Задание 3. Дудков Иван

- исходную функцию плотности; формулу для оценки максимального правдоподобия; формулы для вычисления статистик критериев;

$$p(X|\theta)=\frac{X^4}{4!\theta^5}e^{-\frac{X}{\theta}}$$

$$X>0 \quad \theta>0$$

$$L(\theta|X_1\dots X_n)=\prod_{i=1}^{N}p(X_i|\theta)=$$

$$=\prod_{i=1}^{N}\frac{X_i^4}{4!\theta^5}e^{-\frac{X_i}{\theta}}=\frac{\prod_{i=1}^{N}X_i^4}{(4!)^N\theta^{5N}}e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i}{\theta}}$$

$$\Lambda=\frac{L(\theta_0|X_1\dots X_n)}{\sup_\theta L(X_1\dots X_n)}$$

$$l(\theta)=\log L(\theta)=\sum_{i=1}^{N}\log(X_i^4)-N\log(4!)-$$

$$-5N\log(\theta)-\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{\theta}$$

$$\frac{d\,l(\theta)}{d\theta}=-\frac{5N}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{\theta^2}$$

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{5N}=\frac{\bar{X}}{5}$$

$$\Lambda=\frac{\frac{\prod X_i^4}{(4!)^N\theta_0^{5N}}e^{-\sum X_i/\theta_0}}{\frac{\prod X_i^4}{(4!)^N(\frac{\bar{X}}{5})^{5N}}e^{-\sum X_i/(\frac{\bar{X}}{5})}}=\frac{(\frac{\bar{X}}{5})^{5N}}{\theta_0^{5N}}\cdot\frac{e^{-\frac{\sum X_i}{\theta_0}}}{e^{-\frac{5N\sum X_i}{\sum X_i}}}$$

$$=\left(\frac{\bar{X}}{5\theta_0}\right)^{5N}e^{5N-\frac{\sum X_i}{\theta_0}}=\underline{\underline{\left(\frac{\bar{X}}{5\theta_0}\right)^{5N}e^{5N(1-\frac{\bar{X}}{\theta_0})}}}$$

Отклоняем H_0, если $-2\log\Lambda>\chi^2_{1,\alpha}$

$$\varphi^* = \mathbb{I}\{2 \ln L(X^{(n)}) > \chi^2(1, 1-\alpha)\}$$

2) $$n(\hat{\theta}-\theta_0) I(\theta_0)(\hat{\theta}-\theta_0) = \frac{n \cdot 5}{\theta_0^2}(\hat{\theta}-\theta_0)^2$$

$$\varphi_1^* = \mathbb{I}\left\{ \frac{5n}{\theta_0^2}(\hat{\theta}-\theta_0)^2 > \chi^2(1, 1-\alpha)\right\}$$

3) $$n(\hat{\theta}-\theta_0) I(\hat{\theta})(\hat{\theta}-\theta_0) = \frac{5n}{\hat{\theta}^2}(\hat{\theta}-\theta_0)^2 =$$

$$= \frac{25n}{\frac{1}{n^2}\sum X_i^2}(\hat{\theta}-\theta_0)^2$$

$$\varphi_2^* = \mathbb{I}\left\{ \frac{25n^3(\hat{\theta}-\theta_0)^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} > \chi^2(1, 1-\alpha)\right\}$$

- выбранное значение θ0; график ядерной оценки плотности сгенерированной выборки; значения статистик критериев и критических констант, P-значения

  Значение theta_0: 0.2
  Значение theta_mle: 0.18630071210035032
  Критическое значение (χ^2(1, 1-α)): 2.705543454095404. Степени свободы: 1
  p-value: 0.27879785825443937
  Вычисленная статистика (5n/(θ0^2) * (θm - θ0)^2): 1.173
  Нет оснований отвергать нулевую гипотезу H0: θ = θ0.

  Вычисленная статистика ((25 * n^3) / (np.mean(samples^2))) * (theta_m - theta_0)**2:
  p-value: 0.2449666082580243

-> 1.352
Нет оснований отвергать нулевую гипотезу H0: θ = θ0.

---

p-value: 0.2675211171867484
Вычисленная статистика -2*np.log(((np.mean(samples) / (5 * theta_0))^(5*n)) * np.exp(5*n*(1-np.mean(samples)/theta_0)))
-> 1.229
Нет оснований отвергать нулевую гипотезу H0: θ = θ0.