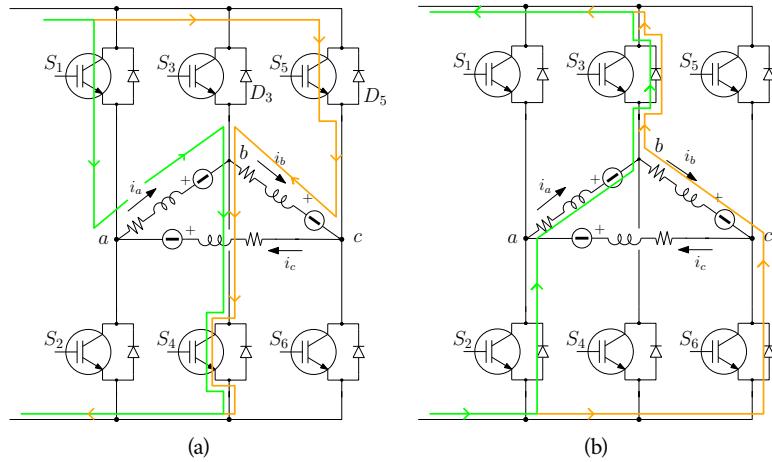


Figura 15: Alimentazione con connessione a triangolo, nel caso $i_a > 0, i_b < 0, i_c = 0$.
 A sinistra, durante la parte alta del ciclo di controllo (S_1, S_4, S_5). A destra, durante il ricircolo, quando sono comandati gli interruttori opposti. S_2 ed S_3 rimangono sempre aperti.

Tabella 4: Pilotaggi nella connessione a triangolo (1=chiuso, **1**=doppia corrente).

$[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$		$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$		$[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$		$[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$		$[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$		$[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}]$	
$i_a = 0$	0	$i_a < 0$	0	$i_a < 0$	0	$i_a = 0$	0	$i_a > 0$	0	$i_a > 0$	0
$i_b > 0$	0	$i_b > 0$	1	$i_b = 0$	1	$i_b < 0$	1	$i_b < 0$	0	$i_b = 0$	0
$i_c < 0$	1	$i_c = 0$	0	$i_c > 0$	0	$i_c > 0$	0	$i_c = 0$	1	$i_c < 0$	0
S_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
S_2	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
S_3	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
S_4	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
S_5	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
S_6	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0

rente in quel momento positiva. In tal caso, il percorso delle correnti è quello disegnato nella Figura 15a. Al contrario, quando sono pilotati gli interruttori bassi la fase con corrente positiva viene connessa ad una tensione del bus rovesciata tramite i diodi di ricircolo, come si vede in Figura 15b. In tal caso la corrente cala, per ottenere ²⁰ la corrente richiesta dal controllo di coppia (Figura 11).

²⁰ mediamente nel periodo di commutazione del chopper.

AZIONAMENTI CON MOTORI A PASSO

1.1 INTRODUZIONE

I primi moderni motori a passo furono sviluppati attorno al 1920, e furono inizialmente impiegati dalla marina inglese per il controllo remoto del posizionamento (*positioning devices*) dei cannoni e dei siluri. Come sarà evidenziato nei prossimi paragrafi, i motori a passo sono caratterizzati da un movimento a scatti regolari, corrispondenti ad un preciso angolo di rotazione, detto passo. Essi attuano una conversione elettromeccanica dell'energia che, a seconda della tipologia costruttiva, sfrutta il principio dei sistemi a riluttanza variabile (*variable reluctance motors*) o quello dei sistemi elettrodinamici (*permanent magnet step motors*). Una terza categoria (*hybrid step motors*) combina i due principi per sfruttare i vantaggi di entrambi.

Tra i vantaggi principali rispetto ad altri azionamenti che potrebbero avere impiego analogo emergono i seguenti:

1. possono compiere accurati posizionamenti senza alcun sensore di posizione o di velocità;
2. l'errore di posizione non è cumulativo, ovvero non si somma in successivi posizionamenti;
3. sono particolarmente semplici ed adatti al controllo digitale.

Il loro funzionamento prevede l'alimentazione in successione dei diversi avvolgimenti (fasi) disposti sullo statore. Nei primi prototipi, di tipo a riluttanza, tale successione era gestita da un commutatore manuale a manovella, che ad ogni giro completava un ciclo di alimentazione di tutte le fasi del motore. Con l'avvento del controllo digitale, negli anni 60, i motori a passo vennero applicati al controllo assi nelle frese a controllo numerico e alla movimentazione dei dischi di memoria ad alta capacità nei primi calcolatori. Anche la loro struttura elettromeccanica si arricchì di particolari volti a migliorarne le prestazioni, in termini sia di coppia prodotta (motori a passo elettroidraulici, strutture a sandwich) che di minimizzazione dell'angolo di passo, con le strutture attualmente definite multi-stack, il cui primo brevetto fu presentato nel 1919 ad Aberdeen (Scozia) da C.L.Walker. La migliore accuratezza ottenibile nel posizionamento e la crescente disponibilità di dispositivi elettronici di commutazione e di

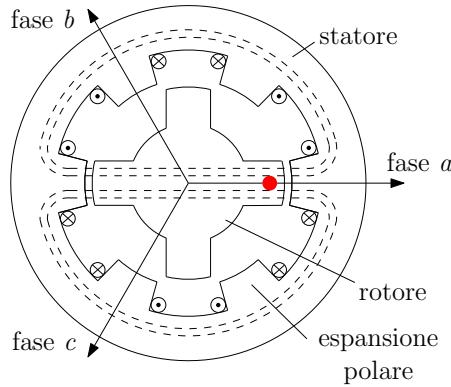


Figura 1: Struttura di un motore a passo a riluttanza.

controllo, sempre più piccoli ed affidabili, aprì loro la strada negli anni '70 per le applicazioni di precisione, ad esempio nei plotter e nelle stampanti seriali. Attualmente, i motori a passo trovano largo impiego nei servoazionamenti, per la loro peculiarità di consentire accurati posizionamenti in catena aperta. Per evitare perdite di passo, questi motori richiedono un alto rapporto tra la coppia massima producibile e inerzia delle parti mobili del carico (*high torque-to inertia ratio*), e una costante di tempo elettrica quanto più piccola possibile per poter considerare trascurabile il transitorio elettrico rispetto al periodo in cui viene effettuato un passo, fino ad elevate velocità di rotazione. Questo permette posizionamenti più rapidi e quindi migliori prestazioni dell'azionamento.

1.2 MOTORI A PASSO A RILUTTANZA VARIABILE

La sezione della struttura interna di un motore a passo a riluttanza variabile (VR), a tre fasi e quattro denti di rotore (*poles* o *teeth*), è schematicamente riportata nella figura 1. Statore e rotore sono realizzati con materiale ferromagnetico (acciaio dolce) e presentano marcata anisotropia radiale. Ciascuna fase di statore è composta da più avvolgimenti, disposti su coppie diametralmente opposte di espansioni polari (coppie polari); la figura 1 riporta il caso semplice di un avvolgimento trifase, con una sola coppia polare per fase. Il rotore presenta N_r salienze (denti) equidistanziati tra loro di un angolo α_r , detto *angolo di passo* di rotore:

$$\alpha_r = \frac{2\pi}{D_R} \quad (1)$$

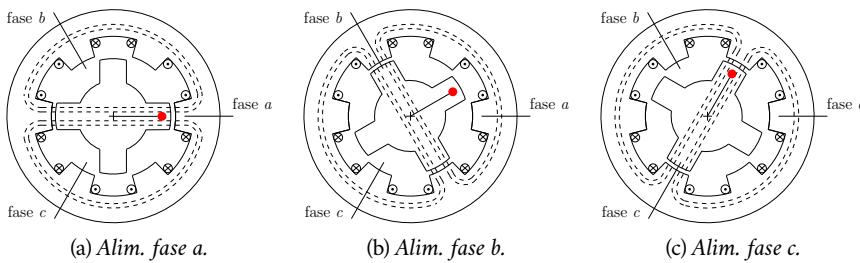


Figura 2: Posizioni del rotore in due passi successivi.

Il principio di funzionamento è il seguente: si supponga di essere nella condizione indicata nella figura 1, con la fase *a* alimentata con una corrente continua e costante, a vuoto. In condizioni di equilibrio, il rotore si posiziona in modo che una sua coppia di denti si trovi allineata con l'asse della fase alimentata, a cui corrisponde una configurazione di equilibrio stabile a minima riluttanza. Si tolga ora l'alimentazione alla fase *a*, e si alimenti la fase *b*. Sul rotore nasce una coppia che lo porta in rotazione in senso antiorario fino a far coincidere la coppia di denti di rotore più vicina alla fase *b* con l'asse della fase stessa, posizione alla quale corrisponde nuovamente la minima riluttanza del sistema. La rotazione compiuta dal rotore è detta angolo di passo α_p ed il corrispondente numero di passi/giro è:

$$N_p = \frac{2\pi}{\alpha_p} \quad (2)$$

Il numero di passi per giro di rotazione è un importante parametro dei motori a passo, in quanto indicativo della risoluzione angolare ottenibile durante il posizionamento di un carico meccanico direttamente collegato all'albero. Ripetendo le operazioni per la fase *c* si ha un ulteriore passo in avanti (in senso antiorario), come rappresentato nella figura 2.

Si può facilmente intuire come un ulteriore passo in avanti, ottenuto alimentando nuovamente la fase *a*, porti il rotore in una posizione analoga a quella della figura 2(a), ruotato rispetto a questa di un passo di rotore ($\pi/2$, in questo caso). Dunque alimentando ciclicamente le tre fasi di statore si ottiene una rotazione pari ad un passo rotorico. Il numero di passi necessari per completare un angolo giro e trovarsi in una posizione di rotore coincidente con quella di partenza risulta pertanto:

$$N_p = F_s \frac{2\pi}{\alpha_r} = D_r F_s \quad (3)$$

dove F_s è il numero di fasi di statore, α_r è il passo angolare dei denti di rotore e D_r rappresenta il numero di denti di rotore. Il periodo T_p della cadenza di commutazione delle fasi del motore (periodo di passo) determina la velocità di rotazione che, espressa in [rad/s] vale:

$$\omega_m = \frac{\alpha_p}{T_p} = \frac{2\pi}{N_p} f_p \quad (4)$$

dove $f_p = 1/T_p$ è detta frequenza di passo (*step frequency*).

Nello statore dei motori VR ciascuna fase può essere disposta in modo che i denti diametralmente opposti abbiano polarità magnetiche coincidenti od opposte, a seconda del convertitore che si desidera abbinare al motore.

Il traferro (*air-gap*) in aria tra denti di statore e di rotore viene tenuto quanto più piccolo possibile per avere, a parità di corrente di eccitazione e dunque di forza magnetomotrice, valori di induzione e quindi coppie più elevate. A parità di coppia resistente applicata, la disponibilità di elevata coppia massima produce anche un ridotto scostamento (*displacement*) rispetto alla posizione di allineamento a vuoto e dunque posizionamenti più accurati.

Un'altra caratteristica ricercata dai progettisti è quella di avere un piccolo angolo di passo, che consenta elevata risoluzione nel posizionamento. Il passo

$$\alpha_p = \pi/6 \text{ [rad]} \quad (5)$$

che si ottiene dalla (3) sostituendo i valori desumibili dall'esempio della figura 1 ($D_r = 4$, $F_s = 3$) non rappresenta naturalmente una soluzione soddisfacente, a meno che non si ricorra ad ingranaggi demoltiplicatori, che peraltro introducono attriti e giochi dagli effetti indesiderati.

Una prima intuitiva miglioria è costituita dall'aumento del numero dei denti di rotore, fino a quando la complessità meccanica non ne intacchi la robustezza o l'economicità della produzione. In alternativa, si può pensare di aumentare il numero di fasi di statore. Anche in questo caso, il limite alla fattibilità è costituito dallo spazio a disposizione per collocare gli avvolgimenti nello statore, mentre il costo dell'azionamento è pesantemente influenzato dal convertitore. Il numero di componenti di potenza del convertitore, infatti, è direttamente legato alle fasi da alimentare, il cui numero influenza anche i requisiti per il microprocessore di controllo o l'equivalente circuiteria hardware.

I denti sulle espansioni polari di statore hanno lo stesso passo di quelli di rotore. Essi sono realizzati in modo che quando il rotore ha i denti allineati con una fase (la fase 3, nell'esempio) gli altri siano sfasati di α_r/F_s , così che solo dopo 4 commutazioni la fase 3 torni allineata. L'angolo di passo è appunto

$$\alpha_p = \alpha_r/F_s = \frac{2\pi}{D_r F_s} \quad (6)$$

1.2.1 Caratteristiche statiche e dinamiche

Si consideri un motore a passo VR, alimentato con la sola fase a (figura 2 (a)). L'espressione della coppia in funzione della posizione dipende dall'andamento dell'autoinduttanza L_a . Indicando con ϑ l'angolo di rotazione del rotore rispetto all'asse reale (su cui si assume sia adagiato quello della fase a) in prima approssimazione¹ l'autoinduttanza vale:

$$L_a = L_0 + L_2 \cos(D_r \vartheta) = L_0 + L_2 \cos(4\vartheta) = L_0 + L_2 \cos(\gamma) \quad (7)$$

dove si è posto per praticità $\gamma = D_r \vartheta = 4\vartheta$. Si osservi che per il calcolo della riluttanza del circuito magnetico è ininfluente quale dente di rotore sia affacciato alla fase a e da questo discende la (8).

Osservando la figura 2 si desume che gli andamenti delle autoinduttanze delle fasi b e c siano del tutto analoghi a quello della fase a , con lo sfasamento reciproco di $2\pi/3$ legato alla distribuzione simmetrica delle tre fasi.

$$\begin{aligned} L_b &= L_0 + L_2 \cos(4(\vartheta - \pi/6)) = L_0 + L_2 \cos(\gamma - 2\pi/3) \\ L_c &= L_0 + L_2 \cos(4(\vartheta - \pi/3)) = L_0 + L_2 \cos(\gamma - 4\pi/3). \end{aligned} \quad (8)$$

La generazione della coppia elettromagnetica segue il principio dei sistemi a riluttanza; ipotizzando il sistema lineare e conservativo, per la fase a si scrive:

$$\tau_a = \frac{\partial W_m(i, \vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial(1/2 L_a i_a^2)}{\partial \vartheta} = -\frac{D_r}{2} L_2 i_a^2 \sin(\gamma) \quad (9)$$

dove W_m è l'energia magnetica associata alla fase a . Si può poi calcolare il contributo di ogni singola fase e sovrapporle gli andamenti, come illustrato nella figura 3. Le coppie relative alle fasi b e c sono le seguenti:

$$\tau_b = -\frac{D_r}{2} L_2 i_b^2 \sin(\gamma - 2\pi/3); \quad \tau_c = -\frac{D_r}{2} L_2 i_c^2 \sin(\gamma - 4\pi/3). \quad (10)$$

Focalizzandosi per il momento sulla sola fase a , si osserva che il punto di equilibrio stabile in assenza di coppia di carico è in $\gamma = 0$. Al crescere della coppia di carico, il rotore si disallinea fino a produrre la massima coppia statica (*holding torque*):

$$\tau_{ht} = \tau_a(-\pi/2) = -2L_2 i_a^2 \sin(-\pi/2) = \frac{1}{2} D_r L_2 i_a^2. \quad (11)$$

¹ Ovvero, considerando solo la periodicità principale e trascurando ogni effetto dovuto alla manifattura.

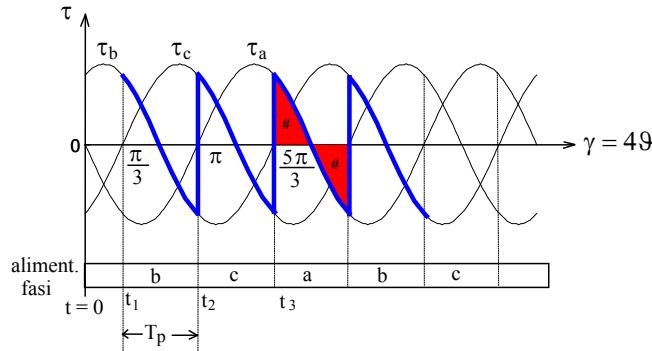


Figura 3: Curve statiche di coppia (singole fasi) per motore a passo VR.

La coppia di tenuta τ_{ht} può essere misurata sperimentalmente, in laboratorio, alimentando la fase *a* con la corrente nominale e trascinando lentamente il motore a passo con un motore esterno, misurando la coppia all'albero (tramite un torsiometro) in funzione dell'offset ϑ .

Oltre che dagli elementi costruttivi, la massima coppia statica dipende dal quadrato della corrente di alimentazione.

Con riferimento alla figura 3, si supponga di togliere all'istante t_1 l'alimentazione alla fase *a* e portandola alla fase *b*. In assenza di carico esterno, il motore si porterà nella nuova posizione di equilibrio stabile, per la quale la coppia prodotta sia nulla ($\gamma = 2\pi/3 \rightarrow \vartheta = 2\pi/(3D_r)$, nel caso in esame $\vartheta = \pi/6$).

All'istante t_2 si tolga l'alimentazione alla fase *b*, e si alimenti la fase *c*. Il rotore si sposterà nella successiva posizione di equilibrio stabile, relativa a $\gamma = \pi/3$. Si può osservare che effettivamente l'avanzamento ad ogni successiva commutazione delle fasi sia $\alpha_p = \pi/6$, come predetto dalla (5).

Si tratta ancora di un avanzamento discontinuo, a frequenza di passo molto bassa, che prevede che il motore si fermi dopo ogni passo. In tal caso, la risposta del sistema motore-carico (*single-step response*) è in genere molto oscillatoria, e questo è sicuramente uno svantaggio in applicazioni che richiedono rapidi ed accurati posizionamenti, perché occorre attendere lo smorzamento delle oscillazioni prima di procedere ad un nuovo movimento². Un rimedio consiste nell'aumentare l'attrito viscoso del motore, con appositi smorzatori (*dampers*). Essi però sono un problema alle alte velocità, dove offrono una coppia di attrito eccessiva. Una valida alternativa è costituita dagli smorzatori

² Acarnley, "Stepping motors - A guide to theory and practice", IET Engineering Series, The Institution of Engineering and Technology, London, UK, 2007.

inerziali accoppiati tramite attrito viscoso (*viscously coupled inertia dampers*, VCID). Si rimanda ai testi specialistici per approfondimenti.

Si passa ora ad analizzare il funzionamento dinamico del motore a passo VR, ovvero quando l'alimentazione in sequenza delle fasi ne produca una rotazione continua. Inizialmente, ci si riferirà ad un motore che ruota a vuoto, ovvero con coppia resistente nulla. Si formula l'ipotesi che la velocità di rotazione non sia elevata, in modo che il periodo di commutazione T_s sia grande rispetto al tempo necessario a ciascuna corrente di fase per portarsi al valore nominale³. In tal modo, si possono trascurare i transitori elettrici e si possono utilizzare ancora le curve di coppia rappresentate nella figura 3. Una cadenza omogenea di commutazione provoca un avanzamento a velocità costante del rotore. Pur in assenza di alcuna retroazione di posizione, il diagramma di attivazione delle fasi (riportato in basso nella figura 3) è sincrono con il movimento del rotore, anche se rispetto ad esso ha una fase variabile, che si adatta al carico applicato al motore.

Il caso della figura 3 si riferisce ad una coppia di carico nulla. Effettivamente, la sincronizzazione tra cadenza di alimentazione e posizione del rotore provoca una coppia ondulatoria a media nulla (l'area positiva coincide con quella negativa).

Si supponga ora di applicare una coppia di carico, senza alterare la cadenza di alimentazione, che naturalmente non ha modo di sapere cosa accade al carico (funzionamento a catena aperta). Dato che la coppia (media) prodotta dal motore è nulla, il bilancio di coppia produrrà un rallentamento (decelerazione) del motore, con progressivo sfasamento tra i due sistemi (cadenza temporale imposta dal controllore esterno e posizione del rotore). La nuova situazione è riportata nella figura 4.

Lo scorrimento tra essi terminerà quando la coppia media prodotta dal motore τ_m equilibrerà quella di carico. Essa si può valutare agevolmente con

³ Va tenuto presente che nella versione più semplice, quale quella esaminata, ciascuna fase è alimentata applicando una tensione senza alcun controllo di corrente; pertanto, la dinamica è legata alla costante di tempo elettrica della fase $\tau_a = L_a/R_a$.

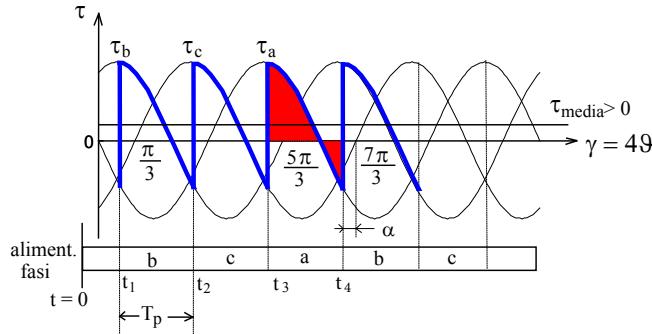


Figura 4: Funzionamento dinamico con coppia di carico non nulla.

riferimento al periodo di alimentazione della fase *a* compreso tra t_3 e t_4 . Detto α l'angolo di ritardo del rotore rispetto alla cadenza a vuoto, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \tau_m &= \frac{1}{2\pi/3} \int_{5\pi/3-\alpha}^{7\pi/3-\alpha} \tau_a(\gamma) d\gamma \\
 &= -\frac{3}{2\pi} 2L_2 i_a^2 \int_{5\pi/3-\alpha}^{7\pi/3-\alpha} \sin(\gamma) d\gamma \\
 &= \frac{3}{\pi} L_2 i_a^2 [\cos(7\pi/3 - \alpha) - \cos(5\pi/3 - \alpha)]
 \end{aligned} \tag{12}$$

Tramite la formula di prostaferesi si giunge a scrivere:

$$\tau_m = \frac{3}{\pi} L_2 i_a^2 [-2 \sin(\pi/3) \sin(2\pi - \alpha)] = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} L_2 i_a^2 \sin(\alpha). \tag{13}$$

La massima coppia media vale $1.65 L_2 i_a^2$, ovvero circa l'85% della coppia di tenuta e corrisponde allo sfasamento massimo ammissibile $\alpha = \pi/2$. Il funzionamento a massima coppia media è riportato per completezza nella figura 5.

Un ulteriore aumento della coppia di carico (con conseguente incremento dello sfasamento α) provocherebbe una diminuzione della coppia media prodotta, come si verifica immediatamente sostituendo $\alpha > \pi/2$ nella (13). Il motore perde il passo e si ferma (o viene trascinato, a seconda che il carico sia attivo o passivo).

C'è da tener presente che la coppia indicata nella (13) è un valore teorico, che nella pratica risulterà inferiore sia perché le commutazioni delle correnti di fase non sono istantanee, sia perché gli andamenti della coppia rispetto alla la corrente si basano su approssimazioni del primo ordine dell'andamento delle induttanze in funzione della posizione del rotore. Inoltre al crescere della velocità e del

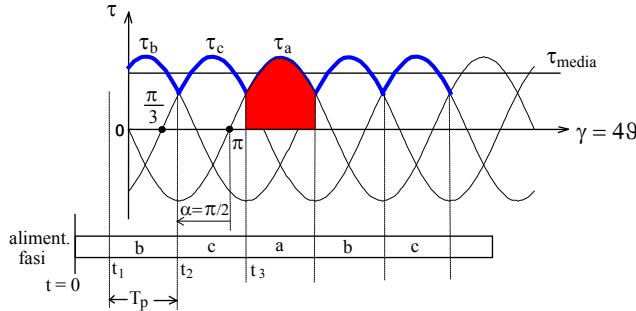


Figura 5: Funzionamento dinamico a massima coppia ammissibile.

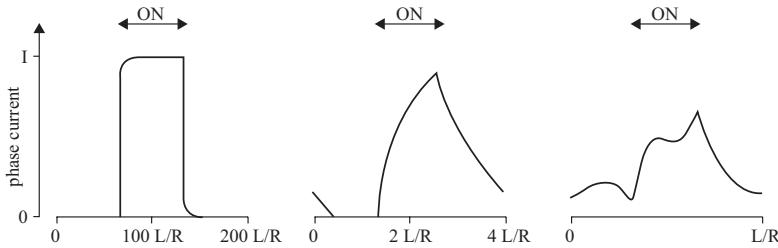


Figura 6: Deterioramento della corrente di fase al variare della frequenza di passo rispetto alla costante di tempo elettrica del motore [from Acarnley, "Stepping motors - A guide to theory and practice"].

carico cresce la forza controelettromotrice, che riduce la tensione applicata utile a produrre corrente di coppia.

1.2.2 Pull-out curve

La coppia massima che il motore riesce a sviluppare in movimento è detta coppia sincrona o *pull-out torque*. Essa è sempre inferiore alla massima coppia statica (*holding torque*) e dipende essenzialmente dalla velocità del motore. Quando la durata del periodo di passo T_s diventa dello stesso ordine di grandezza della costante di tempo elettrica del circuito RL di fase, la corrente non riesce a raggiungere il suo valore finale, perché nel frattempo sopraggiunge un nuovo comando di commutazione. A causa di questa riduzione di corrente effettiva la coppia di *pull-out* diminuisce, fino ad essere così piccola da non vincere più nemmeno gli attriti interni - e il motore si ferma (figura 6). La frequenza di passo alla quale questo accade prende il nome di *pull-out frequency*.

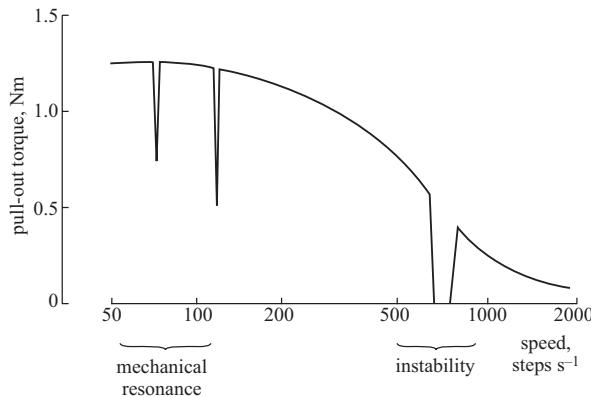


Figura 7: Curva di pull-out di un motore VR [*from Acarnley, "Stepping motors - A guide to theory and practice"*].

I cataloghi dei motori a passo riportano la curva della coppia di pull-out in funzione della frequenza di passo (*pull-out characteristic*) ed essa è effettivamente la curva più importante del data sheet. Un esempio è riportato nella figura 7.

La curva rappresenta la massima coppia che il motore può sviluppare ad una data velocità senza perdere il passo. I costruttori determinano tale curva accelerando il motore fino alla velocità di riferimento desiderata e poi incrementando il carico esterno fino a che il motore perde il passo (*missing steps*) o si ferma (*stalling*).

A basse velocità insorgono delle risonanze meccaniche che provocano una brusca diminuzione della coppia disponibile (*dips*). A velocità più alte possono esserci zone di instabilità legate a fenomeni elettromagnetici. Le cause precise sono state oggetto di molti studi in passato. Nonostante la complessità, il risultato al quale sono quasi unanimamente giunti è che tali instabilità avvengono quando la pulsazione angolare di alimentazione della fase (frequenza con la quale la fase viene eccitata, pari alla frequenza di passo divisa per il numero di fasi) coincide con il rapporto R/L . Nel caso dell'esempio della figura 1, vale cioè

$$2\pi \frac{f_p}{F_s} = \frac{R_a}{L_a} \quad (F_s = 3) \rightarrow \quad f_p = \frac{3}{2\pi} \frac{R_a}{L_a} \quad (14)$$

Un secondo importante risultato è che l'instabilità dipende moltissimo dall'attrito viscoso, e scompare completamente al di sopra di una soglia minima di attrito. Anche se queste conclusioni indicano la strada per risolvere il problema, al tempo stesso evidenziano una criticità, in quanto l'instabilità può insorgere inopinatamente a causa di piccole variazioni di carico sui cuscinetti, o delle proprietà lubrificanti legate alla temperatura di esercizio.

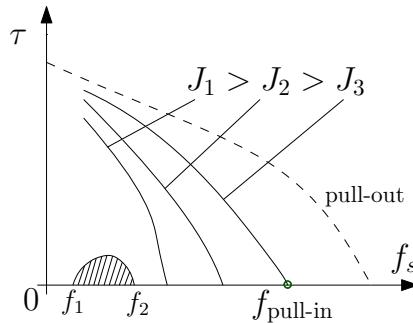


Figura 8: Curve di pull-in di un motore VR, al variare dell'inerzia.

1.2.3 Pull-in curve

Affinché il motore possa sviluppare la coppia di pull-out occorre portarlo gradualmente alla velocità richiesta, tramite opportune rampe di accelerazione. In altre parole, la commutazione delle fasi deve avvenire prima con passi lenti (T_s elevati) e successivamente con frequenza sempre maggiore, fino a raggiungere la velocità di lavoro secondo la (4).

Non sempre gli azionamenti sono così sofisticati; ragioni essenzialmente di costo prevedono che il motore possa avviarsi direttamente alla frequenza di passo desiderata, senza alcun algoritmo di gestione della rampa iniziale. A tal fine, il costruttore fornisce le caratteristiche di avviamento (*pull-in*), ovvero le curve che rappresentano la coppia alla quale il motore può essere avviato direttamente in funzione della frequenza di passo applicata.

Se la frequenza iniziale è troppo elevata in relazione al momento d'inerzia dell'albero motore ed alla coppia resistente, la coppia motrice non sarà in grado di accelerare tanto rapidamente il rotore da farlo sincronizzare con il campo magnetico di statore; di conseguenza, il motore perderà il passo.

Un esempio di caratteristiche di pull-in è riportato nella figura 8. Si osserva innanzitutto che posso esserci zone (ad esempio nel range $f_1 \dots f_2$) in cui l'avviamento non è consentito a vuoto, per l'instaurarsi di risonanze meccaniche. Inoltre, le curve di pull-in dipendono anche da com'è applicata la coppia di carico.

Se al motore a passo è applicato un peso, ad esempio come in una applicazione di sollevamento, la forza gravitazionale agisce sempre come una coppia resistente all'albero (τ_L).

Con riferimento alla figura 9, si supponga che sia alimentata inizialmente la fase *b*. Rispetto alla posizione di equilibrio a vuoto il rotore si posizionerà nel

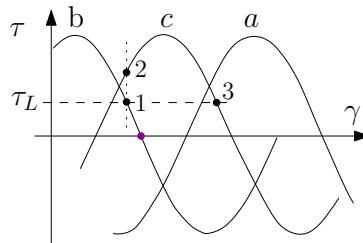


Figura 9: Funzionamento in pull-in con carico costante.

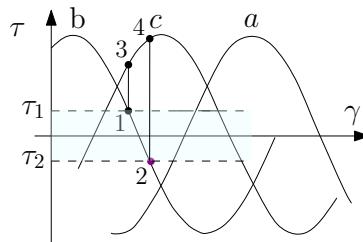


Figura 10: Funzionamento in pull-in con carico d'attrito statico.

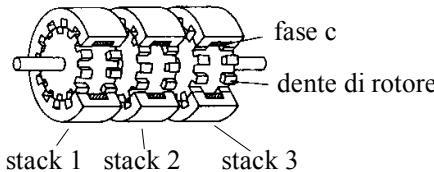
punto 1, che bilancia la coppia esterna applicata.

Quando la fase *b* viene spenta e viene alimentata la fase *c* la coppia prodotta dal motore sarà quella corrispondente al punto 2, così che il sistema avrà a disposizione la coppia netta ($\tau_2 - \tau_L$) per accelerare il carico inerziale. Essa deve essere sufficiente a spostare il rotore nel nuovo punto di funzionamento 3 prima che avvenga la commutazione successiva, dalla fase *c* alla fase *a*.

Il punto limite è l'intersezione tra le curve di coppia, quando non viene praticamente riservata alcuna coppia all'accelerazione inerziale. In prossimità di tale punto il motore si avvia solo per frequenze di passo estremamente piccole.

Un caso diverso è quello di un carico che all'avviamento si presenta come un attrito statico (*static frictional load*). Ad esempio, quando il motore a passo è connesso ad un carrello di una stampante. La posizione di arresto nella movimentazione precedente può essere in un punto qualunque all'interno dell'intervallo in cui la coppia del motore è inferiore a quella dell'attrito statico. Con riferimento alla figura 10, si suppone che le coppie comprese tra τ_1 e τ_2 siano inferiori all'attrito statico offerto dal carico, per cui qualunque posizione tra γ_1 e γ_2 può essere di equilibrio (con ovvio significato dei simboli).

Se si prevede che l'applicazione richieda una coppia d'avviamento maggiore di quelle deducibili dalle curve di pull-in, sarà necessario far partire il motore con una opportuna rampa di accelerazione, che non superi la caratteristica di

Figura 11: Struttura di un motore VR *multi-stack* (Portescap, USA).

pull-out.

1.3 MOTORI A RILUTTANZA VARIABILE MULTI-STACK

Per migliorare il compromesso tra risoluzione angolare e coppia disponibile nel tempo si sono sviluppate soluzioni alternative, con motori a più stadi (*multi-stack*). Tali motori sono suddivisi, lungo la dimensione assiale, in stadi indipendenti (*stack*), ciascuno associato ad un avvolgimento (fase) alimentato separatamente. Il numero di stack coincide dunque con il numero di fasi F_s e dei relativi circuiti di alimentazione. Nell'esempio della figura 11, il motore multi-stack è realizzato con uno statore a tre stadi. A differenza del motore a passo a singolo stack, rotore e statore hanno lo stesso numero di denti ($D_r = D_s$) e i passi angolari di rotore e di statore risultano

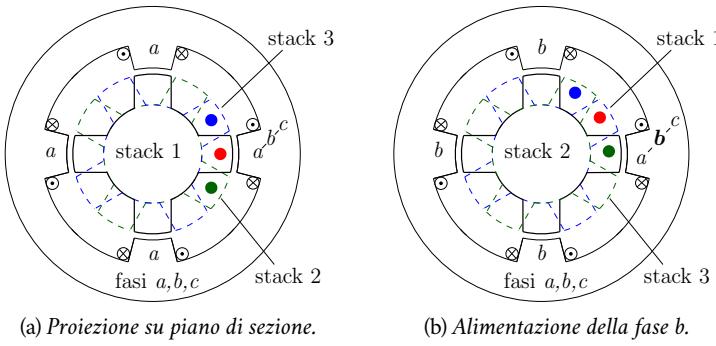
$$\alpha_r = \alpha_s = \frac{2\pi}{D_r}. \quad (15)$$

Gli stack di statore sono allineati, mentre quelli di rotore sono sfasati dell'angolo di passo

$$\alpha_p = \frac{\alpha_r}{F_s}. \quad (16)$$

Per comprendere in dettaglio il funzionamento, si può far riferimento alla figura 12 (a), che riporta la proiezione degli stack su un unico piano di sezione, nel semplice caso $D_r = D_s = 4$, quando sia alimentata la fase *a*. Di conseguenza, si allinea lo stack 1, ad essa abbinato.

L'allineamento riguarda tutti i denti di statore e rotore della fase attiva, secondo il principio dei sistemi a riluttanza, sviluppando di conseguenza una coppia maggiore di un VR a singolo stack. Quando si toglie l'alimentazione alla fase *a*, alimentando la fase *b* (figura 12 (b)) insorgerà una coppia di riluttanza nello stack 2, che è appunto affacciato alla fase *b*. Conseguentemente, il rotore si sposterà in senso antiorario di un passo. Una rotazione analoga, ma di verso opposto si otterebbe alimentando la fase *c*, che agirà sullo stack 3.

Figura 12: Funzionamento di un motore VR *multi-stack*.

I motori VR multi-stack sono impiegati nelle macchine utensili a controllo numerico per l'ottima risoluzione angolare che ne costituisce caratteristica peculiare.

1.4 MOTORI A PASSO IBRIDI

Per migliorare le prestazioni del motore a passo a riluttanza, soprattutto in termini di densità di coppia, sono stati studiati e realizzati motori ibridi (*hybrid motor*, [HY]) che combinano due principi di generazione di coppia, quella dei sistemi a riluttanza e quella dei sistemi elettrodinamici. Tali motori presentano una struttura complessa, con statore e rotore anisotropi e nel rotore un magnete permanente a flusso assiale.

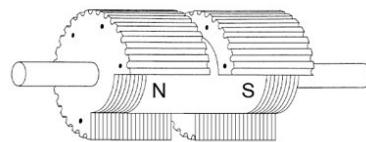
Il primo brevetto per questi motori è intestato a Feiertag e Donahoo e risale al 1952; il motore era descritto come un sincrono per applicazioni a bassa velocità e fu chiamato motore sincrono ad induzione. La sezione della struttura interna del più tipico motore a passo ibrido, a quattro fasi e 50 denti di rotore è riportato nella figura 13(a).

La struttura del rotore ha una struttura particolare. Il suo nucleo è costituito da un magnete permanente cilindrico, che produce un flusso assiale unipolare come mostrato nella figura 13(b). Su ciascuno dei poli del magnete permanente è allocata una struttura dentata, tipica del motore a riluttanza e i denti delle due sezioni sono disallineati tra loro di mezzo passo di dentatura, come evidenziato nella figura 14(a). Tali sezioni sono normalmente ricavate tramite tranciatura da lamierini al silicio, anche se non sono rare le realizzazioni in ferro al silicio pieno o sinterizzato.

La struttura dello statore, riportata nella figura 14(b) è praticamente identica

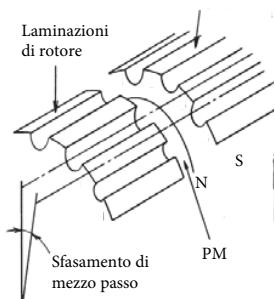


(a) Rotore, 50 denti.

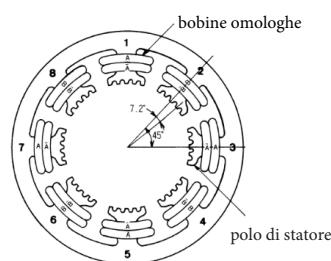


(b) Struttura del rotore.

Figura 13: Motore a passo ibrido.



(a) Rotore, denti sfalsati.



(b) Struttura dello statore.

Figura 14: Motore a passo ibrido a 4 fasi e 50 denti.

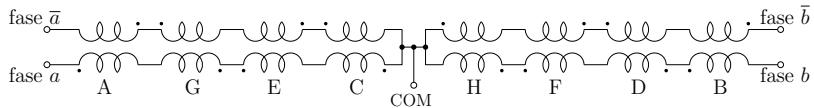


Figura 15: Schema di alimentazione delle fasi del motore a passo ibrido.

a quella di un motore a riluttanza (VR), con la differenza che mentre nel motore VR attorno a ciascun dente di statore trova posto l'avvolgimento di una singola fase, nei motori ibridi (HY) attorno ad ogni dente trovano posto conduttori di due fasi omologhe. Pertanto, ciascun dente non è più associabile ad una singola fase bensì ad una coppia di fasi, avvolte generalmente con versi opposti (avvolgimento bifilare) così che alimentate con la medesima corrente producano polarità magnetiche opposte.

Nel caso preso in esame, il motore in esame presenta 4 avvolgimenti (fasi) costituiti dalla serie di 4 bobine ciascuna; lo schema complessivo dell'avvolgimento è riportato nella figura 15. Come accennato poco sopra, su ciascun polo di statore trovano posto due bobine uguali ma avvolte in senso opposto, che appartengono cioè alla fase a e \bar{a} (oppure alla fase b e \bar{b}). In tal modo, i poli di statore (A, G, E, C) e (H, F, D, B) produrranno un campo magnetico con verso entrante nel rotore o uscente a seconda che siano alimentate con corrente positiva entrante rispettivamente le fasi (a , b) oppure (\bar{a} , \bar{b}).

Nei motori ibridi la coppia sfrutta il principio dei sistemi a riluttanza, rafforzata dall'azione elettrodinamica legata alla presenza non solo del campo magnetico prodotto dalle correnti di statore, ma anche di un campo magnetico costante prodotto da un magnete permanente collocato nel rotore. La generazione della coppia di rotazione può essere analizzato in dettaglio con l'ausilio della figura 16, che mostra le due strutture agli estremi del magnete permanente separate e "srotolate" per chiarezza espositiva.

Si assuma che il passo di rotore coincida con quello di statore, anche se a volte questa ipotesi non viene soddisfatta, per ridurre la coppia di tenuta e migliorare la precisione di posizionamento. La parte superiore della figura 16 mostra lo sviluppo lineare della sezione relativa alla polarità magnetica S , mentre la parte inferiore è relativo allo sviluppo della sezione dentata che sovrasta la polarità N , all'altra estremità del rotore.

A titolo d'esempio, si considerino in particolare i poli di statore associati alle bobine A e C, con avvolgimenti bifilari appartenenti alle fasi a , \bar{a} , e i poli associati alle bobine H e B, con avvolgimenti bifilari appartenenti alle fasi b , \bar{b} .

All'istante considerato sia alimentata la fase a . Per costruzione, l'avvolgimento del polo A produce un campo le cui linee sono entranti nel rotore, mentre il

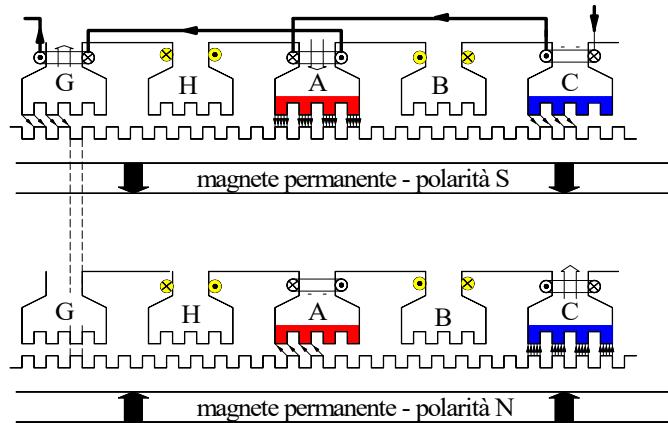


Figura 16: Posizione di equilibrio dopo l'alimentazione della fase *a*.

campo prodotto dall'avvolgimento del polo C ha verso opposto. Pertanto, nel traferro della sezione relativa alla polarità S i campi magnetici sono concordi, e si sommano come effetti sotto il polo A, mentre sono opposti e tendono a neutralizzarsi sotto il polo C.

Viceversa accade nell'altra sezione di rotore, quella che sia affaccia alla polarità N, con un campo che si rafforza sotto il polo C e si indebolisce sotto il polo A⁴.

Grazie allo sfasamento di mezzo passo di rotore tra le due sezioni (figura 14), la coppia che tende ad allineare nella sezione superiore il rotore con il polo A è concorde con quella che nell'altra sezione induce il rotore ad allinearsi con il polo C e globalmente esse imprimono una rotazione in senso antiorario al rotore. Si giunge così ad una situazione di equilibrio stabile, mostrata nella figura 16.

A questo punto si toglie l'alimentazione alla fase *a* e si alimenta la fase *b*, ovvero le bobine avvolte attorno ai poli H, B, D, F di statore. Sempre con riferimento alla figura 16 appare evidente che l'azione di attrazione del rotore verso sinistra sarà attuata dal polo H adiacente alla polarità S e dal polo B adiacente alla polarità N. La nuova situazione di equilibrio è mostrata nella figura 17.

È facile rendersi conto che il rotore si è mosso di 1/4 del passo rotorico. Considerando gli avvolgimenti bifilari alla stregua di due fasi separate, vale ancora la (16).

⁴ Va tenuto presente che, a differenza del rotore, lo statore ha una struttura omogenea e i suoi poli corrono paralleli per tutta la lunghezza del rotore.

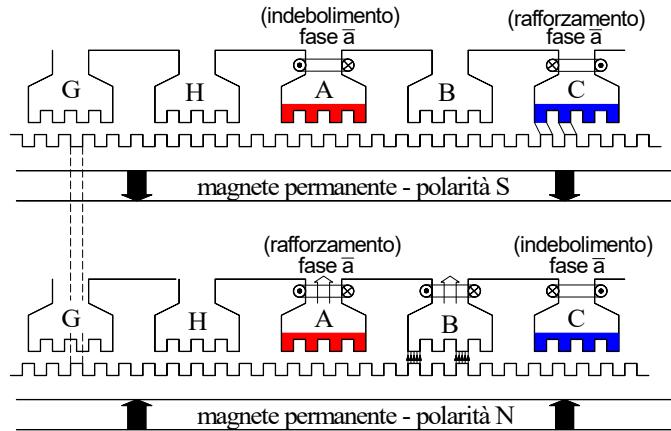


Figura 17: Posizione di equilibrio dopo l'alimentazione della fase *b*.

Osservando attentamente la figura 17, si comprende che per indurre un ulteriore passo avanti, ovvero un avanzamento (verso sinistra) del rotore, occorre alimentare nuovamente i poli A, C . . . , ma questa volta con il rafforzamento dei poli A sotto la polarità N e C sotto la polarità S, il contrario della situazione della figura 16. In altre parole, va alimentata la fase \bar{a} .

Un'ultima commutazione alla fase \bar{b} completa il ciclo, portando all'ultimo avanzamento di $1/4$ di passo del rotore, prima di ritrovarsi nella situazione iniziale della figura 16.

1.5 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Il progettista del sistema si trova di fronte a una scelta tra motore a passo ibrido (HY) e a riluttanza variabile (VR) e la decisione è inevitabilmente influenzata dall'applicazione. In altre parole, non è possibile dichiarare categoricamente che un tipo sia *migliore* in tutte le situazioni. I motori HY hanno ottima risoluzione angolare (tipicamente 1.8°), che può essere un grande vantaggio nei sistemi di posizionamento.

Un'indagine sui produttori di motori a passo ha confermato che la capacità di produrre una coppia per un dato volume del motore è maggiore nella soluzione ibrida rispetto a quella a riluttanza variabile, quindi le applicazioni ideali per motori HY sono quelle che richiedono piccolo passo ed elevata coppia in uno spazio di lavoro ristretto.

Va peraltro tenuto presente che quando gli avvolgimenti di un motore HY non sono eccitati, il flusso del magnete produce una piccola coppia di arresto

Caratteristiche	VR	HY
velocità	↑	-
coppia residua	↓	↑
curva di pull-out	-	↑
smorzamento	-	↑
inerzia rotore	↓	-
rendimento	-	↑
angoli tipici	24°, 15°	1.8°, 0.9°
costo	-	↑

Tabella 1: Confronto tra motori a passo a riluttanza variabile e ibridi.

(*detent torque*), che tende a mantenere il rotore in una posizione di equilibrio. Questo può essere un vantaggio per le applicazioni in cui la posizione del rotore deve essere preservata durante un'interruzione di corrente.

Al tempo stesso, la *detent torque* può costituire un disturbo (puntamento) nel funzionamento continuativo del motore (*slew region*) oppure quando il meccanismo azionato dal motore a passo preveda anche un posizionamento manuale.

I motori a riluttanza variabile presentano due importanti vantaggi quando il carico deve essere spostato di una distanza considerevole, ovvero preveda diverse rivoluzioni del motore. Innanzitutto, l'angolo di passo tipico di 15° rende necessarie meno commutazioni per lo spostamento. Tale riduzione implica dinamiche inferiori nelle correnti di eccitazione, che alla fine costituiscono il principale limite al tempo minimo necessario per percorrere una determinata distanza.

Un ulteriore vantaggio, evidenziato da specifici studi, è che i motori VR hanno un'inerzia meccanica del rotore inferiore rispetto al tipo ibrido, perché non c'è un magnete permanente sul suo rotore. In molti casi, l'inerzia del rotore rappresenta una percentuale significativa del carico inerziale totale sul motore e pertanto i motori VR consentono accelerazioni più rapide.

La tabella 1 riassume il confronto tra le due topologie.

FUNZIONAMENTO IN MICROSTEPPING

Un'evoluzione del metodo di pilotaggio half-step con controllo di coppia è basato sulla considerazione che, così com'è possibile ottenere un passo intermedio alimentando in contemporanea due fasi con corrente ridotta, allo stesso modo si può ottenere una serie ampia a piacere di posizioni intermedie tra due step (*microstepping*) inviando due correnti di diverso modulo nelle due fasi adiacenti: intuitivamente, il rotore si posizionerà tanto più vicino ad una posizione di equilibrio tanto maggiore sarà la corrente nella fase corrispondente rispetto a quella dell'altra. Nel caso di motore a passo a magneti permanenti, tal modo di operare porta le correnti di fase ad assumere un andamento che tende ad approssimare quello sinusoidale, con uno sfasamento di 90° tra le due fasi. Questo rende il funzionamento del motore passo-passo molto simile a quello di un motore sincrono a due fasi. In molte applicazioni, la tecnica del *microstepping* può migliorare le prestazioni dell'azionamento, perché permette di risolvere problemi di rumore e di risonanza, aumentando al tempo stesso la risoluzione del posizionamento. Per regolare la corrente servono naturalmente circuiti più complessi. In pratica, nelle applicazioni industriali si usano processori dedicati oppure appositi circuiti integrati. Il vantaggio, va ribadito, consiste nell'eliminazione del funzionamento a scatti, uno dei difetti più marcati dei motori a passo nelle applicazioni di precisione. Tra i limiti del funzionamento, vi sono la precisione del micro-passo, legata alla risoluzione dei convertitori A/D con i quali si acquisiscono le correnti di fase, e la frequenza del modulatore di tensione PWM, che deve mantenersi molto elevata rispetto alla frequenza di micro-passo F_p .

Sono di seguito esaminati in dettaglio i funzionamenti in *microstepping* dei motori a passo a riluttanza e a magneti permanenti.

2.0.1 *Motori a passo a riluttanza*

Si consideri un motore a passo a riluttanza trifase ($F_s = 3$), con 4 denti di rotore ($D_r = 4$) e 6 espansioni polari di statore. Il moto del rotore, secondo il verso positivo, si ottiene alimentando a coppie le fasi (a, b, c), secondo la sequenza $ab - bc - ca - ab - \dots$. Nel seguito, si prenderà in esame l'alimentazione della sola coppia ab , restando inteso che la stessa ripartizione delle correnti verrà poi

ciclicamente imposta alle coppie di fasi bc , ca e così via. Come sarà chiarito, l'alimentazione di ogni coppia di fasi parte sempre con l'alimentazione alla prima delle due fasi (ad esempio, la fase a quando si alimenta la coppia ab), per poi passare gradualmente, dopo n_p micro-passi, alla situazione simmetrica, con la fase b alimentata a piena corrente e la fase a non alimentata. Da lì, si proseguirà cedendo progressivamente parte della corrente alla fase c , diminuendo quella destinata alla fase b . Il numero di micro-passi che completano un giro meccanico è dato da:

$$N_p = n_p \cdot F_s \cdot D_r \quad (17)$$

La velocità di rotazione del motore dipende dalla frequenza di micro-passo F_p , ovvero dalla cadenza con la quale si imprimono diversi valori di riferimento alle due correnti di fase alimentate ad ogni istante. Essa è limitata superiormente dalla banda passante degli anelli di corrente, che nei motori a passo in funzionamento *microstep* devono essere necessariamente previsti. A sua volta, la banda passante è legata alle caratteristiche del convertitore e ai parametri del motore.

Per il motore in esame, le coppie relative alle fasi a e b si esprimono in funzione delle rispettive correnti i_a , i_b e della posizione ϑ del rotore come segue:

$$\begin{aligned} \tau_a(\vartheta) &= -2L_2 i_1^2 \sin(4\vartheta) = -2L_2 i_1^2 \sin(\gamma) \\ \tau_b(\vartheta) &= -2L_2 i_2^2 \sin(4\vartheta - 2\pi/3) = -2L_2 i_2^2 \sin(\gamma - 2\pi/3) \end{aligned} \quad (18)$$

dove si è posto $\gamma = 4\vartheta$ e le correnti sono normalizzate alla corrente nominale I_n del motore in funzionamento a singola fase. Supponendo lineare il sistema magnetico, la coppia risultante si ottiene dalla somma delle due, con il vincolo di mantenere costante le perdite nel motore, ovvero¹:

$$\sqrt{i_1^2 + i_2^2} = 1 \quad (19)$$

La coppia complessiva vale²:

$$\begin{aligned} \tau_{ab}(\vartheta) &= -2L_2 (i_1^2 \sin(\gamma) + i_2^2 \sin(\gamma - 2\pi/3)) \\ &= -2L_2 \left(i_1^2 \sin(\gamma) - \frac{1}{2} \sin(\gamma) - \frac{\sqrt{3}}{2} i_2^2 \cos(\gamma) \right) \\ &= 2L_2 (a \sin \gamma + b \cos \gamma) \end{aligned} \quad (20)$$

¹ Ricordando che le correnti sono normalizzate.

² Formula di sottrazione: $\sin(\gamma - 2\pi/3) = \sin \gamma \cos 2\pi/3 - \underbrace{\sin 2\pi/3 \cos \gamma}_{-1/2} - \underbrace{\sin 2\pi/3 \cos \gamma}_{\sqrt{3}/2}$

dove si sono posti

$$a = -\left(i_1^2 - \frac{1}{2}i_2^2\right) \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}i_2^2. \quad (21)$$

da cui

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{i_1^4 - i_1^2i_2^2 + \frac{1}{4}i_2^4 + \frac{3}{4}i_2^4} = \sqrt{i_1^4 - i_1^2i_2^2 + i_2^4}. \quad (22)$$

L'equazione di coppia si può scrivere allora come segue:

$$\tau_{ab}(\vartheta) = 2L_2\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\gamma + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\gamma\right) \quad (23)$$

Si ponga ora³

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\xi \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\xi \quad (24)$$

Sostituendo le (24) nella (23) si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau_{ab}(\vartheta) &= 2L_2\sqrt{a^2 + b^2}(\sin\xi\sin\gamma + \cos\xi\cos\gamma) \\ &= 2L_2\sqrt{a^2 + b^2}\cos(\gamma - \xi) \end{aligned} \quad (25)$$

L'equazione (25) si può interpretare dicendo che fissata una corrente i_1 ⁴, rimane determinata anche l'ampiezza della coppia a due fasi. Il punto di lavoro sarà determinato dall'angolo γ che realizza l'uguaglianza tra la coppia prodotta dal motore e la coppia di carico. La figura 18 mostra un esempio di coppia⁵ in funzione della posizione γ per la scelta di correnti $i_1 = i_2 = 1/\sqrt{2}$.

2.0.2 Generazione dei riferimenti di corrente

Senza perdita di generalità si può inizialmente affrontare il caso di carico applicato nullo (funzionamento a vuoto). Come già accennato, si tratta di calcolare le coppie di riferimenti di corrente che spostino il punto di equilibrio (in questo caso, relativo a γ | $\tau_{ab}(\gamma) = 0$) ad intervalli angolari equispaziati. Il punto di equilibrio (stabile) si individua imponendo l'ulteriore condizione di attraversamento delle ascisse con pendenza negativa della caratteristica di coppia generata dal motore:

$$\frac{d\tau_{ab}(\gamma)}{d\gamma} = -2L_2\sqrt{a^2 + b^2}\sin(\gamma - \xi) < 0 \quad (26)$$

³ Le posizioni sono lecite perché $-1 \leq \frac{a, b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$ e soddisfano alla prima relazione fondamentale della trigonometria.

⁴ e quindi determinata la corrispondente i_2 che rispetta il vincolo termico

⁵ Si assume $L_2 = 0.5$, così che l'ampiezza della coppia sia $\sqrt{a^2 + b^2}$.

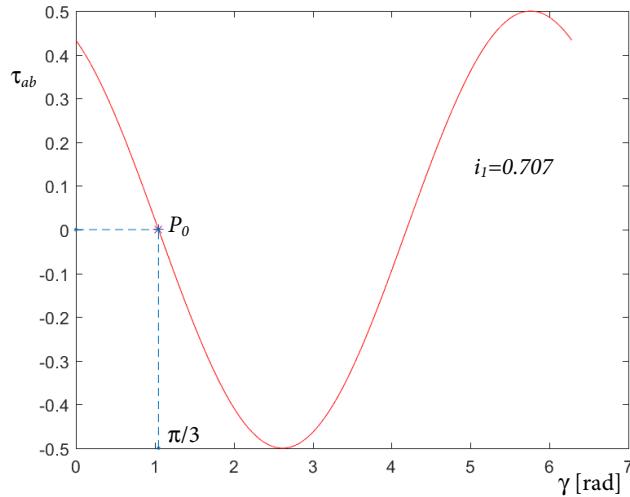


Figura 18: Coppia in funzionamento *microstep*, con $i_1 = i_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $L_2 = 0.5$.

È da notare che l'angolo ξ definito univocamente dalle (24) in base alle correnti i_1, i_2 identifica la posizione dove è massima la coppia prodotta dal motore, come appare evidente dalla (25). Nel caso della figura 18 risulta ad esempio

$$\begin{aligned}\xi &= \arctan_2\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ &= \arctan_2\left(\frac{-1/4}{1/2}, \frac{\sqrt{3}/4}{1/2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{27}$$

Si desidera ora determinare le correnti che portano ad una determinata posizione

$$0 \leq \gamma_0 \leq 2\pi \tag{28}$$

di equilibrio a vuoto. In base alla (25), la coppia τ_{ab} si annulla quando

$$\gamma_0 - \xi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{29}$$

ovvero per

$$\xi_0 = \gamma_0 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{30}$$

dove sono stati già selezionati i soli valori di ξ_0 che soddisfano la (26), corrispondenti a k pari.

Le equazioni (30) e (19) costituiscono un sistema nelle incognite i_1, i_2 che, opportunamente risolto, fornisce il risultato desiderato. Omettendo d'ora in poi l'ovvia periodicità di 2π , si può cominciare scrivendo:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} &\stackrel{\Delta}{=} \sin \xi_0 = \sin \left(\gamma_0 - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \gamma_0 \\ \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} &\stackrel{\Delta}{=} \cos \xi_0 = \sin \left(\gamma_0 - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \gamma_0 \end{aligned} \quad (31)$$

Scambiando il segno nella prima delle (31), il sistema di equazioni da risolvere risulta il seguente:

$$\begin{cases} -\frac{b_0}{a_0} = \frac{\sqrt{3}/2i_2^2}{i_1^2 - 1/2i_2^2} = \tan \gamma_0 & \gamma_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ i_1^2 + i_2^2 = 1 \end{cases} \quad (32)$$

Il sistema non introduce soluzioni spurie, perché γ_0 è fissato. Occorre però trattare a parte il caso $\gamma_0 = \pi/2 + k\pi$, per il quale la tangente risulta $\pm\infty$. Tale situazione si ha quando il denominatore della prima delle (32) si annulla. In tal caso, la soluzione è data direttamente dal sistema

$$\begin{cases} i_1^2 - 1/2i_2^2 = 0 \\ i_1^2 + i_2^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = 1/\sqrt{3} \\ i_2 = \sqrt{2/3} \end{cases} \quad (33)$$

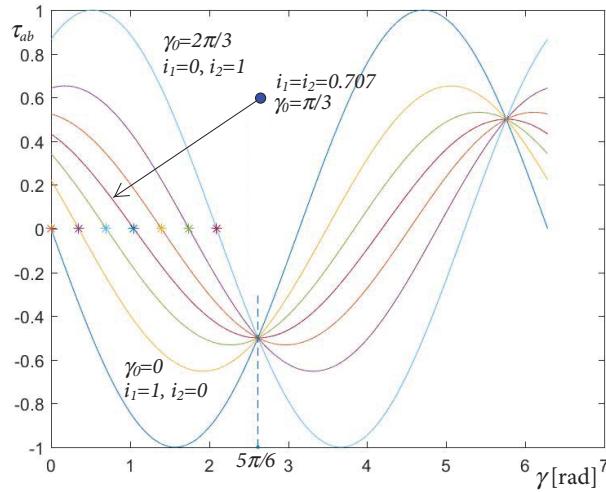
Proseguendo ora la soluzione del sistema (32) si scrive:

$$\frac{\sqrt{3}/2i_2^2}{(1 - i_2^2) - 1/2i_2^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{i_2^2}{(1 - 3/2i_2^2)} = \tan \gamma_0 \quad (34)$$

e quindi, con qualche semplice passaggio,

$$i_2^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sin \gamma_0}{\sin (\gamma_0 + \pi/6)} \quad \gamma_0 \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad (35)$$

Occorre verificare che $i_2^2 \leq 1$ affinché la condizione (19) sia soddisfatta nell'insieme dei reali. Imponendo tale condizione alla (35), risolvendo con i consueti mezzi la disequazione trigonometrica risultante e ricordando anche la condizione (28), si ottiene:

Figura 19: Curve di coppia per diverse posizioni di equilibrio ($L_2 = 1$).

$$0 \leq \gamma_0 \leq \frac{2\pi}{3} \quad (36)$$

Pertanto, è automaticamente verificata anche la condizione⁶ su γ_0 della (35), in quanto essa è esterna all'intervallo indicato dalla (36).

Nell'utilizzare la (35) per ottenere coppie di correnti di riferimento, si impongono posizioni di equilibrio crescenti ed equeispaziate all'interno dell'intervallo (36). La figura 19 mostra a titolo d'esempio l'andamento della coppia τ_{ab} per 6 valori di γ_0 , equeispaziati tra 0 e $2\pi/3$, dunque a micro-passi di 20° . Sostituendo gli estremi di tale intervallo nella (35) si ottengono le coppie di correnti

$$(\gamma_0 = 0) \quad \begin{cases} i_1 = 1 \\ i_2 = 0 \end{cases} \quad (\gamma_0 = 2\pi/3) \quad \begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = 1 \end{cases} \quad (37)$$

Per esempio, fissando $\gamma_0 = \pi/3$ si trova

$$i_2^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \quad (38)$$

⁶ È interessante notare che la condizione indicata nella (35) è reale, a differenza della condizione nella (32), che è artificiale in quanto introdotta dalla funzione tangente. Non ci sarebbe tale limite se si usassero separatamente le funzioni (31).

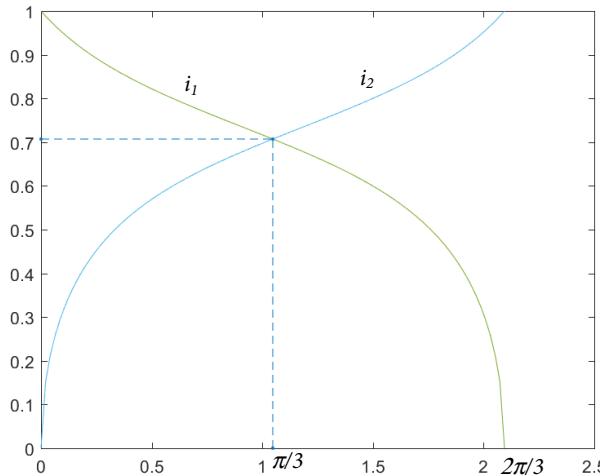


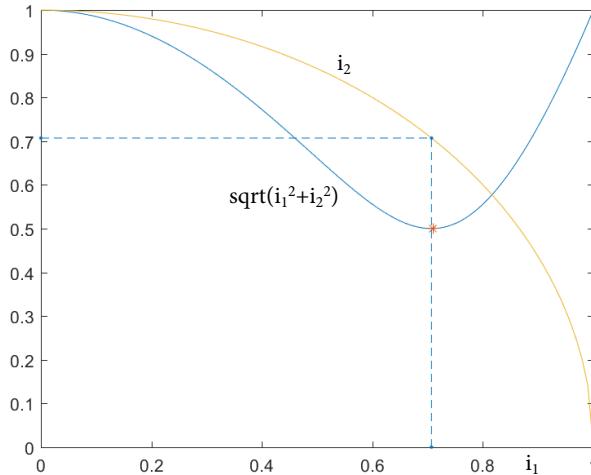
Figura 20: Riferimenti di corrente per il *microstepping* (x -axis: $\gamma_0, L_2 = 1$).

ovvero $i_1 = i_2 = 1/\sqrt{2}$, come evidenziato anche nella figura 18. La figura 20 mostra gli andamenti dei riferimenti di corrente che coprono in modo continuo l'intero intervallo di posizioni di equilibrio ($0 - 2\pi/3$). Occorre anche notare che, al variare della posizione di equilibrio, la coppia disponibile non è costante. Infatti, a partire dalle espressioni (25) e (26), si comprende come la coppia abbia un'ampiezza minima che dipende da $(a^2 + b^2)$ e che non è costante al variare di i_1, i_2 . Più in dettaglio, ogni funzione τ_{ab} ha un massimo e un minimo che la cui posizione dipende dalle correnti, che determinano ξ . Le correnti determinano anche l'ampiezza nei punti di massimo (e minimo). L'andamento dei valori di massimo, ad esempio, si può determinare imponendo

$$\frac{d(a^2 + b^2)}{di_1^2} = 0 \quad 0 \leq i_1^2 \leq 1 \quad (39)$$

Si trova facilmente che la condizione di minima coppia disponibile ($\tau_{ab} = 0.5$) si ha per $i_1^2 = i_2^2 = 1/2$. La figura 21 mostra l'andamento dell'ampiezza massima della coppia in funzione della corrente i_1 . Lo stesso grafico riporta anche l'andamento della corrente i_2 , che naturalmente descrive un tratto di circonferenza, stante la (19).

Si può concludere che la tecnica di *microstepping* ha sicuramente il pregio di aumentare la risoluzione angolare, ma al prezzo di un *derating* della coppia del motore che, essendo proporzionale alla corrente al quadrato, risulta la metà

Figura 21: Massima coppia disponibile durante il *microstepping* ($L_2 = 1$).

di quella disponibile nel funzionamento a singola fase (a parità di perdite per effetto Joule).

Esercizio: Sia $L_2 = 1$. Si determini la posizione di equilibrio effettivo quando viene impostata una coppia di riferimento di correnti $i_1 = i_2 = 1/\sqrt{2}$ e al motore a passo viene applicato una coppia di carico di 0.5. Rifare poi il calcolo con una coppia di correnti $i_1 = 1; i_2 = 0$ e dire se la variazione del punto di lavoro effettivo rispetto alla posizione di equilibrio a vuoto si mantiene inalterata o no, spiegandone le ragioni.

Dimostrazione. Nel caso di $i_1 = i_2 = 1/\sqrt{2}$ si calcola subito, in base alle relative definizioni:

$$\tau_{ab}(\vartheta) = 2 \underbrace{L_2}_{1} \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{0.5} \cos(\gamma - \underbrace{\xi_0}_{-\pi/6}) \quad (40)$$

e quindi, imponendo che la coppia prodotta uguagli quella di carico indicata dal testo del problema:

$$\cos(\gamma + \pi/6) \stackrel{!}{=} 0.5 \quad \rightarrow \quad \gamma_{eq1} = \pi/6. \quad (41)$$

Analogamente, nel secondo caso si ha

$$\tau_{ab}(\vartheta) = 2 \underbrace{L_2}_{1} \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{1} \cos(\gamma - \underbrace{\xi_0}_{-\pi/2}) \quad (42)$$

e quindi, imponendo che la coppia prodotta uguagli quella di carico indicata dal testo del problema:

$$2 \cos(\gamma + \pi/2) \stackrel{!}{=} 0.5 \quad \rightarrow \quad \gamma_{\text{eq2}} = \arccos(0.25) - \pi/2 = -0.2527. \quad (43)$$

Nei due casi, le posizioni di equilibrio – in base alla (30) – sono rispettivamente $\gamma_0 = \pi/3$ e $\gamma_0 = 0$. Gli scostamenti $\gamma - \gamma_0$ rispetto alla posizione di equilibrio valgono allora:

$$\pi/6 - \pi/3 = -0.5236 \quad \text{e} \quad -0.2527 - 0 = -0.2527. \quad (44)$$

Pertanto gli scostamenti *non* coincidono. Osservando la figura 19 e la discussione circa la non-costanza della coppia massima, questo risultato era atteso. Infatti, le caratteristiche di coppia sono diverse, ed in particolare *non parallele* tra loro, per cui lo scostamento necessario quando la coppia massima è bassa (primo caso, con correnti $i_1 = i_2 = 1/\sqrt{2}$) è *maggior* del secondo caso, ove un'alta coppia massima permette di raggiungere la stessa coppia motrice (pari a quella di carico) con uno scostamento decisamente inferiore.

□

2.0.3 Motori a passo a magneti permanenti

Si consideri un motore a passo bifase a magneti permanenti con una coppia polare di rotore e 4 espansioni polari di statore. Si assuma che la dipendenza della coppia elettromagnetica del motore originata da ciascuna fase alimentata possa essere descritta da una opportuna funzione sinusoidale della posizione ϑ del rotore.

È di interesse innanzitutto ricavare l'equazione della coppia nel caso le due fasi siano alimentate contemporaneamente con correnti normalizzate i_1 e i_2 , descrivendo il funzionamento in *microstepping* di tale motore. Si cercherà poi di ricavare il valore delle due correnti da imporre per ottenere un posizionamento del rotore a $\vartheta = \pi/6$. Si assume che il vincolo termico sia espresso dalla relazione $i_1^2 + i_2^2 = 1$.

Innanzitutto si può supporre isotropo il rotore, per cui non vi sono variazioni di flusso concatenato dovute a variazioni di riluttanza. La coppia generata insorge per variazione del flusso concatenato con gli avvolgimenti di statore e prodotto dai magneti permanenti di rotore (*sistema elettrodinamico puro*). Per il sistema rappresentato in figura 22, la coppia (per la fase *a*) si è visto valere:

$$\tau = -M_o i_1 i_2 \sin(\vartheta) \quad (45)$$

dove ϑ rappresenta l'angolo dell'asse del campo magnetico di rotore (dovuto in questo caso ai magneti permanenti) rispetto all'asse della fase, e i_1 è la corrente che produce il flusso ϕ .

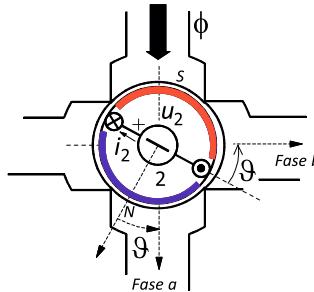


Figura 22: Sistema elettrodinamico - schema di principio.

Nel caso del problema, si può pensare che il rotore sia allineato concordeamente alla fase a quando $\vartheta = 0$ e che l'asse della fase b preceda quello della fase a di $\pi/2$ in senso antiorario, esattamente come in figura 22. Il campo di rotore è dunque allineato con l'asse della fase a per $\vartheta = 0$ e con quello della fase b per $\vartheta = \pi/2$. Si possono allora scrivere le espressioni delle coppie singolarmente generate dalle due fasi⁷:

$$\begin{aligned}\tau_a &= -K_\phi i_a \sin \vartheta \\ \tau_b &= -K_\phi i_b \sin(\vartheta - \pi/2) = k_\phi i_b \cos \vartheta\end{aligned}\quad (46)$$

e la coppia quando le due fasi sono contemporaneamente alimentate vale naturalmente

$$\tau_t = -K_\phi i_a \sin \vartheta + K_\phi i_b \cos \vartheta \quad (47)$$

Come ogni sistema elettrodinamico, il posizionamento dipende dal carico applicato, dato che la coppia è appunto collegata alla fase reciproca tra i due campi coinvolti (di statore e rotore).

2.0.4 Posizionamento a vuoto

La relazione tra le correnti e la posizione che conducono alla coppia nulla (in ϑ_0) si ottiene uguagliando a zero la (47):

$$\tau_t = -K_\phi i_a \sin \vartheta_0 + K_\phi i_b \cos \vartheta_0 = 0 \rightarrow i_b = i_a \tan \vartheta_0 \quad (48)$$

⁷ Si pone $K_\phi = M_0 i_2$, che dimensionalmente è un flusso. In questo caso è quello massimo prodotto dal magnete permanente che si concatena con ciascuna fase di statore, invece che dalla corrente i_1 , come si era considerato nel caso del sistema elettrodinamico di partenza.

Cercando un posizionamento in assenza di carico esterno (*funzionamento a vuoto*), il sistema che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} i_b = \tan \vartheta_0 i_a \\ i_a^2 + i_b^2 = 1 \end{cases} \quad (49)$$

che porta subito alla coppia di soluzioni:

$$\begin{cases} i_a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta_0}} = \pm \cos \vartheta_0 \\ i_b = \pm \sin \vartheta_0 \end{cases} \quad (50)$$

Di esse, solo quella che porta ad un attraversamento dell'asse reale della caratteristica di coppia con pendenza negativa è accettabile (*equilibrio stabile*⁸). Va dunque valutato il segno della derivata della (47) per le due diverse soluzioni:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_t}{dt} &= -K_\phi i_a \cos \vartheta_0 - K_\phi i_b \sin \vartheta_0 \\ &= -K_\phi \cos \vartheta_0 \cos \vartheta_0 - K_\phi \sin \vartheta_0 \sin \vartheta_0 = -K_\phi < 0 \end{aligned} \quad (51)$$

E' chiaro che l'altra soluzione va scartata. Nel caso del problema in esame, si pone poi $\vartheta_0 = \pi/6$, ottenendo:

$$\begin{cases} i_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ i_b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (52)$$

2.0.5 Posizionamento a carico nominale

La relazione tra le correnti e la posizione che conducono al massimo di coppia si ottiene uguagliando a zero la derivata della (47):

$$\frac{d\tau_t}{dt} = -K_\phi i_a \cos \vartheta_M - K_\phi i_b \sin \vartheta_M = 0 \rightarrow i_a = -i_b \tan \vartheta_M \quad (53)$$

Dunque, se si ipotizza un carico pari alla coppia massima, il posizionamento è regolato dal sistema:

⁸ L'altra soluzione, partendo da un punto qualunque diverso da $\pi/6$, provocherebbe il posizionamento a $\pi/6 \pm n\pi$ ($n = 1, 3, 5 \dots$); e se invece il rotore si trovasse già in $\pi/6$, si tratterebbe appunto di un equilibrio instabile.

$$\begin{cases} i_a = -\tan \vartheta_M i_b \\ i_a^2 + i_b^2 = 1 \end{cases} \quad (54)$$

e alla relativa coppia di soluzioni:

$$\begin{cases} i_b = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan \vartheta_M}} = \pm \cos \vartheta_M \\ i_a = \mp \sin \vartheta_M \end{cases} \quad (55)$$

E' da scegliere la soluzione $i_a = -\sin \vartheta_M$ e $i_b = \cos \vartheta_M$, che porge un valore positivo di coppia:

$$\tau_t = -K_\phi(-\sin \vartheta_M) \sin \vartheta_M + K_\phi(\cos \vartheta_M) \cos \vartheta_M = K_\phi > 0 \quad (56)$$

Valutando il segno della derivata seconda della (47) con $i_a = -\sin \vartheta_M$ e $i_b = \cos \vartheta_M$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tau_t}{dt^2} &= K_\phi i_a \sin \vartheta_M - K_\phi i_b \cos \vartheta_M \\ &= -K_\phi \sin \vartheta_M \sin \vartheta_M - K_\phi \cos \vartheta_M \cos \vartheta_M = -K_\phi < 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Pertanto la derivata prima della coppia totale nel punto ϑ_M è decrescente e la coppia ha un punto di massimo in corrispondenza alle correnti considerate. Si conferma che l'altra soluzione vada scartata. Nel caso particolare richiesto dal problema, il posizionamento a $\vartheta_M = \pi/6$ si ottiene con la seguente coppia di correnti:

$$\begin{cases} i_a = -\frac{1}{2} \\ i_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (58)$$

2.0.6 Posizionamento a coppia intermedia

Nel caso di coppia di carico $\tau_t = \tau_i$ intermedia tra i due valori sopracitati, occorre risolvere il sistema formato dalla (47), particolarizzata per $\vartheta_i = \pi/6$, e la condizione di equilibrio termico:

$$\begin{cases} \tau_i = -K_\phi i_a \sin \vartheta_i + K_\phi i_b \cos \vartheta_i \\ i_a^2 + i_b^2 = 1 \end{cases} \quad (59)$$

Dalla prima equazione, ponendo $k_i(\tau_i) = \tau_i/K_\phi$, si trova:

$$i_b = \frac{k_i(\tau_i) + i_a \sin \vartheta_i}{\cos \vartheta_i} \quad (60)$$

che sostituita nella seconda porge:

$$i_a^2 \cos^2 \vartheta_i + i_a^2 \sin^2 \vartheta_i + 2k_i i_a \sin \vartheta_i + k_i^2 = \cos^2 \vartheta_i \quad (61)$$

Risistemando si ottiene:

$$i_a^2 + 2k_i i_a \sin \vartheta_i + k_i^2 - \cos^2 \vartheta_i = 0 \quad (62)$$

che porta alla soluzione⁹ (per i_a):

$$i_a(k_i, \vartheta_i) = -k_i \sin \vartheta_i \pm \cos \vartheta_i \sqrt{1 - k_i^2} \quad (0 \leq k_i \leq 1). \quad (64)$$

Direttamente dalla (60) si ha anche:

$$\begin{aligned} i_b(k_i, \vartheta_i) &= \frac{k_i - k_i \sin^2 \vartheta_i + \cos \vartheta_i \sin \vartheta_i \sqrt{1 - k_i^2}}{\cos \vartheta_i} \\ &= k_i \cos \vartheta_i \pm \sin \vartheta_i \sqrt{1 - k_i^2} \end{aligned} \quad (65)$$

Ancora una volta, va scelta la coppia di correnti soluzione che porti ad un equilibrio stabile; si valuta dunque il segno della derivata della coppia totale in $\vartheta = \vartheta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_t}{dt} &= -K_\phi i_a \cos \vartheta_i - K_\phi i_b \sin \vartheta_i \\ &= -K_\phi (-k_i \sin \vartheta_i + \cos \vartheta_i \sqrt{1 - k_i^2}) \cos \vartheta_i \\ &\quad - K_\phi (k_i \cos \vartheta_i + \sin \vartheta_i \sqrt{1 - k_i^2}) \sin \vartheta_i \\ &= -K_\phi \sqrt{1 - k_i^2} < 0 \end{aligned} \quad (66)$$

Quindi la coppia di correnti selezionata è corretta e va scartata l'altra.

⁹ Il limite superiore per k_i deriva dal fatto che, alla massima coppia ($\tau_i = \tau_M$), la relazione (53) sostituita nella (59) porge

$$k_i(\tau_M) = \frac{\tau_M}{K_\phi} = \frac{i_b \sin^2(\vartheta_i) + i_b \cos^2(\vartheta_i)}{\cos \vartheta_i} \stackrel{(65)}{=} \frac{\cos \vartheta_i}{\cos \vartheta_i} = 1 \quad (63)$$

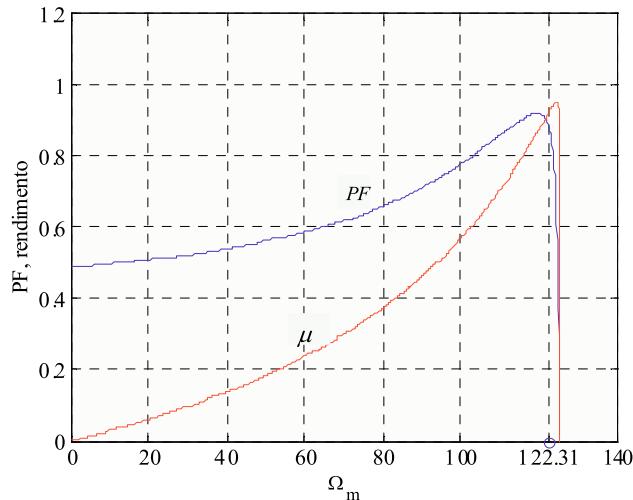


Figura 23: Fattore di potenza del motore asincrono.

1.10 IL CONTROLLO SCALARE DEI MOTORI ASINCRONI

1.10.1 *Introduzione*

Nella maggior parte degli azionamenti industriali con motore asincrono, le funzioni di comando sono limitate alla sua accensione e spegnimento e, in certi casi, all'avviamento assistito. Quando viene connesso direttamente alla rete la velocità meccanica è abbastanza costante, in quanto solitamente si utilizzano motori con caratteristiche meccaniche ripide (bassi scorrimenti nominali). Queste caratteristiche si ottengono con bassi valori di resistenza di rotore, e dunque anche basse perdite nel rame. È chiaro che un motore asincrono non controllato rappresenta l'investimento più economico, ma la scelta comporta comunque alcuni svantaggi. In molti casi, i motori asincroni sono associati al trasporto di fluidi (pompe, ventilatori, compressori). Spesso il motore è chiamato a lavorare a pieno flusso (e dunque piena potenza disponibile) per nulla. Il fattore energetico, che oggigiorno si traduce pesantemente anche in un fattore di costo e di marketing, è la principale ragione di migrazione verso gli azionamenti a velocità variabile (*ASD, Adjustable-speed drives*), caratterizzati da tempi di recupero dell'investimento sempre più ridotti (*short payback periods*). Un'altra ragione che spinge al controllo dei motori è mirata a migliorare la loro sensibilità ai buchi di tensione di rete. Anche in Paesi industrializzati spesso la qualità della tensione di rete può essere modesta. Dato che la coppia sviluppata dal motore asincrono dipende dal quadrato della tensione di alimentazione, un buco di tensione può

portare in stallo il motore, con intervento di relè che disconnettono il motore (*motor trip*). Queste interruzioni sono solitamente costose (si pensi ai difetti di trama nella lavorazione di un tessuto). Gli azionamenti con velocità controllata possono avere una ridotta sensibilità a temporanee diminuzioni di tensione (*enhanced ride-through capability*). Vi sono diverse modalità per il controllo di velocità dei motori asincroni. Alcune di esse consentono di far funzionare il motore in un campo ristretto di velocità, mentre altre richiedono di applicare il dispositivo di controllo all'avvolgimento di rotore, e dunque necessitano di rotore avvolto, e non a gabbia. Nel capitolo saranno illustrati i più semplici tipi di controllo. Il loro nome (tecniche “scalari”) nasce per contrapposizione con tecniche più moderne e complesse (“vettoriali”) che mirano ad orientare in modo opportuno i campi magnetici di rotore e statore. Nonostante le prestazioni dinamiche ridotte, la semplicità e dunque l'economicità delle tecniche scalari è la chiave del loro successo, perché si adattano a moltissime applicazioni a velocità variabile (semplici movimentazioni, pompe, elevatori). Si farà riferimento ad un motore i cui dati sono riportati nella tabella 1.

1.10.2 Avviamento assistito

All'avviamento, la velocità meccanica è nulla, dunque lo scorrimento s è unitario. Come si può dedurre dallo schema elettrico equivalente di figura 16, la corrente iniziale è molto maggiore della corrente nominale. Ad esempio, con i valori riportati nella tabella 1, l'impedenza equivalente per una fase, e la relativa corrente di avviamento ($s = 1$), risultano:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_t &= R_s + j\Omega_s L_{\sigma s} + \frac{1}{\frac{1}{R'_r + j\Omega_s L'_{\sigma r}} + \frac{1}{j\Omega_s L_{os}}} \\ &= 0,4445 + j0,8 \Omega \\ |\dot{I}_{start}| &= \left| \frac{\dot{U}_{s,N}}{\dot{Z}_t} \right| = \frac{230}{0,9148} = 251,42 A_{eff}\end{aligned}\quad (70)$$

Mentre con carico nominale ($s = s_N$) si ha

$$\begin{aligned}\dot{Z}_t &= R_s + j\Omega_s L_{\sigma s} + \frac{1}{\frac{1}{R'_r + j\Omega_s L'_{\sigma r}} + \frac{1}{j\Omega_s L_{os}}} \\ &= 5,2 + j2,6 \Omega \\ |\dot{I}_N| &= \left| \frac{\dot{U}_{s,N}}{\dot{Z}_t} \right| = \frac{230}{5,82} = 39,5 A_{eff}\end{aligned}\quad (71)$$

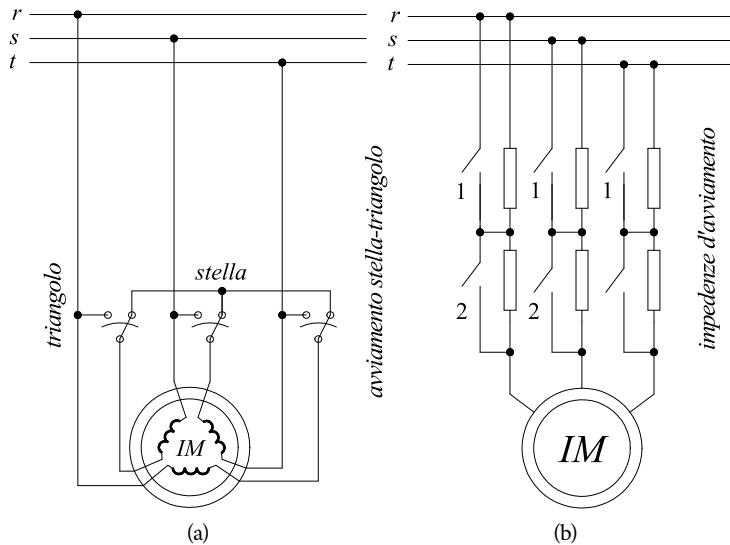


Figura 24: Avviamento assistito - prime opzioni.

Nel motore dell'esempio, la corrente di avviamento risulta più di 6 volte la corrente nominale. Per motori di piccola taglia questo solitamente non rappresenta un problema, e possono essere avviati direttamente collegati alla rete. Al contrario, motori di grossa taglia (specialmente se pilotano carichi con elevata inerzia) devono necessariamente prevedere una partenza controllata (*assisted starting*). Vi sono essenzialmente quattro metodi, riportate nelle figure 24 e 25.

Il primo tipo di avviamento è il cosiddetto *avviamento stella-triangolo* (si veda la figura 24a). In questo caso, gli avvolgimenti di statore devono essere completamente accessibili. Il motore, costruito per funzionare in marcia normale collegato a triangolo, è inizialmente collegato a stella, così che ogni fase viene temporaneamente alimentata con una tensione $\sqrt{3}$ volte inferiore. Dopo l'avviamento, una terna di interruttori viene utilizzata per commutare (manualmente o automaticamente) verso una configurazione a triangolo.

Il secondo tipo di avviamento, riportato nella figura 24b e figura 25a, è l'avviamento tramite controllo dell'ampiezza della tensione di alimentazione. Una semplice modalità di controllo di un motore asincrono è tramite la variazione della tensione di alimentazione, come si evince dall'osservazione delle formule di coppia (65), scorrimento di coppia massima (66) e coppia massima (67).

Si può constatare che, a parità di velocità di rotazione e pulsazione di alimentazione, la coppia a regime risulta proporzionale al quadrato della tensione

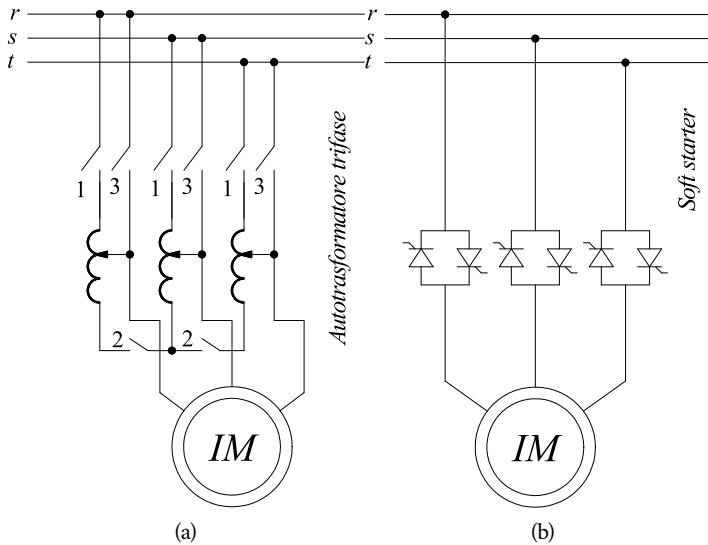


Figura 25: Avviamento assistito - alternative.

di alimentazione, mentre lo scorrimento di coppia massima sT_{max} non ne sia influenzato. Per questo la variazione della tensione statorica modifica l'ordinata della caratteristica meccanica coppia-velocità, ma non il suo andamento, riportato nella figura 26 per il motore di figura 1, al variare della tensione di alimentazione.

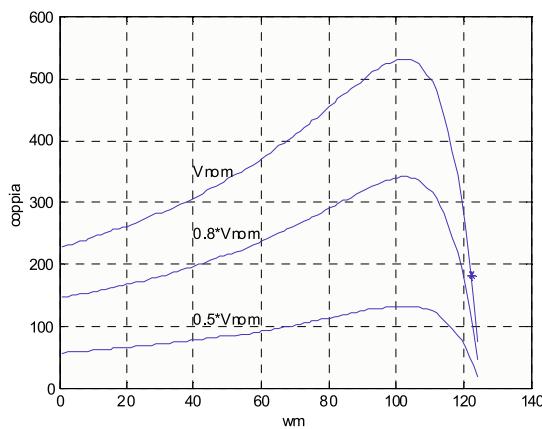


Figura 26: Caratteristiche meccaniche al variare della tensione di alimentazione (*=punto di funz. nominale del motore).

Queste caratteristiche dimostrano che le riduzioni della tensione di alimentazione del motore, rispetto al valore nominale, non esercitano alcuna influenza sulla velocità a vuoto del motore, che rimane sempre prossima alla velocità di sincronismo Ω_s .

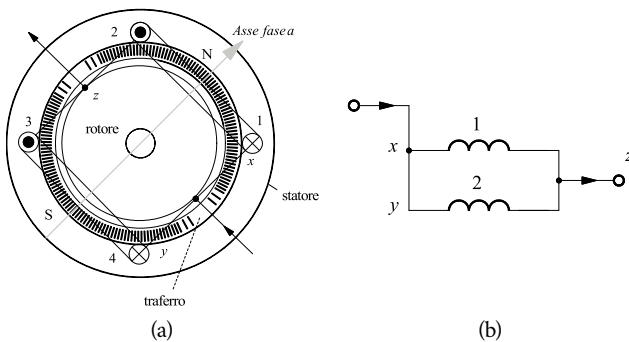
Un primo semplice metodo per ottenere variazioni (a gradino o continue) della tensione di alimentazione è tramite l'inserzione di opportune reattanze variabili poste in serie alle fasi di alimentazione (figura 24b). Per ottenere un avviamento a corrente ridotta, il motore presenta inizialmente tutte le reattanze inserite. Al crescere della velocità, le impedenze vengono cortocircuitate, chiudendo prima i contatti "1" e poi i contatti "2".

Un'alternativa consiste nell'*avviamento tramite autotrasformatore*, con relè temporizzati (figura 25a). L'avviamento a tensione (e dunque corrente) ridotta si ottiene inizialmente con gli interruttori "1" e "2" chiusi, lasciando aperti gli interruttori "3". Dopo un tempo prestabilito, i contatti "3" vengono chiusi, e "1" e "2" aperti, realizzando il collegamento diretto con la rete di alimentazione e sconnettendo al tempo stesso l'autotrasformatore. Anche in questo caso, come nel precedente, l'iniziale elevata impedenza equivalente di fase limita la corrente di avviamento in modo sostanziale.

Un metodo più moderno di avviamento consiste nel variare la tensione efficace applicata allo statore del motore, agendo sui ritardi di innesto dei tiristori (SCR) di un variatore a c.a., detto *soft-starter* (figura 25b). Durante l'avvio, i tiristori sono pilotati con un angolo di parzializzazione che decresce in rampa, in modo da fornire una tensione via via crescente al motore. La pendenza della rampa può essere interrotta momentaneamente se la corrente di linea supera quella desiderata.

Generalmente, comunque, si passa alla conduzione piena dopo un intervallo di tempo prefissato. Per aumentare l'efficienza dell'azionamento, spesso (a regime) gli interruttori statici sono by-passati tramite opportuni teleruttori, per evitare le perdite di conduzione ad essi collegate. Va considerato che durante l'avviamento sia le tensioni, sia le correnti, risultano distorte e questo crea coppie armoniche indesiderate. Infine, nelle applicazioni di piccola potenza agli SCR si possono sostituire triac. Questa configurazione costituisce anche il mezzo più economico per ottenere le variazioni della velocità di talune macchine operatrici, azionate da motori asincroni con rotore in cortocircuito.

In confronto con le tecniche di partenza diretta, le tecniche sopra illustrate naturalmente riducono la coppia di spunto. In alcuni casi, ad esempio in caso di necessità di vincere l'attrito di primo distacco, questa riduzione può essere svantaggiosa. Si deve per essi ricorrere ad azionamenti più complessi, che consentono di tenere controllata in ogni momento la coppia prodotta.

Figura 27: Connessione con $p = 1$.

1.10.3 Variazione della velocità tramite commutazione del numero di poli

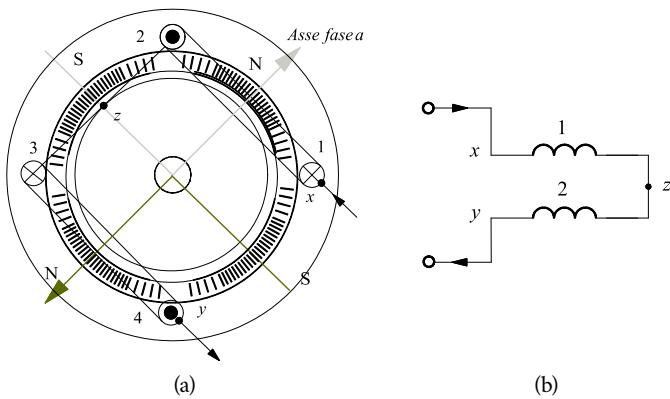
La velocità meccanica del motore, per una data frequenza fissa di alimentazione si può esprimere come

$$\Omega_m = \frac{\Omega_s(1-s)}{p} = 2\pi \frac{1-s}{p} f_s \quad (72)$$

A parità di condizioni di carico, e dunque di scorrimento s , si può ottenere una variazione della velocità commutando, tramite un commutatore elettromecanico, l'alimentazione di statore su un avvolgimento con un diverso numero di coppie polari. Data la difficoltà di costruire motori con più avvolgimenti statorici, il metodo si limita a due avvolgimenti ($p = 2, 4$ o $4, 8$) per avere il funzionamento a due velocità nel rapporto 2:1. Esistono anche rapporti 4:6 e 6:8, con motori di potenza fino ad alcune centinaia di kW (per motori a due velocità) e qualche decina di kW (per motori a tre velocità). È chiaro che le variazioni di velocità che si ottengono sono a gradino, dunque per particolari applicazioni, come ad esempio le centrifughe nelle macchine lavatrici. Il tema degli avvolgimenti di statore è vasto, ed eccede gli scopi di queste note. Lettori interessati all'argomento possono riferirsi alla letteratura tecnica specifica¹⁶. Di seguito, verrà analizzato solo un esempio di cambio di numero di poli, da 2 a 4, riportato nelle figure 27 e 28.

Si tratta di un avvolgimento (illustrato per la sola fase a) a 2 bobine, che può produrre una distribuzione sinusoidale di induzione al traferro a due o

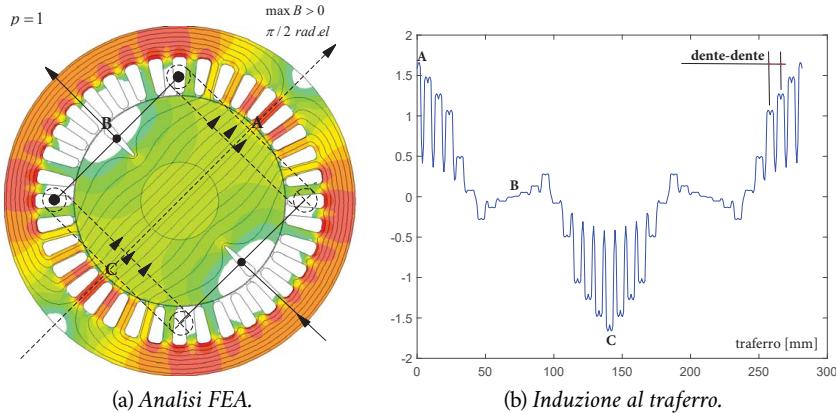
¹⁶ Ad esempio, all'eccellente manuale Rosenberg and Hand, "Electric Motor Repair", Delmar Thomson Learning, ISBN: 0030595843, 1986, oppure il *Manuale Moeller*, avvolgimenti Dahlander, <http://www.moeller.it/Manuale/motor049.html>.

Figura 28: Connessione con $p = 2$.

quattro poli. Nel collegamento a due poli (figura 27a e figura 27b) i terminali x e y sono cortocircuitati, a formare un capo dell'avvolgimento, mentre z ne rappresenta l'altra estremità. Per passare alla configurazione a 4 poli (figura 28a e figura 28b) x e y vengono separati con un opportuno teleruttore, e diventano i morsetti di alimentazione dell'avvolgimento, mentre z rimane aperto. Vale la pena di osservare che la configurazione degli avvolgimenti influisce sulla coppia generata, perché essa dipende dalla corrente di statore, che a sua volta dipende dall'impedenza di statore. A titolo di esempio, le figure 29a e 29b riportano rispettivamente le linee di campo (analisi FEA) e l'andamento dell'induzione al traferro nel caso di collegamento con una coppia polare.

Nel caso di più coppie polari (ad esempio, 4-8) opportuni collegamenti serie-parallelo permettono di variare l'impedenza di fase, dunque la caratteristica meccanica di coppia, adattandola quando possibile alla tipologia di carico collegato. È da sottolineare, infine, come questa tecnica si presti a funzionare solo con rotori a gabbia, che adattano intrinsecamente il loro numero di coppie polari a quello dello statore¹⁷. Infatti, un motore con avvolgimenti di statore e di rotore con diverso numero di coppie polari non funzionerebbe. Per esempio, la figura 30a riporta la distribuzione delle linee di induzione magnetica in una struttura costituita da uno statore con avvolgimento a due coppie polari ($p_s = 2$) e da un rotore costituito, per semplicità, da una sola coppia di conduttori ($p_r = 1$). La figura è stata ricavata con una analisi agli elementi finiti di un motore

¹⁷ Si può dimostrare che il numero di fasi coincide con il numero di sbarre sotto un passo polare. Ovvero, un rotore a gabbia con N_b sbarre e p coppie polari è equivalente ad un rotore avvolto con N_b/p fasi e sempre p coppie polari.

Figura 29: Distribuzione dell'induzione al traferro ($I_a = 10A, p = 1$)

reale, nel quale al rotore originario è stato sostituito un rotore modificato come descritto sopra. Alla fase a è stata imposta una corrente $I_a = 10A$. La figura 30b sintetizza l'andamento dell'induzione al traferro, nella stessa situazione (rotore non alimentato). Disegnando i versi delle linee di campo si può osservare come la spira di rotore (posta verticalmente, nel disegno) concatensi linee di versi opposti; complessivamente il flusso concatenato è nullo, come appare anche dalla figura 31, che riporta l'andamento di B lungo una linea verticale che passa per il centro dell'albero motore.

Lo stesso avverrebbe con la spira di rotore ruotata di un angolo arbitrario. A titolo d'esempio, la figura 32 riporta l'andamento delle linee di campo e l'induzione lungo una linea ruotata di 25° . Anche in questo caso si nota che l'induzione complessiva è nulla, quindi nessun flusso si concatena e nessuna *fem* si induce nella spira di rotore, come previsto.

1.10.4 Regolazione della velocità tramite variazione della resistenza rotorica

Le formule di coppia, coppia massima e scorrimento massimo mettono in evidenza che la variazione di resistenza rotorica provoca una variazione dello scorrimento di coppia massima, senza influire sul valore della coppia massima. Con riferimento ai parametri del motore di figura 1, si considerino (figura 33) le caratteristiche meccaniche tracciate in funzione della velocità di rotazione ω_m per valori crescenti della resistenza rotorica R_r .

Si può dunque pensare, se si dispone di un motore a rotore avvolto, di conseguire una certa regolazione reostatica della velocità, inserendo delle resistenze

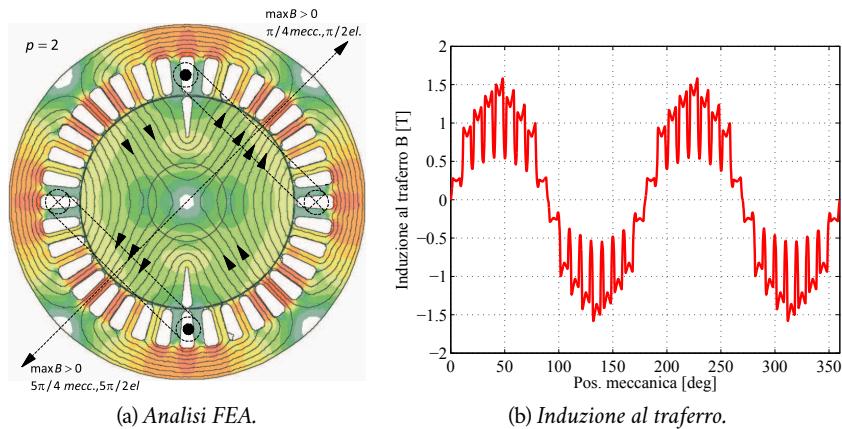


Figura 30: Distribuzione dell'induzione al traferro ($I_a = 10A$, $p = 2$)

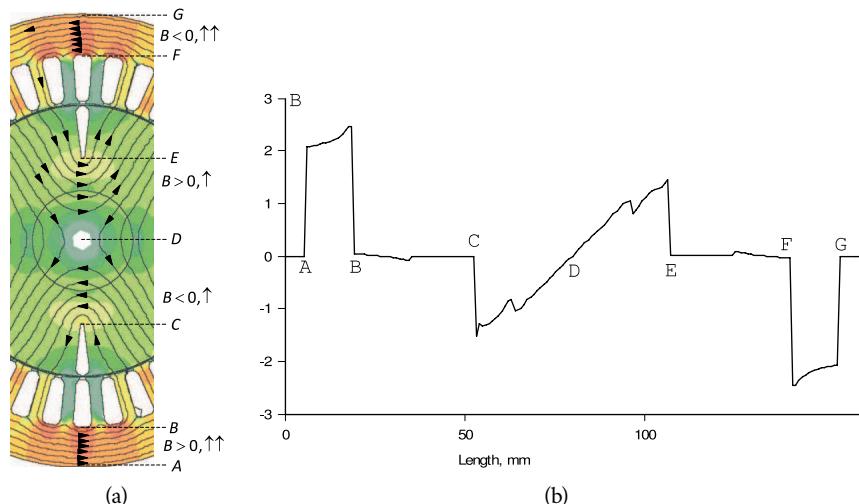


Figura 31: Induzione lungo l'asse verticale del motore

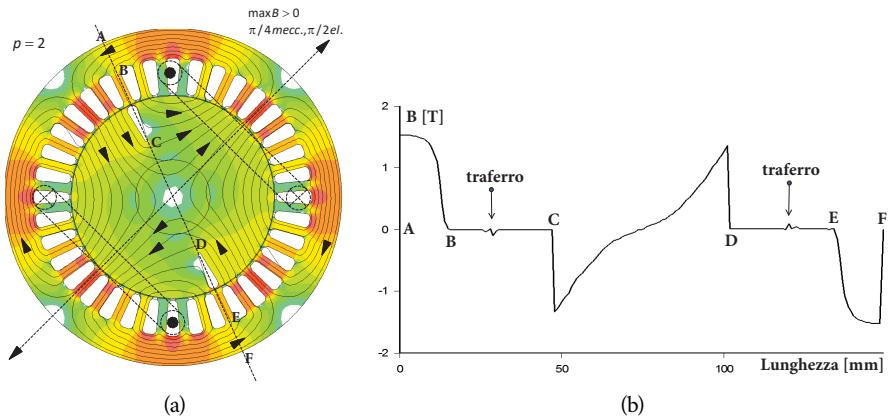


Figura 32: Induzione lungo un asse ruotato di 25°

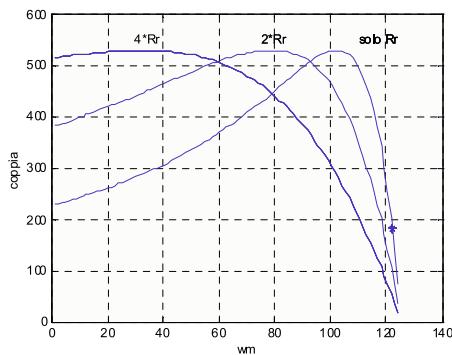


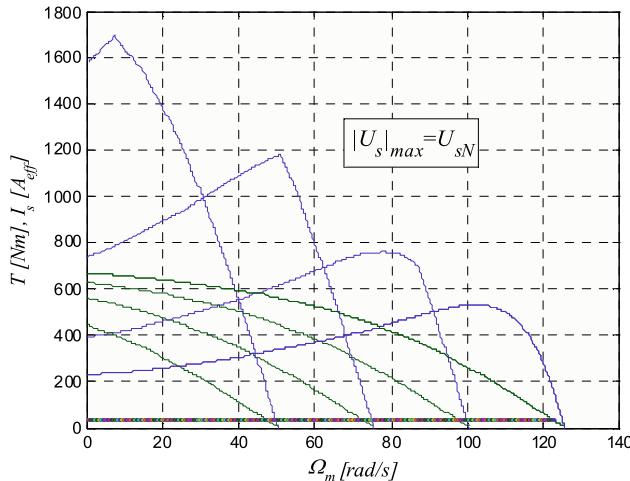
Figura 33: Car. mecc. al variare della resistenza rotorica (*=punto di funz. nom. del motore).

di rotore aggiuntive in serie a quelle proprie del motore. Ogni aumento della resistenza dei circuiti rotorici provoca, a parità di coppia, una diminuzione della velocità del motore.

È comunque evidente che la semplicità di questa regolazione si paghi con una bassa efficienza energetica, per la notevole potenza dissipata sulle resistenze addizionali di rotore. Inoltre, occorre la disponibilità di un motore a rotore avvolto, di costruzione meno robusta e in genere più costoso dell'equivalente motore a gabbia di scoiattolo.

Come considerazione generale, dunque, si può dire che il motore asincrono, mentre può essere considerato il motore elettrico più conveniente per tutti quegli impieghi che richiedono una velocità praticamente costante, non si adatta invece direttamente a quei servizi che richiedono una velocità regolabile ad arbitrio entro vasti limiti.

Per ottenere un azionamento a velocità variabile di motori asincroni è necessario far ricorso a speciali sorgenti di alimentazione (inverter), in grado come si è visto di produrre tensioni regolabili sia in ampiezza sia in frequenza.

Figura 34: Curve alla tensione nominale: $\Omega_s = [0, 4; 0, 6; 0, 8; 1] \Omega_{s,N}$.

1.10.5 Il controllo “Volt-Hertz”

La tecnica di controllo scalare a catena aperta più usata è quella che prevede la variazione della tensione di alimentazione dello statore proporzionalmente alla frequenza, con l'intento di mantenere costante in ogni condizione di lavoro (entro i limiti nominali) il flusso al traferro del motore. Essa è comunemente chiamata “Volt/Hertz”, e cerca dunque di sfruttare completamente i percorsi magnetici della macchina, vicino al loro punto di saturazione. Questo principio si estende anche al caso di presenza di un limite di tensione,¹⁸ almeno per valori di scorrimento tali che la tensione a disposizione sia sufficiente a mantenere costante il flusso. Negli azionamenti reali, il valore di tensione applicabile al motore è limitato alla nominale. Imponendo tale limitazione, le caratteristiche meccaniche a flusso costante di figura 14 si modificano come nella figura 34. È interessante notare che, in sostanza, la limitazione di tensione non interviene assolutamente nel range di scorrimento fino al valore nominale. Dunque si dispone ancora di una famiglia di rette che trasano parallelamente a loro stesse (figura 35). Questo è importante perché permette di associare linearmente la coppia elettromagnetica richiesta allo scorrimento da impostare¹⁹.

La realizzazione più semplice della tecnica V/Hz consiste nel trascurare

¹⁸ Concetto diverso dal funzionamento a tensione impressa.

¹⁹ Questo risulterà particolarmente vantaggioso negli schemi a controllo di scorrimento, che saranno presentati nei paragrafi successivi.

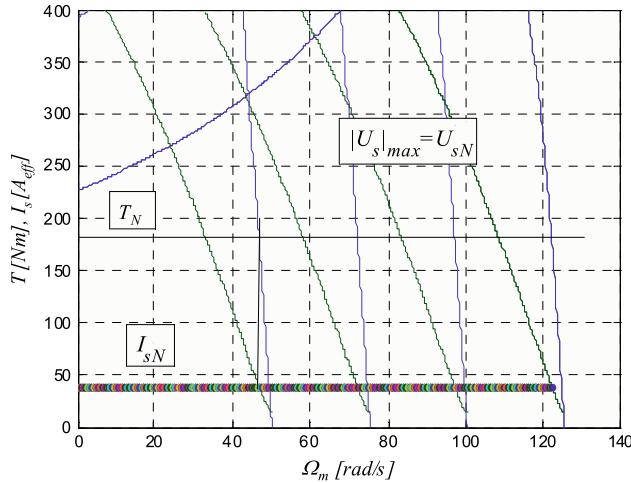


Figura 35: Particolare (fino ai valori nominali di coppia e corrente).

l'impedenza statorica imponendo, tramite l'inverter, una tensione al motore proporzionale alla frequenza statorica:

$$U_s = K\Omega_s \quad (73)$$

con K scelto in modo da avere la tensione nominale alla frequenza di statore nominale²⁰. Come si è detto, questa semplice formulazione è, in effetti, un'approssimazione abbastanza grossolana (e quasi mai realizzata in ambito industriale), che trascura completamente l'impedenza formata dalla resistenza di statore e dall'induttanza di dispersione di statore, come risulta evidente dal circuito equivalente del motore asincrono riportato per comodità nella figura 36.

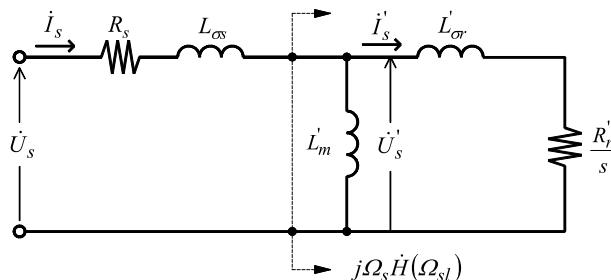


Figura 36: Circuito equivalente di una fase del motore, in regime sinusoidale.

²⁰ Per il motore della tabella 1, vale $K = 230/(2\pi 60) = 0,61 \text{ Vs}/\text{rad}$.

Evidenziando la forza elettromotrice indotta al traferro (*air gap emf*) U'_s , ai capi dell'induttanza di magnetizzazione L_{os} , (definita dalla (31)), si può scrivere:

$$\dot{U}_s = \dot{U}'_s + (R_s + j\Omega_s L_{\sigma s}) \dot{I}_s \quad (74)$$

L'impedenza equivalente a destra del taglio di figura 36 può essere espressa come:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}'_s}{\dot{I}_s} &= \frac{j\Omega_s L_{os} \left(\frac{R'_r}{s} + j\Omega_s L'_{\sigma r} \right)}{\frac{R'_r}{s} + j\Omega_s (L_{os} + L'_{\sigma r})} \\ &= \frac{j\Omega_s L_{os} (R'_r + j\Omega_s L'_{\sigma r})}{R'_r + j\Omega_s (L_{os} + L'_{\sigma r})} \\ &= j\Omega_s \dot{H}(\Omega_{sl}) \end{aligned} \quad (75)$$

dove si è posto

$$\dot{H}(\Omega_{sl}) = \frac{L_{os} (R'_r + j\Omega_s L'_{\sigma r})}{R'_r + j\Omega_s (L_{os} + L'_{\sigma r})} \quad (76)$$

Sostituendo l'espressione della corrente di statore ricavabile dalla (75) nella (74) si ottiene²¹:

$$\begin{aligned} \dot{U}_s &= \dot{U}'_s + \frac{(R_s + j\Omega_s L_{\sigma s})}{j\Omega_s \dot{H}(\Omega_{sl})} \dot{U}'_s \\ &= \frac{\dot{U}'_s}{j\Omega_s} j\Omega_s \left(1 + \frac{(R_s + j\Omega_s L_{\sigma s})}{j\Omega_s \dot{H}(\Omega_{sl})} \right) \\ &= j \left(\Omega_s + \frac{(R_s + j\Omega_s L_{\sigma s})}{j\dot{H}(\Omega_{sl})} \right) \frac{\dot{U}'_s}{j\Omega_s} = j\dot{\Omega} \lambda_m \end{aligned} \quad (77)$$

dove λ_m è il flusso magnetizzante al traferro e si è posto, per analogia dimensionale:

$$\dot{\Omega}(\Omega_s, \Omega_{sl}) = \Omega_s + \frac{R_s + j\Omega_s L_{\sigma s}}{j\dot{H}(\Omega_{sl})} \quad (78)$$

Le (77), (78) fanno comprendere che il flusso al traferro è mantenuto costante se si mantiene costante il rapporto:

$$\lambda_m = \frac{U'_s}{\Omega_s} = \frac{U_s}{\Omega} = \frac{U_s}{\left| \Omega_s + \frac{R_s + j\Omega_s L_{\sigma s}}{j\dot{H}(\Omega_{sl})} \right|} \quad (79)$$

²¹ Si pone arbitrariamente sull'asse reale il flusso al traferro, pertanto si omette d'ora in poi la notazione fasoriale, identificando la quantità con la sua ampiezza.

Va dunque mantenuto costante il rapporto tra i moduli della tensione di statore e di $\dot{\Omega}$, non Ω_s , come indicato nella (73). È evidente che tale rapporto dipende anche dalla pulsazione di scorrimento Ω_{sl} , cioè dalle condizioni di lavoro e di carico del motore. La figura 37 riporta l'andamento della funzione (U_s, Ω_s) per diversi valori dello scorrimento, dal valore nullo (funzionamento a vuoto) al valore nominale (pieno carico).

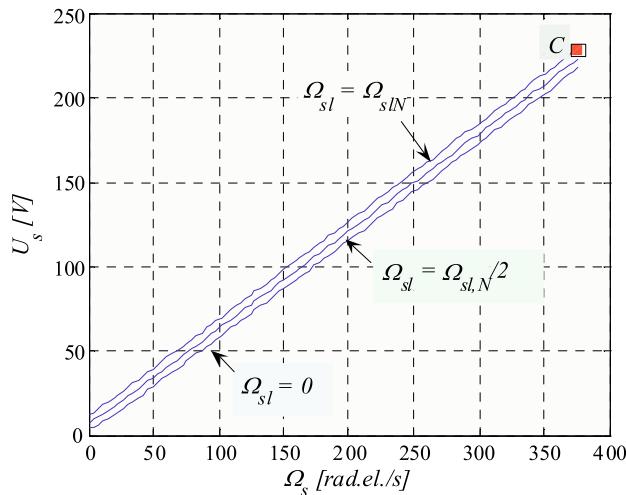


Figura 37: Tensione di statore in funzione della frequenza di statore, flusso al traferro costante, range completo.

Imponendo la (79) in tutto il range di velocità, per ogni prefissato valore di frequenza di alimentazione Ω_s , si riottengono le caratteristiche meccaniche a flusso impresso. È chiaro che si tratta di un'ipotesi in pratica non implementabile, perché ben presto interverranno i limiti di tensione e di corrente nominali, per cui ha senso limitare lo studio al campo di variazione nominale dello scorrimento.

Quando si scende nel concreto di una realizzazione sperimentale del controllo V/Hz, ci si scontra inoltre con l'evidenza che la (79) non è di facile implementazione, soprattutto se si tiene conto che le tecniche scalari sono preferite soprattutto per la semplicità ed economicità del controllo.

Sono state dunque studiate diverse approssimazioni, che con gradi di accuratezza diversi facilitano l'implementazione della (79). La prima di queste trascura la dipendenza del rapporto (78) dalla frequenza di scorrimento, che pone arbitrariamente uguale a zero. La (73) viene cioè sostituita dall'espressione:

$$U_s = K_1 \Omega_s + U_0 \quad (80)$$

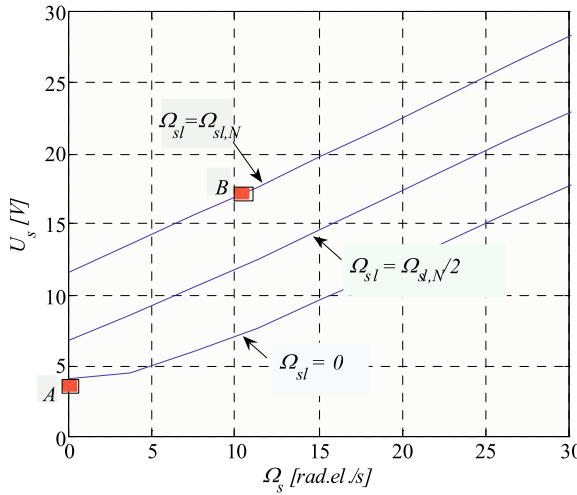


Figura 38: Tensione di statore in funzione della frequenza di statore, flusso al traferro costante, particolare a bassa frequenza.

dove U_0 è la tensione calcolata nel punto A di figura 38, relativo a $\Omega_s = 0$, $\Omega_{sl} = 0$, mentre K_1 viene calcolata in modo da avere il flusso nominale in condizioni nominali (punto C di figura 37 con $\Omega_s = \Omega_{s,N}$, $\Omega_{sl} = \Omega_{sl,N}$):

$$U_0 = |\dot{U}_s|_{\Omega_s=0, \Omega_{sl}=0} = \Omega(0, 0) \Lambda_m = \frac{R_s}{L_{os}} \Lambda_m \quad (81)$$

$$K_1 = \frac{U_{s,N} - U_0}{\Omega_{s,N}}$$

Anche se la (80) è una sensibile semplificazione della (79), essa dà risultati soddisfacenti in molte applicazioni. Una miglioria si introduce considerando anche la dipendenza della tensione di statore dalla pulsazione di scorrimento. Come appare evidente dalla figura 38, il contributo legato allo scorrimento è pressoché proporzionale allo scorrimento stesso. Questo porta a scrivere:

$$U_s = K_2 \Omega_s + K_3 \Omega_{sl} + U_0 \quad (82)$$

La costante U_0 rappresenta ancora la caduta resistiva di statore a vuoto, e pertanto si calcola tramite la (81).

La costante K_3 è calcolata in modo che moltiplicata per la pulsazione di scorrimento nominale dia la distanza tra le curve estreme della famiglia rappresentata nella figura 37. Tale distanza, pressoché costante, può essere calcolata ad una velocità di statore qualunque; spesso si assume di calcolarla per $\Omega_s = \Omega_{sl,N}$

(punto *B* di figura 38 con $\Omega_s = \Omega_{sl,N}$, $\Omega_{sl} = \Omega_{sl,N}$) per tarare le curve a bassa frequenza, dove più sensibili sono gli effetti delle diverse approssimazioni, ovvero sia

$$\overbrace{U_s(\Omega_{sl,N}, \Omega_{sl,N}) - U_s(\Omega_{sl,N}, 0)}^{\Omega_s} = K_3 \Omega_{sl,N}$$

e dunque, ricordando la (77):

$$K_3 = \frac{U_s(\Omega_{sl,N}, \Omega_{sl,N}) - U_s(\Omega_{sl,N}, 0)}{\Omega_{sl,N}} \quad (83)$$

La costante K_2 deve di seguito assicurare il flusso nominale in condizioni nominali di frequenza e di carico:

$$K_2 = \frac{U_{s,N} - K_3 \Omega_{sl,N} - U_0}{\Omega_{s,N}} \quad (84)$$

È importante notare che tutte le costanti possono essere ricavate da misure in laboratorio, senza presupporre la conoscenza dei parametri del motore. Infatti, se essi fossero noti con precisione, i moderni mezzi di calcolo permetterebbero il calcolo della (79) in modo esatto, a partire da una stima opportuna della pulsazione di scorrimento e accettando di confondere la velocità meccanico-elettrica di riferimento con quella elettrica del campo magnetico di statore.

Infine, si accenna solo al fatto che la tecnica di approssimazione della legge di controllo influisce sulle prestazioni dinamiche dell'azionamento. L'estesa bibliografia esistente tratta approfonditamente questo aspetto.

1.10.6 Controllo di velocità V/Hz a catena aperta

Lo schema di principio del controllo di velocità a catena aperta con tecnica V/Hz è riportato nella figura 39.

Il riferimento di velocità meccanica ω_m^* , dopo essere stato moltiplicato per il numero p di coppie polari del motore, viene volutamente confuso con un riferimento in frequenza ω_s^* . È chiaro che questo produrrà un errore, crescente con la coppia applicata, che influenza la pulsazione di scorrimento. Ma l'errore rimarrà comunque entro lo scorrimento nominale, che nei motori asincroni varia dal 5-6% (motori al di sotto del kW) all'1-2% (motori di decine e centinaia di kW).

Alcune realizzazioni di questo semplice schema prevedono di aggiungere al riferimento di velocità (dopo il prodotto per p) una quantità costante, pari solitamente alla metà dello scorrimento nominale. Questo riduce mediamente

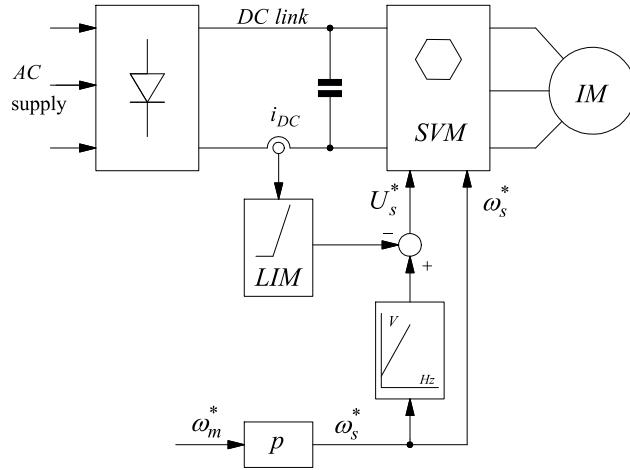


Figura 39: Azionamento V/Hz.

l'errore di velocità, ipotizzando un carico che richieda coppie fino alla nominale con una certa uniformità.

Lo schema di base di figura 39 può essere migliorato introducendo la compensazione di scorrimento (SLC, *slip compensation*), schematizzata nella figura 40.

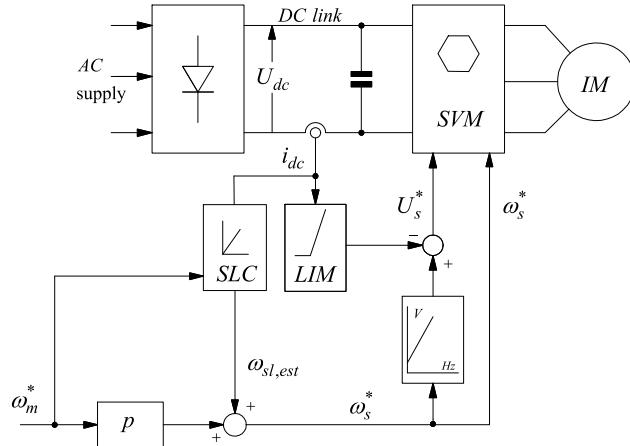


Figura 40: Azionamento V/Hz con compensazione dello scorrimento.

La tecnica si basa sulla considerazione che per valori di scorrimento entro i limiti nominali, vi sia approssimativamente un legame di proporzionalità tra la corrente in continua e lo scorrimento. Infatti, la potenza attiva transita dal bus in continua all'inverter ed al motore. Trascurando le perdite all'interno

dell'inverter, e la potenza associata alle armoniche (limitandosi pertanto solo alla potenza in ingresso alla frequenza fondamentale), si può scrivere:

$$P_i = U_{dc} I_{dc} = 3U_{s,eff} I_{s,eff} \cos(\varphi) \quad (85)$$

dove I_{dc} rappresenta il valore medio della corrente di bus i_{dc} .

L'ultimo membro della (85) è la potenza attiva assorbita dal motore, inteso come sistema trifase simmetrico ed equilibrato, e $U_{s,eff}$ ed $I_{s,eff}$ sono i valori efficiaci di tensione e corrente di fase, mentre φ è lo sfasamento tra le due grandezze. La potenza elettrica in ingresso al motore, a sua volta, è legata alla potenza meccanica resa all'albero tramite il rendimento μ del motore (supposto per semplicità costante in tutto il range di funzionamento):

$$P_{mecc} = \omega_m \tau = \mu U_{dc} I_{dc} \quad (86)$$

e pertanto, ipotizzando la costanza (o la conoscenza) della tensione del bus in continua e utilizzando la velocità di riferimento si ottiene una stima della coppia:

$$\hat{\tau} = \frac{\mu U_{dc} I_{dc}}{\omega_m^*} \quad (87)$$

alla quale associare una stima dello scorrimento in base alla proporzionalità esistente tra le due grandezze per scorrimenti fino al nominale (figura 40, blocco SLC):

$$\hat{\omega}_{sl} = \frac{\omega_{sl,N}}{\tau_N} \frac{\mu U_{dc} I_{dc}}{\omega_m^*} \quad (88)$$

In tal modo, a partire dalla misura della corrente sul bus in continua, comunque presente per ragioni di sicurezza, si ottiene una stima della pulsazione di scorrimento che il carico impone al motore. Il riferimento di frequenza statorica viene prodotto come somma del riferimento di velocità e tale stima dello scorrimento. La velocità (elettrica) effettiva del carico sarà pari alla frequenza statorica imposta meno lo scorrimento determinato dal carico; si otterrà dunque una velocità meccanica molto vicina al riferimento desiderato.

1.11 ESERCIZIO APPLICATIVO

Un nastro trasportatore, riportato nella figura 41, è inclinato di un angolo $\alpha = \pi/6$ rad, ha un carico utile $P = 4000$ N e deve funzionare alla velocità costante approssimativa $v = 0.3m/s$.

Il nastro deve funzionare sia in salita sia in discesa. Il nastro è sostenuto tramite una serie di rullini in folle. I due rulli alle estremità, uno dei quali serve

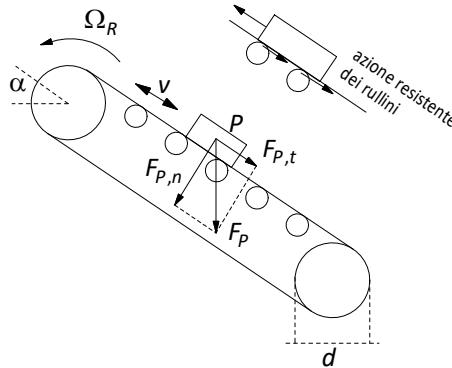


Figura 41: Schema dell'impianto trasportatore.

a movimentare il nastro, hanno un raggio $r = 0.1$ m. Il rullo traente è azionato da un motore asincrono alimentato da rete. L'azione resistente dei rulli in folle è rappresentata tramite un coefficiente d'attrito equivalente $\mu_e = 0.1$, inteso come rapporto tra la *reazione tangente* e la *reazione normale* alla direzione del moto. È presente anche un ulteriore coppia resistente $T_F = 20$ Nm. I riduttori disponibili sono indicati nella tabella 3 ($K_R = \Omega_R/\Omega_m$), assieme ai relativi rendimenti in salita η_s e in discesa η_d . Si scelgano il motore e il riduttore adeguati e si determini la velocità effettiva del carico.

Tabella 3: Riduttori e relativi rendimenti.

$K_R = \Omega_R/\Omega_m$	η_s	η_d
1/30	0.48	0.43
1/40	0.46	0.41
1/50	0.43	0.38
1/60	0.39	0.35

Si deve innanzitutto scegliere il numero di coppie polari del motore. A questo scopo va determinata la velocità del motore, a partire dalla velocità angolare del nastro, che vale:

$$\Omega_R = \frac{v}{r} = \frac{0.3}{0.1} = 3 \text{ rad/s} = 28.65 \text{ rpm} \quad (89)$$

Tabella 4: Coppie polari e relative velocità sincrone meccaniche.

p	1	2	3	4	6
$\Omega_o = \Omega_s/p$	3000	1500	1000	750	500

Pertanto, in base ai rapporti di riduzione disponibili, la velocità del motore deve essere una delle seguenti:

$$\begin{aligned}
 K_R = 1/30 &\rightarrow \Omega_m = 3 \cdot 30 = 90 \text{ rad/s} = 859 \text{ rpm} \\
 K_R = 1/40 &\rightarrow \Omega_m = 3 \cdot 40 = 120 \text{ rad/s} = 1146 \text{ rpm} \\
 K_R = 1/50 &\rightarrow \Omega_m = 3 \cdot 50 = 150 \text{ rad/s} = 1432 \text{ rpm} \\
 K_R = 1/60 &\rightarrow \Omega_m = 3 \cdot 60 = 180 \text{ rad/s} = 1718 \text{ rpm}
 \end{aligned} \tag{90}$$

I motori asincroni disponibili (tabella 4) hanno velocità di poco inferiori alle rispettive velocità sincrone:

Tali motori richiederebbero i rapporti di riduzione indicati nella tabella 5.

Tabella 5: Scelta del numero di coppie polari.

$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 6$
$\frac{28.65}{3000} = 1/105$	$\frac{28.65}{1500} = 1/52.4$	$\frac{28.65}{1000} = 1/34.9$	$1/26.2$	$1/17.5$

Al fine di contenere l'errore di velocità, la scelta più opportuna appare quella del motore a 2 coppie polari (velocità attorno ai 1500 rpm), accoppiato al riduttore con $K_R = 1/50$. Tollerando errori più grossolani si potrebbe utilizzare il riduttore con $K_R = 1/30$ con motori a 3 coppie polari.

Per determinare la potenza del motore è necessario innanzitutto effettuare un'analisi della meccanica del sistema illustrato nella figura 41. Le componenti normali e tangenziali della forza peso sono:

$$\begin{aligned}
 F_{P,t} &= F_P \cdot \sin \alpha = 4000 \cdot \sin (\pi/6) = 2000 \text{ N} \\
 F_{P,n} &= F_P \cdot \cos \alpha = 4000 \cdot \cos (\pi/6) = 3464 \text{ N}
 \end{aligned} \tag{91}$$

Si è detto che il coefficiente di attrito equivalente μ_e è definito come il rapporto tra reazione tangenziale $F_{A,t}$ e reazione normale $F_{A,n}$. Quest'ultima è pari alla componente normale del peso, per cui si ha:

$$F_{A,n} = F_{P,n} = 3464 \text{ N} \quad F_{A,t} = \mu_e F_{P,n} = 0.1 \cdot 3464 = 346.4 \text{ N} \tag{92}$$

Si passa ora a calcolare la coppia $T_{R,s}$ necessaria a movimentare il nastro in salita:

$$T_{R,s} = (F_{P,t} + F_{A,t}) r + T_F = (2000 + 346.4) \cdot 0.1 + 20 = 254.6 \text{ Nm} \quad (93)$$

In salita, coppia e velocità del motore sono concordi (funzionamento da motore). La forza peso (tangenziale) del carico si oppone al moto (poiché tira verso il basso), mentre l'attrito sui rulli ($F_{A,t}$) e la coppia aggiuntiva T_F si oppongono *sempre* al moto. Dunque nella salita le tre forze si oppongono tutte al moto e sono correttamente riportate con segno positivo a destra del bilancio di potenze, che vede l'equilibrio tra la coppia positiva sviluppata dal motore - a sinistra - e la coppia resistente - a destra. L'equazione è chiaramente scritta secondo la convenzione degli *utilizzatori*, in analogia a quando si scrive il bilancio di coppia. Il punto di lavoro è indicato con *A* nella figura 42a.

Per la movimentazione del carico in discesa, ovvero con velocità *negativa rispetto al caso precedente*, occorre invertire due fasi del motore con opportuni teleruttori. In tal modo è invertito il senso ciclico ed è come se si imponesse una frequenza del campo magnetico rotante pari a $-\Omega_s$ in un inverter di tensione. Ora comunque la velocità in senso orario diventa quella positiva per il motore.

La nuova configurazione vede la coppia di carico spingere il motore a ruotare secondo la velocità per lui ora positiva. Pertanto, con le convenzioni adottate, si tratta di una coppia di carico *negativa*. Essa andrà bilanciata con una coppia del motore pure negativa e di ugual valore. Il punto di funzionamento è indicato con *B* nella figura 42. In tal caso, il motore funziona in una regione con velocità positiva e coppia negativa (4° quadrante). La coppia che il motore deve esercitare è comunque inferiore alla precedente, per l'effetto combinato di $F_{A,t}$ e T_F , che pure si oppongono alla discesa del carico.

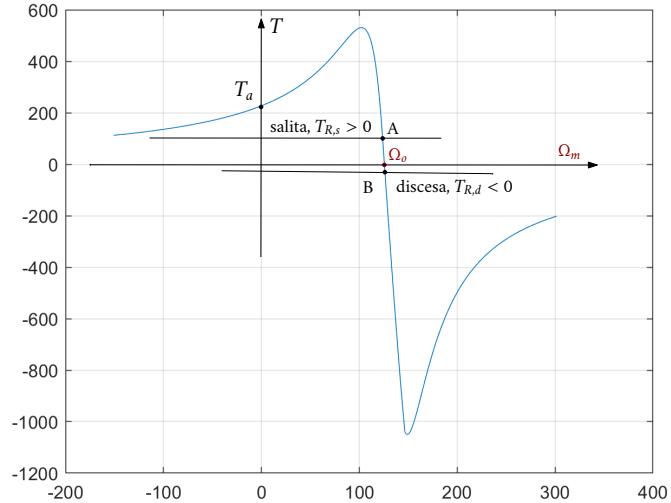
E' opportuno ricordare che le caratteristiche meccaniche riportate nella figura 42a hanno origine dal principio di generazione delle forze sulle cariche e sulle correnti delle barre di rotore (figura 42b)). Una velocità meccanica inferiore alla velocità del campo provoca una velocità delle particelle verso il basso e dunque genera FEM e coppia verso l'alto. Viceversa quando la velocità meccanica risulta superiore (in modulo) alla velocità del campo. ²²

La coppia $T_{R,d}$ necessaria a movimentare il nastro in discesa vale pertanto:

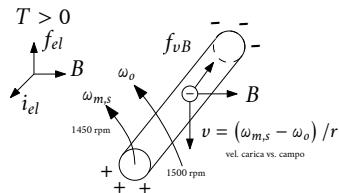
$$T_{R,d} = -F_{P,t} + F_{A,t} + T_F = (-2000 + 346.4) \cdot (0.1) + 20 = -145.4 \text{ Nm} \quad (94)$$

La coppia richiesta al motore nei due casi si ottiene imponendo l'uguaglianza tra potenze in ingresso e in uscita del riduttore, a meno naturalmente dei rendimenti:

²² In sintesi si può affermare che, *considerando positivo il verso di rotazione imposto al campo di statore*, la coppia è positiva quando la velocità del rotore (vista da un osservatore solidale al campo di statore) è *negativa*. Questo accade nella figura 42b, relativa al caso della salita.



(a) Caratteristica meccanica, con velocità positiva arbitrariamente scelta in senso antiorario.



(b) Generazione della coppia nei conduttori.

Figura 42: Punti di funzionamento in salita e discesa.

$$T_{R,s}\Omega_R = \eta_s T_{m,s}\Omega_{m,s} \quad T_{R,d}\Omega_R = \frac{T_{m,d}\Omega_{m,d}}{\eta_d} \quad (95)$$

ottenendo:

$$T_{m,s} = K_R \frac{T_{R,s}}{\eta_s} = \frac{1}{50} \frac{254,6}{0.43} = 11.84 \text{ Nm} \quad (96)$$

$$T_{m,d} = K_R \eta_d T_{R,d} = \frac{0.38}{50} (-145.36) = -1.1 \text{ Nm}$$

La potenza richiesta al motore vale, per il caso peggiore (la salita):

$$P_{m,s} = T_{m,s} \cdot \Omega_{m,s} = T_{m,s} \frac{\Omega_{R,s}}{K_R} = 11.84 \frac{3}{1/50} = 1776 \text{ W} \quad (97)$$

La figura 43 riporta una serie di dati di targa per motori a 4 poli. Tra essi, la scelta più opportuna²³ ricade sul modello AA-4-18,1-7, che presenta una potenza nominale di 1.81 kW.

Al fine di verificare la velocità effettiva che si otterrà, occorre confrontare la velocità nominale e quella di sincronismo del motore con quella richiesta del carico; la prima dà indicazione sulla situazione a carico (durante la salita), mentre la seconda riguarda quella a vuoto (durante la discesa, date le (96)).

Dato che il motore risulta collegato direttamente a rete, le velocità approssimative nelle condizioni indicate risultano²⁴:

$$v_s = \Omega_{m,N} K_R r = 1420 \cdot \frac{2\pi}{60} \frac{1}{50} 0.1 = 0.297 \text{ m/s} \quad (98)$$

$$v_d = \Omega_o K_R r = 1500 \cdot \frac{2\pi}{60} \frac{1}{50} 0.1 = 0.314 \text{ m/s}$$

Una stima più accurata della velocità si può ottenere considerando la coppia effettiva a carico in salita e in discesa, ricordando che per il motore asincrono in prossimità della velocità di sincronismo la coppia è praticamente proporzionale alla velocità meccanica di scorrimento $\Omega_o - \Omega_m$, secondo la costante K_τ . Tale costante può essere calcolata considerando il punto di lavoro nominale del motore, del quale il catalogo fornisce i dati salienti:

$$K_\tau = \frac{\Omega_o - \Omega_{m,N}}{T_N} = \frac{2\pi}{60} \frac{(1500 - 1420)}{12.2} = 0.686 \text{ rad/Nms} \quad (99)$$

²³ Utilizzando il criterio che la sua potenza deve essere appena superiore a quella appena calcolata, ritenendo che il carico indicato e le perdite siano già state leggermente aumentate per tenere conto delle inevitabili incertezze.

²⁴ I segni delle velocità sono riferiti al motore collegato con la sequenza *r-s-t* per la salita e *r-t-s* per la discesa, dunque entrambe positive.

MOTORE	N_n <i>giri min</i>	C_n <i>Nm</i>	P		I_n	$\cos \varphi$	η	$\frac{C_a}{C_n}$	$\frac{C_{max}}{C_n}$	$\frac{I_a}{I_n}$	P_v <i>W</i>	Q_v $\frac{m^3}{min}$	$J \cdot 10^3$ <i>kgm^2</i>	M <i>kg</i>
			<i>kW</i>	<i>CV</i>	<i>A</i>		-	-	-	-				
AA-4-0,4-1	1340	0,25	0,04	0,05	0,17	0,60	0,50	2,0	2,1	2,4	14	0,75	0,08	2,2
AA-4-0,6-2	1340	0,43	0,06	0,08	0,27	0,63	0,52	2,1	2,3	2,6	14	0,75	0,10	2,4
AA-4-0,6-1	1350	0,42	0,06	0,08	0,25	0,63	0,54	2,3	2,5	2,5	14	0,75	0,15	2,5
AA-4-0,9-2	1350	0,61	0,09	0,11	0,34	0,65	0,56	2,3	2,5	2,8	14	0,75	0,15	2,6
AA-4-1,0-3	1350	0,70	0,10	0,13	0,37	0,66	0,58	2,4	2,7	2,8	14	0,75	0,20	3,2
AA-4-1,2-1	1350	0,82	0,12	0,15	0,42	0,66	0,60	2,4	2,8	3,0	18	2,5	0,28	3,7
AA-4-1,8-2	1370	1,23	0,18	0,24	0,62	0,68	0,60	2,5	2,8	3,0	18	2,5	0,40	4,3
AA-4-2,2-3	1410	1,50	0,22	0,30	0,81	0,66	0,60	2,6	2,9	3,2	18	2,5	0,40	4,3
AA-4-2,3-1	1380	1,60	0,23	0,31	0,73	0,70	0,65	2,5	2,7	3,6	18	2,5	0,50	5,8
AA-4-3,7-2	1390	2,55	0,37	0,49	1,08	0,74	0,67	2,5	2,8	3,5	18	2,5	0,80	6,2
AA-4-5,0-3	1390	3,45	0,50	0,67	1,53	0,72	0,66	2,6	2,8	3,8	18	2,5	0,90	7,4
AA-4-5,1-1	1400	3,50	0,51	0,68	1,45	0,75	0,68	2,5	2,6	4,0	39	5,3	1,40	8,5
AA-4-7,9-2	1400	5,40	0,79	1,06	2,15	0,76	0,70	2,6	2,8	4,2	39	5,3	1,70	9,8
AA-4-8,7-3	1340	6,22	0,87	1,16	2,40	0,75	0,70	2,5	2,7	4,3	39	5,3	2,00	11
AA-4-11,1-4	1400	7,55	1,11	1,48	3,00	0,75	0,71	2,7	2,8	4,3	39	5,3	2,30	11
AA-4-11,3-5	1420	7,63	1,13	1,51	2,80	0,78	0,75	2,5	2,6	4,2	39	5,3	3,30	12
AA-4-14,6-6	1420	9,84	1,46	1,95	3,47	0,78	0,78	2,6	2,7	4,6	39	5,3	4,00	14
AA-4-18,1-7	1420	12,2	1,81	2,42	4,53	0,75	0,77	2,6	2,8	4,7	39	5,3	5,00	16
AA-4-22,2-1	1430	14,8	2,22	2,96	5,13	0,80	0,78	2,5	2,6	4,9	39	5,3	6,00	19
AA-4-29,2-2	1430	19,5	2,92	3,89	6,59	0,82	0,78	2,5	2,7	5,0	39	5,3	8,50	21
AA-4-38,9-3	1430	26,0	3,89	5,19	9,12	0,79	0,78	2,5	2,7	5,0	39	5,3	11,0	23
AA-4-39,7-1	1440	26,3	3,97	5,29	8,83	0,81	0,80	2,6	2,9	5,3	39	5,3	13,0	29
AA-4-55,7-3	1410	37,7	5,57	7,42	12,2	0,82	0,80	2,7	3,0	5,5	39	5,3	16,0	35
AA-4-65,1-4	1450	42,9	6,51	8,69	14,3	0,81	0,81	2,5	2,8	5,8	39	5,3	24,0	43
AA-4-74,4-7	1450	49,0	7,44	9,92	15,8	0,83	0,82	2,6	3,0	6,2	39	5,3	28,5	48
AA-4-93,3-8	1460	61,0	9,33	12,4	18,6	0,83	0,87	2,5	3,2	5,5	39	5,3	36,2	54
AA-4-112-7	1460	73,2	11,2	14,9	23,2	0,81	0,86	2,3	2,2	5,3	116	27	59,0	68
AA-4-140-6	1460	91,6	14,0	18,7	28,3	0,82	0,87	2,2	2,3	5,6	116	27	80,5	82

Figura 43: Dati di targa di motori asincroni commerciali a 4 poli.

e quindi, dalle (96):

$$\Omega_{m,s} = \Omega_o - K_\tau T_{m,s} = \frac{2\pi}{60} \cdot 1500 - 0.686 \cdot 11.84 = 148.95 \text{ rad/s} \quad (100)$$

$$\Omega_{m,d} = \Omega_o - K_\tau T_{m,d} = \frac{2\pi}{60} \cdot 1500 - 0.686 \cdot (-1.1) = 157.83 \text{ rad/s}$$

per cui le velocità che effettivamente si otterranno in salita e in discesa valgono:

$$v_s = \Omega_{m,s} K_R r = \frac{148.95}{50} \cdot 0.1 = 0.298 \text{ m/s} \quad (101)$$

$$v_d = \Omega_{m,d} K_R r = \frac{157.83}{50} \cdot 0.1 = 0.314 \text{ m/s}$$

che, confrontate con il dato richiesto $v = 0.3 \text{ m/s}$, confermano la bontà della scelte effettuate durante il dimensionamento.

Lo svolgimento dell'esercizio porta a concludere che il motore adatto sia quello siglato AA-4-18, 1-7. Un utile esercizio consiste nel provare a ripetere il procedimento con una scelta diversa, ad esempio considerando un motore a tre coppie polari (che consente un accoppiamento con un riduttore 1 : 30, dal rendimento più alto). I dati di partenza sono riassunti nella tabella 6.

Tabella 6: Nuovi dati iniziali.

grandezza	valore
Ω_n	1000 rpm
K_r	$1 : 34.9 \rightarrow 1 : 30$
η_s	0.48
η_d	0.43
$T_{r,s}$	254.6
$T_{r,d}$	145.6

I dati del catalogo relativi ai motori a 3 coppie polari sono riportati nella figura 44.

MOTORE	N_n	C_n	P		I_n	$\cos \varphi$	η	C_a	C_{max}	I_a	P_v	Q_v	$J \cdot 10^3$	M
	<i>giri</i> <i>min</i>	<i>Nm</i>	<i>kW</i>	<i>CV</i>	<i>A</i>	-	-	$\frac{C_n}{C_n}$	$\frac{C_n}{C_n}$	$\frac{I_n}{I_n}$	<i>W</i>	$\frac{m^3}{min}$	kgm^2	<i>kg</i>
AA-6-2,2-0,5-1	810	0,54	0,05	0,06	0,29	0,54	0,42	1,6	1,7	2,3	14	0,75	0,15	2,5
AA-6-0,6-2	810	0,72	0,06	0,08	0,34	0,56	0,46	1,8	2,1	2,3	14	0,75	0,22	3,1
AA-6-0,8-2	850	0,91	0,08	0,11	0,41	0,60	0,47	2,1	2,2	3,1	16	2,5	0,23	3,7
AA-6-1,0-3	850	1,17	0,10	0,14	0,48	0,63	0,50	2,4	2,2	3,2	16	2,5	0,39	4,1
AA-6-1,7-1	865	1,89	0,17	0,23	0,67	0,66	0,56	2,4	2,5	3,1	16	2,5	0,60	5,8
AA-6-2,4-2	875	2,62	0,24	0,32	0,94	0,66	0,56	2,5	2,5	3,2	16	2,5	0,80	6,3
AA-6-3,4-3	885	3,71	0,34	0,46	1,23	0,66	0,61	2,5	2,6	3,2	16	2,5	0,95	6,4
AA-6-3,6-1	920	3,75	0,36	0,48	1,18	0,68	0,65	2,4	2,6	3,3	39	5,3	2,03	8,6
AA-6-5,5-2	920	5,72	0,55	0,73	1,70	0,72	0,65	2,4	2,5	3,7	39	5,3	2,52	10,4
AA-6-7,7-3	920	7,96	0,77	1,02	2,23	0,74	0,67	2,5	2,5	3,8	39	5,3	2,61	11,2
AA-6-7,7-5	930	7,89	0,77	1,02	2,05	0,75	0,72	2,5	2,5	3,9	39	5,3	3,45	12,2
AA-6-11,1-6	930	11,4	1,11	1,48	2,81	0,77	0,74	2,5	2,7	4,1	39	5,3	4,55	14,1
AA-6-15,1-7	935	15,4	1,51	2,01	3,98	0,77	0,71	2,2	2,8	4,3	39	5,3	5,21	16,2
AA-6-15,2-1	950	15,3	1,52	2,03	3,76	0,78	0,75	2,6	2,9	4,6	39	5,3	8,72	19,3
AA-6-18,6-2	950	18,7	1,86	2,48	4,53	0,78	0,76	2,6	2,8	4,8	39	5,3	10,3	20,5
AA-6-22,1-3	955	22,1	2,21	2,95	5,24	0,78	0,78	2,5	2,6	4,9	39	5,3	11,5	22,5
AA-6-22,9-1	960	22,8	2,29	3,06	5,24	0,77	0,82	2,5	2,5	5,0	39	5,3	14,9	29,0
AA-6-27,5-2	845	31,1	2,75	3,67	6,13	0,79	0,82	2,1	2,3	5,5	39	5,3	16,8	34,5
AA-6-36,1-5	955	36,1	3,61	4,81	8,04	0,79	0,82	2,2	2,4	5,5	39	5,3	28,9	42,0
AA-6-44,8-6	955	44,8	4,48	5,97	9,63	0,79	0,85	2,3	2,4	5,7	39	5,3	31,0	50,5
AA-6-52,1-7	955	52,1	5,21	6,95	10,9	0,81	0,85	2,4	2,5	5,9	39	5,3	41,5	56,0
AA-6-75,8-6	975	74,2	7,58	10,1	15,3	0,82	0,87	2,3	2,1	5,3	116	27	86,0	72,0
AA-6-111-8	980	109	11,1	14,8	22,5	0,82	0,87	2,3	2,5	5,5	116	27	127	105

Figura 44: Dati di targa di motori asincroni commerciali a 6 poli.

MOTORI ASINCRONI TRIFASE

Non hai veramente capito qualcosa fino a quando non sei in grado di spiegarlo a tua nonna.

A. Einstein (perhaps).

1.1 INTRODUZIONE

I *motori a induzione*, o *asincroni*, trifase costituiscono una delle categorie di motori in corrente alternata fra le più diffuse nelle applicazioni industriali, a velocità fissa e variabile. La *conversione elettromeccanica* che essi attuano segue il principio di funzionamento dei *sistemi a induzione* mediante una diretta applicazione del *campo magnetico rotante*.

1.2 STRUTTURA E PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

Una rappresentazione schematica della struttura di un motore asincrono a due poli è mostrata nella figura 1.

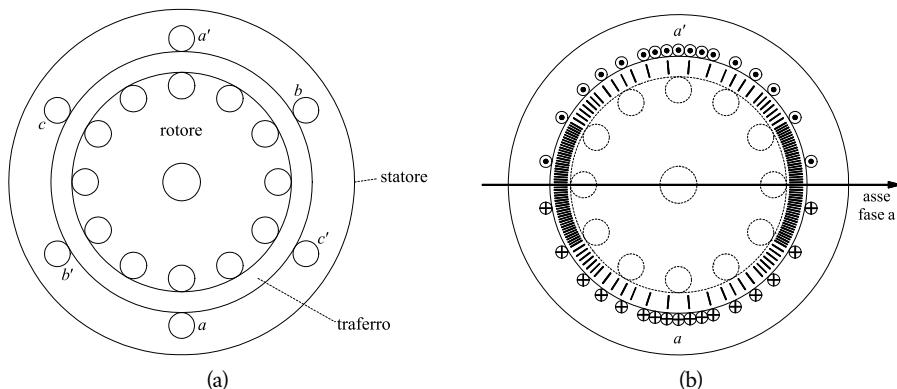


Figura 1: Rappresentazione schematica di un motore ad induzione a due poli: (a) sezione generale, (b) particolare dell'avvolgimento della fase *a*.

Un motore asincrono disassemblato e uno spaccato sono mostrati nella figura

ra 2. Esso comprende uno *statore* (parte fissa) e un *rotore* (parte mobile) entrambi a forma di corona cilindrica di materiale ferromagnetico laminato e separati da un *traferro* in aria.

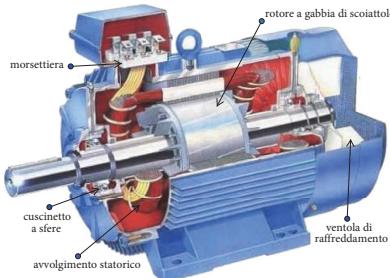


Figura 2: Spaccato di motore asincrono.

Sulle superfici cilindriche di statore e rotore che si affacciano al traferro sono ricavate, secondo la direzione delle generatrici, le *cave* di statore e di rotore destinate a contenere l'avvolgimento *statorico* e *rotorico* rispettivamente (nella figura 2 il rotore non è di tipo avvolto; si veda la figura 3).



Figura 3: Rotore di tipo avvolto per motore asincrono.

L'avvolgimento di statore, del tutto simile a quello di un motore brushless sinusoidale, è costituito da tre *fasi* identiche come numero di spire e distribuzione delle spire, ma spazialmente sfasate in modo uguale lungo il traferro. Esso sarà descritto più avanti. Le fasi fanno capo alla morsettiera del motore attraverso la quale esso può essere alimentato da una sorgente trifase esterna.

Il circuito di rotore può essere realizzato con un avvolgimento trifase distribuito, del tutto analogo a quello di statore (*rotore avvolto o ad anelli*), i cui terminali fanno capo a tre anelli su cui strisciano tre spazzole che consentono il collegamento dell'avvolgimento rotorico ad un circuito esterno (figura 3). Quest'ultimo può essere anche un convertitore statico che gestisce il flusso di potenza entrante o uscente dal rotore per ottenere particolari azionamenti denominati *Kramer statico*, *Scherbius* o *slip-recovery*.

1.3 IL ROTORE A GABBIA DI SCOIATTOLO

Molto spesso il circuito di rotore è realizzato mediante un insieme di sbarre di alluminio (una per ogni cava) fra loro tutte collegate alle due estremità da due anelli, così a realizzare una struttura comunemente denominata *rotore a gabbia*. Tale struttura, sottoposta all'azione del campo magnetico prodotto dall'avvolgimento statorico, si comporta come un avvolgimento trifase dello stesso tipo e con lo stesso *numero di poli* di quello di statore. La figura 4 riporta la sezione rettificata di una macchina trifase con quattro poli, assieme alla componente fondamentale dell'induzione al traferro.¹

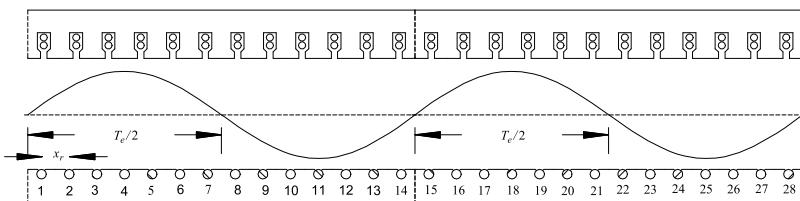


Figura 4: Sezione rettificata di motore asincrono a gabbia di scoiattolo.

La struttura, in questo caso, prevede la presenza di $m = 14$ sbarre per passo polare². La gabbia di rotore, privata dell'anello frontale, equivale ad un numero di avvolgimenti polifase a stella pari al numero di coppie polari. Nel caso della figura 4, la gabbia equivale a due avvolgimenti polifase ($p = 2$), composti ciascuno da $m = 14$ fasi di un solo conduttore. Su ciascuna sbarra si induce una *fem*, sfasata rispetto a quelle delle sbarre adiacenti di un angolo

$$\alpha_r = \frac{2\pi}{m} \quad (1)$$

Se si chiude la gabbia con il secondo anello, le *fem* dell'avvolgimento polifase danno luogo ad un sistema equilibrato di correnti, e quindi ad un campo magnetico rotante con un numero di poli (periodo, frequenza) uguale a quello del campo rotante induttore. A differenza quindi di un avvolgimento di tipo avvolto, l'avvolgimento a gabbia di scoiattolo non viene costruito per uno specifico numero di poli, ed assume invece il numero di poli del campo induttore.

In altre parole, la figura 4 mostra che in un rotore a gabbia (o a lamina, se si pensa ad infinite barre affiancate) c'è una distribuzione azimutale³ di

¹ Lo statore ha in tutto 24 cave, 4 poli e tre fasi, per cui il numero q di cave/polo/fase è $q = 2$. Il rotore ha 7 cave (ovvero, barre) per polo, a cui corrispondono 7 fasi, quindi $q = 1$

² Il *passo polare* si definisce come la distanza lineare tra due poli omologhi.

³ Ovvero lungo lo spazio rettificato del traferro

corrente di forma sinusoidale, in virtù del fatto che in ogni barra scorre una corrente diversa rispetto a quelle adiacenti, che segue l'andamento delle *fem* indotte, la cui distribuzione al traferro è appunto sinusoidale. Si noti che tali correnti sono responsabili della stessa distribuzione di forza magnetomotrice al traferro che si otterrebbe se nel rotore ci fosse il classico avvolgimento trifase con una distribuzione sinusoidale della *densità di conduttori*, ciascuno percorso dalla rispettiva corrente di fase, e con le tre correnti di fase a formare una terna sinusoidale simmetrica. Si dimostra anche che il numero di spire N_r dell'avvolgimento trifase di rotore equivalente ad un rotore a gabbia con N_b barre è $N_r = N_b/3$.

Si può pensare di associare ciascuna fase di rotore alla sua omologa sfasata di un passo polare. Le due, percorse dalla stessa corrente con versi opposti, costituiscono un circuito chiuso per il quale è possibile definire un flusso concatenato ed associare ad esso un'induttanza, che poi viene ripartita in due, andando a costituire l'induttanza della singola barra rotorica.

Bisogna poi tener conto che nello schema elettrico equivalente si fa riferimento ad un circuito rotorico trifase, equivalente alla gabbia di scoiattolo, di cui si considera una sola fase. Nel circuito trifase equivalente si fanno sparire tutte le mutue fra fasi diverse (M_{ab} , M_{ac} , M_{ca}). Ciò è possibile (se la somma delle correnti è nulla) definendo induttanze statoriche e rotoriche tali che con le correnti statoriche e rotoriche (trifase) producono la stessa energia magnetica ovvero la stessa potenza reattiva. Quindi per esempio tutta la gabbia, che coinvolge una certa energia magnetica quando percorsa da correnti, è rappresentata con tre induttanze che percorse dalle correnti rotoriche producono la stessa energia⁴.

1.4 GENERAZIONE DELLA COPPIA NEL MOTORE ASINCRONO

Si consideri il caso di un motore ad induzione, per esempio con rotore avvolto trifase, con p coppie polari, e si supponga che l'avvolgimento rotorico (avente lo stesso numero di poli di quello statorico) sia aperto cosicché ogni corrente rotorica sia nulla.

Se gli avvolgimenti statorici sono alimentati da un sistema trifase equilibrato di correnti a pulsazione Ω_s , si produce nel traferro, com'è noto, un campo magnetico rotante a velocità Ω_s .

Ogni fase di statore concatena pertanto un flusso magnetico $\Lambda_s(t)$ alternato a pulsazione Ω_s . La tensione ai morsetti dovrà bilanciare la caduta di tensione

⁴ È un procedimento simile che porta a definire l'*induttanza sincrona* nello studio dei motori sincroni a magneti permanenti.

resistiva (a pulsazione Ω_s) e la forza contro elettromotrice $d\lambda_s(t)/dt$, pure a pulsazione Ω_s , indotta dalle variazioni del flusso concatenato. La pulsazione sincrona *meccanica* di rotazione del campo magnetico, espressa cioè in rad/s, vale:

$$\Omega_0 [\text{rad/s}] = \frac{\Omega_s [\text{rad.el./s}]}{p} \quad (2)$$

Si immagini che il rotore stia ruotando ad una velocità $0 < \Omega_m < \Omega_0$, nel verso del campo rotante. Si può dire che il campo rotante giri rispetto al rotore ad una velocità $(\Omega_0 - \Omega_m)$, pari anche a $s\Omega_s/p$, se si definisce lo *scorrimento* s come:

$$s = \frac{\Omega_s - p\Omega_m}{\Omega_s} = \frac{\Omega_s - \Omega_{me}}{\Omega_s} = \frac{\Omega_0 - \Omega_m}{\Omega_0} \quad (3)$$

Gli avvolgimenti aperti di rotore sono quindi sede di una terna simmetrica di tensioni indotte alternate la cui pulsazione Ω_{sl} , espressa in rad.el., dato che si tratta di grandezze elettriche, vale:

$$\Omega_{sl} = \Omega_s - p\Omega_m = \Omega_s - \Omega_{me} = s\Omega_s \quad (4)$$

Essa è detta *pulsazione di scorrimento* e, corrispondentemente, la frequenza $f_{sl} = sf_s$ viene chiamata *frequenza di scorrimento*, mentre Ω_{me} è detta *pulsazione* (o velocità) *meccanico-elettrica*.

Si pensi ora di chiudere gli avvolgimenti di rotore; in essi circoleranno tre correnti alternate equilibrate a pulsazione Ω_{sl} , la cui ampiezza è determinata dall'ampiezza delle tensioni indotte e dall'impedenza dei circuiti rotorici alla frequenza di scorrimento. Il campo magnetico rotante dovuto a questa terna di correnti rotoriche (che avrà lo stesso numero di poli di quello di statore) ruoterà rispetto al rotore con velocità positiva proporzionale alla pulsazione di scorrimento. Rispetto allo statore il campo prodotto dalle correnti di rotore avrà velocità (sempre in rad.el.)

$$s\Omega_s + p\Omega_m = \frac{\Omega_s - p\Omega_m}{\Omega_s} \Omega_s + p\Omega_m = \Omega_s \quad (5)$$

Pertanto si può concludere che i campi rotanti sostenuti dalle correnti statoriche e rotoriche a regime sinusoidale sono sincroni e quindi fissi l'uno rispetto all'altro. Nasce un'interazione costante e di una coppia costante che, come si vedrà, per $\Omega_m < \Omega_s/p$ agisce sul rotore con verso concorde a quello di rotazione del campo magnetico e quindi tale da sostenere la rotazione del rotore. Essendo i campi rotanti di statore e di rotore sempre fissi fra loro, essi si possono sommare per ottenere il campo rotante risultante al traferro. È di fatto a questo che sono dovute le tensioni indotte nello statore e nel rotore.

Si passa ora ad analizzare il principio di generazione della coppia ipotizzando una struttura di rotore a gabbia di scoiattolo. Si prenda in esame la figura 5 che mostra, rettificato su una linea orizzontale, un rotore a gabbia. In figura 5a è

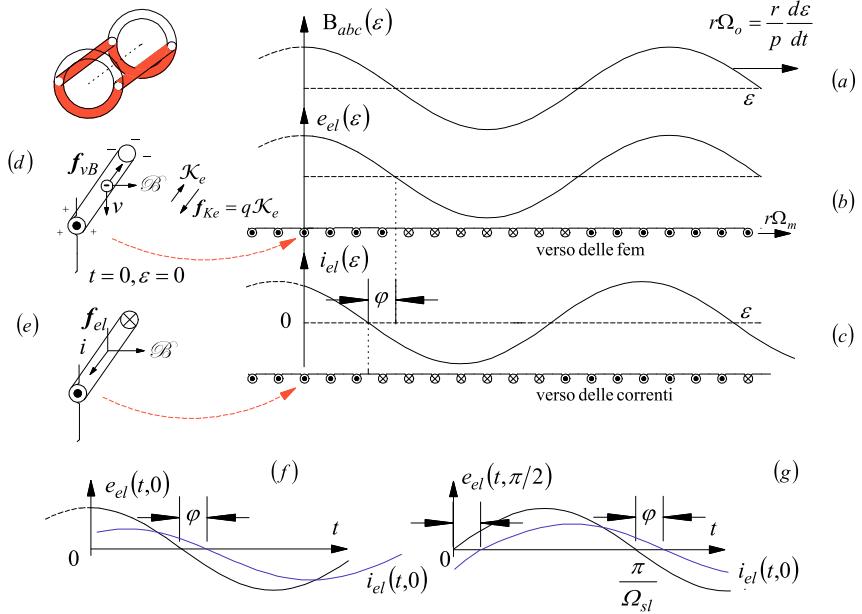


Figura 5: Distribuzione delle *fem* e delle correnti in un rotore a gabbia e principio di generazione della coppia.

riportata, all'istante $t = 0$, la distribuzione dell'induzione al traferro $B_{abc}(\varepsilon)$ dovuta alle correnti statoriche. Detto r il raggio al traferro, essa ruota a velocità $r\Omega_0$ e vale in modulo

$$B_{abc}(t, \varepsilon) = B \cos(\Omega_s t - \varepsilon) \quad (6)$$

dove ε rappresenta la coordinata angolare, espressa in *rad.el.*, rispetto a un sistema fisso con lo statore.

Su una carica elettrica puntiforme q (negativa nel caso in cui la carica sia un elettrone) in moto con velocità \vec{v} rispetto al campo di induzione magnetica \vec{B} che caratterizza la regione ove la carica si sposta, agisce una forza \vec{f}_{vB} proporzionale a q stessa e al prodotto vettoriale di \vec{v} per \vec{B} secondo la formula:

$$\vec{f}_{vB} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7)$$

Si applichi il concetto ad una sbarra di rotore (del tipo a gabbia), che ruota in senso antiorario, seguendo con velocità tangenziale $r\Omega_m$ il campo rotante B_{abc} prodotto dall'avvolgimento statorico. Per il momento si ipotizzi un rotore privo degli anelli delle testate, ovvero costituito da sbarre isolate. La (7) richiede la velocità reale *della carica rispetto al campo magnetico*⁵. Essa si muove lungo il traferro con velocità tangenziale

$$v = r(\Omega_m - \Omega_o) = -\frac{r\Omega_s}{p} \left(\frac{\Omega_s - p\Omega_m}{\Omega_s} \right) = -\frac{rs\Omega_s}{p} \quad (8)$$

che, essendo negativa per scorrimento s positivo, ovvero nel funzionamento da motore della macchina, è diretta come nella figura 5.

La forza elementare (7), agendo su tutti gli elettroni, provoca uno spostamento di carica, e dunque un campo elettrico k_e , diretto dal potenziale maggiore a quello minore, che origina sulla carica una forza $f_{ke} = qk_e$, nella stessa direzione della (7) ma di verso opposto. Complessivamente, sulla carica q agisce la forza di Lorentz $\vec{f} = q\vec{k}_e + q\vec{v} \times \vec{B}$, che in condizioni di equilibrio deve essere nulla e che in condizioni di ortogonalità tra campo magnetico e velocità della carica (figura 5d) comporta che sia $qk_e = -qB_{abc}v$. Per integrazione lungo la direzione del campo k_e , che coincide qui con il conduttore filiforme, ovvero la sbarra di lunghezza L , si ottiene la nota espressione della *fem* elementare che viene indotta sulla singola sbarra di rotore:

$$e_{el}(t, \varepsilon) = k_e L = -B_{abc}(t, \varepsilon) v L = B_{abc}(t, \varepsilon) \frac{Lrs\Omega_s}{p} \quad (9)$$

La distribuzione dell'intensità della *fem* indotta, con il verso indicato nella figura 5b segue quella di B . Essa sarà massima nelle barre giacenti, istante per istante, nel punto di massimo del campo al traferro e cambierà di verso ove cambia di segno il campo rotante.

Va osservato che la (9) rappresenta la *distribuzione* della forza elettromotrice elementare al traferro. In virtù del suo legame con l'induzione al traferro $B_{abc}(t, \varepsilon)$, essa ruoterà con velocità $r\Omega_0$ al traferro. Ciascuna barra di rotore, ad ogni istante, è sede della e_{el} che compete alla posizione occupata. Si consideri ad esempio la barra che occupa la posizione $\varepsilon = 0$ (figura 5-(d)). All'istante $t = 0$ essa è sede della *fem* massima E_{el} . La distribuzione di $e_{el}(\varepsilon, t)$ però si sposta verso destra alla velocità reale $r\Omega_0$, mentre la barra in questione si sposta alla velocità $r\Omega_m$. Dunque è come se la barra si muovesse verso sinistra ad una velocità $r(\Omega_0 - \Omega_m)$, "percorrendo" a ritroso la distribuzione spaziale di e_{el} alla velocità angolare reale $(\Omega_0 - \Omega_r)$. Ricordando che nella figura 5-(b)

⁵ Dunque pensando il campo fermo ed osservando come si muove la carica rispetto ad esso.

l'ascissa è la coordinata angolare elettrica ε , la distribuzione di e_{el} ha periodicità in angolo reale di $2\pi/p$: ovvero, la barra presa in considerazione percorre a ritroso un'intera cosinusoida in un tempo $T = (2\pi/p)/(\Omega_0 - \Omega_r) = (2\pi)/(\Omega_s - p\Omega_m) = (2\pi)/\Omega_{sl}$. In altre parole, è sede di una *fem* cosinusoidale $E_{el} \cos(\Omega_{sl}t)$. Per le altre barre vale lo stesso ragionamento, traslato dell'opportuno angolo di fase rispetto a quella osservata.

Quando le barre sono chiuse in cortocircuito tramite gli anelli, e nell'ipotesi che le barre siano equispaziate, le tensioni indotte su di esse rappresentano un sistema polifase simmetrico che crea un sistema polifase simmetrico di correnti di rotore. Supponendo per semplicità che tali anelli siano dei collegamenti ideali e ricordando che la somma delle correnti in tutte le barre deve necessariamente essere nulla si dimostra, con una certa complessità, che i due anelli di chiusura sono equipotenziali. Pertanto, le barre possono essere considerate come tanti circuiti elettrici indipendenti, percorsi da correnti tutte sfasate dello stesso angolo φ rispetto alla relativa forza elettromotrice e_{el} . Se le barre fossero puramente resistive, le correnti presenterebbero la stessa distribuzione lungo il traferro delle *fem* indotte. Essendo invece di natura resistivo-induttiva, su ciascuna barra la corrente è (nel tempo) in ritardo rispetto alla relativa forza elettromotrice di un angolo φ pari a

$$\varphi = \arctan \frac{X_{el}}{R_{el}} \quad (10)$$

ove X_{el} rappresenta la reattanza elementare di ciascuna barra valutata alla pulsazione di scorrimento $s\Omega_s$, mentre R_{el} è la resistenza.

Le figura 5f e figura 5g, riportano (a titolo d'esempio) gli andamenti nel tempo della tensione e corrente nelle due barre che all'istante $t = 0$ siano rispettivamente allineate con le ascisse $\varepsilon = 0$ e a $\varepsilon = +\pi/2$ rad.el.. L'andamento della distribuzione della corrente nel traferro (all'istante $t = 0$, in cui sono valutate anche le curve nella figura 5a e figura 5b) è ovviamente sinusoidale, ma in ritardo (ad esempio, la corrente non raggiunge il suo massimo nel punto $\varepsilon = 0$ all'istante $t = 0$, bensì all'istante $t = \varphi/(s\Omega_s) > 0$). Osservando invece la distribuzione spaziale delle correnti, è corretto aspettarsi, come osservando due corridori in una pista circolare, che l'onda di corrente abbia un massimo ("posizione del corridore in ritardo") collocata prima (nello spazio) rispetto al massimo di quella di tensione ("posizione del corridore in anticipo"). La distribuzione (in ritardo) della corrente lungo il traferro, all'istante $t = 0$ è riportata nella figura 5c. È ora possibile valutare la coppia conseguente all'interazione fra le correnti elementari rotoriche e l'induzione magnetica dovuta alle correnti statoriche. Si consideri un conduttore filiforme di lunghezza L , immerso in un campo magnetico B e percorso da una corrente elettrica i . Su ciascuna carica agisce ora anche la

forza di Lorentz legata al suo movimento per effetto del campo elettrico, come riportato nella figura 5⁶. La forza complessiva agente sul conduttore è data dalla somma vettoriale delle forze di Lorentz applicate alle singole cariche:

$$\vec{f}_{el} = Li_{el} \vec{u}_T \times \vec{B} \quad (11)$$

Nel motore, i conduttori degli avvolgimenti di statore e di rotore sono disposti assialmente e immersi nelle linee del campo radiale al traferro: in base alla (11), su ciascuna sbarra agirà una forza tangenziale elementare

$$f_{el} = BLi_{el} = B(\varepsilon) Li_{el}(\varepsilon) \quad (12)$$

rappresentata nella figura 5e alla quale è associato il momento elementare

$$M_{el} = f_{el}r = B(\varepsilon) Lri_{el}(\varepsilon) \quad (13)$$

Alcune forze e momenti elementari saranno rivolti secondo il verso di rotazione del campo, altri in verso opposto, come si intuisce dalla figura 5 considerando che in certi tratti la corrente mantiene lo stesso verso mentre l'induzione cambia di segno. Il contributo di tali momenti lungo tutta la circonferenza del traferro determina la coppia istantanea sul rotore. Nel tempo, tutte le barre sono interessate da tensioni indotte e correnti sinusoidali, ciascuna sfasata rispetto alla precedente di un angolo indicato dalla (1).

Il prodotto $B(t)I_{el}(t)$ sarà composto da un termine medio ed uno alternato (in t). Si noti che nel periodo $2\pi/\Omega_{sl}$ tutte le barre contribuiscono con il solo valore medio. La coppia media complessiva si ottiene moltiplicando tale valore medio per il numero totale di barre N_b :

$$T = N_b \underbrace{\frac{1}{2\pi/\Omega_{sl}} \int_0^{2\pi/\Omega_{sl}} B(t) Lri_{el}(t) dt}_{\text{Momento medio su una barra}} = \frac{N_b Lr B I_{el}}{2} \cos(\varphi). \quad (14)$$

Ci si può chiedere se la coppia sia costante solo in media, o anche istantaneamente. Lo si può desumere facendo la somma delle coppie istantanee sulle barre. Se le barre fossero infinite, questo equivarrebbe a calcolare

$$T_{ist} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\varepsilon) Lri_{el}(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{Lr B I_{el}}{2} \cos(\varphi). \quad (15)$$

⁶ Mentre nella (7) il movimento era legato al moto del conduttore.

che è appunto costante. La conclusione non cambia nel caso di un numero finito di barre che siano disposte simmetricamente e omogeneamente lungo il rotore.

Il simbolo della grandezza sinusoidale, senza alcun accento, indica il valore massimo (modulo) della grandezza stessa. La (14) può essere scritta in altro modo ricordando che, dalla (9), è:

$$E_{el} = \frac{BLsr\Omega_s}{p} \quad (16)$$

$$E_{el} = I_{el}Z_{el}$$

e $Z_{el,s} = |R_{el} + jX_{el}|$ è l'impedenza elementare di ciascuna barra, alla frequenza di scorrimento. Uguagliando le (16) si ottiene

$$B = \frac{pI_{el}Z_{el}}{Lsr\Omega_s} \quad (17)$$

che sostituita nella (14) porge:

$$T = \frac{pN_b I_{el}^2 Z_{el}}{2s\Omega_s} \cos(\varphi) = p \frac{I_{el,eff}^2 R_{el} N_b}{s\Omega_s} \quad (18)$$

ove $I_{el,eff}$ rappresenta il valore efficace delle correnti in ciascuna barra. Si riconosce che

$$T = p \frac{P_{jr}}{s\Omega_s} \quad (19)$$

dove P_{jr} è la totale potenza dissipata per effetto Joule nella gabbia rotorica. Tale espressione è valida quale che sia la struttura dell'avvolgimento di rotore; in particolare se ancora si pensa ad un equivalente avvolgimento trifase e si indicano con R_r e $I_{r,eff}$ rispettivamente la resistenza e il valore efficace della corrente di ciascuna fase, si ha:

$$T = p \frac{3I_{r,eff}^2 R_r}{s\Omega_s} = p \frac{3}{\Omega_s} \frac{R_r}{s} I_{r,eff}^2 \quad (20)$$

e la *potenza meccanica generata* risulta, ricordando la definizione di scorrimento s :

$$P = T\Omega_m = \frac{3I_{r,eff}^2 R_r}{s\Omega_s} p\Omega_m = \frac{3I_{r,eff}^2 R_r}{s\Omega_s} \Omega_s (1-s) = 3I_{r,eff}^2 R_r \frac{(1-s)}{s} \quad (21)$$

corrispondente alla potenza che le correnti rotoriche dissiperebbero su una fittizia resistenza $R_r(1-s)/s$.

La totale potenza coinvolta nel rotore, detta anche *potenza trasmessa* P_{tr} dallo statore al rotore o *potenza al traferro*, è pari alla somma delle perdite Joule di rotore e alla potenza meccanica generata. Essa vale:

$$P_{tr} = P + P_{jr} = \frac{3I_{r,eff}^2 R_r (1-s)}{s} + 3I_{r,eff}^2 R_r = \frac{3I_{r,eff}^2 R_r}{s} \quad (22)$$

La coppia (20) si può allora esprimere come

$$T = p \frac{P_{tr}}{\Omega_s} \quad (23)$$

A completamento dei passaggi analitici, conviene fare alcune considerazioni. La (18) mostra che la coppia dipende sia dall'intensità delle correnti di rotore sia dallo scorrimento. Per piccoli valori di scorrimento, come si verifica attorno alle condizioni nominali di funzionamento, la frequenza di scorrimento è piccola e quindi il circuito rotorico si presenta pressoché puramente resistivo. Le correnti di rotore risultano proporzionali alle *fem*, che crescono linearmente con s . Dato che la corrente appare al quadrato a numeratore, per piccoli valori dello scorrimento si ha pertanto una coppia crescente con lo scorrimento stesso, se l'intensità massima del campo rotante al traferro dovuto alle correnti statoriche si mantiene costante. All'aumentare dello scorrimento e quindi della frequenza rotorica, l'impedenza di rotore aumenta a causa della componente reattiva. Pertanto la corrente di rotore cresce meno che linearmente con s , fino ad essere praticamente indipendente da esso, perché ad un aumento delle *fem* corrisponde un aumento di Z_{el} . Complessivamente, la coppia aumenta con lo scorrimento fino ad un valore massimo⁷, per poi calare.

Si osservi infine che la coppia ha lo stesso segno di s ; infatti per ogni $s > 0$ si presenta sempre la situazione illustrata nella figura 5. Per $s < 0$ invece si inverte il moto relativo fra campo rotante e rotore (la velocità relativa è infatti data da $s\omega_s$) e quindi si inverte il verso di e_{el} , a parità di distribuzione dell'induzione magnetica al traferro B . Anche la curva di corrente i_{el} si modifica, presentando un massimo a destra della e_{el} invece che a sinistra. In base alla (12) le forze elementari cambiano tutte di segno (cioè di verso) e, conseguentemente, cambia di segno anche la coppia.

1.5 EQUAZIONI DI TENSIONE NEL SISTEMA STAZIONARIO

D'ora in poi si farà riferimento per il rotore ad un avvolgimento trifase distribuito del tutto simile a quello di statore, senza più preoccuparsi di quale sia l'effettiva struttura costruttiva del rotore stesso.

⁷ Sempre nelle ipotesi di induzione massima costante al traferro dovuta alle correnti statoriche.

Per richiamare il funzionamento del motore a induzione si può partire dalle equazioni dinamiche⁸ di bilancio delle tensioni delle sue fasi a, b, c statoriche e rotoriche, che con la convenzione degli utilizzatori sono per lo statore:

$$\begin{aligned} u_{sa} &= R_s i_{sa} + \frac{d\lambda_{sa}}{dt} \\ u_{sb} &= R_s i_{sb} + \frac{d\lambda_{sb}}{dt} \\ u_{sc} &= R_s i_{sc} + \frac{d\lambda_{sc}}{dt} \end{aligned} \quad (24)$$

e per il rotore

$$\begin{aligned} u_{ra} &= R_r i_{ra} + \frac{d\lambda_{ra}}{dt} = 0 \\ u_{rb} &= R_r i_{rb} + \frac{d\lambda_{rb}}{dt} = 0 \\ u_{rc} &= R_r i_{rc} + \frac{d\lambda_{rc}}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

dove l'uguaglianza a zero delle tensioni di rotore tratta il caso di fasi rotoriche in corto circuito. Si è omessa per semplicità la dipendenza dal tempo delle tensioni u , delle correnti i e dei flussi concatenati λ . Ciascuno dei flussi concatenati che appare nelle (24) e (25) è dovuto all'effetto combinato di tutte le correnti presenti nel motore. Assumendo che il circuito magnetico sia privo di correnti parassite ed inoltre che non manifesti saturazione e isteresi magnetiche, ciascun flusso concatenato, per esempio λ_{sa} , può essere espresso come:

$$\lambda_{sa} = \lambda_{ssa} + \lambda_{sra} \quad (26)$$

ove i due contributi sono:

$$\lambda_{ssa} = L_{ss} i_{sa} + M_{ss} i_{sb} + M_{ss} i_{sc} \quad (27)$$

$$\lambda_{sra} = M_{sr} (\vartheta_{me}) i_{ra} + M_{sr} \left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3} \right) i_{rb} + M_{sr} \left(\vartheta_{me} + \frac{4\pi}{3} \right) i_{rc} \quad (28)$$

Per la simmetria cilindrica e l'isotropia della struttura, si è posto costante, ovvero indipendente dalla posizione ϑ_{me} del rotore, il coefficiente L_{ss} di auto induzione della fase di statore, costanti e uguali i coefficienti di mutua induzione M_{ss} fra le fasi di statore b e c e la fase a , e pure tutti espressi dalla stessa funzione $M_{sr} (\vartheta_{me})$ i coefficienti di mutua induzione fra le fasi di statore e rotore.

⁸ Valide pertanto sempre, anche non a regime.

L'induttanza propria di statore L_{ss} si separa nell'induttanza di dispersione di statore $L_{\sigma s}$ (responsabile, *per la singola fase*, del flusso che non va ad interessare il traferro del motore, e che si chiude dunque tutto nello statore) e nell'induttanza di magnetizzazione L_{sm} .

Nell'ipotesi di componente omopolare nulla per le correnti, la (27) diventa allora:

$$\lambda_{ssa} = i_{sa} (L_{ss} - M_{ss}) = i_{sa} (L_{\sigma s} + L_{sm} - M_{ss}) \quad (29)$$

Espressioni analoghe alla (29) si possono scrivere per le altre due fasi di statore.

Le equazioni (26)-(29) valgono per avvolgimenti di statore di distribuzione qualunque. Tuttavia, se le forze magneto-motrici (*fmm*) al traferro sono sinusoidali, le mutue induttanze tra le fasi sono legate alle autoinduttanze dalla semplice relazione⁹:

$$M_{ss} = L_{sm} \cos (2\pi/3) = -\frac{L_{sm}}{2} \quad (30)$$

Tale relazione, sostituita nella (29) porge:

$$\begin{aligned} \lambda_{ssa} &= i_{sa} \left(L_{\sigma s} + L_{sm} + \frac{L_{sm}}{2} \right) = L_s i_{sa} \\ L_s &= L_{\sigma s} + \frac{3L_{sm}}{2} = L_{\sigma s} + L_{os} \end{aligned} \quad (31)$$

dove L_s è detta *induttanza sincrona di statore*, o semplicemente *induttanza di statore*. Si noti che essa comprende anche gli effetti legati alla presenza delle altre due fasi. L'induttanza L_{os} , detta *induttanza principale di statore*, o *induttanza di magnetizzazione trifase (three-phase magnetising inductance)*, simboleggia il flusso non disperso e concatenato con la fase *a* quando il motore è alimentato con un sistema trifase di correnti, dunque tenendo conto anche del flusso prodotto dalle altre due fasi, che si concatena con la fase *a*.

Se anche $M_{sr} (\vartheta_{me})$ può essere rappresentato con un funzione cosinusoidale ($M_{sr} (\vartheta_{me}) = M_{sr} \cos (\vartheta_{me})$), la (28) diventa:

$$\begin{aligned} \lambda_{sra} &= M_{sr} \cos (\vartheta_{me}) i_{ra} + M_{sr} \cos \left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3} \right) i_{rb} + \\ &+ M_{sr} \cos \left(\vartheta_{me} + \frac{4\pi}{3} \right) i_{rc} \end{aligned} \quad (32)$$

⁹ Il flusso prodotto da una fase e non disperso si concatena con le altre due fasi secondo il $\cos (2\pi/3)$, per la distribuzione spaziale simmetrica delle tre fasi.

Essa, sostituita nella (26) assieme alla prima delle (31) porge:

$$\begin{aligned}\lambda_{sa} = & L_s i_{sa} + M_{sr} \cos(\vartheta_{me}) i_{ra} + M_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) i_{rb} + \\ & + M_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{4\pi}{3}\right) i_{rc}\end{aligned}\quad (33)$$

e analoghe espressioni si scrivono per λ_{sb} e λ_{sc} e per le fasi di rotore. In particolare, per la fase a di rotore si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\lambda_{ra} = & L_r i_{ra} + M_{sr} \cos(\vartheta_{me}) i_{sa} + M_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) i_{sb} + \\ & + M_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{4\pi}{3}\right) i_{sc}\end{aligned}\quad (34)$$

$$L_r = L_{rr} - M_{rr} = L_{\sigma r} + L_{rm} - M_{rr} = L_{\sigma r} + \frac{3L_{rm}}{2} = L_{\sigma r} + L_{or}$$

L'induttanza L_r è detta *induttanza sincrona di rotore*, o semplicemente *induttanza di rotore*. Come nello statore, essa comprende gli effetti legati alla presenza delle altre due fasi rotoriche. Pure in questo caso è possibile separare l'induttanza propria di rotore L_{rr} nell'induttanza di dispersione di rotore L_{sr} e nell'induttanza di magnetizzazione L_{rm} . L'induttanza di magnetizzazione trifase di rotore L_{or} simboleggia il flusso non disperso e concatenato con la fase a di rotore quando anche le altre due fasi sono alimentate.

Ripetendo per tutte le fasi il procedimento che ha portato alle (33) e alle (34), si ottiene il sistema differenziale che descrive la dinamica elettrica del motore in esame. Appare evidente la sua complessità dovuta anche alla dipendenza di alcuni suoi coefficienti dalla posizione rotorica.

1.6 ANALISI DEL FUNZIONAMENTO IN REGIME SINUSOIDALE

Le stesse equazioni (33) e (34) possono essere particolarizzate per il regime sinusoidale¹⁰, sostituendo (per la fase a , essendo ovvia la trasposizione del procedimento alle altre fasi):

$$\begin{aligned}i_{sa} &= I_s \cos(\Omega_s t - \varphi_{is}) \Rightarrow \dot{\mathbf{I}}_s \\ i_{ra} &= I_r \cos(\Omega_s t - \Omega_{me} t - \varphi_{ir}) \Rightarrow \dot{\mathbf{I}}_r^s e^{-j\vartheta_{me}}\end{aligned}\quad (35)$$

¹⁰ Sulla notazione: I fasori temporali senza segno di vettore si riferiscono al valore massimo della grandezza sinusoidale rappresentata. Quando sarà necessario considerare il valore efficace, lo si indicherà esplicitamente nel pedice.

Nelle (35) sono stati indicati i fasori temporali associati alle grandezze sinusoidali. Si noti che i fasori di rotore e di statore sono relativi a sistemi con frequenze diverse; per rendere possibile un loro utilizzo combinato occorre esprimere in un sistema isofrequenziale. Questo avviene esplicitando la frequenza di scorrimento come differenza tra la frequenza di statore Ω_s e quella meccanico-elettrica Ω_{me} . L'apice s nella seconda delle (35), non strettamente necessario, è stato aggiunto solo per evidenziare che si tratta di un fasore "riportato allo statore", ovvero isofrequenziale con le grandezze statoriche.

Di seguito, è riportato un esempio di passaggio (per la fase ra) da equazioni dinamiche a equazioni in regime sinusoidale. Sostituendo le (35) nella (34) si ottiene:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ra} = & L_r I_r \cos(\Omega_{sl} t - \varphi_{ir}) + M_{sr} \cos(\vartheta_{me}) I_s \cos(\Omega_s t - \varphi_{is}) + \\ & + M_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) I_s \cos\left(\Omega_s t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_{is}\right) + \\ & + M_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{4\pi}{3}\right) I_s \cos\left(\Omega_s t - \frac{4\pi}{3} - \varphi_{is}\right).\end{aligned}\quad (36)$$

Ricordando che $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$ ed applicando tale formula ripetutamente si trova:

$$\Lambda_{ra} = L_r I_r \cos(\Omega_{sl} t - \varphi_{ir}) + \frac{3}{2} M_{sr} I_s \cos(\Omega_s t - \varphi_{is} - \Omega_{me} t) \quad (37)$$

L'equazione (37), può essere espressa secondo la notazione dei fasori temporali:

$$\dot{\Lambda}_r^r = L_r \dot{I}_r^r + L_m \dot{I}_s^s e^{-j\vartheta_{me}} \quad (38)$$

dove, per una volta, si sono indicati gli apici per ricordare la frequenza associata a ciascun fasore, e si è definita l'*induttanza di magnetizzazione*

$$L_m = \frac{3}{2} M_{sr} \quad (39)$$

Moltiplicando ambo i membri della (38) per $e^{j\vartheta_{me}}$ si riporta l'espressione ad un sistema di coordinate solidale allo statore, ottenendo:

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}_r e^{j\vartheta_{me}} &= L_r \dot{I}_r e^{j\vartheta_{me}} + L_m \dot{I}_s \\ \dot{\Lambda}_r^s &= L_r \dot{I}_r^s + L_m \dot{I}_s\end{aligned}\quad (40)$$

Applicando lo stesso metodo per ricavare il flusso concatenato con la fase sa di statore in regime sinusoidale si ottiene

$$\dot{\Lambda}_s = L_s \dot{I}_s + L_m \dot{I}_r^s \quad (41)$$

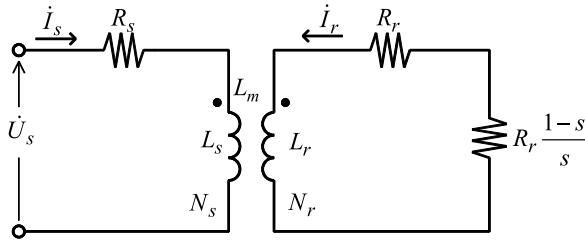


Figura 6: Circuito elettrico equivalente di una fase.

Le equazioni di bilancio della tensione di statore e di rotore per la singola fase (ad esempio, la fase *a*) si ottengono esprimendo nella notazione dei fasori temporali le prime equazioni delle (24) e (25):

$$\begin{aligned}\dot{U}_s &= R_s \dot{I}_s + j\Omega_s \dot{\lambda}_s \\ 0 &= R_r \dot{I}_r + j\Omega_s \dot{\lambda}_r = R_r \dot{I}_r + j\Omega_s \dot{\lambda}_r - j\Omega_{me} \dot{\lambda}_r\end{aligned}\quad (42)$$

La seconda equazione, ancora alla frequenza rotorica, deve essere riportata, per omogeneità, alla frequenza statorica, moltiplicando ambo i membri per $e^{j\vartheta_{me}}$:

$$0 = R_r \dot{I}_r + j\Omega_s \dot{\lambda}_r - j\Omega_{me} \dot{\lambda}_r \quad (43)$$

Si trova allora:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_r^s &= \frac{R_r \dot{I}_r^s}{j(\Omega_{me} - \Omega_s)} \\ -j\Omega_{me} \dot{\lambda}_r^s &= \frac{-j\Omega_{me} R_r \dot{I}_r^s}{j(\Omega_{me} - \Omega_s)} = R_r \frac{1-s}{s} \dot{I}_r^s\end{aligned}\quad (44)$$

dove $s = (\Omega_s - \Omega_{me})/\Omega_s$ è lo scorrimento (cfr. (3)). Componendo opportunamente le (40) - (44) si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{U}_s &= R_s \dot{I}_s + j\Omega_s L_s \dot{I}_s + j\Omega_s L_m \dot{I}_r^s \\ 0 &= R_r \dot{I}_r^s + j\Omega_s L_r \dot{I}_r^s + j\Omega_s L_m \dot{I}_s + R_r \frac{1-s}{s} \dot{I}_r^s\end{aligned}\quad (45)$$

Tale coppia di equazioni consente di tracciare il circuito elettrico equivalente in regime sinusoidale del motore asincrono, riportato nella figura 6.

1.7 GENERALIZZAZIONE DEL CIRCUITO EQUIVALENTE

Si passa ora ad elaborare una generalizzazione del circuito equivalente. Ogni mutuo induttore può essere schematizzato con un doppio bipolo di induttanze

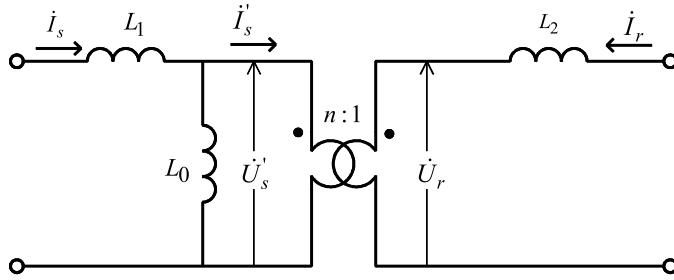


Figura 7: Schema equivalente di un mutuo induttore

contenente un trasformatore, come riportato nella figura 7. Si ricordi che tutte le grandezze sono riferite allo stesso riferimento solidale allo statore. Pertanto, sia per il rotore, sia per lo statore, si tratta di fasori isofrequenziali, alla pulsazione Ω_s . Per ogni scelta arbitraria del rapporto spire n del trasformatore ideale di figura 7, con riferimento ai simboli di figura 6, si possono scrivere le equazioni di bilancio delle tensioni a primario e a secondario. A primario si ha:

$$\begin{aligned} j\Omega_s L_1 \dot{I}_s + j\Omega_s L_0 \dot{I}_s - j\Omega_s L_0 \dot{I}'_s &= j\Omega_s L_s \dot{I}_s + j\Omega_s L_m \dot{I}_r \\ j\Omega_s (L_1 + L_0) \dot{I}_s + j\Omega_s L_0 \frac{\dot{I}_r}{n} &= j\Omega_s L_s \dot{I}_s + j\Omega_s L_m \dot{I}_r \\ \Rightarrow L_s &= L_1 + L_0 \quad L_m = \frac{L_0}{n} \end{aligned} \quad (46)$$

e analogamente a secondario:

$$\begin{aligned} j\Omega_s L_2 \dot{I}_r + \frac{\dot{U}'_s}{n} &= j\Omega_s L_r \dot{I}_r + j\Omega_s L_m \dot{I}_s \\ j\Omega_s L_2 \dot{I}_r + \frac{1}{n} (j\Omega_s L_0 \dot{I}_s - j\Omega_s L_0 \dot{I}'_s) &= j\Omega_s L_r \dot{I}_r + j\Omega_s L_m \dot{I}_s \\ j\Omega_s L_2 \dot{I}_r + \frac{1}{n} \left(j\Omega_s L_0 \dot{I}_s + j\Omega_s L_0 \frac{\dot{I}_r}{n} \right) &= j\Omega_s L_r \dot{I}_r + j\Omega_s L_m \dot{I}_s \\ j\Omega_s \left(L_2 + \frac{L_0}{n^2} \right) \dot{I}_r + j\Omega_s \frac{L_0}{n} \dot{I}_s &= j\Omega_s L_r \dot{I}_r + j\Omega_s L_m \dot{I}_s \\ \Rightarrow L_r &= L_2 + \frac{L_0}{n^2} \end{aligned} \quad (47)$$

Valgono naturalmente anche le relazioni inverse:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_s - nL_m \\ L_2 &= L_r - \frac{L_m}{n} \\ L_0 &= nL_m \end{aligned} \quad (48)$$

Si può ora sostituire lo schema di figura 7 in quello di figura 6 e riportare al primario tutte le grandezze che appaiono al secondario, eliminando così il trasformatore ideale. L'equazione di tensione al secondario risulta:

$$\dot{U}_r = -\frac{R_r}{s} \dot{I}_r^s - j\Omega_s L_2 \dot{I}_r^s = -\frac{R_r}{s} \dot{I}_r^s - j\Omega_s \left(L_r - \frac{L_m}{n} \right) \dot{I}_r^s \quad (49)$$

Moltiplicando ambo i membri per il rapporto di trasformazione n si ha:

$$\dot{U}'_s = -n \frac{R_r}{s} \dot{I}_r^s - j\Omega_s (nL_r - L_m) \dot{I}_r^s = n^2 \frac{R_r}{s} \dot{I}'_s + j\Omega_s n^2 \left(L_r - \frac{L_m}{n} \right) \dot{I}'_s \quad (50)$$

dove è $\dot{I}_r^s = -n\dot{I}'_s$. Lo schema elettrico equivalente con tutte le grandezze riportate al primario è allora quello di figura 8, qui riportato per comodità.

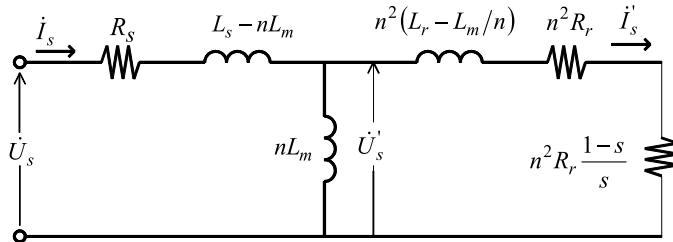


Figura 8: Schema elettrico equivalente generale del motore ad induzione.

Come accennato, la scelta di n è arbitraria. Qualche scelta porterà ad induttanze con preciso significato fisico, altre no. Di seguito si prenderà in considerazione il caso $n = N_s/N_r$, intendendo il rapporto di trasformazione tra il numero di spire effettive di una fase di statore N_s e di una di rotore N_r ¹¹. Si ottiene così il circuito equivalente classico, tutto riportato al primario, così come riportato nella figura 9.

I parametri presenti nella figura 9 sono legati ai parametri del circuito di figura 8 dalle relazioni:

$$\begin{aligned} L'_{\sigma r} &= n^2 \left(L_r - L_m \frac{N_r}{N_s} \right) = \left(\frac{N_s}{N_r} \right)^2 L_{\sigma r} \\ R'_r &= n^2 R_r = \left(\frac{N_s}{N_r} \right)^2 R_r; \quad L'_m = nL_m = \frac{N_s}{N_r} L_m \end{aligned} \quad (51)$$

¹¹ Tali valori sono comprensivi dei coefficienti che servono a ricondurre un avvolgimento distribuito ad uno di tipo concentrato agli effetti del calcolo del flusso concatenato con ciascun avvolgimento.

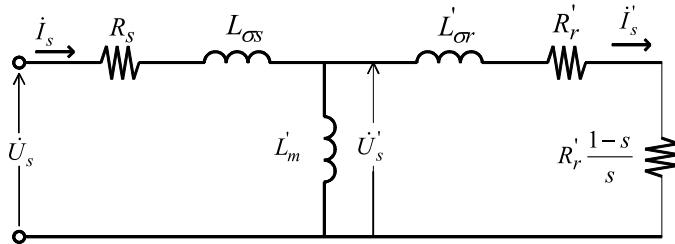


Figura 9: Circuito equivalente classico del motore asincrono.

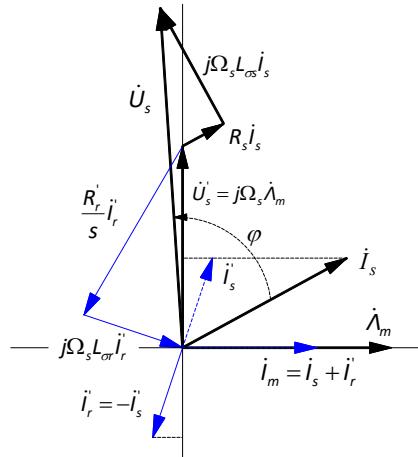


Figura 10: Diagramma fasoriale del circuito elettrico equivalente classico.

Le induttanze L_{os} e L'_{or} sono chiamate induttanze di dispersione di statore e di rotore, rispettivamente. Esse rappresentano quella parte di flusso che prodotto dallo statore (rotore) non si concatena con il rotore (statore). Si può dimostrare che $L'_m = L_{os}$. Tale induttanza, percorsa dalle correnti di statore e di rotore (riportata allo statore), rappresenta il flusso che si scambiano i circuiti, definito appunto flusso magnetizzante (o di magnetizzazione). Il flusso al traferro in regime sinusoidale si può esprimere dunque come:

$$\dot{\lambda}_m = L_{os} \left(\dot{I}_s + \frac{\dot{I}'_r}{n} \right) \quad (52)$$

È possibile tracciare anche il diagramma fasoriale relativo alle grandezze che appaiono nel circuito equivalente classico, come riportato nella figura 10:

1.8 FUNZIONAMENTO A FLUSSO AL TRAFERRO IMPRESSO

La coppia (20) può essere riscritta come segue:

$$T = \frac{p}{\Omega_s} 3 \frac{R_r}{s} I_{r,\text{eff}}^2 = \frac{p}{\Omega_s} 3 \frac{R'_r}{s} I'_{s,\text{eff}}^2 \quad (53)$$

Si può ricavare la corrente di rotore a partire dalla tensione U'_s definita nella figura 9:

$$I'_{s,\text{eff}}^2 = \frac{U'^2_{s,\text{eff}}}{\left(\frac{R'_r}{s}\right)^2 + (\Omega_s L'_{\sigma r})^2} = \frac{s^2 U'^2_{s,\text{eff}}}{R'^2_r + (s\Omega_s L'_{\sigma r})^2} \quad (54)$$

La (54) sostituita nella (53) porge:

$$T(\Omega_{sl}) = 3p \left(\frac{U'_{s,\text{eff}}}{\Omega_s} \right)^2 \frac{\Omega_{sl} R'_r}{(R'_r)^2 + (\Omega_{sl} L'_{\sigma r})^2} \quad (55)$$

La (55) indica che, fissato il flusso al traferro¹², la caratteristica meccanica (coppia-velocità) ha un ben preciso andamento che è funzione solo della pulsazione di scorrimento e dei parametri del motore. Pertanto, se tramite una opportuna strategia di controllo si mantiene costante il flusso al variare della frequenza di statore, la caratteristica meccanica risulta una famiglia di curve tutte uguali (figura 11), che traslano parallele a se stesse, dato che a scorrimento uguale corrisponde coppia uguale. Imponendo il flusso al traferro (definito dalla (52)) costante e pari al valore nominale $\lambda_{m,N}$ (e posizionato arbitrariamente sull'asse reale, per cui per esso si omette l'indicazione di fasore) si possono calcolare la tensione da imprimere e la corrente di statore risultante:

$$\begin{aligned} \dot{U}_s &= (R_s + j\Omega_s L_{\sigma s}) \dot{I}_s + j\Omega_s \lambda_{m,N} \\ \dot{I}_s &= \frac{\lambda_{m,N}}{L_{os}} + \frac{j\Omega_s \lambda_{m,N}}{\frac{R'_r}{s} + j\Omega_s L'_{\sigma r}} \\ &= \frac{\lambda_{m,N}}{L_{os}} + \frac{j\Omega_{sl} \lambda_{m,N}}{R'_r + j\Omega_{sl} L'_{\sigma r}} \end{aligned} \quad (56)$$

Va osservato che, fissata la frequenza di alimentazione Ω_s , al diminuire della velocità meccanica (e dunque al crescere dello scorrimento) l'impedenza di rotore diventa piccola rispetto alla reattanza di magnetizzazione. Voler imprimere

¹² Il flusso al traferro $\frac{U'_s}{\Omega_s}$, in base alla figura 16, è legato all'induttanza L_{os} e alla corrente che la percorre.

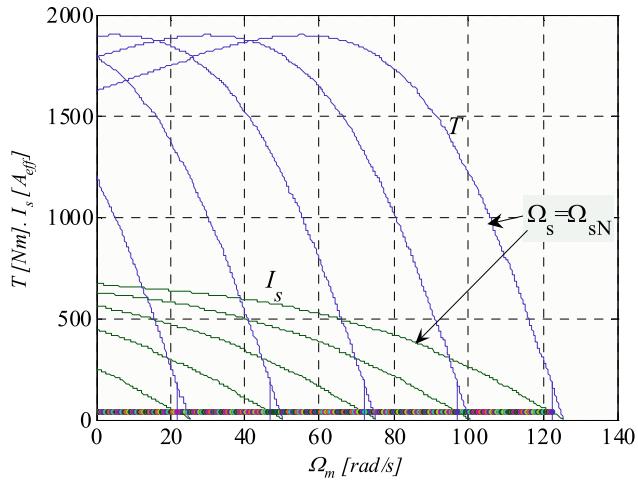


Figura 11: Caratteristiche meccaniche a flusso al traferro costante. $\Omega_s = [0, 4; 0, 6; 0, 8; 1] \Omega_{s,N}$

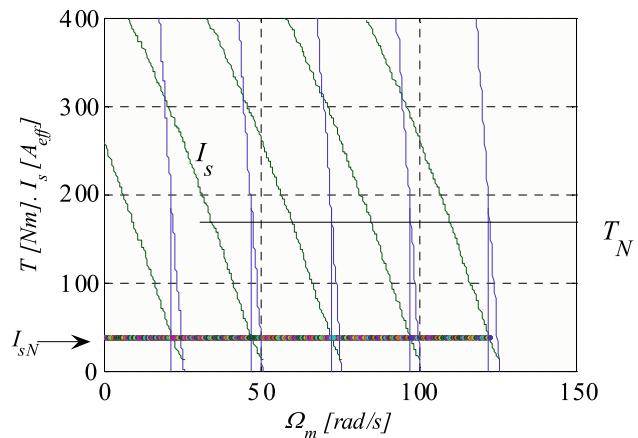


Figura 12: Particolare - fino ai valori nominali di coppia e corrente.

Table 1. Motor Data.

Parameter	Value
Rated output power	110 kW
Rated phase voltage RMS	380 V (Δ)
Pole pairs	3
Rated speed	979 rpm
Rated torque	1074 Nm
Inertia	1.56 kg m^2
Rated slip	0.0209
Stator resistance	54 $\text{m}\Omega$
Rotor resistance	62 $\text{m}\Omega$
Stator leakage inductance	0.8 mH
Rotor leakage inductance	0.5 mH
Magnetizing inductance	7.2 mH

Figura 13: Esempio di data sheet per IM di grossa taglia.

sempre lo stesso flusso (tenendo costante la frequenza di statore Ω_s) significa mantenere costante la tensione ai capi di L_m , e questo comporta una corrente di rotore crescente in modo notevole. Altrettanto sensibile risulta la caduta sull'impedenza statorica. Il risultato è che per lavorare a flusso costante occorrerebbe disporre di tensioni e correnti di statore assolutamente eccessive rispetto ai valori nominali.

Nella figura 11 e nelle altre figure del presente paragrafo le curve meccaniche sono state tracciate nell'ipotesi di non aver limiti su tensioni e correnti disponibili.

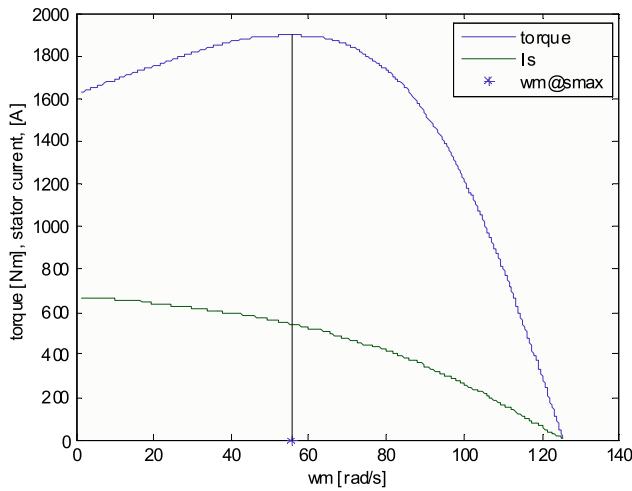
La caratteristica meccanica, *a flusso impresso*, che si ottiene per $\Omega_{s,N}$ per il motore dell'esempio (i cui dati sono contenuti nella tabella 1) è riportata nella figura 14.

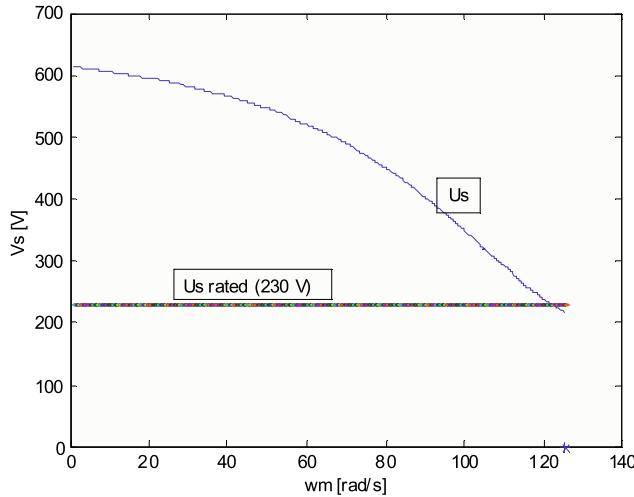
Il flusso nominale si ottiene dalle (56), ovvero risolvendo il circuito equivalente di figura 16 imponendo la tensione statorica di fase nominale (230 V), la velocità nominale (122.31 rad/s), lo scorrimento nominale (0.027), la corrente nominale (39.5 A) e ricavando il valore di tensione U'_s (210.77 V) alla pulsazione Ω_s nominale ($2\pi 60$ rad.el./s). Dal rapporto delle due si ricava $\Lambda_{m,N} = 0.5591$ Wb. Si ribadisce che il funzionamento a flusso al traferro impresso e costante¹³ è in pratica realizzabile solo entro i limiti di tensione e corrente nominale. Infatti, tali limiti permettono al motore (per costruzione) di lavorare a flusso nominale fino alla coppia nominale. Per scorrimenti maggiori, il ramo con la resistenza rotorica assume impedenze via via più piccole, e la corrente di statore necessaria (somma delle componenti che attraversano i due rami in parallelo nella figura 16) eccede la massima sopportabile. Anche la caduta sull'impedenza di statore, con tale elevata corrente, finisce per far superare il valore nominale alla tensione di

¹³ Essa prende il nome di “tecnica di controllo V/Hz”, illustrata in un capitolo successivo.

Tabella 1: Dati di targa e parametri di un motore asincrono.

Potenza nominale	$P_N = 22400 \text{ W}$
Resistenza di statore	$R_s = 0,294 \Omega$
Tensione nominale di linea	$U_{s,N} = 230 \text{ V}_{\text{eff}}$
Induttanza di dispersione di statore	$L_{\sigma s} = 0,0014 \text{ H}$
Corrente nominale di linea	$I_{s,N} = 39,5 \text{ A}_{\text{eff}}$
Induttanza di statore	$L_s = 0,0424 \text{ H}$
Frequenza nominale	$f_N = 60 \text{ Hz}$
Resistenza di rotore	$R_r = 0,156 \Omega$
ScorIMENTO nominale	$s_N = 0,027$
Induttanza di dispersione di rotore	$L_{\sigma r} = 0,00074 \text{ H}$
Velocità nominale	$\Omega_N = 1168 \text{ rpm}$
Induttanza di rotore	$L_r = 0,0417 \text{ H}$
Coppia nominale	$T_N = 183 \text{ Nm}$
Induttanza di magnetizzazione	$L_{os} = 0,041 \text{ H}$
Coppie polari	$p = 3$
Momento di inerzia del rotore	$J_m = 0,4 \text{ Kgm}^2$
Rapporto di trasformazione ideale (N_s/N_r)	$n = 1$
Flusso al traferro nominale	$\Lambda_{m,N} = 0,5591 \text{ Wb}$

Figura 14: Caratteristica meccanica a flusso impresso ($\Omega_s = \Omega_{s,N}$).

Figura 15: Tensione di fase a flusso impresso ($\Omega_s = \Omega_{s,N}$).

statore. Questo limite interviene sempre più presto via via che la frequenza di statore si avvicina alla nominale¹⁴.

1.8.1 Valori massimi di coppia elettromagnetica nel funzionamento a flusso al traferro impresso

Sostituendo nell'espressione della coppia (55) la pulsazione di scorrimento con la sua definizione ($\Omega_{sl} = \Omega_s - p\Omega_m$) si può esprimere la coppia evidenziando la sua dipendenza dalla velocità meccanica:

$$T(\Omega_m) = 3p \left(\frac{U'_s}{\Omega_s} \right)^2 \frac{(\Omega_s - p\Omega_m) R'_r}{(R'_r)^2 + ((\Omega_s - p\Omega_m) L'_{sr})^2} \quad (57)$$

Tale funzione di Ω_m può essere studiata con i mezzi classici dell'analisi matematica. In particolare, uguagliando a zero la derivata dell'espressione della coppia in funzione della velocità meccanica Ω_m si trova il punto di massimo della caratteristica meccanica del motore asincrono¹⁵

$$\frac{\partial T}{\partial \Omega_m} = \frac{-p \left[R'^2 + (s\Omega_s L'_{sr})^2 \right] + s\Omega_s \cdot 2s\Omega_s L'^2_{sr} p}{[R'^2 + (s\Omega_s L'_{sr})^2]^2} 3p \left(\frac{U'_s}{\Omega_s} \right)^2 R'_r = 0 \quad (58)$$

¹⁴ Il motivo è legato al fatto che la tensione è già molto alta per il termine $j\Omega_s L'_m$.

¹⁵ Si ricordi che $s\Omega_s = (\Omega_s - p\Omega_m)$ e che se $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ allora

$$f'(x) = \frac{n'(x)d(x) - n(x)d'(x)}{d^2(x)}$$

Il massimo si ha quando

$$\begin{aligned}
 R_r'^2 + (s\Omega_s L'_{\sigma r})^2 &= 2(s\Omega_s L'_{\sigma r})^2 \\
 \Rightarrow R_r'^2 &= (s\Omega_s L'_{\sigma r})^2 \\
 \Rightarrow (\Omega_s - p\Omega m)^2 &= \frac{R_r^2}{L_{\sigma r}^2}
 \end{aligned} \tag{59}$$

Dividendo ambo i membri per Ω_s si trova l'espressione dello scorrimento al quale si ha la coppia massima, che vale

$$\begin{aligned}
 s_{max} &= \frac{R_r'}{\Omega_s L'_{\sigma r}} = \frac{R_r}{\Omega_s L_{\sigma r}} \\
 T_{max} &= 3p \left(\frac{U_s'}{\Omega_s} \right)^2 \frac{1}{2L'_{\sigma r}}
 \end{aligned} \tag{60}$$

Si può osservare che lo scorrimento di coppia massima non dipenda dalla tensione di alimentazione, ma solo dai parametri del motore e dalla pulsazione sincrona. Allo stesso modo, è importante notare come la massima coppia ottenibile non dipenda dalla resistenza di rotore, ma solo dalla sua induttanza di dispersione. La (60), calcolata con i dati contenuti nella tabella 1, forge:

$$\begin{aligned}
 \omega_m \Big|_{T=T_{max}} &= \frac{\omega_s (1 - s_{max})}{p} \\
 &= \frac{2\pi \cdot 60 \left(1 - \frac{0,156}{2\pi \cdot 60 \cdot 7,4 \cdot 10^{-4}} \right)}{3} = 55,4 \text{ rad/s}
 \end{aligned} \tag{61}$$

$$T_{max} = \frac{3p}{n^2} \lambda_{rat}^2 \frac{1}{2L_{\sigma r}} = 9 \cdot 0,56^2 \frac{1}{2 \cdot 7,4 \cdot 10^{-4}} = 1900 \text{ Nm}$$

Questi dati trovano conferma nella simulazione, riportata nella figura 14.

1.9 FUNZIONAMENTO A TENSIONE IMPRESSA

Si analizza ora il caso il cui il motore asincrono sia semplicemente connesso alla rete di alimentazione, che gli fornisce la tensione di statore nominale. Il teorema di Thévenin, applicato al taglio $a - b$ del circuito equivalente di figura 9, permette di sostituire la rete che alimenta la serie delle due resistenze rotoriche con un unico generatore di tensione $\dot{U}_{s,eq}$ in serie con un'impedenza $\dot{Z}_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$, come riportato nella figura 16.

La tensione $U_{s,eq}$ è quella che si misura ai capi della serie di resistenze $R'_r + R'_r(1 - s)/s$ a morsetti a, b aperti, mentre Z_{eq} è l'impedenza vista ai capi della

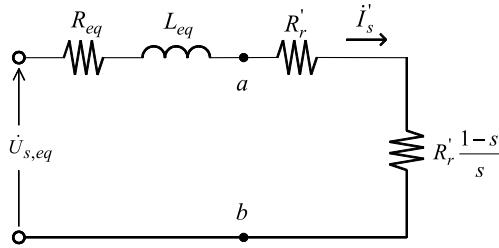


Figura 16: Circuito equivalente di una fase del motore, semplificato secondo Thévenin.

stessa serie quando si cortocircuiti il generatore di tensione U_s . Le espressioni sono le seguenti:

$$\dot{U}_{s,eq} = \frac{\dot{U}_s}{R_s + j\Omega_s (L_{\sigma s} + L_{os})} j\Omega_s L_{os} = \frac{\dot{U}_s}{R_s + j\Omega_s L_s} j\Omega_s L_{os} \quad (62)$$

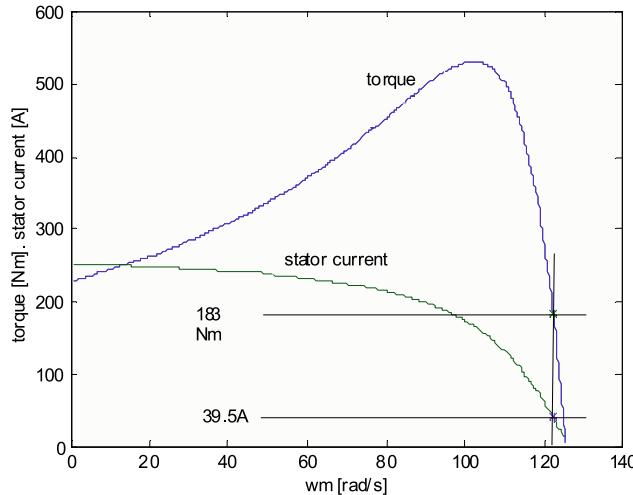
Nella seconda uguaglianza si è sfruttata l'identità (31). Dalla figura 9 non è difficile ricavare l'espressione dell'impedenza equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{eq} &= \frac{\Omega_s^2 L_{os}^2 R_s}{R_s^2 + (\Omega_s L_s)^2} + j\Omega_s \left[L'_{\sigma r} + \frac{L_{os} (R_s^2 + \Omega_s^2 L_{\sigma s} L_s)}{R_s^2 + (\Omega_s L_s)^2} \right] \\ &= R_{eq} + j\Omega_s L_{eq} \end{aligned} \quad (63)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{eq} &= j\Omega_s L'_{\sigma r} + \frac{1}{\frac{1}{j\Omega_s L_{os}} + \frac{1}{R_s + j\Omega_s L_{\sigma s}}} \\ &= j\Omega_s L'_{\sigma r} + \frac{(R_s + j\Omega_s L_{\sigma s}) j\Omega_s L_{os} (R_s - j\Omega_s L_s)}{R_s + j\Omega_s (L_{os} + L_{\sigma s}) (R_s - j\Omega_s L_s)} \\ &= j\Omega_s L'_{\sigma r} + j\Omega_s L_{os} \frac{R_s^2 + \Omega_s^2 L_{\sigma s} L_s - j\Omega_s L_s R_s + j\Omega_s L_{\sigma s} R_s}{R_s^2 + (\Omega_s L_s)^2} \\ &= j\Omega_s L'_{\sigma r} + j\Omega_s L_{os} \frac{R_s^2 + \Omega_s^2 L_{\sigma s} L_s - j\Omega_s L_{os} R_s}{R_s^2 + (\Omega_s L_s)^2} \\ &= j\Omega_s L'_{\sigma r} + \frac{\Omega_s^2 L_m'^2 R_s}{R_s^2 + (\Omega_s L_s)^2} + j \frac{\Omega_s L_{os} (R_s^2 + \Omega_s^2 L_{\sigma s} L_s)}{R_s^2 + (\Omega_s L_s)^2} \\ &= R_{eq} + j\Omega_s L_{eq} \end{aligned}$$

□

Figura 17: Caratteristica meccanica a tensione impressa ($\Omega_s = \Omega_{s,N}$)

È possibile ora ricavare l'espressione della corrente che interessa il circuito rotorico nella rappresentazione semplificata secondo Thévenin e sostituirla nell'espressione (20) della coppia, di seguito riportata per comodità:

$$T = p \frac{P_{jr}}{s\Omega_s} = \frac{3p}{\Omega_s} \frac{R'_r}{s} I_{s,\text{eff}}'^2 \quad (64)$$

Si ottiene:

$$T = \frac{3p}{\Omega_s} \frac{R'_r}{s} \frac{U_{s,\text{eq,eff}}^2}{\left(R_{\text{eq}} + \frac{R'_r}{s}\right)^2 + \Omega_s^2 L_{\text{eq}}^2}, \quad \Omega_s \neq 0, \quad s \neq 0 \quad (65)$$

Fissando il valore efficace della tensione U_s e la frequenza di alimentazione Ω_s , sostituendo le (62) e (63) nella (65) è possibile tracciare la caratteristica meccanica *a tensione impressa* del motore asincrono, ovvero la coppia in funzione della velocità meccanica Ω_m (figura 17). Fissata la frequenza di alimentazione Ω_s , al diminuire della velocità meccanica (e dunque al crescere dello scorrimento) l'impedenza di rotore diventa piccola rispetto alla reattanza di magnetizzazione. Crescendo la corrente assorbita dal rotore aumenta la caduta statorica (su R_s e $L_{\sigma s}$) e di conseguenza cala la tensione ai capi della reattanza di magnetizzazione. Al variare dello scorrimento, dunque, il flusso cala per ottemperare al vincolo sulla tensione complessiva di statore U_s . Di conseguenza, cala anche la coppia al variare dello scorrimento. Si può osservare che nella regione di funzionamento

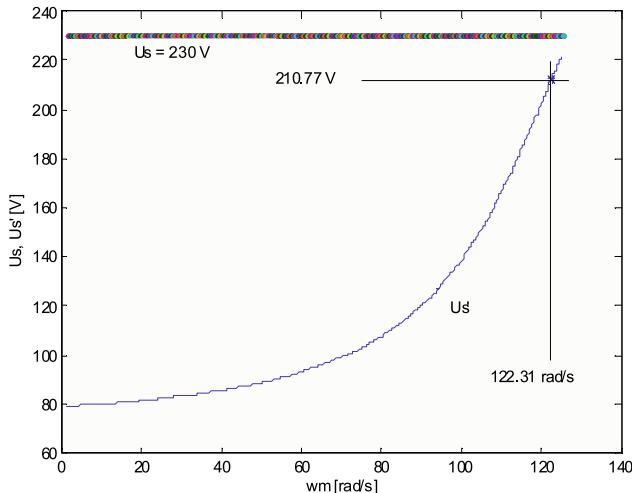


Figura 18: Tensione al traferro ($\Omega_N = 122,31 \text{ rad/s}$, $I_{s,N} = 39,5 \text{ A}$, $T_N = 183 \text{ Nm}$, $U_{s,N} = 230 \text{ V}$, $U'_{s,N} = 210,77 \text{ V}$, $\Lambda_N = 0,5591 \text{ Wb}$)

normale (con scorrimenti compresi entro il valore nominale) lo scostamento dal valore nominale è molto modesto. Questo significa che, anche quando il motore lavora a vuoto ($s = 0$), viene impiegata quasi tutta la corrente di magnetizzazione. In certe applicazioni, come nei ventilatori e nelle pompe, ove non serve disporre della coppia nominale a basse velocità, si possono ottenere dei risparmi energetici controllando e riducendo il flusso magnetizzante del motore.

La figura 19 riporta le stesse grandezze di figura 17, osservandoli in un range di velocità più esteso, assieme al flusso al traferro, che ha naturalmente un andamento simile a quello della tensione U'_s . L'andamento del flusso in condizioni di alimentazione nominali è riportato nella figura 19.

1.9.1 Coppia elettromagnetica e potenza meccanica

Per una più immediata comprensione delle tecniche scalari di controllo della velocità negli azionamenti con motore asincrono è fondamentale conoscere le espressioni della coppia elettromagnetica massima T_{\max} e della potenza meccanica generata massima P_{\max} . Dalla (20) la coppia risulta legata direttamente alla potenza dissipata su R'_r/s , che varia con lo scorrimento. La massima coppia si ha

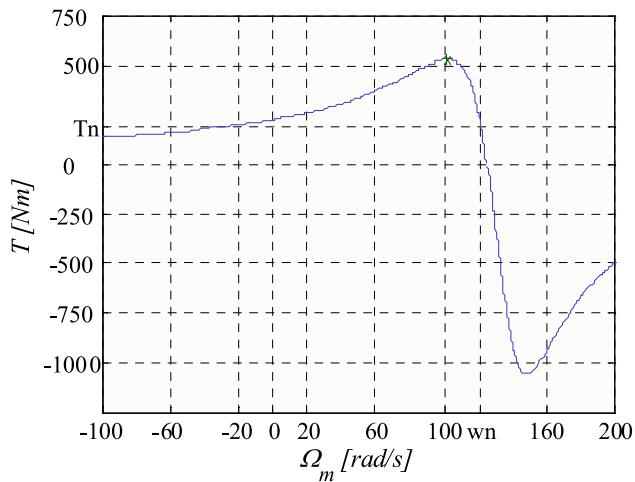


Figura 19: Caratteristica meccanica a tensione impressa ($\Omega_{m,s} = 125, 66$ rad/s, $T_n = 183$ Nm, $\Omega_{m,N} = 122, 31$ rad/s).

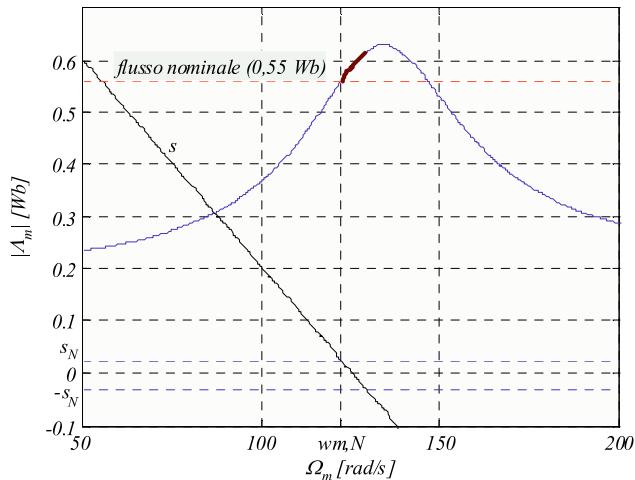


Figura 20: Flusso al traferro ($\Lambda_{m,N} = 0, 559$ Wb, $\Omega_{m,N} = 122, 31$ rad/s).

quando tale resistenza è uguale all'impedenza presente tra essa ed il generatore di tensione equivalente secondo Thévenin (figura 16):

$$\frac{R'_r}{s_{T_{\max}}} = \sqrt{R_{eq}^2 + (\Omega_s L_{eq})^2} \rightarrow s_{T_{\max}} = \frac{R'_r}{\sqrt{R_{eq}^2 + (\Omega_s L_{eq})^2}} \quad (66)$$

Sostituendo la (66) nella (65) si trova il valore di coppia massima:

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{3pU_{s,eqeff}^2}{\Omega_s} \frac{\sqrt{R_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2}}{\left(R_{eq} + \sqrt{R_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2} \right)^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2} \\ &= \frac{3}{2} \frac{p}{\Omega_s} \frac{U_{s,eqeff}^2}{R_{eq} + \sqrt{R_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2}} \end{aligned} \quad (67)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{R_s^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2}}{R_{eq}^2 + 2R_{eq}\sqrt{R_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2} + R_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2} \\ &\frac{\sqrt{R_s^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2}}{2 \left[R_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2 + R_{eq}\sqrt{R_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2} \right]} = \frac{1}{\sqrt{R_{eq}^2 + \Omega_s^2 L_{eq}^2} + R_{eq}} \end{aligned}$$

□

Si può osservare che lo scorrimento al quale si verifica la coppia massima è direttamente proporzionale alla resistenza rotorica R'_r , mentre il valore della coppia massima dipende da quadrato della tensione di alimentazione, ma non dalla resistenza rotorica. Quindi, nei motori a rotore avvolto, quando la resistenza rotorica è aumentata con l'inserzione di una resistenza esterna, la coppia elettromagnetica rimane invariata, ma è possibile controllare direttamente la velocità alla quale essa si verifica. Questo sarà sfruttato nel controllo scalare dei motori asincroni.

È importante sottolineare che si decide di utilizzare come strumento di analisi e sintesi il circuito equivalente del motore asincrono qui presentato, occorre sempre avere chiare le ipotesi ideali sulle quali esso si basa. In particolare, tutti gli elementi in esso contenuti sono considerati tempo-invarianti. Non si

tiene conto pertanto delle saturazioni alle quali sono soggetti gli avvolgimenti in presenza di elevate correnti (ad esempio all'avviamento) e neppure del fatto che le correnti rotoriche siano alla frequenza di scorrimento, che naturalmente varia dalla frequenza statorica (a motore fermo) a valori piccoli a regime. La distribuzione di corrente nei conduttori o barre di rotore può variare sensibilmente in un campo così esteso di frequenze (*skin effect*). Gli errori derivanti da queste cause possono essere ridotti se si utilizza il circuito equivalente in un punto di funzionamento abbastanza definito, ed inserendo i parametri determinati in condizioni quanto più possibile vicine al punto di funzionamento prescelto.

1.9.2 Zone di funzionamento del motore asincrono

Nella figura 21 sono riportate le diverse zone di funzionamento del motore asincrono. A macchina ferma corrisponde uno scorrimento unitario. Per ottenere scorrimenti superiori all'unità ($s > 1$) è necessario trascinare il motore in senso opposto a quello del suo campo magnetico. Questo richiede di fornire dall'esterno una coppia che sia di segno opposto a quella generata dal motore, che si trova dunque a funzionare da freno.

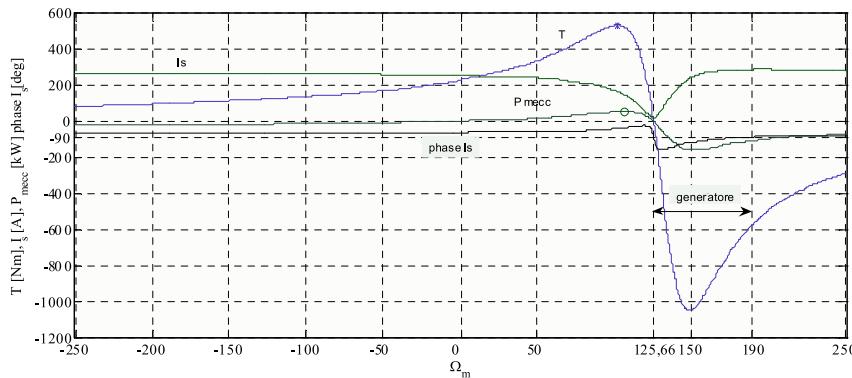


Figura 21: Caratteristica meccanica, corrente di statore (in modulo e fase) e potenza meccanica generata. Asse x: [rad/s], Range: $-2\Omega_s/p < \Omega_m < 2\Omega_s/p$; $\Omega_{gen} = 190$ rad/s.

A volte, negli azionamenti senza sistema di controllo ad inverter, questa modalità è usata per arrestare il motore, mediante una brusca variazione del senso di rotazione del campo magnetico, ottenuta scambiando con un commutatore esterno due fasi tra loro (*plugging*). In tal modo si inverte il senso ciclico delle fasi, il motore rallenta fino a fermarsi, ed è scollegato dalla rete prima che si avvii in senso opposto. Va osservato che la coppia di frenatura è abbastanza contenuta (figura 21) e l'energia cinetica del carico viene dissipata dal motore, che può surriscaldarsi.

Tabella 2: Zone di funzionamento del motore ad induzione.

P_{in}	P_{mecc}	Ω_m	T	Funzionamento
> 0	< 0	< 0	> 0	freno (Pmecc. dissipata nel motore)
> 0	> 0	$0 \rightarrow \Omega_s$	> 0	motore (Pel. trasferita al carico)
< 0	< 0	$\Omega_s \rightarrow \Omega_{gen}$	< 0	generatore (Pmecc. restituita alla rete)
> 0	< 0	$> \Omega_{gen}$	< 0	freno (Pmecc. dissipata nel motore)

Per un certo range di scorrimenti negativi ($s < 0$), corrispondenti a velocità meccanica superiore alla pulsazione (meccanica) sincrona, la potenza elettrica assorbita da rete risulta negativa (figura 22). Il motore può dunque funzionare come generatore, fornendo potenza elettrica verso la rete di alimentazione. La fase della corrente di statorre I_s rispetto alla tensione U_s risulta compresa tra $\pi/2$ e $3\pi/2$, e il fattore di potenza è pure negativo. In questa zona lavorano, ad esempio, i generatori eolici collegati a rete.

La terza zona di funzionamento, con scorrimento compreso tra 0 e 1 ($0 \leq s \leq 1$) corrispondente a velocità meccanica compresa tra zero e la velocità meccanica sincrona, la macchina funziona effettivamente da motore, producendo coppia nello stesso segno della velocità meccanica di rotazione (potenza meccanica generata positiva). La tabella 2 riassume le diverse zone di funzionamento del motore.

1.9.3 Rendimento e fattore di potenza

Il rendimento di un motore asincrono trifase è definito come il rapporto tra la potenza meccanica resa all'albero e la potenza elettrica assorbita dalla rete.

$$\mu = \frac{P_{mecc}}{P_{in}} = \frac{\Omega_m T}{3\Re(\dot{U}_s \dot{I}_s^*)} \quad (68)$$

Il fattore di potenza (*PF, power factor*) di un carico è usualmente definito come il rapporto tra la potenza attiva assorbita e la potenza apparente impegnata:

$$PF = \frac{P_{in}}{S_{in}} = \frac{3\Re(\dot{U}_s \dot{I}_s^*)}{3U_s I_s} \quad (69)$$

Nei motori asincroni trifase, con riferimento al circuito elettrico equivalente di figura 6 e al relativo diagramma fasoriale di figura 10, tale definizione porta a concludere che il fattore di potenza $\cos(\varphi)$ coincide con il coseno dell'angolo (orientato) φ tra il fasore della corrente statorica I_s e il fasore della tensione statorica U_s .

Il fattore di potenza riveste un ruolo economico importante, per il costo della potenza reattiva. Inoltre, un PF basso implica un inutile sovradimensionamento

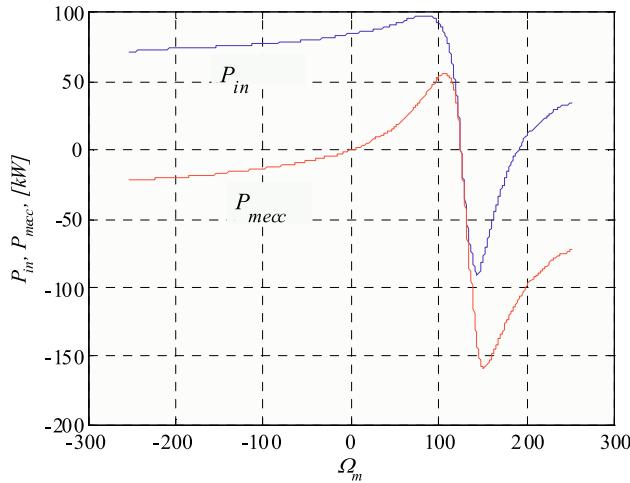


Figura 22: Potenza attiva in ingresso e potenza meccanica.

del convertitore e del trasformatore di potenza, dato che essi sono solitamente dimensionati per la potenza apparente perché le perdite sono determinate essenzialmente dai valori di tensione e di corrente, indipendentemente dal $\cos \varphi$. Il fattore di potenza incide anche sulle perdite resistive lungo la linea di distribuzione, a parità di potenza attiva erogata. D'altro canto, la potenza reattiva è necessaria per creare il flusso magnetizzante e il motore asincrono *deve* lavorare con $\cos \varphi < 1$, con la corrente in ritardo (cfr. figura 10). Va sottolineato che a regime i motori asincroni operano solo nella parte a pendenza negativa della caratteristica, che risulta essere di funzionamento stabile. Si può dimostrare che la velocità nominale offre il miglior compromesso tra fattore di potenza e rendimento.

ANALISI DELLA STRUTTURA E DEI DATI DI CATALOGO

1.1 GRADO DI PROTEZIONE

Il codice di protezione internazionale (IP), descritto nello standard europeo IEC 60529, classifica e valuta in generale il grado di protezione fornito da involucri meccanici e quadri elettrici contro l'intrusione di particelle solide (quali parti del corpo e polvere) e l'accesso di liquidi ed è importante nella scelta del motore in funzione delle condizioni ambientali di applicazione.

I tipi di protezione sono vengono indicati dalle lettere IP e da due cifre (xy). La prima cifra (x) indica il grado di protezione contro il contatto e l'intrusione di corpi estranei. Con la seconda cifra (y) si indica il grado di protezione contro la penetrazione di acqua. In luoghi e locali, dove possono avvenire scoppi ed esplosioni, devono essere inserite macchine particolarmente protette¹. Lo standard è riportato nella tabella 1, relative rispettivamente alla prima ed alla seconda cifra dell'IP.

1.2 TIPI DI SERVIZIO – NORMA IEC 60034-1

Se una macchina viene caricata, aumentano le sue perdite. Perciò si riscalda. La temperatura di funzionamento della macchina dipende dunque anche dal ciclo di lavoro e dalla frequenza di inserimento e di disinserimento. Si distinguono otto modalità operative, alle quali ci si deve riferire quando si specificano i parametri operativi della macchina (ad esempio, la coppia nominale). Le modalità operative vengono indicate con S1 – S6 e ricoprendono le principali condizioni di carico. La tabella 2 ne riassume le caratteristiche, mentre si rimanda alla norma specifica per gli eventuali approfondimenti.

¹ Le macchine protette contro gli scoppi sono indicati con (Sch) e contro le esplosioni con (Ex). Con lettere alfabetiche minuscole, aggiunte a (Sch) e a (Ex), si indica ancora una protezione particolare, per i dettagli si veda la norma relativa.

IP	x	y	x - protezione contro la penetrazione di:	y - protezione contro:
0	0		nessuna protezione	nessuna protezione
1	1		corpi solidi di dimensioni superiori a 50mm	la caduta verticale di gocce d'acqua
2	2		corpi solidi di dimensioni superiori a 12mm	cadute di gocce d'acqua con inclinazione max di 15°
3	3		corpi solidi di dimensioni superiori a 2,5mm	la pioggia con caduta fino a 60° di inclinazione
4	4		corpi solidi di dimensioni superiori a 1mm	gli spruzzi d'acqua
5	5		depositi di polvere dannosi	i getti d'acqua
6	6		qualunque polvere	le ondate e i getti d'acqua potenti
-	7			gli effetti dell'immersione temporanea
-	8			gli effetti della sommersione

Tabella 1: Significato delle cifre caratteristiche del codice IP

Tabella 2: Tipi di servizio per motori elettrici

Tipo	Nome	Descrizione
S1	Servizio continuo	Una volta partito, il motore lavora con un carico costante fino al raggiungimento dell'equilibrio termico. Il motore può quindi funzionare per un tempo illimitato.
S2	Servizio di durata limitata	Una volta partito, il motore lavora con un carico costante per un periodo limitato durante il quale non viene raggiunto l'equilibrio termico. Il motore verrà alimentato una seconda volta quando la sua temperatura sarà scesa al livello della temperatura ambiente (sono state ripristinate le condizioni iniziali).
S3	Servizio intermittente periodico	Sequenza di cicli di funzionamento uguali composti da un periodo di funzionamento a carico costante ed un periodo senza carico e senza alimentazione elettrica. Il periodo di servizio è breve e non permette il raggiungimento dell'equilibrio termico.
S4	Servizio intermittente con avviamenti	Sequenza di cicli identici che includono un avviamento significativamente lungo, un periodo a carico costante e uno a motore fermo. Il periodo di servizio è breve e non permette il raggiungimento dell'equilibrio termico.
S5	Servizio intermittente con avviamenti e frenature	Funzionamento come S4 più frenatura che viene fatta con mezzi elettrici (es. controcorrente). Il servizio S5 è composto da una serie di periodi uguali ognuno dei quali consta di una fase di avviamento, una di servizio a carico costante, seguita da una frenatura elettrica e da una fase di riposo. Il periodo di servizio è breve e non permette di raggiungere l'equilibrio termico.

Continua nella prossima pagina

Continua dalla pagina precedente

Tip	Nome	Descrizione
S6	Servizio ininterrotto periodico	Sequenza di cicli di funzionamento uguali composti da un periodo di funzionamento a carico costante ed un periodo di funzionamento senza carico, durante il quale il motore continua a rimanere alimentato.

Si conclude dalla pagina precedente

La figura 1 riporta in modo schematico le diverse modalità di servizio.

La tabella 3 riporta alcune tipiche applicazioni collegate ai diversi tipi di servizio, assieme alla specifica che va indicata per ognuno di essi.

Tabella 3: Applicazioni tipiche ed esempi di richiesta

Tip	Esempio di richiesta	Applicazioni tipiche
S1	S1	Pompe idrauliche, ventilatori industriali, soffianti.
S2	S2 + durata del servizio	Elettrodomestici come asciugacapelli, frullatori, eccetera.
S3	S3 + rapporto di intermittenza ²	Motori per il sollevamento.
S6	S6 + rapporto di intermittenza	Macchine per il taglio del legno, pompe per circuiti oleodinamici.

Si conclude dalla pagina precedente

È da notare che alcune Case costruttrici consentono che l'acquirente richieda un tipo speciale di servizio, non normalizzato, secondo il reale ciclo di funzionamento del motore. In assenza di indicazioni, si intende solitamente un motore con servizio S1. I tipi di servizio S2, S3 e S6 hanno tutti un tempo di riposo (cioè senza carichi esterni applicati) durante il quale il motore ha tempo

² Se non diversamente specificato, la durata di un ciclo per i servizi S3 e S6 è di 10 minuti e i rapporti di intermittenza dovranno assumere un valore tra i seguenti: 15%, 25, %40%, 60%.

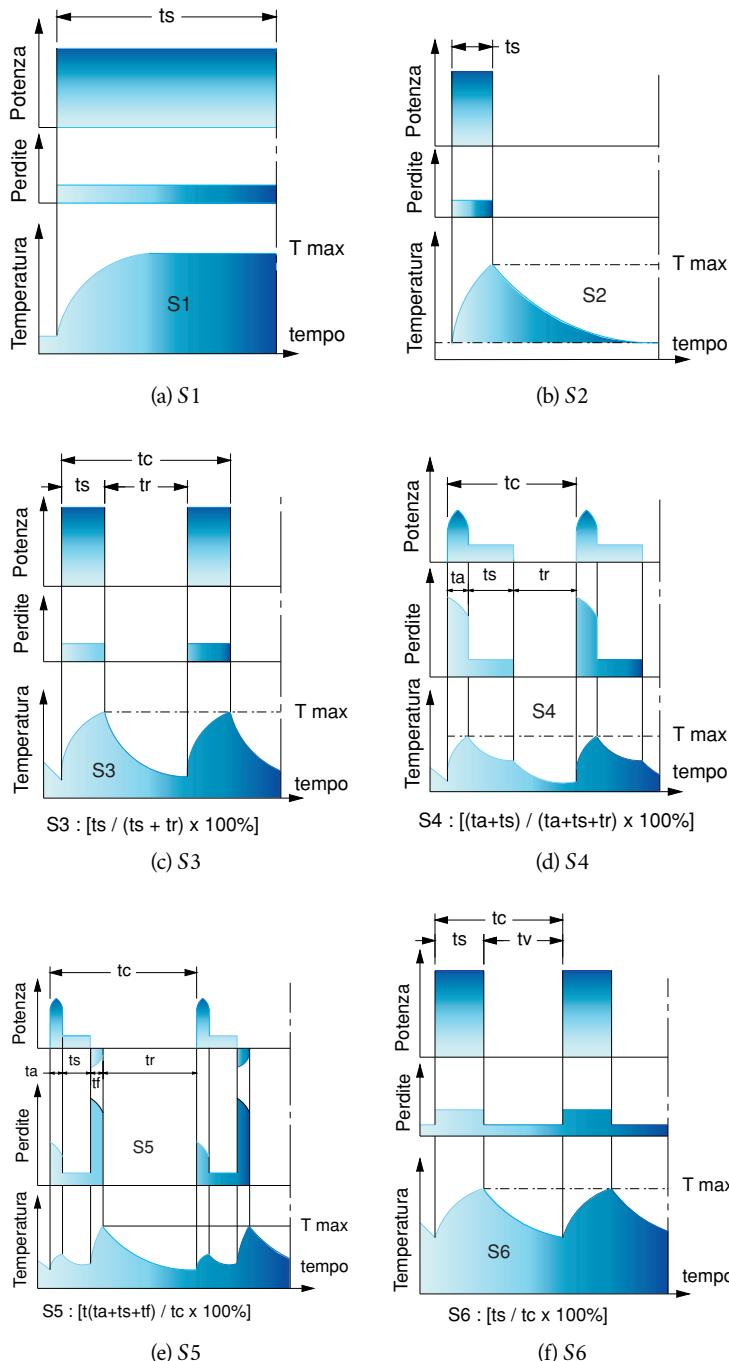


Figura 1: Diversi tipi di servizio (Courtesy of Cantoni Motori Elettrici).

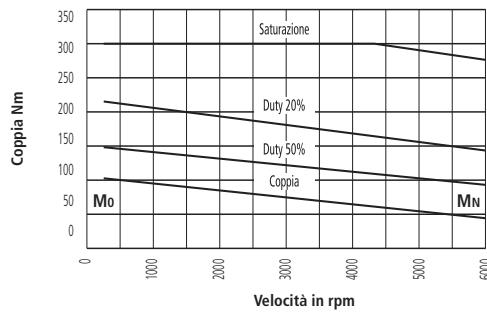


Figura 2: Caratteristiche meccaniche relative a diversi tipi di servizio (Courtesy of Lafert SpA).

di raffreddarsi, permettendo così di sovraccaricarlo rispetto a quando lo stesso è utilizzato con un servizio S1 (e quindi ininterrottamente sotto carico). Inoltre attualmente i motori con servizio diverso da S1 non sono inclusi nelle norme europee riguardanti le classificazioni di efficienza energetica. Quindi scegliere il tipo di servizio corretto significa acquistare un motore che soddisfa le reali esigenze dell'applicazione dove verrà installato, evitando di comprare un motore sovradimensionato e consentendo un probabile risparmio.

Alcuni cataloghi forniscono per i loro motori le curve meccaniche in funzione del tipo di servizio, come riportato ad esempio in figura 2.

1.2.1 *Effetti della temperatura sui magneti permanenti*

Quando si progetta un'applicazione per i magneti permanenti, è essenziale considerare l'intervallo di temperatura in cui il magnete o i magneti dovranno lavorare.

Tutti i materiali magnetici subiscono una variazione della densità di flusso all'aumentare e al diminuire della temperatura rispetto alla temperatura ambiente. La maggior parte dei magneti, ad eccezione della ferrite, mostra un aumento della forza al diminuire della temperatura, mentre tutti i magneti permanenti (compresa la ferrite) perdono una percentuale delle loro prestazioni al crescere della temperatura. La reversibilità delle trasformazioni dipende dalla temperatura a cui il magnete è esposto rispetto a due limiti specifici: la temperatura massima di esercizio (maximum operating temperature) e la temperatura di Curie.

Esistono tre tipi di perdita di prestazioni subita dai magneti quando sono esposti a temperature elevate.

Tabella 4: Influenza della temperatura nei materiali magnetici.

Grandezza	Ferrite	Alnico	SmCo (1-5)	SmCo (2-17)	NdFeb
BH_{\max} [MGOe]	3.8	5.5	20	26	43
B_r [kG]	4	12.5	9	10.4	13.4
% / °C	-0.18	-0.02	-0.045	-0.035	-0.12
H_c [kOe]	3.3	0.64	30	25	15
% / °C	+0.4	-0.015	-0.3	-0.3	-0.6

Perdita reversibile - La perdita reversibile si verifica per ogni aumento di temperatura del magnete rispetto all’ambiente, fino alla temperatura massima di funzionamento. Quando il magnete si raffredda, le prestazioni tornano al livello precedente.

Perdita irreversibile - Quando un magnete viene riscaldato al di sopra della sua temperatura massima di funzionamento ma al di sotto della sua temperatura di Curie, subisce una perdita irreversibile di prestazioni. Ciò significa che se il magnete viene raffreddato, le sue prestazioni saranno più deboli di quelle che aveva prima di essere riscaldato. Un magnete che ha subito una perdita irreversibile potrebbe teoricamente essere rimagnetizzato per riportarlo alla sua forza originale, ma questo non è in genere un processo economicamente vantaggioso. La perdita irreversibile è il risultato dell’inversione della magnetizzazione dei singoli domini magnetici causata dalla temperatura elevata. Ciò significa che la perdita irreversibile avviene una sola volta; se lo stesso ciclo termico viene ripetuto, non si verificherà alcuna perdita aggiuntiva, poiché ogni singolo dominio può essere invertito solo una volta dopo essere stato magnetizzato.

Perdita permanente - La perdita permanente delle prestazioni magnetiche si verifica quando un magnete viene riscaldato oltre la sua temperatura di Curie. A questo punto la struttura dei domini magnetici si modifica e si consolida, provocando un danno magnetico permanente che non può essere riparato con la rimagnetizzazione.

La temperatura di Curie dei materiali magnetici permanenti è spesso indicata nelle schede tecniche, ma di fatto è la caratteristica termica meno utile nella progettazione di un’applicazione, che invece deve tener conto della temperatura massima.

Le tre importanti caratteristiche che descrivono le prestazioni dei magneti permanenti sono l’induzione residua (B_r), la coercitività intrinseca (H_{ci}), e il prodotto di energia massima (BH_{\max}) e sono schematizzate nella figura 3.

L’influenza della temperatura nelle caratteristiche dei diversi materiali magnetici è riportata nella Tabella 4.

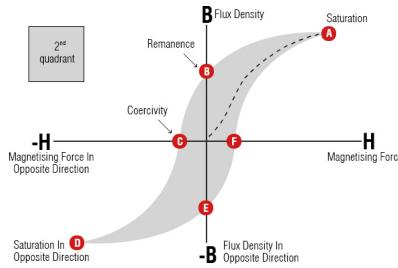


Figura 3: Grandezze caratteristiche dei magneti permanenti.

1.2.2 *Influenza della temperatura sui magneti NeFeB*

A seconda delle dimensioni, della forma, della qualità e dell'utilizzo, un magnete al neodimio perde lo 0,08% - 0,12% della sua forza magnetica per grado Celsius di aumento di temperatura.

Fino a 150 gradi Celsius i magneti al neodimio sono considerati quelli con le migliori prestazioni magnetiche; se portati a temperature superiori, il campo magnetico (H) si riduce al di sotto di quello di un magnete delle stesse dimensioni realizzato in samario cobalto. I magneti al neodimio mantengono la loro stabilità magnetica a temperature molto basse; solo a -138°C gradi Celsius la loro struttura magnetica viene intaccata, con una perdita di prestazioni compresa tra il 10% e il 20%.

I magneti al neodimio di grado standard hanno una temperatura operativa massima di 80°C . Se riscaldati al di sopra di questa temperatura, subiscono perdite di prestazioni irrecuperabili. Sono disponibili magneti al neodimio per alte temperature con temperature operative massime più elevate, identificate da un suffisso dopo il nome della qualità standard. Le versioni per temperature più elevate (NxxM, NxxH, NxxSH, NxxUH, NxxEH, NxxVH/AH) sono classificate da un massimo di 100 celsius a un massimo di 230 celsius. La Norma europea di riferimento è la IEC 60404-8-1.

L'NdFeB deve essere sempre rivestito con un rivestimento protettivo per ridurre al minimo il rischio di corrosione. Attualmente esistono oltre 40 opzioni per la finitura dei magneti. Il nichel-rame-nichel (NiCuNi) è il rivestimento standard.

1.2.3 *Influenza della temperatura sui magneti SmCo*

I magneti al samario cobalto non sono forti come i magneti al neodimio a temperatura ambiente, ma hanno un coefficiente di temperatura migliore sia

per l'induzione residua sia per il campo coercitivo massimo (resistenza alla smagnetizzazione) rispetto ai magneti al neodimio. Ad esempio, all di sopra dei 150 °C, i magneti al samario cobalto superano quelli al neodimio e i magneti standard al samario cobalto (Sm_2Co_{17}) non subiscono perdite irrecuperabili fino a quando la temperatura non supera i 350 °C.

1.2.4 *Influenza della temperatura sui magneti AlNiCo*

I magneti in alnico sono caratterizzati da un'elevata induzione residua ma una bassa coercitività, il che significa che sono secondi solo ai magneti al neodimio in termini di campo magnetico, ma sono significativamente più suscettibili alla smagnetizzazione da parte di campi magnetici esterni e shock fisici, anche se non da temperature elevate. Infatti, tra tutti i materiali magnetici permanenti, i magneti in AlNiCo hanno la massima stabilità termica, perdendo solo una frazione (0,02%) delle loro prestazioni per ogni grado Celsius di aumento della temperatura rispetto all'ambiente. I magneti in AlNiCo hanno anche la temperatura massima di funzionamento più elevata di tutta la famiglia dei magneti permanenti, non subendo perdite irreversibili di prestazioni fino a quando la temperatura non raggiunge i 525 °C.

1.2.5 *Influenza della temperatura sui magneti in ferrite*

Unici tra i magneti permanenti, i magneti in ferrite diventano più resistenti alla smagnetizzazione all'aumentare della temperatura. Al contrario, il loro campo magnetico diminuisce all'aumentare della temperatura, anche se in misura minore. Queste caratteristiche li rendono particolarmente apprezzati per le applicazioni ad alta temperatura, come i motori e i generatori elettrici. La coercitività intrinseca di un magnete di ferrite (resistenza alla smagnetizzazione) aumenta dello 0,4% per ogni grado di aumento della temperatura, mentre la sua forza magnetica diminuisce dello 0,2% per ogni aumento di grado Celsius. I magneti in ferrite possono essere utilizzati a temperature fino a 180 °C prima di iniziare a subire perdite di prestazione irreversibili.

1.2.6 *Dati di targa e datasheet di un servomotore brushless*

La figura 4 riporta un tipico esempio di targa applicata ad un servomotore sincrono a magneti permanenti. Il catalogo preso ad esempio per queste note è tratto dal Catalogo AEG-Gruppo Lafert, 2004, ed è riportato nella figura 5.

ANALISI DELLA STRUTTURA E DEI DATI DI CATALOGO

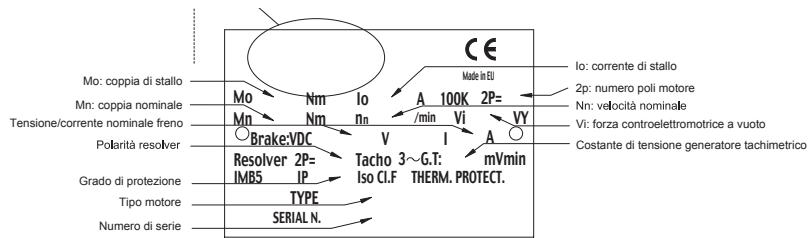


Figura 4: Tipica targa di un motore brushless (Courtesy of AEG SpA).

Servo motori S56-H 4 Poli (Alimentazione 3x400 V c.a.)

	S56 D6/3	3000 1/min			S56 01/3	S56 02/3	S56 03/3	S56 D6/6	6000 1/min			S56 01/6	S56 02/6	S56 03/6
PRESTAZIONI														
Coppia di stallo ($\Delta\theta=100$ K)	M_0	0,6	1,3	1,9	2,8			0,6	1,3	1,9	2,8			Nm
Velocità nominale	n	3000	3000	3000	3000			6000	6000	6000	6000			1/min
Potenza nominale	P_n	0,16	0,31	0,50	0,69			0,25	0,57	0,82	1,19			kW
Coppia nominale	M_n	0,5	1,0	1,6	2,2			0,4	0,9	1,3	1,9			Nm
Coppia di picco	M_{pk}	1,7	3,3	4,8	6,6			1,7	3,3	4,8	6,6			Nm
DATI FISICI														
Velocità massima	n_{max}	6000	6000	6000	6000			6000	6000	6000	6000			1/min
Inerzia rotore	J	0,73	1,40	1,84	2,28			0,73	1,40	1,84	2,28			10^{-4} kgm^2
Accelerazione alla coppia di picco	a_{pk}	23300	23600	26100	28900			23300	23600	26100	28900			rad/s^2
DATI TERMICI														
Costante di tempo termica	T_t	50	45	76	95			50	45	76	95			min
Soglia d'intervento protezione	ϑ_{max}	140	140	140	140			140	140	140	140			°C
DATI ELETTRICI														
Numeri poli	$2p$	4	4	4	4			4	4	4	4			
Connessione		Y	Y	Y	Y			Y	Y	Y	Y			
Costante di tensione	K_e	0,84	0,84	0,84	0,84			0,42	0,42	0,42	0,42			Vs
Costante di coppia	K_t	1,45	1,45	1,45	1,45			0,73	0,73	0,73	0,73			Nm/A
Resistenza concatenata (20°C)*	R_w	160	53	29	19			39	13	8	5			Ω
Induttanza concatenata*	L_w	395	177	118	80			98	45	30	20			mH
F.c.e.m. alla velocità nominale	E_n	263	263	263	263			263	263	263	263			V
Corrente di stallo	I_0	0,4	0,9	1,3	1,9			0,8	1,8	2,6	3,6			Arms
Corrente nominale	I_n	0,3	0,7	1,1	1,5			0,6	1,2	1,8	2,6			Arms
Corrente di picco	I_{pk}	1,2	2,3	3,3	4,6			2,3	4,6	6,6	9,1			Arms

* misurata fra i morsetti di alimentazione

Figura 5: Esempio di datasheet di una serie di motori brushless (Courtesy of AEG SpA).

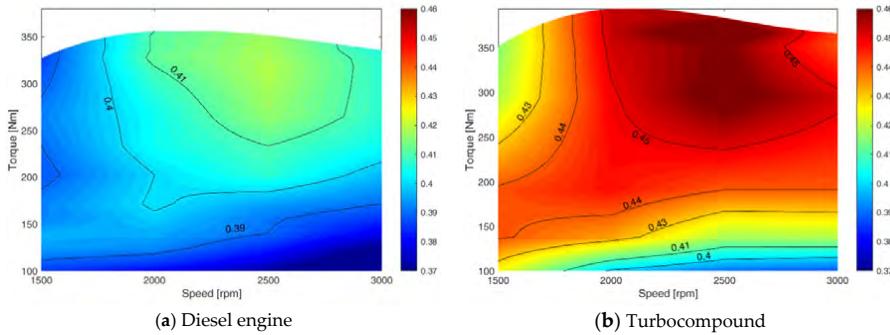


Figura 6: Efficienza di un Diesel common rail, Euro 5, 2000 cm^3 . A destra, la versione TB, con turbina che utilizza i gas di scarico per aumentare la potenza all’albero.

1.2.7 Coppia nominale e coppia di stallo

Si riconoscono i dati relativi alla coppia nominale e a quella di stallo. Le specifiche riguardanti la corrente sono di origine termica. Il motore viene caricato e contemporaneamente è misurata la temperatura degli avvolgimenti. Il raggiungimento (a regime) del limite fissato in base alla classe costruttiva del motore (ad esempio, 100°K) determina il valore della corrispondente corrente³. Tale valore è definito come corrente nominale se la prova viene effettuata con il motore in rotazione alla velocità nominale. La corrente di stallo è definita come la corrente assorbita con il rotore bloccato che provoca una determinata (e specificata) sovratemperatura degli avvolgimenti (es. 100°K). In tale condizione (ovvero con il motore fermo) viene a mancare una componente delle perdite legate alle corrente parassite e d’isteresi (perdite nel ferro). È allora lecito supporre che la corrente ammissibile negli avvolgimenti sia maggiore, a parità di sovratemperatura ammissibile. Anche la relativa coppia di stallo risulta superiore alla coppia nominale, come appare dalla lettura dei dati di targa, o da quelli di catalogo.

La differenza tra la potenza dissipata per effetto Joule a motore fermo e quella nominale indica che insorgono altre perdite, legate dunque alla velocità. Questo

³ La specifica di coppia è normalmente determinata in base a quanta energia può essere dissipata prima che venga raggiunto il massimo limite di temperatura del motore. Tale limite è tipicamente legato ai seguenti fattori:

- isolamento degli avvolgimenti (*winding insulation system*);
- lubrificante dei cuscinetti (*bearing grease*);
- vita dei trasduttori (*feedback device electronic components life*);
- smagnetizzazione dei materiali (*magnet material resistance to demagnetisation*).

avviene per attrito viscoso, per perdite dovute all'isteresi e alle correnti parassite. Può essere interessante effettuare una valutazione, sebbene approssimativa, dell'entità di tali perdite, confrontando i motori S56 03/3 e S56 03/6 della tabella di figura 4:

$$\begin{aligned} P_{\omega, S56-03/3} &= 3 \cdot R_s (I_0 - I_n) = 3 \cdot 19/2 (1.9^2 - 1.5^2) = 38.76 \text{ W} \\ P_{\omega, S56-03/6} &= 3 \cdot 5/2 (3.6^2 - 2.6^2) = 46.5 \text{ W} \end{aligned} \quad (1)$$

Le perdite maggiori sono legate alla maggior velocità nominale del secondo motore⁴.

Si consideri il motore S56-03/3. In base alla (1), alla velocità nominale le perdite nel ferro sono

$$P_{\omega} = K_1 \Omega^2 + K_2 \Omega = 38.76 \text{ W}. \quad (2)$$

Ci sono infinite combinazioni delle due tipologie di perdite (per correnti parassite e per isteresi, più le perdite di attrito che si possono supporre proporzionali alla velocità come le perdite per isteresi) che portano allo stesso valore complessivo in un unico punto di lavoro. Purtroppo il catalogo non fornisce informazioni per scindere i due contributi.

Nel seguito si assume che essi siano paritetici, in modo da poter calcolare i due coefficienti K_1 e K_2 . Dall'imposizione $K_1 \Omega_N^2 = K_2 \Omega_N$ si deriva $P_{\omega} = 2K_2 \Omega_N$ e ricordando che $\Omega_N = 314.6$ [rad/s] si trova immediatamente:

$$K_1 = 1.9636 \cdot 10^{-4} \quad K_2 = 0.06168. \quad (3)$$

Il funzionamento del motore è sostenibile dal punto di vista termico se si opera a *parità di perdite totali*. Al crescere della velocità dobbiamo dunque ridurre la corrente I per mantenere la condizione *isoperdite*. Cioè deve valere l'uguaglianza

$$P_{\omega} = 3R (I_o^2 - I^2) \quad \rightarrow \quad I(\Omega) = \sqrt{I_o^2 - \frac{K_1 \Omega^2 + K_2 \Omega}{3R}} \quad (4)$$

che per $\Omega = \Omega_N$ porge $I = I_N = 1.5A$.

La rappresentazione della corrente I calcolata nella (4) è una curva che cala discostandosi dalla corrente di stallo I_o , come rappresentato nella figura 7.

Moltiplicando le correnti I_o e I per la costante di coppia $K_t = 1.45$ e per la velocità Ω si trovano le curve della potenza meccanica, rispettivamente nel caso

⁴ Le perdite per isteresi dipendono in genere dalla frequenza, mentre quelle per correnti parassite dal suo quadrato. Anche la coppia di attrito dipende dalla velocità, cioè dalla frequenza, pertanto le perdite per attrito viscoso si possono assimilare a quelle per isteresi.

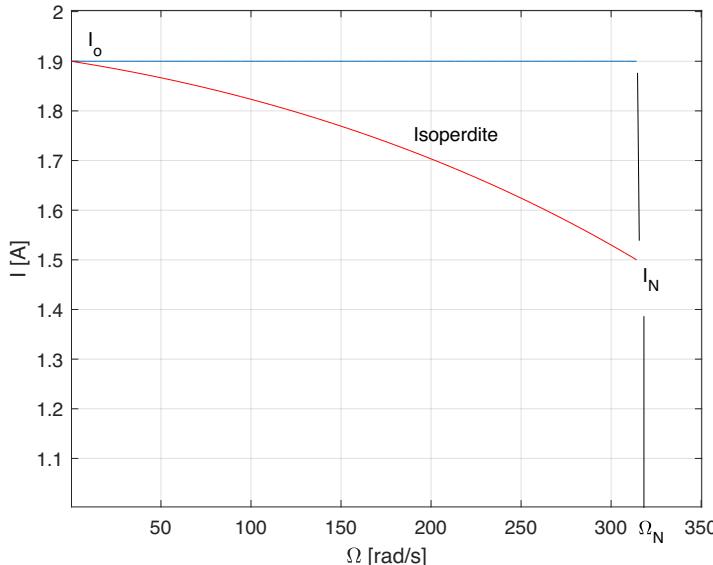


Figura 7: Corrente che garantisce il rispetto del limite termico al variare della velocità.

di sole perdite Joule (retta (b) della figura 8) e con l'inclusione delle perdite nel ferro *mantenendo le stesse perdite complessive* (retta (d) della figura 8).

Le curve della potenza assorbita nei due casi si trovano semplicemente aggiungendo alle curve della potenza meccanica resa il contributo delle perdite per effetto Joule, come illustrato nella figura 8, curve (a) e (c).

La differenza sostanziale tra le due ipotesi (solo perdite Joule, anche perdite nel ferro) è che nel primo caso chi crea le perdite (la corrente) crea anche la coppia, mentre nel secondo le perdite nel ferro contribuiscono a riscaldare il motore senza generare coppia, anzi, la necessità di soddisfare i vincoli termici (e dunque di mantenere le stesse perdite complessive) impone una riduzione della corrente e della coppia, al crescere della velocità.

Nel primo caso (ipotesi di assenza di perdite nel ferro) si giunge alla velocità nominale con una potenza meccanica $M_0\Omega_N$ e una potenza assorbita $M_0\Omega_N + 3RI_o^2$; nel secondo caso (presenza di entrambi i tipi di perdita) si giunge alla velocità nominale con una potenza meccanica $M_N\Omega_N < M_0\Omega_N$ e una potenza assorbita $M_N\Omega_N + 3RI_o^2$.

E' da rimarcare, in quest'ultimo caso, che le vere perdite Joule sono $3RI_N^2$, ma quelle complessive rimangono quelle che portano al limite di temperatura nel caso precedente ($3RI_o^2$), e la differenza ordinata tra le due rappresenta appunto le perdite nel ferro.

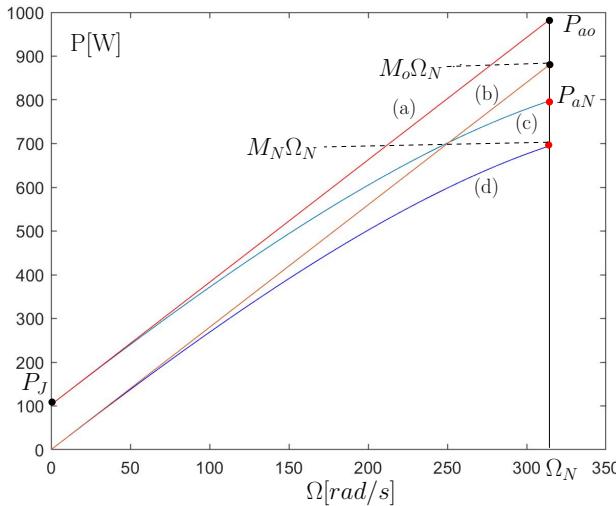


Figura 8: Potenze assorbite (a, c) e meccaniche (b, d), con sole perdite Joule (a, b) e con perdite nel ferro (c, d).

Corollario. Se in assenza di perdite nel ferro, alla velocità nominale, si può raggiungere (in via ipotetica) la potenza $P_o = M_o\Omega_N$, mentre in presenza di tali perdite (caso del motore del catalogo), sempre alla velocità nominale, si ottiene la potenza nominale $P_N = M_N\Omega_N$, si può affermare che le perdite nel ferro siano date dalla differenza $(P_o - P_N)$?

Risposta. No. La differenza citata nella domanda è una differenza tra potenze meccaniche rese, a parità di perdite complessive. La potenza meccanica si basa sul prodotto della velocità nominale (ovviamente la stessa nei due casi) per la coppia, che nel caso di presenza di perdite nel ferro cala perché si devono ridurre della stessa quantità le perdite per effetto Joule. La velocità può dunque essere vista come un fattore di scala (o un guadagno) nella riduzione di coppia. La differenza $\Delta P = P_o - P_N$ citata nella domanda, scalata per Ω_N , dà la differenza tra le coppie rispettivamente senza e con le perdite nel ferro. Tale differenza, scalata in base alla costante di coppia K_t , restituisce la differenza tra le correnti. Se le perdite Joule P_J fossero legate tramite un fattore di scala K_J alla corrente, si potrebbe scrivere

$$\Delta P = P_o - P_N = \Omega_N \Delta T = \Omega_N K_t \Delta I = \Omega_N K_t K_J \Delta P_J = \Omega_N K_t K_J P_J \quad (5)$$

dove l'ultima uguaglianza è dettata dalla necessità del funzionamento isoperdite. In tal caso, la differenza citata (pur non essendo uguale) sarebbe almeno *proporzionale* alle perdite nel ferro.

Dato poi che le perdite nel rame sono proporzionali al quadrato della corrente viene a mancare ogni relazione semplice tra la citata differenza e le perdite nel ferro.

Ci si può chiedere se esista una combinazione di costanti che renda vera l'uguaglianza citata nel quesito, ovvero se sia possibile avere

$$M_o\Omega_N - M_N\Omega_o = 3R(I_o^2 - I_N^2)$$

Ponendo $I_N/I_o = \alpha$, ($0 \leq \alpha \leq 1$) si ottiene:

$$\begin{aligned} \Omega_N K_t (1 - \alpha) &= 3R I_o (1 - \alpha^2) \\ 3R I_o \alpha^2 - \Omega_N K_t \alpha + \Omega_N K_t - 3R I_o &= 0 \\ a\alpha^2 - b\alpha + b - a &= 0 \quad (a = 3R I_o, b = \Omega_N K_t) \\ \alpha_{1,2} &= \begin{cases} 1 \\ b/a - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La prima soluzione indica che l'uguaglianza iniziale è vera quando $I_N = I_o$, ovvero quando non occorre diminuire la corrente per far spazio alle perdite nel ferro; in altre parole, quando non vi sono perdite Joule ($R = 0$). È un caso naturalmente inverosimile. La seconda soluzione, unita al vincolo ($0 \leq \alpha \leq 1$) porta alla disequazione

$$\begin{aligned} 0 \leq b/a - 1 &\leq 0 \rightarrow 1 \leq b - a \rightarrow a \leq b \leq 2a \\ \frac{3R I_o}{K_t} &\leq \Omega_N \leq \frac{6R I_o}{K_t} \end{aligned}$$

Si tratta di velocità nominali molto piccole, che non trovano esempi nei normali cataloghi di motori sincroni a magneti permanenti.

□

La resistenza di statore nel motore S56 03/3 vale circa 4 volte la resistenza del modello S56 03/6. In base alle considerazioni circa le identiche strutture meccaniche dei due modelli, si può cercare di comprendere la differenza tra le resistenze. Al fine di poter avere una velocità nominale doppia, a parità di tensione nominale, nel motore S56 03/6 va necessariamente diminuita la forza controelettromotrice, attraverso il dimezzamento del numero di spire dell'avvolgimento. Dimezzando il flusso, per mantenere una coppia nominale simile occorre raddoppiare la corrente e con essa la sezione S dei conduttori di ciascuna fase, al fine di mantenere costante la densità di corrente, fissata sempre in base a limiti termici legati alla vernice isolante che ricopre i conduttori stessi. Dimezzare il numero di spire significa di fatto dimezzare la lunghezza L dell'avvolgimento; con queste ipotesi, la resistenza complessiva di fase risulta allora:

$$R_{03/6} = \rho \frac{L/2}{2S} = \frac{R_{03/3}}{4}. \quad (6)$$

Tabella 5: Confronto tra le perdite negli azionamenti

Grandezza	S56 – 03/03	S56 – 03/06
velocità	Ω_n	$2\Omega_n$
Fcem @ Ω_n	263	263
flusso concatenato	λ_{mg}	$\lambda_{mg}/2$
N. spire	N	$N/2$
coppia	M_o	M_o
corrente	I_o	$2I_o$
Sezione cave	S_c	S_c
Sezione conduttori	S	$2S$
Resistenze	R	$R/4$
Perdite Joule	P_J	P_J

Il data sheet relativo della figura 5 rappresenta un esempio di come motori di velocità e potenze meccaniche diverse possano essere ottenuti mantenendo intatte le strutture meccaniche di statore e di rotore, al fine di minimizzare le varietà di magazzino e dunque di ottenere un contenimento dei costi di gestione. A titolo di esempio, la tabella 5 riassume le modifiche che riguardano i due motori S₅₆ – 03 nelle versioni 03 e 06.

Si noti che per le coppie e correnti nominali non sia perfettamente rispettata la relazione che lega le stesse grandezze in stallo, a causa delle diverse perdite nel ferro in condizioni nominali dei due motori (per le diverse velocità nominali).

1.2.8 Costante di tensione

La costante di tensione K_e rappresenta il rapporto tra la *fcem* nominale E_n (tensione concatenata efficace) e la velocità meccanica nominale Ω_n :

$$K_e = \frac{E_n}{\Omega_n} \quad (7)$$

È da notare che le grandezze che appaiono nei cataloghi dei costruttori sono solitamente ricavate secondo la buona prassi di riportare dati il più possibile diretti, ovvero senza post-elaborazioni. Un esempio è costituito dalla forza controelettromotrice a vuoto, che è misurata ai morsetti (tra due fasi) quando il motore è trascinato in rotazione alla velocità nominale. Essendo una grandezza

sinusoidale, è espressa solitamente in valore efficace⁵. Questo è il motivo della definizione (10). Il flusso concatenato prodotto dal magnete permanente Λ_{mg} è invece un valore massimo, al pari di tutte le altre grandezze espresse secondo la notazione dei vettori spaziali. Pertanto si può scrivere:

$$\Lambda_{mg} = \frac{E}{\Omega_{me}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}p} \left(\frac{E_n}{\Omega_n} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}p} K_e \quad (8)$$

1.2.9 Costante di coppia

La costante di coppia rappresenta il rapporto tra la coppia nominale e la corrente efficace del motore:

$$K_\tau = \frac{M_n}{I_n} = \frac{1.9}{2.6} = 0.73 \text{ Nm/A} \quad (9)$$

Esiste un legame di proporzionalità tra le costanti di coppia e di tensione. Infatti, immaginando di essere in orientamento di campo, la coppia nominale vale

$$M_n = \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} I_{q,N} = \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} \sqrt{2} I_n = \frac{3}{2} p \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}p} K_e \sqrt{2} I_n \quad (10)$$

e quindi $K_\tau = \sqrt{3} K_e$.

1.2.10 Cause di declassamento

In condizioni di funzionamento intermittente (generalmente il costruttore indica il tipo, solitamente S3) è ammissibile una corrente (e, di conseguenza, una coppia) di valore superiore a quella nominale (servizio continuativo S1). Inoltre, altri elementi influenzano le condizioni nominali di funzionamento, in particolare l'altitudine e la temperatura ambiente. La figura 9 riporta un esempio dei grafici, forniti dal Costruttore, per tener conto delle condizioni ambientali ove si effettua l'installazione: L'altitudine è considerata con un fattore di declassamento (*derating factor*) K_{high} perché l'aria più rarefatta rende meno efficiente lo smaltimento del calore prodotto dagli avvolgimenti, al pari della temperatura ambiente, di cui si tiene conto con un coefficiente di K_{temp} . Il funzionamento discontinuo è espresso tramite il duty cycle, che rappresenta il rapporto tra

⁵ Il valore efficace di $u(t)$, periodica di periodo T , vale $u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$.

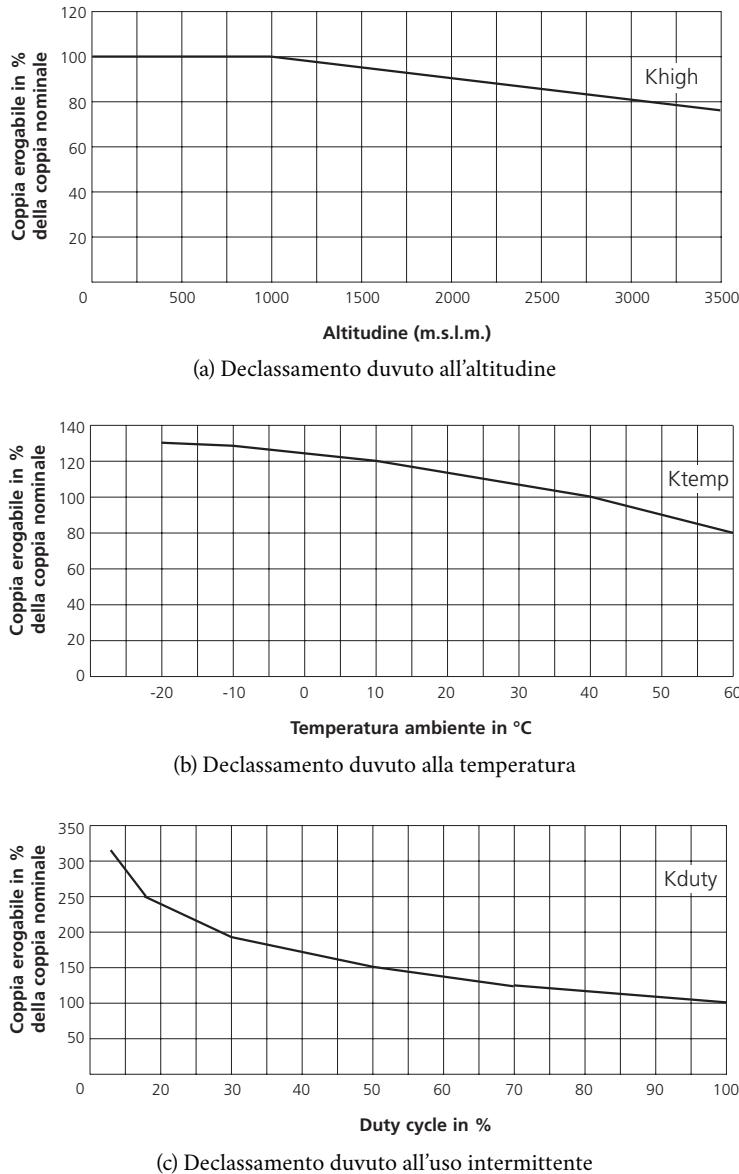


Figura 9: Fattori di declassamento

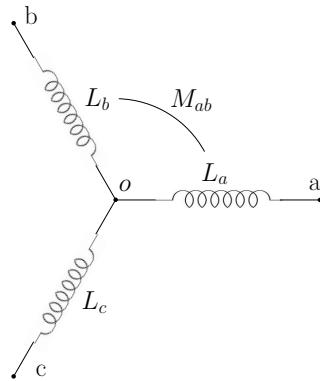


Figura 10: Legame tra induttanza sincrona e induttanza concatenata.

tempo di lavoro e tempo di ciclo totale. Di esso si tiene conto tramite il coefficiente K_{duty} . Nella scelta del motore va dunque considerato un coefficiente di declassamento cumulativo dato da:

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{high}} K_{\text{temp}} K_{\text{duty}} \quad (11)$$

La massima coppia disponibile all'asse in modo non continuativo ($M_{\text{pk}} = 6.6 \text{ Nm}$) si ottiene con la massima corrente ammessa negli avvolgimenti, detta corrente di picco ($I_{\text{pk}} = 9.1 \text{ A}$) e relativa ad un funzionamento di brevissima durata, la cui entità è solitamente specificata dal Costruttore. Tale corrente può non essere legata a limiti termici (date le inerzie termiche in gioco), bensì alla possibile smagnetizzazione dei magneti permanenti, a cui alcune topologie costruttive sono sensibili.

1.2.11 Induttanza concatenata

Nei cataloghi spesso appare l'induttanza concatenata. E' di interesse comprendere come essa sia legata all'induttanza sincrona definita nello studio delle equazioni dinamiche del motore sincrono a magneti permanenti. Il calcolo può essere svolto con l'ausilio della figura 10: La misura è effettuata applicando una tensione sinusoidale tra i morsetti delle fasi a e b , lasciando aperta la fase c e misurando la corrente $i_a = -i_b$. Ricordando che $L_a = L_b = L$ e $M_{ab} = M_{ba} = -|M|$,

le equazioni di bilancio delle tensioni di fase⁶, per la sola componente induttiva si scrivono come:

$$\begin{aligned} u_{ao} &= L_a \frac{di_a}{dt} + M_{ab} \frac{di_b}{dt} = (L + |M|) \frac{di_a}{dt} \\ u_{bo} &= L_b \frac{di_b}{dt} + M_{ab} \frac{di_a}{dt} = (L + |M|) \frac{di_b}{dt} = -(|M| + L) \frac{di_a}{dt} \end{aligned} \quad (12)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} u_{ab} &= L_{\text{conc}} \frac{di_a}{dt} = u_{ao} - u_{bo} \\ &= (L + |M|) \frac{di_a}{dt} + (|M| + L) \frac{di_a}{dt} \\ &= 2(L + |M|) \frac{di_a}{dt} \\ &= 2L_s \frac{di_a}{dt} \end{aligned} \quad (13)$$

e pertanto vale la relazione $L_s = L_{\text{conc}}/2$.

⁶ Si ricorda che esse sono definite come le tensioni tra ciascun morsetto e il centro stella *o* del motore.

MOTORI SINCRONI A MAGNETI PERMANENTI ISOTROPI

1.1 STRUTTURA E PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

I motori sincroni a magnete permanente (PMSM, *permanent magnet synchronous motor*), detti anche brushless sinusoidali o semplicemente *brushless* (BLACM), sono impiegati sempre più diffusamente in ambito industriale, specialmente nei servoazionamenti di piccola e media potenza. Essi sono destinati ad azionamenti ad elevate prestazioni, con specifiche tali da giustificare il costo, solitamente elevato per la presenza di magneti permanenti di pregio nell'elemento mobile (rotore). A differenza dei motori asincroni, che possono operare anche quando connessi direttamente a rete, i PMSM richiedono necessariamente di essere alimentati tramite un convertitore (inverter) gestito dal sistema di controllo delle correnti di statore. La conversione elettromeccanica che essi attuano segue il principio di funzionamento dei sistemi elettrodinamici in cui però i conduttori su cui agiscono le forze sono collocati nella parte fissa (statore) ed il rotore viene posto in movimento per il principio fisico di reazione. Una rappresentazione schematica della struttura di un motore sincrono a magneti permanenti a due poli è mostrata nelle figure 1a e 1b. Lo statore ed il rotore sono entrambi a forma di corona cilindrica di materiale ferromagnetico laminato e separati da un traferro in aria. I lamierini sono tra loro isolati tramite verniciatura. Sul rotore trovano posto i magneti permanenti; dato che essi presentano generalmente una permeabilità magnetica differenziale molto simile a quella dell'aria (i magneti al neodimio hanno $\mu_r = 1.05$), a seconda della loro disposizione e della forma del rotore si possono ottenere strutture di rotore magneticamente isotrope o anisotrope, che caratterizzano rispettivamente i motori brushless SPM (*surface permanent magnet*) e IPM (*interior permanent magnet*).

Le figure 2 e 3 riportano rispettivamente uno spaccato ed un esploso di motore PMSM commerciale ([1]), mentre la figure. Nel seguito si considereranno avvolgimenti di statore di tipo trifase; motori con un numero maggiore di fasi (*polyphase motors*) stanno riscuotendo un discreto interesse per le loro intrinseche proprietà di sopportare i guasti (*fault tolerance*), ma esulano dagli obiettivi di queste note.

Nei motori trifase, le tre fasi sono reciprocamente sfasate nello spazio di $2\pi/3$, e ciascuna fa capo ad una coppia di morsetti indicati con aa' , bb' , cc'

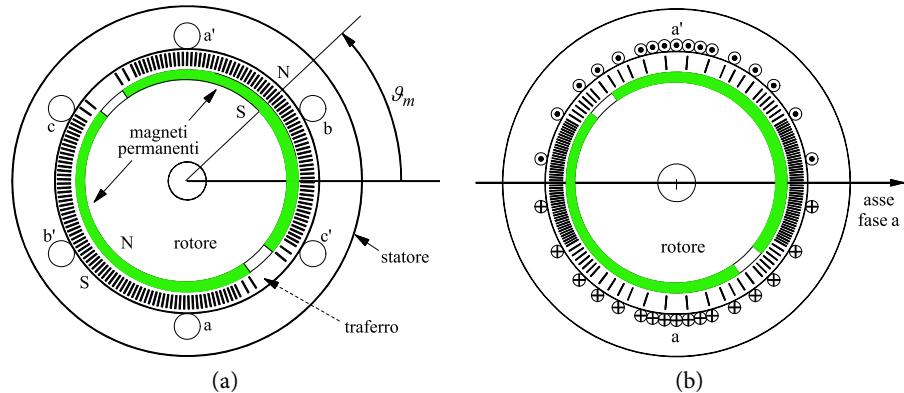


Figura 1: Induzione al traferro in un PMSM: (a) prodotta dai magneti permanenti, (b) prodotta dalla fase a (sinusoidale).

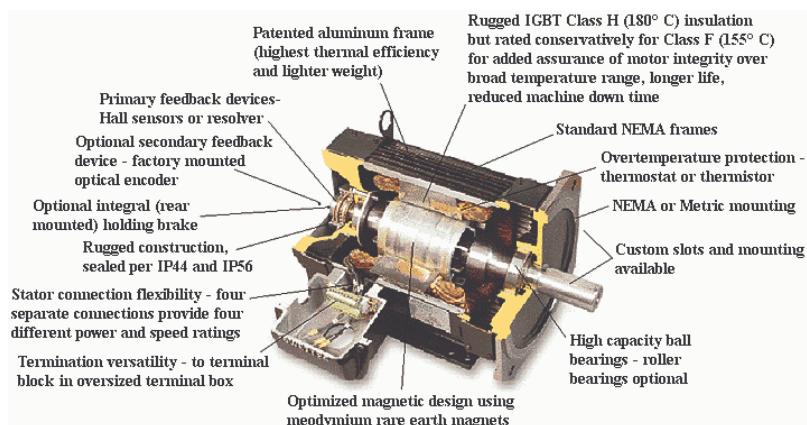
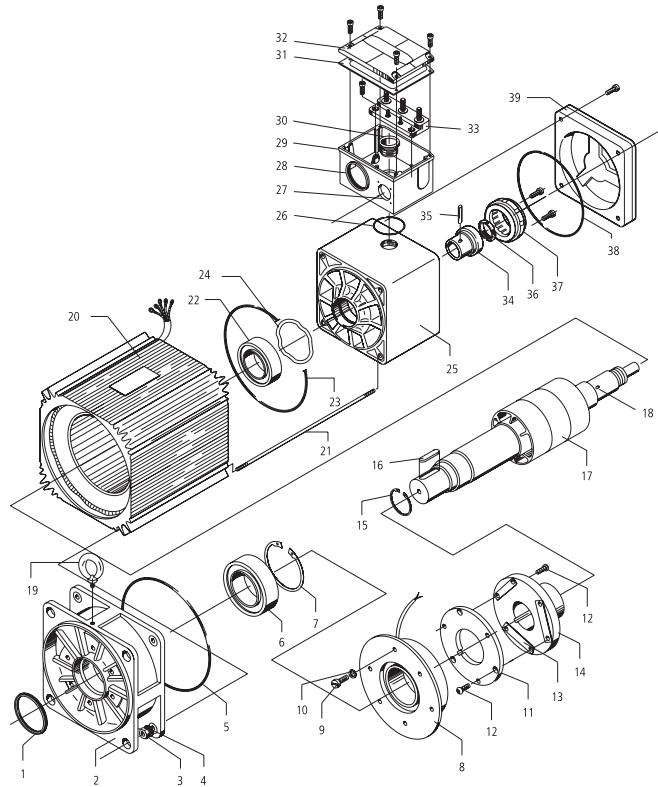


Figura 2: Spaccato di un motore sincrono a magneti permanenti [1].

1.1 STRUTTURA E PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO



Descrizione parti

1	Paraolio	20	Gruppo carcassa stator
2	Calotta anteriore	21	Tirante
3	Dado	22	Cuscinetto posteriore
4	Rondella	23	Anello di tenuta statica
5	Anello di tenuta statica	24	Molla di precarico
6	Cuscinetto anteriore	25	Calotta posteriore
7	Anello elastico	26	Anello di tenuta statica
8	Freno	27	Foro connettore segnali
9	Vite	28	Foro PG potenza
10	Rondella	29	Coprimorsettiera
11	Anello d'armatura	30	Ghiera di fissaggio
12	Vite	31	Guarnizione
13	Molla a lamina	32	Coperchio
14	Flangia	33	Morsettiera
15	Anello elastico	34	Rotore generatore tachimetrico
16	Chiavetta	35	Spina
17	Gruppo rotore	36	Ghiera di fissaggio
18	Foro spina	37	Stator generatore tachimetrico
19	Golfare	38	Anello di tenuta statica
		39	Coperchio posteriore

Figura 3: Esploso di un motore sincrono a magneti permanenti [2].

nella figura 1a, attraverso i quali è possibile fornire loro alimentazione da una sorgente trifase esterna. I conduttori che compongono ciascuna fase (figura 1b) sono distribuiti lungo le cave statoriche ricavate secondo la direzione delle generatrici del cilindro di statore, omesse nel disegno. La figura 1a riporta una rappresentazione schematica in cui ciascuna fase è simbolicamente rappresentata con una sola coppia di conduttori; si intende che l'asse di ogni fase sia la retta normale al piano che passa per ciascuna coppia di conduttori opposti (figura 1b).

Per descrivere il funzionamento del motore brushless sinusoidale si può partire dalle equazioni generali di bilancio delle tensioni u_a, u_b, u_c delle sue fasi a, b, c , che con la convenzione di segno degli utilizzatori risultano:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= Ri_a(t) + \frac{d\lambda_a(t)}{dt} \\ u_b(t) &= Ri_b(t) + \frac{d\lambda_b(t)}{dt} \\ u_c(t) &= Ri_c(t) + \frac{d\lambda_c(t)}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$

dove i_a, i_b, i_c sono le correnti che percorrono le tre fasi, $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ sono i flussi magnetici concatenati con ciascuna fase ed R è la resistenza di fase, che si può supporre uguale per le tre fasi.

In assenza di saturazione dei circuiti magnetici, ovvero in condizione di linearità, vale il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui il flusso concatenato da ciascuna fase risulta la somma del flusso concatenato dovuto alle correnti di fase con quello prodotto dal magnete permanente; queste due componenti verranno ora analizzate in dettaglio, facendo riferimento ad una struttura isotropa.

1.1.1 Flusso concatenato prodotto dalle correnti di statore

Si analizza intanto il flusso concatenato prodotto negli avvolgimenti dalle correnti di fase. Supponendo per esempio di alimentare la fase a con una corrente i_a positiva entrante al morsetto a si ottiene, sempre per la particolare geometria dell'avvolgimento, una distribuzione sinusoidale di induzione al traferro B_a , come schematizzato nella figura 1b, che riporta le linee di campo di B_a al traferro nell'istante considerato.

Nel caso di rotore isotropo, la derivazione di tale andamento è abbastanza intuitiva; per il calcolo si può applicare il teorema di circuitazione scegliendo per comodità come percorso d'integrazione una semicirconferenza che ruoti

1.1 STRUTTURA E PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

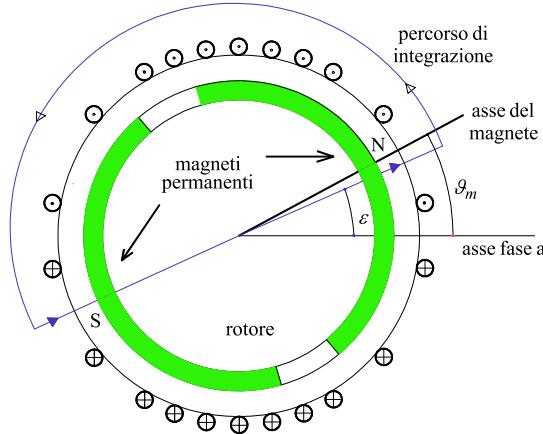


Figura 4: Linee di campo di B_a al traferro.

in senso antiorario come mostrato nella figura 4, con coordinata angolare ε espressa in radianti elettrici (“rad.el.”, vedi nota 1); nella figura 4 ε coincide con quella espressa in radianti perché nell’esempio il motore ha una sola coppia polare.

Le chiusure del percorso di integrazione sono poi nel ferro di rotore e di statore, ove la caduta di tensione magnetica può considerarsi trascurabile. Le amperspire $N_c(\varepsilon)i_a$ concatenate ad ogni posizione angolare ε sono legate direttamente all’induzione al traferro dall’espressione

$$B_a(\varepsilon) = \frac{\mu_0 N_c(\varepsilon) i_a}{2x} \quad (2)$$

dove x è lo spessore del traferro e μ_0 è la permeabilità magnetica dell’aria. Se il rotore fosse invece anisotropo, l’andamento dell’induzione al traferro ad opera delle sole correnti statoriche dipenderebbe anche dalla posizione ϑ_m del rotore.

Assumendo che all’istante t l’avvolgimento di statore sia alimentato dalla generica terna di correnti $i_a(t)$, $i_b(t)$, $i_c(t)$ si può dunque scrivere

$$\begin{aligned} B_a(t, \varepsilon) &= k i_a(t) \cos(\varepsilon) \\ B_b(t, \varepsilon) &= k i_b(t) \cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) \\ B_c(t, \varepsilon) &= k i_c(t) \cos\left(\varepsilon - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

dove la costante k tiene conto delle dimensioni del traferro e del numero di spire dell’avvolgimento. L’induzione totale al traferro B_t , ad opera delle

correnti statoriche, si ottiene comando punto per punto ed istante per istante le tre distribuzioni indicate dalla (3). Si ottiene

$$\begin{aligned} B_t(t, \varepsilon) &= k \left(i_a - \frac{1}{2} i_b - \frac{1}{2} i_c \right) \cos(\varepsilon) + \frac{\sqrt{3}}{2} k \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} (i_b - i_c) \sin(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{2} k (i_\alpha \cos(\varepsilon) + i_\beta \sin(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (4)$$

dove si è omessa per semplicità la dipendenza delle correnti dal tempo, e $i_\alpha(t)$, $i_\beta(t)$ sono rispettivamente la componente reale ed immaginaria del vettore spaziale di corrente $\mathbf{i}_s^s(t)$ associato alla terna $i_a(t)$, $i_b(t)$, $i_c(t)$.

Dalla (4) si può osservare che l'induzione al traferro è considerabile come la somma di due termini, che potrebbero dunque essere forniti da due soli avvolgimenti, aventi ciascuno $(3/2)N$ spire (se N è il numero di spire di una delle fasi attuali) e con gli assi tra loro ortogonali, in modo da produrre la massima induzione B rispettivamente per $\varepsilon = 0$ (avvolgimento distribuito come la fase a) e per $\varepsilon = \pi/2$ rad.el. (avvolgimento con asse in anticipo di $\pi/2$ rad.el.).

Si può notare anche che una eventuale componente omopolare della terna di correnti di fase non influenza l'induzione $B_t(t, \varepsilon)$, come si può ricavare in modo diretto dalla (4). In altre parole, la componente omopolare delle correnti (se presente) non partecipa alla creazione dell'induzione radiale nel motore.

Esprimendo in coordinate polari il vettore spaziale della corrente si ha:

$$\mathbf{i}_s^s(t) = i_{s\alpha}(t) + j i_{s\beta}(t) = |\mathbf{i}_s^s(t)| e^{j\vartheta_i(t)} = |\mathbf{i}^s(t)| (\cos(\vartheta_i) + j \sin(\vartheta_i)) \quad (5)$$

dove ϑ_i è la fase (sempre espressa in rad.el.) del vettore spaziale della corrente riferita all'asse reale del piano complesso, che coincide come si è detto con l'asse della fase a . Sostituendo la (5) nella (4) si ottiene:

$$B_t(t, \varepsilon) = \frac{3}{2} k |\mathbf{i}_s^s(t)| \cos(\varepsilon - \vartheta_i(t)) \quad (6)$$

Significato fisico del vettore spaziale di corrente

Il procedimento appena descritto permette di conferire un significato fisico al vettore spaziale di corrente. La sua rappresentazione nel piano complesso, fatto coincidere con il piano di sezione della figura 1a, indica in ogni istante la direzione ove è massima l'induzione al traferro creata dall'avvolgimento di statore.

Nel funzionamento a regime, il motore viene alimentato con una terna di correnti sinusoidali sfasate reciprocamente di $2\pi/3$ rad.el. Il vettore spaziale

associato ha ampiezza costante e ruota con velocità angolare costante $\Omega_{me} = d\vartheta_{me}/dt$, che è detta pulsazione elettromeccanica ed è pari alla pulsazione delle correnti di fase; la (6) si semplifica nella seguente:

$$B_t(t, \varepsilon) = \frac{3}{2}k |\mathbf{i}_s^s(t)| \cos(\Omega_{me}t - \varepsilon) = B_m \cos(\Omega_{me}t - \varepsilon) \quad (7)$$

In $t = 0$ essa rappresenta una distribuzione sinusoidale dell'induzione al traferro, con il suo valore massimo in corrispondenza dell'asse della fase a ($\varepsilon = 0$); negli istanti successivi tale massimo ruota (e con esso ovviamente tutta la distribuzione spaziale di B_t), dando luogo a quello che viene comunemente indicato come campo magnetico rotante, studiato per la prima volta da Galileo Ferraris nel 1885.

L'induzione magnetica B appare dunque funzione del tempo e dello spazio. Integrando l'induzione al traferro nell'avvolgimento a si ottiene il flusso prodotto da tutti gli avvolgimenti che si concatena con a . All'istante $t = 0$, esso è massimo, perché la direzione dell'induzione coincide con quella normale alla superficie delle spire dell'avvolgimento a . Allo stesso modo si può ragionare per gli avvolgimenti b e c , che all'istante iniziale concatenano induzione complessivamente negativa. La composizione secondo la definizione di vettore spaziale produce il relativo vettore di flusso concatenato, con direzione e verso coincidente con quello (ε) della massima induzione B .

1.1.2 Flusso concatenato prodotto dai magneti permanenti

Si supponga ora di non inviare corrente all'avvolgimento statorico. La combinazione di una opportuna sagomatura del magnete e della distribuzione circonferenziale non uniforme dei conduttori di ciascuna fase, evidenziata in figura 1b, consente di ottenere flussi concatenati dovuti al magnete permanente pressoché sinusoidali. Scegliendo arbitrariamente come coordinata di riferimento l'angolo elettrico ϑ_{me} tra l'asse della fase a e quello del campo prodotto dal magnete permanente, definita anche *posizione elettromeccanica*, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \lambda_{a,mg}(t) &= \Lambda_{mg} \cos(\vartheta_{me}) \\ \lambda_{b,mg}(t) &= \Lambda_{mg} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \lambda_{c,mg}(t) &= \Lambda_{mg} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

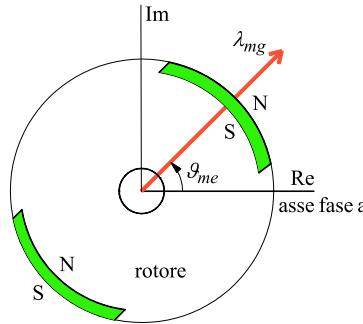


Figura 5: Interpretazione del significato di vettore spaziale λ_{mg}^s .

dove Λ_{mg} rappresenta il massimo flusso concatenato con ciascuna fase per effetto del magnete permanente. La terna di grandezze espressa dalla (8) è evidentemente priva della componente omopolare; a tale terna si può allora associare in modo univoco il vettore spaziale

$$\lambda_{mg}^s = \Lambda_{mg} e^{j\vartheta_{me}} \quad (9)$$

dove l'apice s indica che ci si riferisce ad un sistema di riferimento stazionario, ovvero solidale con lo statore.

Significato del vettore spaziale di flusso

La figura 5, in cui appare ϑ_{me} perché si riferisce ad un esempio con una coppia polare ($p = 1$), mostra il posizionamento del vettore spaziale di flusso concatenato dovuto ai magneti permanenti. Si può osservare che tale vettore indica la posizione ove un ipotetico avvolgimento concatenerebbe il massimo flusso prodotto dai magneti, arricchendo il vettore di un significato fisico.

Dato che la coppia nasce dall'interazione tra campo magnetico e correnti si intuisce già che per avere una coppia netta non nulla occorrerà controllare le correnti di statore in modo che il relativo vettore spaziale sia in relazione di fase costante con il vettore spaziale del flusso prodotto dal magnete, ovvero i due vettori dovranno essere *sincroni*.

1.1.3 *Equazione di coppia e schema a blocchi del motore*

Data l'ipotesi di isotropia della struttura e la simmetria degli avvolgimenti di fase, si può ammettere che le autoinduttanze di fase siano tutte uguali tra loro, come pure le mutue induttanze tra ciascuno degli avvolgimenti e gli altri due.

In particolare, è facile rendersi conto che i flussi mutuamente accoppiati hanno segno opposto a quelli che si auto-concatenano in ciascun avvolgimento. Con ovvio significato dei simboli si può scrivere:

$$\begin{aligned} L_a &= L_b = L_c = L_{ss} \\ M_{ab} &= M_{ac} = M_{bc} = -|M_{ss}| \end{aligned} \quad (10)$$

I flussi concatenati totali si esprimono allora come segue:

$$\begin{aligned} \lambda_a &= L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ac} i_c + \lambda_{a,mg} = \\ &= L_{ss} i_a - |M_{ss}| (i_b + i_c) + \lambda_{a,mg} \\ \lambda_b &= L_b i_b + M_{ab} i_a + M_{bc} i_c + \lambda_{b,mg} = \\ &= L_{ss} i_b - |M_{ss}| (i_a + i_c) + \lambda_{b,mg} \\ \lambda_c &= L_c i_c + M_{ac} i_a + M_{bc} i_b + \lambda_{c,mg} = \\ &= L_{ss} i_c - |M_{ss}| (i_a + i_b) + \lambda_{c,mg} \end{aligned} \quad (11)$$

dove si sono tralasciate le ormai ovvie dipendenze dal tempo delle correnti di fase e del flussi concatenati dovuti al magnete permanente. Anche il pedice s , relativo alle grandezze di statore, sarà d'ora in poi omesso, per semplificare la notazione, dato che nei PMSM solo lo statore è alimentato e non c'è dunque il rischio di confondere grandezze di rotore e di statore.

Generalmente i motori sincroni a magneti permanenti hanno avvolgimenti statorici privi di filo neutro; in altre parole è spesso verificata l'ipotesi di avere ad ogni istante la somma delle correnti di fase pari a zero:

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0 \quad \forall t \quad (12)$$

Utilizzando tale espressione nelle (11) e ricordando le (8) si ha infine:

$$\begin{aligned} \lambda_a &= L_s i_a + \Lambda_{mg} \cos(\vartheta_{me}) \\ \lambda_b &= L_s i_b + \Lambda_{mg} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \lambda_c &= L_s i_c + \Lambda_{mg} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

dove si è definita l'induttanza sincrona $L_s = L_{ss} + |M_{ss}|$.

Si può notare come apparentemente il flusso concatenato di ogni fase dipenda ora solo dalla corrente nella fase stessa; o meglio, è tutto "come se" ciascuna fase si

comportasse in modo indipendente dalle altre. Naturalmente occorre però ricordare che L_s non ha il significato proprio di un'autoinduttanza, dato che essa è composta anche da termini di mutua induttanza M_{ss} , percorsi da correnti provenienti dalle altre fasi, che solo in virtù dell'ipotesi (12) si richiudono totalmente nella fase considerata.

Le equazioni di bilancio delle tensioni (1) si possono ora particolarizzare utilizzando le (13):

$$\begin{aligned} u_a &= R_s i_a + L_s \frac{di_a}{dt} + e_a \\ u_b &= R_s i_b + L_s \frac{di_b}{dt} + e_b \\ u_c &= R_s i_c + L_s \frac{di_c}{dt} + e_c \end{aligned} \quad (14)$$

dove si sono definite le *forze contro-elettromotrici* e_a , e_b , e_c dovute al movimento del magnete permanente rispetto agli avvolgimenti di statore:

$$\begin{aligned} e_a &= \frac{d\lambda_{a,mg}}{dt} = -\Lambda_{mg} \omega_{me} \sin(\vartheta_{me}) = \\ &= -\Lambda_{mg} \omega_{me} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{\pi}{2}\right) \\ e_b &= \frac{d\lambda_{b,mg}}{dt} = -\Lambda_{mg} \omega_{me} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_c &= \frac{d\lambda_{c,mg}}{dt} = -\Lambda_{mg} \omega_{me} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

Come già accennato, ω_{me} (espressa in rad.el./s) è la velocità elettromeccanica, ed è stata omessa per semplicità l'indicazione della dipendenza dal tempo anche della posizione elettromeccanica ϑ_{me} .

Come le correnti, che hanno somma nulla per ipotesi, è evidente che anche le forze contro-elettromotrici indicate nelle (15) hanno somma nulla, trattandosi di una terna di sinusoidi sfasate reciprocamente di $2\pi/3$ rad.el.; essendo così tutte le grandezze che appaiono nella (14) prive di componente omopolare è possibile ottenere una espressione più compatta ricorrendo alle relative notazioni secondo i vettori spaziali. Ad esse si associa il vettore spaziale:

$$\mathbf{e}_s^s = \frac{d\lambda_{mg}^s}{dt} = \frac{d(\Lambda_{mg} e^{j\vartheta_{me}})}{dt} = j\Lambda_{mg} \omega_{me} e^{j\vartheta_{me}} = j\omega_{me} \boldsymbol{\lambda}_{mg}^s \quad (16)$$

e la terna di equazioni (14) può essere espressa in modo conciso:

$$\mathbf{u}_s^s = R_s \mathbf{i}_s^s + L_s \frac{d\mathbf{i}_s^s}{dt} + j\omega_{me} \boldsymbol{\lambda}_{mg}^s \quad (17)$$

che può essere espressa secondo le sue componenti reale u_α ed immaginaria u_β :

$$\begin{aligned} u_\alpha &= R_s i_\alpha + L_s \frac{di_\alpha}{dt} - \omega_{me} \lambda_{\beta,mg} \\ u_\beta &= R_s i_\beta + L_s \frac{di_\beta}{dt} + \omega_{me} \lambda_{\alpha,mg} \end{aligned} \quad (18)$$

Un'espressione operativamente più utile si ottiene scegliendo di esprimere i vettori spaziali contenuti nella (17) secondo un sistema di riferimento sincrono con la velocità elettromeccanica ω_{me} , con l'asse reale coincidente con l'asse del flusso di rotore; secondo tale riferimento, il vettore spaziale λ_{mg} risulta avere solo componente reale e questo induce una ulteriore semplificazione delle formule di bilancio delle tensioni statoriche. Il generico vettore spaziale \mathbf{g} viene espresso in tale riferimento sincrono (apice r) dalla relazione:

$$\mathbf{g}^r = \mathbf{g}^s e^{-j\omega_{me}t} = \mathbf{g}^s e^{-j\vartheta_{me}} \quad (19)$$

Applicando la (19) alla (17), ricordando che $\lambda_{mg}^r = \Lambda_{mg} + j0$ si ottiene:

$$\mathbf{u}_s^r = R_s \mathbf{i}_s^r + L_s \frac{d\mathbf{i}_s^r}{dt} + j\omega_{me} L_s \mathbf{i}_s^r + j\omega_{me} \Lambda_{mg} \quad (20)$$

che può essere scritta, al solito, separando la parte reale u_d ed immaginaria u_q :

$$\begin{aligned} u_d &= R_s i_d + L_s \frac{di_d}{dt} - \omega_{me} L_s i_q \\ u_q &= R_s i_q + L_s \frac{di_q}{dt} + \omega_{me} L_s i_d + \omega_{me} \Lambda_{mg} \end{aligned} \quad (21)$$

Nell'ipotesi di sistema *conservativo*, le espressioni (21) consentono di eseguire un bilancio energetico nel sistema di riferimento sincrono, per ricavare un'espressione per la coppia meccanica sviluppata dal motore.¹ Moltiplicando ambo i membri delle (21) rispettivamente per $i_d dt$ e $i_q dt$ e sommando membro a membro le due equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} (u_d i_d + u_q i_q) dt &= (R_s i_d^2 + R_s i_q^2) dt + \\ &\quad + L_s i_d di_d + L_s i_q di_q + \\ &\quad + \omega_{me} \Lambda_{mg} i_q dt \end{aligned} \quad (22)$$

¹ Si intende con ciò riferirsi ad un sistema elettromagnetico capace di uno scambio reversibile di energia, ovvero per il quale il lavoro netto assorbito (lavoro elettrico meno lavoro meccanico) coincide con un'energia magnetica accumulata.



Figura 6: Esempio di *skewing* discreto del rotore di un PMSM [2].

Il primo membro rappresenta l'energia elettrica fornita al motore nel tempo dt ; essa è pareggiata dall'energia risultante dopo il processo di conversione elettromagnetica, le cui varie componenti sono rappresentate dai termini a secondo membro della (22). Il primo termine rappresenta l'energia trasformata in calore sulle resistenze degli avvolgimenti; il secondo ed il terzo costituiscono l'energia immagazzinata nel campo magnetico, collegata alle induttanze sincrone L_s . L'ultimo termine rappresenta infine l'energia meccanica sviluppata, nell'ipotesi di funzionamento da motore della macchina. Occorre ricordare però che la trasformazione adottata per il passaggio dal sistema di riferimento stazionario a quello sincrono non è invariante per la potenza, che risulta diminuita del fattore $2/3$. Ricordando poi che la potenza meccanica si può esprimere anche come prodotto della coppia τ per la velocità meccanica ω_m , si ottiene in definitiva:

$$\tau = \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} i_q \quad (23)$$

L'espressione (23) rappresenta la coppia elettromagnetica prodotta dal motore, per interazione tra il campo magnetico di rotore e le correnti di statore.

Vi è un ulteriore termine di coppia, che non è incluso nella (23), legato alla variazione di energia magnetica del sistema per la presenza di cave e denti statorici (anisotropia magnetica). Intuitivamente, i magneti di rotore tendono ad allinearsi con i denti di statore (situazione a minima riluttanza), generando una coppia di puntamento (*cogging torque*). Essa si presenta come una componente di ripple sovrapposta alla coppia costante desiderata dalla macchina e può essere individuata nello spettro delle vibrazioni a frequenza multipla della velocità di rotore, in quanto dipende dal numero di poli e dal numero di cave di statore. La *cogging torque* va ridotta il più possibile, perché la sua frequenza non è generalmente alta al punto da essere filtrata efficacemente dall'inerzia del carico e si traduce dunque in vibrazioni meccaniche. Costruttivamente, si ricorre in genere allo *skewing* (svergolamento) discreto del rotore, come riportato nella figura 6.

1.2 L'ORIENTAMENTO DI CAMPO (FOC)

La svergolatura è tale che i magneti, tra le due sezioni estreme della macchina, risultino sfasati di circa un passo-cava, in modo in modo che la riluttanza totale rimanga costante.

Dalle equazioni (21) e (23), unite all'equazione che rappresenta il carico meccanico:

$$\tau = \tau_L + B\omega_m + J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (24)$$

è possibile tracciare lo schema a blocchi per il motore sincrono a magneti permanenti di tipo isotropo, così come riportato nella figura 7.

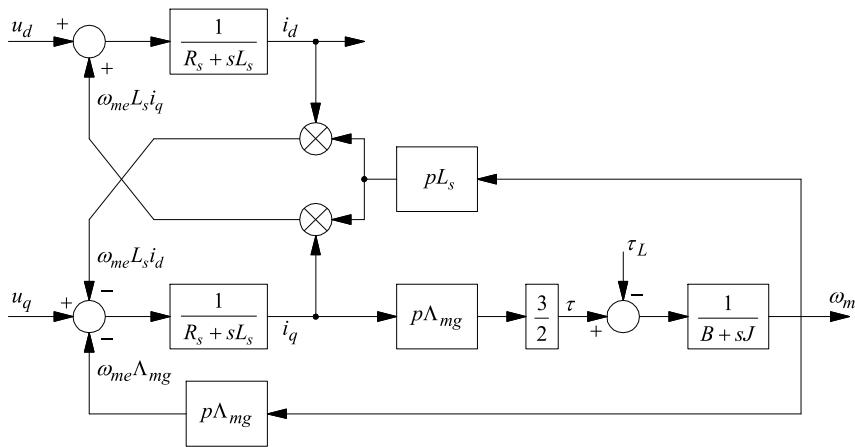


Figura 7: Schema a blocchi del motore sincrono a magneti permanenti isotropo.

In esso compaiono elementi non lineari, quali i moltiplicatori. I blocchi che rappresentano funzioni lineari sono stati invece espressi tramite la loro funzione di trasferimento ingresso-uscita. Si noti il mutuo accoppiamento tra gli assi d e q , espresso dalle quantità $\omega_{me} L_s i_d$ e $\omega_{me} L_s i_q$, che indicano come la tensione u_d , agendo su i_d , interferisca con l'azione di u_q nel regolare la corrente i_q e viceversa.

1.2 L'ORIENTAMENTO DI CAMPO (FOC)

Si osservi il diagramma dei vettori spaziali riportato nella figura 8.

Detto α_s l'angolo del vettore spaziale delle correnti di statore rispetto al

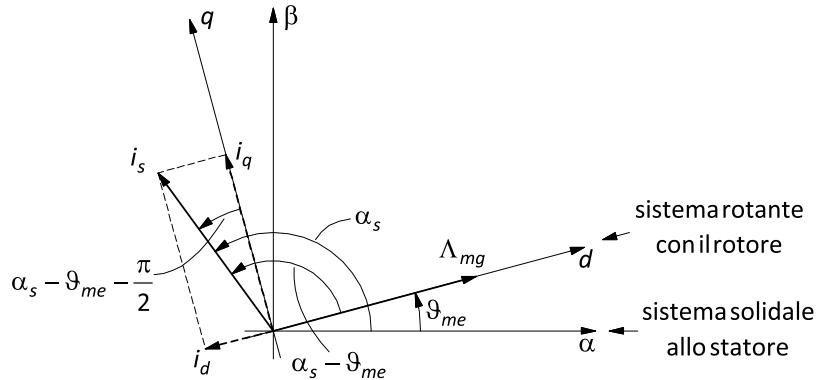


Figura 8: Diagramma dei vettori spaziali in un PMSM.

sistema di riferimento solidale allo statore stesso, la coppia può essere scritta come:

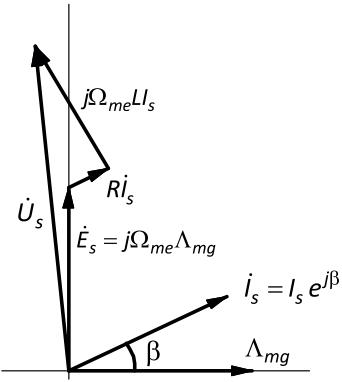
$$\begin{aligned}\tau &= \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} |\mathbf{i}_s| \cos \left(\alpha_s - \vartheta_{me} - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} |\mathbf{i}_s| \sin (\alpha_s - \vartheta_{me}) = \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} |\mathbf{i}_s| \sin (\beta)\end{aligned}\quad (25)$$

dove β è detto angolo di coppia e si ricorda che il modulo del vettore di corrente non dipende dal particolare riferimento prescelto, per cui si è omesso l'apice sia nella (25) sia nel diagramma ad essa collegato.

Si intuisce subito che, a parità di flusso concatenato Λ_{mg} e di modulo della corrente $|\mathbf{i}_s^s|$ (quindi di dispositivi di commutazione, cioè di taglia del convertitore) la coppia prodotta è massima se si impone $\beta = \pi/2$, ovvero se si orienta il vettore spaziale delle correnti di statore in modo che esso risulti ortogonale all'asse d lungo il quale è posto il magnete permanente del rotore. Tale funzionamento è detto appunto “ad orientamento di campo” (FOC, Field Oriented Control) ed è pressoché universalmente adottato negli azionamenti elettrici per motori brushless.

1.3 ANALISI IN REGIME SINUSOIDALE

In regime sinusoidale, l'equazione fasoriale di tensione (ad esempio per la fase a) si può ricavare tramite l'analogia formale che la lega all'equazione vettoriale riferita ad un sistema sincrono (rotante alla pulsazione delle grandezze sinusoidali). In regime sinusoidale, i vettori spaziali ruotano tutti (rispetto ad un sistema stazionario collegato allo statore) alla pulsazione elettrica, e

Figura 9: Diagramma fasoriale (fase a) di un PMSM.

risultano pertanto costanti rispetto al sistema di riferimento sincrono. La (20) perde dunque il termine derivativo, diventando:

$$\dot{\mathbf{u}}_s^r = R_s \dot{\mathbf{i}}_s^r + j\omega_{me} L_s \dot{\mathbf{i}}_s^r + j\omega_{me} \Lambda_{mg} \quad (26)$$

che, stante l'analogia formale, è rappresentativa dell'equazione fasoriale cercata (per la singola fase a):

$$\dot{\mathbf{U}}_s = R_s \dot{\mathbf{I}}_s + j\Omega_{me} L_s \dot{\mathbf{I}}_s + j\Omega_{me} \Lambda_{mg} \quad (27)$$

dove si è mantenuto il fasore del flusso concatenato solidale all'asse d del sistema di riferimento sincrono. L'ultimo addendo a secondo membro è il fasore di forza controelettromotrice \dot{E}_s . La (27) dà luogo alla rappresentazione fasoriale della figura 9. A partire dalla (25), sempre sfruttando l'analogia formale, l'espressione della coppia sviluppata da una fase in regime sinusoidale si scrive come:

$$\tau = \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} I_s \sin(\beta) \quad (28)$$

dove p è il numero di coppie poli del motore e I_s indica il modulo (o ampiezza) del fasore temporale $\dot{\mathbf{I}}_s$ della corrente della fase a di statore. Come già osservato nello studio dell'orientamento di campo, la coppia è massima a parità di ampiezza della corrente quando $\beta = \pi/2$, ovvero se il fasore della corrente è in fase (o in controfase, per coppie negative) con quello della forza controelettromotrice \dot{E}_s .

Il corretto funzionamento del motore brushless è legato alla conoscenza esatta della posizione del flusso del magnete permanente, ovvero del rotore. Questo perché viene generata coppia solo se i fasori della corrente di statore

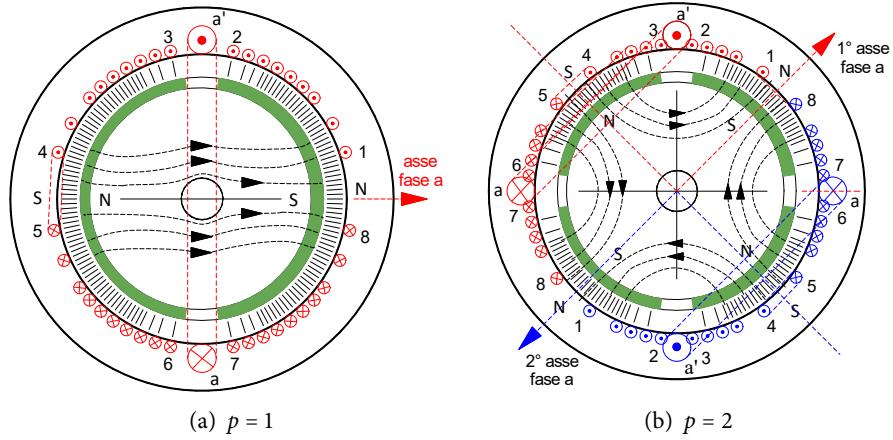


Figura 10: Strutture per PMSM, a scopo illustrativo.

mantengono una costante relazione di fase con il flusso di rotore, secondo il principio di funzionamento dei sistemi elettrodinamici. Il motore sincrono a magneti permanenti necessita dunque di un sensore di posizione assoluto. In alternativa, sono allo studio molte tecniche di stima della posizione (tecniche *sensorless*). Esse si basano su algoritmi matematici generalmente complessi, che solo la recente disponibilità di processori a basso costo ha reso implementabili in modo efficace ed abbastanza economico negli azionamenti elettrici.

1.4 NUMERO DI COPPIE POLARI

L'angolo elettrico ϑ_{me} è legato alla posizione meccanica ϑ_m dalla relazione $\vartheta_{me} = p\vartheta_m$, con p = numero di coppie polari del motore. Intuitivamente, se vi sono p coppie polari la situazione elettromagnetica viene a ripresentarsi p volte nel corso di una rotazione meccanica del rotore; è "come se" l'angolo elettrico corresse p volte più veloce di quello meccanico, in linea con la sua definizione. Naturalmente, in presenza di un rotore con p coppie polari anche l'avvolgimento di statorerà costruito in modo che le sue fasi si succedano sfasate di $2\pi/3$ rad "elettrici", ovvero $(2\pi/3)/p$ rad "meccanici". Si può far riferimento alla figura 10, che mostra la topologia e le linee di campo nelle strutture con $p = 1$ e $p = 2$. All'istante considerato, nel motore con $p = 2$, entrambi gli avvolgimenti della fase a stanno concatenando il massimo flusso concorde a quello prodotto da una corrente positiva; se si immagina di ruotare di $\pi/2$ il rotore, la nuova coppia di magneti affacciata ai due avvolgimenti farà

concatenare un flusso massimo, ma di segno opposto: in un giro meccanico si avrà dunque un andamento cosinusoidale con periodo dimezzato rispetto al caso con $p = 1$.

[Students' edition · 30 ottobre 2017]

BIBLIOGRAFIA

- [1] VEM motors GmbH. *Permanent magnet synchronous motors - cross section*. 2013. URL: <http://www.hbdindustries.com/>.
- [2] VEM motors GmbH. *Permanent magnet synchronous motors for inverter operation*. 2013. URL: <http://www.vem-group.com/>.
- [3] T. Kikuchi e T. Kenjo. «A unique desktop electrical machinery laboratory for the mechatronics age». In: 40.4 (nov. 1997).

[Students' edition · 30 ottobre 2017]

ELENCO DEI SIMBOLI

MOTORE CC · ANALISI DI UN CATALOGO COMMERCIALE

Ci si prefigge la lettura ragionata dei dati di catalogo di un motore in corrente continua a magneti permanenti.¹ A titolo di esempio, si considera il motore *CD PM Motor 1.13.044.235-V*, i cui dati di targa sono riportati nella figura 1.

Type		235	236
Rated Voltage	V	12	24
Rated Torque	Ncm	15	15
Rated Speed	min ⁻¹	3.000	3.000
Rated Output Power	W	47	47
Rated Current	A	6,2	3,1
Max. Allow. Const. Current**) A		4,2	2,1
No Load Speed	min ⁻¹	3.900	3.900
No Load Current	A	0,93	0,46
Stall Current	A	24	12
Stall Torque	Ncm	64	64
Rotor Inertia	gcm ²	180	180
Speed Regulation Constant	min ⁻¹ /Ncm	60	60
Torque Constant	Ncm/A	2,8	5,6
Mech. Time Constant	ms	12,4	12,4
Electr. Time Constant	ms	1,05	1,05
Terminal Resistance	Ohm	0,5	2,0
Thermal Resistance	R _{th1} K/W	4,8	4,8
	R _{th2} K/W	4,6	4,6
Weight	g	765	765

Figura 1: Dati di targa dei motori 1.13.044.235-236 (Courtesy of Buhler AG)

Il termine *rated* si riferisce a valori nominali. Alcune grandezze sono *primarie*, cioè ottenute da misure del Costruttore. Altre possono essere definite *secondarie*, nel senso che possono sia essere misurate, sia ottenute tramite elaborazione numerica di grandezze primarie. Ad esempio, la potenza nominale è quella meccanica all'albero; facendo attenzione alle unità di misura, essa si può calcolare come

¹ http://www.buehlermotor.com/EN/DC_EC_Motors

$$P_N = 15 \cdot 10^{-2} \text{ Nm} \cdot 3000 \cdot \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} = 47.1 \text{ W}$$

A regime, le equazioni che descrivono il motore e il carico sono le seguenti:

$$\begin{aligned} U_a &= R_a I_a + K_{e\Phi} \Omega \\ T_e &= K_{e\Phi} I_a = B \Omega + T \end{aligned} \quad (1)$$

dove si è indicata con T_e la coppia elettromagnetica generata dal motore, mentre T rappresenta la coppia utile all'albero, che in equilibrio deve coincidere con la coppia di carico T_L .

Facendo ruotare a vuoto il motore, alimentandolo con la sua tensione di armatura nominale, si misurano velocità e corrente di armatura, ottenendo la *No Load Speed* e la *No Load Current* rispettivamente.

$$\text{No-load speed} = \Omega_0 = 3900 \text{ rpm} = 408.4 \text{ rad/s}$$

$$\text{No-load current} = I_0 = 0.93 \text{ A}$$

La prima delle (1) permette allora di calcolare la costante di forza controelettromotrice (e di coppia) $K_{e\Phi}$

$$K_{e\Phi} = \frac{U_{aN} - R_a I_0}{\Omega_0} = \frac{12 - 0.5 \cdot 0.93}{3900 \cdot 2\pi/60} = 0.0282 \text{ [Vs/rad]} \quad (2)$$

Utilizzando un freno esterno, ad esempio un freno a polveri (*particle brake*) si incrementa la coppia resistente fino a bloccare la rotazione dell'albero e si misura la corrente, ottenendo la corrente di stallo (*Stall current*).

$$\text{Stall current} = I_S = 24 \text{ A}$$

La coppia corrispondente è detta coppia di stallo (*Stall torque*).

$$\text{Stall torque} = T_S = 64 \text{ Ncm}$$

La misura in queste condizioni (velocità nulla) permette di ricavare la costante di coppia, $K_{\tau\Phi}$ in modo agevole dalla seconda delle (1)

$$K_{\tau\Phi} = \frac{T_S}{I_S} = \frac{64 \cdot 10^{-2}}{24} = 0.0266 \text{ [Nm/A]} \quad (3)$$

Essa non coincide esattamente con la costante di forza controelettromotrice (2), anche se le due costanti rimanono abbastanza vicine. La differenza è probabilmente da ascriversi

ad un certo grado di saturazione che insorge quando il motore è percorso da una corrente di molto superiore al valore nominale.

La presenza di una corrente a vuoto diversa da zero implica che vi siano una coppia meccaniche dovuta all'attrito viscoso dei cuscinetti. Il coefficiente (costante) di attrito viscoso B si può dunque stimare come segue:

$$B = \frac{K_{e\Phi} I_0}{\Omega_0} = \frac{0.0282 \cdot 0.93}{3900 \cdot 2\pi/60} = 64.2 \cdot 10^{-6} \quad (4)$$

La resistenza (*Terminal resistance*) si misura ai capi dei morsetti di armatura, alla temperatura ambiente di 25°C. Dopo la prima misura, conviene imprimere una rotazione al motore (*to spin the motor*) e ripetere la misura, e così per almeno tre volte. Le misure devono risultare simili (se ne può poi prendere la media). La procedura è volta ad evitare errori grossolani legati ad una certa aleatorietà del contatto spazzole-collettore.

$$\text{Terminal resistance} = R_a = 0.5 \Omega$$

1.1 CARATTERISTICA MECCANICA

La presente sezione illustrerà com'è ricavata la curva coppia-velocità del motore di Figura 2, riportata nel catalogo preso ad esempio. Si deve immaginare che il Costruttore, dopo aver montato il motore su un banco prova, ed averlo alimentato con una tensione continua e costante pari al suo valore nominale, abbia imposto livelli crescenti di coppia di carico tramite un freno esterno, partendo da una coppia nulla fino alla coppia di stallo, che ferma il rotore. Per ogni punto è stata misurata la velocità e la corrispondente corrente di armatura.

Si intende ricavare innanzitutto la relazione che lega la coppia utile alla corrente di armatura, nell'ipotesi di tensione impressa pari alla nominale. Essa vale

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{U_{aN} B}{R_a B + K_{e\Phi}^2} + \frac{T}{R_a B + K_{e\Phi}^2} \\ &= I_0 + \frac{T}{R_a B + K_{e\Phi}^2} = 0.93 + \frac{T}{0.0293} \end{aligned} \quad (5)$$

L'espressione (5) rappresenta la relazione corrente-coppia utile del motore riportata nel data sheet. Si tratta evidentemente di una retta (figura 2). La curva riporta in ascisse la coppia utile all'albero (in Ncm), in ordinata sinistra la velocità (in rpm) ed in ordinata destra la corrente di armatura. I due punti caratteristici sono quello di funzionamento a vuoto (T_0, I_0) e quello di stallo (T_S, I_S).

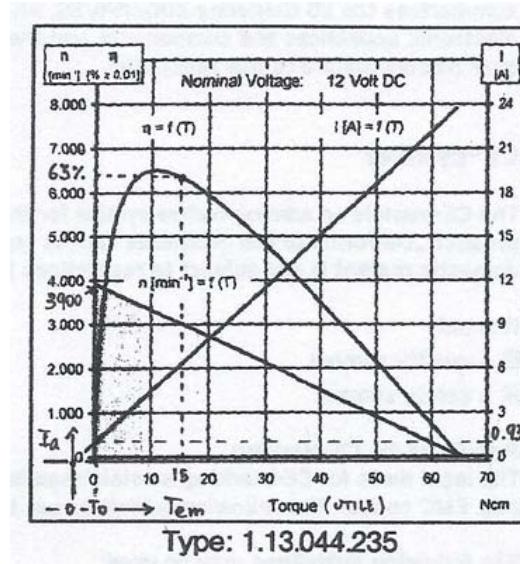


Figura 2: Distinzione tra coppia elettromagnetica e coppia utile nel motore 235

L'espressione (5) permette anche di verificare il legame tra la *rated current* e la *rated torque* del catalogo :

$$T_N = (I_{aN} - 0.93) 0.0293 = 0.15 \text{ Nm} \quad (6)$$

La caratteristica meccanica, a tensione di armatura costante e pari al suo valore nominale, è rappresentata dal segmento che congiunge la coppia di stallo (ascissa nella figura 2, 64 Ncm) alla velocità a vuoto (ordinata sinistra nella figura 2, 3900 rpm). La pendenza della caratteristica meccanica (a volte indicata con il termine *Speed regulation constant*) si calcola come:

$$\text{Speed regulation constant} = \frac{\Omega_0}{T_s} = \frac{3900}{64} = 60.9 \text{ min}^{-1}/\text{Ncm} \quad (7)$$

Si faccia attenzione che tale costante (per omogeneità con il dato di catalogo) è rimasta espressa in unità di misura non convenzionali. Nel grafico di Figura 2 appare poi un'ulteriore ordinata, legata all'efficienza del motore. La curva corrispondente si ricava da una serie di misure, ottenute imponendo diversi livelli di coppia di carico tramite un freno esterno, dalla coppia nulla fino alla coppia di stallo, fissando la tensione di armatura pari al valore nominale e registrando in ogni punto di lavoro a regime le corrispondenti velocità e corrente. L'efficienza

è intesa come rapporto tra la potenza meccanica (all'albero) e la potenza elettrica (ai morsetti del motore). A titolo di esempio, si riporta un possibile set di misure:

$$\begin{aligned} T &= 10 \cdot 10^{-2} \text{ Nm} & \Omega_T &= 346 \text{ rad/s} \\ U_a &= 12 \text{ V} & I_a &= 4.48 \text{ A} \end{aligned}$$

L'efficienza alla coppia considerata vale

$$\eta = \frac{P_{mec}}{P_{el}} = \frac{10 \cdot 10^{-2} \cdot 346}{12 \cdot 4.48} = 64\% \quad (8)$$

che è molto simile al valore che si può leggere nella figura 2. Va notato che l'efficienza non è costante all'interno del range di coppia del motore, e che essa ha un massimo appunto attorno a 10 Ncm. Di questo si può tener conto nella progettazione di una macchina efficiente dal punto di vista energetico.

1.1.1 Calcoli termici

La corrente di armatura, percorrendo i conduttori, provoca perdite per effetto Joule. La resistenza termica tra due parti, espressa in Kelvin/Watt (K/W), permette di calcolare il salto termico (differenza di temperatura) tra le parti stesse, quando una delle due è sede di potenza termica dissipata. E' comune, nei cataloghi, riscontrare due valori di resistenza termica (R_{th1} e R_{th2}), relativi rispettivamente al sistema armatura-carcassa e carcassa-ambiente.

La classe di isolamento

Durante il funzionamento un dielettrico si degrada, perdendo gradualmente la capacità isolante. Si parla di *durata di vita* di un isolante, intendendo con essa il tempo durante il quale le proprietà dell'isolante si mantengono superiori a dei valori prestabiliti, prima che avvengano fenomeni di sgretolamento o distruzione. La durata dei materiali usati per l'isolamento delle macchine elettriche dipende da fattori termici, chimici, meccanici ed elettrici. Tra questi i più importanti sono le sollecitazioni termica ed elettrica. Nei motori elettrici, il valore della temperatura di funzionamento è di grande importanza perché da essa dipende la durata di efficiente funzionalità. Infatti, quantunque gli isolanti siano contraddistinti da una temperatura limite di funzionamento che non bisogna mai superare, la durata della loro efficienza è tanto maggiore quanto minore è la temperatura alla quale vengono fatti lavorare. Sulla base di questi concetti i materiali isolanti solidi vengono suddivisi in classi, convenzionalmente identificate tramite una lettera e contraddistinte dalla massima temperatura accettabile

durante l'esercizio. In relazione alle macchine elettriche, viene definita una temperatura ambiente convenzionale e vengono fissati i limiti per le sovratemperature degli avvolgimenti in base alla classe di isolamento adottata. Ad esempio, la Norma IEC 335-1/335-2-41, relativa alle pompe elettriche d'uso domestico e similari, fissa una temperatura ambiente di 25°C. Le classi di isolamento più diffuse e le relative sovratemperature sono riportate nella tabella 1.

Tabella 1: Classi di isolamento per pompe elettriche d'uso domestico.

Classe di isolamento	A	E	B	F	H
Sovratemperatura	75°C	90°C	95°C	115°C	140°C

La Norma IEC 34-1 relativa alle macchine elettriche rotanti, e quindi valida per i motori elettrici, fissa invece una temperatura ambiente convenzionale pari a 40°C e definisce per le sovratemperature degli avvolgimenti i limiti riportati nella tabella 2. La stessa tabella riporta anche come si modificano i limiti nel caso di motori di piccola potenza nominale, inferiore a 600 W.

Tabella 2: Classi di isolamento per motori elettrici ($T_{\text{amb}} = 40 \text{ }^{\circ}\text{C}$).

Classe di isolamento	A	E	B	F	H
Sovratemperatura	60 °C	75 °C	80 °C	105 °C	125 °C
Motori con $P_N < 600 \text{ W}$	65 °C		85 °C	110 °C	130 °C

Verifica dei dati di catalogo.

Gli avvolgimenti del motore preso ad esempio hanno un rivestimento isolante in classe H. La temperatura totale di funzionamento risulta essere di $(130 + 40) = 170 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Occorre sempre considerare un certo margine, sia per i fenomeni di invecchiamento descritti sopra, sia come elemento cautelativo nel caso in cui, nella caratterizzazione del motore, la misura non sia eseguita nel punto più caldo dell'avvolgimento.

A regime, l'aumento di temperatura provoca un innalzamento della resistenza di armatura (che il catalogo fornisce alla temperatura di 25 °C, secondo il coefficiente termico del rame $\alpha_{cu} = 3950 \cdot 10^{-6} \Omega / \text{ }^{\circ}\text{C}$, che incide sulla potenza effettivamente dissipata. Nota la classe di isolamento, è possibile ricavare la

corrente massima di funzionamento continuo (*Max allowable constant current*) tramite l'espressione:

$$I_{a_max_allow_const} = \sqrt{\frac{\Delta\vartheta_{max}}{(R_{th1} + R_{th2}) R_a (1 + \alpha_{cu} \Delta\vartheta_{Rmax})}} \quad (9)$$

ricordando di inserire correttamente il valore di resistenza di armatura, riportandola dal valore di catalogo (@25 °C) alla temperatura massima relativa alla classe specificata dal catalogo. Per la classe H, si deve considerare una resistenza d'armatura di valore pari a:

$$\begin{aligned} R_a(170) &= R_a(25) (1 + \alpha_{cu} \Delta\vartheta_{Rmax}) \\ &= 0.5 \cdot (1 + 3950 \cdot 10^{-6} \cdot 145) = 0.786 \Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Considerando la temperatura ambiente convenzionale per i motori elettrici di 40°C, la (9) porge:

$$I_{a_max_allow_const} = \sqrt{\frac{170 - 40}{(4.8 + 4.6) 0.786}} = 4.19 \text{ A.} \quad (11)$$

Tale valore coincide con quello indicato nel catalogo, pari a 4.2 A. Il catalogo specifica inoltre che il motore può essere fatto funzionare fino ad una temperatura ambiente di 70 °C; chiaramente in tal caso la corrente massima continuativa diminuirebbe sensibilmente, diventando = 3.67 A. Volendo aumentare la corrente di funzionamento continuo, occorrerà predisporre un adeguato raffreddamento dello *chassis*, in modo da ridurre sensibilmente la resistenza termica R_{th2} . E' molto importante comprendere che essa, nella specifica applicazione, deve essere rilevata in condizioni ambientali e di montaggio reali, solitamente diverse da quelle di prova. Nei motori con flangia metallica, ad esempio, la resistenza termica R_{th2} si riduce fino al 50%.

E' anche facilmente intuibile come il riscaldamento dell'avvolgimento e dello statore avvengano in tempi diversi a causa delle diverse masse. Dopo la connessione si scalda dapprima l'avvolgimento (con costanti di tempo tra alcuni secondi e qualche decina di secondi). Lo statore reagisce successivamente. Le costanti di tempo si collocano, a seconda delle dimensioni fisiche del motore, tra 1 e 30 minuti. Dopo si instaura un equilibrio termico. La differenza di temperatura tra l'avvolgimento e l'ambiente può essere determinata nel funzionamento in continuo (mediante il valore della corrente I_a , come nell'esempio numerico sopra descritto), oppure in funzionamento ciclico (mediante il valore efficace della corrente $I_{a,RMS}$). E' da sottolineare, tra gli effetti indesiderati dell'aumento

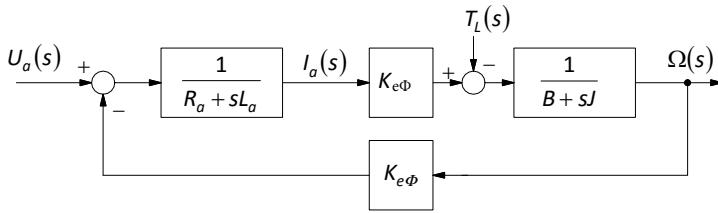


Figura 3: Schema a blocchi del motore c.c. a flusso costante.

di temperatura, la diminuzione del flusso dei magneti permanenti, che a seconda del materiale impiegato è compreso dall'1 al 10 %, a 75 °C.

In altre parole, la corrente nominale è stata misurata alla velocità nominale, quando l'autoventilazione ha piena efficacia. La corrente continuativa massima invece prescinde dall'autoventilazione e considera entrambe le resistenze termiche al loro valore nominale.

1.1.2 Comportamento dinamico

Nel catalogo appaiono tra i dati forniti alcune costanti caratteristiche del motore. Esse sono utili nel progetto del sistema dinamico di controllo e nella determinazione delle diverse funzioni di trasferimento del motore. Il loro significato risulta chiaro se si analizzano le equazioni dinamiche del motore in corrente continua. Se il flusso è costante, le equazioni del motore (di seguito riportate per comodità) sono lineari, in quanto i moltiplicatori diventano operatori lineari, e si può ricavare un modello matematico e a blocchi nel dominio di Laplace (variabile s). Per alleggerire le notazioni, si omette il flusso, intendendo cioè che $K_e\Phi = K_e\Phi$.

$$\begin{cases} u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_e\Phi \omega \\ K_e\Phi i_a = B\omega + J \frac{d\omega}{dt} + \tau_L(t) \end{cases} \quad (12)$$

dove si è indicata con $\tau_L(t)$ la generica coppia di carico non legata alla velocità ω né alla sua derivata. Passando al dominio di Laplace, il sistema (12) si scrive

$$\begin{cases} U_a(s) = (R_a + sL_a) I_a(s) + K_e\Phi \Omega(s) \\ K_e\Phi I_a(s) = (B + sJ) \Omega(s) + T_L(s). \end{cases} \quad (13)$$

Lo schema a blocchi relativo al sistema (13) è riportato in figura 3.

Per caratterizzare il comportamento dinamico del motore c.c., assunto la tensione U_a come comando (ingresso), T_L come coppia di carico (o di disturbo) e la velocità Ω come uscita, si può ricavare la relazione, secondo Laplace, che lega uscita ed ingresso (*funzione di trasferimento*):

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} &= \frac{\frac{1}{R_a + sL_a} K_{e\Phi} \frac{1}{B + sJ}}{1 + \frac{1}{R_a + sL_a} K_{e\Phi}^2 \frac{1}{B + sJ}} \\ &= \frac{\frac{1}{K_{e\Phi}}}{\frac{(R_a + sL_a)(B + sJ)}{K_{e\Phi}^2} + 1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Se si esplicitano i prodotti indicati al denominatore della (14) si può scrivere:

$$\begin{aligned} D(s) &= \frac{JL_a}{K_{e\Phi}^2} s^2 + \frac{R_a J + L_a B}{K_{e\Phi}^2} s + \frac{R_a B}{K_{e\Phi}^2} + 1 \\ &= s^2 \tau_a \tau_{m1} + s \tau_{m1} \left(1 + \frac{\tau_a}{\tau_m}\right) + \left(1 + \frac{\tau_{m1}}{\tau_m}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

dove si sono introdotte le costanti di tempo elettrica, meccanica ed elettromecanica, definite come:

$$\begin{cases} \tau_a = \frac{L_a}{R_a} & (\text{elettrica}) \\ \tau_m = \frac{J}{B} & (\text{meccanica}) \\ \tau_{m1} = \frac{JR_a}{K_{e\Phi}^2} & (\text{elettromeccanica}). \end{cases} \quad (16)$$

Molto spesso nella pratica sono verificate due condizioni che permettono una scrittura semplificata della (15).

- (a) $\tau_a \ll \tau_m$. La costante di tempo elettrica è solitamente molto minore di quella meccanica;
- (b) $\tau_{m1} \ll \tau_m$ (vedi dimostrazione).

Dimostrazione. Se si sostituiscono ai simboli le relative definizioni, questa diseguaglianza equivale a supporre $R_a B \ll K_{e\Phi}^2$. Indicando con U_{Ra} la caduta di

tensione sulla resistenza d'armatura, con T_B la coppia d'attrito viscoso e con E_N ed I_{aN} rispettivamente la *fem* e la corrente nominali, si può scrivere:

$$\begin{aligned} R_a B &= \frac{1}{\Omega_N I_{aN}} (R_a I_{aN}) (B \Omega_N) = \frac{1}{\Omega_N I_{aN}} U_{Ra} T_B \\ K_{e\Phi}^2 &= \frac{1}{\Omega_N I_{aN}} (K_{e\Phi} \Omega_N) (K_{e\Phi} I_N) = \frac{1}{\Omega_N I_{aN}} E_{aN} T_N \end{aligned} \quad (17)$$

e dato che $U_{Ra} \ll E_{aN}$ e che solitamente² $T_B \ll T_N$ vale anche $R_a B \ll K_{e\Phi}^2$ e con essa l'approssimazione risulta legittimata. \square

Se dunque si possono ritenere valide le approssimazioni (a) e (b), la (15) diventa:

$$D(s) = s^2 \tau_a \tau_{m1} + s \tau_{m1} + 1 = \tau_a \tau_{m1} (s^2 + s/\tau_a + 1/(\tau_a \tau_{m1})) \quad (18)$$

e la (14) si può scrivere come

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{(K_{\tau\Phi} \tau_a \tau_{m1})^{-1}}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (19)$$

e p_1, p_2 sono le radici del *polinomio caratteristico* $D(s) = 0$, detti anche *poli* della *funzione di trasferimento* del motore nella regolazione di tensione di armatura.

Per comprendere quali siano gli effetti nel tempo, si può antitrasformare la funzione (19). Innanzitutto, dato che la (19) è una frazione *strettamente propria*, essa si può esprimere in somma di fratti semplici:

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} \quad (20)$$

dove i *residui* $k_{1,2}$ dei poli $p_{1,2}$ si calcolano semplicemente come

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(K_{\tau\Phi} \tau_a \tau_{m1})^{-1}}{p_1 - p_2} \\ k_2 &= \frac{(K_{\tau\Phi} \tau_a \tau_{m1})^{-1}}{p_2 - p_1}. \end{aligned} \quad (21)$$

L'antitrasformata della (20) è:

$$k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} \quad (22)$$

² Non vale nel caso di carichi fortemente legati ad attriti viscosi, come pompe e ventilatori. Infatti, per valutare correttamente la dinamica dell'azionamento, sia J , sia B vanno intesi come coefficienti complessivi del motore e del carico riportato al motore.

Senza entrare in dettagli che competono alla Teoria dei Controlli Automatici, qui ci si limita ad osservare come i poli del sistema governino la sua dinamica. In particolare, quanto più alto è il loro valore (negativo) e tanto più rapida ci si aspetta che sia l'evoluzione del *modo* associato a ciascuno di essi.

Le radici di $D(s)$ in questo caso sono:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\tau_a} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\tau_a}{\tau_{m1}}} \right) \quad (23)$$

Il discriminante si annulla per $\tau_{m1} = 4\tau_a$; in tal caso le radici calcolate nella (23) sono reali e coincidenti:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_a} \quad (24)$$

Valori maggiori del momento di inerzia o minori del flusso comportano $\tau_{m1} > 4\tau_a$, portano dunque a radici reali e distinte, perché il discriminante rimane in tali casi positivo. Se, come spesso accade, $\tau_{m1} \gg 4\tau_a$, allora:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\tau_a} \left(-1 \pm \left(1 - \frac{2\tau_a}{\tau_{m1}} \right) \right) = \begin{cases} -\frac{1}{\tau_{m1}} \\ -\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_{m1}} \approx -\frac{1}{\tau_a} \end{cases} \quad (25)$$

in quanto la radice del discriminante nella (23) può in tal caso essere approssimata in serie di Maclaurin troncata al primo ordine. Questo caso, sia pur particolare, è abbastanza frequente nei comuni motori in commercio. È qui chiaro più che altrove come i poli siano direttamente collegati alle due costanti di tempo (elettrica ed elettromeccanica), che dunque dettano i modi dinamici (uno più rapido, sovrapposta ad uno molto più lento) della risposta di velocità di un motore controllato in tensione (senza anelli di regolazione di corrente).

Se, al contrario, il momento di inerzia è piccolo, tale per cui $\tau_{m1} < 4\tau_a$, le radici sono complesse coniugate e si ha:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\tau_a} \left(-1 \pm j\sqrt{\frac{4\tau_a}{\tau_{m1}} - 1} \right) \quad (26)$$

Il catalogo in esame riporta una costante di tempo elettrica (*Electr. time constant*) $\tau_a = 1.05$ ms. Da essa è possibile ricavare l'induttanza di armatura, $L_a = \tau_a R_a = 1.05 \cdot$

$0.5 = 0.525$ mH e una costante di tempo meccanica (*Mech. time constant*) $\tau_m = 12.4$ ms. La costante di tempo elettromeccanica vale

$$\tau_{m1} = \frac{180 \cdot 10^{-7} \cdot 0.5}{0.0282^2} = 11.3 \text{ ms.} \quad (27)$$

Si può pertanto affermare che la diseguaglianza $\tau_a \ll \tau_m$ è verificata, mentre non lo è la diseguaglianza $\tau_{m1} \ll \tau_m$. Questo comporta la rimozione di alcune delle semplificazioni effettuate sopra. In particolare, la (15) diventa

$$D(s) = s^2 \tau_a \tau_{m1} + s \tau_{m1} + a \quad (28)$$

con $a = 1 + \tau_{m1}/\tau_m = 1.91$. Le radici si calcolano con la (23) modificata opportunamente:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\tau_a} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a\tau_a}{\tau_{m1}}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2.1 \cdot 10^{-3}} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{8 \cdot 10^{-3}}{11.3 \cdot 10^{-3}}} \right) = -219 \\ \frac{1}{2.1 \cdot 10^{-3}} \left(-1 - \sqrt{1 - \frac{8 \cdot 10^{-3}}{11.3 \cdot 10^{-3}}} \right) = -733. \end{cases} \quad (29)$$

Con questo dati è possibile studiare completamente la dinamica del motore in esame, in base alle osservazioni svolte a proposito della (19).

1.1.3 Comportamento dinamico con separazione dei modi

L'equazione di bilancio della tensione di armatura è:

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_{e\Phi} \omega \quad (30)$$

La dinamica con cui evolve la velocità (grandezza meccanica) è in genere molto più lenta della dinamica con cui evolve la corrente (grandezza elettrica). Si suppone dunque che, in seguito ad una variazione di tensione di armatura al valore costante U_a , la corrente di armatura estingua gran parte del suo transitorio mentre la velocità è ancora quasi ferma al valore che aveva prima dell'applicazione della variazione di tensione. Questa ipotesi, quasi sempre verificata nei casi reali, equivale a considerare costante il termine $E_a = K_{e\Phi} \omega$ nella (30). In tal caso, l'equazione (30) risolta in funzione della corrente porge un'equazione differenziale lineare di primo grado a coefficienti costanti:

$$L_a \frac{di_a}{dt} = U_a - R_a i_a - E_a \quad \rightarrow \quad i_a(t) = \frac{U_a - E_a}{R_a} \left(1 - e^{-t/\tau_a} \right) \quad (31)$$

Si può ragionare in maniera analoga per cercare di definire la costante di tempo della dinamica meccanica. L'equazione di bilancio delle coppie meccaniche è la seguente:

$$\tau = B\omega + J \frac{d\omega}{dt} + \tau_L \quad (32)$$

L'ipotesi di avere una dinamica di corrente molto rapida rispetto alla dinamica di velocità permette di supporre che la corrente si adegui istantaneamente alle variazioni di tensione causate dalle variazioni di velocità³. Questo equivale a trascurare la dinamica di corrente nella studio del transitorio di velocità che segue l'applicazione di una variazione a gradino di ampiezza U_a della tensione di armatura. In altre parole, si considera $\tau_a = 0$ nella (30), così che il termine derivativo della corrente scompare. Riprendendo la (32) si ottiene:

$$\begin{cases} K_{e\Phi} i_a = B\omega + J \frac{d\omega}{dt} + \tau_L \\ i_a = \frac{U_a - K_{e\Phi}\omega}{R_a}. \end{cases} \quad (33)$$

Sostituendo la seconda delle (33) nella prima e riordinando si ottiene:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{J} \left(\frac{K_{e\Phi}^2}{R_a} + B \right) \omega = \frac{1}{J} \left(\frac{K_{e\Phi} U_a}{R_a} - \tau_L \right) \quad (34)$$

Si tratta ancora di un'equazione differenziale lineare di primo grado a coefficienti costanti, la cui soluzione è

$$\omega(t) = \frac{K_{e\Phi} U_a - \tau_L R_a}{K_{e\Phi}^2 + B R_a} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (35)$$

con la costante di tempo τ pari a:

$$\tau = \frac{J R_a}{K_{e\Phi}^2 + B R_a} = \frac{180 \cdot 10^{-7} \cdot 0.5}{0.0282^2 + 64.2 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5} = 10.8 \text{ ms} \quad (36)$$

che è simile al valore indicato nel catalogo come *Mech. time constant*, che è ricavato direttamente da misure effettuate sulla risposta al gradino di tensione del motore. Essa coincide con la costante di tempo elettromeccanica τ_{m1} , definita nella (16), qualora sia verificata la diseguaglianza $K_{e\Phi}^2 >> B R_a$.

³ Per fissare le idee, è quello che accadrebbe se il circuito fosse puramente resistivo, per cui varrebbe sempre la relazione $i_a = u_a / R_a - K_{e\Phi} \omega$.

a) EMC guideline	2004/108/EG
b) Low voltage guideline	2006/95/EG
c) Equipment guideline	2006/42/EG
d) CE marking guideline	93/68/EWG

Figura 4: Direttive europee applicabili.

1.1.4 Cenni al contesto normativo

Il quadro normativo è complesso, e la sua disamina esula dagli obiettivi di questa trattazione. L'esame del catalogo presenta però alcuni spunti utili per la discussione. Innanzitutto il Costruttore ha l'obbligo di indagare su quali direttive comunitarie siano applicabili al prodotto. Nel caso di piccoli motori elettrici, esse sono elencate nella figura 4. Per ciascuna di esse, il Costruttore deve indicare le sue considerazioni. Per quanto riguarda le linee guida EMC, si noti come il Costruttore si limiti a dire che il motore è destinato ad essere parte di sistemi più complessi, e pertanto non ritiene neppure di dover marcire CE il motore, mentre rimanda a considerazioni generali di installazione e protezione EMC alla norma IEC 61000-5-x (*Installation and mitigation guidelines*). La direttiva "bassa tensione" (*Low-voltage guideline*) si applica solo per apparati con tensioni superiori ai 75 V, quindi anch'essa non viene considerata dal Costruttore. La direttiva "macchine" (*Equipment guideline*) richiama quanto detto per la direttiva EMC, sottolineando che l'installazione va fatta esclusivamente da personale esperto, e che la responsabilità di ottemperare ai criteri della direttiva in termini di sicurezza d'uso rimane a carico dell'assemblatore dell'impianto finale. L'ultima direttiva citata nella figura 4 riguarda la marcatura vera e propria. Il Consiglio Europeo l'ha adottata ai fini di eliminare gli ostacoli tecnici al commercio, secondo una strategia di armonizzazione tecnica e normalizzazione. I due elementi principali di tale strategia sono i requisiti essenziali e le procedure di valutazione della conformità. La direttiva è dunque una guida utile a ciascun costruttore per decidere se e come apporre il marchio CE.

L'ultimo aspetto citato nel catalogo del Costruttore riguarda la direttiva 2002/95/CE, comunemente indicata con la sigla RoHS (*Restriction of Hazardous Substances*). Essa specifica i limiti massimi di alcune sostanze nocive contenute in una apparecchiatura. La tabella 3 riporta i valori massimi, riferiti ciascuno al materiale grezzo omogeneo (*raw homogeneous material*). Il mercurio, in particolare, non deve essere mai aggiunto intenzionalmente nei prodotti. Un'indagine del 2013 ha rivelato che nel Regno Unito il 99 % dei prodotti sottoposti alla Commissione per l'accertamento rispetta il 99 % dei vincoli, con il punto più critico

Tabella 3: Limiti RoHS.

Materiale	Limite
Cadmio	0.01 %
Cromo esavalente	
Piombo	
Bifenili (PBB)	0.1 %
Difenili (PBDE)	
Mercurio	< 100 ppm

legato alla presenza eccessiva di piombo nelle materie plastiche. La direttiva, obbligatoria dal luglio 2006 ha pesanti riflessi sulla salute (e sull'opinione) pubblica, e proprio per questo i Costruttori sono stati particolarmente sensibilizzati.

INTRODUZIONE AGLI AZIONAMENTI ELETTRICI

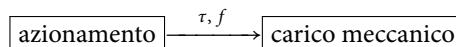
1.1 STRUTTURA, SCHEMI A BLOCCHI E CLASSIFICAZIONE

1.1.1 *L'azionamento elettrico*

In questi anni, sia nelle applicazioni industriali, sia in quelle civili, sono sempre più usati sistemi di generazione del moto assistiti elettronicamente, che garantiscono la possibilità di controllare più grandezze meccaniche, sia statiche (posizione), sia cinematiche (velocità), sia dinamiche (accelerazione, coppia).

Electric machines are ubiquitous in industry for a wide range of applications, consuming between 43% and 46% of all electricity that is generated in the world. Although some machines are used for high-performance applications, such as robots and machine tools, the majority are used in industrial processes for pumps, compressors, fans, conveyors, and other slower-dynamic applications. The primary economic value of a motor drive is derived from its ability to control the speed of its attached load (e.g., pumps or fans), making it possible to slash the high mechanical losses that are incurred when the process is controlled using inefficient throttling techniques while the machine spins continuously at its full speed. It is estimated that 92% – 95% of the life cycle costs of electric motors are associated with the energy they consume, leading to typical payback periods of < 2 years for the installation of an adjustable-speed drive. It is rather surprising to learn that, despite overwhelming evidence of the attainable savings, only 10% – 15% of all industrial motors presently use electronic adjustable speed drives. However, there is wide agreement that the potential for future growth in the sales of industrial drives is still very substantial.

Si definisce *azionamento* il complesso dei sistemi atti a produrre il moto di un carico meccanico mantenendo controllate, in ogni istante, le grandezze meccaniche d'interesse. Ogni azionamento comprende un organo di potenza, detto *attuatore* capace di produrre il lavoro meccanico connesso al moto. Tale attuatore può essere idraulico, pneumatico o elettrico.



L'azionamento attua la sua funzione attraverso una forza (attuatore lineare) o, più comunemente, attraverso una coppia (attuatore rotante). Si definisce

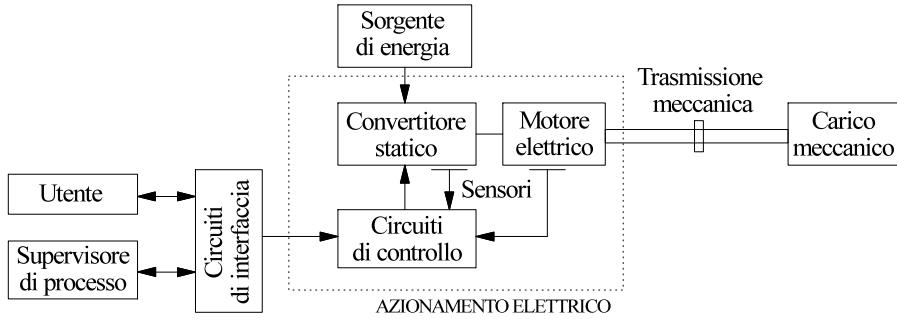


Figura 1: Schema a blocchi di un generico azionamento elettrico.

azionamento elettrico un azionamento che fa uso di un attuatore elettrico, ossia di una macchina elettrica, solitamente in funzionamento da motore, nella quale avviene una conversione di energia da elettrica a meccanica (conversione elettromeccanica di energia). Un azionamento può essere visto come un insieme di elementi interagenti fra loro, con i quali, fissata la strategia di controllo, si possono ottenere in modo automatico i voluti movimenti del carico meccanico. Lo schema di principio di un generico azionamento elettrico è mostrato nella figura 1. In generale, dunque, ogni azionamento elettrico è costituito da un motore elettrico, un convertitore statico e un dispositivo di controllo. Nel seguito verranno descritti i tratti essenziali di ciascuno di questi componenti.

1.1.2 *Il motore elettrico*

In questo contesto, il motore elettrico è il componente che trasforma l'energia elettrica erogata dal convertitore statico in energia meccanica necessaria al moto delle parti meccaniche. È dunque un attuatore. Nella scrittura delle equazioni, spesso si usa separare il motore in due blocchi funzionali, il primo che tenga conto degli avvolgimenti e delle interazioni elettromagnetiche, ed il secondo che consideri gli aspetti meccanici, quali le relazioni tra coppia prodotta, attriti e momenti d'inerzia.

Vi sono diversi tipi di motore elettrico. Occorre anche dire che l'evoluzione tecnologica è stata più lenta di quella osservata ad esempio per l'elettronica. L'orientamento attuale è di una stretta interazione tra il progetto del motore e del suo controllo, in modo da trarne i massimi benefici sinergici. La figura 2 illustra i principali tipi di motori utilizzati negli azionamenti elettrici.

Per poter meglio comprendere le tecniche di controllo degli azionamenti che saranno sviluppati in seguito, può essere utile analizzare, in generale, la

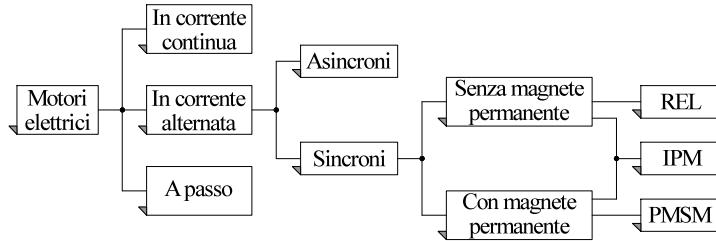


Figura 2: Tipi di motori elettrici impiegati negli azionamenti elettrici.

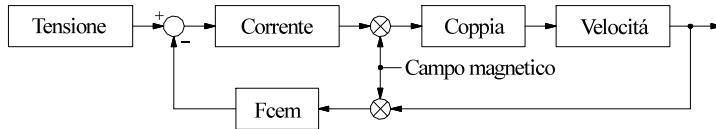


Figura 3: Principio di causa – effetto nei motori elettrici.

catena di elementi *causa-effetto* che agiscono in un qualunque motore elettrico. Essa è schematicamente riportata nella figura 3.¹

A seconda del tipo di alimentazione, i motori si classificano in motori in continua ed in alternata. Di seguito sono riportate le caratteristiche salienti dei principali motori per azionamenti.

I motori in corrente continua

I motori in corrente continua sono caratterizzati da un sistema meccanico di spazzole-collettore per trasferire corrente alla parte rotante (rotore). Tale meccanismo rappresenta il maggior punto debole di tali motori, perché incide sull'affidabilità (teme polveri ed umidità condensante), sul costo (per l'usura e la necessaria manutenzione) e sulle prestazioni (limita la velocità massima).

Per contro, necessitano di un sistema di controllo abbastanza semplice, il convertitore che li alimenta è in genere meno costoso dell'equivalente in alternata. In applicazioni di media potenza possono risultare più silenziosi della controparte in alternata; ciò nonostante, da molti anni la tendenza è di sostituirli con motori in alternata. I motori in corrente continua sono tuttora impiegati

¹ Brevemente, si può dire che in un motore la coppia dipende sempre, sia pure con relazioni che dipendono dal tipo di motore, da una corrente. La coppia agisce sul carico meccanico, variandone la velocità. Il moto del rotore provoca poi l'insorgere negli avvolgimenti di una forza contro-elettromotrice, che tende ad opporsi alla causa che la genera. Per poter imporre la corrente occorre alimentare il motore con una tensione, che innanzitutto deve vincere la forza contro-elettromotrice. La parte rimanente serve appunto ad imporre la corrente desiderata.

soprattutto in applicazioni di grossa potenza (carri ponte, gru) e in veicoli a batteria (lava-pavimenti industriali, carrelli trasportatori aeroportuali).

I motori asincroni

I motori in alternata si suddividono essenzialmente in motori sincroni ed asincroni. Con tali termini ci si riferisce alla velocità relativa tra il rotore (*rotor*) ed il campo magnetico (*rotating field*), che è nulla nei primi e necessariamente diversa da zero nei secondi.

I motori asincroni sono generalmente trifase, non richiedono praticamente manutenzione e sono dunque preferiti nelle applicazioni dove essi devono essere montati in zone poco accessibili. A parità di coppia prodotta, i motori asincroni sono più leggeri, più piccoli e più facilmente reperibili dei motori in corrente continua, almeno per potenze piccole e medie.

I motori asincroni possono operare in ambienti umidi, corrosivi o esplosivi, e speciali carcasse (*closure*) sono disponibili a prezzi contenuti. Essi sono preferiti ai motori in corrente continua anche in caso di carichi meccanici molto variabili, o di carichi leggeri per tempi prolungati, condizioni queste che degradano più facilmente il sistema spazzole-collettore.

Tra gli svantaggi dei motori asincroni vanno ricordati il basso fattore di potenza, legato alla necessità di produrre, tramite le correnti di statore, sia la componente di coppia che di flusso magnetico, e l'incidenza del carico nella regolazione di velocità a catena aperta.

I motori sincroni a magneti permanenti

I motori sincroni a magneti permanenti presentano dei magneti inseriti nella struttura di rotore. Sono di costruzione più complessa rispetto ai motori asincroni, e risultano più costosi, soprattutto per la presenza appunto dei magneti, contenenti neodimio e samario.

Scoperti alla fine del Settecento sotto forma di minerali ossidati, questi elementi furono chiamati terre rare. In realtà si tratta di metalli, e non sono effettivamente rari; però sono sparsi nel mondo, mentre sono invece rari i giacimenti abbastanza grandi e concentrati da consentire l'attività estrattiva.

Nei lantanoidi (spesso indicati con il simbolo Ln) gli orbitali 4f sono parzialmente o completamente riempiti, mentre gli orbitali p e d, più esterni, restano ancora vuoti. Visto lo scarso effetto degli orbitali f sulle proprietà chimiche di un elemento rispetto agli orbitali s, p e d, tutti i lantanoidi mostrano sostanzialmente lo stesso comportamento e le stesse proprietà, *rendendo molto difficile una loro separazione per via chimico-fisica*. D'altra parte gli orbitali f conferiscono loro una serie di proprietà



Figura 4: Lago tossico artificiale di Baotou creato dalle raffinerie di terre rare.

magnetiche e ottiche molto interessanti: il samario è molto usato in lega con il cobalto per fabbricare magneti permanenti, mentre l'erbio viene sfruttato come drogante per fibre ottiche allo scopo di renderle attive, cioè capaci di amplificare il segnale luminoso che le attraversa direttamente. Nella batteria di una Toyota Prius ci sono circa 10 chili di lantanzio. In una turbina eolica ci possono essere fino a 260 kg di neodimio.

Nell'autunno del 2010 la Cina, che soddisfa il 95% del fabbisogno mondiale di terre rare e possiede il 48% delle riserve mondiali, ha scosso i mercati internazionali interrompendo per un mese le spedizioni in Giappone in seguito a un incidente diplomatico. Si prevede che nel prossimo decennio la Cina ridurrà costantemente le esportazioni per proteggere le forniture delle proprie industrie in rapida espansione, che già oggi consumano circa il 60% della produzione di terre rare del paese.

I timori di future carenze hanno fatto salire alle stelle i prezzi di questi elementi; per esempio il disporosio, usato per gli hard disk dei computer, costa 272 €/kg, contro gli 11 €/kg del 2003. Nel 2011 la domanda fuori dalla Cina è stata di 55-60 mila tonnellate, ma la Cina ne esporterà circa 24 mila tonnellate. Il resto sarà coperto dalle scorte delle industrie e dalle riserve statali, ma la tendenza è ovviamente preoccupante. Il fatturato globale annuo (dato 2013) delle industrie dipendenti da questi metalli ammonta a 3.400 miliardi di euro.

Il motivo di questo predominio cinese è facilmente spiegabile: la capitale mondiale delle terre rare è Baotou, una città della Mongolia Interna, ove si trova circa l'80% delle terre rare della Cina. Spesso le miniere di terre rare contengono elementi radioattivi come l'uranio e il torio, e i giacimenti producono ogni anno circa 10 milioni di tonnellate di acque di scolo, in gran parte acide o radioattive e quasi del tutto non trattate. I Paesi occidentali non potrebbero mai ospitare elementi così critici dal punto di vista ambientale. Nei primi 8 mesi del 2017 il costo dell'ossido di neodimio è aumentato del 70% (arrivando a 42 €/kg) ed è previsto che in agosto raggiungerà i 53 €/kg. In questo scenario gioca naturalmente un ruolo fondamentale la domanda, che a sua volta è legata al ruolo crescente delle fonti di energie alternative al carbone. Nel rapporto giugno 2017 dal titolo "Growing Role of Minerals and Metals for a Low Carbon Future", la Banca Mondiale ha marcato come "merce critica" il neodimio. Ecco alcuni passaggi:

"[...] The next critical question is which metals will experience strong increases in demand: the answer remains far from clear, for the ways in which metal demand will increase depend on both inter-technology choices, such as the balance between wind and solar power, and intra-technology choices, such as the balance between onshore

and offshore wind, the choice between different types of solar PV cells, and the extent to which vehicles become fully electric or mild hybrid and what types of batteries dominate.”

Anche il crescente interesse verso i veicoli elettrici sposta il peso di alcuni materiali metallici. Nel 2017 la Tesla ha deciso di utilizzare un motore sincrono a magneti permanenti trifase da 258 hp al posto del tradizionale motore asincrono, nel nuovissimo “Modello 3”. Dati gli ordinativi in corso, si stima che questa scelta aumenterà di circa 600 tonnellate/anno la domanda di ossido di neodimio. Si consideri che la produzione annua del materiale è di 7000 tonnellate (rif. 2015).

Questi aspetti hanno una notevole importanza: fanno ad esempio intuire che alcuni motori potranno essere impiegati solo in prodotti ad alto valore aggiunto, mentre applicazioni in cui il costo è un fattore determinante si orienteranno verso motori più economici.

Originariamente limitati in potenza, i PMSM ora riescono a raggiungere potenze di diverse centinaia di kW. Hanno buona efficienza e alto fattore di potenza, dato che il campo magnetico è, in tutto o in parte, fornito dai magneti permanenti.

Non hanno spazzole, quindi si prestano a lavorare in ambienti deflagranti o inquinati. Richiedono però la precisa misura assoluta della posizione del rotore, e quindi hanno il costo aggiuntivo del trasduttore e del suo posizionamento accurato. Generalmente si tratta di un resolver.

I motori a passo

I primi moderni motori a passo furono sviluppati attorno al 1920, e furono inizialmente impiegati dalla marina inglese per il controllo remoto del posizionamento (*positioning devices*) dei cannoni e dei siluri.

I motori a passo sono caratterizzati da un movimento a scatti regolari, corrispondenti ad un preciso angolo di rotazione, detto passo. Essi attuano una conversione elettromeccanica dell’energia che, a seconda della tipologia costruttiva, sfrutta il principio dei sistemi a riluttanza variabile (*variable or switched reluctance motors*) o quello dei sistemi elettrodinamici (*permanent magnet step motors*). Una terza categoria (*hybrid step motors*) combina i due principi per sfruttare i vantaggi di entrambi. Tra i vantaggi principali rispetto ad altri azionamenti che potrebbero avere impiego analogo emergono i seguenti:

- compiono accurati posizionamenti senza sensori di posizione/velocità ($\pm 5\%$ dell’angolo di passo);
- l’errore di posizione non è cumulativo, ovvero non si somma in successivi posizionamenti;

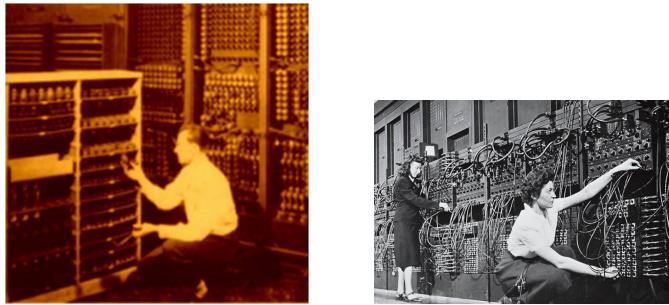


Figura 5: ENIAC, 1946.

- sono particolarmente semplici ed adatti al controllo digitale;
- privi di spazzole, hanno tempi di vita minimi di 10 000 ore;

Sono comunque legati ad applicazioni di potenza piccola e media, attraverso opportuni cambi di velocità.

Il dispositivo di controllo

Il dispositivo di controllo in un azionamento attua una strategia volta al soddisfacimento delle specifiche, ovvero delle prestazioni richieste al sistema. Il dispositivo di controllo è costituito da circuiti di tipo analogico (cioè comprendenti elementi attivi e passivi discreti, quali resistenze, condensatori, transistor, diodi e così via), da circuiti digitali discreti (cioè circuiti integrati che implementano funzioni logiche, come porte AND, OR, flip-flop e memorie) e da circuiti a microprocessore.

Originariamente i circuiti erano completamente di tipo analogico. La migrazione, sempre più marcata, verso circuiti digitali e, ancor più, verso circuiti a processore, nasce da molteplici esigenze, prime tra tutte l'aumento dell'affidabilità e la riduzione dei costi diretti ed indiretti.

Il primo calcolatore elettronico, ENIAC (*Electronic Integrator and Calculator*, figura 5) risale al 25 febbraio 1946 ed era utilizzato inizialmente nel laboratorio di ricerca balistica dell'esercito a Philadelphia. La tendenza generale nei sistemi di controllo è verso l'integrazione. Le tecniche analogiche soffrono di complessità realizzativa, di ridotta flessibilità, di maggiori ingombri e costi. Vengono utilizzate solo per svolgere funzioni ancora troppo veloci per essere convertite in algoritmi digitali.

I circuiti digitali consentono una perfetta ripetibilità, indipendentemente dall'invecchiamento dei componenti (*ageing*) e dalle variazioni di temperatura

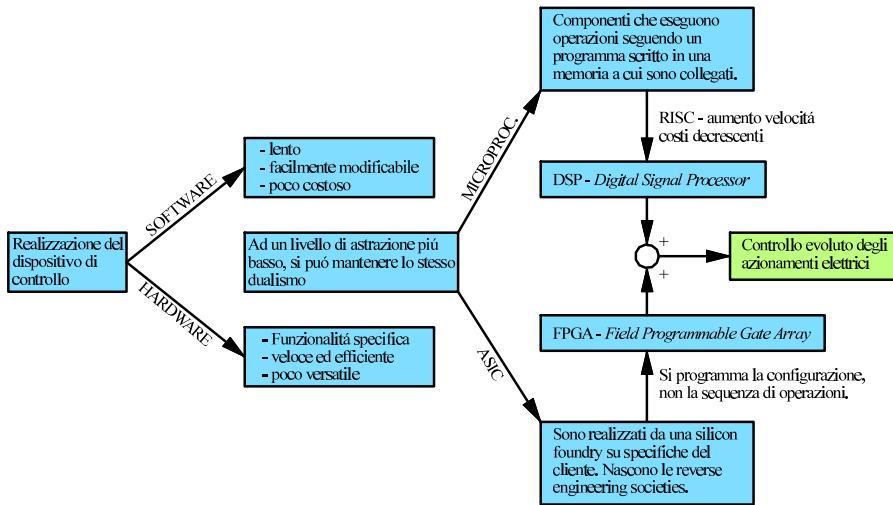


Figura 6: Dualità nella progettazione di un sistema di controllo.

e di umidità. Uno svantaggio risiede nelle quantizzazioni, arrotondamenti e troncature che avvengono nell'implementazione digitale, di cui si possono però governare gli effetti scegliendo opportunamente la lunghezza della parola digitale che viene chiamata a rappresentare la relativa grandezza continua.

Un'altra differenza importante è legata al fatto che un circuito analogico solitamente è legato ad una funzione specifica, mentre un algoritmo digitale prevede solitamente una esecuzione sequenziale, che determina il comportamento del sistema.

L'implementazione digitale dunque consente maggiore versatilità e flessibilità rispetto alla controparte analogica. Altro vantaggio è legato alla possibilità di usare larghe memorie, nelle quali possono essere collocate in forma di tabella funzioni non lineari di elevata complessità, difficilmente ottenibili con circuiti analogici.

La complessità dei calcoli che possono essere svolti con un sistema digitale non ha poi confronti con i circuiti analogici. Dunque la tendenza attuale è quella di rendere digitale quanto più possibile. Rimangono comunque i problemi legati al real-time, ovvero alla velocità con cui vengono eseguiti i calcoli rispetto alla dinamica del sistema.

È necessaria un accurato bilanciamento tra software sequenziale e implementazioni su hardware parallelo. Quest'ultima rappresenta la sfida ingegneristica del futuro. La figura 6 riassume le diverse dualità nelle scelte progettuali.

During these last years, the control of industrial electrical systems has been the focus of important research and many significant improvements have been achieved. These progresses are mainly due to the technology revolution leading to very powerful components that allow implementing more and more complex control algorithms. With successively improving reliability and performance of digital technologies, digital control techniques have predominated over their analog counterparts. Indeed, compared with traditional analog control, digital control offers many advantages such as flexibility to modify the control schemes, adaptability to different systems and operating conditions, immunity to noise, and insensitivity to component variations. Nowadays, digital control techniques are mostly carried out with microcontrollers or digital signal processors (DSPs) due to their software flexibility and low cost. Thus, DSP controllers are considered by many engineers as an appropriate solution. These components have an arithmetic logic unit particularly dedicated to the real-time computation. They also integrate peripheral units like analog-to-digital converters (ADCs) and timers, which are adapted to the needs of electrical system drives. Nevertheless, some advantages of the analog control are still very difficult to be replaced, such as accuracy and, most of all, the absence of feedback loop delays. In fact, although multiprocessor schemes or high-performance DSP processors can deal with this problem, they are still limited for complex algorithm structures and their costs can exceed the benefit they bring. A field-programmable gate array (FPGA) can also be considered as an appropriate solution in order to boost performances of controllers and consequently to reduce the gap between the analog and digital world. When associated to fast ADC, the extremely fast computation capability of FPGAs allows a few microseconds real-time computation of control algorithms in spite of their complexities. On the other hand, FPGAs allow the development of well-adapted control architecture with freely positioned sampling instants. At the same time, they allow the implementation of different control functions for a full system-on-chip (SoC) integration. As a result, FPGAs are quite mature for the electrical drive applications. FPGA technology allows developing specific hardware architecture within a flexible programmable environment. Compared to standard architecture of microprocessors and DSPs, this specificity of FPGAs gives the designer a new degree of freedom since he can build dedicated hardware architectures that match all the requirements in terms of control performances and implementation constraints. Thus, these dedicated architectures are designed on the basis of a perfect adequation between the control algorithm to be implemented and its final hardware realization, allowing for example to preserve all the potential parallelism of the chosen algorithm. However, in many cases, the design of FPGA-based controller architectures is rather intuitive and requires from the designer to master several different knowledges (e.g., microelectronics, control, and electrical machine theories). It is particularly true for complex algorithm structures such as the ones found in drive control applications. This

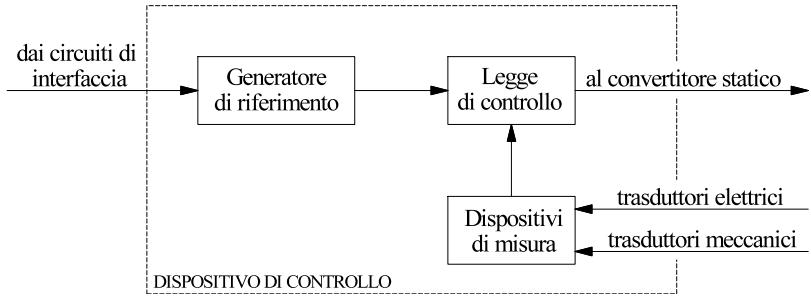


Figura 7: Schema a blocchi funzionali del dispositivo di controllo.

naturally leads many control engineers to prefer standard implementations like DSP solution. Thus, in order to make the design of control algorithms more manageable and less intuitive, the designer has to strictly follow a set of steps and rules, which consist of an efficient design methodology. The main characteristics of this kind of methodologies are the reusability of the already made designs, the optimization of the consumed resources of the targeted component, the consideration of the control performances, and finally, the reduction of the development time. [SVP-9]

Va evidenziato che le scelte non sono mai squisitamente tecniche, nel senso che comunque esse sono poi influenzate da fattori economici. Tecnica ed economia non sono quasi mai elementi indipendenti, e questo si sta gradualmente trasferendo nella cultura aziendale e nella formazione stessa dei nuovi ingegneri.

Uno schema a blocchi funzionale per un dispositivo di controllo è riportato nella figura 7. Il generatore di riferimento fissa, ad intervalli definiti, il valore desiderato delle grandezze da controllare, ad esempio posizione o velocità del motore. Si parla di *regolazione* quando il riferimento si mantiene costante nel tempo, e di *asservimento* quando il controllo è chiamato a seguire un riferimento variabile. La legge di controllo elabora gli errori tra i segnali di riferimento e quelli reali forniti dai dispositivi di misura.

Nelle formule di elaborazione si ha come obiettivo il raggiungimento delle prestazioni desiderate, sia in regime transitorio (definibile come l'intervallo di tempo in cui l'uscita varia ancora in seguito ad una precedente variazione del riferimento) che in regime permanente (solitamente abbreviato in *regime*).

Quando sia ritenuto sufficiente per gli scopi che ci si prefigge, si può ricorrere a controlli a catena aperta. Essi non sono da confondere con controlli evoluti di tipo sensorless, in cui il controllo rimane comunque a catena chiusa, ma

alcune tra le grandezze di retroazione sono stimate con opportuni algoritmi numerici invece che misurate tramite sensori.

As the price of high-performance digital signal processors and microcomputers continues to decrease, modern industrial drives continue to add controls and diagnostic features that were not economically feasible in the past. Increasingly, low-performance control algorithms are being replaced by some form of high-performance ones, even though the load applications (e.g., pumps and fans) do not require fast dynamic response. Drive manufacturers compete in providing control features that are designed to make the machine drive easier to set up and operate, including self-commissioning and diagnostic features to recognize the signs of problems in either the motor or its connected load. For those applications that require tighter control of the machine speed or dynamic performance characteristics, so-called sensorless control algorithms that eliminate the need for an encoder or resolver are becoming increasingly robust and popular [SVP-3].

1.2 MACCHINE ELETTRICHE – RICHIAMI E DEFINIZIONI

Un sistema fisico può essere sede di *energia accumulata*, con ciò intendendo che esso ha la possibilità di compiere *lavoro*. All’energia accumulata si dà diversa denominazione a seconda della fenomenologia a cui essa è associata. Così si parla di energia potenziale *gravitazionale* di un bacino idroelettrico e di quella *cinetica* di un volano in moto, di quella *elettrostatica* di un condensatore carico e di quella *magnetica* di un solenoide percorso da corrente oppure, ancora, di quella *termica* di un corpo caldo e di quella *elastica* di una molla tesa.

Un sistema può anche scambiare energia con altri sistemi fisici interagenti con esso. All’energia scambiata si da il nome di *lavoro* o, se essa è in forma termica, di *calore*. Si parla allora di *lavoro (calore) assorbito* o *ricevuto* da un sistema quando si valuta il flusso di energia entrante in esso. Viceversa, se si fa riferimento al flusso uscente, si parla di *lavoro (calore) fornito* o *reso*.

In molti casi gli scambi energetici tra due sistemi avvengono in modo naturale ed incontrollato. In altri casi, un terzo sistema viene interposto fra i primi due al fine di produrre e governare un determinato scambio energetico; questo terzo sistema prende il nome di *macchina*. Essa può eseguire allo scopo una trasformazione di forma fra l’energia ricevuta da un sistema e quella fornita all’altro oppure, senza tale trasformazione, può agire sulle grandezze fisiche che determinano il flusso energetico. Così sono macchine le turbine idrauliche che trasformano l’energia cinetica di un fluido in movimento in lavoro meccanico

reso al loro asse; le leve che ricevono energia sotto forma di lavoro meccanico con determinati valori dei fattori forza e spostamento e restituiscono ancora lavoro meccanico con fattori forza e spostamento modificati.

Le *macchine elettriche*, nella terminologia corrente, sono quelle in cui almeno uno degli scambi energetici è di natura elettrica, l'altro essendo, se non elettrico, un lavoro meccanico. Una prima fondamentale distinzione fra le macchine elettriche va quindi fatta secondo che in esse si attui solo una *trasformazione delle grandezze elettriche ai loro morsetti di ingresso e di uscita* (trasformazione della tensione, corrente, frequenza o del numero di fasi...) o che in esse si esegua una *conversione elettromeccanica dell'energia*.

Le macchine del primo tipo si chiamano in generale *convertitori elettrici* e sono, nella maggior parte dei casi, *macchine elettriche statiche* cioè prive di organi in movimento. Esse comprendono i *trasformatori elettrici*, il cui funzionamento è basato sul fenomeno della mutua induzione e i *convertitori elettronici di potenza* detti anche *convertitori statici*, che per attuare la loro funzione impiegano interruttori elettronici.

Quelle del secondo tipo sono invece necessariamente *macchine elettriche dinamiche* con organi in movimento rotatorio o lineare. Vengono distinte fra *generatori elettrici*, se il lavoro che forniscono è di natura elettrica mentre quello assorbito è meccanico, e *motori elettrici*, se invece forniscono lavoro meccanico ricevendone di elettrico.

Gli azionamenti elettrici sono rivolti essenzialmente alle tecniche di controllo delle macchine elettriche dinamiche, in particolare nel loro funzionamento da motori alimentati da convertitori statici. Nel seguito, attraverso un richiamo alle leggi fondamentali della conversione elettromeccanica dell'energia, verrà affrontato ed illustrato il principio di generazione della coppia nei diversi motori e, da lì, il funzionamento delle diverse tipologie di azionamento elettrico.

1.2.1 Richiami di conversione elettromeccanica dell'energia

Per *conversione elettromeccanica dell'energia* (o semplicemente *conversione elettromeccanica*) si intende il processo mediante il quale si attua una conversione di lavoro elettrico in lavoro meccanico o viceversa.

Il processo della conversione elettromeccanica è alla base del funzionamento delle macchine elettriche dinamiche, e si attua per mezzo di un campo elettrico²

2 In fisica, un campo è un tensore (e quindi in particolare un vettore) che dipende dalle coordinate dello spazio (o, più generalmente, dello spaziotempo). L'energia del campo elettrico (o magnetico) è l'energia immagazzinata in una data regione di spazio dal campo elettrico (o magnetico), che si calcola da un bilancio energetico sulla base del *principio di conservazione dell'energia*.

o di un campo magnetico tramite i quali si possono produrre, come noto, forze e coppie.

Nella maggior parte delle applicazioni delle macchine elettriche, la conversione elettromeccanica si realizza sfruttando un campo magnetico. Ciò si spiega con il fatto che la *pressione magnetica* è enormemente più elevata della *pressione elettrostatica*, considerando i valori che l'induzione magnetica e il campo elettrico possono assumere in aria nella pratica corrente (si fa riferimento ai valori in aria in quanto nei sistemi di conversione elettromeccanica le diverse parti in movimento sono generalmente separate da sottili spazi d'aria). Si comprende che elevate pressioni consentono di realizzare più elevate forze o coppie a parità di dimensioni delle parti affacciate. Si può effettuare un confronto tra la pressione sulle armature di un condensatore piano in aria e la pressione sulla superficie di un traferro in un circuito magnetico. Nel primo caso, assumendo un campo elettrico $K = 10000 \text{ V/cm}$, compatibile ma non molto minore della rigidità dielettrica dell'aria, si trova invece:

$$p = \frac{1}{2} \varepsilon K^2 \cong 4 \quad \text{N/m}^2. \quad (1)$$

Nel secondo caso, assumendo un'induzione magnetica B nel traferro pari al valore tipico di 1 T e ricordando che $\mu_0 = 1.256 \times 10^{-6} \text{ m kg C}$ si ottiene:

$$p = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cong 4 \cdot 10^5 \quad \text{N/m}^2. \quad (2)$$

In conseguenza del grande rapporto dei due valori, le dimensioni di un sistema elettromagnetico di conversione elettromeccanica sono, a parità di forza o coppia prodotta, enormemente più piccole di quelle di un sistema elettrostatico.³ Nel seguito di questa trattazione si farà riferimento alle sole macchine elettriche in cui la conversione elettromeccanica sia attuata attraverso un campo magnetico.

1.2.2 Bilancio energetico della conversione elettromeccanica

La conversione elettromeccanica dell'energia segue delle leggi generali delle quali se ne vuole qui dare un semplice cenno riferendosi a sistemi elettromagneticamente convertiti.

³ Nei motori idraulici o endotermici si hanno pressioni fino a 100 kg/cm^2 (o più) corrispondenti a 10^7 N/m^2 , consentendo per essi dimensioni (della camera di scoppio) ancor più piccole di quelle dell'equivalente motore elettrico. Naturalmente, nel valutare gli ingombri, occorre considerare che i motori endotermici richiedono per il loro funzionamento molti altri componenti, per cui le dimensioni dei cilindri finiscono per essere solo una piccola parte del totale.

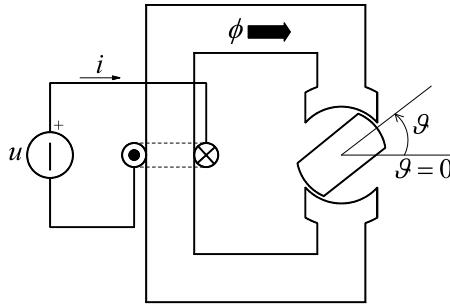


Figura 8: Sistema a riluttanza variabile.

gnetici conservativi⁴ per i quali si suppone in particolare che tutti i circuiti in ferro presenti siano privi di perdite per isteresi e per correnti parassite.

Per comodità, si faccia riferimento alla figura 8 che mostra un sistema elettromagnetico con un elemento mobile, libero di ruotare.

La tensione u applicata istante per istante ai morsetti dell'avvolgimento percorso dalla corrente istantanea i dovrà vincere la caduta resistiva Ri e la forza contro-elettromotrice legata alla derivata temporale del flusso concatenato λ ; vale cioè:

$$u = Ri + \frac{d\lambda}{dt}. \quad (3)$$

Si comprende che le variazioni di flusso concatenato $d\lambda$ possano essere dovute sia a variazioni della corrente del circuito sia a spostamenti dell'elemento mobile, la cui posizione influenza il valore della riluttanza del circuito magnetico.

A partire dalla (3) si può formulare il bilancio degli scambi energetici che avvengono nel sistema della figura 8 nell'intervallo dt . Allo scopo si moltiplichino entrambi i membri della (3) per il valore istantaneo della corrente i , ottenendo così il bilancio della potenza istantanea. Moltiplicando ancora per dt si ottiene il bilancio degli scambi infinitesimi di energia che avvengono nell'intervallo dt :

$$u i dt = Ri^2 dt + i d\lambda. \quad (4)$$

Il primo membro rappresenta il lavoro elettrico assorbito nel tempo dt ai morsetti del circuito e fornito dalla sorgente di alimentazione esterna. Il primo

⁴ Si intende con ciò riferirsi a sistemi elettromagnetici capaci di uno scambio reversibile di energia, ovvero per i quali il lavoro netto assorbito (lavoro elettrico meno lavoro meccanico) coincida con un'energia magnetica accumulata.

termine a secondo membro è l’energia dissipata nello stesso intervallo di tempo per effetto Joule. Avendo escluso la presenza di altre perdite, il secondo termine a secondo membro rappresenta la somma della variazione di energia magnetica immagazzinata nel circuito magnetico e del lavoro meccanico infinitesimo sviluppato; quest’ultimo è compiuto sull’elemento rotante, in corrispondenza ad ogni spostamento $d\vartheta$, dalla coppia τ che vi agisce.

Assumendo la coppia positiva quando agisce nel verso delle ϑ crescenti (antiorario nella figura 8), il secondo termine a secondo membro della (4) si può scrivere come:

$$id\lambda = dw_m + \tau d\vartheta. \quad (5)$$

L’energia è una *funzione di stato*, cioè essa dipende, istante per istante, dai valori istantanei delle variabili i , λ e ϑ , senza che abbia alcuna rilevanza la storia passata che ha portato a tali valori e il loro andamento attuale (cioè che abbiano per esempio derivata nulla o meno).⁵

Per ogni posizione ϑ dell’elemento mobile, si può ammettere l’esistenza di una relazione biunivoca fra la corrente i e il flusso concatenato λ (*curva di magnetizzazione* $\lambda(i, \vartheta)$) sicché l’energia può essere di fatto espressa per esempio in funzione di i e ϑ oppure di λ e ϑ , che sono le variabili di stato del sistema in esame. La scelta della coppia di *variabili di stato* da impiegare è una questione di sola convenienza, essendo entrambe le combinazioni appena elencate ugualmente lecite.

Volendo sfruttare la (4) per ricavare la coppia in funzione di λ e ϑ , conviene esprimere l’energia in funzione delle stesse variabili: $w_m(\lambda, \vartheta)$. Il termine differenziale dell’energia immagazzinata si può esprimere allora come:

$$dw_m = \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta. \quad (6)$$

Il bilancio energetico (5), che esprime il principio della conservazione dell’energia, valido per qualunque evoluzione del sistema, libera o imposta, può essere riscritto tenendo conto della (6) e riordinato per ottenere:

$$id\lambda - \tau d\vartheta = \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta. \quad (7)$$

⁵ Chiaramente, l’andamento di tali variabili ha rilevanza nel determinare l’andamento nel tempo dell’energia magnetica, com’è ovvio che sia. Ma l’espressione dell’energia in forma di stato non contiene integrali e/o derivate delle variabili di stato. Lo stesso vale per la coppia meccanica.

Essendo le due variabili λ e ϑ indipendenti, i coefficienti dei termini differenziali $d\lambda$ e $d\vartheta$ a primo e secondo membro della (7) devono coincidere. Da questo si ricava l'espressione cercata della coppia:

$$\tau(\lambda, \vartheta) = -\frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta}. \quad (8)$$

La (8) evidenzia come la coppia sia pari al rapporto cambiato di segno fra la variazione di energia *dovuta al solo spostamento* e lo spostamento stesso. L'eventuale ulteriore variazione di energia associata alle variazioni di λ (quasi sempre presenti in pratica) non va dunque conteggiata.⁶

È pure possibile esprimere la coppia in funzione di i e ϑ , sostituendo nella $\tau(\lambda, \vartheta)$ l'espressione $\lambda(i, \vartheta)$ della curva di magnetizzazione. In alternativa, al posto dell'energia si può utilizzare la funzione di stato *coenergia* $w'_m(i, \vartheta)$, definita come:

$$w'_m(i, \vartheta) = i\lambda - w_m(\lambda, \vartheta). \quad (9)$$

Si noti la scelta arbitraria di lasciare definita l'energia magnetica w_m in funzione delle sole (λ, ϑ) , per poter sfruttare un risultato ricavato nei passaggi precedenti. Differenziando infatti la (9) e sostituendo l'espressione del differenziale totale dell'energia ricavato dalla (7) si perviene alla:

$$dw'_m(i, \vartheta) = \lambda di + \tau d\vartheta. \quad (10)$$

che è corrispondente alla (5). Anche qui, si noti che è conveniente esprimere w'_m in funzione delle sole (i, ϑ) perché in tal caso⁷ con procedimento del tutto analogo a quello che ha portato alla (8) attraverso le (6) e (7), si ottiene:

$$\lambda di + \tau d\vartheta = \frac{\partial w'_m(i, \vartheta)}{\partial i} di + \frac{\partial w'_m(i, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (11)$$

che porta a scrivere:⁸

$$\tau = \frac{\partial w'_m(i, \vartheta)}{\partial \vartheta} \quad (12)$$

In conclusione di queste note si possono fissare alcuni punti; si rimanda ai testi specialistici di Elettrotecnica e Conversione elettromeccanica per un loro approfondimento.

⁶ Il coefficiente dato dall'altra derivata parziale è pari alla corrente circolante nell'avvolgimento.

⁷ Non sarebbe altrimenti corretto il calcolo del differenziale esatto, perché mantenere esplicitamente λ maschererebbe una parte di dipendenza di w'_m da i e ϑ , dato che le tre variabili non sono indipendenti.

⁸ L'altra derivata parziale della coenergia è pari al flusso concatenato con l'avvolgimento.

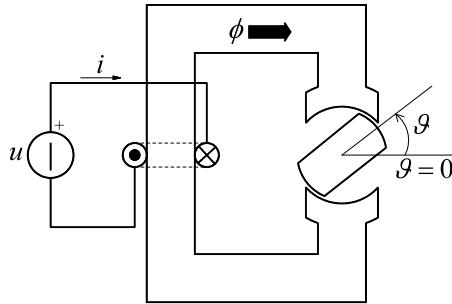


Figura 9: Sistema a riluttanza variabile, ipotesi di circuito lineare.

- La sola ipotesi su cui si basa la trattazione è che il sistema elettromeccanico sia conservativo. Esso può anche essere non lineare cioè avere un legame non lineare fra il flusso concatenato e la corrente.
- Le espressioni trovate sono applicabili a sistemi anche diversi e più complessi di quello della figura 8, utilizzato solo come ausilio per l'impostazione della trattazione.
- In particolare si possono avere anche sistemi con più circuiti, eventualmente accoppiati fra di loro. In tal caso valgono ancora le (8) e (12), ove la coenergia è definita ancora dalla (9) sostituendo il prodotto $i\lambda$ con la sommatoria degli stessi prodotti estesa a tutti i circuiti.
- Nel caso in cui il sistema, oltre che conservativo, sia anche *lineare*, si dimostra che vale pure:

$$\tau = \frac{\partial w_m(i, \theta)}{\partial \theta}. \quad (13)$$

Le (8) e (12) sono equazioni fondamentali della conversione elettromeccanica dell'energia. In particolare, attraverso la (13), nei paragrafi che seguono si illustreranno le tre principali modalità secondo le quali si esplica la conversione elettromeccanica nelle macchine elettriche rotanti di comune impiego.

Sistemi a riluttanza variabile

Un esempio di sistema a riluttanza variabile per la conversione elettromeccanica dell'energia è quello schematizzato nella figura 9, per il quale si assume l'ipotesi di linearità, ossia di assenza di saturazione del ferro.

Variando la posizione ϑ dell'elemento mobile del circuito magnetico, ne viene modificata la riluttanza, che sarà minima per $\vartheta = \pm\pi/2$, mentre assumerà il suo massimo valore per $\vartheta = 0$ e per $\vartheta = \pi$. Le variazioni di riluttanza producono corrispondenti e opposte variazioni del coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento, il cui andamento $L(\vartheta)$ può essere approssimato analiticamente dalla relazione:

$$L(\vartheta) = L_0 - L_2 \cos(2\vartheta). \quad (14)$$

dove L_0 è il valore medio dell'induttanza, a cui si sovrappone una variazione cosinusoidale di ampiezza L_2 . Sfruttando la (14), l'energia magnetica $w_m(i, \vartheta)$ si valuta agevolmente con l'equazione:

$$w_m(i, \vartheta) = \frac{1}{2} L(\vartheta) i^2 = \frac{1}{2} (L_0 - L_2 \cos(2\vartheta)) i^2. \quad (15)$$

Dalla (15) si comprende anche che l'andamento dell'energia magnetica in funzione della posizione ϑ dell'elemento mobile, per ogni prefissato valore di corrente, è del tutto simile a quello dell'induttanza. A seguito di piccole variazioni della posizione, non si hanno perciò variazioni di energia quando quest'ultima assume i suoi valori massimi o minimi: secondo la (13) la coppia sviluppata in questi punti sarà nulla. Si ha invece la derivata massima in corrispondenza dei passaggi per il valore medio e ivi la coppia assumerà le sue più elevate ampiezze. Per valutare la coppia che agisce sull'elemento mobile si può applicare la (13) alla (15), ottenendo:

$$\tau = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\vartheta} = i^2 L_2 \sin(2\vartheta). \quad (16)$$

La coppia è nulla per $\vartheta = 0$ e per ogni posizione multipla di $\pi/2$; è positiva per valori della posizione compresi fra 0 e $\pi/2$ e successivamente negativa fino a π per poi ripetersi ciclicamente. Con l'elemento mobile nella posizione della figura 9 si manifesta pertanto una coppia positiva, cioè tale da far ruotare l'elemento stesso nel senso antiorario; l'elemento mobile raggiungerà la posizione stabile $\vartheta = \pi/2$, ove la coppia è nulla e l'autoinduttanza massima.

La (16) mette in evidenza un aspetto molto importante dei sistemi a riluttanza variabile, ovvero che la coppia non dipende dal segno della corrente ma solo dal valore della sua ampiezza, dalla quale la coppia dipende con legge quadratica.

Il principio appena illustrato è impiegato, per esempio, nei *motori a passo a riluttanza variabile*. Per ottenere una macchina rotante, capace di un movimento continuativo, la parte fissa della figura 9, su cui è posto l'avvolgimento

interessato dalla corrente i , è ripetuta numerose volte, in posizioni spazialmente sfasate, e le diverse parti (fasi) sono alimentate in successione.

Il medesimo principio è applicato anche nelle *macchine sincrone a riluttanza*. In esse la stessa parte fissa è sostituita da una corona cilindrica ferromagnetica (stator) in cui trovano posto tre avvolgimenti con uguale sfasamento spaziale reciproco e percorsi da un sistema trifase di correnti alternate. Come è noto ciò produce un campo magnetico rotante il cui effetto si può immaginare equivalente a quello che si ottiene facendo ruotare la parte fissa della struttura della figura 9. Se l'elemento mobile assume una velocità angolare uguale a quella del campo magnetico rotante, l'angolo ϑ rimane costante e con esso la coppia, che ne sosterrà la rotazione.

In presenza di velocità si potrà anche parlare di *potenza meccanica*, pari al prodotto della coppia per la velocità. Con coppie positive essa sarà fornita dall'avvolgimento, o dagli avvolgimenti, posti sulla parte fissa all'elemento mobile rotante per mantenerlo in moto.

Sistemi elettrodinamici

Nel tracciare il bilancio della conversione elettromeccanica, nel paragrafo 1.2.2, si è analizzato il caso semplice in cui il sistema magnetico sia costituito da un solo avvolgimento e dunque intervenga una sola corrente. Come anticipato, la metodologia, le considerazioni generali e le espressioni (8) e (12), che da queste discendono, rimangono comunque valide anche nel caso più generale di un sistema magnetico formato da più avvolgimenti.

In questo paragrafo si considera una particolare topologia, schematizzata nella figura 10, alla quale si possono ricondurre importanti classi di macchine elettriche dinamiche. Tale figura rappresenta un sistema elettrodinamico a due avvolgimenti, 1 e 2, mutuamente accoppiati e percorsi da due correnti i_1 e i_2 , sostenute dai due generatori di tensione u_1 e u_2 . Ancora si supporrà lineare, per semplicità, il circuito magnetico.

Cambiando la posizione ϑ dell'avvolgimento 2 rispetto a 1, ne risulterà modificato il coefficiente di mutuo accoppiamento M : esso sarà massimo positivo (M_0) per $\vartheta = 0$, assumerà il suo valore di picco negativo $-M_0$ per $\vartheta = \pi$, mentre sarà nullo per $\vartheta = \pm\pi/2$. In prima approssimazione si potrà allora scrivere:

$$M = M_0 \cos(\vartheta). \quad (17)$$

Data la struttura isotropa della parte mobile, i coefficienti di autoinduzione L_1 e L_2 si possono invece ritenere sostanzialmente costanti con ϑ . L'energia ma-

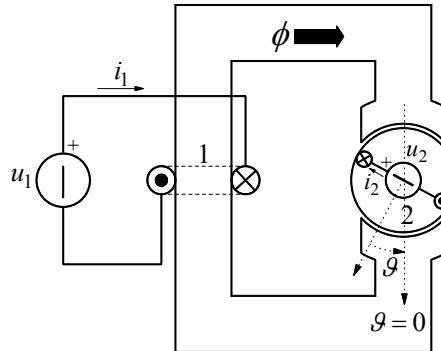


Figura 10: Sistema elettrodinamico, ipotesi di circuito lineare.

gnetica totale del sistema, tenendo conto delle interazioni tra gli avvolgimenti, si esprime con l'equazione:

$$\begin{aligned} w_m(i_1, i_2, \vartheta) &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M(\vartheta) i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_0 \cos(\vartheta) i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Si può infine applicare la (13) per valutare la coppia che agisce sul circuito 2 (e, di segno contrario anche su 1):

$$\tau = \frac{\partial w_m(i, \vartheta)}{\partial \vartheta} = -M_0 i_1 i_2 \sin(\vartheta) \quad (19)$$

Con due correnti costanti con segno concorde e una posizione dell'elemento mobile tra $-\pi/2$ e 0 , si ha quindi una coppia positiva, cioè tale da tendere a ruotare il circuito 2 nel senso delle posizioni crescenti. Se la coppia è sufficiente a vincere la resistenza al movimento, il circuito 2 raggiungerà la posizione stabile $\vartheta = 0$, ove la coppia è nulla e la mutua induttanza massima.

Il principio appena illustrato è impiegato per esempio, nelle *macchine sincrone*. Anche in questo caso, come per le macchine a riluttanza, l'avvolgimento 1, percorso da corrente continua, è sostituito con un avvolgimento trifase capace di produrre un campo magnetico rotante. Se il circuito 2, alimentato attraverso contatti strisciante, assume una velocità angolare uguale a quella del campo magnetico rotante, l'angolo ϑ rimane costante, come la coppia.

In presenza di velocità si potrà anche qui parlare di *potenza meccanica*, che sarà fornita dal circuito 1 alla struttura mobile per mantenerla in rotazione. Se tuttavia un agente esterno forza la rotazione della parte mobile così da far

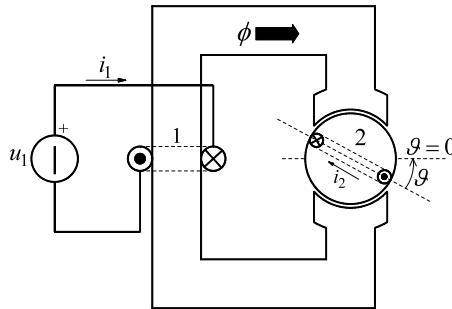


Figura 11: Sistema ad induzione.

assumere alla posizione θ un valore positivo, la coppia inverte il suo segno (diventa cioè frenante) e con essa anche la potenza. In tal caso si ha quindi una conversione elettromeccanica da lavoro meccanico a lavoro elettrico.

Anche le *macchine a corrente continua* sfruttano essenzialmente questo principio per eseguire la conversione elettromeccanica. In virtù di un loro peculiare componente, che è il commutatore a lamelle, la conversione elettromeccanica nelle macchine rotanti in corrente continua si esplica però senza che alcun campo magnetico sia in rotazione, bensì predisponendo un certo numero di avvolgimenti equivalenti di tipo 2 sfasati tra loro ed alimentati in successione, in modo che nonostante il moto della parte mobile venga alimentato sempre l'avvolgimento che ha la giusta posizione spaziale rispetto alla parte fissa.

Sistemi a induzione

Un sistema a induzione per la conversione elettromeccanica è illustrato nella figura 11. Esso differisce da quello della figura 10 per il fatto che l'avvolgimento 2 sulla parte mobile non è alimentato, bensì è posto in corto circuito; si mantiene ancora, per semplicità, l'ipotesi di linearità. Anche questa topologia è di grande importanza nello studio degli azionamenti elettrici, in quanto ad essa si può ricondurre la classe delle *macchine elettriche ad induzione* (o *asincrone*), di enorme rilevanza teorica e pratica.

Si immagini che, mentre la corrente i_1 è mantenuta costante, l'elemento mobile ruoti alla velocità fissa Ω sicché $\theta = \Omega t$. Conseguentemente è variabile nel tempo il flusso concatenato dal circuito 2, che diventa sede di una *fem* che si valuta con l'equazione:

$$e_2 = -\frac{d\lambda_2}{dt} = M_0 i_1 \Omega \sin(\Omega t) - L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (20)$$

Dato che l'avvolgimento secondario è in cortocircuito, la *fem* indotta deve vincere la sola caduta resistiva $R_2 i_2$; l'equazione di maglia porge:

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = M_0 i_1 \Omega \sin(\Omega t), \quad (21)$$

che nelle ipotesi poste è una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Se Z e φ sono rispettivamente il modulo e l'argomento dell'impedenza del circuito mobile, (che ha resistenza R_2 e reattanza ΩL_2), la corrente che in esso si instaura in regime sinusoidale⁹ per effetto della *fem* risulta:

$$i_2(t) = \frac{M_0 i_1 \Omega}{Z} \sin(\Omega t - \varphi). \quad (22)$$

La situazione è così analoga a quella di un sistema elettrodinamico, per cui, applicando la (19), si ottiene l'espressione della coppia in regime sinusoidale:

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{M_0^2 i_1^2 \Omega}{Z} \sin(\Omega t) \sin(\Omega t - \varphi) \\ &= -\frac{M_0^2 i_1^2 \Omega}{2Z} \cos \varphi + \frac{M_0^2 i_1^2 \Omega}{2Z} \cos(2\Omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (23)$$

Dalla (23) si possono trarre alcune interessanti considerazioni:

- Innanzitutto la coppia contiene un termine costante nel tempo (se tale è la corrente i_1), al quale si sovrappone un secondo termine alternato a pulsazione 2Ω . Quest'ultimo può essere eliminato disponendo sulla parte rotante più avvolgimenti indotti, spazialmente sfasati, uno rispetto all'altro, in modo uniforme. Per esempio un secondo avvolgimento identico a quello della figura ma collocato ortogonalmente a quest'ultimo sarebbe sottoposto ad una coppia la cui componente *alternata* è in opposizione di fase rispetto a quella data dalla (23). La coppia totale sulla parte mobile risulterebbe pertanto costante.
- Un secondo aspetto significativo è che la coppia dipende dalla velocità. A velocità nulla la coppia è nulla non essendovi correnti indotte nel circuito 2. Per velocità positive la coppia è negativa e viceversa, ossia tende ad opporsi al moto di rotazione della parte mobile rispetto ai poli induttori di quella fissa. Il valore assoluto della coppia inizialmente cresce con la velocità. Ma con questa aumenta anche la frequenza della *fem* indotta

⁹ La rimozione di queste ipotesi complicherebbe solo la trattazione matematica, senza nulla aggiungere alle considerazioni che verranno svolte nel seguito.

Tabella 1: Parametri del motore ad induzione.

Grandezza	simbolo	valore	unità si
Potenza nominale	P_n	1.2	kW
Velocità meccanica nominale	ω_{mN}	3000	rpm
Tensione nominale	U_n	400	V _{rms}
Corrente nominale	I_n	6	A _{rms}
Coppia nominale	τ_n	3.8	Nm
Coppie polari	p	1	-
Resistenza di statore	R_s	2.74	Ω
Induttanza di statore	L_s	161.1	mH
Resistenza di rotore	R_r	1.699	Ω
Induttanza di rotore	L_r	161.1	mH
Induttanza di magnetizzazione	L_m	157	mH
Induttanza transitoria	L_t	8	mH

e quindi il modulo e l'argomento dell'impedenza del circuito 2. Oltre un certo valore di velocità si potrà pertanto manifestare un decremento della coppia.

Il principio illustrato è impiegato, per esempio, nelle macchine asincrone, per questo dette anche macchine a induzione. Ancora una volta, per ottenere la macchina rotante, si sostituisce la struttura fissa della figura 11 con un campo magnetico rotante. L'azione della coppia, tendente ad evitare il movimento relativo del circuito 2 rispetto ai poli induttori del campo rotante, trascinerà in rotazione la parte mobile. Se tuttavia c'è una qualche resistenza al moto, la velocità di rotazione dell'elemento mobile sarà inferiore a quella del campo rotante, cosicché si viene a manifestare fra i due una velocità relativa diversa da zero (*velocità di scorrimento*). È da quest'ultima che dipende la coppia che agisce sul circuito 2, secondo il principio sopra descritto.

La Tab. 1 riporta, come riferimento, i parametri di un motore asincrono di produzione industriale:

