

FONDAMENTI DI MACCHINE ED AZIONAMENTI ELETTRICI

prof. M.Zigliotto

Sommario

Motore a corrente continua ad eccitazione indipendente.....	3
Caratteristiche meccaniche	3
A. Caratteristiche meccaniche e funzionamento a tensione impressa.	3
B. Caratteristiche meccaniche e funzionamento a corrente impressa.	4
Esercizi applicativi sui motori in corrente continua a regime.....	6
Esercizio 1.....	6
Esercizio 2.....	9
Esercizio 3.....	9

Motore a corrente continua ad eccitazione indipendente

Caratteristiche meccaniche

Le *caratteristiche meccaniche* $T=T(\Omega)$ forniscono la coppia sviluppata in funzione della velocità di rotazione per il funzionamento a regime in diverse condizioni di alimentazione. Esse consentono in particolare di evidenziare i comportamenti peculiari del motore a corrente continua e di individuare le grandezze su cui si può agire per controllarne la coppia o la velocità nel rispetto dei limiti esposti nel precedente paragrafo.

Il comportamento a regime si può analizzare risolvendo le equazioni del par.1.1 dopo aver posto a zero ogni derivata. Si ottiene allora

$$U_a = R_a I_a + K_e \Phi \Omega \quad \text{ove} \quad K_e \Phi \Omega = E_a \quad (1.4.1)$$

$$T = K_e \Phi I_a \quad (1.4.2)$$

$$U_e = R_e I_e \quad (1.4.3)$$

$$\Phi = \Phi(I_e) \quad (1.4.4)$$

L'espressione $T=T(\Omega)$ consente di individuare le strategie di controllo del motore, ossia come controllarne la coppia, e quindi la velocità, per un prefissato carico. Tali strategie sono in genere distinte in *controllo di armatura* e *controllo di campo*. La prima si può attuare sia a corrente impressa che a tensione impressa.

4. Caratteristiche meccaniche e funzionamento a tensione impressa.

Se si suppone di regolare con un opportuno convertitore la tensione di armatura U_a , si ottiene quanto riportato in Fig.1.4.1. Dalla (1.4.1) si ricava:

$$I_a = \frac{U_a - K_e \Phi \Omega}{R_a} \quad (1.4.5)$$

Sostituendo nella (1.4.2) si ha:

$$T = K_e \Phi \frac{U_a - K_e \Phi \Omega}{R_a} \quad (1.4.6)$$

che è l'espressione cercata. Sotto la condizione di flusso costante essa rappresenta una retta (Fig.1.4.1) con intersezioni date da:

$$T_s = K_e \Phi \frac{U_a}{R_a} = K_e \Phi I_s \quad (1.4.7)$$

$$\Omega_0 = \frac{U_a}{K_e \Phi} \quad (1.4.8)$$

ove con I_s si è indicata la corrente di spunto, il cui valore per $U_a=U_{aN}$ è da 5 a 10 volte la I_{aN} .

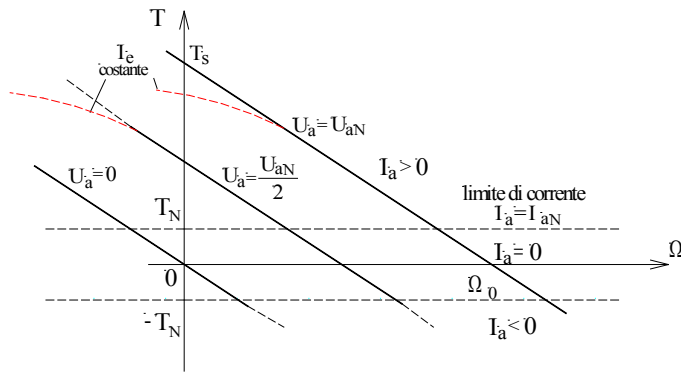


Fig.1.4.1: Caratteristiche meccaniche $T=T(\Omega)$ con tensione d'armatura impressa

La coppia T_s prende il nome di *coppia di spunto* (alla tensione U_a), mentre Ω_0 è la *velocità a vuoto*, ovvero la velocità alla quale ruota il motore in assenza di resistenza meccanica.

Si noti che il rapporto tra la corrente di spunto I_s e la velocità a vuoto Ω_0 vale:

$$\frac{I_s}{\Omega_0} = \frac{K_e \Phi}{R_a} \quad (1.4.9)$$

cioè è indipendente da U_a .

La caratteristica meccanica di Fig.1.4.1 è ottenuta supponendo di mantenere costante il flusso induttore. Essa coincide in buona parte con quella che si disegna pensando di mantenere costante la corrente di eccitazione I_e . Per alte coppie, e dunque elevate correnti di armatura, a causa della reazione d'indotto si perde la linearità tra corrente I_e e flusso, che viene progressivamente a ridursi, dando luogo ad una perdita di coppia come evidenziato con il tratteggio in Fig.1.4.1.

B. Caratteristiche meccaniche e funzionamento a corrente impressa.

Si consideri dapprima il caso in cui un appropriato controllo di corrente consenta di regolare la corrente d'armatura I_a su un prefissato valore, mentre il flusso induttore è mantenuto costante. In questo caso si parla di motore a corrente impressa, essendo quest'ultima la grandezza imposta mentre la tensione sarà regolata automaticamente per avere la corrente desiderata ad ogni velocità di lavoro.

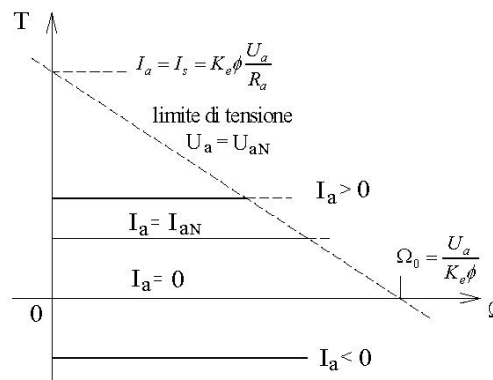


Fig.1.4.2 - Caratteristiche meccaniche $T=T(\Omega)$ con corrente d'armatura impressa

Facendo riferimento alla Fig. (1.4.2), si evince che la coppia del motore a corrente impressa risulta indipendente dalla velocità e le caratteristiche meccaniche formano pertanto una famiglia di rette parallele all'asse delle Ω , come evidenziato in Fig.1.4.2. Il fascio delle caratteristiche sarà limitato superiormente e inferiormente da quelle associate alla corrente nominale $\pm I_{aN}$, alle quali corrisponde la coppia nominale rispettivamente positiva e negativa.

Si noti che nel controllo di corrente deve essere osservato il limite di tensione d'armatura $U_a \leq U_{aN}$, per cui il funzionamento è possibile solo nella regione compresa tra gli assi cartesiani e le rette che derivano dalla (1.4.1) sostituendo a U_a i valori $\pm U_{aN}$ (tratteggiate in Fig.1.4.1). Tale limite coincide con la caratteristica meccanica a tensione impressa tracciata per la tensione nominale e la sua intersezione con l'asse della velocità individua la *velocità base*¹ dell'azionamento.

¹ La *velocità base* coincide con la *velocità a vuoto* alla tensione di armatura nominale.

Esercizi applicativi sui motori in corrente continua a regime

Esercizio 1

Una gru sollevatrice deve sollevare un carico m di 10 tonnellate ad una velocità V_2 di 0.25 m/s. Il gancio è montato su una carrucola a singola puleggia. Un capo del cavo di sollevamento è ancorato al carrello della gru e l'altro è avvolto in un tamburo di diametro $D = 25$ cm. Il tamburo è comandato in rotazione da un ingranaggio con rapporto di riduzione 45 a 1 [Fig.1.6.1.1].

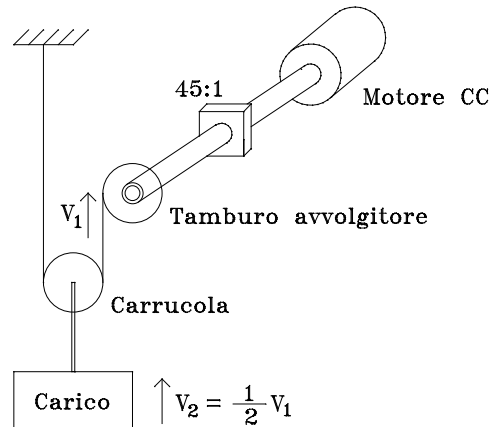


Fig.1.6.1.1 - Gru sollevatrice

Si può supporre che l'intero meccanismo abbia un rendimento $\eta = 60\%$. Determinare:

- la potenza P_N e la velocità di targa Ω_N del motore
- la coppia frenante esercitata dal motore quando esso rallenta la discesa del carico a 0.3 m/s

a) *Calcolo della potenza del motore.*

La potenza meccanica necessaria per il sollevamento del peso è data da

$$P_{mecc} = F_p V_2 = 10000 \cdot 9.8 \cdot 0.25 = 24500 \text{ W} \quad (1.6.1.1)$$

Tenendo conto del rendimento ($\eta = P_{utile}/P_{prodotta}$) occorre prevedere un motore di potenza di:

$$P_N = \frac{P_{mecc}}{\eta} = \frac{24500}{0.6} = 40833 \text{ W} \quad (1.6.1.2)$$

b) *calcolo della velocità nominale del motore*

Il rapporto di riduzione 45:1 significa che la velocità Ω_1 dopo il riduttore (verso il carico) è 45 volte più piccola di quella dell'albero motore, Ω_N . Osservando la Fig.1.6.1.2 è facile inoltre rendersi conto che la velocità periferica del tamburo avvolgitore è doppia rispetto alla velocità del carico.

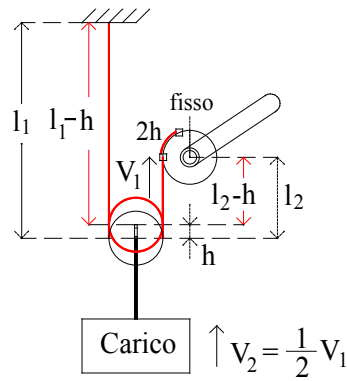


Fig.1.6.1.2 - Velocità di sollevamento e velocità di avvolgimento

La velocità angolare del tamburo avvolgitore risulta dunque:

$$\Omega_1 = \frac{V_1}{r} = \frac{2 V_2}{r} = \frac{2 \cdot 0.25}{0.125} = 4 \text{ rad/s} \quad (1.6.1.3)$$

La velocità nominale del motore risulta pertanto:

$$\Omega_N = 45 \cdot \Omega_1 = 45 \cdot 4 = 180 \text{ rad/s} \quad (1.6.1.4)$$

e la coppia vale:

$$T_N = \frac{P_N}{\Omega_N} = \frac{40833}{180} = 227 \text{ Nm} \quad (1.6.1.5)$$

c) calcolo della coppia frenante

Si può impostare un bilancio delle potenze; la potenza meccanica sviluppata dal carico durante la discesa, calcolata con la (1.6.1.1) sostituendo a V_2 la velocità di discesa (0.3 m/s), vale

$$P_{mecc,f} = F_p V_2 = 10000 \cdot 9.8 \cdot (-0.3) = -29400 \text{ W} \quad (1.6.1.6)$$

Ora è il carico ad imporre il movimento, per cui le perdite vanno considerate in senso inverso; la potenza elettrica risulta allora

$$P_{Nf} = \eta \cdot P_{mecc,f} = 0.6 \cdot (-29400) = -17640 \text{ W} \quad (1.6.1.7)$$

La velocità del motore (negativa, rispetto alla precedente) si calcola come :

$$\Omega_{Nf} = \Omega_{1f} \cdot 45 = \frac{V_{1f}}{r} \cdot 45 = \frac{2 \cdot (-0.3)}{0.125} \cdot 45 = -216 \text{ rad/s} \quad (1.6.1.8)$$

La coppia sviluppata dal motore è infine data dal rapporto tra la potenza sviluppata dal motore e la sua velocità:

$$T_{Nf} = \frac{P_{Nf}}{\Omega_{Nf}} = \frac{-17640}{-216} = 81.6 \text{ Nm} \quad (1.6.1.9)$$

Si può a questo punto svolgere una considerazione a proposito dei due punti di funzionamento P_1 e P_2 , relativi rispettivamente al caso del sollevamento e della discesa frenata. Tali punti sono per semplicità riportati nel diagramma coppia-velocità in Fig.1.6.1.3:

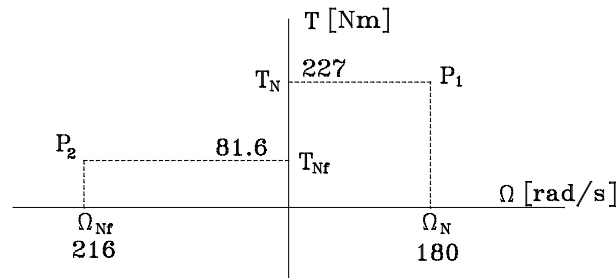


Fig.1.6.1.3 - Punti di funzionamento in sollevamento e in frenatura

Nel dimensionare l'azionamento, ci sono effettivamente due possibilità; la prima consiste nel considerare $\Omega_{Nf} = 216$ rad/s come velocità base, alla quale deve essere possibile ottenere comunque la massima coppia richiesta durante qualunque funzionamento (dunque, $T=227$ Nm); in questo caso l'azionamento avrebbe un convertitore dimensionato per una potenza di circa 49 KW, sicuramente esuberante per l'applicazione in oggetto, dato che nessuno dei due punti di funzionamento previsti richiedono contemporaneamente massima velocità e coppia. Vi è allora una seconda possibilità, che consiste nell'assumere $\Omega_N = 180$ rad/s come velocità base, alla quale l'azionamento deve erogare la coppia di 227 Nm (punto P_1); si può poi prevedere un deflussaggio, con una curva tale da poter erogare una coppia ridotta (81.6 Nm) ad una velocità superiore a quella base (216 rad/s). In questo caso, il convertitore andrebbe dimensionato per una potenza di circa 40.8 KW, con evidente vantaggio economico, a dimostrazione dell'efficacia e dell'opportunità del funzionamento in deflussaggio in particolari applicazioni industriali.

Ipotesi di stallo: Si valuti se il motore scelto ai passi precedenti sia in grado di mantenere fermo e sollevato da terra il carico.

Per tenere sospeso il carico, il motore deve eguagliare la coppia τ_s che il carico imprime sul tamburo. Il carico genera una forza peso P verso il basso di

$$P = mg = 10000 \cdot 9.8 = 98000 \text{ N}$$

Nell'ipotesi che la fune sia ideale, questa forza si ripartisce equamente tra il vincolo a parete a cui la fune è fissata da una parte, e il tamburo del motore dall'altra. Pertanto, al tamburo agirà una forza di $98000/2 = 49000$ N dovuta al peso del carico. La coppia applicata al tamburo sarà data dalla forza per il braccio, che coincide con il raggio del tamburo:

$$\tau_s = \frac{P D}{2} = 49000 \cdot \frac{0.25}{2} = 6125 \text{ Nm}$$

La coppia che il motore dovrà erogare sarà ridotta dal rapporto di trasmissione:

$$\tau_{s,m} = \frac{\tau_t}{45} = \frac{6125}{45} = 136.1 \text{ Nm}$$

Pertanto il motore è adatto anche a questo ulteriore compito. La potenza (meccanica) erogata dal motore è nulla, mentre quella elettrica di alimentazione è legata alle perdite per effetto Joule. Il rendimento è naturalmente nullo, perché il motore non compie lavoro meccanico.

Esercizio 2

Un motore a corrente continua ad eccitazione indipendente ha una tensione d'armatura che può essere variata da 0 a 600V. Alla tensione di armatura nominale la velocità del motore è di 1600 rpm. Si trascurino tutte le perdite.

- Qual'è la corrente di armatura quando la coppia di carico è 420 Nm (con la tensione d'armatura fissata a 600V) ?
- Se si mantiene ancora costante la tensione di armatura e si riduce la corrente di campo fino ad ottenere una velocità di 4000 rpm, che coppia può esercitare il motore ?
- Qual'è la specifica di potenza per l'alimentatore del motore ?

a) *Calcolo della corrente di armatura.*

Se si trascurano le perdite, la potenza meccanica trasmessa al carico coincide con la potenza elettrica assorbita dal motore. Si ha dunque:

$$I_a = \frac{P_N}{U_a} = \frac{T \cdot \Omega}{U_a} = \frac{420}{600} \frac{1600}{60} 2\pi = 117.3 \text{ A} \quad (1.6.3.1)$$

b) *Calcolo della coppia.*

Il motore viene in tal caso fatto funzionare nel tratto a potenza costante, dunque si ha:

$$T = \frac{P_N}{\Omega} = \frac{U_a I_a}{\Omega} = \frac{600 \cdot 117.3}{4000 \cdot 2\pi} 60 = 168 \text{ Nm} \quad (1.6.3.2)$$

c) *Calcolo della specifica di potenza.*

La potenza nominale del motore è $P_N = 70.37 \text{ kW}$; l'alimentatore andrà comunque sovradimensionato, perché in generale la parte di potenza sopporta peggio i transitori termici rispetto a quella meccanica.

Esercizio 3

Un motore a corrente continua a magneti permanenti ruota a vuoto alla velocità di 400 rad/s quando è alimentato a 200V. Sapendo che la resistenza R_a del circuito indotto è di 0.2Ω tracciare la caratteristica meccanica e valutare la velocità quando il motore sviluppa una coppia di 20 Nm.

a) *Caratteristica meccanica e punto di funzionamento*

Si richiama per praticità l'equazione meccanica a regime per un motore in c.c. funzionante a tensione impressa (1.4.6):

$$T = K_e \Phi \frac{U_a - K_e \Phi \Omega}{R_a} \quad (1.6.4.1)$$

Innanzitutto occorre ricavare la costante $K_e \Phi$, utilizzando la (1.4.8):

$$K_e \Phi = U_a / \Omega_0 = \frac{200}{400} \frac{\text{V}}{\text{rad/s}} = 0.5 \text{ Vs/rad} \quad (1.6.4.2)$$

Sostituendo i dati numerici forniti dal testo del problema si ottiene l'equazione della caratteristica meccanica D_1 :

$$T = 500 - 1.25 \Omega \quad (\text{retta } D_1) \quad (1.6.4.3)$$

In Fig.1.3.2 se ne dà una rappresentazione grafica:

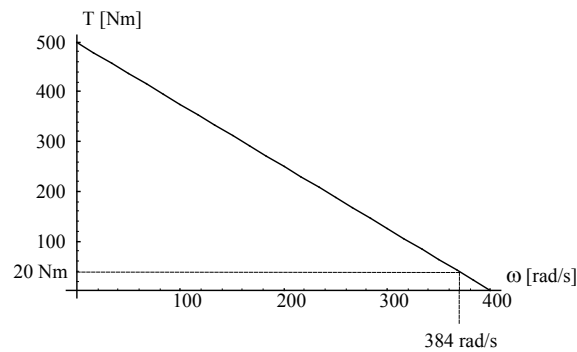


Fig.1.6.4.1 - Caratteristica meccanica del motore c.c

b) Calcolo della velocità

La velocità corrispondente ad una coppia di 20 Nm si ottiene invertendo la (1.6.4.1):

$$\Omega = \frac{U_a}{K_e \Phi} - \frac{R_a T}{(K_e \Phi)^2} = 384 \text{ rad/s} \quad (1.6.4.4)$$

come riportato ancora in Fig.1.6.4.1.

Motori in corrente continua

Struttura e principio di funzionamento

prof. M.Zigliotto

Sommario

Motore a corrente continua ad eccitazione indipendente	3
Struttura e principio di funzionamento	3
<i>A.</i> Funzionamento del sistema induttore.....	4
<i>B.</i> Funzionamento del sistema indotto in quiete.....	5
<i>C.</i> Reazione d'indotto.....	7
<i>D.</i> Funzionamento del sistema indotto in moto	8
Limiti e regioni di funzionamento del motore c.c. ad eccitazione indipendente	11

Motore a corrente continua ad eccitazione indipendente

Struttura e principio di funzionamento

Una rappresentazione schematica della struttura di un motore a corrente continua a due poli è mostrata in Fig.1.1.1. Essa comprende una *parte fissa* (statore) che costituisce l'*induttore* della macchina (la struttura che produce il *campo magnetico principale*), dotata dei *poli induttori* (o *poli principali*)¹ su cui sono avvolte le *bobine di eccitazione* che, nell'insieme, formano l'*avvolgimento di eccitazione* (o *induttore o di campo*). La *corrente di eccitazione* è indicata in figura con i_e .

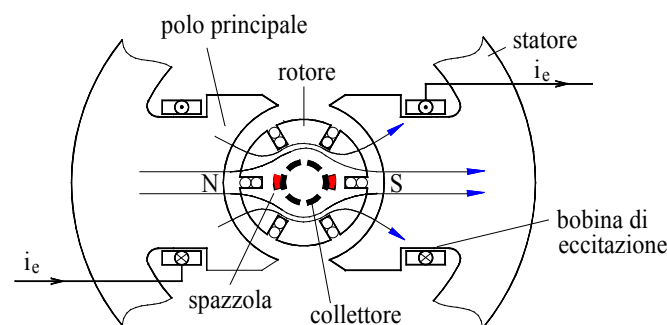


Fig.1.1.1 - Rappresentazione schematica di un motore c.c.

Esiste quindi una *parte rotante* (rotore) che rappresenta l'*indotto* della macchina il cui avvolgimento (*armatura*) ha i suoi conduttori, detti *conduttori attivi*, collocati entro canali (*cave*) ricavati lungo le generatrici del cilindro rotorico. L'armatura è alimentata dalla corrente i_a inviata attraverso contatti fissi (*spazzole*) striscianti su un sistema di *lamelle* solidale con il rotore (*collettore*). Statore e rotore sono separati da una sottile corona d'aria che prende il nome di *traferro*². Le spazzole sono costituite da una miscela di molibdeno, rame, carbone e grafite. Con una vita media di 1500 ore costituiscono ancora l'elemento più debole del motore.

Una rappresentazione fotografica della struttura citata è riportata in Fig.1.1.2.

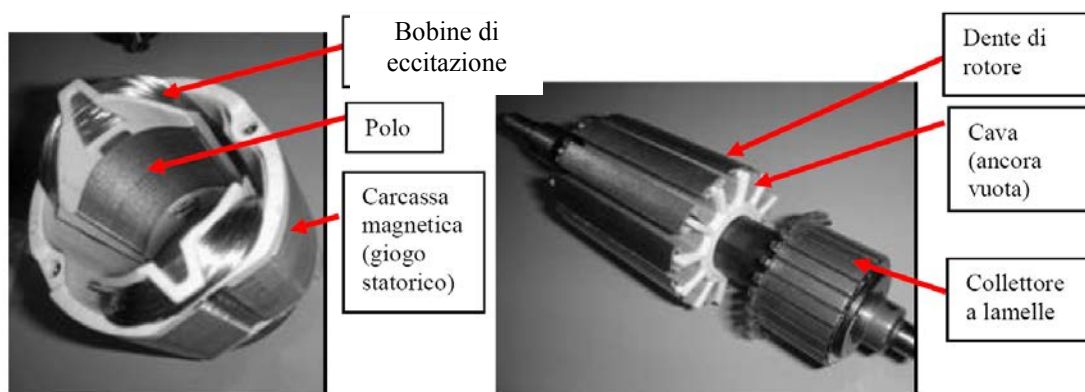


Fig.1.1.2 – Statore e rotore di un motore cc reale, di piccola potenza.

¹ In figura la macchina ha una coppia di poli; nella pratica le macchine a corrente continua vengono realizzate anche e spesso con più di una coppia polare, con i poli che si succedono con polarità alterne. Anche con più coppie polari il principio di funzionamento resta quello illustrato in questo paragrafo.

² Per un miglior funzionamento della macchina a corrente continua possono esistere altri due componenti: i *poli ausiliari* (o *di commutazione*) disposti sull'asse interpolare e gli *avvolgimenti di compensazione*, distribuiti sulla scarpa polare dei poli principali, affacciati all'armatura. Essi sono per il momento ignorati per essere richiamati più avanti nel capitolo.

A. Funzionamento del sistema induttore

Quando una corrente i_e è inviata negli avvolgimenti di eccitazione, mentre i conduttori di indotto non sono sede di correnti (funzionamento a vuoto), si instaura nella macchina un campo magnetico principale, le cui linee di campo sono esemplificate in Fig.A.1.1, in cui il motore è rappresentato sviluppato e disteso su un piano.

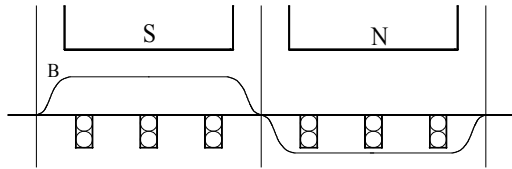


Fig.A.1.2 - Andamento di B lungo il traferro, a vuoto

Tale campo attraversa il traferro ed il rotore e si richiude nello statore; ad esso corrisponde una distribuzione lungo il traferro della componente radiale dell'induzione che presenta, in virtù della sagomatura dei poli stessi, l'andamento rappresentato in Fig. A.1.2.

Assumendo la convenzione di segno degli utilizzatori, l'avvolgimento di eccitazione è retto dall'equazione

$$u_e = R_e i_e + \frac{d\lambda_e}{dt} \quad (\text{A.1.1})$$

ove λ_e è il flusso concatenato. Se N_e è il numero di spire complessivo dell'avvolgimento di eccitazione, trascurando i flussi dispersi³ vale $\lambda_e = N_e \phi$, ove ϕ (*flusso induttore*) è il flusso del campo induttore principale che è funzione della corrente di eccitazione i_e in accordo con la *caratteristica di magnetizzazione* $\phi(i_e)$ di Fig. A.1.3 (tracciata per i soli valori positivi di i_e).

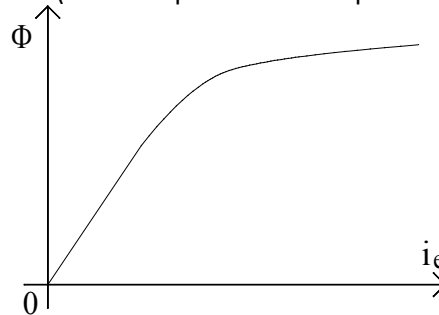


Fig.A.1.3 - Curva di magnetizzazione

Per comodità di trattazione, si accetta a volte di approssimare la caratteristica di magnetizzazione con una retta (trascurando l'effetto della saturazione magnetica), in modo che

$$\phi(i_e) \approx K_\phi i_e \quad (\text{A.1.2})$$

Di conseguenza la (A.1.1) può essere riscritta nella forma:⁴

$$u_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \quad (\text{A.1.3})$$

³ In presenza di flussi dispersi si può ancora usare la relazione soprascritta assumendo che N_e sia un coefficiente un po' minore del reale numero di spire di eccitazione.

⁴ L_e è costante e pari a $N_e K_\phi$.

B. Funzionamento del sistema indotto in quiete

Per descrivere il funzionamento del sistema indotto, si faccia riferimento alla Fig.1.1.4, ove il semplice rotore con 6 cave e 12 conduttori è rappresentato con maggior dettaglio ed è supposto, per il momento, fermo.

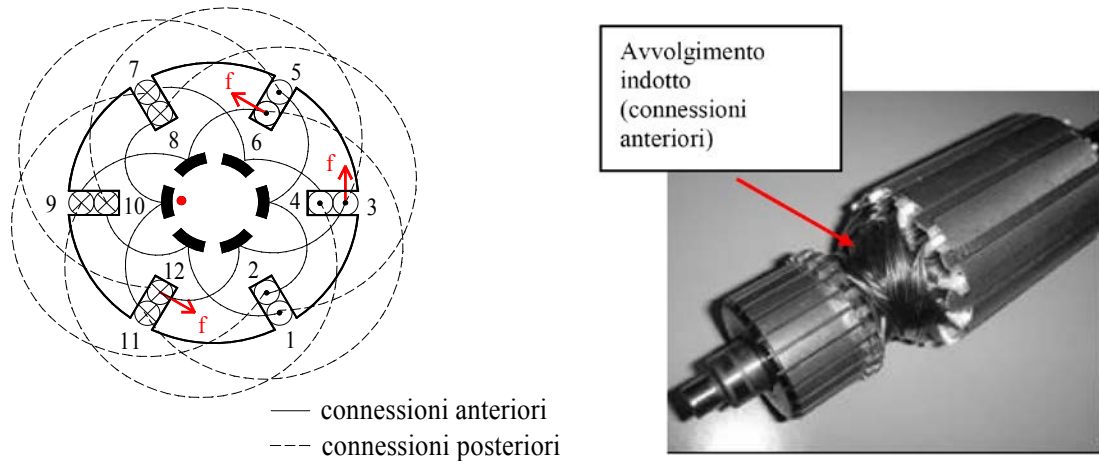


Fig.1.1.4 - Schema di indotto a 6 cave (a destra, prototipo reale)

L'indotto a tamburo (drum-type winding) raffigurato in una versione primitiva nella Fig.1.1.4-a consente di intercettare in modo migliore le linee di campo di eccitazione e fu un miglioramento decisivo rispetto al precedente avvolgimento ad anello (Pacinotti). Esso fu inventato da F. van Hefner Alteneck, progettista-capo della società Siemens und Halske, nel 1872.



Fig.1.1.4-a - Schema di indotto a tamburo, prototipo.

Si immagini che il conduttore attivo 3 di figura sia sede di una corrente positiva i con il verso indicato. Se \mathcal{B} è l'induzione radiale al traferro nella posizione occupata dal conduttore in esame, su di esso verrà ad agire la forza tangenziale mostrata in figura, di intensità $f = l (i \times \mathcal{B})$ essendo l lo sviluppo assiale del conduttore.

Se la stessa corrente i percorre anche tutti gli altri conduttori sotto il polo S e, con il verso contrario come evidenziato in figura, anche quelli sotto il polo N , su tutti verranno ad agire forze tangenziali di versi concordi (alcune indicate in figura), proporzionali al valore dell'induzione radiale al traferro nella posizione occupata dai conduttori stessi. In queste condizioni il rotore è sottoposto ad una coppia⁵ risultante diversa da zero che tende a metterlo in rotazione. Opportune connessioni fra i diversi conduttori e l'alimentazione degli stessi attraverso contatti striscianti spazzole-lamelle fanno sì che la distribuzione delle correnti rispetto ai poli sia sempre quella di Fig.1.1.4 qualunque sia la

⁵ Una coppia di forze è costituita da due forze \mathbf{F} tra loro opposte, aventi modulo e direzione uguale, ma versi contrari. La distanza tra le rette di applicazione delle due forze viene chiamata braccio. Indicato con O il centro del rotore, e detti A e B i due punti di applicazione delle forze, i momenti delle due forze rispetto ad O sono $\mathbf{OA} \times \mathbf{F}$ e $-\mathbf{OB} \times \mathbf{F}$. Il momento della coppia, che per definizione è la somma dei due momenti, risulta $\mathbf{BA} \times \mathbf{F}$, indipendente dal polo usato. Il momento di una coppia è perpendicolare al piano che contiene la coppia, è orientato in modo da produrre una rotazione antioraria della coppia di forze, ed ha un modulo che è dato dal prodotto di una forza per il diametro del rotore.

posizione del rotore sicché la coppia prodotta per una data corrente mantiene sempre lo stesso valore e segno. Per comprendere come ciò sia possibile si faccia riferimento alla schematizzazione di Fig.1.1.5 che illustra, sviluppato e disteso su un piano, l'avvolgimento indotto della macchina di Fig.1.1.4. Sulla stessa figura sono pure mostrati i collegamenti fra le lamelle del collettore e l'avvolgimento indotto, nonché la posizione che devono avere le spazzole.

Si riconosce che l'avvolgimento d'indotto collega tra loro i diversi conduttori attivi così da formare un avvolgimento chiuso, condizione essenziale per garantire la necessaria simmetria rotazionale all'avvolgimento. Alcune di queste connessioni sono mostrate anche in Fig.1.1.4. La corrente di armatura i_a inviata e prelevata attraverso le spazzole si suddivide nelle due vie interne identiche, ciascuna formata da sei conduttori, che si possono individuare percorrendo l'indotto da una spazzola all'altra. Si riconosce altresì che tutti i conduttori che giacciono sotto lo stesso polo sono percorsi da correnti equiverse, anche se essi appartengono per metà ad una delle due vie interne e per i rimanenti all'altra⁶.

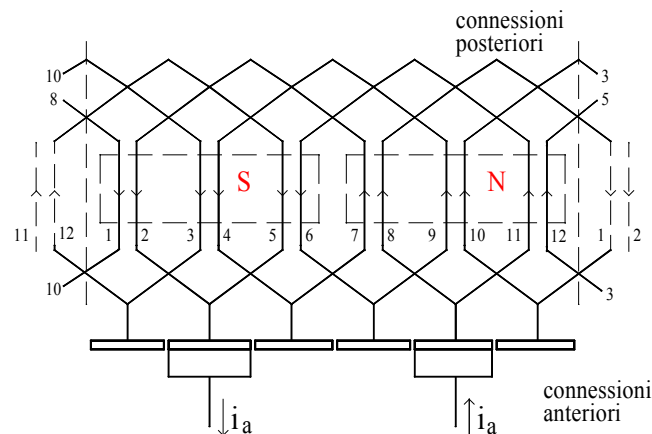


Fig.1.1.5 - L'avvolgimento indotto sviluppato in un piano.

Spostando il rotore di un sesto di giro (per esempio in senso antiorario in Fig.1.1.4, verso destra in Fig.1.1.5, corrispondente ad un movimento verso sinistra delle spazzole e della proiezione dei poli) rimane inalterata la distribuzione delle correnti sotto ogni polo. In particolare nelle coppie di conduttori 11,12 e 5,6 si ha un'inversione della corrente ed essi prendono il posto che già era delle coppie 1,2 e 7,8 rispettivamente.

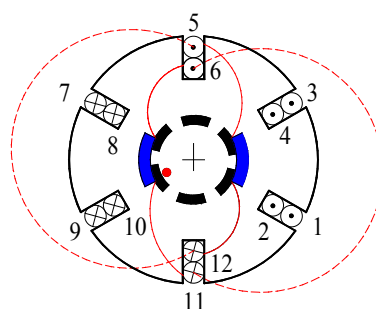


Fig.1.1.6 - Spire in commutazione

Durante ogni spostamento di questo tipo si ha una *commutazione* della corrente delle spazzole da una lamella alla successiva, che riporta le condizioni operative della macchina del tutto equivalenti a quelle di partenza, con conseguente costanza della coppia prodotta. Posizionando invece il rotore in

⁶ Nelle macchine multipolari i criteri di realizzazione dell'avvolgimento di armatura sono molteplici e portano a configurazioni che possono avere più coppie di spazzole e nelle quali la corrente di armatura si suddivide in più di due vie interne, sempre comunque identiche fra di loro.

una posizione intermedia, come rappresentato in Fig.1.1.6, ogni spazzola alimenta due lamelle adiacenti, con correnti proporzionali alle relative superfici di contatto⁷. Durante la commutazione si ha allora una graduale riduzione della corrente nelle lamelle uscenti dalle spazzole, una graduale crescita in quelle entranti mentre nelle due *spire in commutazione* (formate dai conduttori 11,6 e 12,5) si ha un graduale rovesciamento di corrente la quale passa per lo zero nel momento in cui le spire in questione transitano per il piano interpolare (*piano di commutazione o delle spazzole*) ove l'induzione del campo induttore è nulla.

Se il numero di cave è sufficientemente alto, si può senz'altro assumere che anche durante la commutazione si venga a produrre sempre la stessa coppia. Essa sarà proporzionale all'intensità delle correnti nei conduttori, e quindi ad i_a , e all'induzione media sotto ciascun polo, e quindi a ϕ , e potrà in ultima analisi essere espressa con la

$$\tau = K_\tau \phi i_a \quad (\text{B.1.1})$$

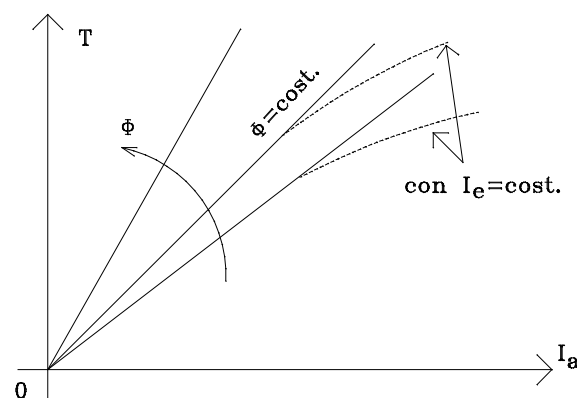


Fig.1.1.7 - Caratteristica elettromeccanica.

ove K_τ è un coefficiente che dipende dal tipo di avvolgimento e dal numero di conduttori attivi.

La (B.1.1) è graficamente rappresentata a tratto continuo dalla *caratteristica elettromeccanica di coppia a flusso costante* di Fig.1.1.7. Se il flusso induttore è costante, essa è una retta con inclinazione proporzionale al flusso stesso.

C. Reazione d'indotto

La corrente di armatura, che si suddivide e distribuisce nei conduttori attivi collocati nelle varie cave, produce a sua volta un campo magnetico (*campo di reazione di indotto*), che si sovrappone a quello induttore modificando la distribuzione dell'induzione al traferro rispetto a quella che si ha a vuoto: *distorsione a carico del campo al traferro*. Le linee di flusso del campo di reazione d'indotto sono schematizzate in Fig. 1.1.8.

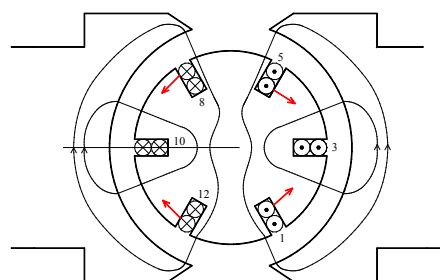


Fig.1.1.8 - Campo di reazione d'indotto.

⁷ Ciò è vero se si suppone che la resistenza di contatto spazzola-lamella sia dominante rispetto alle altre resistenze in gioco.

La distribuzione delle correnti di indotto e le linee del campo di reazione evidenziano che l'avvolgimento di indotto è equivalente ad un solenoide con l'asse magnetico nel piano che contiene le spire in commutazione e quindi in quadratura con l'asse del flusso induttore. Fra i due circuiti, induttore e indotto (quest'ultimo con piano di commutazione in posizione interpolare) non sussiste perciò alcun mutuo accoppiamento.

L'esame delle forze elementari agenti sui conduttori di Fig.1.1.8 immersi nel campo di reazione d'indotto (alcune sono indicate in figura) mostra anche che metà di esse produce una coppia in un certo segno mentre l'altra metà produce una coppia identica ma di segno opposto, con coppia risultante quindi nulla. Si conclude che la coppia non dipende dal campo di reazione d'indotto ma solo dal campo induttore e perciò resta valida la (B.1.1)⁸.

D. Funzionamento del sistema indotto in moto

Se il rotore possiede una velocità angolare ω , in ogni conduttore attivo è indotta una f.e.m. elementare proporzionale al valore B dell'induzione radiale al traferro nel punto ove giace il conduttore, e alla velocità periferica di rotazione secondo la relazione $e=B/v$. In presenza di una velocità positiva, cioè nel verso delle coppie positive (secondo la *convenzione di segno dei motori*), i versi secondo i quali agiscono le f.e.m. elementari dovute al flusso induttore sono mostrati in Fig.D.1.9.

Da un confronto con la Fig.1.1.4, ove sono indicati i versi positivi delle correnti, si deduce che tali f.e.m. per come sono state orientate sono più propriamente forze contrelettromotrici.

La f.e.m. di armatura e_a che si manifesta fra le spazzole si ottiene come somma delle f.e.m. elementari dei conduttori che si incontrano percorrendo l'avvolgimento indotto dal morsetto negativo a quello positivo lungo una delle vie interne che esso presenta. Con l'ausilio della Fig.1.1.5 si trova che tali f.e.m. elementari sono tutte concordi fra di loro e nelle due vie interne poste in parallelo fra le spazzole si manifestano uguali f.e.m. risultanti. La f.e.m. totale nel circuito chiuso di indotto è pertanto nulla, condizione essenziale per non causarvi una corrente di circolazione.

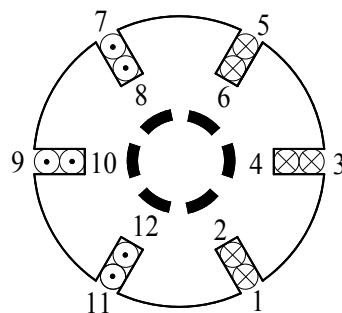


Fig.D.1.9 -Versi delle f.e.m. elementari dovute al flusso induttore.

La f.e.m. di armatura disponibile alle spazzole sarà proporzionale alla velocità periferica del rotore, e quindi a quella di rotazione ω , e all'induzione media sotto ciascun polo, e quindi a ϕ , e potrà in ultima analisi essere espressa con la

⁸ Un esame più attento del circuito magnetico mostra che il campo di reazione di indotto causa di fatto una riduzione del flusso per polo. Si osserva infatti che sovrapponendo la reazione d'indotto al campo induttore si ha un aumento dell'induzione magnetica al traferro sotto metà espansione polare e una riduzione sotto l'altra metà. Se il circuito magnetico fosse esente dal fenomeno della saturazione magnetica, aumento e diminuzione sarebbero uguali e nessuna variazione si avrebbe sul valor medio dell'induzione al traferro sotto ciascun polo, ovvero sul valore del flusso per polo ed anche, attraverso questo, sulla coppia sviluppata ad una data corrente. La saturazione delle scarpe polari fa sì invece che la diminuzione sia più marcata dell'aumento cosicché si ha, a carico, un flusso per polo inferiore (a parità di corrente di eccitazione) di quello a vuoto. Questo giustifica l'andamento a tratteggio della *caratteristica elettromeccanica di coppia a I_e* costante disegnato in Fig. 1.1.7.

$$e_a = K_e \phi \omega \quad (D.1.1)$$

ove K_e è un coefficiente che dipende dal tipo di avvolgimento e dal numero di conduttori attivi.

Durante la rotazione vengono a cambiare i conduttori attivi che sono in serie nelle vie interne dell'avvolgimento fra una spazzola e l'altra, ma la *f.e.m.* risultante rimane invariata.

La (D.1.1) è stata dedotta riferendosi al solo campo induttore. Essa è quindi senz'altro corretta nel *funzionamento a vuoto* ossia in assenza di corrente di armatura. In presenza di quest'ultima invece si ha anche il campo di reazione di indotto e ciascuna *f.e.m.* elementare è legata all'induzione risultante al traferro piuttosto che a quella a vuoto solamente. Per dimostrare che la (D.1.1) resta valida anche nel *funzionamento a carico*, ossia in presenza di corrente di armatura, basta riconoscere, con l'ausilio di Fig.D.1.5 e di Fig.D.1.8 che le *f.e.m.* elementari lungo ciascuna via interna e dovute al campo di reazione di indotto sono per metà di un verso (p.e. concordi con le correnti) e per l'altra identica metà di verso contrario, dando risultante nulla. Il campo di reazione d'indotto produce perciò una *f.e.m.* risultante fra le spazzole nulla (così come è la *f.e.m.* totale nel circuito chiuso di indotto) e resta quindi valida la (D.1.1).

Più precisamente si dovrebbe tener conto che, come già discusso, la reazione d'indotto causa un'attenuazione del flusso per polo dovuta ad una parziale saturazione delle scarpe polari. Di conseguenza a carico si ha un calo della *f.e.m.* di armatura per una data corrente di eccitazione, così come succede per la coppia. Durante la rotazione dell'indotto, ogni qualvolta una spazzola passa da una lamella alla successiva essa viene a formare un momentaneo cortocircuito di una spira dell'avvolgimento d'indotto attraverso le due lamelle, come già discusso e mostrato nella Fig. D.1.6. Nel funzionamento a vuoto ciò tuttavia non provoca alcuna corrente di circolazione all'interno della spira in cortocircuito in quanto essa non è sede di *f.e.m.*, essendo i suoi conduttori attivi disposti esattamente sul piano interpolare ove l'induzione magnetica radiale è nulla (Fig.D.1.6). Significativamente diversa è la situazione a carico nella quale la reazione di indotto produce un'induzione magnetica proprio là dove giace la spira in commutazione, ed essa ha l'effetto di produrvi una *f.e.m.*. Si rimanda a testi specialistici per un eventuale approfondimento delle tematiche riguardanti la commutazione nei motori in corrente continua.

Per completare la descrizione elettrica dell'indotto occorre tener conto anche della resistenza propria dell'avvolgimento e della sua induttanza. L'equazione elettrica d'armatura sarà pertanto

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (D.1.2)$$

Le relazioni (A.1.3), (B.1.1), (D.1.1) e (D.1.2) descrivono il comportamento dinamico del motore dal punto di vista elettrico. Ad esse deve essere aggiunta l'equazione meccanica del carico che in generale sarà

$$\tau = B\omega + J \frac{d\omega}{dt} + \tau_L(t, \omega) \quad (D.1.3)$$

dove J è il momento d'inerzia totale riferito all'albero motore e τ_L è la coppia di carico, in generale dipendente (in modo non lineare) sia dalla velocità del motore sia dal tempo.

Alle equazioni sopra scritte corrisponde lo schema a blocchi di Fig.D.1.10, valido *nel dominio del tempo*, anche se alcuni blocchi (lineari) sono contrassegnati con la funzione di trasferimento (f.d.t.) in s che li descrive.

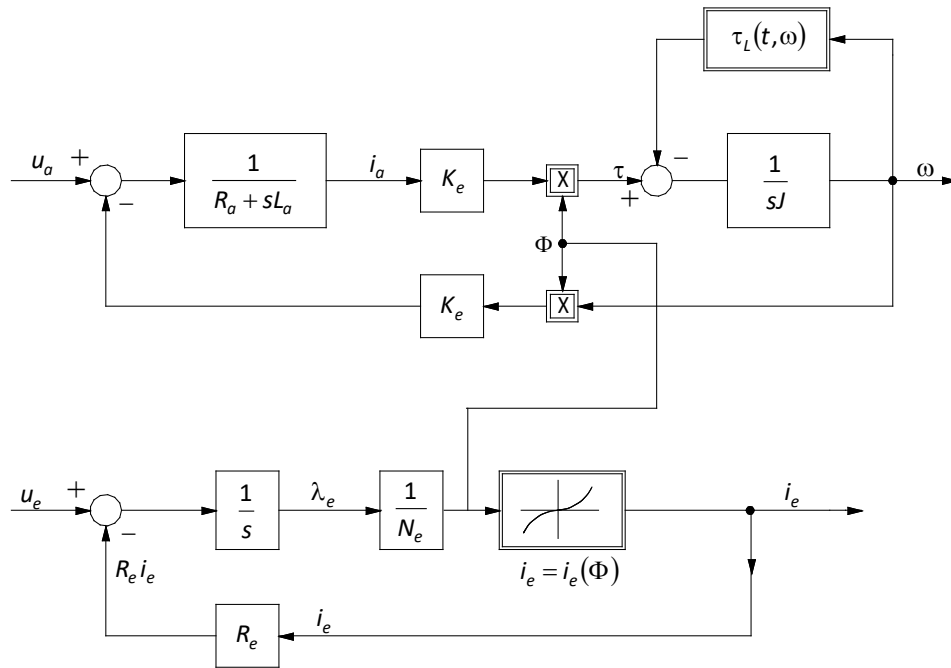


Fig.D.1.10 - Schema a blocchi nel dominio del tempo.

Nota sulla relazione tra le costanti di K_τ e K_Φ .

L'espressione (D.1.2) può essere riscritta esplicitando la posizione ϑ nel rotore all'interno della forza controelettromotrice:

$$u_a = R_a i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_e \Phi \frac{d\vartheta}{dt} \quad (D.1.4)$$

Moltiplicando ambo i membri per $i_a dt$ (in analogia allo studio dei principi della conversione elettromeccanica dell'energia) si può tracciare un bilancio energetico, ipotizzando come di consueto che il sistema sia conservativo:

$$u_a i_a dt = R_a i_a^2 dt + i_a d\lambda_a = R_a i_a^2 dt + L_a i_a di_a + K_e \Phi i_a d\vartheta \quad (D.1.5)$$

L'energia elettrica netta fornita al sistema (in dt) coincide con la somma della variazione dell'energia magnetica immagazzinata e l'energia meccanica generata (sempre in dt):

$$i_a d\lambda_a = L_a i_a di_a + K_e \Phi i_a d\vartheta = dW_m(i_a, \vartheta) + \tau d\vartheta \quad (D.1.6)$$

dove è evidente che l'energia magnetica è stata considerata espressa in funzione delle due variabili di stato i_a e ϑ , linearmente indipendenti. Sviluppando il differenziale si scrive:

$$\frac{\partial W_m(i_a, \vartheta)}{\partial i_a} di_a + \frac{\partial W_m(i_a, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta = L_a i_a di_a + (\tau - K_e \Phi i_a) d\vartheta \quad (D.1.7)$$

Si possono uguagliare i coefficienti dei termini differenziali. In particolare, per l'isotropia della struttura, si può ritenere nulla la variazione di energia magnetica al variare della posizione del rotore. Segue che:

$$\frac{\partial W_m(i_a, \vartheta)}{\partial \vartheta} = (\tau - K_e \Phi i_a) = 0 \quad (D.1.8)$$

e si trova:

$$\tau = K_e \Phi i_a \quad (D.1.9)$$

che, confrontata con la (B.1.1) porge:

$$K_\tau = K_e \quad (D.1.10)$$

Per comodità, e ricordando bene le ipotesi su cui si basa l'uguaglianza (D.1.10), in seguito si farà uso solo di K_e .

Per le interessanti comparazioni che potranno essere fatte con altre macchine elettriche, è utile tracciare anche lo schema a blocchi del motore a corrente continua alimentato a corrente impressa⁹. Esso si ottiene da quello di Fig.D.1.10 assumendo direttamente come grandezza d'ingresso la corrente di armatura piuttosto che la tensione. Se inoltre si considerano le equazioni lineari approssimate per il circuito di campo lo schema a blocchi risultante è quello di Fig.D.1.11.

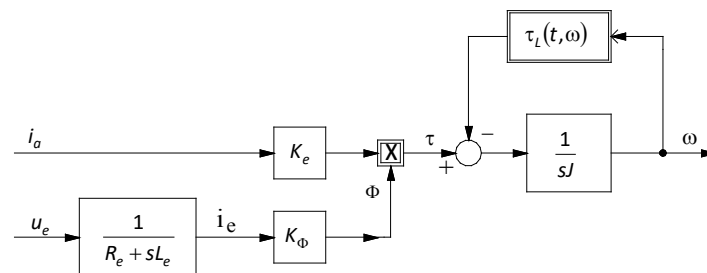


Fig.D.1.11 - Schema a blocchi per il motore c.c. a corrente impressa

Esso evidenzia come la corrente di armatura (impressa) consenta di agire direttamente sulla coppia, mentre la tensione di campo agisce sul flusso induttore attraverso la costante di tempo del circuito di eccitazione.

Limiti e regioni di funzionamento del motore c.c. ad eccitazione indipendente

Le tensione e le correnti che possono essere applicate ad un motore in corrente continua devono rimanere entro specificati limiti, che rappresentano i loro valori nominali o di targa, oltre i quali gli avvolgimenti del motore risulterebbero eccessivamente sollecitati per un corretto e prolungato funzionamento.

Per determinare i limiti e le regioni di funzionamento del motore a corrente continua ad eccitazione indipendente si fa riferimento al suo funzionamento a regime (stazionario). Si intende funzionamento a regime quello in cui le grandezze u , i ed ω sono costanti e pari a U , I ed Ω rispettivamente.

Ad esempio la corrente di armatura I_a dovrà avere ampiezze in valore assoluto non superiori al valore nominale I_{aN} oltre il quale le perdite Joule che si producono nel circuito indotto porterebbero la temperatura di regime di questo componente ad assumere valori inaccettabili per i materiali isolanti ivi presenti¹⁰.

⁹ Si intende dunque che la corrente di armatura non sia ottenuta semplicemente applicando una tensione di armatura, ma che essa venga invece controllata con un anello di regolazione che permette di avere una dinamica della corrente notevolmente migliore rispetto a quella legata alla variazione della tensione u_a a catena aperta, che rimane vincolata alla costante di tempo elettrica $\tau_a = L_a/R_a$.

¹⁰ Gli effetti della temperatura su di un materiale isolante solido, e quindi gli effetti sulla vita del motore, vengono in genere rappresentati con una "curva di vita" discendente, che esprime il legame tra tempo medio impiegato dal materiale per deteriorarsi e la temperatura a cui esso è mantenuto. I materiali isolanti solidi sono classificati in classi termiche di isolamento (CEI), in base alla temperatura massima di funzionamento. Ad esempio, la classe H contempla materiali in tessuto di fibra di vetro, o agglomerati di mica, impregnati con resinoidi siliconici, ed arrivano ad una temperatura di 180°C.

Solo per brevi intervalli di tempo si ammettono correnti maggiori della nominale, sfruttando l'inerzia termica del rotore: limite di corrente nel *funzionamento intermittente*. Tale limite non deve comunque superare la capacità di commutazione del sistema spazzole-collettore; il suo valore, unitamente al tempo per cui è applicabile, fanno parte dei dati di targa del motore.

Anche la tensione alle spazzole deve rimanere entro il suo valore nominale U_{aN} , che dipende dai criteri di isolamento adottati e dall'esigenza di rispettare i limiti di funzionamento del collettore.

Infine anche per il circuito di campo saranno definite la corrente nominale I_{eN} e la corrispondente tensione nominale U_{eN} . Il progettista del motore avrà evidentemente coordinato tali valori nominali in modo che al loro contemporaneo raggiungimento si produca il flusso nominale Φ_N per il quale è stato dimensionato il circuito magnetico del motore.

In sintesi i limiti di funzionamento a regime si potranno esprimere con le:

$$|I_a| \leq I_{aN}$$

$$|U_a| \leq U_{aN} \quad (1.3.1)$$

$$|\Phi| \leq \Phi_N$$

I limiti sopra esposti non sono fra loro indipendenti e producono corrispondenti limiti di coppia e di velocità.

Tutto ciò può essere studiato ed evidenziato con l'ausilio di un piano Φ - I_a , rappresentato in Fig.1.3.1, sul quale si possono facilmente tracciare i *limiti di corrente di armatura* e il *limite di flusso induttore* (di quest'ultimo è stato tracciato il solo limite positivo assumendo che il flusso assuma, come solitamente accade, solo valori positivi).

Per quanto riguarda il *limite di tensione* esso si può esprimere in funzione di I_a e Φ sfruttando le (1.1.1) e (1.1.5) scritte a regime, cioè ponendo a zero il termine derivativo, ottenendo

$$|R_a I_a + K_e \Phi \Omega| \leq U_{aN} \quad (1.3.2)$$

Essendo la caduta resistiva sempre molto inferiore alla tensione nominale del motore, essa può essere trascurata nella (1.3.2), giungendo quindi facilmente a

$$|\Phi| \leq \frac{U_{aN}}{K_e |\Omega|} \quad (1.3.3)$$

Il limite espresso dalla (1.3.3), è una retta verticale sul piano Φ - I_a , la cui ascissa è espressa dal secondo membro della (1.3.3) stessa. Si riconosce che il limite di tensione dipende dalla velocità del motore come evidenziato a tratteggio in Fig.1.3.1.

Esiste un valore di velocità per il quale la (1.3.3) coincide con la terza delle (1.3.1). Esso prende il nome di *velocità base* Ω_B , tale che $U_{aN} = K_e \Phi_N \Omega_B$ e quindi

$$|\Phi_N| = \frac{U_{aN}}{K_e |\Omega_B|} \quad (1.3.4)$$

Per velocità inferiori alla velocità base, come Ω_1 di Fig.1.3.1, il limite di flusso legato alla tensione eccede il valore nominale del flusso. Ciò significa che - dovendo rispettare il limite di flusso nominale - la tensione non raggiunge il suo valore nominale. Per velocità invece superiori alla velocità base, come Ω_2 in figura, il limite di flusso indotto dal limite di tensione è più severo (inferiore al flusso nominale) e dovrà essere osservato riducendo opportunamente il valore di flusso nel motore.

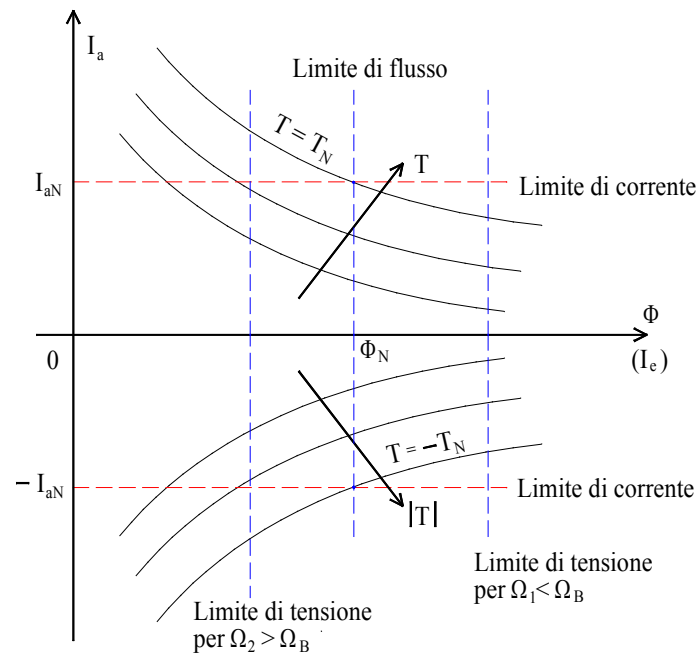


Fig.1.3.1 - Limiti di tensione e di corrente d'armatura e di flusso induttore

Per individuare quale flusso induttore convenga produrre nel motore, fra i valori ammessi dai limiti appena discussi, è opportuno tracciare sul piano Φ - I_a anche le curve a coppia costante che, per la (1.1.4) valida ovviamente anche a regime, sono delle iperboli, come mostra ancora la Fig.1.3.1.

Data una certa corrente di armatura, si riconosce che il motore produce la massima coppia possibile quando si impone il massimo flusso induttore ammesso. La conseguenza di tale deduzione è che per velocità inferiori alla velocità base la macchina lavorerà a flusso costante e pari al suo flusso nominale rendendo disponibile sempre la coppia nominale, che si ottiene con corrente di armatura nominale. La regione di funzionamento con velocità inferiori alla velocità base prende per questo il nome di regione a coppia (disponibile) costante o a flusso costante. Essa è rappresentata sul piano Ω - T da un rettangolo centrato attorno all'origine degli assi, entro il quale cade il punto di funzionamento come mostra la Fig.1.3.2.

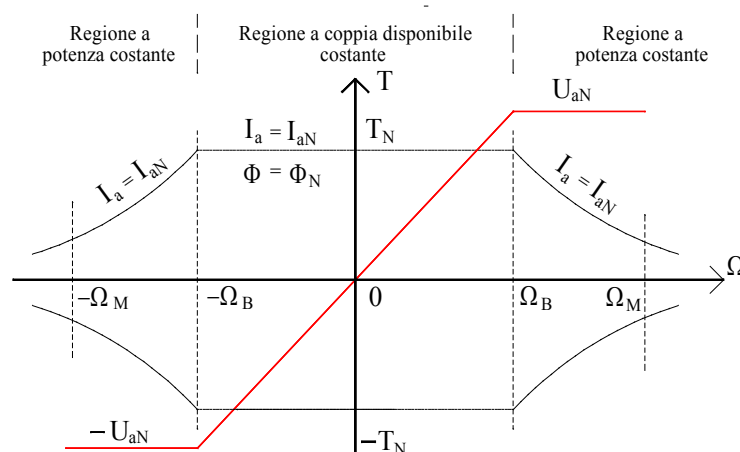


Fig.1.3.2 - Regioni di funzionamento del motore c.c.

Per velocità (in valore assoluto) superiori alla velocità base il motore lavorerà invece con il più alto valore di flusso ammesso dalla (1.3.3) e quindi con un flusso inversamente proporzionale alla velocità e tale da produrre a tutte le velocità una tensione ai morsetti della macchina costante e pari al valore nominale. La coppia disponibile, ottenibile sempre con corrente nominale, è in questo caso decrescente con la velocità come il flusso.

Data l'ipotesi di assenza di perdite sugli avvolgimenti, la potenza meccanica disponibile, data dal prodotto della coppia disponibile per la velocità, è costante e pari alla potenza elettrica disponibile $I_{aN}U_{aN}$, come è immediato verificare.

La regione di funzionamento con velocità superiori alla velocità base prende per questo il nome di regione a *potenza (disponibile) costante*, o *deflussaggio*. Essa si estende teoricamente fino a velocità infinita, ma in pratica sarà impiegabile fino ad una certa velocità massima, compatibile con gli sforzi centrifughi che il rotore riesce a sopportare e con la capacità del sistema spazzole-collettore di commutare la corrente; normalmente si ha $\Omega_M = (2\div 6) \Omega_B$. Con riferimento a quest'ultimo aspetto può rendersi necessario ridurre al di sotto della corrente nominale il limite di corrente per le velocità più elevate.

Convertitori statici

CC - CA

prof. M.Zigliotto

Sommario

I CONVERTITORI STATICI CC/CA E CA/CA	3
A. <i>Convertitori c.c/c.a. monofasi, funzionamento a onda quadra. 3</i>	
A.1 Esercizio 1.....	5
B. <i>L'invertitore di tensione trifase. 5</i>	
B.1 Principio di funzionamento	6
B.2 Tensioni d'uscita di un invertitore funzionante in onda quadra.....	7
B.3 Variazione dell'ampiezza delle tensioni di uscita in un invertitore in onda quadra.....	11
C. <i>Tecniche di modulazione a sottooscillazione 12</i>	
C.1 La sottooscillazione sinusoidale.....	13
C.2 Sottooscillazione sinusoidale con sovramodulazione.....	18
C.3 Distorsione della funzione modulante.....	19
C.4 La tecnica della modulazione uniforme.	20
VETTORI SPAZIALI E TECNICHE DI MODULAZIONE VETTORIALI PER INVERTER TRIFASE	21
INTRODUZIONE.	21
A. <i>Definizione di vettore spaziale. 21</i>	
A.1 Bilanci energetici.	22
A.2 La componente omopolare.	22
A.3 Il vettore spaziale in \mathbb{R}^2	22
A.3.1 Terne di grandezze non bilanciate.....	24
B. <i>Sistema di riferimento rotante 24</i>	
C. <i>Esempi applicativi 26</i>	
C.1 Terna simmetrica di tensioni sinusoidali.....	26
C.1.1 Confronto con la rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali.	27
C.2 Terna simmetrica di tensioni ad onda quadra.....	28
C.3 Circuito RLE trifase	28
C.4 Terna dissimmetrica bilanciata di tensioni sinusoidali.....	32
D. <i>Tecniche di modulazione vettoriale nella conversione cc-ca. 33</i>	
D.1 La modulazione vettoriale.....	34
D.1.1 La modulazione vettoriale simmetrica.	38
APPENDICE: DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA (D.1.8) E (D.1.9).	41

I convertitori statici cc/ca e ca/ca

Convertitori c.c/c.a. monofasi, funzionamento a onda quadra.

Si chiamano convertitori c.c.c.a. o invertitori (inverter) i dispositivi atti a effettuare la conversione da una tensione continua d'ingresso a una tensione alternata di uscita che, nel caso più generale, deve essere regolata sia in ampiezza che in frequenza. Per illustrare il principio di funzionamento si consideri lo schema di inverter a ponte (full-bridge inverter) di Fig.A.1.

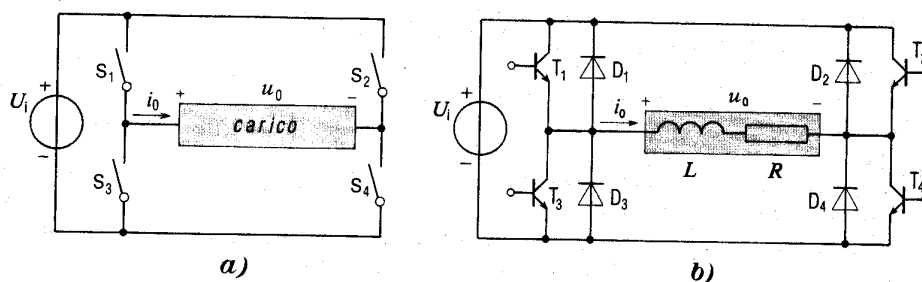


Fig.A.1 – Inverter a ponte monofase, schema di principio.

La Fig.A.1 a) mostra lo schema di principio dell'inverter monofase a ponte, realizzato con quattro interruttori ideali. La Fig.A.1 b) riguarda invece una realizzazione a transistori. Si osservi che in antiparallelo al transistore sono disposti dei diodi che, anche qui come nei convertitori c.c/c.c. , hanno la funzione di fornire una via di richiusura alla corrente di carico quando gli interruttori sono aperti. Le forme d'onda di tensione e corrente erogate al carico sono mostrate in Fig.A.2.

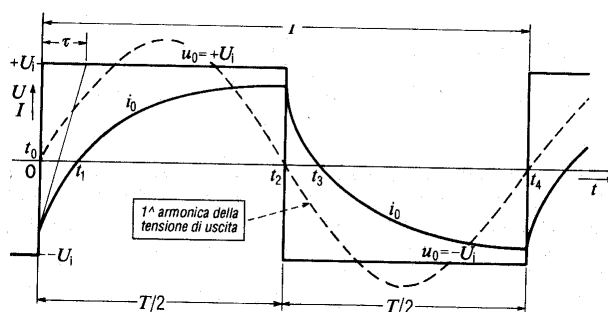


Fig.A.2 – Tensione e corrente in un inverter a ponte monofase.

Quando sono chiusi gli interruttori S_1 ed S_4 (S_2 ed S_3 aperti), la tensione u_o del carico coincide con la tensione continua d'ingresso applicata con polarità positiva ($+U_i$). Quando invece sono chiusi S_2 ed S_3 (S_1 ed S_4 aperti) la tensione del carico vale $-U_i$. Gli interruttori S_1 ed S_3 non possono essere chiusi simultaneamente, dato che ciò provocherebbe un cortocircuito del generatore di alimentazione. Lo stesso vale per S_2 ed S_4 . Peraltro vi debbono essere sempre almeno due interruttori chiusi, uno per ogni ramo del ponte, per fornire una via di circolazione alla corrente di carico. Tenendo chiusi per mezzo periodo (intervallo t_0 - t_2 gli interruttori S_1 ed S_4 e per l'altro mezzo periodo (intervallo t_2 - t_4) gli interruttori S_2 ed S_3 si ottiene una tensione di carico u_o alternata, con la forma d'onda rettangolare indicata in Fig.A.2. Nell'ipotesi, sempre verificata con buona approssimazione, che il carico sia ohmico-induttivo, la corrente di carico i_o assume allora il tipico andamento mostrato in figura, costituito da tratti di andamento esponenziale crescente (t_0 - t_2) e tratti di andamento esponenziale decrescente (t_2 - t_4). Le stesse forme d'onda e relazioni valgono anche, naturalmente, nel caso dell'inverter a transistori di Fig.A.1 b). Si deve però notare che i transistori, contrariamente agli interruttori ideali di Fig.A.1 a), possono condurre corrente in un solo verso. È quindi necessario connettere, in antiparallelo ai transistori, dei diodi che consentano il passaggio della corrente anche nel verso opposto (free-wheeling diodes). In particolare, nel semiperiodo t_0 - t_2 , in cui al carico viene

applicata una tensione positiva, la coppia T_1, T_4 può solo condurre nel tratto t_1-t_2 , nel quale la corrente è positiva e fluisce nel verso consentito dai transistori. Nel tratto t_0-t_1 in cui è richiesta una tensione positiva, ma la corrente è negativa, conducono invece i diodi D_1 e D_4 . In maniera analoga, nel semiperiodo successivo, i diodi D_2, D_3 conducono nell'intervallo t_2-t_3 , mentre i transistori T_2, T_3 conducono in t_3-t_4 . Il funzionamento degli inverter secondo la tecnica illustrata prende nome di funzionamento a onda quadra, a causa della forma d'onda rettangolare di tensione applicata al carico. La regolazione della frequenza si ottiene semplicemente variando la durata degli intervalli di conduzione degli interruptori. È infatti evidente che la tensione u_o applicata al carico ha una frequenza $f=1/T$, ove T è il periodo di ripetizione della forma d'onda rettangolare. L'ampiezza potrebbe essere regolata invece agendo sul duty cycle. Lo sviluppo in serie di Fourier indica che la forma d'onda periodica di Fig.A.2 è composta in una somma di sinusoidi di diverse ampiezze, fase e frequenza. La componente fondamentale di questo sviluppo armonico vale

$$U_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \quad (\text{A.1})$$

Con semplici passaggi si trova:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T U_i(t) \cos(\omega t) dt = \frac{2U_i}{\pi} \sin(\omega \delta T) \\ b_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T U_i(t) \sin(\omega t) dt = \frac{2U_i}{\pi} [1 - \cos(\omega \delta T)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

che sostituiti nella (A.1) ed utilizzando le formule trigonometriche di prostaferesi danno:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{2U_i}{\pi} [\sin(\omega \delta T) \cos(\omega t) + \sin(\omega t) (1 - \cos(\omega \delta T))] \\ &= \frac{2U_i}{\pi} [\sin(\omega t) - \sin(\omega t - \omega \delta T)] = \frac{4U_i}{\pi} \cos \frac{\omega t + \omega t - \omega \delta T}{2} \sin \frac{\omega t - \omega t + \omega \delta T}{2} = \\ &= \frac{4U_i}{\pi} \sin \left(\frac{\omega \delta T}{2} \right) \cos \left(\omega t - \frac{\omega \delta T}{2} \right) = |U_1| \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

dove si sono posti naturalmente

$$|U_1| = \frac{4U_i}{\pi} \sin \left(\frac{\omega \delta T}{2} \right) \quad \varphi = \frac{\omega \delta T}{2} \quad (\text{A.4})$$

La (A.4) può essere particolarizzata nel semplice caso di $\delta=0.5$ (l'unico di interesse pratico, perché non si ha generazione di componente continua):

$$U_1 = \frac{4U_i}{\pi} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4U_i}{\pi} \sin(\omega t) \quad (\text{A.6})$$

Questo modo di funzionamento ($\delta=0.5$) ha due grossi difetti, che possono essere evidenziati esprimendo il valore efficace delle armoniche superiori U_n , a frequenza $n f$:

$$U_n = \frac{U_1}{n} \quad (\text{A.7})$$

Si nota allora che, assegnata la tensione continua di alimentazione U_i nessuna regolazione è possibile per la tensione fondamentale di uscita U_1 . Ciò è intollerabile in molte applicazioni che richiedono invece la capacità di controllare la tensione applicata al carico. Un secondo difetto del funzionamento in onda quadra risiede nella quantità di armoniche che sono sovrapposte alla fondamentale. Si ha infatti che l'inverter produce una componente armonica di tensione a frequenza $3f$ di ampiezza $U_1/3$, una componente a frequenza $5f$ di ampiezza $U_1/5$ e così via. Ciò è intollerabile in tutte le applicazioni

in cui il carico deve essere alimentato con forme d'onda approssimativamente sinusoidali, ben diverse da quelle mostrate in Fig.A.2.

Esercizio 1.

Si consideri il circuito di Fig.A1 b), nel quale siano $R=10\Omega$ e $L=50\text{mH}$. La tensione di ingresso sia $U_i=300\text{V}$, 60 Hz. Si determinino la corrente di picco nel carico, l'istante di attraversamento dello zero della corrente, le correnti medie sui diodi e sui transistor.

Svolgimento. A regime le forme d'onda sono quelle di Fig.A.2. L'equazione di bilancio delle tensioni è la seguente:

$$U_i = Ri + L \frac{di}{dt}$$

dove U_i vale $+300\text{V}$ nel tratto $0-T/2$ e -300V nel tratto $T/2-T$, dove $T=1/60$ [s]. La soluzione dell'equazione differenziale porta a scrivere, per il tratto di corrente crescente¹

$$i(t) = -\left(I_o + \frac{U_i}{R}\right)e^{-t/\tau} + \frac{U_i}{R}$$

dove si è posta $-I_o = i(0)$ e $\tau = L/R = 5$ ms. La tensione ha valore medio nullo. Pertanto anche la corrente deve avere valore medio nullo, per non avere una tensione media diversa da zero sulla parte induttiva del carico. La simmetria della forma d'onda di corrente indica che all'istante $t=T/2$ la corrente deve valere I_o :

$$-\left(I_o + \frac{U_i}{R}\right)e^{-T/2\tau} + \frac{U_i}{R} = I_o \Rightarrow I_o = \frac{U_i}{R} \left(\frac{1 - e^{-T/2\tau}}{1 + e^{-T/2\tau}} \right) = 20.47 \text{ A}$$

L'istante t_1 di attraversamento dello zero si calcola semplicemente ponendo $i(t_1)=0$; si trova

$$t_1 = -\tau \ln \left(\frac{\frac{U_i}{R}}{I_o + \frac{U_i}{R}} \right) = -5 \cdot 10^{-3} \ln \left(\frac{30}{20.47 + 30} \right) = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

La corrente scorre nei diodi D_1 e D_4 solo nel tratto $0-t_1$. La corrente media si calcola allora come:

$$I_D = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} \left[-\left(I_o + \frac{U_i}{R}\right)e^{-t/\tau} + \frac{U_i}{R} \right] dt = \left(I_o + \frac{U_i}{R}\right) \frac{\tau}{T} (e^{-t_1/\tau} - 1) + \frac{U_i}{TR} (t_1) = 1.46 \text{ A}$$

La corrente scorre sui transistor T_1 , T_4 nel tratto tra t_1 e $T/2$. Il suo valore medio è pertanto

$$I_T = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{T/2} \left[-\left(I_o + \frac{U_i}{R}\right)e^{-t/\tau} + \frac{U_i}{R} \right] dt = \left(I_o + \frac{U_i}{R}\right) \frac{\tau}{T} (e^{-T/2\tau} - e^{-t_1/\tau}) + \frac{U_i}{TR} (T/2 - t_1) = 4.18 \text{ A}$$

L'invertitore di tensione trifase.

I principali motori in alternata utilizzati negli azionamenti elettrici sono i motori asincroni e i sincroni a magneti permanente; entrambi saranno oggetto di estesi approfondimenti nei prossimi capitoli. Qui basti ricordare che i motori sincroni, a regime, ruotano ad una velocità meccanica che è in rapporto fisso con la pulsazione della tensione di alimentazione; i motori asincroni, sempre a regime, hanno *velocità di scorrimento* solitamente del $2 \div 5$ % e dunque la loro velocità meccanica risulta ancora strettamente legata alla pulsazione delle grandezze elettriche.

I più semplici azionamenti a velocità variabile (*variable speed drives*), solitamente basati su motori asincroni, controllano la velocità del motore variando la frequenza delle tensioni di alimentazione, aggiustandone nel contempo l'ampiezza al fine di mantenere costante il flusso al traferro del motore, per sfruttarne i percorsi magnetici sempre in modo ottimale.

¹ $i(t)_{t=0} = (i_o(t) + i_p(t))_{t=0} = \left(A e^{-t/\tau} + \frac{U_i}{R} \right)_{t=0} \stackrel{!}{=} -I_o \Rightarrow A = -I_o - \frac{U_i}{R}$

Gli azionamenti in alternata ad alte prestazioni (*ac servodrives*), invece, mirano al controllo della coppia prodotta dalla macchina attraverso un opportuno controllo a catena chiusa delle correnti di statore. Indipendentemente dallo schema di controllo adottato, i regolatori di corrente producono in uscita comandi (o *riferimenti*) per le tensioni di statore, in grado di forzare le relative correnti a seguire gli andamenti voluti.

Questi brevi cenni portano ad una considerazione più generale, e cioè che nei moderni azionamenti elettrici per motori in alternata la disponibilità di una sorgente di alimentazione a tensione e frequenza variabile sia un'esigenza imprescindibile. L'obiettivo del presente paragrafo è quello di fornire una sintetica descrizione del più utilizzato generatore trifase di tensione ad ampiezza e frequenza regolabili, noto generalmente come invertitore di tensione (*three-phase voltage source inverter*).

Principio di funzionamento

Lo schema di principio di un invertitore di tensione trifase che alimenta un motore in alternata M è riportato in Fig.B.1.1.

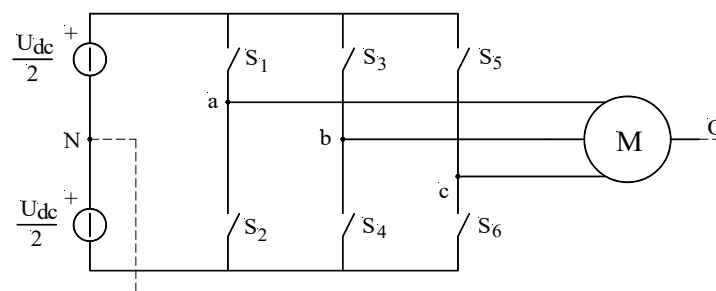


Fig.B.1.1 - Rappresentazione schematica di un invertitore di tensione trifase

L'ingresso all'inverter è una sorgente di tensione continua (*dc link*), solitamente ottenuta dalla rete di alimentazione (monofase o trifase, a seconda della potenza richiesta) tramite un raddrizzatore ed un condensatore di livellamento di appropriata capacità, atto a mantenere pressoché costante la tensione continua U_{dc} ai suoi capi. In Fig.B.1.1, tale tensione (*bus voltage*) è stata rappresentata per comodità espositiva con due generatori uguali connessi in serie nel punto N .

L'inverter è essenzialmente costituito da sei interruttori elettronici di potenza (S_1 - S_6 , *power switches*) connessi per formare tre rami (*inverter legs or poles*), uno per ogni fase del motore M . Anche se non rappresentati in Fig.B.1.1, in realtà vi sono anche sei diodi connessi in antiparallelo a ciascun interruttore di potenza, necessari data la natura solitamente induttiva del carico per fornire una via di richiusura delle correnti e consentire un ritorno dell'energia reattiva dal motore verso il bus di alimentazione.

Comandando la chiusura dell'interruttore superiore di un ramo si connette la fase del motore al positivo dell'alimentazione (*positive dc rail*); naturalmente, per evitare distruttivi cortocircuiti del bus in continua (*shoot-through faults*), la coppia di interruttori dello stesso ramo deve essere sempre comandata alternativamente, in modo che mai entrambi gli interruttori risultino abilitati a condurre.

Ne risultano otto possibili combinazioni o stati attivi (*inverter active states*), che possono essere rappresentati con una parola binaria a tre bit, uno per fase, adottando la convenzione di indicare con "1" la chiusura dell'interruttore superiore di un ramo e con "0" quella dell'interruttore inferiore. Ad esempio, lo stato 100 corrisponde a chiudere lo switch superiore della fase "a", e quelli inferiori delle fasi "b" e "c".

I tempi con cui gli interruttori di potenza (IGBT, Mosfet, GTO, MCT) reagiscono ai comandi di apertura e chiusura non sono mai perfettamente uguali; per essere certi di comandare la chiusura di un interruttore quando l'altro (dello stesso ramo) abbia effettivamente cessato di condurre si frappone tra i comandi ai due switch un tempo di pausa (tempo morto o *dead time*). Questo ritardo nella conduzione di uno degli interruttori provoca una distorsione nelle tensioni di uscita rispetto ai segnali di

riferimento e risulta opportuno, specialmente negli azionamenti più sofisticati, implementare opportuni algoritmi di compensazione.

Tensioni d'uscita di un invertitore funzionante in onda quadra

Il funzionamento in onda quadra (*six-step mode*) consiste nel comandare i tre interruttori superiori S_1, S_3, S_5 dell'inverter (Fig.B.1.1) con una terna di riferimenti ad onda quadra sfasati reciprocamente di $2\pi/3$. Le tensioni u_{aN}, u_{bN}, u_{cN} prodotte tra i morsetti a, b, c dell'invertitore e il punto di mezzo N dell'alimentazione U_{dc} in continua hanno l'andamento di Fig.B.2.1.

Ciascuna forma d'onda, prolungata per periodicità, può essere espressa in serie di Fourier. Si consideri ad esempio u_{aN} : trattandosi di una funzione dispari, i coefficienti relativi ai termini in coseno sono tutti nulli; dato poi che è soddisfatta la condizione $u_{aN}(\vartheta) = -u_{aN}(\vartheta + \pi)$, sono nulli anche tutti i coefficienti pari dei termini in seno².

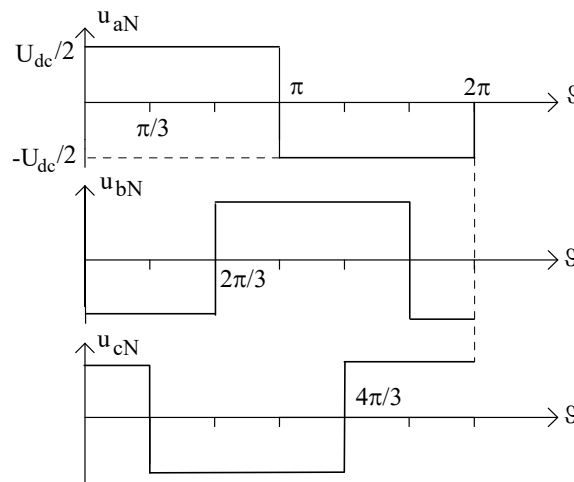


Fig.B.2.1 - Funzionamento in onda quadra

Le equazioni delle altre due tensioni si ottengono dalla prima semplicemente traslandola di $2\pi/3$ e $4\pi/3$:

$$\begin{aligned}
 u_{aN}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[\sin(\vartheta) + \frac{1}{3} \sin(3\vartheta) + \frac{1}{5} \sin(5\vartheta) + \frac{1}{7} \sin(7\vartheta) + \dots \right] \\
 u_{bN}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin(3\vartheta) + \frac{1}{5} \sin\left(5\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \sin\left(7\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \right] \\
 u_{cN}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[\sin\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin(3\vartheta) + \frac{1}{5} \sin\left(5\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \sin\left(7\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{B.2.1}$$

con $\vartheta = \omega t$ e $\omega = 2\pi/T$, dove T è il periodo dell'onda quadra.

Le (B.2.1) indicano che la *componente fondamentale* (a pulsazione ω) ha ampiezza $U_{aN,1}$ pari a

$$U_{aN,1} = \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \approx 0.6366 U_{dc} \tag{B.2.2}$$

² Il coefficiente del termine in seno di ordine n risulta infatti (ponendo $\xi = \vartheta - \pi$):

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{aN}(\vartheta) \sin(n\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_{aN}(\vartheta) \sin(n\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_{aN}(\xi + \pi) \sin(n(\xi + \pi)) d\xi = \dots - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_{aN}(\xi) \sin(n\xi + n\pi) d\xi$$

ed è chiaramente nullo per tutti gli n pari.

e sono presenti tutte le sue armoniche di ordine dispari.

In un inverter convenzionale, la tensione del bus in continua viene prodotta da un ponte raddrizzatore trifase, con un condensatore elettrolitico di livellamento in uscita. La tensione continua U_{dc} che si ottiene dipende se si considera il valore medio o di picco del raddrizzamento, oltre che naturalmente dalla tensione trifase concatenata efficace d'ingresso (400V o 240V). Nel primo caso, con 400V, si ha

$$U_{dc} = 2U_M \frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = 1.35U_{conc,eff} = 540.2 V \quad (B.2.3)$$

dove q è il numero di fasi, mentre considerando il raddrizzamento di picco risulta $U_{dc} = \sqrt{2} U_{eff,conc} = 565.7 V$. L'ampiezza della generica armonica $U_{aN,n}$ è data dalla

$$U_{aN,n} = \frac{4}{n\pi} \frac{U_{dc}}{2} = \frac{U_{aN,1}}{n} \quad (B.2.4)$$

e risulta n volte minore della fondamentale (Fig.B.2.2). Le (B.2.1) consentono inoltre di affermare che la componente fondamentale e le armoniche di ordine $n=6m+1$ ($m=0,1,2,3..$) formano terne *dirette*, quelle di ordine $n=6m+3$ formano terne *omopolari* e le armoniche di ordine $n=6m+5$ formano terne *inverse*.

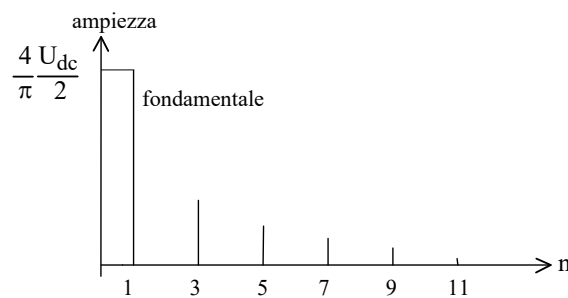


Fig.B.2.2 - Spettro della tensione di fase di un inverter ad onda quadra

Le *tensioni concatenate* (*phase-to-phase voltages*) u_{ab} , u_{bc} e u_{ca} prodotte dall'inverter si ottengono per differenza a due a due delle tensioni di fase:

$$\begin{aligned} u_{ab}(\vartheta) &= \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{5} \sin\left[5\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)\right] - \frac{1}{7} \sin\left[7\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)\right] + \dots \right] \\ u_{bc}(\vartheta) &= \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left\{ \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \sin\left[5\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] - \frac{1}{7} \sin\left[7\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{2\pi}{3}\right] + \dots \right\} \\ u_{ca}(\vartheta) &= \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left\{ \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \sin\left[5\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{4\pi}{3}\right] - \frac{1}{7} \sin\left[7\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{4\pi}{3}\right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (B.2.5)$$

Le (B.2.5) contengono pertanto la componente fondamentale e le armoniche di ordine dispari non multiple di 3 (quindi sono prive di componente omopolare) e la loro ampiezza è $\sqrt{3}$ volte quella delle armoniche dello stesso ordine nelle (B.2.1). La Fig.B.2.3 riporta l'andamento delle tensioni concatenate nel funzionamento ad onda quadra:

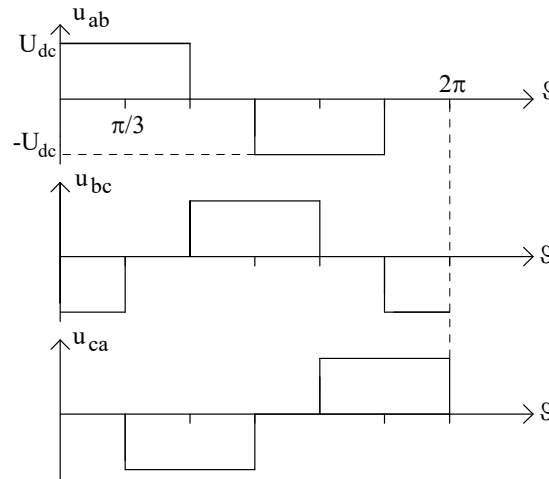


Fig.B.2.3 - Tensioni concatenate nel funzionamento in onda quadra

Se il centro stella del motore O è accessibile e viene collegato con il punto medio N dell'alimentazione in continua (tratteggio in Fig.B.1.1) le *tensioni di fase (phase voltages)* del motore coincidono con le (B.2.1). Molto spesso, comunque, il centro stella del motore non è disponibile e la terna di correnti che interessa il carico ha necessariamente somma nulla. Con questa ipotesi, se ai morsetti dell'invertitore è collegato un carico a stella equilibrato, tale per cui si possa scrivere

$$u_{aO}(t) + u_{bO}(t) + u_{cO}(t) = 0, \quad \forall t \quad (\text{B.2.6})$$

tra il centro stella O ed N appare una tensione (componente omopolare) che vale

$$u_{ON} = \frac{u_{aN} + u_{bN} + u_{cN}}{3} \quad (\text{B.2.7})$$

Sostituendo le (B.2.1) nella (B.2.7) si ricava

$$u_{ON}(\vartheta) = \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[\frac{1}{3} \text{sen}(3\vartheta) + \frac{1}{9} \text{sen}(9\vartheta) + \dots \right] \quad (\text{B.2.8})$$

che indica come la tensione u_{ON} sia costituita da tutte e sole le armoniche multiple di tre presenti nella tensione di fase. Le tensioni stellate del carico si ottengono finalmente sottraendo u_{ON} alle (B.2.1) e nell'ipotesi (B.2.6) risultano pertanto prive della terza armonica e di tutte le sue multiple:

$$\begin{aligned} u_{a0}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[\text{sen}(\vartheta) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\vartheta) + \frac{1}{7} \text{sen}(7\vartheta) + \dots \right] \\ u_{b0}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[\text{sen}\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(5\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \text{sen}\left(7\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \right] \\ u_{c0}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[\text{sen}\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(5\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \text{sen}\left(7\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

Il loro andamento è riportato in Fig.B.2.5. Anche queste tensioni sono formate dalla componente fondamentale e dalle armoniche di ordine dispari purché non multiple di tre (sono prive della componente omopolare). Però la loro ampiezza è la stessa di quella delle relative armoniche delle (B.2.1).

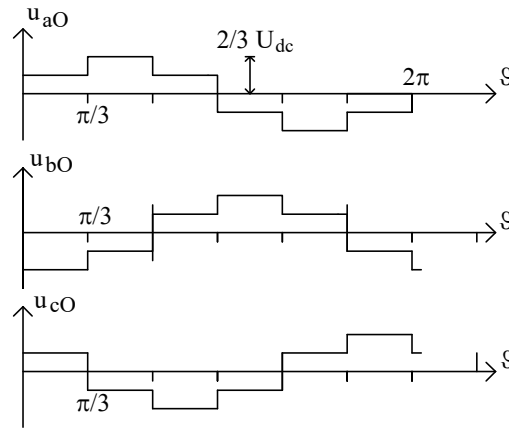


Fig.B.2.5 - Tensioni stellate su carico equilibrato senza filo neutro

Un ultimo aspetto legato alla modulazione in onda quadra è relativo al valore efficace delle tensioni prodotte, che può essere ricavato in modo particolarmente semplice sfruttando la definizione e le proprietà dei vettori spaziali. Ricordando la definizione di valore efficace di una grandezza periodica³, si può scrivere:

$$3U_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_a^2(\vartheta) + u_b^2(\vartheta) + u_c^2(\vartheta)) d\vartheta \quad (B.2.10)$$

u_a, u_b, u_c sono le tensioni di fase (stellate) sul carico (avendo tralasciato per semplicità l'altro pedice O) e U_{eff} è il valore efficace della tensione di fase. È possibile dimostrare⁴, tramite sostituzione diretta, che se il sistema di tensioni è simmetrico, ovvero privo di componente omopolare, vale l'espressione:

$$u_a^2(\vartheta) + u_b^2(\vartheta) + u_c^2(\vartheta) = \frac{3}{2} |u(\vartheta)|^2 \quad (B.2.11)$$

dove $u(\vartheta)$ è il vettore spaziale associato alla terna di tensioni trifase u_a, u_b, u_c . Sostituendo la (B.2.11) nella (B.2.10) si ottiene allora:

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(\vartheta)|^2 d\vartheta} \quad (B.2.12)$$

³ Il valore efficace di una grandezza periodica è la radice quadrata della media integrale dei quadrati della grandezza in un periodo.

⁴ Basta osservare che

$$|u(\vartheta)|^2 = u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 = \frac{4}{9} \left[(u_a - u_b/2 - u_c/2)^2 + (\sqrt{3}/2 u_b - \sqrt{3}/2 u_c)^2 \right] = \frac{4}{9} [u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 - u_a u_b - u_b u_c - u_c u_a]$$

L'uguaglianza da dimostrare è dunque

$$u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} [u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 - u_a u_b - u_b u_c - u_c u_a] \Rightarrow u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 = \frac{2}{3} [u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 - u_a u_b - u_b u_c - u_c u_a]$$

che equivale a dimostrare che

$$u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 = -2[u_a u_b + u_b u_c + u_c u_a]$$

che è sicuramente vero per definizione di quadrato di un trinomio se e solo se $u_a + u_b + u_c = 0$, che è l'ipotesi iniziale di assenza di componente omopolare.

che ha validità generale. Nel caso specifico di funzionamento in onda quadra, l'ampiezza del vettore spaziale è pari a $2/3 U_{dc}$ ed il valore efficace risulta semplicemente⁵ $U_{eff} = \sqrt{2/3} U_{dc}$.

Variazione dell'ampiezza delle tensioni di uscita in un invertitore in onda quadra

Un invertitore funzionante in onda quadra presenta lo svantaggio di richiedere uno stadio di alimentazione in grado di fornire una tensione continua controllata: o un raddrizzatore controllato o un ponte a diodi seguito da un chopper e non un semplice ponte a diodi. Come mostra la (B.2.2), solo in questo modo si può variare la tensione che l'invertitore applica al motore nel funzionamento in onda quadra.

Una soluzione alternativa rudimentale per variare l'ampiezza della fondamentale U_1 , pur mantenendo costante la tensione U_{dc} , consiste nell'invertire ripetutamente i comandi di tensione all'invertitore nell'ambito di ogni loro semiperiodo, con modalità simile a quella che si impiega nei convertitori continua/continua (chopper). Ad esempio, l'andamento delle tensioni u_{aN} e u_{bN} e della corrispondente tensione concatenata u_{ab} risultano quelli riportati in Fig.B.3.1.

Si riconosce che variando la durata degli intervalli di inversione da zero al valore Δ definito in Fig.B.3.1 si può variare il valor medio di una semionda della tensione concatenata come pure l'ampiezza della sua componente fondamentale dal valore espresso dalla (B.2.2) fino a zero.

La tecnica appena illustrata non produce tuttavia alcun miglioramento del contenuto armonico⁶. Infatti il calcolo diretto dei coefficienti della serie di Fourier evidenzia che il contenuto armonico a bassa frequenza della tensione così conformata ha la stessa composizione di quello dell'onda quadra.

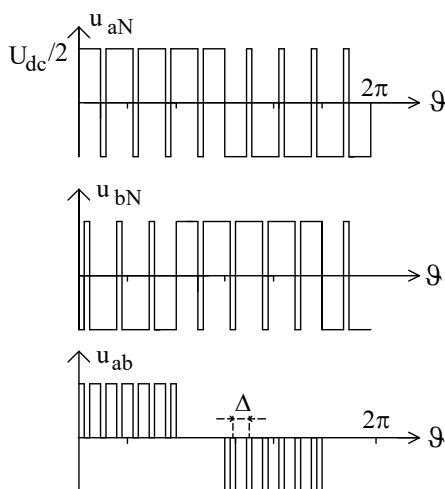


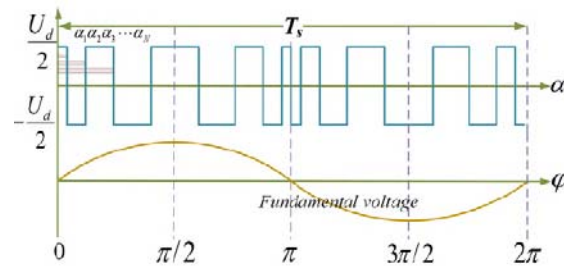
Fig.B.3.1 - Modulazione con impulsi equispaziati nel funzionamento in onda quadra

⁵ Dunque con $U_{dc}=540V$ si trova $U_{eff}=254.6 V$.

⁶ Le inversioni di tensione possono essere decise in modo da eliminare le armoniche a frequenza più bassa. Queste strategie di controllo vengono solitamente definiti “*metodi di ottimo*”.

Selective harmonic elimination (SHEPWM).

Consiste nella scelta di opportuni angoli di commutazione ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$) con l'obiettivo di eliminare alcune particolari armoniche.



In generale per la fase a si può scrivere:

$$u_{AO} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad b_k = -\frac{2u_{dc}}{k\pi} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N (-1)^i \cos k\alpha_i \right]$$

dove $a_k=0$ e k è un numero dispari. N rappresenta il numero di angoli di commutazione in un quarto del periodo della fondamentale. Si possono scrivere N equazioni, imponendo che b_1 sia pari al valore desiderato per la fondamentale e che $b_2, \dots, b_N = 0$, trovando il set di angoli corrispondente. Ad esempio, ponendo $N=3$ e volendo una fondamentale di ampiezza M si può scrivere il sistema:

$$\begin{cases} -1 + 2 \cos \alpha_1 - 2 \cos \alpha_2 + 2 \cos \alpha_3 = M \\ -1 + 2 \cos 5\alpha_1 - 2 \cos 5\alpha_2 + 2 \cos 5\alpha_3 = 0 \\ -1 + 2 \cos 7\alpha_1 - 2 \cos 7\alpha_2 + 2 \cos 7\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni si possono risolvere offline, ad esempio attraverso la funzione *fsolve* di Matlab, mantenendo M come parametro, in modo che esso possa essere adeguato online.

La letteratura scientifica specializzata suggerisce anche gli angoli con i quali inizializzare il solutore numerico:

$$\begin{cases} \alpha_i = 60^\circ \cdot i/N (i = 2, 4, 6 \dots, i \leq N) \\ \alpha_i = 60^\circ \cdot (i-1)/N (i = 1, 3, 5 \dots, i \leq N) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_{i+1} = 60^\circ \cdot (i+1)/(N+1) \\ \alpha_N = 60^\circ \end{cases}$$

(N pari) (N dispari).

Tecniche di modulazione a sottooscillazione

La soluzione al problema della regolazione dell'ampiezza della tensione in uscita dell'invertitore, assieme ad un miglioramento del contenuto armonico a bassa frequenza, si ottengono distribuendo in modo appropriato le inversioni di tensione di fase dell'invertitore all'interno di ciascun semiperiodo, ovvero modulando opportunamente la durata di ciascun impulso. Questa tecnica di controllo della tensione di uscita dell'invertitore è comunemente nota come modulazione della larghezza degli impulsi o PWM (*pulse width modulation*).

Brevi cenni storici

Pulse Width Modulation (PWM) technology enabled elimination of harmonics from the inverter output voltage, allowing quasi-sinusoidal machine waveforms and eliminating torque pulsations. The subharmonic control method (presented by A. Schonung and H. Stemmler of BBC in 1964 [a]) was the simple modulation, where the switching instants are determined as the intersections between the

reference signal and triangular carrier signals having the constant frequency. This subharmonic PWM has been a standard technique thereafter. The output voltage waveform of the PWM inverter contains miscellaneous harmonics and its precious analysis was reported by K. Takahashi and S. Miyairi in 1975 [b]. In 1983, the space vector modulation was introduced by Y. Murai and Y. Tsunehiro and has been applied to the analysis of the magnetic flux and to actual implementations as well [c].

[a] A. Shonng, and H. Stemmler, "Static Frequency Changers with "Subharmonic" Control in Conjunction with Reversible Variable-Speed A.C. Drives," The Brown Boveri Review, Vol. 51, August/September, pp. 555-577, 1964.

[b] K. Takahashi and S. Miyairi, "Relation between the Output Voltage Waveform of the PWM Inverter and its Gate Control Signals," (in Japanese), IEE of Japan Trans. B, Vol.95-2, pp.25-32, 1976.

[c] Y. Murai and Y. Tunehiro, "Improved PWM Method for Induction Motor Drive Inverters," IPEC-Tokyo '83, pp. 407-417, 1983

Mediante le diverse tecniche di PWM si può fare in modo che, diversamente da quanto accade per l'onda quadra, le armoniche di ampiezza maggiore abbiano frequenza molto più alta di 3, 5, 7, ... volte la fondamentale e siano quindi soggette ad una più energica azione di filtraggio da parte della induttanza del motore. Una tensione PWM produce pertanto una corrente di fase pressoché sinusoidale, formata dalla componente fondamentale e da oscillazioni di modesta ampiezza sovrapposte ad essa.

Queste oscillazioni si possono interpretare come il risultato dello spianamento degli impulsi di tensione operato dall'induttanza di dispersione intorno alla componente fondamentale. Con l'attenuazione delle armoniche di corrente calano le perdite e le armoniche di coppia e il motore può funzionare a piena potenza e a basse velocità.

La possibilità di variare la componente fondamentale U_1 della tensione d'uscita modificando la larghezza degli impulsi, senza dover variare la tensione continua che lo alimenta, permette di alimentare l'invertitore tramite un semplice raddrizzatore a diodi. I principali vantaggi sono una semplificazione della sezione di potenza dell'azionamento, una sensibile riduzione della potenza reattiva e distorcente in rete rispetto al caso di alimentazione con raddrizzatore controllato e un minor ritardo della risposta della sezione di potenza ad un comando di tensione, con benefici sulle prestazioni dinamiche dell'azionamento; il ritardo è valutabile in metà del periodo medio degli impulsi. Per contro, il funzionamento in PWM presenta alcuni svantaggi rispetto a quello in onda quadra: le ripetute inversioni di tensione causano un aumento delle perdite di commutazione negli interruttori di potenza e il circuito di controllo dell'invertitore risulta più complesso, in quanto deve calcolare e produrre più istanti di inversione nel periodo dell'onda quadra. Tali svantaggi sono però ampiamente compensati dai vantaggi sopra elencati.

I benefici apportati dalla PWM nel funzionamento di un motore dipendono dal numero e dalla posizione delle inversioni. Per quanto riguarda il numero, appare ovvia la convenienza di sceglierlo il più alto possibile, compatibilmente con le limitazioni poste dalla massima frequenza di lavoro dei componenti di potenza e dalla capacità di calcolo del sistema di controllo dell'azionamento.

Per la scelta della posizione delle inversioni esistono diverse tecniche e numerosissime varianti. Viene di seguito dato un accenno alle tecniche a sottooscillazione, solitamente realizzate con circuiti analogici e cronologicamente antecedenti, mentre nei paragrafi successivi verranno descritte con maggior dettaglio le tecniche di modulazione digitale.

La sottooscillazione sinusoidale.

Con il metodo della sottooscillazione le inversioni della tensione di fase di un invertitore sono fatte coincidere con le intersezioni di due terne di segnali di frequenza diversa. Il segnale di frequenza minore è detto (*funzione*) *modulante* (*modulating function*), quello di frequenza maggiore *portante* (*carrier*). Lo scopo della modulazione a sottooscillazione è di ottenere una tensione che, pur variando

solo tra $+U_{dc}/2$ e $-U_{dc}/2$, abbia uno spettro alle basse frequenze⁷ identico, a parte l'ampiezza, a quello della modulante. La tecnica della sottooscillazione sinusoidale (*natural sampling*) si propone di generare una terna trifase di tensioni sinusoidali utilizzando come modulante una senoide di frequenza pari alla fondamentale. La frequenza della portante viene invece presa di valore più alto possibile, in accordo con quanto osservato in precedenza, mentre la forma d'onda è di solito un triangolo (rettangolo o isoscele). I segnali impiegati e la tensione modulata relativi ad una fase dell'invertitore sono riportati in Fig.C.1.1. Essa mostra che la tensione in uscita assume il valore $+U_{dc}/2$ quando la funzione modulante è maggiore della portante triangolare ed il valore $-U_{dc}/2$ nel caso contrario. Se la tensione che si considera è u_{aN} , la modulazione si realizza chiudendo ed aprendo alternativamente gli interruttori S_1 e S_2 di Fig.C.1.1.

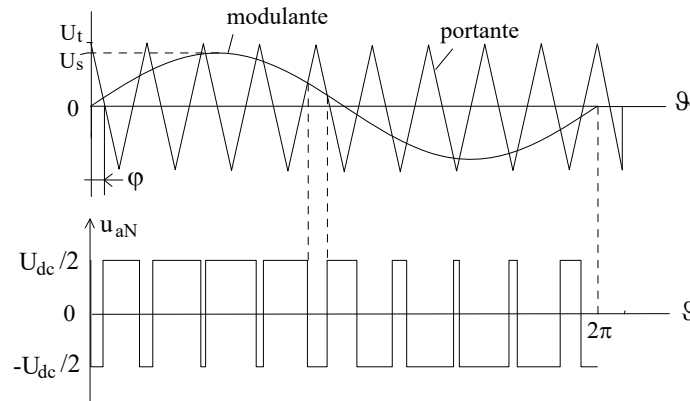


Fig.C.1.1 - PWM a sottooscillazione sinusoidale

I parametri caratteristici della modulazione sinusoidale sono i seguenti:

- a) il rapporto K_M tra ampiezze della modulante U_s e della portante U_t :

$$K_M = U_s / U_t \quad (\text{C.1.1})$$

- b) il rapporto P tra le frequenze angolari della portante ω_t e della modulante ω_s :

$$P = \omega_t / \omega_s \quad (\text{C.1.2})$$

- c) la fase ϕ tra portante e modulante, definita in Fig.C.1.1.

- d) l'indice di modulazione M , dato da

$$M = \frac{U_1}{U_{1,oq}} = \frac{\pi U_1}{2 U_{dc}} \quad (\text{C.1.3})$$

con U_1 ampiezza della fondamentale della tensione prodotta e $U_{1,oq}$ ampiezza della fondamentale nel funzionamento in onda quadra, pari a $2/\pi U_{dc}$ (B.2.2).

La tecnica della PWM sinusoidale richiede che il triangolo e il seno si intersechino due e solo due volte per ogni periodo della portante, una volta sul fronte ascendente e l'altra sul fronte discendente del triangolo. Si verifica facilmente⁸ che ciò avviene se l'ampiezza del triangolo è maggiore di quella del

⁷ Con il termine "basse frequenze" qui si intende un intervallo di frequenza che va dalla continua fino ad un valore intermedio tra la fondamentale della funzione modulante e quella della portante.

⁸ La pendenza del triangolo è $\frac{U_T 2 \omega_t}{\pi}$, mentre quella della senoide vale $U_s \omega_s \cos(\omega_s t)$, da cui la seconda delle (C.1.4).

seno e se la pendenza dei fronti è maggiore del valore massimo della derivata dell'onda sinusoidale. Traducendo queste condizioni in formule, si perviene alle:

$$K_M \leq 1 \quad P > \frac{\pi}{2} K_M \quad (\text{C.1.4})$$

Sotto queste condizioni la tensione modulata ha la seguente equazione:

$$u_{aN}(\vartheta) = \frac{K_M U_{dc}}{2} \sin(\omega_s t + \varphi) + \frac{2U_{dc}}{\pi} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} \left\{ \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q \left(\frac{\pi r K_M}{2} \right) S(r+q) \sin[(rP+q)\omega_s t + q\varphi] \right\} \quad (\text{C.1.5})$$

dove $r \in (1, 2, \dots)$, $q \in (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. $S(r+q)$ è una funzione binaria di r e q , definita da

$$S(q+r) = \begin{cases} 0 & \text{con } (r+q) \text{ pari} \\ 1 & \text{con } (r+q) \text{ dispari} \end{cases} \quad (\text{C.1.6})$$

e J_q è la funzione di Bessel⁹ di ordine q . Dalla (C.1.5) si riconosce che l'equazione di una tensione modulata sinusoidalmente è composta da un numero infinito di termini: oltre a quello di pulsazione ω_s sono presenti termini di pulsazione $[(rP+q)\omega_s]$ con r intero positivo e q intero. Per rendere più agevole lo studio della (C.1.5) si usa suddividere i termini in gruppi caratterizzati dallo stesso valore di r ;

⁹ Le funzioni di Bessel sono le soluzioni $y(x, n) = J_q(x)$ della seguente equazione differenziale nella variabile x :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - q^2)y = 0$$

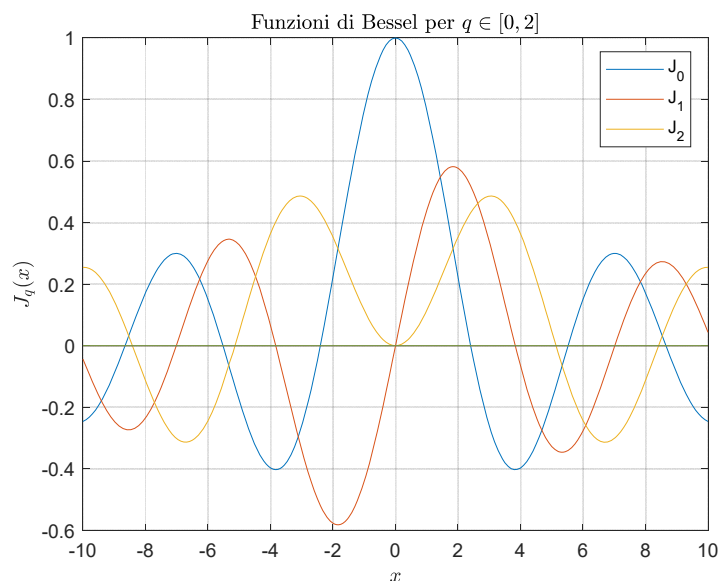
dove q è un numero reale. Per q intero $J_q(x)$ si può esprimere mediante la

$$J_q(x) = \frac{x^q}{2^q q!} \left[1 - \frac{x^2}{2^2 q!(q+1)} + \frac{x^4}{2^4 q!(q+1)(q+2)} - \dots \right]$$

Vale inoltre la formula ricorsiva:

$$J_{q+1}(x) = \frac{2q}{x} J_q(x) - J_{q-1}(x)$$

che consente di ricavare una funzione di ordine qualsiasi da $J_0(x)$ e da $J_1(x)$. La figura riporta l'andamento delle funzioni di Bessel, per $q=0, 1, 2$.



Andamento delle funzioni di Bessel, primi ordini.

Esse sono simmetriche rispetto allo zero per q dispari, antisimmetriche per q pari. Inoltre vale la relazione $J_q(x) = -J_{-q}(x)$.

- i termini di ogni gruppo sono disposti simmetricamente rispetto la pulsazione $rP\omega_s = r\omega_t$, che è multipla intera della pulsazione della portante. Per la (C.1.6), ogni gruppo contiene termini di valore finito alternati a termini nulli¹⁰. L'ampiezza dei termini non nulli è inversamente proporzionale ad r e direttamente a $J_q(r\pi K_M/2)$;
- l'ampiezza dei termini non nulli di un gruppo cala all'aumentare di q . In ogni gruppo si può pertanto individuare una banda utile centrata in $r\omega_t$ oltre la quale i termini sono di ampiezza trascurabile. Il gruppo con $r=1$ ha la banda più stretta ma anche i termini di ampiezza maggiore: al crescere di r , i gruppi hanno bande più ampie ma termini di ampiezza minore;
- la fase dei termini è proporzionale a q , indipendentemente dal gruppo di appartenenza.

La Fig.C.1.2 riporta a titolo d'esempio le ampiezze dei primi due gruppi di armoniche; con il pedice " aN,n " si è indicata l'ampiezza dell'armonica di ordine n della tensione U_{aN} , che è riferita al punto medio del bus in continua.

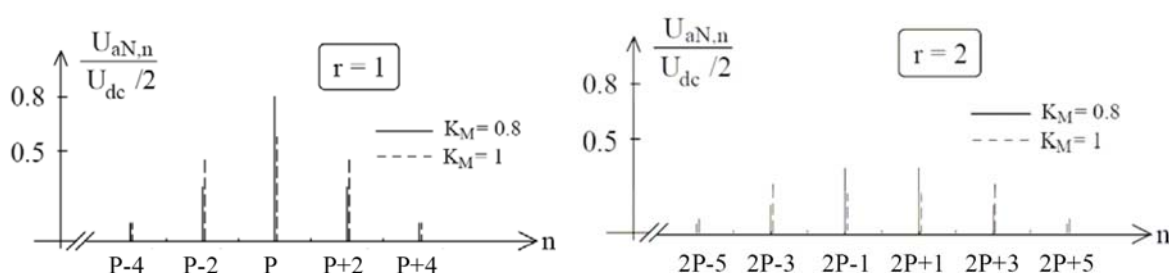


Fig.C.1.2 - Gruppi di armoniche di ordine superiore nella PWM a sottooscillazione

Lo spettro di una tensione modulata sinusoidalmente si ottiene componendo i diversi termini della (C.1.5). Il risultato è diverso a seconda che P sia intero (o, più in generale, razionale) oppure irrazionale. Una modulazione con P razionale è detta *sincrona* e produce una tensione PWM periodica; una modulazione con P irrazionale è detta *asincrona* e produce una tensione PWM aperiodica. Se P è intero si riconosce immediatamente che le armoniche hanno pulsazione $n\omega$, con n intero e ampiezza data dalla somma vettoriale di un numero infinito di termini. In particolare alla determinazione della generica armonica di ordine n concorrono i termini per i quali vale la

$$rP + q = n \quad (C.1.7)$$

Per $n=1$, ai termini forniti dalla (C.1.7) va sommato il primo termine della (C.1.5). Si osservi che la (C.1.7) ammette soluzione anche per $n=0$, il che significa che è presente una componente continua; considerazioni analoghe valgono per P razionale¹¹. Per $P > 9$ si ottiene l'importante risultato che la componente fondamentale coincide con il primo termine della (C.1.5) a meno di un errore inferiore al 0.5%.

¹⁰ Se ad esempio r è dispari, tutti i q dispari produrranno $S=0$, quindi vi saranno solo i q pari.

¹¹ Invece se P è irrazionale ogni termine costituisce un'armonica; in particolare a basse frequenze lo spettro della tensione PWM contiene, oltre alla fondamentale, sia armoniche di pulsazione poco maggiore di ω che armoniche di pulsazione inferiore a ω , comunemente chiamate *subarmoniche*. La presenza di subarmoniche (col generico termine di subarmoniche si intende anche la componente continua) di ampiezza consistente nella tensione di alimentazione di un motore in alternata non è tollerabile. Oltre agli inconvenienti già citati per il funzionamento in onda quadra (peraltro esaltati dal fatto che le subarmoniche hanno frequenza minore della fondamentale), esse portano alla saturazione del circuito magnetico del motore. Per evitare l'insorgere di subarmoniche la modulazione va effettuata con P sufficientemente grande da rendere trascurabile l'ampiezza dei termini di pulsazione minore di ω . In pratica basta verificare che ciò accada per i termini del primo gruppo con q negativo. Il calcolo della (C.1.5) mostra che per $P > 9$ le subarmoniche e la componente continua sono minori dello 0.1% della componente fondamentale; in ogni caso esse sono assenti nel caso di P intero dispari oppure P intero pari e $\varphi=0$.

$$\text{Se } U_1 \approx \frac{U_{dc}}{2} K_M \quad [P > 9], \text{ allora } M = \frac{\pi}{2} \frac{U_1}{U_{dc}} \approx \frac{\pi}{2} \frac{\left(\frac{U_{dc}}{2} K_M\right)}{U_{dc}} = \frac{\pi}{4} K_M \text{ e } M|_{K_M=1} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{C.1.8})$$

Nella pratica si usano valori di P anche superiori a 100. Quando è verificata la (C.1.8), l'ampiezza della componente fondamentale della tensione U_{aN} è dunque con buona approssimazione proporzionale ad K_M ; in accordo con la prima delle (C.1.4), essa varia da 0 a $U_{dc}/2$ al variare di K_M da 0 a 1, corrispondente ad un indice di modulazione $M=0.785$.

Il controllo della fondamentale U_1 può pertanto essere conseguito secondo una legge lineare variando l'ampiezza della sinusoide di riferimento da 0 fino a raggiungere l'ampiezza del triangolo. Inoltre per $P > 9$ si trova anche che le bande utili dei primi due gruppi non si sovrappongono. Utilizzando i dati di Fig.C.1.2, si può costruire lo spettro di una tensione PWM con $P=9$ almeno fino a pulsazioni di circa $(2\omega_t + 4\omega_s)$, come riportato in Fig.C.1.3.

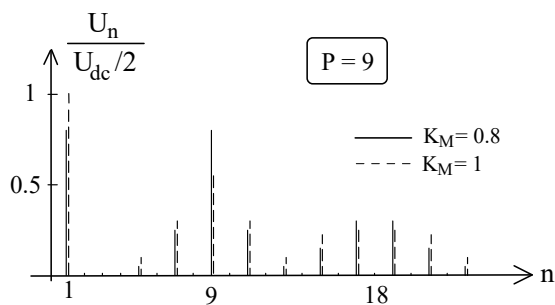


Fig.C.1.3 - Spettro di una tensione modulata sinusoidalmente con $P=9$

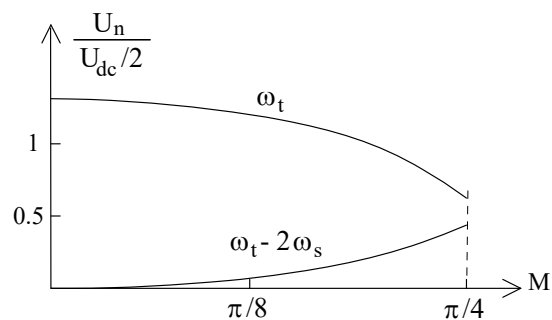


Fig.C.1.4 - Ampiezza delle armoniche di pulsazione ω_t e $(\omega_t - 2\omega_s)$ in funzione di M

Se confrontata con la Fig.C.1.2, la Fig.C.1.3 mette in evidenza lo spostamento del contenuto armonico verso le frequenze più alte prodotto dalla modulazione. Nel campo di frequenza che va da ω_s a ω_t le armoniche più significative sono quelle di pulsazione ω_t e $(\omega_t - 2\omega_s)$. L'ampiezza U_n di tali armoniche in funzione dell'indice di modulazione M è riportata in Fig.C.1.4.

Un sistema trifase di tensioni modulate sinusoidalmente si ottiene partendo da una terna diretta o inversa di sinusoidi e da una terna di triangoli. Solitamente, quest'ultima costituisce una *sequenza zero*¹², perché produce il contenuto armonico più favorevole per le tensioni concatenate e stellate e consente una semplificazione del modulatore, impiegando lo stesso segnale triangolare per la modulazione di tutte e tre le fasi. A questo caso si riferiscono le considerazioni che seguono.

Assumendo la (C.1.5) come equazione della tensione u_{aN} dell'invertitore, le espressioni per le altre due tensioni u_{bN} e u_{cN} si ottengono sostituendo al posto di φ i valori $(\varphi - 2\pi/3)$ e $(\varphi - 4\pi/3)$, rispettivamente¹³.

Se si considerano le tensioni concatenate (Fig.C.1.5 in basso) si nota che le componenti omopolari spariscono, mentre le terne dirette ed inverse risultano $\sqrt{3}$ volte maggiori delle rispettive armoniche di fase.

¹² Dunque, si tratta di tre segnali triangolari di uguale ampiezza e fase, che si possono confondere con un unico triangolo.

¹³ Da un'analisi delle tre equazioni si trova che ogni termine fa parte di una terna trifase che, indipendentemente da r , è diretta se $q=3m+1$ con m numero intero qualunque, inversa se $q=3m-1$ e omopolare se $q=3m$. Per P intero, il sistema trifase generato è in generale composto da terne di termini di tutte e tre le sequenze.

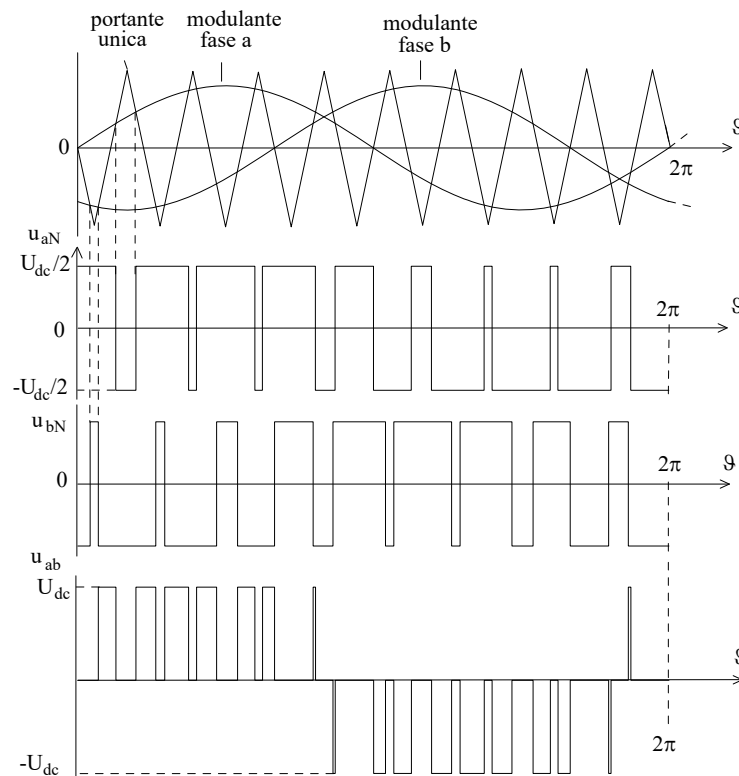


Fig.C.1.5 - Terna trifase di tensioni modulate sinusoidalmente

Si osservi come il termine di pulsazione ω_t e afferente al primo gruppo¹⁴ venga a far parte di una terna omopolare e quindi non sia presente nelle tensioni concatenate. Poiché questo termine predomina sugli altri (si veda ad esempio la Fig.C.1.3), si intuisce la convenienza di utilizzare una terna omopolare di triangoli per ridurre il contenuto armonico delle tensioni PWM applicate al motore.

A partire dai primi anni '70 sono state elaborate alcune varianti alla tecnica di sottooscillazione sinusoidale, essenzialmente per aumentare l'ampiezza della componente fondamentale, e/o migliorare il contenuto armonico e/o per rendere più semplice l'implementazione digitale. Alcune di queste varianti sono di seguito illustrate.

Sottooscillazione sinusoidale con sovramodulazione.

Come si è visto nei paragrafi precedenti, nel funzionamento in onda quadra l'ampiezza massima della componente fondamentale è circa $1.27 \cdot U_{dc}/2$ mentre nella modulazione sinusoidale è al più $U_{dc}/2$. Una delle tecniche per ovviare a questa minore utilizzazione dell'invertitore mantenendo ridotto il contenuto armonico alle basse frequenze è la *sovramodulazione*. Più che una nuova tecnica, in questo caso essa rappresenta un'estensione della tecnica sinusoidale al caso $K_M > 1$, in cui si permette alla funzione sinusoidale modulante di raggiungere ampiezze superiori a quella del segnale triangolare portante. La Fig.C.2.1 illustra il principio di funzionamento in sovramodulazione.

¹⁴ Nella (C.1.5) si deve porre cioè $r=1$ (primo gruppo di armoniche), $q=0$ (affinché $S=1$); dunque $q\varphi=0$ e la terna armonica risulta omopolare.

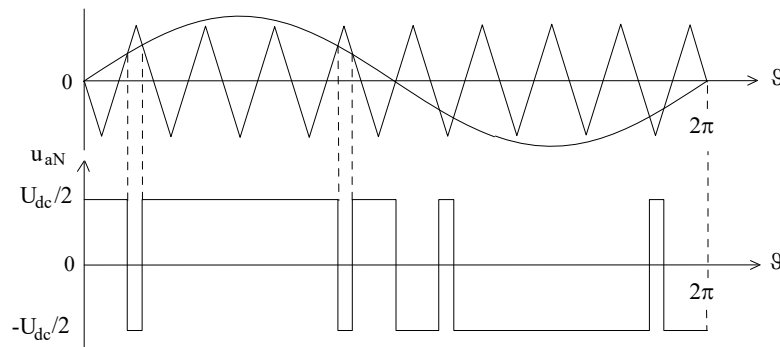


Fig.C.2.1 - Il metodo della sovramodulazione.

Al crescere di K_M oltre l'unità si ha una progressiva eliminazione delle inversioni della tensione modulata, a partire da quelle al centro dei semiperiodi (Fig.C.2.1). In corrispondenza, la componente fondamentale supera $U_{dc}/2$ fino ad arrivare al valore proprio dell'onda quadra quando tutte le inversioni sono scomparse ($M=1$). Si riconosce immediatamente che per $K_M > 1$ la legge di variazione dell'ampiezza della tensione fondamentale $U_{aN,1}$ con K_M (e con M) non è più lineare. Ma lo svantaggio più rilevante è che, anche effettuando la modulazione con elevati rapporti P tra frequenza portante e modulante, compaiono sia armoniche a bassa frequenza che subarmoniche di ampiezza via via maggiore man mano che M cresce¹⁵.

Distorsione della funzione modulante.

In questa particolare tecnica, pressoché universalmente adottata in associazione alla sottooscillazione sinusoidale, prevede di sommare alla sinusoida modulante un termine sinusoidale a frequenza tripla (terza armonica).

In questo modo è facile rendersi conto che il termine sinusoidale può assumere ampiezza maggiore del triangolo senza che l'ampiezza complessiva della funzione modulante ecceda quella del triangolo (Fig.C.3.1).

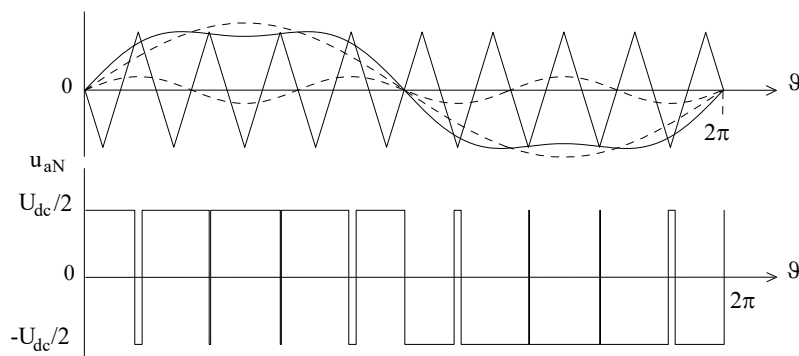


Fig.C.3.1 - La tecnica della distorsione della modulante con iniezione della 3ª armonica

Si può dimostrare che quando la terza armonica ha ampiezza pari a $1/6 U_t$, l'ampiezza del seno può arrivare fino a $2/\sqrt{3} U_t$, senza entrare in sovrarmodulazione. Si scrive allora

$$K_M = \frac{U_s}{U_t} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15 \quad (\text{C.3.1})$$

In base alla (C.1.5) si calcola allora una fondamentale di ampiezza pari a

¹⁵ Si può dimostrare che la comparsa delle subarmoniche può essere evitata se P è intero dispari o anche pari purché φ sia nullo.

$$U_1 \approx \frac{U_{dc}}{2} K_M = \frac{U_{dc}}{\sqrt{3}} \quad [P > 9] \quad (C.3.2)$$

a cui corrisponde un indice di modulazione

$$M = \frac{U_1}{(2U_{dc}/\pi)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.907 \quad (C.3.3)$$

Rispetto alla sovramodulazione, la tecnica della distorsione armonica presenta lo svantaggio di produrre una fondamentale di ampiezza inferiore ma il vantaggio che questo valore viene raggiunto conservando un contenuto armonico favorevole. Infatti la tensione di fase dell'invertitore mantiene una struttura a gruppi tipica della modulazione sinusoidale, differendo da questa per la comparsa di termini prodotti dalla terza armonica della modulante. In particolare alle basse frequenze lo spettro contiene la componente fondamentale e una terza armonica. Ma la terza armonica fa parte di una terna omopolare e quindi sparisce dalle tensioni concatenate e non ha effetto sulle correnti di fase in un sistema privo di filo neutro.

La tecnica della modulazione uniforme.

La modulazione uniforme (*regular sampling*) è una tecnica di PWM che consente di lavorare con basse frequenze portanti, avere un contenuto armonico favorevole ed essere facilmente implementabile su microprocessore. Essa differisce dalle tecniche viste in precedenza perché gli istanti di inversione non avvengono in corrispondenza delle intersezioni naturali della portante con la modulante ma in corrispondenza delle intersezioni con un segnale ottenuto dalla modulante campionando e mantenendo (*sample and hold*) il valore che essa assume all'inizio di ogni periodo della portante per tutta la durata del periodo della portante stessa. La Fig.C.4.1 esemplifica quanto detto, con riferimento ad una funzione modulante sinusoidale pura.

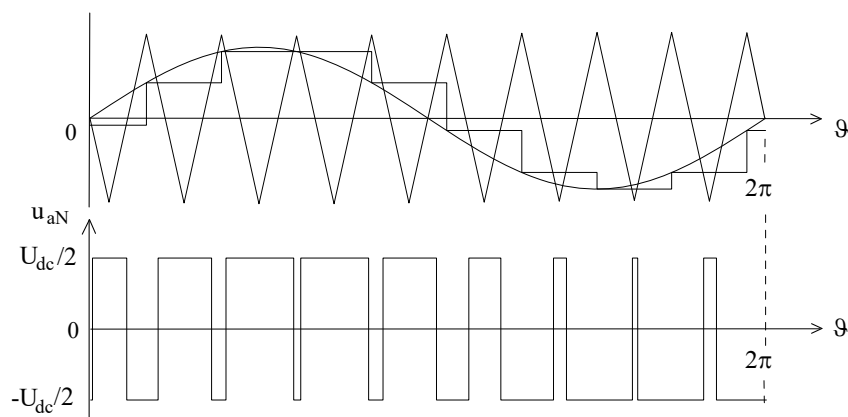


Fig.C.4.1 - La tecnica della modulazione uniforme

Si osservi come con questa tecnica gli impulsi positivi della tensione di fase durante il semiperiodo positivo del seno e gli impulsi negativi durante il semiperiodo negativo risultano centrati esattamente attorno all'istante di mezzo di ogni periodo del triangolo, conferendo alla tensione di fase una struttura più simmetrica; da qui il nome di *modulazione uniforme* o *regolare* con cui viene chiamata questa tecnica.

Lo spettro di una tensione modulata uniformemente ha ancora una struttura a gruppi simile a quello descritto dalla (C.1.5). Le differenze sono le seguenti:

- al posto del primo termine della (C.1.5) compare un gruppo caratterizzato da $r=0$ e q intero positivo; il primo termine di questo gruppo ($q=1$) fornisce la componente fondamentale della tensione PWM a meno del contributo di termini di altri gruppi;

- b) l'ampiezza dei termini di un gruppo non dipende più solo da K_M e q ma anche da P ; in particolare anche la componente fondamentale dipende da K_M e P ed inoltre non risulta più direttamente proporzionale a K_M , (ma lo è con buona approssimazione se P è grande);
- c) i termini di un gruppo non sono più alternativamente di ampiezza finita e nulli, ma sono tutti di ampiezza finita, tuttavia l'ampiezza dei termini laterali è assai minore rispetto al caso di modulazione naturale, come conseguenza della disposizione uniforme degli impulsi. E' allora possibile un funzionamento con valori di P minori rispetto al caso di modulazione a sottooscillazione sinusoidale senza che insorgano subarmoniche di ampiezza significativa.

Vettori spaziali e tecniche di modulazione vettoriali per inverter trifase

Introduzione.

Un carico, o sistema, trifase è un quadripolo descritto da una terna di tensioni (u_a, u_b, u_c) relative ai suoi morsetti a, b, c , rispetto al quarto morsetto, n , detto filo neutro, e una terna di correnti (i_a, i_b, i_c), entranti (se la convenzione di segno è quella degli utilizzatori) nei suoi terminali a, b, c , dette fasi. Le tensioni prendono il nome di tensioni stellate, le correnti sono dette di fase.

La differenza delle tensioni stellate ordinata in modo ciclico ($u_{ab}=u_a-u_b$, $u_{bc}=u_b-u_c$, $u_{ca}=u_c-u_a$) costituisce la terna delle tensioni concatenate, la cui somma è nulla per il principio di Kirchhoff.

La descrizione interna del sistema trifase porta in genere a definire altre terne di grandezze, per esempio i flussi concatenati ($\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$) e così via. Il vettore spaziale è uno strumento matematico¹⁶ che permette di affrontare lo studio anche dinamico dei sistemi trifase, applicando alle terne di grandezze una trasformazione di coordinate che semplifica significativamente le equazioni in gioco.

Definizione di vettore spaziale.

Si consideri un cambio di coordinate che porti la terna attuale (a, b, c) ad essere espressa secondo un sistema ortogonale (α, β, o):

$$\begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_o \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

ovvero, in forma compatta:

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta o} = \mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o} \mathbf{g}_{abc} \quad (\text{A.2})$$

Si ha anche

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_o \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ovvero, in forma compatta:

¹⁶ In taluni casi, a seconda delle grandezze fisiche considerate, i vettori spaziali si arricchiscono di significato più profondo.

$$\mathbf{g}_{abc} = \mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc} \mathbf{g}_{\alpha\beta o} \quad (\text{A.4})$$

dove si sono poste naturalmente

$$\mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Il vettore $\mathbf{g}_{\alpha\beta o}$ rappresenta una possibile definizione di *vettore spaziale* associato alla terna trifase g_a, g_b, g_c . La trasformazione non è ortogonale, in quanto l'inversa non coincide con la trasposta. Il legame tra le due matrici rimane comunque abbastanza semplice:

$$\mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o} = \frac{2}{3} \mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc}^T = (\mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc})^{-1} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc} = \frac{3}{2} \mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o}^T = (\mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o})^{-1} \quad (\text{A.8})$$

Bilanci energetici.

Si considerino due generiche terne di tensioni e di correnti, relative ad un sistema trifase. La potenza istantanea assorbita dal carico vale:

$$p_{abc} = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c = \mathbf{u}_{abc}^T \mathbf{i}_{abc} = (\mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc} \mathbf{u}_{\alpha\beta o})^T \mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc} \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \frac{3}{2} \mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc}^{-1} \mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc} \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \frac{3}{2} \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \frac{3}{2} p_{\alpha\beta o} \quad (\text{A.1.1})$$

Si evince dunque che la trasformazione proposta *non sia conservativa per la potenza*, nel senso che la potenza calcolata con le grandezze trasformate va corretta con il fattore 3/2 per avere la reale potenza del sistema trifase. Tale risultato si applica ad ogni calcolo che coinvolga il prodotto di due terne di grandezze ovvero di due vettori spaziali.

La componente omopolare.

Per una generica terna di grandezze $g_a(t), g_b(t), g_c(t)$, la componente omopolare si definisce come segue:

$$g_{op}(t) = \frac{g_a(t) + g_b(t) + g_c(t)}{3} \quad (\text{A.2.1})$$

Nella gran parte dei casi pratici, essa può essere considerata nulla. In particolare, è nulla per una terna di correnti di fase quando non sia presente il collegamento al filo neutro, o per una terna di tensioni simmetriche.

Il vettore spaziale in \mathcal{R}^2 .

Nel caso di componente omopolare nulla, dalla (A.1) si può estrarre la particolarizzazione della definizione di vettore spaziale ad \mathcal{R}^2 , rendendola esplicita per le componenti secondo gli assi α e β :

$$g_\alpha = \frac{2}{3} \left(g_a - \frac{1}{2} g_b - \frac{1}{2} g_c \right) \quad (\text{A.3.1})$$

$$g_\beta = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} g_b - \frac{\sqrt{3}}{2} g_c \right) \quad (\text{A.3.2})$$

Tali espressioni sono relative ad una coppia (α, β) di assi ortogonali; molto spesso risulta comodo utilizzare la notazione compatta relativa ai numeri complessi, assumendo (in modo del tutto arbitrario)

che la componente reale sia g_α e quella immaginaria sia g_β . Formalmente, il vettore spaziale in \Re^2 è dunque esprimibile come un numero complesso¹⁷:

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_{\alpha\beta}(t) = \frac{2}{3} \left(g_a(t) + e^{j2\pi/3} g_b(t) + e^{j4\pi/3} g_c(t) \right) \quad (\text{A.3.3})$$

dove, per una volta, è stata indicata la generica dipendenza dal tempo delle grandezze coinvolte.

La rappresentazione grafica della definizione (A.3.3) di vettore spaziale in \Re^2 è riportata in Fig.A.3.1.

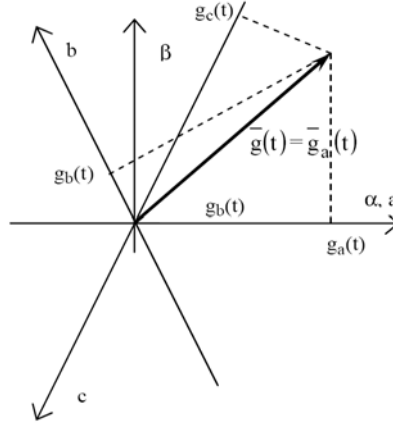


Fig.A.3.1 - Il vettore spaziale $\mathbf{g}(t)$

Come si è detto, partendo dalla terna di grandezze reali \mathbf{g}_{abc} , applicando la (A.4) si ottiene in $\alpha\beta$ un vettore nel piano complesso. E' possibile individuare una terna di assi (a,b,c) in modo che le proiezioni del vettore spaziale su di essi coincidano con le grandezze di partenza (g_a, g_b, g_c), a meno della componente omopolare. E' infatti possibile ricavare la terna originaria tramite le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} g_a(t) &= \text{Re}[\mathbf{g}(t)] \\ g_b(t) &= \text{Re}[\mathbf{g}(t)e^{-j2\pi/3}] = \text{Re}\left[\frac{2}{3}\left[g_a(t)e^{-j2\pi/3} + g_b(t) + g_c(t)e^{j2\pi/3}\right]\right] \\ g_c(t) &= \text{Re}[\mathbf{g}(t)e^{-j4\pi/3}] = \text{Re}\left[\frac{2}{3}\left[g_a(t)e^{-j4\pi/3} + g_b(t)e^{-j2\pi/3} + g_c(t)\right]\right] \end{aligned} \quad (18) \quad (\text{A.3.4})$$

Si noti come $g_b(t)$ e $g_c(t)$ siano esprimibili come parte reale del vettore spaziale $\mathbf{g}(t)$ ruotato di $2\pi/3$ e di $4\pi/3$ in senso orario (se si assume positivo per gli angoli il verso di rotazione antiorario); è

¹⁷ Si ricorda una possibile dimostrazione della formula di Eulero. Si definisca la funzione f come

$$f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}$$

Questo è ammesso in quanto il modulo dell'esponentiale al denominatore è $e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$ il che implica che e^{ix} sia sempre diverso da zero. La derivata di f è, secondo la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{(-\sin x + i \cos x)e^{ix} - (\cos x + i \sin x)i e^{ix}}{e^{i2x}} = \frac{-\sin x e^{ix} - i^2 \sin x e^{ix}}{e^{i2x}} = 0$$

Pertanto f deve essere una funzione costante, quindi dalla seguente relazione

$$f(0) = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{e^0} = 1$$

si vede che tale costante deve essere uguale a 1. Ciò significa che il numeratore ed il denominatore nella definizione di f devono essere uguali per ogni x , ovvero deve valere la Formula di Eulero.

¹⁸ $\Re e \left[g_a \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + g_c \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \Re e \left[\frac{1}{2} (-g_a - g_c) \right] = \Re e \left[\frac{1}{2} g_b \right]$

possibile, equivalentemente¹⁹, spostare degli stessi angoli, in senso antiorario, l'asse su cui fare la proiezione, come evidenziato in Fig.A.3.1.

Terne di grandezze non bilanciate.

Si osservi che $g_a(t)$ è la proiezione sull'asse reale di $\mathbf{g}(t)$ solo in assenza della componente omopolare; vale infatti la relazione:

$$\operatorname{Re}[\mathbf{g}(t)] = g_a(t) = \frac{2}{3} \left[g_a(t) - \frac{1}{2} g_b(t) - \frac{1}{2} g_c(t) \right] = \frac{2}{3} \frac{3}{2} g_a(t) = g_a(t) \quad (\text{A.3.1.1})$$

dove la penultima uguaglianza è frutto dell'ipotesi di terna priva di componente omopolare. La parte immaginaria vale invece:

$$\operatorname{Im}[\mathbf{g}(t)] = g_\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} [g_b(t) - g_c(t)] \quad (\text{A.3.1.2})$$

L'associazione di una terna di grandezze al relativo vettore spaziale, secondo quanto esposto nel par.A.3 non conserva l'eventuale componente omopolare. Siano infatti g'_a, g'_b, g'_c tre grandezze aventi componente omopolare g_{op} , ovvero si possa scrivere

$$\begin{aligned} g'_a &= g_a + g_{op} \\ g'_b &= g_b + g_{op} \\ g'_c &= g_c + g_{op} \end{aligned} \quad (\text{A.3.1.3})$$

dove, per costruzione, è ancora $g_a(t) + g_b(t) + g_c(t) = 0$.

Applicando la trasformazione (6.2.13) alle terne g_a, g_b, g_c e g'_a, g'_b, g'_c si ottiene lo stesso vettore spaziale $\mathbf{g}(t)$, com'è immediato verificare per sostituzione:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (g'_a(t) + e^{j2\pi/3} g'_b(t) + e^{j4\pi/3} g'_c(t)) &= \\ \frac{2}{3} (g_a(t) + e^{j2\pi/3} g_b(t) + e^{j4\pi/3} g_c(t)) + \underbrace{\frac{2}{3} (g_{op}(t) + e^{j2\pi/3} g_{op}(t) + e^{j4\pi/3} g_{op}(t))}_{=0} \end{aligned} \quad (\text{A.3.1.4})$$

e questo prova che la relazione non è conservativa per la componente omopolare.

Si fa presente che la componente omopolare è una grandezza legata alla terna di grandezze, e non singolarmente a ciascuna di esse. In particolare, non è detto che le tre grandezze contribuiscano in modo uguale alla creazione della componente omopolare²⁰.

Sistema di riferimento rotante

Per le numerose applicazioni nel campo degli azionamenti elettrici, è d'interesse vedere come il vettore spaziale $\mathbf{g} = g_\alpha + jg_\beta$ associato alla generica terna (g_a, g_b, g_c) possa essere espresso secondo un sistema di riferimento ortogonale d, q che ruoti con velocità angolare $\omega_g(t)$ rispetto al sistema stazionario α, β considerato nel paragrafo precedente.

¹⁹ g_a giace sull'asse reale, dunque l'asse a coincide con l'asse reale. Per ottenere g_b , occorre trovare la parte reale del vettore dopo averlo fatto ruotare di $2\pi/3$ in senso orario. L'asse cercato si deve allora trovare a $2\pi/3$, perchè solo così una rotazione di $-2\pi/3$ lo porterebbe a coincidere con l'asse reale, sul quale verrebbe a poggiare g_b .

²⁰ Si considerino ad esempio le tre grandezze con componente omopolare nulla g_a, g_b, g_c . Si aggiunga solo a g_a un valore costante $3k$. A questo punto la terna avrà componente omopolare k , e la terna priva di componente omopolare sarà $g_a - k, g_b - k, g_c - k$, diversa dalla terna di partenza.

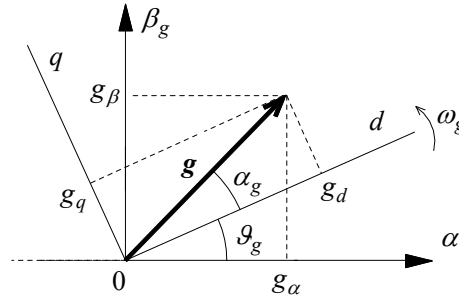


Fig.6.3.1 - Il vettore spaziale secondo un riferimento sincrono d,q

Con riferimento alla Fig.6.3.1 è immediato scrivere

$$\mathbf{g} = |\mathbf{g}| e^{j(\alpha_g + \theta_g)} = |\mathbf{g}| e^{j\alpha_g} e^{j\theta_g} = \mathbf{g}_g e^{j\theta_g} \quad (\text{B.1})$$

e dunque

$$\mathbf{g}_g = \mathbf{g} e^{-j\theta_g} \quad (\text{B.2})$$

che può essere scritta in forma di relazione matriciale separando la parte reale ed immaginaria:

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_g) & \sin(\theta_g) \\ -\sin(\theta_g) & \cos(\theta_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

dove con $\mathbf{g}_g = g_d + jg_q$ si è indicato il vettore spaziale espresso secondo il generico riferimento rotante d,q . La fase θ_g di tale sistema (che, in certe applicazioni, viene detto *sistema sincrono*) è funzione del tempo, ed in generale è data da

$$\theta_g(t) = \int_0^t \omega_g(t) dt + \theta_g(0) \quad (\text{B.4})$$

La matrice $\mathbf{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq}$ che appare nella (B.3) è ortonormale, dunque la sua inversa coincide con la trasposta:

$$\mathbf{T}_{dq \rightarrow \alpha\beta} = \mathbf{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_g) & -\sin(\theta_g) \\ \sin(\theta_g) & \cos(\theta_g) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Come si vedrà nel seguito, molto spesso si ricorre a qualche particolare sistema di riferimento (per esempio, solidale con il rotore del motore) perchè questo permette di scrivere le equazioni delle tensioni degli avvolgimenti e della coppia particolarmente semplici e adatte ad immediate interpretazioni.

A volte può accadere che nella trattazione di azionamenti per alcune macchine elettriche anisotrope sia conveniente o necessario mantenere la rappresentazione tridimensionale, adottando dunque una trasformazione che preservi anche la componente omopolare.

La matrice di trasformazione dal sistema (α, β, o) al sistema (d, q, o) rotante attorno al comune asse "o" si ottiene in modo diretto dalla (B.5), con la condizione di mantenere la stessa componente omopolare:

$$\mathbf{T}_{dqo/\alpha\beta o} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & -\sin(\vartheta_g) & 0 \\ \sin(\vartheta_g) & \cos(\vartheta_g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

che ha per inversa la matrice

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta o/dqo} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & \sin(\vartheta_g) & 0 \\ -\sin(\vartheta_g) & \cos(\vartheta_g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

La matrice completa di trasformazione dal sistema (a,b,c) al sistema rotante (d,q,o) si ottiene osservando che

$$\mathbf{g}_{dqo} = \mathbf{T}_{\alpha\beta o/dqo} \mathbf{g}_{\alpha\beta o} = \mathbf{T}_{\alpha\beta o/dqo} \mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o} \mathbf{g}_{abc} = \mathbf{T}_{abc/dqo} \mathbf{g}_{abc} \quad (\text{B.8})$$

e sostituendo le (B.7) e (B.5) si ottiene

$$\mathbf{T}_{abc/dqo} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & \cos(\vartheta_g - 2\pi/3) & \cos(\vartheta_g - 4\pi/3) \\ -\sin(\vartheta_g) & -\sin(\vartheta_g - 2\pi/3) & -\sin(\vartheta_g - 4\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

e la sua inversa

$$\mathbf{T}_{dqo/abc} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & -\sin(\vartheta_g) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\vartheta_g - 2\pi/3) & -\sin(\vartheta_g - 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\vartheta_g - 4\pi/3) & -\sin(\vartheta_g - 4\pi/3) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Esempi applicativi

Verranno ora presi in esame alcuni esempi di applicazione dei vettori spaziali.

Terna simmetrica di tensioni sinusoidali

Si consideri un sistema simmetrico di tensioni sinusoidali:

$$\begin{aligned} u_a &= U_M \cos(\vartheta + \alpha_o) \\ u_b &= U_M \cos(\vartheta + \alpha_o - 2\pi/3) \\ u_c &= U_M \cos(\vartheta + \alpha_o - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (\text{C.1.1})$$

con $\vartheta = \omega t$, ω =pulsazione angolare, espressa in rad/s, e α_o =fase iniziale. Applicando la definizione di vettore spaziale, risulta, dopo qualche passaggio²¹:

²¹ Una traccia per i passaggi è la seguente. Ponendo $\xi = \vartheta + \alpha_o$ per praticità, si scrive:

$$\mathbf{u} = \frac{2}{3} U_M \left[\cos(\xi) + \cos(\xi - 2\pi/3) e^{j2\pi/3} + \cos(\xi - 4\pi/3) e^{j4\pi/3} \right]$$

e ricordando le formule $\cos(\alpha)\cos(\beta) = 1/2 [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$; $\sin(\alpha)\cos(\beta) = 1/2 [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ si ha:

$$\mathbf{u} = U_M e^{j(\vartheta + \alpha_o)} \quad (\text{C.1.2})$$

Si tratta dunque, nel sistema di riferimento stazionario α, β , di un vettore di ampiezza U_M e rotante con velocità angolare ω . Le componenti reale ed immaginaria di tale vettore risultano naturalmente:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= U_M \cos(\vartheta + \alpha_o) \\ u_\beta &= U_M \sin(\vartheta + \alpha_o) \end{aligned} \quad (\text{C.1.3})$$

e la traiettoria sul piano complesso è una circonferenza, percorsa dal vertice del vettore con velocità angolare costante pari a ω .

Se si considera un sistema di riferimento rotante $d-q$ in senso antiorario, con velocità ω pari alla pulsazione angolare della terna (C.1.1), applicando l'espressione (B.2) in cui si ponga $\vartheta_g = \omega t$ si ottiene

$$\mathbf{u}_g = U_M e^{j\alpha_o} \quad (\text{C.1.4})$$

che rappresenta il vettore spaziale della terna di grandezze sinusoidali espresse secondo il nuovo sistema di riferimento rotante.

Confronto con la rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali.

Per lo studio dei circuiti in regime sinusoidale isofrequenziale è d'uso comune la rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali. Si tratta, com'è noto, di uno strumento matematico che consente di abbinare ad ogni grandezza sinusoidale una grandezza complessa, contenente l'informazione dell'ampiezza e della fase iniziale della grandezza rappresentata. Più precisamente, alla grandezza sinusoidale

$$u_a = U_M \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (\text{C.1.1.1})$$

si associa il *fasore temporale*

$$\tilde{u}_a = \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha_0} \quad (\text{C.1.1.2})$$

Naturalmente si può scrivere anche:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_b &= \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j(\alpha_0 - 2\pi/3)} \\ \tilde{u}_c &= \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j(\alpha_0 - 4\pi/3)} \end{aligned} \quad (\text{C.1.1.3})$$

Se si confronta la (C.1.1.2) con la (C.1.4) si nota la loro corrispondenza formale, a meno di un fattore di scala sulle ampiezze, dettato dal fatto che in regime sinusoidale spesso si utilizzano i valori efficaci delle grandezze. Dunque, il vettore spaziale associato ad una terna trifase simmetrica, espresso in un sistema di riferimento rotante con velocità pari alla pulsazione angolare, è fisso²² e ha un'espressione pressoché identica a quella adottata nella rappresentazione simbolica della stessa terna secondo i fasori temporali.

L'analogia è comunque solo formale, perché le differenze concettuali sono notevoli; mentre i fasori temporali sono riferiti ad una singola grandezza, sono definiti solo in regime stazionario e per grandezze isofrequenziali, i vettori spaziali possono essere applicati a terne qualsiasi e questo li rende uno strumento flessibile e potente anche nello studio dei fenomeni transitori.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{2}{3} U_M \left[\cos(\xi) + \frac{1}{2} (\cos(\xi - 4\pi/3) + \cos(\xi) + \cos(\xi - 2\pi/3)) \right] + \\ &+ \frac{2}{3} U_M \left[j \frac{1}{2} (\sin(\xi) - \sin(\xi - 4\pi/3) + \sin(\xi) - \sin(\xi - 2\pi/3) + \sin(\xi) - \sin(\xi)) \right] = \frac{2}{3} U_M \left[\frac{3}{2} \cos(\vartheta + \alpha_o) + j \frac{3}{2} \sin(\vartheta + \alpha_o) \right] \end{aligned}$$

²² Si può anche associare il fasore temporale al vettore spaziale definito nel sistema stazionario, all'istante $t=0$.

Terna simmetrica di tensioni ad onda quadra

Si consideri una terna di tensioni ad onda quadra, sfasate reciprocamente di $2\pi/3$ e di ampiezza pari ad $U_{dc}/2$, come illustrato in Fig.C.2.1.

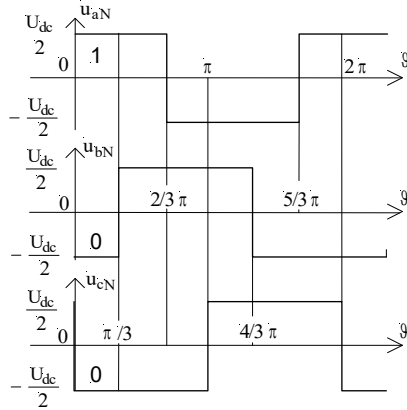


Fig.C.2.1 - Terna simmetrica di tensioni

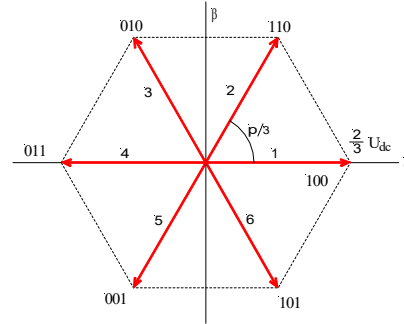
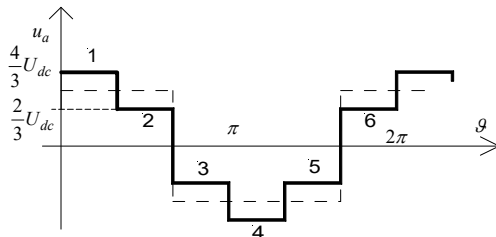
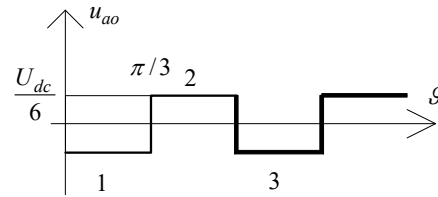


Fig.C.2.2 - Vettori spaziali relativi

E' innanzitutto da notare che si tratta di una terna di grandezze con componente omopolare non nulla. Tali grandezze rimangono costanti per archi di $\pi/3$, e allo scadere di ciascun intervallo vi è una tensione che si inverte. Applicando ripetutamente la definizione, si trova un vettore spaziale di ampiezza $2/3 U_{dc}$, che ruota a scatti di $\pi/3$, occupando in successione i vertici di un esagono centrato nell'origine degli assi, come mostra la Fig.C.2.2.

Si esegua ora l'operazione inversa, ovvero si ricavi ad esempio la tensione u_a come proiezione del vettore spaziale sull'asse α nelle successive posizioni 1,2,...6 da lui occupate. Si trova la forma d'onda riportata in Fig.C.2.3 (a).

Si noti come la trasformazione inversa restituisca una forma d'onda priva della componente omopolare che, in base ad esempio alla (A.3.1.3), risulta essere un'onda quadra di periodo $2\pi/3$ ed ampiezza $U_{dc}/6$ (Fig.C.2.3 (b)).

Fig.C.2.3 - (a) u_a priva della componente omopolare.

(b) La componente omopolare.

Circuito RLE trifase

Si consideri il circuito trifase di Fig.C.3.1, dove le induttanze L e le resistenze R sono considerate uguali per tutte e tre le fasi. Questa ipotesi rende molto semplice lo studio del circuito, anche durante i transitori, tramite i vettori spaziali associati a tensioni e correnti. Nel dominio del tempo, con riferimento alla Fig.6.4.3.1 si possono scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} u_a' &= Ri_a + L \frac{di_a}{dt} + e_a = u_a + u_{ON} \\ u_b' &= Ri_b + L \frac{di_b}{dt} + e_b = u_b + u_{ON} \\ u_c' &= Ri_c + L \frac{di_c}{dt} + e_c = u_c + u_{ON} \end{aligned} \quad (C.3.1)$$

Moltiplicando la prima delle (C.3.1) per $2/3$, la seconda per $2/3 e^{j2\pi/3}$, la terza per $2/3 e^{j4\pi/3}$, sommando membro a membro le tre equazioni ed applicando la definizione di vettore spaziale alle terne di tensione u_a', u_b', u_c' e u_a, u_b, u_c e alle correnti i_a, i_b, i_c si ottiene la relazione seguente (con ovvio significato dei simboli):

$$\mathbf{u}' = R\mathbf{i} + L \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{e} = \mathbf{u} + \mathbf{0}_v \quad (\text{C.3.2})$$

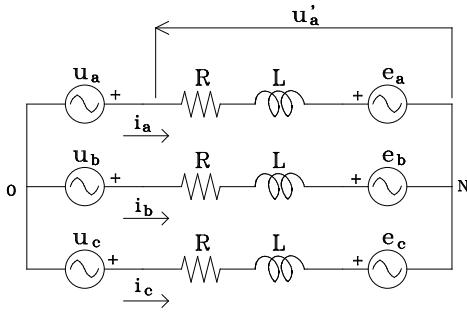


Fig.C.3.1 - Circuito RLE trifase

dove con $\mathbf{0}_v$ si è indicato il vettore spaziale nullo, che si ottiene a partire dalla terna di grandezze u_{ON} uguali tra loro. Utilizzando l'espressione (C.3.2) per l'analisi del circuito si perdono le componenti omopolari delle terne coinvolte; vale la pena di notare comunque che le correnti hanno sempre somma nulla, per il secondo principio di Kirchhoff, dunque sono prive di componente omopolare.

Di seguito, si analizzerà la dinamica del circuito proposto in alcuni casi particolari, sempre utilizzando l'espressione vettoriale (C.3.2).

- 1) $L=0$, $\mathbf{e}=\mathbf{0}_v$. In questa situazione, molto semplice, si ha $\mathbf{u}=R\mathbf{i}$, ovvero i vettori spaziali della tensione e della corrente sono in fase, e disegnano sul piano complesso traiettorie che sono scalate di R una rispetto all'altra.
- 2) $R=0$, $\mathbf{e}=\mathbf{0}_v$. Il circuito è in questo caso puramente induttivo. L'espressione (C.3.1) diventa $\mathbf{u}=L d\mathbf{i}/dt$; si può scrivere anche $d\mathbf{i}=\mathbf{u}/L dt$, che fa capire come l'incremento vettoriale di corrente $d\mathbf{i}$ sia parallelo al vettore di tensione \mathbf{u} . La situazione è descritta in Fig.C.3.2.

Si supponga adesso di voler studiare la dinamica del circuito partendo dalla condizione iniziale di correnti tutte nulle ($\mathbf{i}(0)=\mathbf{0}_v$), applicando una terna simmetrica di tensioni sinusoidali come la (C.1.1), in cui si ponga per semplicità $\alpha_o=0$. Il vettore spaziale associato, ricavabile dalla (C.1.4) è allora:

$$\mathbf{u} = U_M e^{j\theta} = U_M e^{j\omega t} \quad (\text{C.3.3})$$

Per la corrente si può scrivere

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{1}{L} \mathbf{u} \quad (\text{C.3.4})$$

e dunque

$$\mathbf{i} = \frac{1}{L} \int_0^t \mathbf{u} dt + \mathbf{i}(0) = \frac{1}{L} \int_0^t U_M e^{j\omega t} dt = \frac{U_M}{j\omega L} (e^{j\omega t} - 1) = \frac{1}{j\omega L} \mathbf{u} - \frac{U_M}{j\omega L} = \frac{\mathbf{u} - U_M}{\omega L} e^{-j\pi/2} \quad (\text{C.3.5})$$

Ricordando che ad una moltiplicazione per $e^{-j\pi/2}$ corrisponde una rotazione di $\pi/2$ in senso orario del vettore spaziale, partendo dalla espressione appena ricavata si ottiene la Fig.C.3.3:

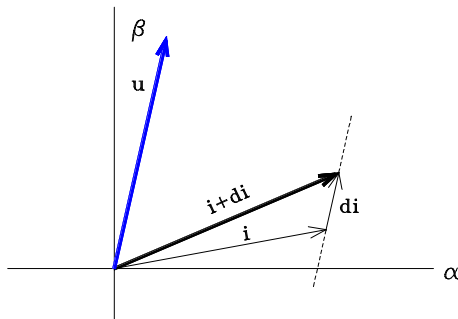


Fig.C.3.2 - Traiettoria del vettore spaziale

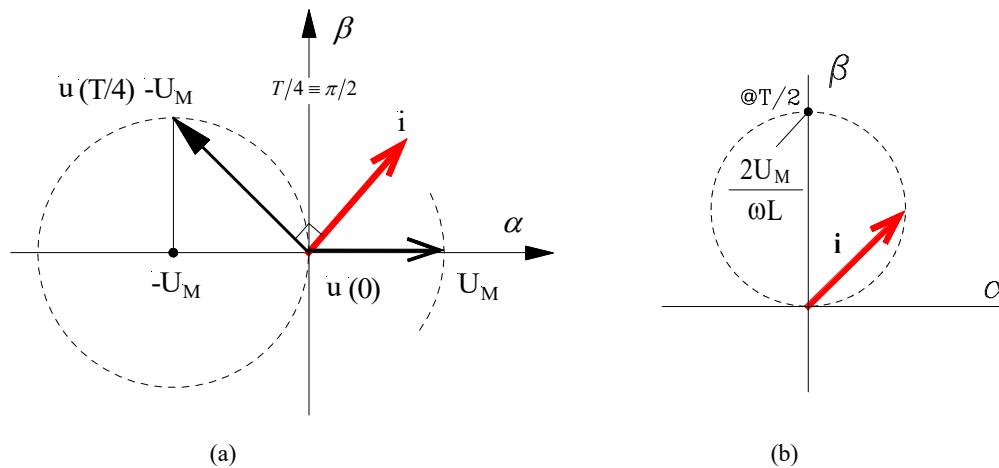


Fig.C.3.3 - Rappresentazione grafica della relazione vettoriale tra tensione e corrente.

La circonferenza che giace interamente sul semipiano sinistro in Fig.C.3.3(a) è la traiettoria del vettore spaziale ($\mathbf{u}-U_M$); in ciascun istante, il vettore di corrente \mathbf{i} si ottiene da quello tramite una rotazione di $\pi/2$ rad in senso orario e riducendolo del fattore ωL . E' facile allora rendersi conto che la traiettoria di \mathbf{i} risulta quella tratteggiata in Fig.C.3.3(b).

Per ottenere l'andamento temporale ad esempio della corrente $i_a(t)$ è sufficiente proiettare il vettore spaziale \mathbf{i} sull'asse reale; è facile rendersi conto che questo approccio è più semplice ed immediato dello studio del sistema tramite la risoluzione delle singole equazioni differenziali (6.4.3.1)²³.

3) $\mathbf{e}=\mathbf{0}_v$, $\mathbf{u}=\mathbf{0}_v$. In questo caso è di interesse l'evoluzione libera del circuito, naturalmente nell'ipotesi di avere condizioni iniziali non nulle. L'equazione (C.3.2) così si particolarizza:

$$R\mathbf{i} + L \frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0 \quad (\text{C.3.6})$$

La soluzione della (C.3.6) è rappresentata dalla

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}(0)e^{-t/\tau} \quad (\text{C.3.7})$$

dove $\tau=L/R$. Val la pena di ricordare infatti che la soluzione di equazioni tipo la (C.3.6) è formalmente identica, per le variabili complesse, a quella che si scrive per le variabili reali.

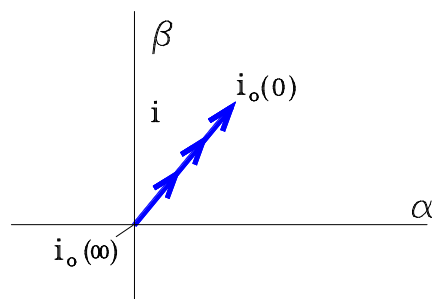


Fig.C.3.4 - Traiettorie del vettore spaziale in evoluzione libera

La traiettoria del vettore spaziale di corrente è riportata in Fig.C.3.4. Si può notare come la fase di \mathbf{i} sia costante, dato che l'esponenziale $e^{-t/\tau}$ è un numero reale e che quindi la fase di \mathbf{i} coincide sempre con quella iniziale di $\mathbf{i}(0)$. Il termine esponenziale influisce invece sull'ampiezza del vettore di corrente, come rappresentato in Fig.C.3.4 tramite frecce.

²³ $i_a(t) = \Re(\mathbf{i}(t)) = \frac{U_M \sin(\omega t)}{\omega L}$

4) $e = \theta_v$, $u = U_M e^{j\omega t}$. L'equazione (C.3.2) così si particularizza:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = u \quad (C.3.8)$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, l'integrale generale della (C.3.8) è rappresentata dall'insieme di un suo integrale particolare $i_p(t)$ e dell'integrale generale dell'omogenea associata, che è dato da

$$i = A e^{-t/\tau} \quad (C.3.9)$$

Se il secondo membro dell'equazione differenziale è un esponenziale, come nel caso della (C.3.8), allora esiste un integrale particolare della forma

$$i_p = I_p e^{j\omega t} \quad (C.3.10)$$

Sostituendo la (C.3.10) nella (C.3.8) si può calcolare il valore di I_p :

$$R I_p e^{j\omega t} + j\omega L I_p e^{j\omega t} = U_M e^{j\omega t} \quad (C.3.11)$$

$$I_p = \frac{U_M}{R + j\omega L} \quad (C.3.12)$$

L'integrale generale della (6.4.3.8) è dunque dato da

$$i = A e^{-t/\tau} + \frac{U_M}{R + j\omega L} e^{j\omega t} \quad (C.3.13)$$

Il valore di A si calcola imponendo la condizione iniziale $i(0) = \theta_v$:

$$A = -\frac{U_M}{R + j\omega L} \quad (C.3.14)$$

e quindi:

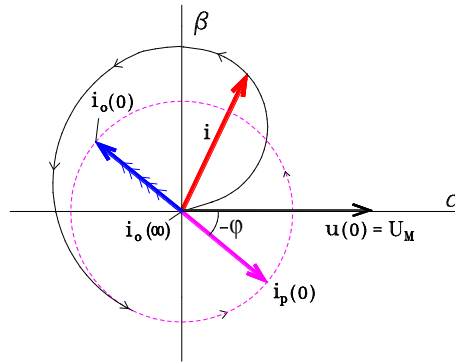


Fig.C.3.5 - Traiettoria con $e=0$, $u=U_M e^{j\omega t}$ dunque legato al transitorio iniziale.

$$i = -\frac{U_M}{R + j\omega L} e^{-t/\tau} + \frac{U_M}{R + j\omega L} e^{j\omega t} \quad (24)$$

(C.3.15)

Tale espressione rappresenta in modo unitario la terna di correnti che percorrono il circuito in esame; la traiettoria nel piano complesso è riportata in Fig.C.3.5.

Si può notare come la componente dovuta all'integrale particolare abbia modulo costante e fase linearmente crescente nel tempo (componente "rotante" del vettore di corrente), mentre la componente relativa all'integrale dell'omogenea abbia fase costante e modulo decrescente esponenzialmente,

Terna dissimmetrica bilanciata di tensioni sinusoidali.

Si consideri la seguente terna dissimmetrica²⁵ bilanciata²⁶ di tensioni:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= 100 \cos(\omega t) \\ u_b(t) &= 75 \cos(\omega t - \pi/2) = 75 \sin(\omega t) \\ u_c(t) &= -100 \cos(\omega t) - 75 \sin(\omega t) = 125 \cos(\omega t - \pi - \arctan(0.75)) \end{aligned} \quad (C.4.1)$$

La loro somma è nulla per costruzione. Le grandezze possono essere rappresentate secondo i fasori temporali:

$$\begin{aligned} \bar{u}_a(t) &= \frac{100}{\sqrt{2}} \\ \bar{u}_b(t) &= \frac{75}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/2} = -j \frac{75}{\sqrt{2}} \\ \bar{u}_c(t) &= -\frac{100}{\sqrt{2}} + j \frac{75}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (C.4.2)$$

e la loro rappresentazione grafica è riportata in Fig.C.4.1.

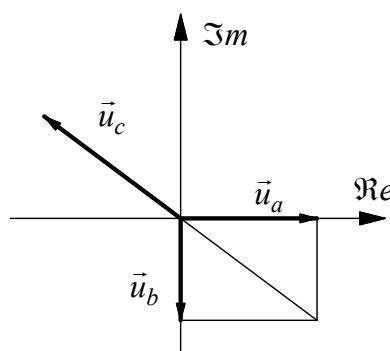


Fig.C.4.1 – Fasori temporali di una terna dissimmetrica bilanciata

Applicando la definizione di vettore spaziale si trova:

²⁴ $\frac{U_M}{|Z|e^{j\varphi}} \quad \varphi = \text{atg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

²⁵ Il termine "dissimmetrico" significa che le tensioni non sono tra loro di uguale ampiezza e/o non sono reciprocamente sfasate di $2\pi/3$.

²⁶ Il termine "bilanciato" significa che le tensioni hanno somma istantanea nulla.

$$u_\alpha(t) = 100 \cos(\omega t)$$

$$u_\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_b - u_c) = \frac{1}{\sqrt{3}}(100 \cos(\omega t) + 150 \sin(\omega t)) \quad (\text{C.4.3})$$

Al variare del tempo, il vettore spaziale relativo alle (C.4.3) traccia con il suo vertice una ellisse come mostrato in Fig.C.4.2. Il vettore spaziale non ha più modulo costante, come nel caso di terne sinusoidali simmetriche. Inoltre, la traiettoria ellittica è percorsa a velocità variabile, anche se mediamente pari a ω , dato che il vertice compie una rivoluzione completa ad ogni periodo.

Con una serie di passaggi laboriosi, ma non concettualmente difficili, si può dimostrare che il vettore spaziale (C.4.3) può essere scritto nella forma

$$u(t) = u_\alpha + ju_\beta = (93.3 + j28.8)e^{j\omega t} + (6.7 + j28.8)e^{-j\omega t} \quad (\text{C.4.4})$$

dalla quale si riconosce che si tratta della somma di due vettori spaziali di ampiezza costante, uno rotante con velocità costante ω (senso antiorario, vettore diretto o *forward*) e l'altro con velocità costante $-\omega$ (senso orario, vettore inverso o *backward*). La Fig.C.4.3 illustra quanto descritto, nell'istante $t=0$ e nei due particolari istanti di tempo in cui i vettori si sommano e si sottraggono.

Il risultato (C.4.4) può essere facilmente ottenuto conoscendo la *Teoria delle componenti simmetriche*, sviluppata per lo studio dei sistemi trifase con grandezze dissimmetriche. Tale teoria afferma, per esempio, che una terna dissimmetrica di tensioni sinusoidali come la (C.4.1), rappresentata dalle espressioni simboliche (C.4.2), può essere scomposta nella somma di una terna simmetrica e di una terna simmetrica inversa e fornisce le equazioni per questa scomposizione. Il primo vettore spaziale nella (C.4.4) è associato alla terna diretta, mentre il secondo è rappresentativo della terna inversa. Per maggiori dettagli sulla Teoria delle componenti simmetriche si veda ad esempio: G.Someda, “*Elementi di Elettrotecnica generale*”, Patron (PD), 1977.

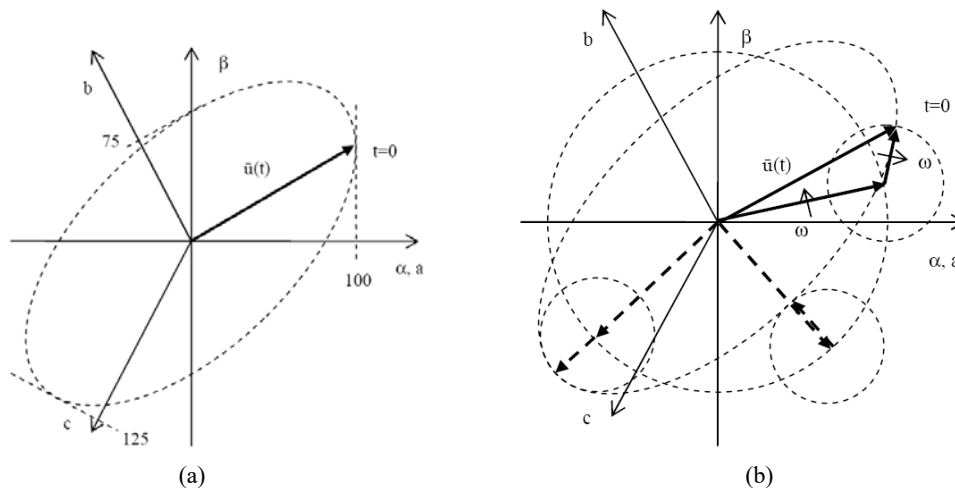


Fig.C.4.2 – (a) Traiettorie del vettore spaziale di una terna bilanciata dissimmetrica.
(b) Scomposizione in componente diretta e inversa.

Tecniche di modulazione vettoriale nella conversione cc-ca.

Tradizionalmente, le tecniche di modulazione a sottooscillazione sono realizzate con circuiti analogici e si basano, in generale, sul confronto diretto tra un segnale portante ed una funzione modulante. Una loro diretta realizzazione digitale è senz'altro esclusa dall'elevata frequenza di campionamento che si renderebbe necessaria per mantenere le stesse caratteristiche spettrali delle tensioni prodotte.

Quando la modulazione a sottooscillazione viene impiegata in un inverter di tensione per alimentare motori trifase si rendono necessari tre distinti comparatori analogici, uno per fase, ai quali giunge una terna trifase di funzioni modulanti legate alle tensioni che si vogliono produrre. Questa topologia circuitale può risultare in antitesi con le attuali tendenze costruttive degli azionamenti trifase. Infatti, negli azionamenti ad elevate prestazioni è spesso presente un controllo di corrente a catena chiusa; in tal caso, le funzioni modulanti (o *referimenti di tensione*) vengono prodotte dai regolatori di corrente. Con la disponibilità crescente di microcontrollori a tecnologia RISC (*reduced instruction set computer*) e DSP (*digital signal processor*) a basso costo ed elevata velocità di calcolo, la tendenza attuale è di realizzare in via digitale anche il controllo di corrente, che era solitamente realizzato in via analogica per ottenere una elevata banda passante. Risulta allora inutilmente oneroso convertire i riferimenti di tensione prodotti in forma digitale dai regolatori di corrente in funzioni modulanti di tipo analogico.

Se si considera poi che il risultato della PWM è la generazione di segnali logici (dunque digitali) di comando agli interruttori di potenza dell'inverter, è senz'altro più immediato includere nello stesso processore anche una tecnica digitale di generazione della PWM.

I primi passi in questa direzione sono stati compiuti ricreando l'equivalente digitale della tecnica a sottooscillazione, ottenendo PWM a campionamento regolare.

In tempi abbastanza recenti è stata poi sviluppata una nuova generazione di tecniche, di tipo intrinsecamente digitale, che vanno sotto il nome di *modulazione vettoriale* (*space vector modulation, SVM*). Queste nuove tecniche si prestano ad essere direttamente realizzate con algoritmi digitali e producono tensioni di fase analoghe a quelle che si produrrebbero con i tradizionali metodi analogici²⁷, rimanendo all'interno dei limiti di frequenza di campionamento dettati dai circuiti digitali.

I principali vantaggi della modulazione vettoriale risiedono nella immediatezza della loro realizzazione digitale unitamente ad un contenuto armonico inferiore a quello della modulazione a sottooscillazione, specialmente per elevati indici di modulazione.

La modulazione vettoriale.

Le tecniche di modulazione scalare presentate in precedenza controllano la tensione in uscita dell'invertitore trattando separatamente ciascuna delle tre fasi. La modulazione vettoriale invece considera unitariamente l'inverter di tensione e, con la frequenza di commutazione (*switching frequency*) prestabilita, aggiorna l'assetto degli interruttori di tutti e tre i rami dell'invertitore.

Considerando che ciascuna delle fasi (*a*, *b*, *c*) può essere connessa ad una tensione di $\pm U_{dc}/2$, e applicando per ciascuna combinazione la definizione di vettore spaziale, si trova che gli stati attivi sono rappresentati da una stella di sei vettori di stato (*state vectors*) di ampiezza $2/3 U_{dc}$ e sfasati rispetto a quelli adiacenti di $\pi/3$, occupando i vertici di un esagono centrato nell'origine degli assi, come mostra la Fig.D.1.1.

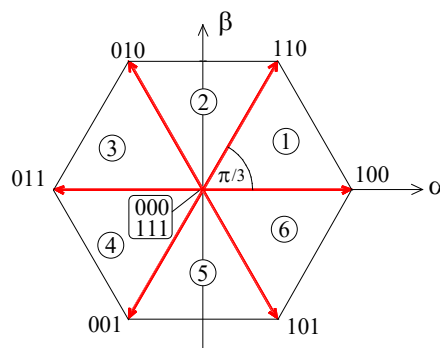


Fig.D.1.1 - Vettori spaziali relativi agli stati attivi dell'inverter di tensione trifase

I due stati attivi 000 ed 111, relativi rispettivamente alle configurazioni con tutti gli interruttori inferiori e superiori chiusi, hanno il relativo vettore spaziale nullo, ed occupano pertanto l'origine degli

²⁷ Andrebbero naturalmente utilizzate particolari funzioni modulanti.

assi del piano complesso. La stella dei vettori individua sei regioni o *settori*, convenzionalmente numerati in senso antiorario come mostra la Fig.D.1.1. In questo testo anche i vettori spaziali di stato verranno numerati da 1 a 6 (1=100, 2=110 e così via)²⁸. L'espressione del generico vettore di stato è data da:

$$\mathbf{v}_m = \frac{2}{3} U_{dc} e^{j(m-1)\pi/3} \quad m \in [1..6] \quad (\text{B.1.1})$$

Essenzialmente, la SVM è dunque una tecnica digitale che fa uso della rappresentazione vettoriale delle tensioni trifase da generare, utilizzando le definizioni ed i metodi dei vettori spaziali. Si supponga ad esempio di voler produrre una terna sinusoidale simmetrica di tensioni di fase, con pulsazione angolare ω ed ampiezza U_I :

$$\begin{aligned} u_a^* &= U_I \cos(\omega t) \\ u_b^* &= U_I \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ u_c^* &= U_I \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (\text{D.1.1})$$

Applicando la definizione di vettore spaziale alla terna in esame, si ottiene il vettore

$$\mathbf{u}^* = u_a^* + ju_b^* = U_I e^{j\omega t} \quad (\text{D.1.2})$$

di ampiezza pari a quella di ciascuna delle grandezze della terna trifase e rotante nel piano complesso con velocità angolare ω . La sua traiettoria è dunque una circonferenza di raggio U_I e rappresenta la traiettoria del riferimento del vettore spaziale \mathbf{u}^* da produrre²⁹.

Si suddivida ora la scala dei tempi in intervalli di durata T_c , chiamato tempo di modulazione (*switching period*). Il reciproco di T_c definisce la frequenza di modulazione. Durante ogni intervallo T_c la terna trifase di tensioni da generare è assunta costante, per esempio pari al valore che assume all'inizio dell'intervallo in questione e rappresentata dunque da un fasore spaziale costante in modulo e posizione angolare. La peculiarità delle tecniche di modulazione vettoriale risiede nel meccanismo di sintesi del vettore di riferimento attraverso un'applicazione ponderata dei vettori di stato attivi dell'inverter, all'interno di ogni singolo periodo di commutazione. Si consideri ad esempio di voler riprodurre un vettore di riferimento \mathbf{u}^* che giace nel primo settore, compreso tra i due vettori di stato 100 e 110, come riportato in Fig.D.1.2:

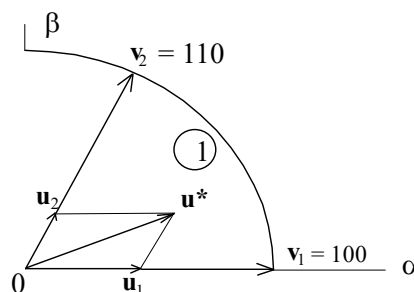


Fig.D.1.2 - Sintesi di un vettore tramite la modulazione vettoriale

²⁸ Non è infrequente una scelta diversa, che attribuisce a ciascun vettore il valore decimale corrispondente al valore binario a tre bit (100=4, 110=6 e così via).

²⁹ Più in generale, il riferimento per il modulatore vettoriale è un vettore spaziale di tensione che descrive una qualunque traiettoria nel piano complesso. Si può dimostrare che il luogo delle traiettorie realizzabili con l'inverter è l'esagono che unisce i sei vettori attivi di stato dell'inverter.

Il vettore \mathbf{u}^* , che ha componente reale u_α^* e immaginaria u_β^* può essere anche scomposto nelle componenti \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , secondo le direzioni dei vettori di stato ad esso adiacenti (Fig.D.1.2). Si può allora scrivere, sempre secondo la notazione dei vettori spaziali:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (\text{D.1.3})$$

I vettori \mathbf{u}_1 ed \mathbf{u}_2 si possono ricavare dai rispettivi vettori di stato \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 applicando ciascuno di essi per una parte del periodo di commutazione T_c in modo da ottenere, *mediamente* (simbolo $\langle \rangle$) in un periodo T_c , proprio il vettore desiderato³⁰.

E' facile comprendere che la permanenza dell'inverter in ciascuno dei due stati attivi adiacenti dovrà essere proporzionale alla proiezione del vettore di riferimento su ciascuno stato. Indicando con T_1 la permanenza nello stato 100 e con T_2 quella nello stato 110 deve essere allora:

$$\langle \mathbf{u}^* \rangle = \frac{T_1 \mathbf{v}_1 + T_2 \mathbf{v}_2}{T_c} \quad (\text{D.1.4})$$

Numerando in senso antiorario da 1 a 6 i settori compresi tra i vettori di stato attivi si può generalizzare la (D.1.4) per un vettore di riferimento che si trova nel settore $m \in [1..6]$:

$$\langle \mathbf{u}^* \rangle = \frac{T_m}{T_c} \mathbf{v}_m + \frac{T_{m+1}}{T_c} \mathbf{v}_{m+1} \quad (\text{D.1.5})$$

dove si è naturalmente indicato con T_m l'intervallo durante il quale l'inverter produce il vettore \mathbf{v}_m e con T_{m+1} quello in cui produce il vettore \mathbf{v}_{m+1} che precede il vettore \mathbf{v}_m in senso antiorario. L'espressione dell' m -esimo vettore di stato è la seguente:

$$\mathbf{v}_m = \frac{2}{3} U_{dc} e^{j(m-1)\pi/3} \quad m \in [1..6] \quad (\text{D.1.6})$$

e naturalmente vale anche con l'indice m aumentato di uno:

$$\mathbf{v}_{m+1} = \frac{2}{3} U_{dc} e^{jm\pi/3} \quad m \in [1..6] \quad (\text{D.1.7})$$

Sostituendo le (D.1.6) e (D.1.7) nella (D.1.5) e separando la componente reale ed immaginaria si ottengono due equazioni, che possono essere risolte nelle incognite T_m e T_{m+1} . Sfruttando anche la (D.1.2) dopo qualche passaggio si ottiene³¹:

$$T_m = \sqrt{3} \frac{T_c}{U_{dc}} \left[u_\alpha^* \sin(m\pi/3) - u_\beta^* \cos(m\pi/3) \right] \quad (\text{D.1.8})$$

$$T_{m+1} = \sqrt{3} \frac{T_c}{U_{dc}} \left[u_\beta^* \cos[(m-1)\pi/3] - u_\alpha^* \sin[(m-1)\pi/3] \right] \quad (\text{D.1.9})$$

³⁰ In questa sede non viene considerato il ripple di tensione che si genera durante la modulazione. Questo è equivalente ad assumere una frequenza di switching infinitamente grande. Esistono comunque analisi approfondite sul contenuto armonico ad alta frequenza della SVM, (che sfruttano ad esempio il "wall model" di Bennett, 1933) la cui complessità matematica esula però dai limiti del presente testo. Nel seguito, ci si limiterà a ricordare qualche risultato, quando esso sia utile in termini di confronto tra le diverse realizzazioni pratiche della SVM.

³¹ I passaggi sono riportati in Appendice.

Nella rimanente parte del periodo di commutazione viene applicato il vettore nullo, 000 oppure 111:

$$T_0 = T_c - T_m - T_{m+1} \quad (D.1.10)$$

Nel caso della generazione di un sistema trifase di tensioni, la massima ampiezza che si può generare corrisponde a quella per cui $T_0=0$ in qualcuno degli intervalli T_c che compongono il periodo delle tensioni sinusoidali desiderate. In tal caso il vettore di riferimento risulta percorrere la circonferenza inscritta nell'esagono formato dall'unione dei vertici dei sei vettori di stato dell'inverter, come mostra la Fig. D.1.3.

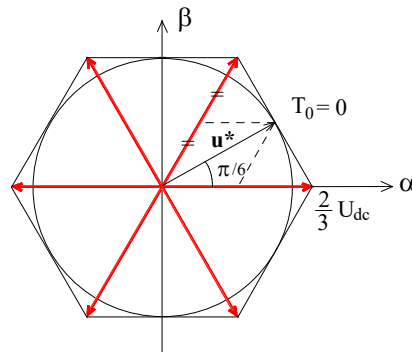


Fig.D.1.3 - Limite della tensione sinusoidale pura generabile con la SVM

L'ampiezza di u^* , e dunque della terna di grandezze sinusoidali, è facilmente calcolabile in corrispondenza di $\vartheta=\pi/6$. In quel punto, infatti, le proiezioni di u^* sono entrambe pari a metà dei vettori di stato adiacenti, che dunque vengono applicati ciascuno per metà periodo di commutazione. Naturalmente in quel punto risulta $T_0=0$ e si può scrivere:

$$U_1 = \frac{2}{3} U_{dc} \cos(\pi/6) = 0.577 U_{dc} \quad (D.1.11)$$

a cui corrisponde un indice di modulazione M :

$$M = \frac{U_{dc}/\sqrt{3}}{2U_{dc}/\pi} = 0.907 \quad (D.1.12)$$

pari al valore della massima ampiezza della armonica fondamentale che si ottiene con la tecnica già illustrata della distorsione della funzione modulante.

Dalla Fig. D.1.3 si evince che il limite di $T_0=0$ viene raggiunto solo nei punti di tangenza tra la circonferenza inscritta e l'esagono. Se si rinuncia a produrre una terna di tensioni puramente sinusoidali (a parte naturalmente l'armonica alla frequenza di modulazione e le sue multiple) ci si può spingere fino a far compiere al vettore di riferimento proprio la traiettoria esagonale (*saturazione esagonale*). Si può dimostrare che in tal caso la fondamentale ha un'ampiezza di:

$$U_1 = \frac{3}{\pi} \left[2 \frac{U_{dc}}{\sqrt{3}} \ln \operatorname{tg}(\pi/3) \right] = 0.6056 U_{dc} \quad (D.1.13)$$

Come svantaggio, appariranno anche armoniche a bassa frequenza, multiple della fondamentale.

Una volta calcolati i tempi T_m e T_{m+1} di applicazione dei vettori di stato all'interno di un dato intervallo di commutazione, è necessario generare i comandi ai dispositivi di commutazione dell'inverter, con la corretta tempistica. A questo scopo, sono state sviluppate diverse tecniche realizzative; nei prossimi paragrafi verranno illustrate le più significative.

D.1.1 La modulazione vettoriale simmetrica.

Sebbene vi siano numerose possibili sequenze con cui applicare i vettori di stato, è intuibile che il numero minimo di commutazioni degli interruttori dell'inverter si ha quando si passa da uno stato all'altro facendo commutare un solo ramo dell'inverter. In più, dato che in tutti i settori ci sono dei vettori nulli da applicare, conviene che ogni ciclo di modulazione inizi e finisca con lo stesso vettore nullo. Infine è stato dimostrato che se si utilizzano vettori di stato adiacenti per la sintesi del vettore di riferimento si ottiene il più favorevole contenuto armonico possibile. Una tecnica molto usata negli attuali inverter a modulazione vettoriale, che rispetta tutti questi principi, è detta modulazione simmetrica (*double edge modulation*).

La Fig.D.1.1.1 ne rappresenta il funzionamento nel primo settore, riportando i comandi agli ingressi (*gate*) degli switch superiori di ogni ramo (S_1, S_3, S_5 di Fig. D.1.1.1).

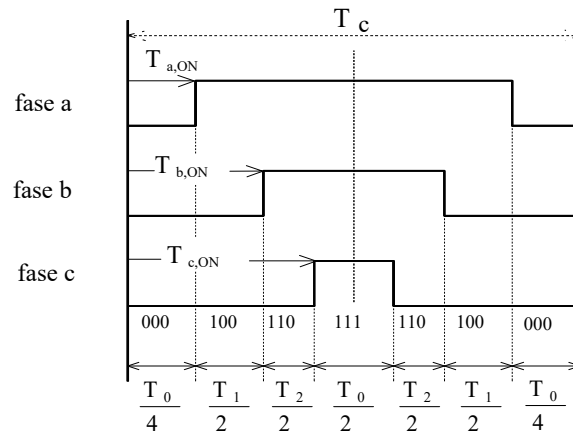


Fig. D.1.1.1 - Modulazione vettoriale simmetrica nel primo settore

Si è per esempio considerato un periodo di commutazione nel primo settore, quando gli stati attivi sono 100 per la durata T_1 e 110 per la durata T_2 , e vale naturalmente la (D.1.10). Come si vede, gli impulsi sono centrati nella mezzera del periodo di commutazione e lo stato nullo è ricavato in parte agli estremi con il vettore 000 e parte al centro, con il vettore 111. Osservando la Fig. D.1.1.1 è facile derivare i tempi di accensione e di spegnimento di ciascuno switch; si ha ad esempio:

$$T_{a,ON} = T_0/4$$

$$T_{b,ON} = T_0/4 + T_1/2 \quad (D.1.1.1)$$

$$T_{c,ON} = T_0/4 + T_1/2 + T_2/2$$

Naturalmente al variare del settore in cui giace il vettore spaziale di riferimento di tensione cambiano anche le espressioni per i tempi di accensione e spegnimento, rimanendo comunque analoghi a quelli indicati dalla (D.1.1.1). Risulta evidente che per una corretta applicazione della tecnica occorre stabilire, per ogni periodo di commutazione, il settore di appartenenza di \mathbf{u}^* . Esso viene calcolato tramite una apposita routine di riconoscimento, che essenzialmente estrae l'informazione desiderata tramite la funzione

$$\xi = \operatorname{atg}\left(\frac{u_{\beta}^*}{u_{\alpha}^*}\right) \quad m = \begin{cases} 1 & 0 \leq \xi \leq \pi/3 \\ : & \\ 6 & 5\pi/3 \leq \xi \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{D.1.1.2})$$

Nella pratica esistono vari espedienti per evitare l'onere computazionale della funzione arcotangente. Si può ad esempio far ricorso a tabelle precalcolate e poste nella memoria dati del microprocessore, oppure lavorare direttamente con le ampiezze normalizzate di u_{α}^* e u_{β}^* .

A prima vista, le tecniche di modulazione vettoriale sono completamente diverse da quelle analogiche viste nei paragrafi precedenti. E' invece possibile dimostrare che ogni tecnica vettoriale è analoga alla modulazione uniforme (*regular sampled PWM*) adottando una particolare funzione modulante. Per la modulazione simmetrica, essa è definita come segue:

$$u_{mf}(\vartheta) = \frac{2M\sqrt{3}}{\pi} \begin{cases} \cos(\vartheta - \pi/6) & 0 \leq \vartheta \leq \pi/3 \\ \sqrt{3}\cos(\vartheta) & \pi/3 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{cases} \quad (\text{D.1.1.3})$$

che deve risultare unitaria in corrispondenza del massimo indice di modulazione, che pertanto risulta $M=0.907$ in corrispondenza a $\vartheta=\pi/6$.

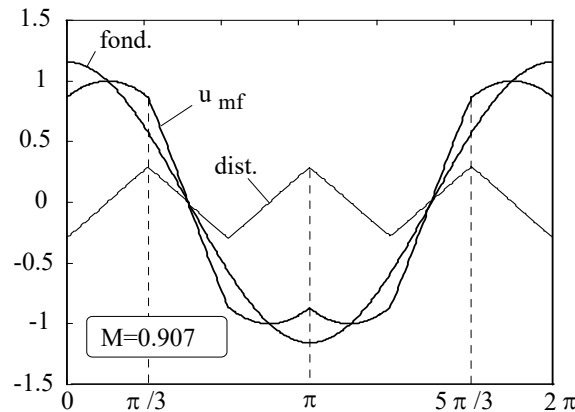


Fig.D.1.1.2 - Funzione modulante nella modulazione simmetrica, con $M=0.907$.

La funzione (D.1.1.3) viene prolungata per antisimmetria nel successivo quarto di periodo e per simmetria nel restante mezzo periodo, come illustrato nella Fig. D.1.1.2.

La funzione modulante descritta dalla (D.1.1.3) può essere *approssimata* come la somma di un termine sinusoidale puro (componente fondamentale, "fond." in Fig. D.1.1.2) e di un termine distortore triangolare ("dist." in Fig. D.1.1.2). Si può allora agevolmente calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione modulante, che risulta il seguente:

$$u_{mf}(\vartheta) = \frac{4}{\pi} M \left\{ \cos(\vartheta) - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3r+1)(3r+2)} \cos(3(2r+1)\vartheta) \right\} \quad (\text{D.1.1.4})$$

La componente distortore contiene solo armoniche multiple di tre; le tensioni concatenate pertanto ne risultano prive, come pure le correnti in un sistema simmetrico connesso a stella senza filo neutro. Il termine distortore abbassa il picco della funzione sinusoidale modulante, consentendo di raggiungere un indice di modulazione M identico a quello della sottooscillazione sinusoidale con introduzione della terza armonica.

La modulazione simmetrica può essere considerato l'approccio classico; come anticipato, ne sono state sviluppate diverse varianti. Ad esempio, dato che l'effetto dell'applicazione dei due possibili stati nulli è lo stesso, se si rinuncia alla simmetria si ha a disposizione un grado di libertà in più. Ogni

strategia, a parità di fondamentale generata, presenta delle peculiarità, che vanno pesate prima di effettuare la scelta definitiva.

Appendice: Dimostrazione della formula (D.1.8) e (D.1.9).

Generico vettore spaziale di tensione:

$$\langle u^* \rangle = \frac{T_m v_m + T_{m+1} v_{m+1}}{T_c} = \frac{T_m}{T_c} \frac{2}{3} U_{dc} e^{j(m-1)\pi/3} + \frac{T_{m+1}}{T_c} \frac{2}{3} U_{dc} e^{jm\pi/3}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} u_\alpha^* = \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} [T_m \cos((m-1)\pi/3) + T_{m+1} \cos(m\pi/3)] \\ u_\beta^* = \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} [T_m \sin((m-1)\pi/3) + T_{m+1} \sin(m\pi/3)] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_\alpha^* \sin(m\pi/3) - u_\beta^* \cos(m\pi/3) &= \\ &= \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_m [\cos((m-1)\pi/3) \sin(m\pi/3) - \sin((m-1)\pi/3) \cos(m\pi/3)] = \\ &= \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_m \sin(m\pi/3 - (m-1)\pi/3) = \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_m \sin(\pi/3) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_{dc}}{T_c} T_m \Rightarrow T_m = \sqrt{3} \frac{T_c}{U_{dc}} [u_\alpha^* \sin(m\pi/3) - u_\beta^* \cos(m\pi/3)] \end{aligned} \quad (D.1.8)$$

Procedendo allo stesso modo, si ottiene anche:

$$\begin{aligned} u_\alpha^* \sin((m-1)\pi/3) - u_\beta^* \cos((m-1)\pi/3) &= \\ &= \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_{m+1} [\sin((m-1)\pi/3) \cos(m\pi/3) - \sin(m\pi/3) \cos((m-1)\pi/3)] = \\ &= \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_{m+1} \sin((m-1)\pi/3 - m\pi/3) = \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_{m+1} \sin(-\pi/3) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_{dc}}{T_c} T_{m+1} \Rightarrow T_{m+1} = -\sqrt{3} \frac{T_c}{U_{dc}} [u_\alpha^* \sin((m-1)\pi/3) - u_\beta^* \cos((m-1)\pi/3)] \end{aligned} \quad (D.1.9)$$

A riprova della correttezza delle espressioni, ad per il settore $m=1$, facendo coincidere il vettore con V100 si ottengono correttamente $T_1=T_c$ e $T_2=0$, mentre facendolo coincidere con V110 si ottiene $T_1=0$ e $T_2=T_c$, che è ancora la corretta distribuzione dei tempi. Analogamente per gli altri settori.

Convertitori statici CC – CA

prof. M.Zigliotto

Sommario

VETTORI SPAZIALI E TECNICHE DI MODULAZIONE VETTORIALI PER INVERTER TRIFASE	3
INTRODUZIONE.	3
<i>A. Definizione di vettore spaziale.</i>	<i>3</i>
<i>A.1 Bilanci energetici.</i>	<i>4</i>
<i>A.2 La componente omopolare.</i>	<i>4</i>
<i>A.3 Il vettore spaziale in \mathbb{R}^2.</i>	<i>4</i>
<i>A.3.1 Terne di grandezze non bilanciate.</i>	<i>6</i>
<i>B. Sistema di riferimento rotante</i>	<i>6</i>
<i>C. Esempi applicativi.</i>	<i>8</i>
<i>C.1 Terna simmetrica di tensioni sinusoidali</i>	<i>8</i>
<i>C.1.1 Confronto con la rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali.</i>	<i>9</i>
<i>C.2 Terna simmetrica di tensioni ad onda quadra</i>	<i>10</i>
<i>D. Tecniche di modulazione vettoriale nella conversione cc-ca.</i>	<i>10</i>
<i>D.1 La modulazione vettoriale.</i>	<i>11</i>
<i>D.1.1 La modulazione vettoriale simmetrica.</i>	<i>15</i>
APPENDICE: DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA (D.1.8) E (D.1.9).	18

Vettori spaziali e tecniche di modulazione vettoriali per inverter trifase

Introduzione.

Un carico, o sistema, trifase è un quadripolo descritto da una terna di tensioni (u_a, u_b, u_c) relative ai suoi morsetti a, b, c , rispetto al quarto morsetto, n , detto filo neutro, e una terna di correnti (i_a, i_b, i_c), entranti (se la convenzione di segno è quella degli utilizzatori) nei suoi terminali a, b, c , dette fasi. Le tensioni prendono il nome di tensioni stellate, le correnti sono dette di fase.

La differenza delle tensioni stellate ordinata in modo ciclico ($u_{ab}=u_a-u_b$, $u_{bc}=u_b-u_c$, $u_{ca}=u_c-u_a$) costituisce la terna delle tensioni concatenate, la cui somma è nulla per il principio di Kirchhoff.

La descrizione interna del sistema trifase porta in genere a definire altre terne di grandezze, per esempio i flussi concatenati ($\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$) e così via. Il vettore spaziale è uno strumento matematico¹ che permette di affrontare lo studio anche dinamico dei sistemi trifase, applicando alle terne di grandezze una trasformazione di coordinate che semplifica significativamente le equazioni in gioco.

A. Definizione di vettore spaziale.

Si consideri un cambio di coordinate che porti la terna attuale (a, b, c) ad essere espressa secondo un sistema ortogonale (α, β, o):

$$\begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_o \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

ovvero, in forma compatta:

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta o} = \mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o} \mathbf{g}_{abc} \quad (\text{A.2})$$

Si ha anche

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_o \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ovvero, in forma compatta:

$$\mathbf{g}_{abc} = \mathbf{T}_{\alpha\beta o/abc} \mathbf{g}_{\alpha\beta o} \quad (\text{A.4})$$

dove si sono poste naturalmente

$$\mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e

¹ In taluni casi, a seconda delle grandezze fisiche considerate, i vettori spaziali si arricchiscono di significato più profondo.

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta o / abc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Il vettore $\mathbf{g}_{\alpha\beta o}$ rappresenta una possibile definizione di *vettore spaziale* associato alla terna trifase $\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b, \mathbf{g}_c$. La trasformazione non è ortogonale, in quanto l'inversa non coincide con la trasposta. Il legame tra le due matrici rimane comunque abbastanza semplice:

$$\mathbf{T}_{abc / \alpha\beta o} = \frac{2}{3} \mathbf{T}_{\alpha\beta o / abc}^T = (\mathbf{T}_{\alpha\beta o / abc})^{-1} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta o / abc} = \frac{3}{2} \mathbf{T}_{abc / \alpha\beta o}^T = (\mathbf{T}_{abc / \alpha\beta o})^{-1} \quad (\text{A.8})$$

A.1 Bilanci energetici.

Si considerino due generiche terne di tensioni e di correnti, relative ad un sistema trifase. La potenza istantanea assorbita dal carico vale:

$$\begin{aligned} p_{abc} &= u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c = \mathbf{u}_{abc}^T \mathbf{i}_{abc} = \\ &= (\mathbf{T}_{\alpha\beta o / abc} \mathbf{u}_{\alpha\beta o})^T \mathbf{T}_{\alpha\beta o / abc} \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \frac{3}{2} \mathbf{T}_{\alpha\beta o / abc}^{-1} \mathbf{T}_{\alpha\beta o / abc} \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \frac{3}{2} \mathbf{u}_{\alpha\beta o}^T \mathbf{i}_{\alpha\beta o} = \frac{3}{2} p_{\alpha\beta o} \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

Si evince dunque che la trasformazione proposta *non sia conservativa per la potenza*, nel senso che la potenza calcolata con le grandezze trasformate va corretta con il fattore 3/2 per avere la reale potenza del sistema trifase. Tale risultato si applica ad ogni calcolo che coinvolga il prodotto di due terne di grandezze ovvero di due vettori spaziali.

A.2 La componente omopolare.

Per una generica terna di grandezze $g_a(t), g_b(t), g_c(t)$, la componente omopolare si definisce come segue:

$$g_{op}(t) = \frac{g_a(t) + g_b(t) + g_c(t)}{3} \quad (\text{A.2.1})$$

Nella gran parte dei casi pratici, essa può essere considerata nulla. In particolare, è nulla per una terna di correnti di fase quando non sia presente il collegamento al filo neutro, o per una terna di tensioni simmetriche.

A.3 Il vettore spaziale in \Re^2 .

Nel caso di componente omopolare nulla, dalla (A.1) si può estrarre la particolarizzazione della definizione di vettore spaziale ad \Re^2 , rendendola esplicita per le componenti secondo gli assi α e β :

$$g_\alpha = \frac{2}{3} \left(g_a - \frac{1}{2} g_b - \frac{1}{2} g_c \right) \quad (\text{A.3.1})$$

$$g_\beta = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} g_b - \frac{\sqrt{3}}{2} g_c \right) \quad (\text{A.3.2})$$

Tali espressioni sono relative ad una coppia (α, β) di assi ortogonali; molto spesso risulta comodo utilizzare la notazione compatta relativa ai numeri complessi, assumendo (in modo del tutto arbitrario) che la componente reale sia g_α e quella immaginaria sia g_β . Formalmente, il vettore spaziale in \Re^2 è dunque esprimibile come un numero complesso²:

² Si ricorda una possibile dimostrazione della formula di Eulero. Si definisca la funzione f come

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_{\alpha\beta}(t) = \frac{2}{3} \left(g_a(t) + e^{j2\pi/3} g_b(t) + e^{j4\pi/3} g_c(t) \right) \quad (\text{A.3.3})$$

dove, per una volta, è stata indicata la generica dipendenza dal tempo delle grandezze coinvolte.

La rappresentazione grafica della definizione (A.3.3) di vettore spaziale in \Re^2 è riportata in Fig.A.3.1.

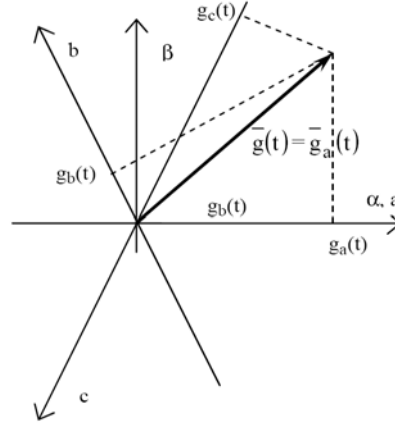


Fig.A.3.1 - Il vettore spaziale $\mathbf{g}(t)$

Come si è detto, partendo dalla terna di grandezze reali \mathbf{g}_{abc} , applicando la (A.4) si ottiene in $\alpha\beta$ un vettore nel piano complesso. E' possibile individuare una terna di assi (a,b,c) in modo che le proiezioni del vettore spaziale su di essi coincidano con le grandezze di partenza (g_a, g_b, g_c) , a meno della componente omopolare. E' infatti possibile ricavare la terna originaria tramite le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} g_a(t) &= \text{Re}[\mathbf{g}(t)] \\ g_b(t) &= \text{Re}[\mathbf{g}(t)e^{-j2\pi/3}] = \text{Re}\left[\frac{2}{3}\left[g_a(t)e^{-j2\pi/3} + g_b(t) + g_c(t)e^{j2\pi/3}\right]\right] \\ g_c(t) &= \text{Re}[\mathbf{g}(t)e^{-j4\pi/3}] = \text{Re}\left[\frac{2}{3}\left[g_a(t)e^{-j4\pi/3} + g_b(t)e^{-j2\pi/3} + g_c(t)\right]\right] \end{aligned} \quad (3) \quad (\text{A.3.4})$$

Si noti come $g_b(t)$ e $g_c(t)$ siano esprimibili come parte reale del vettore spaziale $\mathbf{g}(t)$ ruotato di $2\pi/3$ e di $4\pi/3$ in senso orario (se si assume positivo per gli angoli il verso di rotazione antiorario); è

$$f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}$$

Questo è ammesso in quanto il modulo dell'esponentiale al denominatore è $e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$ il che implica che e^{ix} sia sempre diverso da zero. La derivata di f è, secondo la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{(-\sin x + i \cos x)e^{ix} - (\cos x + i \sin x)ie^{ix}}{e^{i2x}} = \frac{-\sin x e^{ix} - i^2 \sin x e^{ix}}{e^{i2x}} = 0$$

Pertanto f deve essere una funzione costante, quindi dalla seguente relazione

$$f(0) = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{e^0} = 1$$

si vede che tale costante deve essere uguale a 1. Ciò significa che il numeratore ed il denominatore nella definizione di f devono essere uguali per ogni x , ovvero deve valere la Formula di Eulero.

$$^3 \Re \left[g_a \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + g_c \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \Re \left[\frac{1}{2} (-g_a - g_c) \right] = \Re \left[\frac{1}{2} g_b \right]$$

possibile, equivalentemente⁴, spostare degli stessi angoli, in senso antiorario, l'asse su cui fare la proiezione, come evidenziato in Fig.A.3.1.

A.3.1 Terne di grandezze non bilanciate.

Si osservi che $g_a(t)$ è la proiezione sull'asse reale di $\mathbf{g}(t)$ solo in assenza della componente omopolare; vale infatti la relazione:

$$\operatorname{Re}[\mathbf{g}(t)] = g_a(t) = \frac{2}{3} \left[g_a(t) - \frac{1}{2} g_b(t) - \frac{1}{2} g_c(t) \right] = \frac{2}{3} \frac{3}{2} g_a(t) = g_a(t) \quad (\text{A.3.1.1})$$

dove la penultima uguaglianza è frutto dell'ipotesi di terna priva di componente omopolare. La parte immaginaria vale invece:

$$\operatorname{Im}[\mathbf{g}(t)] = g_\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} [g_b(t) - g_c(t)] \quad (\text{A.3.1.2})$$

L'associazione di una terna di grandezze al relativo vettore spaziale, secondo quanto esposto nel par.A.3 non conserva l'eventuale componente omopolare. Siano infatti g_a' , g_b' , g_c' tre grandezze aventi componente omopolare g_{op} , ovvero si possa scrivere

$$\begin{aligned} g_a' &= g_a + g_{op} \\ g_b' &= g_b + g_{op} \\ g_c' &= g_c + g_{op} \end{aligned} \quad (\text{A.3.1.3})$$

dove, per costruzione, è ancora $g_a(t) + g_b(t) + g_c(t) = 0$.

Applicando la trasformazione (6.2.13) alle terne g_a, g_b, g_c e g_a', g_b', g_c' si ottiene lo stesso vettore spaziale $\mathbf{g}(t)$, com'è immediato verificare per sostituzione:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (g_a'(t) + e^{j2\pi/3} g_b'(t) + e^{j4\pi/3} g_c'(t)) = \\ \frac{2}{3} (g_a(t) + e^{j2\pi/3} g_b(t) + e^{j4\pi/3} g_c(t)) + \underbrace{\frac{2}{3} (g_{op}(t) + e^{j2\pi/3} g_{op}(t) + e^{j4\pi/3} g_{op}(t))}_{=0} \end{aligned} \quad (\text{A.3.1.4})$$

e questo prova che la relazione non è conservativa per la componente omopolare.

Si fa presente che la componente omopolare è una grandezza legata alla terna di grandezze, e non singolarmente a ciascuna di esse. In particolare, non è detto che le tre grandezze contribuiscano in modo uguale alla creazione della componente omopolare⁵.

B. Sistema di riferimento rotante

Per le numerose applicazioni nel campo degli azionamenti elettrici, è d'interesse vedere come il vettore spaziale $\mathbf{g} = g_\alpha + jg_\beta$ associato alla generica terna (g_a, g_b, g_c) possa essere espresso secondo un sistema di riferimento ortogonale d, q che ruoti con velocità angolare $\omega_g(t)$ rispetto al sistema stazionario α, β considerato nel paragrafo precedente.

⁴ g_a giace sull'asse reale, dunque l'asse α coincide con l'asse reale. Per ottenere g_b , occorre trovare la parte reale del vettore dopo averlo fatto ruotare di $2\pi/3$ in senso orario. L'asse cercato si deve allora trovare a $2\pi/3$, perchè solo così una rotazione di $-2\pi/3$ lo porterebbe a coincidere con l'asse reale, sul quale verrebbe a poggiare g_b .

⁵ Si considerino ad esempio le tre grandezze con componente omopolare nulla g_a, g_b, g_c . Si aggiunga solo a g_a un valore costante $3k$. A questo punto la terna avrà componente omopolare k , e la terna priva di componente omopolare sarà $g_a - k, g_b - k, g_c - k$, diversa dalla terna di partenza.

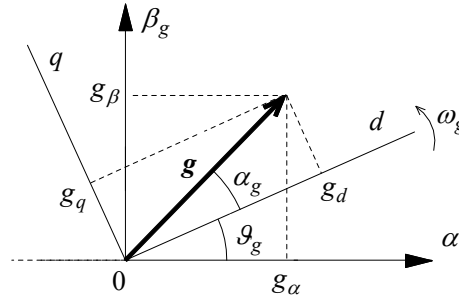


Fig.6.3.1 - Il vettore spaziale secondo un riferimento sincrono d,q

Con riferimento alla Fig.6.3.1 è immediato scrivere

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = |\mathbf{g}| e^{j(\alpha_g + \vartheta_g)} = |\mathbf{g}| e^{j\alpha_g} e^{j\vartheta_g} = \mathbf{g}_{dq} e^{j\vartheta_g} \quad (\text{B.1})$$

e dunque

$$\mathbf{g}_{dq} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} e^{-j\vartheta_g} \quad (\text{B.2})$$

che può essere scritta in forma di relazione matriciale separando la parte reale ed immaginaria:

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & \sin(\vartheta_g) \\ -\sin(\vartheta_g) & \cos(\vartheta_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

dove con $\mathbf{g}_g = g_d + jg_q$ si è indicato il vettore spaziale espresso secondo il generico riferimento rotante d, q . La fase ϑ_g di tale sistema (che, in certe applicazioni, viene detto *sistema sincrono*) è funzione del tempo, ed in generale è data da

$$\vartheta_g(t) = \int_0^t \omega_g(t) dt + \vartheta_g(0) \quad (\text{B.4})$$

La matrice $\mathbf{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq}$ che appare nella (B.3) è ortonormale, dunque la sua inversa coincide con la trasposta:

$$\mathbf{T}_{dq \rightarrow \alpha\beta} = \mathbf{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & -\sin(\vartheta_g) \\ \sin(\vartheta_g) & \cos(\vartheta_g) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Come si vedrà nel seguito, molto spesso si ricorre a qualche particolare sistema di riferimento (per esempio, solidale con il rotore del motore) perchè questo permette di scrivere le equazioni delle tensioni degli avvolgimenti e della coppia particolarmente semplici e adatte ad immediate interpretazioni.

A volte può accadere che nella trattazione di azionamenti per alcune macchine elettriche anisotrope sia conveniente o necessario mantenere la rappresentazione tridimensionale, adottando dunque una trasformazione che preservi anche la componente omopolare.

La matrice di trasformazione dal sistema (α, β, o) al sistema (d, q, o) rotante attorno al comune asse "o" si ottiene in modo diretto dalla (B.5), con la condizione di mantenere la stessa componente omopolare:

$$\mathbf{T}_{dqo/\alpha\beta o} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & -\sin(\vartheta_g) & 0 \\ \sin(\vartheta_g) & \cos(\vartheta_g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

che ha per inversa la matrice

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta o/dqo} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & \sin(\vartheta_g) & 0 \\ -\sin(\vartheta_g) & \cos(\vartheta_g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

La matrice completa di trasformazione dal sistema (a,b,c) al sistema rotante (d,q,o) si ottiene osservando che

$$\mathbf{g}_{dqo} = \mathbf{T}_{\alpha\beta o/dqo} \mathbf{g}_{\alpha\beta o} = \mathbf{T}_{\alpha\beta o/dqo} \mathbf{T}_{abc/\alpha\beta o} \mathbf{g}_{abc} = \mathbf{T}_{abc/dqo} \mathbf{g}_{abc} \quad (\text{B.8})$$

e sostituendo le (B.7) e (B.5) si ottiene

$$\mathbf{T}_{abc/dqo} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & \cos(\vartheta_g - 2\pi/3) & \cos(\vartheta_g - 4\pi/3) \\ -\sin(\vartheta_g) & -\sin(\vartheta_g - 2\pi/3) & -\sin(\vartheta_g - 4\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

e la sua inversa

$$\mathbf{T}_{dqo/abc} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_g) & -\sin(\vartheta_g) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\vartheta_g - 2\pi/3) & -\sin(\vartheta_g - 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\vartheta_g - 4\pi/3) & -\sin(\vartheta_g - 4\pi/3) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

C. Esempi applicativi

Verranno ora presi in esame alcuni esempi di applicazione dei vettori spaziali.

C.1 Terna simmetrica di tensioni sinusoidali

Si consideri un sistema simmetrico di tensioni sinusoidali:

$$\begin{aligned} u_a &= U_M \cos(\vartheta + \alpha_o) \\ u_b &= U_M \cos(\vartheta + \alpha_o - 2\pi/3) \\ u_c &= U_M \cos(\vartheta + \alpha_o - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (\text{C.1.1})$$

con $\vartheta = \omega t$, ω =pulsazione angolare, espressa in rad/s, e α_o =fase iniziale. Applicando la definizione di vettore spaziale, risulta, dopo qualche passaggio⁶:

⁶ Una traccia per i passaggi è la seguente. Ponendo $\xi = \vartheta + \alpha_o$ per praticità, si scrive:

$$\mathbf{u} = \frac{2}{3} U_M \left[\cos(\xi) + \cos(\xi - 2\pi/3) e^{j2\pi/3} + \cos(\xi - 4\pi/3) e^{j4\pi/3} \right]$$

e ricordando le formule $\cos(\alpha)\cos(\beta) = 1/2 [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$; $\sin(\alpha)\cos(\beta) = 1/2 [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ si ha:

$$\mathbf{u} = U_M e^{j(\vartheta + \alpha_o)} \quad (\text{C.1.2})$$

Si tratta dunque, nel sistema di riferimento stazionario α, β , di un vettore di ampiezza U_M e rotante con velocità angolare ω . Le componenti reale ed immaginaria di tale vettore risultano naturalmente:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= U_M \cos(\vartheta + \alpha_o) \\ u_\beta &= U_M \sin(\vartheta + \alpha_o) \end{aligned} \quad (\text{C.1.3})$$

e la traiettoria sul piano complesso è una circonferenza, percorsa dal vertice del vettore con velocità angolare costante pari a ω .

Se si considera un sistema di riferimento rotante $d-q$ in senso antiorario, con velocità ω pari alla pulsazione angolare della terna (C.1.1), applicando l'espressione (B.2) in cui si ponga $\vartheta_g = \omega t$ si ottiene

$$\mathbf{u}_g = U_M e^{j\alpha_o} \quad (\text{C.1.4})$$

che rappresenta il vettore spaziale della terna di grandezze sinusoidali espresse secondo il nuovo sistema di riferimento rotante.

C.1.1 Confronto con la rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali.

Per lo studio dei circuiti in regime sinusoidale isofrequenziale è d'uso comune la rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali. Si tratta, com'è noto, di uno strumento matematico che consente di abbinare ad ogni grandezza sinusoidale una grandezza complessa, contenente l'informazione dell'ampiezza e della fase iniziale della grandezza rappresentata. Più precisamente, alla grandezza sinusoidale

$$u_a = U_M \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (\text{C.1.1.1})$$

si associa il *fasore temporale*

$$\bar{u}_a = \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha_0} \quad (\text{C.1.1.2})$$

Naturalmente si può scrivere anche:

$$\begin{aligned} \bar{u}_b &= \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j(\alpha_0 - 2\pi/3)} \\ \bar{u}_c &= \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j(\alpha_0 - 4\pi/3)} \end{aligned} \quad (\text{C.1.1.3})$$

Se si confronta la (C.1.1.2) con la (C.1.4) si nota la loro corrispondenza formale, a meno di un fattore di scala sulle ampiezze, dettato dal fatto che in regime sinusoidale spesso si utilizzano i valori efficaci delle grandezze. Dunque, il vettore spaziale associato ad una terna trifase simmetrica, espresso in un sistema di riferimento rotante con velocità pari alla pulsazione angolare, è fisso⁷ e ha un'espressione pressoché identica a quella adottata nella rappresentazione simbolica della stessa terna secondo i fasori temporali.

L'analogia è comunque solo formale, perché le differenze concettuali sono notevoli; mentre i fasori temporali sono riferiti ad una singola grandezza, sono definiti solo in regime stazionario e per grandezze isofrequenziali, i vettori spaziali possono essere applicati a terne qualsiasi e questo li rende uno strumento flessibile e potente anche nello studio dei fenomeni transitori.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{2}{3} U_M \left[\cos(\xi) + \frac{1}{2} (\cos(\xi - 4\pi/3) + \cos(\xi) + \cos(\xi - 2\pi/3)) \right] + \\ &+ \frac{2}{3} U_M \left[j \frac{1}{2} (\sin(\xi) - \sin(\xi - 4\pi/3) + \sin(\xi) - \sin(\xi - 2\pi/3) + \sin(\xi) - \sin(\xi)) \right] = \frac{2}{3} U_M \left[\frac{3}{2} \cos(\vartheta + \alpha_o) + j \frac{3}{2} \sin(\vartheta + \alpha_o) \right] \end{aligned}$$

⁷ Si può anche associare il fasore temporale al vettore spaziale definito nel sistema stazionario, all'istante $t=0$.

C.2 Terna simmetrica di tensioni ad onda quadra

Si consideri una terna di tensioni ad onda quadra, sfasate reciprocamente di $2\pi/3$ e di ampiezza pari ad $U_{dc}/2$, come illustrato in Fig.C.2.1.

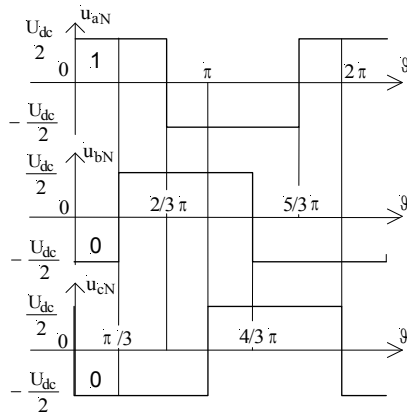


Fig.C.2.1 - Terna simmetrica di tensioni

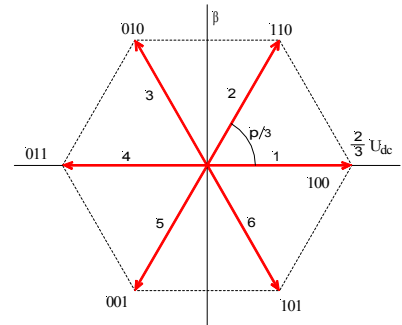


Fig.C.2.2 - Vettori spaziali relativi

E' innanzitutto da notare che si tratta di una terna di grandezze con componente omopolare non nulla. Tali grandezze rimangono costanti per archi di $\pi/3$, e allo scadere di ciascun intervallo vi è una tensione che si inverte. Applicando ripetutamente la definizione, si trova un vettore spaziale di ampiezza $2/3 U_{dc}$, che ruota a scatti di $\pi/3$, occupando in successione i vertici di un esagono centrato nell'origine degli assi, come mostra la Fig.C.2.2.

Si esegua ora l'operazione inversa, ovvero si ricavi ad esempio la tensione u_a come proiezione del vettore spaziale sull'asse α nelle successive posizioni 1,2,...6 da lui occupate. Si trova la forma d'onda riportata in Fig.C.2.3 (a).

Si noti come la trasformazione inversa restituisca una forma d'onda priva della componente omopolare che, in base ad esempio alla (A.3.1.3), risulta essere un'onda quadra di periodo $2\pi/3$ ed ampiezza $U_{dc}/6$ (Fig.C.2.3 (b)).

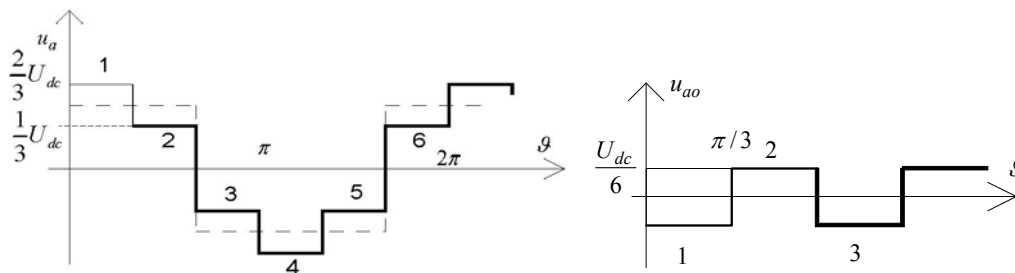


Fig.C.2.3 - (a) u_a priva della componente omopolare.

(b) La componente omopolare.

D. Tecniche di modulazione vettoriale nella conversione cc-ca.

Tradizionalmente, le tecniche di modulazione a sottooscillazione sono realizzate con circuiti analogici e si basano, in generale, sul confronto diretto tra un segnale portante ed una funzione modulante. Una loro diretta realizzazione digitale è senz'altro esclusa dall'elevata frequenza di campionamento che si renderebbe necessaria per mantenere le stesse caratteristiche spettrali delle tensioni prodotte.

Quando la modulazione a sottooscillazione viene impiegata in un inverter di tensione per alimentare motori trifase si rendono necessari tre distinti comparatori analogici, uno per fase, ai quali giunge una terna trifase di funzioni modulanti legate alle tensioni che si vogliono produrre. Questa topologia circuitale può risultare in antitesi con le attuali tendenze costruttive degli

azionamenti trifase. Infatti, negli azionamenti ad elevate prestazioni è spesso presente un controllo di corrente a catena chiusa; in tal caso, le funzioni modulanti (o *riferimenti di tensione*) vengono prodotte dai regolatori di corrente. Con la disponibilità crescente di microcontrollori a tecnologia RISC (*reduced instruction set computer*) e DSP (*digital signal processor*) a basso costo ed elevata velocità di calcolo, la tendenza attuale è di realizzare in via digitale anche il controllo di corrente, che era solitamente realizzato in via analogica per ottenere una elevata banda passante. Risulta allora inutilmente oneroso convertire i riferimenti di tensione prodotti in forma digitale dai regolatori di corrente in funzioni modulanti di tipo analogico.

Se si considera poi che il risultato della PWM è la generazione di segnali logici (dunque digitali) di comando agli interruttori di potenza dell'inverter, è senz'altro più immediato includere nello stesso processore anche una tecnica digitale di generazione della PWM.

I primi passi in questa direzione sono stati compiuti ricreando l'equivalente digitale della tecnica a sottooscillazione, ottenendo PWM a campionamento regolare.

In tempi abbastanza recenti è stata poi sviluppata una nuova generazione di tecniche, di tipo intrinsecamente digitale, che vanno sotto il nome di *modulazione vettoriale* (*space vector modulation, SVM*). Queste nuove tecniche si prestano ad essere direttamente realizzate con algoritmi digitali e producono tensioni di fase analoghe a quelle che si produrrebbero con i tradizionali metodi analogici⁸, rimanendo all'interno dei limiti di frequenza di campionamento dettati dai circuiti digitali.

I principali vantaggi della modulazione vettoriale risiedono nella immediatezza della loro realizzazione digitale unitamente ad un contenuto armonico inferiore a quello della modulazione a sottooscillazione, specialmente per elevati indici di modulazione.

D.1 La modulazione vettoriale.

Le tecniche di modulazione scalare presentate in precedenza controllano la tensione in uscita dell'invertitore trattando separatamente ciascuna delle tre fasi. La modulazione vettoriale invece considera unitariamente l'inverter di tensione e, con la frequenza di commutazione (*switching frequency*) prestabilita, aggiorna l'assetto degli interruttori di tutti e tre i rami dell'invertitore.

Considerando che ciascuna delle fasi (*a, b, c*) può essere connessa ad una tensione di $\pm U_{dc}/2$, e applicando per ciascuna combinazione la definizione di vettore spaziale, si trova che gli stati attivi sono rappresentati da una stella di sei vettori di stato (*state vectors*) di ampiezza $2/3 U_{dc}$ e sfasati rispetto a quelli adiacenti di $\pi/3$, occupando i vertici di un esagono centrato nell'origine degli assi, come mostra la Fig.D.1.1.

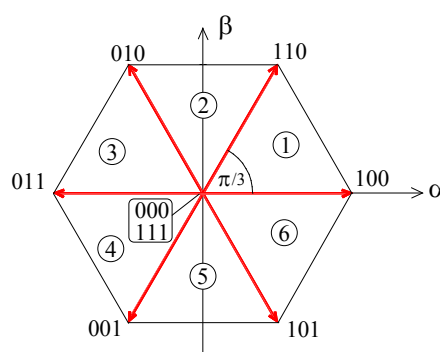


Fig.D.1.1 - Vettori spaziali relativi agli stati attivi dell'inverter di tensione trifase

I due stati attivi 000 ed 111, relativi rispettivamente alle configurazioni con tutti gli interruttori inferiori e superiori chiusi, hanno il relativo vettore spaziale nullo, ed occupano pertanto l'origine

⁸ Andrebbero naturalmente utilizzate particolari funzioni modulanti.

degli assi del piano complesso. La stella dei vettori individua sei regioni o *settori*, convenzionalmente numerati in senso antiorario come mostra la Fig.D.1.1. In questo testo anche i vettori spaziali di stato verranno numerati da 1 a 6 (1=100, 2=110 e così via)⁹. L'espressione del generico vettore di stato è data da:

$$\mathbf{v}_m = \frac{2}{3} U_{dc} e^{j(m-1)\pi/3} \quad m \in [1..6] \quad (\text{B.1.1})$$

Essenzialmente, la SVM è dunque una tecnica digitale che fa uso della rappresentazione vettoriale delle tensioni trifase da generare, utilizzando le definizioni ed i metodi dei vettori spaziali. Si supponga ad esempio di voler produrre una terna sinusoidale simmetrica di tensioni di fase, con pulsazione angolare ω ed ampiezza U_1 :

$$\begin{aligned} u_a^* &= U_1 \cos(\omega t) \\ u_b^* &= U_1 \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ u_c^* &= U_1 \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (\text{D.1.1})$$

Applicando la definizione di vettore spaziale alla terna in esame, si ottiene il vettore

$$\mathbf{u}^* = u_a^* + ju_b^* = U_1 e^{j\omega t} \quad (\text{D.1.2})$$

di ampiezza pari a quella di ciascuna delle grandezze della terna trifase e rotante nel piano complesso con velocità angolare ω . La sua traiettoria è dunque una circonferenza di raggio U_1 e rappresenta la traiettoria del riferimento del vettore spaziale \mathbf{u}^* da produrre¹⁰.

Si suddivida ora la scala dei tempi in intervalli di durata T_c , chiamato tempo di modulazione (*switching period*). Il reciproco di T_c definisce la frequenza di modulazione. Durante ogni intervallo T_c la terna trifase di tensioni da generare è assunta costante, per esempio pari al valore che assume all'inizio dell'intervallo in questione e rappresentata dunque da un fasore spaziale costante in modulo e posizione angolare. La peculiarità delle tecniche di modulazione vettoriale risiede nel meccanismo di sintesi del vettore di riferimento attraverso un'applicazione ponderata dei vettori di stato attivi dell'inverter, all'interno di ogni singolo periodo di commutazione. Si consideri ad esempio di voler riprodurre un vettore di riferimento \mathbf{u}^* che giace nel primo settore, compreso tra i due vettori di stato 100 e 110, come riportato in Fig.D.1.2:

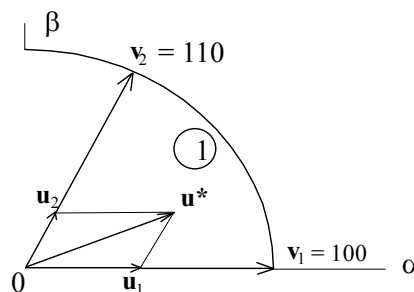


Fig.D.1.2 - Sintesi di un vettore tramite la modulazione vettoriale

⁹ Non è infrequente una scelta diversa, che attribuisce a ciascun vettore il valore decimale corrispondente al valore binario a tre bit (100=4, 110=6 e così via).

¹⁰ Più in generale, il riferimento per il modulatore vettoriale è un vettore spaziale di tensione che descrive una qualunque traiettoria nel piano complesso. Si può dimostrare che il luogo delle traiettorie realizzabili con l'inverter è l'esagono che unisce i sei vettori attivi di stato dell'inverter.

Il vettore \mathbf{u}^* , che ha componente reale u_α^* e immaginaria u_β^* può essere anche scomposto nelle componenti \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , secondo le direzioni dei vettori di stato ad esso adiacenti (Fig.D.1.2). Si può allora scrivere, sempre secondo la notazione dei vettori spaziali:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (\text{D.1.3})$$

I vettori \mathbf{u}_1 ed \mathbf{u}_2 si possono ricavare dai rispettivi vettori di stato \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 applicando ciascuno di essi per una parte del periodo di commutazione T_c in modo da ottenere, *mediamente* (simbolo $\langle \rangle$) in un periodo T_c , proprio il vettore desiderato¹¹.

E' facile comprendere che la permanenza dell'inverter in ciascuno dei due stati attivi adiacenti dovrà essere proporzionale alla proiezione del vettore di riferimento su ciascuno stato. Indicando con T_1 la permanenza nello stato 100 e con T_2 quella nello stato 110 deve essere allora:

$$\langle \mathbf{u}^* \rangle = \frac{T_1 \mathbf{v}_1 + T_2 \mathbf{v}_2}{T_c} \quad (\text{D.1.4})$$

Numerando in senso antiorario da 1 a 6 i settori compresi tra i vettori di stato attivi si può generalizzare la (D.1.4) per un vettore di riferimento che si trova nel settore $m \in [1..6]$:

$$\langle \mathbf{u}^* \rangle = \frac{T_m}{T_c} \mathbf{v}_m + \frac{T_{m+1}}{T_c} \mathbf{v}_{m+1} \quad (\text{D.1.5})$$

dove si è naturalmente indicato con T_m l'intervallo durante il quale l'inverter produce il vettore \mathbf{v}_m e con T_{m+1} quello in cui produce il vettore \mathbf{v}_{m+1} che precede il vettore \mathbf{v}_m in senso antiorario. L'espressione dell' m -esimo vettore di stato è la seguente:

$$\mathbf{v}_m = \frac{2}{3} U_{dc} e^{j(m-1)\pi/3} \quad m \in [1..6] \quad (\text{D.1.6})$$

e naturalmente vale anche con l'indice m aumentato di uno:

$$\mathbf{v}_{m+1} = \frac{2}{3} U_{dc} e^{jm\pi/3} \quad m \in [1..6] \quad (\text{D.1.7})$$

Sostituendo le (D.1.6) e (D.1.7) nella (D.1.5) e separando la componente reale ed immaginaria si ottengono due equazioni, che possono essere risolte nelle incognite T_m e T_{m+1} . Sfruttando anche la (D.1.2) dopo qualche passaggio si ottiene¹²:

$$T_m = \sqrt{3} \frac{T_c}{U_{dc}} [u_\alpha^* \sin(m\pi/3) - u_\beta^* \cos(m\pi/3)] \quad (\text{D.1.8})$$

$$T_{m+1} = \sqrt{3} \frac{T_c}{U_{dc}} [u_\beta^* \cos[(m-1)\pi/3] - u_\alpha^* \sin[(m-1)\pi/3]] \quad (\text{D.1.9})$$

¹¹ In questa sede non viene considerato il ripple di tensione che si genera durante la modulazione. Questo è equivalente ad assumere una frequenza di switching infinitamente grande. Esistono comunque analisi approfondite sul contenuto armonico ad alta frequenza della SVM, (che sfruttano ad esempio il "wall model" di Bennett, 1933) la cui complessità matematica esula però dai limiti del presente testo. Nel seguito, ci si limiterà a ricordare qualche risultato, quando esso sia utile in termini di confronto tra le diverse realizzazioni pratiche della SVM.

¹² I passaggi sono riportati in Appendice.

Nella rimanente parte del periodo di commutazione viene applicato il vettore nullo, 000 oppure 111:

$$T_0 = T_c - T_m - T_{m+1} \quad (D.1.10)$$

Nel caso della generazione di un sistema trifase di tensioni, la massima ampiezza che si può generare corrisponde a quella per cui $T_0=0$ in qualcuno degli intervalli T_c che compongono il periodo delle tensioni sinusoidali desiderate. In tal caso il vettore di riferimento risulta percorrere la circonferenza inscritta nell'esagono formato dall'unione dei vertici dei sei vettori di stato dell'inverter, come mostra la Fig. D.1.3.

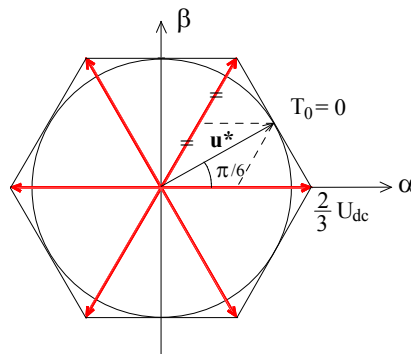


Fig.D.1.3 - Limite della tensione sinusoidale pura generabile con la SVM

L'ampiezza di u^* , e dunque della terna di grandezze sinusoidali, è facilmente calcolabile in corrispondenza di $\vartheta=\pi/6$. In quel punto, infatti, le proiezioni di u^* sono entrambe pari a metà dei vettori di stato adiacenti, che dunque vengono applicati ciascuno per metà periodo di commutazione. Naturalmente in quel punto risulta $T_0=0$ e si può scrivere:

$$U_1 = \frac{2}{3} U_{dc} \cos(\pi/6) = 0.577 U_{dc} \quad (D.1.11)$$

a cui corrisponde un indice di modulazione M :

$$M = \frac{U_{dc}/\sqrt{3}}{2U_{dc}/\pi} = 0.907 \quad (D.1.12)$$

pari al valore della massima ampiezza della armonica fondamentale che si ottiene con la tecnica già illustrata della distorsione della funzione modulante.

Dalla Fig. D.1.3 si evince che il limite di $T_0=0$ viene raggiunto solo nei punti di tangenza tra la circonferenza inscritta e l'esagono. Se si rinuncia a produrre una terna di tensioni puramente sinusoidali (a parte naturalmente l'armonica alla frequenza di modulazione e le sue multiple) ci si può spingere fino a far compiere al vettore di riferimento proprio la traiettoria esagonale (*saturation esagonale*). Si può dimostrare che in tal caso la fondamentale ha un'ampiezza di:

$$U_1 = \frac{3}{\pi} \left[2 \frac{U_{dc}}{\sqrt{3}} \ln \operatorname{tg}(\pi/3) \right] = 0.6056 U_{dc} \quad (D.1.13)$$

Come svantaggio, appariranno anche armoniche a bassa frequenza, multiple della fondamentale.

Una volta calcolati i tempi T_m e T_{m+1} di applicazione dei vettori di stato all'interno di un dato intervallo di commutazione, è necessario generare i comandi ai dispositivi di commutazione dell'inverter, con la corretta tempistica. A questo scopo, sono state sviluppate diverse tecniche realizzative; nei prossimi paragrafi verranno illustrate le più significative.

D.1.1 La modulazione vettoriale simmetrica.

Sebbene vi siano numerose possibili sequenze con cui applicare i vettori di stato, è intuibile che il numero minimo di commutazioni degli interruttori dell'inverter si ha quando si passa da uno stato all'altro facendo commutare un solo ramo dell'inverter. In più, dato che in tutti i settori ci sono dei vettori nulli da applicare, conviene che ogni ciclo di modulazione inizi e finisca con lo stesso vettore nullo. Infine è stato dimostrato che se si utilizzano vettori di stato adiacenti per la sintesi del vettore di riferimento si ottiene il più favorevole contenuto armonico possibile. Una tecnica molto usata negli attuali inverter a modulazione vettoriale, che rispetta tutti questi principi, è detta modulazione simmetrica (*double edge modulation*).

La Fig.D.1.1.1 ne rappresenta il funzionamento nel primo settore, riportando i comandi agli ingressi (*gate*) degli switch superiori di ogni ramo (S_1, S_3, S_5 di Fig. D.1.1.1).

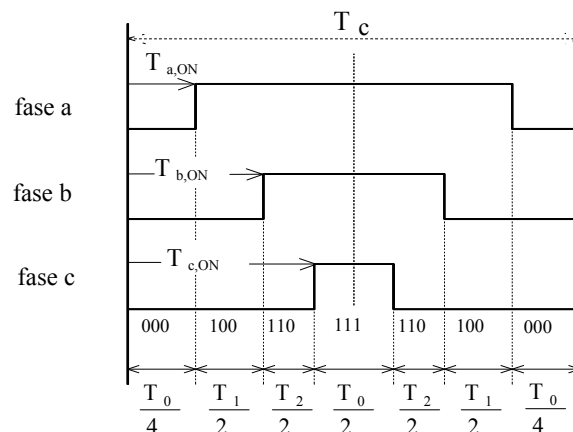


Fig. D.1.1.1 - Modulazione vettoriale simmetrica nel primo settore

Si è per esempio considerato un periodo di commutazione nel primo settore, quando gli stati attivi sono 100 per la durata T_1 e 110 per la durata T_2 , e vale naturalmente la (D.1.10). Come si vede, gli impulsi sono centrati nella mezzera del periodo di commutazione e lo stato nullo è ricavato in parte agli estremi con il vettore 000 e parte al centro, con il vettore 111. Osservando la Fig. D.1.1.1 è facile derivare i tempi di accensione e di spegnimento di ciascuno switch; si ha ad esempio:

$$\begin{aligned} T_{a,ON} &= T_0/4 \\ T_{b,ON} &= T_0/4 + T_1/2 \\ T_{c,ON} &= T_0/4 + T_1/2 + T_2/2 \end{aligned} \quad (D.1.1.1)$$

Naturalmente al variare del settore in cui giace il vettore spaziale di riferimento di tensione cambiano anche le espressioni per i tempi di accensione e spegnimento, rimanendo comunque analoghi a quelli indicati dalla (D.1.1.1). Risulta evidente che per una corretta applicazione della tecnica occorre stabilire, per ogni periodo di commutazione, il settore di appartenenza di \mathbf{u}^* . Esso viene calcolato tramite una apposita routine di riconoscimento, che essenzialmente estrae l'informazione desiderata tramite la funzione

$$\xi = \operatorname{atg}\left(\frac{u_{\beta}^*}{u_{\alpha}^*}\right) \quad m = \begin{cases} 1 & 0 \leq \xi \leq \pi/3 \\ : & : \\ 6 & 5\pi/3 \leq \xi \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{D.1.1.2})$$

Nella pratica esistono vari espedienti per evitare l'onere computazionale della funzione arcotangente. Si può ad esempio far ricorso a tabelle precalcolate e poste nella memoria dati del microprocessore, oppure lavorare direttamente con le ampiezze normalizzate di u_{α}^* e u_{β}^* .

A prima vista, le tecniche di modulazione vettoriale sono completamente diverse da quelle analogiche viste nei paragrafi precedenti. E' invece possibile dimostrare che ogni tecnica vettoriale è analoga alla modulazione uniforme (*regular sampled PWM*) adottando una particolare funzione modulante. Per la modulazione simmetrica, essa è definita come segue:

$$u_{mf}(\vartheta) = \frac{2M\sqrt{3}}{\pi} \begin{cases} \cos(\vartheta - \pi/6) & 0 \leq \vartheta \leq \pi/3 \\ \sqrt{3}\cos(\vartheta) & \pi/3 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{cases} \quad (\text{D.1.1.3})$$

che deve risultare unitaria in corrispondenza del massimo indice di modulazione, che pertanto risulta $M=0.907$ in corrispondenza a $\vartheta=\pi/6$.

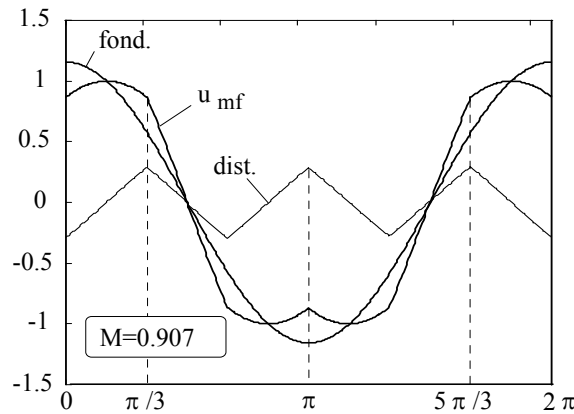


Fig.D.1.1.2 - Funzione modulante nella modulazione simmetrica, con $M=0.907$.

La funzione (D.1.1.3) viene prolungata per antisimmetria nel successivo quarto di periodo e per simmetria nel restante mezzo periodo, come illustrato nella Fig. D.1.1.2.

La funzione modulante descritta dalla (D.1.1.3) può essere *approssimata* come la somma di un termine sinusoidale puro (componente fondamentale, "fond." in Fig. D.1.1.2) e di un termine distortore triangolare ("dist." in Fig. D.1.1.2). Si può allora agevolmente calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione modulante, che risulta il seguente:

$$u_{mf}(\vartheta) = \frac{4}{\pi} M \left\{ \cos(\vartheta) - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3r+1)(3r+2)} \cos(3(2r+1)\vartheta) \right\} \quad (\text{D.1.1.4})$$

La componente distortore contiene solo armoniche multiple di tre; le tensioni concatenate pertanto ne risultano prive, come pure le correnti in un sistema simmetrico connesso a stella senza filo neutro. Il termine distortore abbassa il picco della funzione sinusoidale modulante, consentendo di raggiungere un indice di modulazione M identico a quello della sottooscillazione sinusoidale con introduzione della terza armonica.

La modulazione simmetrica può essere considerato l'approccio classico; come anticipato, ne sono state sviluppate diverse varianti. Ad esempio, dato che l'effetto dell'applicazione dei due possibili

stati nulli è lo stesso, se si rinuncia alla simmetria si ha a disposizione un grado di libertà in più. Ogni strategia, a parità di fondamentale generata, presenta delle peculiarità, che vanno pesate prima di effettuare la scelta definitiva.

Appendice: Dimostrazione della formula (D.1.8) e (D.1.9).

Generico vettore spaziale di tensione:

$$\langle u^* \rangle = \frac{T_m v_m + T_{m+1} v_{m+1}}{T_c} = \frac{T_m}{T_c} \frac{2}{3} U_{dc} e^{j(m-1)\pi/3} + \frac{T_{m+1}}{T_c} \frac{2}{3} U_{dc} e^{jm\pi/3}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} u_\alpha^* = \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} [T_m \cos((m-1)\pi/3) + T_{m+1} \cos(m\pi/3)] \\ u_\beta^* = \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} [T_m \sin((m-1)\pi/3) + T_{m+1} \sin(m\pi/3)] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_\alpha^* \sin(m\pi/3) - u_\beta^* \cos(m\pi/3) &= \\ &= \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_m [\cos((m-1)\pi/3) \sin(m\pi/3) - \sin((m-1)\pi/3) \cos(m\pi/3)] = \\ &= \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_m \sin(m\pi/3 - (m-1)\pi/3) = \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_m \sin(\pi/3) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_{dc}}{T_c} T_m \Rightarrow T_m = \sqrt{3} \frac{T_c}{U_{dc}} [u_\alpha^* \sin(m\pi/3) - u_\beta^* \cos(m\pi/3)] \end{aligned} \quad (D.1.8)$$

Procedendo allo stesso modo, si ottiene anche:

$$\begin{aligned} u_\alpha^* \sin((m-1)\pi/3) - u_\beta^* \cos((m-1)\pi/3) &= \\ &= \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_{m+1} [\sin((m-1)\pi/3) \cos(m\pi/3) - \sin(m\pi/3) \cos((m-1)\pi/3)] = \\ &= \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_{m+1} \sin((m-1)\pi/3 - m\pi/3) = \frac{2}{3} \frac{U_{dc}}{T_c} T_{m+1} \sin(-\pi/3) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_{dc}}{T_c} T_{m+1} \Rightarrow T_{m+1} = -\sqrt{3} \frac{T_c}{U_{dc}} [u_\alpha^* \sin((m-1)\pi/3) - u_\beta^* \cos((m-1)\pi/3)] \end{aligned} \quad (D.1.9)$$

A riprova della correttezza delle espressioni, ad per il settore $m=1$, facendo coincidere il vettore con V100 si ottengono correttamente $T_1=T_c$ e $T_2=0$, mentre facendolo coincidere con V110 si ottiene $T_1=0$ e $T_2=T_c$, che è ancora la corretta distribuzione dei tempi. Analogamente per gli altri settori.

PMSM – dimensionamento e rete termica

prof. M.Zigliotto

Sommario

DIMENSIONAMENTO E RETI TERMICHE.....	3
A. <i>Esempio di dimensionamento di un servomotore brushless sinusoidale.....</i>	3
A.1 Calcolo dei momenti di inerzia.....	3
A.2 Inerzia equivalente per il sistema vite-madrevite.....	4
A.3 Calcolo della velocità massima.	5
A.4 Calcolo della coppia di accelerazione.....	5
A.5 Dimensionamento del servomotore.	6
A.6 Verifica della scelta del motore.	6
B. <i>I principi del calcolo termico.....</i>	8
B.1 La resistenza termica.....	8
B.2 Reti termiche.	9
B.2.1 Esercizio 1.....	11

Dimensionamento e reti termiche

A. Esempio di dimensionamento di un servomotore brushless sinusoidale.

Si analizza il caso di un motore brushless accoppiato ad una slitta con una trasmissione a vite con ricircolo di sfere e cuscinetti assiali a rulli. La Fig.1 illustra il setup sperimentale.

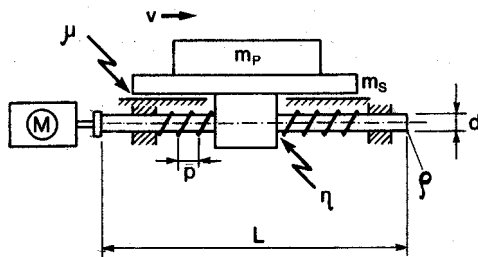


Fig.1 – Setup elettro-meccanico

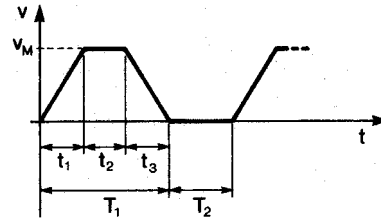


Fig.2 – Funzionamento S3

I dati del sistema sono i seguenti:

Massa della slitta m_s	10 Kg
Massa del pezzo m_p	40 Kg
Passo della vite p	5 mm
Lunghezza della vite L	0.5 m
Diametro della vite d	25 mm
Densità dell'acciaio ρ	$7.75 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$
Coefficiente di attrito acciaio-acciaio	$\mu=0.15$

Il pezzo deve compiere un ciclo di lavoro ripetitivo caratterizzato dal profilo cinematico di Fig.2. Con riferimento ai simboli utilizzati, i dati sono i seguenti:

Tempo di accelerazione t_1	0.167 s
Tempo di velocità costante t_2	0.167 s
Tempo di decelerazione t_3	0.167 s
Durata della lavorazione T_1	0.5 s
Durata della pausa T_2	0.25 s
Avanzamento del pezzo S	0.15 m

A.1 Calcolo dei momenti di inerzia.

Per il dimensionamento del servomotore è essenziale il calcolo delle coppie di carico; il primo passo è dunque la determinazione dei momenti di inerzia delle parti coinvolte, riportati all'albero motore.

$$\text{Massa della vite: } m_v = \rho \pi r^2 L = 7.75 \cdot 10^3 \pi (12.5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0.5 = 1.9 \text{ Kg}$$

Momento d'inerzia della vite: $J_v = \frac{1}{2} m_v r^2 = \frac{1}{2} 1.9 (12.5 \cdot 10^{-3})^2 = 148.5 \cdot 10^{-6} \text{ Kg m}^2$

A.2 Inerzia equivalente per il sistema vite-madrevite.

Il sistema è riportato schematicamente in Fig.1. Il motore fa ruotare la vite, che a sua volta fa avanzare o indietreggiare la madrevite. Si definisce *passo* della vite p l'avanzamento lineare della madrevite per un giro completo della vite. Vale allora la proporzione:

$$p : 2\pi = x(t) : \vartheta_m(t) \quad (\text{A.2.1})$$

da cui:

$$x(t) = \left(\frac{p}{2\pi} \right) \vartheta_m(t) \quad (\text{A.2.2})$$

In questo caso, velocità e accelerazione valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(\frac{p}{2\pi} \right) \omega_m(t) \\ a(t) &= \left(\frac{p}{2\pi} \right) \alpha_m(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Al ruotare del pignone, la madrevite trasla ed ipotizzando un sistema di trasmissione privo di perdite, tutta l'energia meccanica viene trasferita dalla vite alla madrevite. Si indica con $m_T = m_p + m_s$ la massa totale del gruppo traslante. Il bilancio delle potenze fornisce allora:

$$\begin{aligned} \tau_1 \omega_m &= f_1 v = f \frac{p}{2\pi} \omega_m \\ \tau_1 &= f_1 \frac{p}{2\pi} = \left(m_T \frac{dv}{dt} + f_c \right) \frac{p}{2\pi} = m_T \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \frac{d\omega_m}{dt} + f_c \frac{p}{2\pi} \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

dove τ_1 e f_1 rappresentano rispettivamente la coppia e la forza trasferita dalla vite alla madrevite e al suo carico e f_c è la reazione tangenziale dovuta all'attrito della slitta sul supporto. Indicando con J_m il momento di inerzia del motore e con J_v quello della vite, la coppia complessiva prodotta dal motore vale

$$\tau_m = (J_m + J_v) \frac{d\omega_m}{dt} + \tau_1 \quad (\text{A.2.5})$$

Sostituendo la seconda delle (A.2.4) nella (A.2.5) si ottiene:

$$\tau_m = (J_m + J_v) \frac{d\omega_m}{dt} + m_T \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \frac{d\omega_m}{dt} + f_c \frac{p}{2\pi} = J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt} + f_c \frac{p}{2\pi} \quad (\text{A.2.6})$$

dove si è posto

$$J_{eq} = J_m + J_v + m_T \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \quad (\text{A.2.7})$$

che rappresenta il momento di inerzia equivalente dell'intero sistema visto dal motore. La quantità $p/2\pi$ è detta *raggio equivalente* del sistema vite-madrevite. E' interessante osservare come la massa del carico subisca una scala che dipende dal quadrato del passo della vite. L'inerzia del carico viene dunque fortemente ridotta (dal punto di vista del motore elettrico) per sistemi con *raggio*

equivalente ridotto. Più “fitto” è il filetto, maggiore è la riduzione di inerzia sperimentata dal motore.

Con riferimento al presente dimensionamento, data la rigidità della trasmissione (anelastica), si può riportare all'albero motore l'intera massa del carico m_p e della slitta m_s , e calcolare l'inerzia complessiva¹ J_c vista dal motore tramite la (A.2.7):

$$J_c = J_v + (m_p + m_s) \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 = 148.5 \cdot 10^{-6} + (40 + 10) \left(\frac{0.005}{2\pi} \right)^2 = 180 \cdot 10^{-6} \text{ Kgm}^2 \quad (\text{A.2.8})$$

A.3 Calcolo della velocità massima.

Si analizza adesso in dettaglio il profilo di velocità richiesto dalla particolare applicazione, riportato in Fig.2. La velocità massima del carico (v_M) si ricava considerando che i tempi di esecuzione del profilo di velocità sono imposti, come pure l'avanzamento totale del pezzo nel ciclo. Si può scrivere:

$$S_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{v_M}{t_1} t_1^2 = \frac{1}{2} v_M t_1$$

$$S_2 = v_M t_2$$

$$S_3 = \frac{1}{2} d t_3^2 = \frac{1}{2} \frac{v_M}{t_3} t_3^2 = \frac{1}{2} v_M t_3$$

dove a e d sono rispettivamente l'accelerazione e decelerazione del pezzo. Dall'uguaglianza

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = v_M \left(\frac{t_1}{2} + t_2 + \frac{t_3}{2} \right)$$

si trova $v_M = 0.45 \text{ m/s}$. Si può ora calcolare la massima velocità (angolare) del motore. Se v_M è la massima velocità lineare, v_M/p sarà il numero di giri/s e quindi

$$\Omega_M = \frac{v_M}{p} 2\pi = \frac{0.45}{0.005} 2\pi = 565.5 \text{ rad/s}$$

A.4 Calcolo della coppia di accelerazione.

L'accelerazione del motore si calcola come

$$\alpha_M = \frac{\Omega_M}{t_1} = \frac{565.5}{0.167} = 3386 \text{ rad/s}^2$$

alla quale corrisponde una coppia di accelerazione del carico esterno pari a

$$\tau_J = J_c \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{\max} = J_c \alpha_M = 180 \cdot 10^{-6} \cdot 3386 = 0.61 \text{ Nm}$$

Oltre alla coppia inerziale, va tenuta in conto la coppia di attrito rapportata al motore. Il coefficiente equivalente di attrito acciaio su acciaio lubrificato è riportato tra i dati iniziali. La forza d'attrito del carrello e del carico sul piano di supporto (reazione tangenziale) è legata alla forza perpendicolare al piano secondo il coefficiente d'attrito equivalente, e vale:

$$f_c = (m_p + m_s) g \mu = (40 + 10) \cdot 9.81 \cdot 0.15 = 73.6 \text{ N}$$

¹ Ad esclusione, per ora, dell'inerzia propria del motore.

Questa forza rappresenta una ulteriore coppia da vincere, che secondo le indicazioni fornite dalla (A.2.6) vale

$$\tau_{am} = f_c \frac{p}{2\pi} = 73.6 \cdot \frac{0.005}{2\pi} = 58.6 \cdot 10^{-3} Nm$$

Quindi il motore è chiamato a vincere una coppia di carico data da

$$\tau_L = \tau_J + \tau_{am} = 0.61 + 58.6 \cdot 10^{-3} = 0.67 Nm$$

A.5 Dimensionamento del servomotore.

Si sceglie un motore che abbia una coppia nominale superiore ad almeno due volte quella richiesta:

$$\tau_N \geq 2\tau_L = 1.4 Nm$$

ed una velocità nominale almeno pari a quella massima calcolata:

$$\Omega_N \geq \Omega_M = 565.5 \frac{60}{2\pi} = 5400 rpm$$

Dal catalogo, di cui si riporta la parte saliente, si sceglie il motore S56-03/6, che ha una coppia nominale di 1.9 Nm alla velocità nominale di 6000 rpm. Il suo momento di inerzia è di $2.28 \cdot 10^{-4} kgm^2$ e la sua coppia massima vale 6.6 Nm.

A.6 Verifica della scelta del motore.

Viene calcolato innanzitutto il momento di inerzia totale:

$$J_{tot} = J_{mot} + J_{eq} = (228 + 180) \cdot 10^{-6} = 408 \cdot 10^{-6} kgm^2$$

Dunque la coppia che deve erogare il motore durante l'accelerazione vale

$$\tau_{acc} = 1.2 \cdot J_{tot} \cdot \alpha_M + \tau_{am} = 1.2 \cdot 408 \cdot 10^{-6} \cdot 3386 + 58.6 \cdot 10^{-3} = 1.72 Nm$$

in cui si è tenuto un margine del 20% per considerare eventuali imprecisioni nella determinazione dei momenti di inerzia. Si può notare che essendo tale coppia inferiore non solo alla coppia massima (requisito indispensabile) ma anche alla coppia nominale, non vi saranno imposizioni nel funzionamento circa la massima durata delle accelerazioni. La coppia durante la decelerazione risulta inferiore a quella durante l'accelerazione, perchè gli attriti in questo caso operano una favorevole azione frenante:

$$\tau_{dec} = -1.2 \cdot J_{tot} \cdot \alpha_M + \tau_{am} = -1.2 \cdot 408 \cdot 10^{-6} \cdot 3386 + 58.6 \cdot 10^{-3} = -1.6 Nm$$

Agli effetti termici, che sono quelli che determinano il dato di targa della coppia nominale, è importante valutare la coppia efficace:

$$\tau_{eff} = \sqrt{\frac{\tau_{acc}^2 t_1 + \tau_{am}^2 t_2 + \tau_{dec}^2 t_3}{T_1 + T_2}} = \sqrt{\frac{(1.72)^2 0.167 + (58.6 \cdot 10^{-3})^2 0.167 + (-1.6)^2 0.167}{0.5 + 0.25}} = 1.11 Nm$$

Essa appare come una media quadratica perchè, intuitivamente, gli effetti del riscaldamento variano con il quadrato della corrente, che in un servomotore brushless è direttamente proporzionale alla coppia richiesta. Il motore selezionato risulta confermato, dato che vengono soddisfatte le disequazioni seguenti:

$$\tau_{eff} \leq \tau_N \quad \tau_{acc} \leq \tau_{pk}$$

Si noti peraltro che si sarebbe potuto scegliere anche il motore di taglia inferiore, perché il carico è in questa particolare applicazione prevalentemente inerziale, ed il motore più piccolo ha anche un'inerzia notevolmente inferiore ($184 \cdot 10^{-6}$ invece di $228 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$). Un utile esercizio è quello di verificare, in base al data sheet del motore S56 quale sia la scelta tecnica più ragionevole. La tabella seguente riporta le grandezze essenziali per la valutazione. Il motore più adatto sembra il 01/6, anche se considerazioni di sicurezza fanno ritenere il 02/06 una scelta più ragionevole.

Tab.F.5.1 – Scelta del motore.

Tipo motore	$J_{tot} [\cdot 10^{-6} \text{ Kg} \text{m}^2]$	$\tau_{acc} [\text{Nm}]$	τ_{dec}	τ_{eff}	Da catalogo τ_{nom}, τ_{picco}
03/6	408	1.72	-1.6	1.11	1.9, 6.6
02/6	364	1.54	-1.42	0.988	1.3, 4.8
01/6	320	1.36	-1.24	0.87	0.9, 3.3
D6/6	253	1.08	-0.97	0.685	0.4, 1.7

B. I principi del calcolo termico.

Ogni conduttore, quando è attraversato da corrente, dissipa una potenza uguale al prodotto della corrente stessa per la caduta di tensione che si verifica ai suoi estremi. L'energia legata a tale potenza viene convertita in calore², calore che in parte viene accumulato nel conduttore stesso facendone aumentare la temperatura, ed in parte viene trasmesso all'esterno. Aumentando la temperatura del semiconduttore, aumenta la quantità di calore trasmessa all'esterno: quando questa eguaglia la quantità di calore prodotto, il sistema si trova in equilibrio termico e la sua temperatura non aumenta più. La quantità di calore Q dissipata nell'intervallo di tempo $0-t$ è data dall'espressione

$$Q = hSt\Delta\theta \quad (\text{H.1})$$

con h = conducibilità termica, S = superficie disperdente, $\Delta\theta$ = differenza di temperatura tra un punto del corpo ed uno lontano. In queste condizioni occorre che il punto più caldo (ad esempio, in un motore è l'avvolgimento percorso da corrente, ovvero dove viene generato il calore) non raggiunga temperature tali da comprometterne il funzionamento. Nei motori il calore si trasmette quasi esclusivamente per conduzione³ (negli strati più interni e per convezione (fra carcassa e ambiente esterno); solo in minima parte la trasmissione avviene per irraggiamento, tenuto conto della bassa temperatura assunta in ogni caso dal motore.

B.1 La resistenza termica.

La trasmissione del calore è regolata da una legge analoga alla legge di Ohm e che per questa ragione viene detta: «legge di Ohm termica»: infatti, nella trasmissione del calore fra due punti attraverso un determinato materiale si manifesta un rapporto costante fra il salto di temperatura fra due punti (ΔT) e la quantità di calore trasmessa nell'unità di tempo, espressa come potenza dissipata P_D . Tale rapporto costituisce appunto la resistenza termica R_{th} . Una elaborazione della (1) porta direttamente a scrivere:

$$\Delta\theta = R_{th}P_D \quad (\text{H.1.1})$$

Come si può rilevare, la resistenza termica è analoga alla resistenza elettrica, il salto di temperatura corrisponde alla tensione e la potenza dissipata alla corrente. Essendo T espressa in °C o in K e la potenza dissipata in W , la resistenza termica risulta espressa in °C/ W o in K/W , e rappresenta la differenza di temperatura necessaria affinché venga trasmessa la potenza di 1 W . Qualora il calore debba attraversare diversi elementi, ciascuno con una propria resistenza termica, la resistenza termica totale risulterà uguale alla somma delle singole resistenze:

$$R_{th} = R_{th1} + R_{th2} + R_{th3} + \dots \quad (\text{H.1.2})$$

mentre la differenza di temperatura totale si ripartirà in parti proporzionali alle singole resistenze termiche:

$$\Delta T = R_{th1}P_D + R_{th2}P_D + R_{th3}P_D + \dots = R_{th}P_D \quad (\text{H.1.3})$$

Il sistema si comporta pertanto come un circuito elettrico composto da resistenze in serie, come riportato in Fig.H.1.1.

² 1 Kcal=4186 J

³ La trasmissione per conduzione non implica movimento di materia (es. barretta che si scalda). La convezione implica invece un trasferimento tramite materia (aria che lambisce un termosifone). L'irraggiamento è la trasmissione tramite onde elettromagnetiche, nel vuoto, per alte temperature.

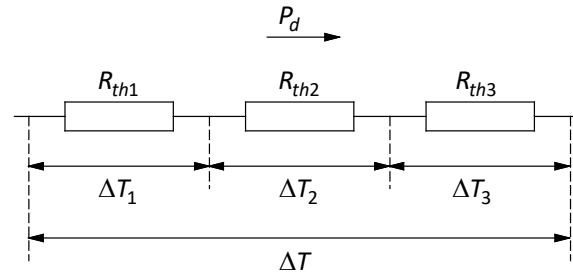
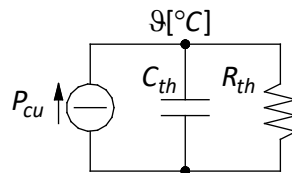


Fig.H.1.1 - Legge di Ohm termica

B.2 Reti termiche.

La rappresentazione della distribuzione delle temperature in un corpo tramite una serie di resistenze termiche è valida a regime, ma non tiene conto del tempo durante il quale il fenomeno si produce. Com'è intuitivo, infatti, la propagazione del calore non avviene istantaneamente. Per conoscere la temperatura di un corpo, ad esempio un motore, ad un certo istante si producono opportuni modelli termici, che presentano, oltre alle resistenze, anche dei condensatori che permettono di emulare le condizioni dinamiche. Il circuito di Fig.H.2.1 rappresenta, in maniera semplificata, il modello termico di un motore sincrono a magneti permanenti (*PMSM*), nel caso si considerino come sorgenti di riscaldamento solo le perdite nel rame⁴.

Fig.H.2.1 – Rete termica semplificata per un *PMSM*.

Il generatore di corrente P_{cu} rappresenta le perdite negli avvolgimenti del motore (perdite nel rame), che vengono dissipate dallo statore, provocandone l'innalzamento della temperatura. Esse dipendono dalla resistenza di statore R e dalle correnti che percorrono gli avvolgimenti. Se si pensa di alimentare il motore con una terna sinusoidale di correnti di valore efficace I , esse valgono naturalmente $3RI^2$, dove R è la resistenza di statore e I è la corrente efficace che percorre ciascun avvolgimento.

L'innalzamento della temperatura del motore dipende dalle caratteristiche di smaltimento dello statore, riassunte nella resistenza termica R_{th} . La dinamica con cui il calore prodotto negli avvolgimenti ne determina il riscaldamento è rappresentata tramite la capacità termica C_{th} . E' di particolare interesse studiare un sistema di misura che consenta di stimare i parametri del circuito, per poterlo poi utilizzare in sede di diagnostica dell'azionamento. L'equazione descrittiva del circuito è la seguente:

$$P_{cu} = 3RI^2 = C_{th} \frac{d\Theta}{dt} + \frac{\Theta}{R_{th}} \quad (\text{H.2.1})$$

dove per semplicità di notazione si è indicata con Θ invece che con $\Delta\Theta$ la sovratemperatura rispetto all'ambiente. E' possibile ora eliminare la dipendenza dalla resistenza elettrica R , di solito variabile con la temperatura stessa, dividendo ambo i membri per $3R$:

⁴ Tale condizione vale a rigore solo a motore fermo (rotore bloccato). Una stima delle perdite nel ferro, necessaria se si vuole utilizzare la rete termica per determinare con cura la temperatura del motore in ogni condizione di lavoro, risulta molto complessa, per le relazioni non lineari esistenti tra tali perdite e il punto di funzionamento del motore. Tale argomento esula dai limiti della presente trattazione.

$$I^2 = C'_{th} \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\vartheta}{R'_{th}} \quad (\text{H.2.2})$$

dove naturalmente si sono posti

$$C'_{th} = \frac{C_{th}}{3R} \quad \text{e} \quad R'_{th} = 3RR_{th} \quad (\text{H.2.3})$$

Il circuito termico si modifica come illustrato in Fig.H.2.2, anche se la sua costante di tempo coincide con quella del circuito originario.

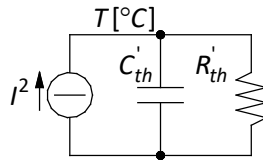


Fig.H.2.2 – Rete termica modificata.

A regime, il condensatore si comporta come un circuito aperto. Con la corrente di stallo I_o , il motore assume una temperatura nominale ϑ_n , che è solitamente nota poiché rappresenta un dato di progetto del motore⁵. E' allora determinabile la resistenza termica:

$$R'_{th} = \frac{\vartheta_n}{I_o^2} \quad (\text{H.2.4})$$

Si effettua poi una prova a rotore bloccato (per non far intervenire le perdite nel ferro), a partire da motore freddo, in modo che circoli una corrente doppia rispetto a quella di stallo. La costante di tempo termica per i motori elettrici è dell'ordine dei diversi minuti. La prova suddetta deve avere una durata t_{test} molto inferiore, ovvero deve essere

$$t_{test} \ll \tau_{th} = R'_{th} C'_{th} \quad (\text{H.2.5})$$

Si può fissare ad esempio $t_{test}=30$ s, durante il quale si misura la variazione di temperatura ΔT . L'andamento sarà pressoché lineare⁶, stante l'ipotesi (H.2.5), e si scrive perciò:

$$\vartheta(t) = \frac{4I_o^2}{C'_{th}} t \Rightarrow C'_{th} = \frac{4I_o^2}{\Delta T} t_{test} \quad (\text{H.2.6})$$

La costante di tempo termica risulta espressa in funzione delle misure sperimentali dalla relazione:

$$\tau_{th} = R'_{th} C'_{th} = R'_{th} \frac{4I_o^2}{\Delta T} t_{test} = 4 \frac{\vartheta_n}{\Delta T} t_{test} \quad (\text{H.2.7})$$

Una volta che la prova ha fornito i parametri d'interesse, è possibile implementare un algoritmo on-line per il monitoraggio della temperatura del motore⁷:

⁵ Nel motore in esame è 100°C. Normalmente essa si riferisce alla sovratemperatura rispetto alla temperatura ambiente standard, di 40°C.

⁶ La soluzione dell'equazione differenziale (H.2.1) porta infatti a scrivere $\vartheta(t) = R'_{th} I^2 (1 - e^{-t/\tau_{th}})$. Essa è nulla per $t=0$. L'approssimazione in serie di Maclaurin vale allora $\vartheta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\vartheta^{(i)}(0)}{i!} t^i$ che troncata al primo termine e

particolarizzata per $I = 2I_n$ porge $\vartheta(t) = \frac{4I_n^2}{C'_{th}} t$, che rappresenta una retta in funzione del tempo.

⁷ La (H.2.1) può essere discretizzata usando il rapporto incrementale (Eulero).

$$\vartheta_k = \frac{R'_{th} T_c}{T_c + \tau_{th}} I_k^2 + \frac{\tau_{th}}{T_c + \tau_{th}} \vartheta_{k-1} \quad T_c \ll \tau_{th} \approx \frac{T_c}{C_{th}} I_k^2 + \vartheta_{k-1} \quad (\text{H.2.8})$$

dove ϑ_k è la temperatura all'istante di stima attuale, ϑ_{k-1} è la temperatura stimata al passo precedente, I_k è la corrente campionata al passo k e T_c è il tempo che intercorre tra due stime successive. Quando la temperatura supera una soglia prefissata è generato allarme dalle routine di diagnostica del sistema.

B.2.1 Esercizio 1.

Un motore brushless abbia una temperatura nominale di 70°C alla corrente di stallo di 10A (valore efficace). Una prova ad una corrente pari a 2 volte tale corrente, per 30s da motore freddo ($T_{ambiente}=20^\circ\text{C}$), ha prodotto un riscaldamento di $\Delta T=6^\circ\text{C}$. Si determinino i parametri della rete termica per il motore in esame.

Soluzione. Dalle (H.2.4), (H.2.6) e (H.2.7) si ha subito:

$$R'_{th} = \frac{T_0}{I_0^2} = \frac{70}{10^2} = 0.7^\circ\text{C} / \text{A}^2$$

$$C'_{th} = \frac{4I_0^2}{\Delta T} t_{test} = \frac{4 \cdot 10^2}{6} 30 = 2000 \text{ A}^2 \text{ s} / ^\circ\text{C}$$

$$\tau_{th} = 4 \frac{T_0}{\Delta T} t_{test} = 4 \frac{70}{6} 30 = 1400 \text{ s}$$

Si noti che la costante di tempo termica è molto maggiore del tempo utilizzato per la misura, e quindi convalida le approssimazioni fatte nell'adottare le formule citate.

MACCHINE E AZIONAMENTI ELETTRICI

Prof. M.Zigliotto

Sommario

MOTORI A PASSO – DIMENSIONAMENTO	3
E PROGETTO DELLE RAMPE.....	3
<i>A. Progetto di un azionamento per motore a passo con rampe di accelerazione.</i>	<i>3</i>
<i>A.1 Progetto delle rampe di accelerazione.</i>	<i>7</i>
<i>B. Progetto di un azionamento con motore a passo e puleggia aggiuntiva.....</i>	<i>10</i>
<i>B.1 Calcolo della coppia a vuoto.</i>	<i>10</i>
<i>B.1.1 Calcolo delle massime dimensioni della puleggia cava.</i>	<i>10</i>
<i>B.1.2 Calcolo del momento d'inerzia.....</i>	<i>11</i>

Motori a passo – Dimensionamento e progetto delle rampe

A. Progetto di un azionamento per motore a passo con rampe di accelerazione.

Un motore a passo KH39EM2 della Japan Servo co. sia applicato ad un sistema di movimentazione vite-madrevite come descritto in Fig.18.10.1.1. Il data sheet del motore è riportato di seguito:

2-Phase Hybrid Stepping Motor

1.8°

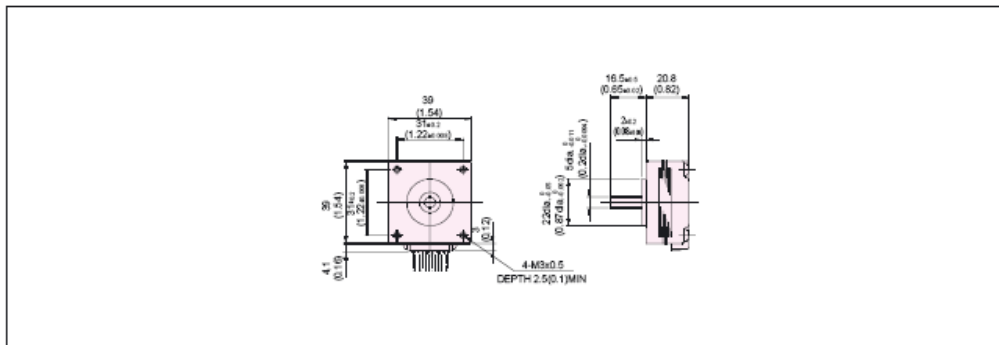
KH39 series 800 type

HIGH TORQUE, LOW VIBRATION AND LOW NOISE

■ STANDARD SPECIFICATIONS

MODEL	UNIT	KH39EM2	
		-801	-851
SHAFT	————	SINGLE	
DRIVE METHOD	————	UNI-POLAR	BI-POLAR
NUMBER OF PHASES	————	2	2
STEP ANGLE	deg./step	1.8	1.8
VOLTAGE	V	5.6	3.6
CURRENT	A/PHASE	0.4	0.6
RESISTANCE	Ω /PHASE	14.0	6.0
INDUCTANCE	mH/PHASE	6.4	5.5
HOLDING TORQUE	mN · m	59	78
	oz · in	8.3	11
DETENT TORQUE	mN · m	7.9	7.9
	oz · in	1.1	1.1
ROTOR INERTIA	g · cm ²	14	14
	oz · in ²	0.08	0.08
WEIGHT	g	110	110
	lb	0.24	0.24
INSULATION CLASS	————	E EQUIVALENT (120°C 248°F) (UL VALUE : CLASS B-130°C)	
INSULATION RESISTANCE	————	500VDC 100M Ω min.	
DIELECTRIC STRENGTH	————	500VAC 50HZ 1min.	
OPERATING TEMP.RANGE	°C	0 to 50	
ALLOWABLE TEMP.RISE	deg.	70	

■ DIMENSIONS unit = mm (inch)

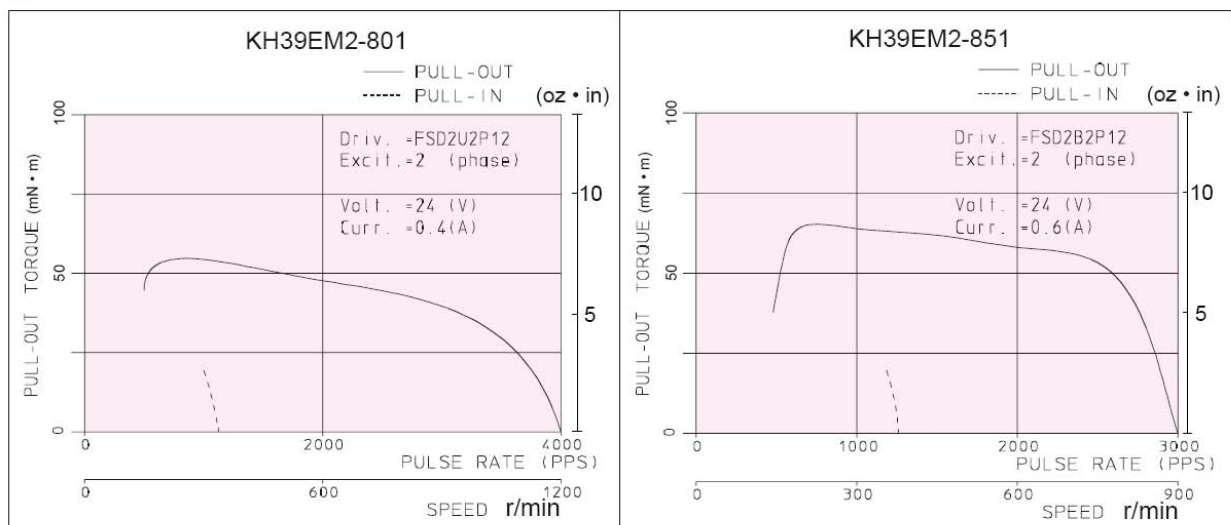




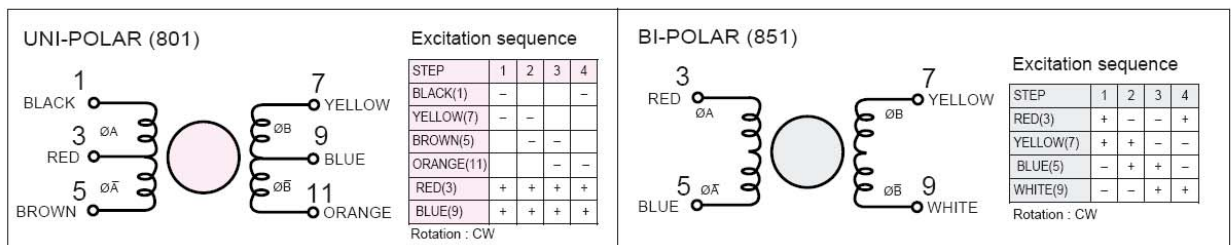
Features

1. High torque
Output is 1.3 times as high as conventional products.
2. Low noise -7dB(A) quieter than conventional products.

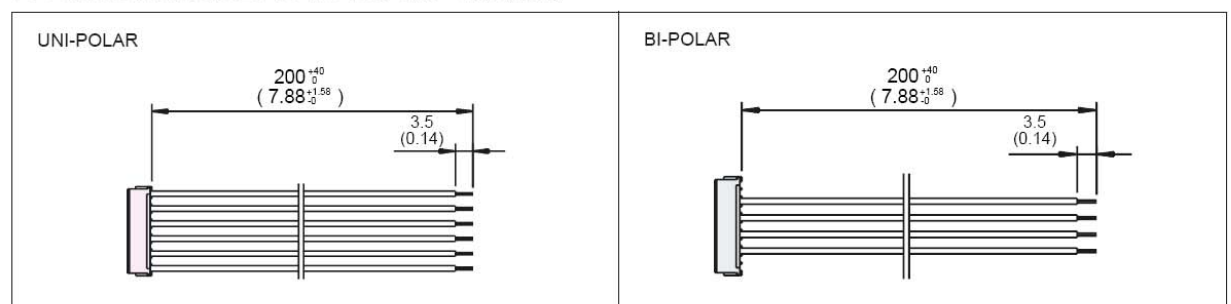
TORQUE CHARACTERISTICS VS PULSE RATE



CONNECTION DIAGRAMS



CONNECTION CABLE TO MOTOR unit = mm (inch)



I dati relativi al sistema vite-madrevite sono i seguenti:

passo della vite	$p = 20 \text{ mm}$
raggio della vite	$r = 40 \text{ mm}$
rendimento di trasmissione	$\mu = 0.85$
massa della vite	$m_v = 2 \text{ Kg}$

Come si evince dall'angolo di passo riportato tra i dati di targa, il motore ha una risoluzione di $N_p=200$ passi/giro ed una inerzia rotorica $J_m=1.4 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$. Il carico sia un pezzo in lavorazione di massa $M_c=60 \text{ kg}$ che si sposta in senso orizzontale, con una forza $F_a = 10 \text{ N}$ d'attrito per strisciamento sull'utensile. Si progetti un sistema di controllo per portare il motore alla velocità di 0.2 m/s .

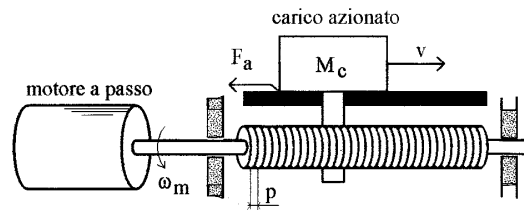


Fig.18.10.1.1 - Sistema vite-madrevite a ricircolazione di sfere

Per prima cosa si procede al calcolo delle coppie di origine inerziale. Vi sono tre componenti, ovvero il rotore del motore a passo, il sistema vite-madrevite, il carico. Supponendo trascurabile il momento di inerzia della madrevite, il momento di inerzia del sistema di trasmissione roto-traslatorio vale:

$$J_v = \frac{1}{2} m_v r^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0.04)^2 = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad (18.10.1.1)$$

Com'è noto, l'accoppiamento vite-madrevite si comporta come un accoppiamento pignone-cremagliera quando si consideri, invece del raggio del pignone, il raggio equivalente dato da

$$r_{eq} = \frac{p}{2\pi} = \frac{0.02}{2\pi} = 3.18 \text{ mm} \quad (18.10.1.2)$$

In generale, se l'accoppiamento non è ideale, lo schema a cui fare riferimento può essere il seguente:

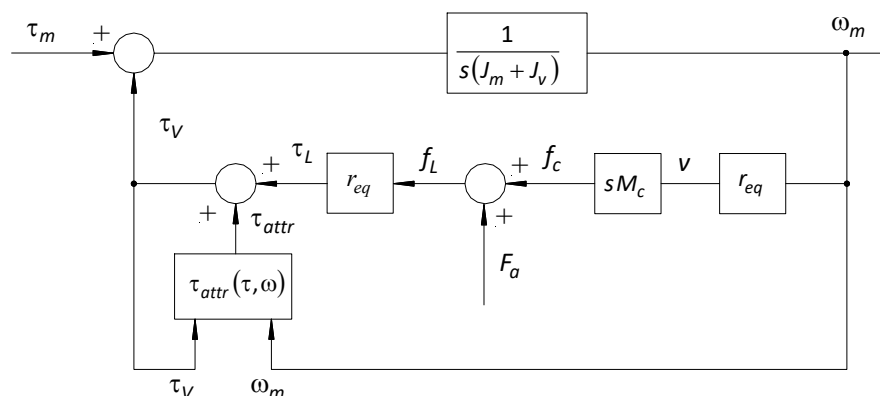


Fig.18.10.1.2 – Valutazione della coppia in caso di sistema di trasmissione del moto con perdite.

La funzione τ_{attr} riassume la dipendenza del rendimento μ della trasmissione del moto dal punto di lavoro in cui ci si pone. Tale rendimento, riportato tra i dati del problema, è definito dal Costruttore come rapporto tra la coppia τ_L trasmessa al carico e la coppia τ_V applicata alla vite:

$$\mu = \frac{\tau_L}{\tau_V}$$

Come si è detto, in generale μ è collegato a precise condizioni di lavoro, sia di coppia sia di velocità. In questo progetto, come spesso accade, il costruttore ha fornito solo il rapporto indicato sopra, e da questo consegue che la funzione τ_{attr} di Fig.18.10.1.2 non dipenda da ω_m e sia data da

$$\tau_{attr}(\tau_V) = \tau_V - \tau_L = \tau_V - \mu\tau_V = \tau_V(1 - \mu) \quad (18.10.1.3)$$

In base alla presente definizione di rendimento, lo schema a blocchi di Fig.18.10.1.2 lo schema a blocchi si semplifica nel seguente:

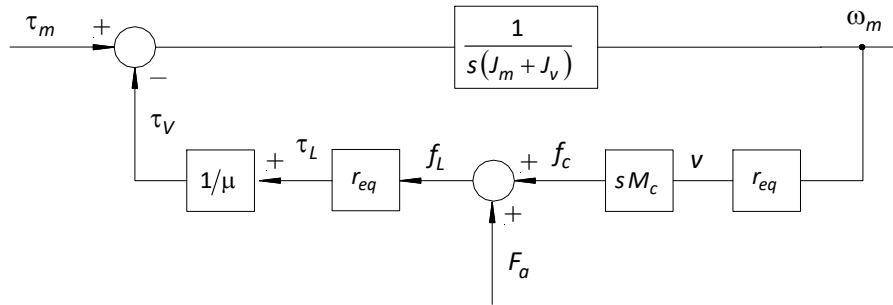


Fig.18.10.1.3 – Valutazione della coppia in un sistema di trasmissione con perdite proporzionali alla coppia trasmessa.

La funzione che lega la velocità del motore alla coppia prodotta si può ottenere annullando l'ingresso F_a , che rappresenta una coppia esogena di attrito. Si ottiene subito:

$$\frac{\Omega_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s(J_m + J_v)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s(J_m + J_v)} \frac{r_{eq}^2 s M_c}{\mu}} = \frac{1}{J_m + J_v + \underbrace{\frac{M_c r_{eq}^2}{\mu}}_{J_{eq}}} \frac{1}{s}$$

Allo stesso risultato si giunge se si pensa al rendimento in termini di rapporto tra la potenza resa e quella fornita:

$$\tau_V \omega_m \mu^{sign(\tau_V \omega_m)} = f_L v$$

dove il rendimento viene calcolato al numeratore o al denominatore a seconda che il motore funzioni da motore (potenza positiva) o da freno (potenza negativa), nel qual caso gli attriti giocano a favore e riducono la richiesta di erogazione di coppia del motore.

La coppia τ_V richiesta al motore è composta da una parte inerziale, dovuta alla accelerazione della massa M_c , e da una parte legata alla forza di attrito dell'utensile, F_a :

$$\tau_V = \frac{f_L r_{eq}}{\mu} = \frac{r_{eq}}{\mu} \left(M_c \frac{dv}{dt} + F_a \right) \quad (18.10.1.4)$$

pertanto la coppia totale richiesta al motore a passo (nel caso $(\tau_v \omega_m > 0)$) vale

$$\begin{aligned}\tau_m &= (J_m + J_v) \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{r_{eq}}{\mu} \left(M_c \frac{dv}{dt} + F_a \right) = \\ &= \underbrace{\left(J_m + J_v + \frac{M_c}{\mu} \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 \right)}_{J_{eq}} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{p}{2\pi\mu} F_a = \\ &= \left(1.4 \cdot 10^{-6} + 1.6 \cdot 10^{-3} + \frac{60}{0.85} \left(\frac{0.02}{2\pi} \right)^2 \right) \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{0.02}{2\pi \cdot 0.85} 10 = 0.00231 \frac{d\omega_m}{dt} + 0.0374 \text{ [Nm]}\end{aligned}\quad (18.10.1.5)$$

dove $J_{eq} = 0.00231 \text{ kgm}^2$ e si è considerata anche l'inerzia della vite, assieme a quella intrinseca del motore¹.

A.1 Progetto delle rampe di accelerazione.

Com'è noto, una delle limitazioni del controllo a catena aperta è la possibilità di perdita del sincronismo tra il treno d'impulsi che comandano in successione l'alimentazione delle fasi del motore e l'avanzamento a passi del motore stesso.

La prima domanda da porsi è se il motore prescelto sia in grado di avviarsi direttamente, senza perdere il passo. A tal scopo, si può osservare che la vite ha un avanzamento di 20 mm ad ogni giro completo del rotore, ovvero ogni 200 passi del motore. Alla velocità di avanzamento richiesta di 0.2 m/s, il motore deve ruotare allora con una velocità²

$$\omega_{m,f} = \frac{v}{r_{eq}} = \frac{2\pi v}{p} = \frac{2\pi \cdot 0.2}{0.02} = 62,8 \text{ rad/s} = 2000 \text{ pps} \quad (18.10.1.6)$$

I dati sulla caratteristica di pull-in del motore prescelto sono insufficienti. Infatti è riportato solo un abbozzo di curva di pull-in, senza specificare l'inerzia alla quale è stata misurata (dunque si deve supporre sia solo quella del motore). L'unica indicazione che si può trarre è che la frequenza di pull-in è di circa 1260 pps. Si nota anche che (per ragioni non spiegate nel catalogo, ma probabilmente di origine termica, o legate al particolare driver suggerito) la coppia sviluppata dal motore cala drasticamente sotto i 700 pps. Conviene dunque scegliere una frequenza iniziale di 800 pps, alla quale corrisponde un periodo di passo iniziale³

$$T_1 = \frac{1}{f_{s,in}} = \frac{1}{800} = 0.00125 \text{ s} \quad (18.10.1.7)$$

e una velocità angolare $\omega_{m,i} = \alpha_p / T_1 = 0.0314 / 0.00125 = 25.13 \text{ rad/s}$. Si rileva inoltre che la velocità a regime risulta ben inferiore alla velocità di pull-out, che dalle caratteristiche del Costruttore risulta di 4000 pps. Naturalmente, in base all'inerzia complessiva del sistema, si tratterà di valutare quale siano i margini di coppia, al fine di predisporre un'accelerazione sostenibile. L'equazione d'equilibrio meccanico è data da:

$$\tau = B\omega + J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt} + \tau_L \quad (18.10.1.8)$$

¹ Si noti come in questo caso il rendimento influenzi il momento d'inerzia equivalente. Va però meditato il fatto che questo non rispecchia il concetto fisico di momento di inerzia, legato all'energia cinetica di un corpo in rotazione. E' solo una conseguenza dell'ipotesi di avere una coppia di attrito proporzionale alla coppia trasmessa, che si propone al motore come una componente aggiuntiva di inerzia del carico.

² Si noti che v/p è il numero di giri di vite al secondo, che moltiplicato per il numero N_p di passi/giro fornisce il numero di passi al secondo; $2\pi/N_p$ è poi il numero di radianti per passo del motore.

³ Significa che $\alpha^* T_1^2 = 108.22 \cdot 0.00125^2 = 1.7 \cdot 10^{-4} < 1$, la condizione per l'applicazione di Maclaurin è perfettamente soddisfatta.

dove B e J_{eq} sono rispettivamente il coefficiente di attrito viscoso e l'inerzia totale del sistema.

La Fig.18.10.1.5 serve come riferimento per comprendere la temporizzazione della commutazione delle fasi, durante le variazioni di velocità.

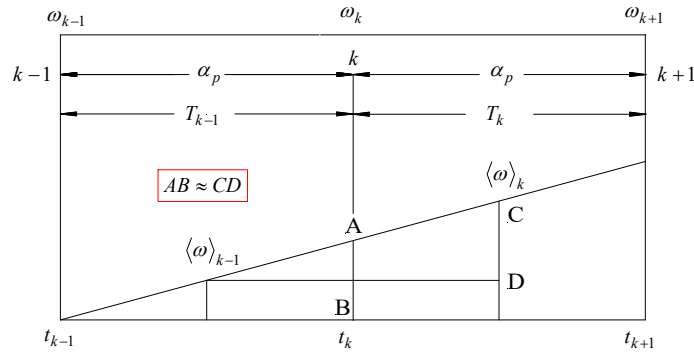


Fig.18.10.1.5 - Temporizzazione dei comandi di commutazione.

Trascurando l'attrito di tipo viscoso ($B \approx 0$) (non fornito nel data sheet), la (18.10.1.8) può essere riscritta ai valori medi. Al passo $k-1$ essa diventa:

$$\langle \tau \rangle_{k-1} = J_{eq} \left\langle \frac{d\omega_m}{dt} \right\rangle_{k-1} + \langle \tau_L \rangle_{k-1} = J_{eq} \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{T_{k-1}} + \langle \tau_L \rangle_{k-1} \approx J_{eq} \frac{\langle \omega \rangle_k - \langle \omega \rangle_{k-1}}{T_{k-1}} + \langle \tau_L \rangle_{k-1} \quad (18.10.1.9)$$

dove l'ultimo passaggio sfrutta l'approssimazione di considerare trascurabile la differenza tra il rapporto incrementale delle velocità medie su due periodi successivi e quello delle velocità istantanee agli estremi del primo periodo considerato. Tale approssimazione diventa molto precisa nel caso di accelerazione costante (velocità che cresce linearmente), o in caso di piccole variazioni tra un periodo di commutazione ed il successivo. In base alla Fig.18.10.1.5, la velocità media si può calcolare come segue:

$$\langle \omega \rangle_{k-1} = \frac{1}{T_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega(t) dt = \frac{1}{T_{k-1}} [\vartheta(t_k) - \vartheta(t_{k-1})] = \frac{\alpha_p}{T_{k-1}} \quad (18.10.1.10)$$

dove α_p rappresenta l'angolo di passo del motore. Sostituendo la (18.10.1.10) nell'ultima delle (18.10.1.9) si ottiene:

$$\langle \tau \rangle_{k-1} = J_{eq} \alpha_p \frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{k-1}} + \langle \tau_L \rangle_{k-1} \quad (18.10.1.11)$$

dalla quale si giunge, con qualche semplice passaggio, all'espressione ricorsiva per l'aggiornamento del periodo di commutazione.

$$\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{k-1}} = \frac{\langle \tau \rangle_{k-1} - \langle \tau_L \rangle_{k-1}}{J_{eq} \alpha_p} T_{k-1} = a T_{k-1} \quad a = \frac{\langle T \rangle_{k-1} - \langle \tau_L \rangle_{k-1}}{J_{eq} \alpha_p} = \frac{\alpha_s}{\alpha_p} > 0 \quad (18.10.1.12)$$

dove α_s è l'accelerazione angolare desiderata. Proseguendo si ottiene:

$$\frac{1}{T_k} = aT_{k-1} + \frac{1}{T_{k-1}} \quad (18.10.1.13)$$

$$T_k = \frac{1}{aT_{k-1} + \frac{1}{T_{k-1}}} = T_{k-1} \frac{1}{1 + aT_{k-1}^2} \quad (18.10.1.14)$$

Se $aT_{k-1}^2 \ll 1$ la (18.10.1.12) può essere approssimata dai primi termini della serie di McLaurin⁴:

$$T_k = T_{k-1} (1 - aT_{k-1}^2) \quad NB: a > 0 \rightarrow T_k < T_{k-1} \quad (18.10.1.15)$$

La (18.10.1.15) permette di calcolare ricorsivamente l'istante di commutazione successivo delle singole fasi del motore a passo, noti i parametri del carico e l'accelerazione che si vuole imporre.

La frequenza di passo iniziale, intesa come il reciproco del primo periodo di commutazione, e quella finale, legata alla velocità a regime che si desidera raggiungere, sono:

$$T_1 = \frac{1}{f_{s,i}} \quad , \quad T_M = \frac{1}{f_{s,f}} \quad (18.10.1.16)$$

La frequenza $f_{s,i}$ può essere ricavata dalle curve di pull-in del motore selezionato, oppure (se il motore non è ancora stato individuato, o le curve non sono esaustive, come nel caso dell'esempio) si può scegliere arbitrariamente, salvo poi verificare a posteriori la correttezza della scelta.

In base alla (18.10.1.5), la coppia di traslazione, riportata al motore, vale

$$\frac{p}{2\pi\mu} F_a = \frac{0.02}{2\pi \cdot 0.85} \cdot 10 = 37.4 \quad [mN \cdot m]$$

Fissando, per sicurezza, di richiedere al motore durante l'accelerazione una coppia costante di 45 mNm, rimane a disposizione una coppia di accelerazione pari a $(45-37.4)=7.6$ mNm. L'accelerazione angolare risulta dunque

$$\alpha_s = \frac{\langle T \rangle_{k-1} - \langle \tau_L \rangle_{k-1}}{J_{eq}} = \frac{7.6 \cdot 10^{-3}}{0.00231} = 3.29 \quad [rad/s^2] \quad (18.10.1.17)$$

E' a questo punto immediato il calcolo della costante a , legata come si è visto all'accelerazione angolare che si vuole imporre al motore. Essa vale:

$$a = \frac{\alpha_s}{\alpha_p} = \frac{3.29}{0.0314} = 104.78 \quad [1/s^2] \quad (18.10.1.18)$$

La (18.10.1.15) è calcolata dal passo $k=2$ fino al passo $k=M$, al quale si raggiunge la frequenza desiderata. Va rilevato che l'algoritmo di controllo dovrà essere in grado di calcolare on-line i tempi con sufficiente precisione, dato che la differenza temporale tra due periodi di commutazione successivi è alquanto ridotta, a causa della piccola accelerazione (18.10.1.18) che si può imporre al motore.

⁴ $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{x \rightarrow 0}{\approx} 1 + \frac{-1}{(1+x)^2} \Big|_{x=0} \quad x = 1-x.$

B. Progetto di un azionamento con motore a passo e puleggia aggiuntiva.

Un motore a passo da 1.8° sia accelerato da $f_{s1}=100$ pps (pulses per second) a $f_{s2}=1000$ pps in $T_a=50$ ms. Il momento di inerzia del motore sia di 100 g·cm², e l'albero abbia un diametro $D_2=10$ mm. Si calcoli la coppia che il motore deve erogare per garantire l'accelerazione. Nei cataloghi del motore si trova che la massima coppia di pullout nell'intervallo di velocità considerato è di 6.35 kgf·cm⁵. Si desidera aggiungere una puleggia cava in ferro ($\rho=7860$ kg/m³), avente diametro esterno $D_1=50$ mm, del tipo riportato in Fig.18.10.2.1.

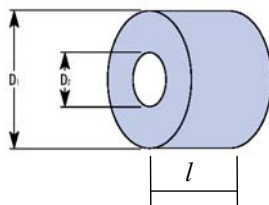


Fig.18.10.2.1 - Puleggia cava

Determinare la massima lunghezza l della puleggia (Fig.18.10.2.1) che consente accelerazioni come quella effettuata a vuoto senza perdita di passo.

B.1 Calcolo della coppia a vuoto.

Le velocità sono espresse in pps ed occorre riportarle in rad/s:

$$\omega_1 [\text{rad/s}] = f_{s1} [\text{passi/s}] \cdot \alpha_p [\text{rad/passi}] = 100 \cdot 1.8 \frac{\pi}{180} = \pi [\text{rad/s}] \quad (18.10.2.1)$$

Allo stesso modo si trova $\omega_2=10\pi$ [rad/s]. Anche il momento di inerzia va riportato nelle unità del Sistema Internazionale (SI):

$$J_m [\text{kg} \cdot \text{m}^2] = J_m [\text{g} \cdot \text{cm}^2] \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} = J_m [\text{g} \cdot \text{cm}] \cdot 10^{-7} = 100 \cdot 10^{-7} = 10^{-5} [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (18.10.2.2)$$

La coppia deve vincere la sola inerzia del motore. Si può scrivere pertanto:

$$\tau = J_m \frac{d\omega}{dt} = J_m \frac{\omega_f - \omega_i}{T_a} = 10^{-5} \frac{10\pi - \pi}{0.05} = 0.0056 \text{ Nm} \quad (18.10.2.3)$$

B.1.1 Calcolo delle massime dimensioni della puleggia cava.

La massima inerzia totale ammissibile con la data coppia di pull-out vale:

$$J_{tot} = \tau_{pullout} \frac{T_a}{\omega_f - \omega_i} = \left[6.35 \right]_{\text{kgf} \cdot \text{cm}} \frac{9.8}{100} \left[\frac{0.05}{10\pi - \pi} \right]_{\text{Nm}} = 0.0011 \text{ kgm}^2 \quad (18.10.2.4)$$

e quella destinabile alla puleggia è pertanto $J_p = J_{tot} - J_m = 0.00109 \text{ kgm}^2$.

⁵ A volte il valore di coppia viene dato in oz*inch (once per pollice). Ricordando che 1inch=2.54 cm e 1oz=28,35g si trova subito $\tau [\text{Nm}] = \tau [\text{oz} \cdot \text{inch}] * [9.81 * 0.02835 * 0.0254] = \tau [\text{oz} \cdot \text{inch}] * 0.00706$.

B.1.2 Calcolo del momento d'inerzia

In generale, il calcolo del momento di inerzia per un solido C è dato dall'espressione:

$$J = \int_C r^2 dm = \int_C r^2 \rho(x, y, z) dV \quad (18.10.2.5)$$

dove r indica la distanza dall'asse dell'elemento infinitesimo di massa dm e volume $dV = dx \, dy \, dz$, mentre $\rho(x, y, z)$ è la densità del punto di coordinate (x, y, z) . L'integrale è esteso a tutta la regione di spazio occupata dal corpo C . Se, come in questo caso, il corpo C è continuo, la sua densità è costante e la (18.10.2.5) diviene:

$$J = \rho \int_C r^2 dV \quad (18.10.2.6)$$

e la quantità integrale è un fattore geometrico uguale per tutti i corpi omogenei aventi la stessa forma e le stesse dimensioni di quello considerato. Nel caso in esame, una puleggia cava è assimilabile ad un cilindro omogeneo circolare retto, di cui si cerca il momento d'inerzia rispetto al suo asse. La definizione del corpo C è allora la seguente:

$$C = \left\{ (x, y, z) : \left(\frac{D_2}{2} \right)^2 \leq x^2 + y^2 \leq \left(\frac{D_1}{2} \right)^2, -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2} \right\} \quad (18.10.2.7)$$

L'espressione (18.10.2.6) così si particolarizza:

$$J = \rho \int_C (x^2 + y^2) dx \, dy \, dz \quad (18.10.2.8)$$

Sia nella integranda che nella definizione dell'insieme appare l'espressione $x^2 + y^2$; pertanto conviene passare alle coordinate cilindriche $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$. In generale, il passaggio dall'insieme chiuso $I(x, y, z)$ all'insieme $I'(u, v, w)$ avviene secondo la regola

$$\int_I g \, dx \, dy \, dz = \int_{I'} (g \circ f) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw \quad (18.10.2.9)$$

dove f è l'insieme di funzioni che mappa x, y, z in u, v, w . Va dunque calcolato il determinante jacobiano delle funzioni che legano le coordinate ortogonali a quelle cilindriche:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial(r \cos \phi)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \phi)}{\partial r} & \frac{\partial(z)}{\partial r} \\ \frac{\partial(r \cos \phi)}{\partial \phi} & \frac{\partial(r \sin \phi)}{\partial \phi} & \frac{\partial(z)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial(r \cos \phi)}{\partial z} & \frac{\partial(r \sin \phi)}{\partial z} & \frac{\partial(z)}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -r \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos \phi)^2 + r(\sin \phi)^2 = r \end{aligned} \quad (18.10.2.10)$$

La definizione della puleggia cava, in coordinate cilindriche, diventa allora:

$$C' = \left\{ (r, \phi, z) : \left(\frac{D_2}{2} \right)^2 \leq r^2 \leq \left(\frac{D_1}{2} \right)^2, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2} \right\} \quad (18.10.2.11)$$

L'espressione (18.10.2.8), riferita alla puleggia cava, in coordinate cilindriche, diventa allora:

$$J_p = \rho \int_{C'} r^2 r \, dr \, d\phi \, dz = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_1}{2}} r^2 r \, dr \, d\phi \, dz = \rho l 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_1}{2}} = 2\pi \rho l \frac{(D_1^4 - D_2^4)}{4 \cdot 16} \quad (18.10.2.12)$$

Se si considera che la massa della puleggia cava può essere ricavata dalla massa del cilindro pieno, alla quale si sottrae quella del cilindro interno, si può scrivere:

$$M_p = \rho l \pi (r_1^2 - r_2^2) = \rho l \pi \left(\frac{D_1^2}{4} - \frac{D_2^2}{4} \right) \quad (18.10.2.13)$$

Sostituendo la (18.10.2.13) nella (18.10.2.12) si trova:

$$J_p = \frac{M_p}{M_p} 2\pi \rho l \frac{(D_1^4 - D_2^4)}{4 \cdot 16} = \frac{1}{8} M_p (D_1^2 + D_2^2) \quad (18.10.2.14)$$

che è particolarmente utile per valutare il momento di inerzia della puleggia cava note le sue dimensioni ed il peso. Utilizzando invece la (18.10.2.12) è possibile determinare la massima lunghezza l della puleggia, nota la massima inerzia che può essere aggiunta al motore:

$$l = \frac{32 J_p}{\pi \rho (D_1^4 - D_2^4)} = \frac{32 \cdot 0.00109}{\pi \cdot 7860 \cdot (0.05^4 - 0.01^4)} = 0.226 \, m \quad (18.10.2.15)$$

MOTORE	N_n	C_n	P		I_n	$\cos \varphi$	η	$\frac{C_a}{C_n}$	$\frac{C_{max}}{C_n}$	$\frac{I_a}{I_n}$	P_v	Q_v	$J \cdot 10^3$	M
	$\frac{giri}{min}$	Nm	kW	CV	A	-	-	-	-	-	W	$\frac{m^3}{min}$	kgm^2	kg
AA-2-0,6-1	2750	0,20	0,06	0,08	0,27	0,64	0,48	2,4	2,6	2,4	14	0,75	0,08	2,2
AA-2-0,6-2	2750	0,22	0,06	0,08	0,26	0,68	0,52	2,5	2,7	2,8	14	0,75	0,10	2,4
AA-2-0,7-1	2780	0,25	0,07	0,10	0,26	0,70	0,58	2,7	2,8	3,2	14	0,75	0,12	2,6
AA-2-1,2-2	2780	0,41	0,12	0,16	0,40	0,72	0,60	2,8	2,9	3,5	14	0,75	0,15	3,2
AA-2-1,7-1	2780	0,58	0,17	0,23	0,47	0,79	0,65	2,6	2,7	3,7	18	2,5	0,25	3,7
AA-2-2,2-2	2800	0,76	0,22	0,30	0,58	0,80	0,69	2,9	3,0	3,9	18	2,5	0,30	4,3
AA-2-3,6-3	2800	1,23	0,36	0,48	0,93	0,78	0,72	3,0	3,1	4,3	18	2,5	0,35	5,6
AA-2-3,7-1	2800	1,25	0,37	0,49	0,92	0,81	0,71	2,6	2,7	4,5	18	2,5	0,38	5,8
AA-2-5,0-2	2810	1,71	0,50	0,67	1,21	0,82	0,73	2,9	3,0	4,5	18	2,5	0,46	6,2
AA-2-6,2-3	2810	2,12	0,62	0,83	1,51	0,83	0,72	3,0	3,1	4,6	18	2,5	0,57	7,4
AA-2-7,2-1	2830	2,42	0,72	0,96	1,62	0,84	0,76	2,3	2,6	4,8	39	5,3	0,80	8,5
AA-2-10,9-2	2840	3,65	1,09	1,45	2,34	0,86	0,78	2,6	2,7	5,2	39	5,3	0,97	9,8
AA-2-14,1-3	2840	4,74	1,41	1,88	3,07	0,86	0,77	2,8	3,0	5,6	39	5,3	1,20	11
AA-2-18,8-4	2840	6,32	1,88	2,51	4,26	0,85	0,75	2,7	3,0	5,6	39	5,3	1,30	12
AA-2-14,8-5	2840	4,98	1,48	1,97	3,26	0,84	0,78	2,3	2,8	5,5	39	5,3	1,50	12
AA-2-21,3-6	2850	7,15	2,13	2,85	4,70	0,83	0,79	2,8	3,1	6,0	39	5,3	2,30	14
AA-2-27,8-7	2850	9,32	2,78	3,71	5,70	0,88	0,80	3,0	3,2	6,1	39	5,3	2,80	16
AA-2-29,1-1	2850	9,76	2,91	3,88	5,90	0,88	0,81	2,4	2,9	6,4	39	5,3	5,30	19
AA-2-41,6-2	2880	13,8	4,16	5,55	8,32	0,86	0,84	2,1	2,8	6,5	39	5,3	8,50	21
AA-2-41,8-1	2890	13,8	4,18	5,57	8,34	0,86	0,84	2,1	2,6	6,5	39	5,3	9,00	27
AA-2-55,3-2	2900	18,2	5,53	7,37	11,0	0,85	0,85	2,2	2,7	6,8	39	5,3	12,0	32
AA-2-70,6-7	2880	23,4	7,06	9,41	13,9	0,85	0,86	2,9	2,8	6,5	39	5,3	15,0	37
AA-2-71,7-5	2890	23,7	7,17	9,56	13,8	0,88	0,85	2,2	2,3	6,0	39	5,3	13,0	45
AA-2-73,5-6	2890	24,3	7,35	9,81	14,2	0,88	0,85	2,8	3,2	6,4	39	5,3	16,0	48
AA-2-111-8	2960	35,9	11,1	14,8	21,0	0,87	0,88	2,5	3,5	7,3	39	5,3	25,0	57
AA-2-137-9	2930	44,5	13,7	18,2	25,5	0,90	0,86	2,7	3,7	6,8	39	5,3	30,0	68
AA-2-126-8	2910	41,2	12,6	16,7	25,1	0,84	0,86	2,2	2,7	6,4	116	27	26,0	75
AA-2-152-9	2940	49,3	15,2	20,2	29,3	0,85	0,88	2,2	2,8	7,4	116	27	36,0	88
AA-2-190-10	2920	62,1	19,0	25,3	36,7	0,84	0,89	2,3	2,8	7,6	116	27	45,0	99

motori asincroni a 2 poli (p=1)

MOTORE	N_n	C_n	P		I_n	$\cos \varphi$	η	$\frac{C_a}{C_n}$	$\frac{C_{max}}{C_n}$	$\frac{I_a}{I_n}$	P_v	Q_v	$J \cdot 10^3$	M
	$\frac{giri}{min}$	Nm	kW	CV	A	-	-	-	-	-	W	$\frac{m^3}{min}$	kgm^2	kg
AA-4-0,4-1	1340	0,25	0,04	0,05	0,17	0,60	0,50	2,0	2,1	2,4	14	0,75	0,08	2,2
AA-4-0,6-2	1340	0,43	0,06	0,08	0,27	0,63	0,52	2,1	2,3	2,6	14	0,75	0,10	2,4
AA-4-0,6-1	1350	0,42	0,06	0,08	0,25	0,63	0,54	2,3	2,5	2,5	14	0,75	0,15	2,5
AA-4-0,9-2	1350	0,61	0,09	0,11	0,34	0,65	0,56	2,3	2,5	2,8	14	0,75	0,15	2,6
AA-4-1,0-3	1350	0,70	0,10	0,13	0,37	0,66	0,58	2,4	2,7	2,8	14	0,75	0,20	3,2
AA-4-1,2-1	1350	0,82	0,12	0,15	0,42	0,66	0,60	2,4	2,8	3,0	18	2,5	0,28	3,7
AA-4-1,8-2	1370	1,23	0,18	0,24	0,62	0,68	0,60	2,5	2,8	3,0	18	2,5	0,40	4,3
AA-4-2,2-3	1410	1,50	0,22	0,30	0,81	0,66	0,60	2,6	2,9	3,2	18	2,5	0,40	4,3
AA-4-2,3-1	1380	1,60	0,23	0,31	0,73	0,70	0,65	2,5	2,7	3,6	18	2,5	0,50	5,8
AA-4-3,7-2	1390	2,55	0,37	0,49	1,08	0,74	0,67	2,5	2,8	3,5	18	2,5	0,80	6,2
AA-4-5,0-3	1390	3,45	0,50	0,67	1,53	0,72	0,66	2,6	2,8	3,8	18	2,5	0,90	7,4
AA-4-5,1-1	1400	3,50	0,51	0,68	1,45	0,75	0,68	2,5	2,6	4,0	39	5,3	1,40	8,5
AA-4-7,9-2	1400	5,40	0,79	1,06	2,15	0,76	0,70	2,6	2,8	4,2	39	5,3	1,70	9,8
AA-4-8,7-3	1340	6,22	0,87	1,16	2,40	0,75	0,70	2,5	2,7	4,3	39	5,3	2,00	11
AA-4-11,1-4	1400	7,55	1,11	1,48	3,00	0,75	0,71	2,7	2,8	4,3	39	5,3	2,30	11
AA-4-11,3-5	1420	7,63	1,13	1,51	2,80	0,78	0,75	2,5	2,6	4,2	39	5,3	3,30	12
AA-4-14,6-6	1420	9,84	1,46	1,95	3,47	0,78	0,78	2,6	2,7	4,6	39	5,3	4,00	14
AA-4-18,1-7	1420	12,2	1,81	2,42	4,53	0,75	0,77	2,6	2,8	4,7	39	5,3	5,00	16
AA-4-22,2-1	1430	14,8	2,22	2,96	5,13	0,80	0,78	2,5	2,6	4,9	39	5,3	6,00	19
AA-4-29,2-2	1430	19,5	2,92	3,89	6,59	0,82	0,78	2,5	2,7	5,0	39	5,3	8,50	21
AA-4-38,9-3	1430	26,0	3,89	5,19	9,12	0,79	0,78	2,5	2,7	5,0	39	5,3	11,0	23
AA-4-39,7-1	1440	26,3	3,97	5,29	8,83	0,81	0,80	2,6	2,9	5,3	39	5,3	13,0	29
AA-4-55,7-3	1410	37,7	5,57	7,42	12,2	0,82	0,80	2,7	3,0	5,5	39	5,3	16,0	35
AA-4-65,1-4	1450	42,9	6,51	8,69	14,3	0,81	0,81	2,5	2,8	5,8	39	5,3	24,0	43
AA-4-74,4-7	1450	49,0	7,44	9,92	15,8	0,83	0,82	2,6	3,0	6,2	39	5,3	28,5	48
AA-4-93,3-8	1460	61,0	9,33	12,4	18,6	0,83	0,87	2,5	3,2	5,5	39	5,3	36,2	54
AA-4-112-7	1460	73,2	11,2	14,9	23,2	0,81	0,86	2,3	2,2	5,3	116	27	59,0	68
AA-4-140-6	1460	91,6	14,0	18,7	28,3	0,82	0,87	2,2	2,3	5,6	116	27	80,5	82

motori a 4 poli (p=2)

MOTORE	N_n	C_n	P		I_n	$\cos \varphi$	η	$\frac{C_a}{C_n}$	$\frac{C_{max}}{C_n}$	$\frac{I_a}{I_n}$	P_v	Q_v	$J \cdot 10^3$	M
	$\frac{giri}{min}$	Nm	kW	CV	A	-	-	-	-	-	W	$\frac{m^3}{min}$	kgm^2	kg
AA-6-2,2-0,5-1	810	0,54	0,05	0,06	0,29	0,54	0,42	1,6	1,7	2,3	14	0,75	0,15	2,5
AA-6-0,6-2	810	0,72	0,06	0,08	0,34	0,56	0,46	1,8	2,1	2,3	14	0,75	0,22	3,1
AA-6-0,8-2	850	0,91	0,08	0,11	0,41	0,60	0,47	2,1	2,2	3,1	16	2,5	0,23	3,7
AA-6-1,0-3	850	1,17	0,10	0,14	0,48	0,63	0,50	2,4	2,2	3,2	16	2,5	0,39	4,1
AA-6-1,7-1	865	1,89	0,17	0,23	0,67	0,66	0,56	2,4	2,5	3,1	16	2,5	0,60	5,8
AA-6-2,4-2	875	2,62	0,24	0,32	0,94	0,66	0,56	2,5	2,5	3,2	16	2,5	0,80	6,3
AA-6-3,4-3	885	3,71	0,34	0,46	1,23	0,66	0,61	2,5	2,6	3,2	16	2,5	0,95	6,4
AA-6-3,6-1	920	3,75	0,36	0,48	1,18	0,68	0,65	2,4	2,6	3,3	39	5,3	2,03	8,6
AA-6-5,5-2	920	5,72	0,55	0,73	1,70	0,72	0,65	2,4	2,5	3,7	39	5,3	2,52	10,4
AA-6-7,7-3	920	7,96	0,77	1,02	2,23	0,74	0,67	2,5	2,5	3,8	39	5,3	2,61	11,2
AA-6-7,7-5	930	7,89	0,77	1,02	2,05	0,75	0,72	2,5	2,5	3,9	39	5,3	3,45	12,2
AA-6-11,1-6	930	11,4	1,11	1,48	2,81	0,77	0,74	2,5	2,7	4,1	39	5,3	4,55	14,1
AA-6-15,1-7	935	15,4	1,51	2,01	3,98	0,77	0,71	2,2	2,8	4,3	39	5,3	5,21	16,2
AA-6-15,2-1	950	15,3	1,52	2,03	3,76	0,78	0,75	2,6	2,9	4,6	39	5,3	8,72	19,3
AA-6-18,6-2	950	18,7	1,86	2,48	4,53	0,78	0,76	2,6	2,8	4,8	39	5,3	10,3	20,5
AA-6-22,1-3	955	22,1	2,21	2,95	5,24	0,78	0,78	2,5	2,6	4,9	39	5,3	11,5	22,5
AA-6-22,9-1	960	22,8	2,29	3,06	5,24	0,77	0,82	2,5	2,5	5,0	39	5,3	14,9	29,0
AA-6-27,5-2	845	31,1	2,75	3,67	6,13	0,79	0,82	2,1	2,3	5,5	39	5,3	16,8	34,5
AA-6-36,1-5	955	36,1	3,61	4,81	8,04	0,79	0,82	2,2	2,4	5,5	39	5,3	28,9	42,0
AA-6-44,8-6	955	44,8	4,48	5,97	9,63	0,79	0,85	2,3	2,4	5,7	39	5,3	31,0	50,5
AA-6-52,1-7	955	52,1	5,21	6,95	10,9	0,81	0,85	2,4	2,5	5,9	39	5,3	41,5	56,0
AA-6-75,8-6	975	74,2	7,58	10,1	15,3	0,82	0,87	2,3	2,1	5,3	116	27	86,0	72,0
AA-6-111-8	980	109	11,1	14,8	22,5	0,82	0,87	2,3	2,5	5,5	116	27	127	105

motori asincroni a 6 poli (p=3)

MOTORE	N_n	C_n	P		I_n	$\cos \varphi$	η	$\frac{C_a}{C_n}$	$\frac{C_{max}}{C_n}$	$\frac{I_a}{I_n}$	P_v	Q_v	$J \cdot 10^3$	M
	$\frac{giri}{min}$	Nm	kW	CV	A	-	-	-	-	-	W	$\frac{m^3}{min}$	kgm^2	kg
AA-8-0,3-1	630	0,45	0,03	0,04	0,23	0,48	0,39	1,8	1,8	1,8	14	0,75	0,11	3,3
AA-8-0,5-2	650	0,73	0,05	0,07	0,34	0,51	0,41	2,1	2,1	1,8	16	2,5	0,35	3,8
AA-8-0,6-3	650	0,91	0,06	0,08	0,43	0,51	0,41	2,1	2,2	1,9	16	2,5	0,62	4,2
AA-8-0,8-2	650	1,16	0,08	0,11	0,48	0,55	0,43	2,1	2,1	1,9	16	2,5	0,81	4,6
AA-8-1,0-3	650	1,48	0,10	0,13	0,57	0,57	0,45	2,3	2,1	2,2	16	2,5	1,05	6,2
AA-8-2,0-1	660	2,89	0,20	0,27	0,84	0,61	0,56	2,3	2,3	2,5	39	5,3	2,10	8,6
AA-8-2,3-2	660	3,35	0,23	0,31	0,96	0,62	0,56	2,4	2,4	2,7	39	5,3	2,55	10,5
AA-8-3,6-3	660	5,15	0,36	0,47	1,45	0,61	0,58	2,1	2,5	2,9	39	5,3	2,70	12
AA-8-3,5-5	670	4,92	0,35	0,46	1,34	0,63	0,59	2,2	2,3	3,2	39	5,3	3,40	12
AA-8-5,3-7	670	7,53	0,53	0,70	1,89	0,65	0,62	2,1	2,2	3,3	39	5,3	4,52	13,5
AA-8-7,4-8	670	10,5	0,74	0,98	2,52	0,63	0,67	2,2	2,1	3,5	39	5,3	5,70	16
AA-8-7,0-1	680	9,88	0,70	0,94	2,30	0,65	0,68	1,8	2,2	3,7	39	5,3	8,55	18,5
AA-8-10,8-2	680	15,2	1,08	1,44	3,23	0,69	0,70	2,0	2,2	4,1	39	5,3	11,5	22
AA-8-17,7-3	670	20,9	1,47	1,96	4,38	0,69	0,70	1,9	2,2	4,3	39	5,3	13,5	23
AA-8-15,1-1	710	20,3	1,51	2,01	4,26	0,71	0,72	2,2	2,3	3,9	39	5,3	16,3	31,5
AA-8-22,3-5	710	30,0	2,23	2,97	6,30	0,71	0,72	2,1	2,5	4,5	39	5,3	28,0	41,5
AA-8-29,0-6	710	39,0	2,90	3,87	7,96	0,73	0,72	2,0	2,1	4,5	39	5,3	35,6	49,5
AA-8-41,3-7	690	57,1	4,13	5,50	11,0	0,75	0,72	1,9	2,2	5,0	39	5,3	52,1	59,5
AA-8-46,0-8	730	60,2	4,60	6,14	11,35	0,75	0,78	1,8	2,4	4,7	116	27	70,4	65
AA-8-55,1-9	735	71,6	5,51	7,35	13,1	0,76	0,80	1,9	2,3	4,8	116	27	85,4	73,5
AA-8-76,6-6	735	99,5	7,66	10,21	17,5	0,79	0,80	1,9	2,2	4,7	116	27	119	90

motori a 8 poli (p=4)

<i>MOTORE</i>	N_n	C_n	P		I_n	$\cos \varphi$	η	$\frac{C_a}{C_n}$	$\frac{C_{max}}{C_n}$	$\frac{I_a}{I_n}$	P_v	Q_v	$J \cdot 10^3$	M
	$\frac{giri}{min}$	Nm	kW	CV	A	-	-	-	-	-	W	$\frac{m^3}{min}$	kgm^2	kg
AA-12-0,9-3	405	2,1	0,09	0,12	0,6	0,60	0,35	1,3	2,2	1,6	16	2,5	1,1	6,5
AA-12-1,7-2	410	4,0	0,17	0,23	1,1	0,60	0,41	1,6	3,9	1,7	39	5,3	3,1	11
AA-12-2,4-5	415	5,6	0,24	0,32	1,7	0,58	0,42	1,7	5,7	1,8	39	5,3	5,2	15
AA-12-3,7-1	420	8,3	0,37	0,49	2,1	0,58	0,45	1,9	8,4	1,6	39	5,3	10	21
AA-12-5,4-2	445	12	0,54	0,71	2,8	0,60	0,53	2,5	11,4	2,1	39	5,3	13	23
AA-12-7,5-2	445	16	0,75	0,99	3,0	0,62	0,58	2,7	16	2,2	39	5,3	16	28
AA-12-10,8-5	450	23	1,08	1,45	6,1	0,62	0,60	1,9	23	3,3	39	5,3	30	55
AA-12-14,8-6	455	31	1,48	1,97	6,5	0,56	0,60	1,7	31	3,5	39	5,3	37	66
AA-12-30,0-6	455	63	3,00	4,00	11	0,60	0,72	2,0	64	3,9	116	27	88	116
AA-12-38,7-7	445	83	3,87	5,16	14	0,62	0,70	2,3	82	4,1	116	27	129	140

motori a 12 poli (p=6)

MACCHINE ED AZIONAMENTI ELETTRICI

Esempi di test

prof. M.Zigliotto

Sommario

PREMESSA	3
GENERALITÀ SULLE MACCHINE ED AZIONAMENTI ELETTRICI	4
VETTORI SPAZIALI	4
CONVERTITORI STATICI CA/CC E CC/CC.	5
MOTORE IN CORRENTE CONTINUA.	5
AZIONAMENTI CON MOTORE SINCRONO A MAGNETI PERMANENTI A CAMPO COMMUTATO.	5
AZIONAMENTI CON MOTORE A PASSO.	6
AZIONAMENTI CON MOTORE SINCRONO A MAGNETI PERMANENTI	6
AZIONAMENTI CON MOTORE ASINCRONO	6

Premessa

L'insegnamento di Macchine ed Azionamenti Elettrici è rivolto agli studenti del Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccatronica. Il corso intende fornire una panoramica teorica e pratica sulle principali tecniche di controllo elettronico dei motori elettrici per un utilizzo in ambiente meccatronico. Gli obiettivi sono quelli di conoscere il principio di funzionamento delle principali macchine elettriche dinamiche, comprendere la terminologia e i parametri che descrivono gli azionamenti elettrici, individuare i motori ed i metodi di controllo più idonei, in relazione alle specifiche dinamiche e di precisione richieste. Infine, leggere ed interpretare i cataloghi per la scelta degli azionamenti elettrici in applicazioni meccatroniche.

La valutazione si basa su uno scritto in forma di test, cioè su tre-quattro domande, generalmente in circa 90 minuti, sia a risposta multipla, sia in forma estesa. Vi potrà essere, tra le domande, anche la richiesta di soluzione di esercizi numerici, anche se è raro: tendo a privilegiare la discussione di argomenti teorico-pratici. Nella risposta, oltre ovviamente al contenuto tecnico, saranno apprezzate la chiarezza espositiva ed la forma ordinata e chiara dell'elaborato. Collocandosi all'ultimo anno del ciclo triennale, l'esame viene infatti considerato anche un ulteriore momento formativo, in cui il candidato deve dar prova non solo di conoscere l'argomento, ma anche di saperlo esporre nella maniera migliore.

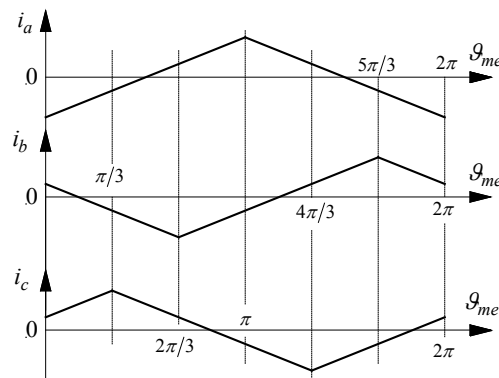
Sono di seguito riportate, a scopo di orientamento allo studio e non esaustivo, alcune domande per ogni macro-argomento presentato a lezione. Al termine dello studio della relativa dispensa, lo studente è invitato a provare a rispondere per scritto a ciascuna domanda, utilizzando al massimo una facciata per ciascuna risposta e confrontandosi con i compagni, valutandosi reciprocamente ed infine rivolgendosi al docente o ai suoi collaboratori qualora gli rimanessero dubbi irrisolti. Il programma può subire variazioni di anno in anno, per mantenerlo al passo con i tempi. Trascurate dunque le domande relative ad argomenti non trattati a lezione. Se avete dubbi anche sul fatto che un argomento sia stato trattato a lezione.. male, molto male...

Generalità sulle macchine ed azionamenti elettrici.

- Descrivere il principio di causa-effetto nella generazione di coppia nei motori elettrici.
- Prendendo spunto dal funzionamento dei sistemi a riluttanza, spiegare il principio di funzionamento dei motori a passo.
- Prendendo spunto dal funzionamento dei sistemi elettrodinamici, spiegare il principio di funzionamento dei motori in corrente continua.
- Prendendo spunto dal funzionamento dei sistemi ad induzione, spiegare il principio di funzionamento dei motori asincroni.
- Descrivere le analogie e le differenze tra i motori in corrente continua e quelli sincroni a magnete permanente.
- Descrivere vantaggi e svantaggi dei motori in corrente continua, e i loro ambiti applicativi (eventuale ricerca in internet, per aggiornamento).
- Illustrare la dualità tra realizzazione hardware e programmazione software nella realizzazione di un sistema di controllo per azionamenti elettrici.
- Illustrare la generazione di un campo magnetico rotante in un sistema trifase.

Vettori spaziali

- Si descriva l'andamento nel piano complesso del vettore spaziale relativo alla terna di grandezze triangolari, sfasate reciprocamente di $2\pi/3$, di figura:



- Si dimostri che la trasformazione secondo i vettori spaziali non è conservativa per la potenza. Si indichino quali dovrebbero essere requisiti della trasformazione affinché la potenza fosse conservata. Ricavare in tale ipotesi i legami tra vettore spaziale e grandezze g_a , g_b , g_c originarie.
- Si scriva l'espansione in serie di Fourier della componente omopolare relativa ad una terna di onde quadre sfasate reciprocamente di $2\pi/3$, commentandone il risultato.
- Si disegni una terna di grandezze periodiche con componente omopolare costante non nulla.
- Stabilire se la condizione di essere composta da tre grandezze alternate sia sufficiente perché una terna abbia componente omopolare nulla.
- Si stabilisca se una terna di grandezze alternate possano avere una componente omopolare a media non nulla.

Convertitori statici ca/cc e cc/cc.

- Illustrare il principio di funzionamento di un raddrizzatore controllato monofase. Qual è il campo di variazione dell'angolo di innesco nel caso di carico resistivo? E nel caso di carico resistivo-induttivo? Perché è opportuno inserire un diodo di ricircolo in parallelo al carico, in quest'ultimo caso?
- Descrivere, con l'ausilio di schemi e diagrammi, il principio di funzionamento di un raddrizzatore non controllato a gruppo di commutazione, nel caso trifase. Si ricavi l'espressione della tensione media d'uscita del raddrizzatore nel caso di assenza di parzializzazione.
- Si tracci lo schema di un filtro di linea per un chopper step-down. Si scrivano e si commentino le equazioni ad esso relativo. Si indichino, in particolare, gli accorgimenti da intraprendere per migliorarne l'effetto, discutendone i necessari compromessi.
- Dall'equazione dello sviluppo in serie di Fourier della tensione prodotta con il metodo di sottooscillazione, tracciare lo spettro in frequenza, descrivendo in dettaglio la generazione dei primi due gruppi di armoniche ($r=1, r=2$).

Motore in corrente continua.

- Disegnare la struttura di un motore cc e descriverne i componenti.
- Provare a disegnare lo schema di connessione (anteriore e posteriore) dei conduttori di rotore alle lamelle di collettore, riportando il verso di percorrenza delle correnti nell'avvolgimento visto di fronte. Si provi poi a ruotare di $\pi/3$ in senso antiorario il rotore, e si disegni la nuova situazione di alimentazione dei conduttori.
- Si illustri il principio di funzionamento a corrente impressa di un azionamento cc. Si spieghi perché non sia utilizzabile, da solo, per portare un carico costante (cioè con coppia resistente indipendente dalla velocità) a girare ad una data velocità. Si indichi una possibile soluzione per il controllo di velocità di tale carico, che contempli al suo interno un meccanismo a corrente impressa.
- Si illustrino vantaggi e svantaggi del funzionamento a tensione impressa rispetto a quello a corrente impressa.
- Si supponga di conoscere tutti i parametri ed i dati di targa di un motore cc a campo avvolto, in un azionamento cc a flusso impresso. Si calcoli che valore di flusso sarebbe necessario per portare in rotazione al doppio della velocità base un carico di coppia pari ad un quarto della coppia nominale.
- Si discutano le ipotesi che dalla relazione
$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{1/K_e \Phi}{\frac{(R_a + sL_a)(B + sJ)}{(K_e \Phi)^2} + 1}$$
 portano alla relazione (semplificata)
$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{1/K_e \Phi}{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_{m1})}.$$
- Si ricavi la funzione di trasferimento che lega coppia di disturbo e corrente $I_a(s)/T_L(s)$ e si fornisca una spiegazione, anche a livello intuitivo, del perché tale funzione coincida con la $\Omega(s)/U_a(s)$, che lega tensione e velocità.
- Si consideri un azionamento per il controllo di velocità e corrente di un motore CC, descrivendo il comportamento della corrente nei casi seguenti: a) funzionamento in rapida accelerazione, in saturazione del regolatore di velocità; b) funzionamento in rapida decelerazione, sempre in saturazione del regolatore di velocità; c) funzionamento in rapida decelerazione, con motore in funzione frenante, trascinato dal carico. Si indichi, in particolare, in quale delle precedenti situazioni la mancata compensazione in feedforward della forza contro elettromotrice può risultare potenzialmente più dannosa.

Azionamenti con motore sincrono a magneti permanenti a campo commutato.

- Ricavare direzione e verso delle forze agenti sui conduttori (e indicare quali) nel caso di posizione del rotore $\theta = \pi/2$.

- Indicare la strategia per far produrre al *BLDCM* una coppia negativa.
- Spiegare perché, nel controllo di coppia di un *BLDCM*, la tensione modulata $U_{dc}(2\delta^*-1)$ viene applicata sempre alla fase che è chiamata ad avere corrente positiva, e dire che cosa si presume accadrebbe se, viceversa, tale tensione fosse applicata alla fase che (in serie con la fase con corrente positiva) è chiamata ad avere corrente negativa. In particolare, il sistema continuerebbe a funzionare, ma producendo coppia negativa ?
- Con riferimento al controllo di coppia di un *BLDCM*, ricavare lo schema del circuito logico combinatorio per il pilotaggio degli opportuni interruttori dell'inverter nell'intervallo $[\pi/6 \pi/2]$.
- Si giustifichi la presenza del circuito completo di comando anche per lo switch inferiore del ramo, invece di una semplice porta NOT con l'ingresso collegato al comando dello switch superiore.
- Si elenchino vantaggi e svantaggi comparativi delle strutture a rotore interno ed esterno.

Azionamenti con motore a passo.

- Si descrivano la struttura ed il principio di funzionamento di un motore a passo ibrido.
- Un motore a passo ibrido potrebbe funzionare se si togliesse il magnete di rotore ?
- Perché la struttura multi-stack permette di avere un aumento della risoluzione angolare ?
- Che cosa rappresenta la curva di pull-out, e perché ha un andamento decrescente con la frequenza di passo ?
- Che cosa rappresenta la curva di pull-in ?
- Se cambia l'inerzia del carico, si può continuare a fare riferimento alla stessa curva di pull-in ?
- Qual è l'essenziale vantaggio dell'alimentazione a doppia fase ?
- Qual è il vincolo matematico da soddisfare nella generazione dei riferimenti di corrente nel funzionamento microstepping ?
- Quand'è che risulta necessario adottare delle rampe di accelerazione ?
- Quale può essere la struttura di un motore a passo a magneti permanenti che presenti un angolo di passo di 11.25° ?
- Detta T la coppia di tenuta che si ottiene alimentando con corrente I una sola fase di un motore a passo VR, qual'è la coppia che si produce in un motore a passo se si alimentano due fasi contigue ciascuna con una corrente di $I/1.41$?

Azionamenti con motore sincrono a magneti permanenti

- Descrivere la tecnica di orientamento di campo per un azionamento per il controllo di velocità di un PMSM.
- Descrivere la similitudine tra la tecnica di orientamento di campo del PMSM, ed il funzionamento del motore in CC.
- Descrivere la similitudine tra la tecnica di orientamento di campo del PMSM, ed il funzionamento di un BLDCM.
- Nel controllo di corrente trifase stazionario, spiegare quanto segue:
 - a) perché non si usano tre sensori di corrente, e cosa avverrebbe se si usassero
 - b) usando due sensori di corrente, si può omettere un regolatore PI ? Se sì, perché ?
 - c) nel funzionamento a due sensori di corrente, che effetti ha un eventuale offset di misura, e come si rimedia ?
 - d) si potrebbe adottare la stessa tecnica anche per un sistema a tre sensori ? Se sì, perché in genere non si fa ?

Azionamenti con motore asincrono

- Descrivere, svolgendo tutti i passaggi, il meccanismo di generazione della coppia nei motori asincroni.
- Disegnare la caratteristica coppia-velocità di un motore sincrono, spiegandone il funzionamento a partire dall'equazione di coppia (che si suppone data dal testo).
- Descrivere la tecnica per ottimizzare il rapporto tra coppia prodotta e corrente di statore in un azionamento con IM.

- Dire perché si preferisca mantenere il flusso costante, e fare un paragone con le tecniche di controllo sia dei motori in CC, sia con i PMSM.
- Tracciare il diagramma fasoriale delle grandezze statoriche, e dire se esistono condizioni di funzionamento in cui il motore possa essere considerato un carico capacitivo.
- Descrivere le diverse tecniche di controllo scalare del motore asincrono, illustrando per ciascuna di esse vantaggi e svantaggi.
- Illustrare le principali differenze tra la tecnica di controllo vettoriale (FOC) e scalare (V/Hz), effettuando una accurata analisi comparativa dai seguenti punti di vista: onere computazionale, prestazioni dinamiche, costo, precisione, efficienza.
- Le equazioni di bilancio delle tensioni di un motore asincrono nel funzionamento in regime sinusoidale sono le seguenti:

$$\dot{U}_s = R_s \dot{I}_s + j\Omega_s L_t \dot{I}_s + j\Omega_s \frac{L_m}{L_r} \dot{\Lambda}_r \quad 0 = R_r \dot{I}_r + j(\Omega_s - \Omega_{me}) \dot{\Lambda}_r$$

e la coppia si può esprimere tramite la relazione:

$$T = K |\Lambda_r| |I_s| \sin(\beta)$$

dove β rappresenta la fase del fasore di corrente rispetto al flusso di rotore e K è una costante legata ai parametri del motore. Ricordando la relazione $\dot{\Lambda}_r = L_r \dot{I}_r + L_m \dot{I}_s$, si traccino (separatamente) i diagrammi fasoriali delle grandezze di statore e di rotore, nelle due ipotesi (a) di funzionamento da motore e (b) di funzionamento da freno. Si indichino poi (c) le differenze tra la rappresentazione ai vettori spaziali e quella ai fasori temporali.