

Задание 2. Дудков Иван

- Функция плотности; Формула для оценки Максимального правдоподобия. Значение оценки θ

$$p(x|\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2\theta} \quad x \in \mathbb{R} \quad \theta > 0$$

1. Ф-ла для оценки МП

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}} e^{-x_i^2\theta}$$

$$\ln L(\theta) = \ln \left(\frac{\theta^{\frac{N}{2}}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \right) \ln(e^{-x_i^2\theta})$$

$$\ln L(\theta) = \frac{N}{2} \ln \left(\frac{\theta}{\pi} \right) - \theta \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$\ln L(\theta) = \frac{N}{2} \ln \theta - \frac{N}{2} \ln \pi - \theta \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = \frac{N}{2\theta} - \sum_{i=1}^N x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{N}{2\theta} = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$\underline{\underline{\hat{\theta}_n = \frac{N}{2 \sum_{i=1}^N x_i^2}}}$$

- Формулировка асимптотической нормальности

2. Ф-ка асимпт-ой норм-сти

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta))$$

$$I(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 \theta^2} = -\frac{n}{2\theta^2}$$

$$I(\theta) = -E \left[-\frac{n}{2\theta^2} \right] = \frac{n}{2\theta^2}$$

$$\sigma^2(\theta) = \frac{1}{I(\theta)/n} = \frac{2\theta^2}{n} \quad n = 2\theta^2$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 2\theta^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \left(\frac{n}{2 \sum_{i=1}^n x_i^2} - \theta \right) \xrightarrow{d} N(0, 2\theta^2)$$

- Формула для вычисления верхней и нижней границ асимптотического доверительного интервала надёжности $1 - \alpha$

3. Ф-ла выч-я в-й и н-й границы
а-ого дов-го интер-ла надёж-сти $1 - \alpha$

$$\hat{\theta}_n \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\theta}_n \sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \hat{\theta}_n \left(1 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{n}} \right)$$

н-я г-ца: $\hat{\theta}_n \left(1 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{n}} \right)$

в-я г-ца: $\hat{\theta}_n \left(1 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{n}} \right)$

- Выбранное значение θ ; эмпирическую функцию распределения и ядерную оценку плотности сгенерированной выборки; значения границ полученного доверительного интервала

Истинное значение theta: 2.0

Оценка theta (метод максимального правдоподобия): 2.55

Доверительный интервал для theta (0.95): (1.55, 3.55)

