

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра информатики и вычислительной математики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика
(бакалавриат)

Направленность (профиль) подготовки: Математическое моделирование, вычислительная математика и физика

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОНКОЙ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ

(бакалаврская работа)

Студент:

Аксенов Виталий Витальевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Васюков Алексей Викторович,
канд. физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2020

РЕФЕРАТ

Работа содержит 30 стр., 9 рис., 7 табл., 24 источн..

В работе рассматривается динамическая задача распространения упругих деформаций и напряжений в тонкой анизотропной мембране с произвольными упругими параметрами. Деформации предполагаются малыми, связь напряжений и деформаций — линейной. В работе сформулирована модель достаточно общего вида, которая затем применена к задачам высокоскоростного ударного нагружения тканых композитов, поперечных вибраций и распространения волн в композитных пластинках. Сформулирован численный метод решения, позволяющий исследовать постановки со сложной геометрией образца под действием несимметричной, распределенной в пространстве и времени нагрузки. Приведен ряд верификационных расчетов и результаты численного эксперимента по определению фактического порядка аппроксимации метода.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Математическая модель	7
1.1 Связь между смещениями, деформациями и напряжениями.....	8
1.2 Вывод уравнений движения	8
1.3 Вид матрицы D	9
2 Построение численного метода	11
2.1 Разбиение расчетной области.....	11
2.2 Аппроксимация смещений.....	12
2.3 Расчёт деформаций и напряжений	12
2.4 Принцип виртуальных перемещений для элемента.....	13
2.5 Сборка глобальных матриц.....	14
2.6 Учёт закреплений	15
2.7 Интегрирование по времени	16
3 Результаты моделирования	17
3.1 Тестовые расчеты.....	17
3.1.1 Нагрузки изотропного образца.....	17
3.1.2 Анизотропный образец.....	19
3.1.3 Образец со сложной перфорацией.....	21
3.2 Верификационные расчеты. Собственные частоты колебаний прямоугольной мембраны.....	22
3.3 Фактический порядок аппроксимации.....	25
Заключение	27
Список использованных источников	28

ВВЕДЕНИЕ

Тонкие композитные конструкции находят применение во многих областях инженерного дела. В связи с этим они активно исследуются как экспериментальными методами, так и методами математического моделирования. Для разных видов композитов актуальны различные задачи и используются различные методы. Так, некоторые направления исследований тканевых композитных конструкций численными методами включают в себя:

- предсказание упругого поведения тканых композитов [1, 2, 3];
- предсказание механических (в том числе прочностных) характеристик армированных тканевых композитов [4, 5];
- методы получения осредненных характеристик материала, базирующиеся, в основном, на изучении периодически повторяющихся ячеек материала;
- задачи статического нагружения тонких оболочек и мембран, вибраций тонкостенных конструкций [6];
- относительно медленные динамические задачи, такие как динамика купола парашюта [7], развёртывание солнечного паруса [8].

В связи с тем, что тканевые композиты начинают применяться в системах защиты космических аппаратов от воздействия частиц осколочно-метеороидной среды, актуальной становятся задачи высокоскоростного нагружения, в которых неприменим квазистатический подход. В настоящее время сложилась концепция двухэкранной защиты, широко применяемая на модулях МКС [9, 10]. В основе данной системы защиты лежит экран Уиппла [11], применение которого в металлическом исполнении для защиты элементов ракетно-космической техники при высокоскоростном воздействии проверено десятилетиями использования. Однако, применение тканевых композитов в данной защите является существенно новым, вопросы их эксплуатации в таких режимах практически не изучены на сегодняшний день.

В открытой печати существует большое количество работ по расчетам и экспериментальной отработке тканевых материалов при ударном воздействии. Основная их часть рассматривает осколочное воздействие при скоростном диапазоне 300-500 м/с [12, 13, 14, 15]. Для задачи защиты от космического мусора принципиальным отличием оказывается скорость взаимодействия (5-7 км/с), а также тот факт, что воздействует на ткань не одиночный крупный ударник, а распределённое по времени и пространству облако мелких осколков, сформированных при взаимодействии крупной частицы с внешним слоем экранной защиты.

В [16] получены решения для симметричных постановок и некоторых профилей ударной нагрузки. Обобщение данных результатов на случай несимметричного профиля нагрузки сложной формы по времени и пространству, а также на случай анизотропного материала мембраны представляется крайне сложным, если вообще возможным.

В связи с этим в данной работе рассматривается построение конечноэлементной модели для расчётов высокоскоростного нагружения тонкой мембраны. Стоит отметить, что любой тканевый композит имеет сложную структуру с тремя характерными масштабами: микромасштаб отдельных волокон, мезомасштаб нитей, макромасштаб относительно крупных тканевых изделий. Данная работа фокусируется на последнем масштабе. В этом случае малая толщина образца позволяет пренебречь частью деформаций и рассматривать мембрану как двухмерный объект в трехмерном пространстве. Упругие свойства композитов при высоких скоростях нагружения вплоть до момента разрушения адекватно описываются линейной моделью упругости [17]. Относительно большие размеры позволяют не брать во внимание отдельные нити и рассматривать материал как однородный и, в общем случае, анизотропный. Перечисленные выше соображения позволяют расширить область применения описываемой модели на некоторые плоские задачи для композитных пластин, например, вибрационные испытания или распространение упругих волн.

В данной работе, в отличие от традиционных теорий плит и оболочек, движение в плоскости мембраны и поперечное движение рассматриваются

одновременно, что было продиктовано необходимостью рассматривать косые удары. С другой стороны, в отличие от известных программ для трехмерных расчетов теории упругости, не требуется строить сетку по толщине образца, что снижает количество переменных и, соответственно, время расчетов. Код модели позволяет исследовать задачи со сложной геометрией, на регулярных и нерегулярных сетках. Это делает возможным в будущем рассчитывать образцы с отверстиями, образующимися в ходе разрушения материала. Также при вычислениях можно задать все 21 независимые компоненты тензора упругих констант.

В работе приводится ряд тестовых расчетов, демонстрирующий возможности метода, показаны качественно верные картины деформации в различных постановках. В качестве верификационных приведены расчеты собственных частот в классической задаче поперечных колебаний закрепленной прямоугольной мембраны, которые сравниваются с аналитическими значениями. Также исследуется фактический порядок аппроксимации метода для различных постановок, в том числе для несимметричной и для распределённой нагрузки.

Результаты работы автора по данной теме были представлены на ряде международных конференций:

- ЕСАМ2019, Новосибирск (Академгородок), Россия, август 2019;
- International Symposium on Smart Aircraft, Сиань, Китай, октябрь 2019;
- QIPRA2019, Долгопрудный, Россия, декабрь 2019.

Были написаны научные статьи:

- «Numerical Modeling of Thin Anisotropic Membrane under Dynamic Load», The Aeronautical Journal (Scopus Q3, WoS) — принята к публикации;
- «Numerical Study of Thin Composite Structures Vibrations for Material Parameters Identification», Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Continuum Mechanics — проходит рецензирование.

1 Математическая модель

Будем считать, что в недеформированном состоянии срединная поверхность мембраны лежит в некой плоскости. Введем декартову прямоугольную систему координат, в которой оси OX , OY лежат в этой плоскости, OZ перпендикулярна им. Пусть $(x, y, z)^T$ — координаты точки в деформированном состоянии, $(x_0, y_0, z_0)^T$ — в недеформированном. Обозначим смещения точек при деформации как

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

Мембрана рассматривается как объект, у которого характерные размеры в одном из направлений (z) на несколько порядков меньше, чем в двух других. На основании этого предполагается, что можно полностью пренебречь толщиной мембраны и рассматривать её как двухмерный объект в трёхмерном пространстве. В этом случае мембрана конечной толщины эффективно заменяется своим бесконечно тонким средним сечением [18]. То есть для точек мембраны справедливо соотношение:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}(x, y) \quad (1.1)$$

В рамках данной работы для описания деформирования материала мембраны используется тензор деформации Коши в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2)$$

Здесь u_i — вектор, задающий смещение точки тела, ε_{ij} — тензор деформации в данной точке. Предполагается, что для моделируемых материалов и диапазонов деформаций верен обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.3)$$

Здесь σ_{ij} — тензор напряжений в данной точке, а C_{ijkl} — тензор упругих постоянных для материала мембраны.

1.1 Связь между смещениями, деформациями и напряжениями

Вектор деформации в трехмерной теории упругости имеет вид

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^T \quad (1.4)$$

Однако, вследствие кинематической гипотезы (1.1) всегда $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$ для интересующих нас смещений $\mathbf{u}(x, y)$. Тогда

$$\varepsilon = \mathbf{S}\mathbf{u}$$

где линейный дифференциальный оператор \mathbf{S} определен как

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Обобщенный закон Гука в векторной записи примет вид

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{xz} \end{bmatrix}^T = \mathbf{D}\varepsilon \quad (1.6)$$

где D — матрица упругих констант. В наиболее общем случае \mathbf{D} симметрична и имеет 21 независимую компоненту.

1.2 Вывод уравнений движения

Для получения уравнений движения рассмотрим принцип виртуальных перемещений для единицы объема. Рассмотрим сперва неподвижный материал. Пусть $\delta u, \delta \varepsilon$ — вариации, $\bar{\mathbf{b}}$ — вектор распределенной внешней силы. Тогда виртуальная работа на единицу объема равна:

$$\delta w = \delta \varepsilon^T \sigma - \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} \quad (1.7)$$

Если u достаточно гладка, то $\delta \varepsilon = S \delta \mathbf{u}$. В соответствии с принципом Д'Аламбера, динамическое состояние эквивалентно статическому при

введении силы инерции. Следовательно, в уравнении (1.7) нужно сделать подстановку

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \rho\ddot{\mathbf{u}},$$

где \mathbf{b} — внешние силы, $-\rho\ddot{\mathbf{u}}$ — сила инерции. С учетом этого, а также соотношений (1.5), (1.6), получаем равенство

$$\delta\mathbf{u}^T (\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} + \rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) = 0,$$

которое должно выполняться при любой вариации $\delta\mathbf{u}$. Значит, нулю равно выражение в скобках. Итак, получаем:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} + \rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b} = 0 \quad (1.8)$$

1.3 Вид матрицы \mathbf{D}

Изотропный материал характеризуется двумя независимыми упругими константами, например, модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Матрица \mathbf{D} для такого материала примет вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{E\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{E\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{E\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{E\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(\nu+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(\nu+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(\nu+1)} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Система уравнений движения для такого материала распадается на подсистемы:

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)u_{xx} + \mu v_{yy} + (\lambda + \mu)v_{xy} + b_u = \rho u_{tt} \\ (2\mu + \lambda)v_{xx} + \mu v_{yy} + (\lambda + \mu)u_{xy} + b_v = \rho v_{tt} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\mu \Delta w + b_w = \rho w_{tt} \quad (1.11)$$

(для лаконичности записи перешли к двум другим независимым параметрам, параметрам Ламе $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$), которые можно решать отдельно. По-другому ситуация обстоит для анизотропного материала.

Рассмотрим, например, довольно общий тип материала — моноклинный, то есть имеющий одну плоскость симметрии, в нашем случае совпадающую с плоскостью недеформированной мембраны. Его тензор упругих констант имеет вид

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & D_{26} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{36} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

а дифференциальный оператор, входящий в уравнение движения, примет вид

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (D_{12} + D_{44}) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (D_{16} + D_{45}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (D_{12} + D_{44}) & D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{45} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (D_{16} + D_{45}) & D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{45} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & D_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Видно, что, без выполнения дополнительных условий на упругие параметры материала, в общем случае нельзя рассматривать движение мембраны в плоскости и поперечное движение независимо. Однако именно такой общий случай представляет интерес при изучении анизотропных материалов, например, композитов. Этим обосновано построение численного метода, в котором у точек материала есть три степени свободы.

2 Построение численного метода

В работе используется метод конечных элементов, построенный с учётом требований рассматриваемой динамической задачи. При построении численного метода используются общие подходы, описанные в [20].

2.1 Разбиение расчетной области

Расчётная область совпадает с рассматриваемой мембраной, в области строится неструктурированная расчётная сетка из треугольных элементов. Считается, что толщина мембраны h , плотность ρ , и тензор упругих параметров \mathbf{D} материала мембраны не меняются в пределах одного элемента расчётной сетки. Внешняя сила \mathbf{b} считается распределенной по пространству и также постоянной в каждом элементе сетки. В вершинах хранятся их начальные координаты (x_0, y_0) , смещения \mathbf{a} и скорости \mathbf{v} . На рисунке 2.1 показан фрагмент расчётной сетки с указанием, какие величины относятся к элементам и к вершинам.

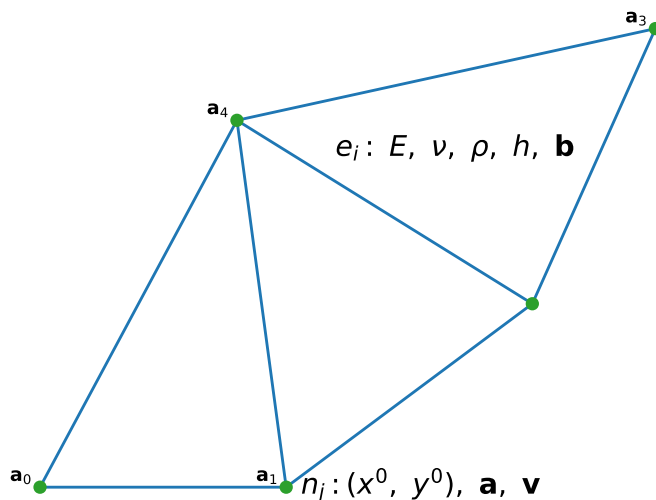


Рисунок 2.1 — Пример разбиения: элементы e_i и вершины n_j с соответствующими величинами

2.2 Аппроксимация смещений

Рассмотрим элемент сетки — треугольник с вершинами в точках $(x_0^m, y_0^m), (x_0^n, y_0^n), (x_0^p, y_0^p)$. Вектор смещений в i -той вершине будем обозначать

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{u}(x_0^i, y_0^i)$$

В каждом элементе сетки вводится аппроксимация смещений произвольной точки по смещениям в вершинах треугольника. Для этого нужно выбрать *функции формы* $\mathbf{N}_i(x, y, z)$, $i \in \{m, n, p\}$. Тогда для произвольной точки внутри элемента:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i \in \{m, n, p\}} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_m \ \mathbf{N}_n \ \mathbf{N}_p]$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_p \end{bmatrix}$ — смещения в вершинах. Ограничимся линейной аппроксимацией. С учетом (1.1) получим:

$$\mathbf{N}_i = (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \mathbf{E} \quad (2.2)$$

Коэффициенты находятся из условия

$$\mathbf{N}_i(x_j, y_j) = \begin{cases} \mathbf{E}, & i = j \\ \mathbf{0}, & i \neq j \end{cases} \quad i, j \in \{m, n, p\} \quad (2.3)$$

Окончательно коэффициенты для выбранных функций формы имеют вид:

$$\alpha_i = \frac{1}{S_e} \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix} \quad \beta_i = -\frac{1}{S_e} (y_k - y_j) \quad \gamma_i = \frac{1}{S_e} (x_k - x_j) \quad S_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

2.3 Расчёт деформаций и напряжений

Запишем деформации (1.4) с учетом принятой в (2.1) аппроксимации перемещений

$$\varepsilon = \mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.4)$$

С учетом вида \mathbf{N} матрица \mathbf{B} выражается через коэффициенты выбранных функций формы следующим образом:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^1 & \mathbf{B}_2^1 & \mathbf{B}_3^1 \\ \mathbf{B}_1^2 & \mathbf{B}_2^2 & \mathbf{B}_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B}_i^1 = \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^2 = \begin{bmatrix} \gamma_i & \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_i \\ 0 & 0 & \beta_i \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Напряжения и деформации связаны обобщённым законом Гука (1.6). Таким образом, с учётом только что полученной записи для деформаций, получаем:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a} \quad (2.7)$$

2.4 Принцип виртуальных перемещений для элемента

Для получения уравнений движения для вершин элемента воспользуемся принципом виртуальных перемещений. Вначале рассмотрим статический случай. Виртуальная работа на единицу объема задается уравнением (1.7). Чтобы перейти к расчётным величинам, из уравнений (2.1), (2.4) выразим:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\delta \mathbf{a}, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta \mathbf{a} \quad (2.8)$$

С учётом этих соотношений, а также (2.7), выражение (1.7) для виртуальной работы принимает следующий вид:

$$\delta w = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} = \delta \mathbf{a}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} - \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}}) \quad (2.9)$$

Проинтегрируем работу по элементу расчётной сетки, после чего для использования в расчёте введём фиктивные силы \mathbf{q}_i , действующие в вершинах элемента сетки и эквивалентные реально действующим силам (внешней и упругой) в элементе:

$$\delta \mathbf{a}^T \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} dV - \int_{V_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV \right) = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{q}_e \quad (2.10)$$

Чтобы перейти к динамическому случаю, в соответствии с принципом Д'Аламбера, добавим силу инерции:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.11)$$

где \mathbf{b} — внешние силы, $-\rho \ddot{\mathbf{u}}$ — сила инерции. Для ускорений будем использовать ту же аппроксимацию, что и для смещений:

$$\ddot{\mathbf{u}}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \ddot{\mathbf{a}}. \quad (2.12)$$

С учётом (2.11) и (2.12) из (2.10) для элемента расчётной сетки получим следующее уравнение для перемещений:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_e \mathbf{a} + \mathbf{f}_e = \mathbf{q}_e \quad (2.13)$$

Здесь были введены матрицы

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \text{ — матрица жёсткости} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{M}_e = \rho \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \text{ — матрица массы} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{f}_e = - \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV_e \text{ — вектор сил} \quad (2.16)$$

2.5 Сборка глобальных матриц

Остается для каждой вершины расчётной сетки учесть влияние всех элементов сетки, в которые она входит. Данная процедура является типовой для метода конечных элементов и многократно описана в литературе, поэтому изложим её кратко.

Для описания движения всех вершин сетки будет использовано соотношение, полностью аналогичное (2.13), но размерности $3N_{nodes}$ (3 — число степеней свободы у вершины сетки). В данном соотношении под \mathbf{a} будет пониматься вектор перемещений, составленный из векторов перемещений всех отдельных вершин. Матрица жёсткости, матрица массы, вектор сил также станут глобальными. При этом если узел входит в несколько элементов сетки, то его перемещение, очевидно, не должно

зависеть от того, в составе какого элемента он рассматривается. Кроме того, если суммировать все силы, действующие в узле от каждого элемента сетки, то результат должен быть равен внешней силе, то есть нужно положить суммарные фиктивные силы $\mathbf{q} = 0$.

Для выполнения этих условий глобальные матрицы \mathbf{K} , \mathbf{M} размером $3N_{nodes} \times 3N_{nodes}$ и вектор \mathbf{f} размером $3N_{nodes}$ формируются по следующим правилам:

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_e \mathbf{K}_{ij}^e \quad (2.17)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_e \mathbf{M}_{ij}^e \quad (2.18)$$

$$\mathbf{f}_i = \sum_e \mathbf{f}_i^e \quad (2.19)$$

Здесь под \mathbf{K}_{ij} понимается блок размером 3×3 матрицы \mathbf{K} , стоящий на пересечении столбцов, соответствующих i -той и j -той вершинам. Матрицы \mathbf{K}_{ij}^e — матрицы жёсткости отдельных элементов, полученные в пункте 2.4 выше. Суммирование производится по всем элементам сетки, в которые i -тая и j -тая вершины входят вместе. Окончательно получаем:

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0} \quad (2.20)$$

2.6 Учёт закреплений

Для расчётов точечных ударов требуется наложить дополнительное условие: постоянство скорости в i -ой вершине. Также может возникнуть задача для мембраны с закрепленными краями. Данные граничные условия можно учесть, не меняя вида уравнения (2.20). Рассмотрим вершину i . Заполним в матрице \mathbf{K} строку $\mathbf{K}_{ik}, k \in \overline{1, N_{nodes}}$ нулями. В матрице \mathbf{M} положим $M_{ii} = \mathbf{E}$, а остальные блоки $M_{ik}, k \neq i$ заполним нулями. Наконец, в векторе \mathbf{f} заполним нулями \mathbf{f}_i . В результате в системе появится уравнение $\ddot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{0}$, то есть скорость i -ой вершины будет зафиксирована. Для того, чтобы зафиксировать смещение, нужно положить эту скорость равной нулю.

2.7 Интегрирование по времени

Таким образом исходная задача в частных производных сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Её можно решать любым известным способом. В данной работе был использован метод Ньюмарка, описанный в [19]. При использовании данного метода значения смещений \mathbf{a} , скоростей $\dot{\mathbf{a}}$ и ускорений $\ddot{\mathbf{a}}$ на $(n + 1)$ -ом шаге по времени выражаются через значения на n -ом шаге следующим образом.

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\mathbf{a}}}_n &= \dot{\mathbf{a}}_n + \tau(1 - \beta_1)\ddot{\mathbf{a}}_n \\
 \bar{\mathbf{a}}_n &= \mathbf{a}_n + \tau\dot{\mathbf{a}}_n + \frac{1}{2}\tau^2(1 - \beta_2)\ddot{\mathbf{a}}_n \\
 \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} &= -A^{-1}(\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{a}}_n), \quad A = \mathbf{M} + \frac{1}{2}\tau^2\beta_2\mathbf{K} \\
 \dot{\mathbf{a}}_{n+1} &= \dot{\bar{\mathbf{a}}}_n + \beta_1\tau\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \\
 \mathbf{a}_{n+1} &= \bar{\mathbf{a}}_n + \frac{1}{2}\tau^2\beta_2\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

При $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \frac{1}{2}$ метод безусловно устойчив. При $\beta_1 = \frac{1}{2}$ метод имеет второй порядок сходимости [20]. Для всех приведенных ниже расчетов использовались параметры $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$

3 Результаты моделирования

3.1 Тестовые расчеты

Описанный численный метод работает на произвольных сетках из треугольников, как структурированных, так и нет. На рисунке 3.1 приведен пример использованной в численных экспериментах расчетной сетки, построенной сеточным генератором gmsh [21].

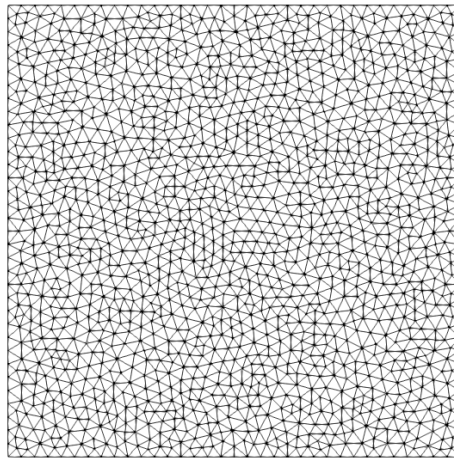


Рисунок 3.1 — Пример расчетной сетки

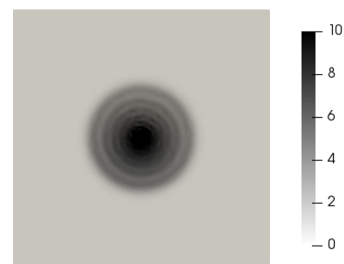
3.1.1 Нагрузки изотропного образца

На рисунке 3.2 показан пример расчёта модельной постановки на данной сетке. На единственный центральный элемент сетки действует удар с постоянной скоростью, направленной по нормали к плоскости мембраны. Показано вовлечение материала мембраны в движение. Видно, что для симметричной постановки решение симметрично и не содержит численных артефактов.

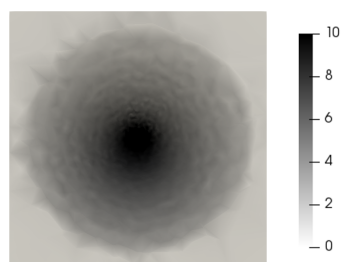
Реализованный метод позволяет выполнять расчёты несимметричных постановок. На рисунке 3.3 приведён примера расчёта, в котором удар с постоянной скоростью наносится под углом к нормали. Видно вовлечение материала мембраны в движение и её существенно несимметричная деформация.



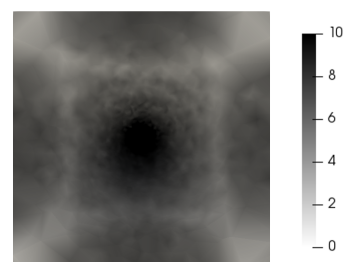
(a) Начальный момент



(b) Распространение волны по мембране

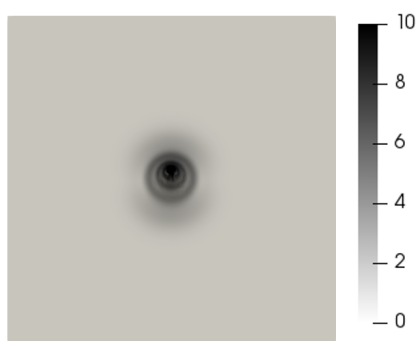


(c) Волна достигает края мембраны

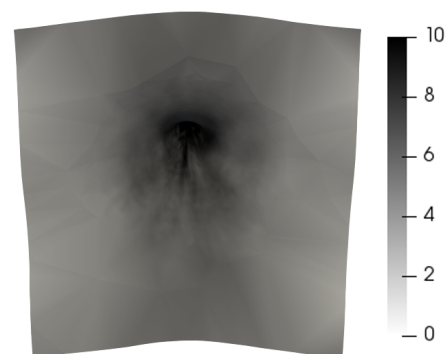


(d) Отражение волны от края

Рисунок 3.2 — Воздействие точечного импульса нагрузки. Динамика вовлечения материала мембраны в движение. Цветом показан модуль скорости в разные моменты времени.



(a) Начальный этап воздействия



(b) Сформированная деформация

Рисунок 3.3 — Воздействие точечного импульса нагрузки под углом 30 градусов к нормали. Цветом показан модуль скорости в разные моменты времени.

Метод позволяет как получить динамику начального этапа вовлечения материала мембраны в движение, так и обеспечить расчёт деформаций, развивающихся в течение значительного времени. Для примера на рисунке 3.4 показан результат расчёта деформации мембраны под действием распределённой нагрузки, которая направлена по нормали к недеформированной мембране и по модулю равна

$$b(r) = \begin{cases} b_0 \cos^2 r, & r \leq L \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$r = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}L\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}L\right)^2}, \quad L — \text{размер мембраны}$$

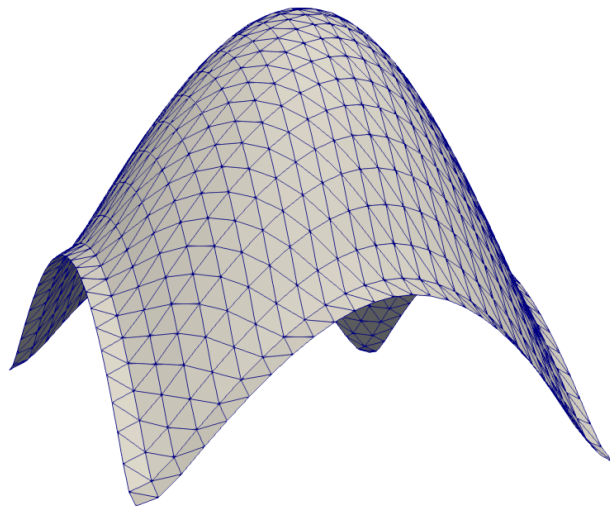


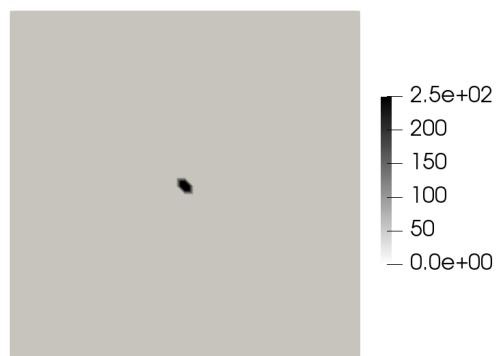
Рисунок 3.4 — Деформация под действием распределенной в пространстве нагрузки

3.1.2 Анизотропный образец

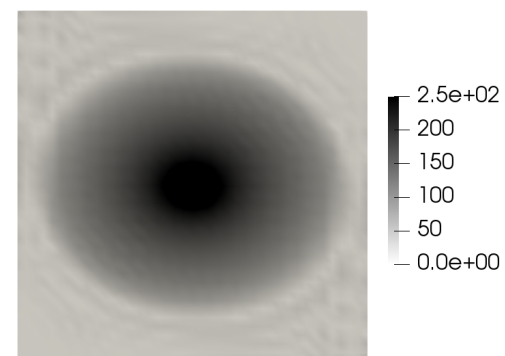
На рисунке 3.5 изображены результаты расчета с анизотропным материалом. Упругие параметры материала приведены в таблице 3.1. Нагрузка аналогична постановке с рисунка 3.2, внешняя сила направлена по нормали. Хорошо видно ассиметричный эллиптический фронт волны.

Таблица 3.1 — Ненулевые компоненты матрицы упругих констант

Компонента	Значение, ГПа
D_{11}	150
D_{12}	40
D_{13}	10
D_{22}	150
D_{23}	80
D_{33}	150
D_{44}	80
D_{55}	20
D_{66}	30



(a) Начальный момент



(b) Отражение волны от края

Рисунок 3.5 — Анизотропный образец под действием нормальной нагрузки.

Цветом обозначен модуль скорости среды в каждой точке

3.1.3 Образец со сложной перфорацией

В качестве демонстрации работы кода на задачах со сложной геометрией, приведем расчеты распространения волн в образце с периодической перфорацией. Конструкции такого рода описываются в работах [22, 23]. Пластина из однородного изотропного материала (например, алюминия) с достаточно большим числом периодических отверстий специального вида проявляет эффективные свойства анизотропного материала. При прохождении волн через такое изделие может происходить преобразование продольных волн в поперечные и наоборот без потери энергии. Одно из возможных применений модели, описанной в данной работе — детальный расчет таких изделий для оценки влияния краев, конечного числа ячеек и проч.

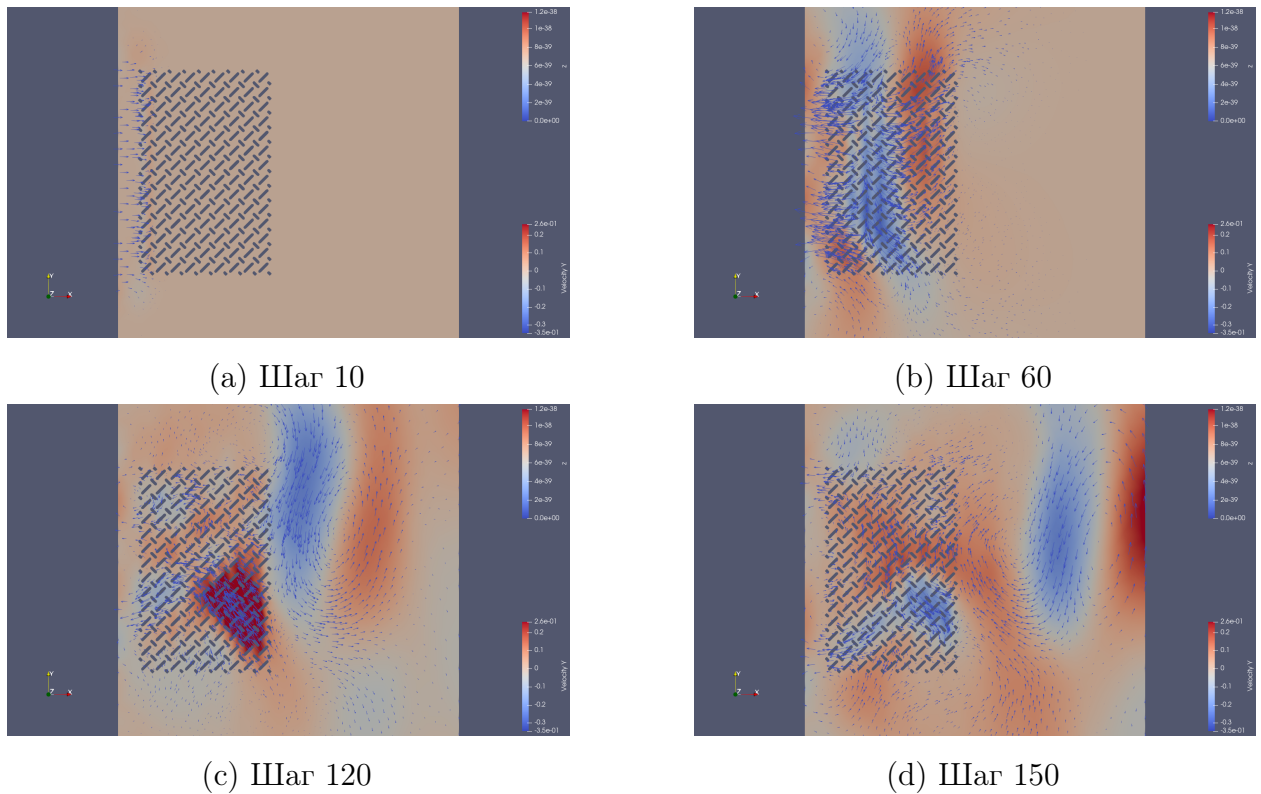


Рисунок 3.6 — Расчет для перфорированного образца. На перфорацию падает продольная волна. Цветом обозначена вертикальная компонента скорости, стрелками — направление скорости точек среды

3.2 Верификационные расчеты. Собственные частоты колебаний прямоугольной мембраны

Как было отмечено выше, движение мембраны из однородного материала описывается двумя независимыми уравнениями: (1.10) для движения в плоскости, и (1.11) для поперечных колебаний. Поставим краевую задачу для поперечного движения закрепленной по краям прямоугольной мембраны с размерами L_x, L_y в отсутствие внешних сил.

$$\Delta w(x, y, t) = \frac{1}{a^2} w_{tt}(x, y, t) \quad (3.2)$$

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y), w_t(x, y, 0) = w_1(x, y) \quad (3.3)$$

$$w(0, y, t) = w(L_x, y, t) = w(x, 0, t) = w(x, L_y, t) = 0 \quad (3.4)$$

Здесь введена скорость распространения колебаний $a^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{E}{2(1+\nu)\rho}$. Решение задачи дается методом Фурье:

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} (A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t) \Phi_{mn}(x, y) \quad (3.5)$$

$$\Phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{\pi n}{L_x} x \sin \frac{\pi m}{L_y} y - \text{собственные функции} - \Delta \quad (3.6)$$

$$\omega_{mn} = a \Omega_{mn}, \Omega_{mn} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2}} - \text{собственные числа} - \Delta \quad (3.7)$$

Собственным частотам ω_{mn} и модам колебаний Φ_{mn} в конечноэлементной модели будут соответствовать решения уравнения (2.20) вида $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} e^{i\omega t}$. Они находятся из решения задачи на собственные значения

$$\omega : \det (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (3.8)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = 0 \quad (3.9)$$

Для верификации были проведены расчеты первых 11 собственных чисел задачи на нерегулярной и регулярной сетках различной мелкости. Размеры мембраны $L_x = 1$ м, $L_y = 2$ м, $a = 3573$ м/с. Сравниваются величины $\nu_{mn} = \omega_{mn}/2\pi$. Задача на собственные значения при поперечных колебаниях была выбрана как верификационная потому, что в дальнейшем планируется сопоставление расчетов модели с экспериментальными данными

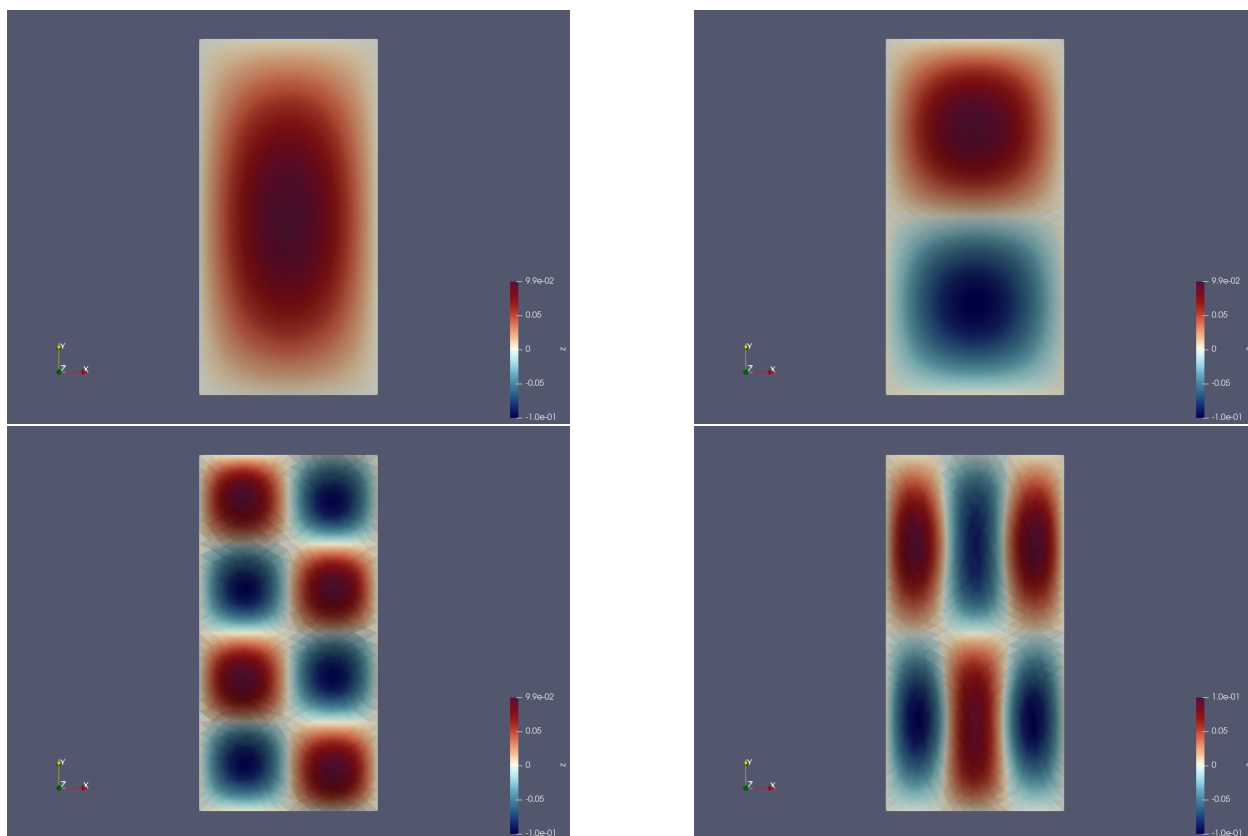


Рисунок 3.7 — Некоторые из решений задачи (3.9). Цветом выделена амплитуда колебаний

с вибрационных испытаний композитных пластинок. Результаты приведены в таблицах 3.2–3.5. Здесь ν_a , ν_n — собственные частоты, полученные соответственно аналитически и численно, $\delta\nu = \frac{|\nu_a - \nu_n|}{\nu_a}$ — относительная ошибка.

ν_a	ν_n	$\delta\nu, \%$
1997.76	2051.92	2.64
2526.99	2650.07	4.64
3221.30	3458.40	6.86
3683.69	3970.39	7.22
3995.53	4398.36	9.16
3995.53	4427.18	9.75
4467.14	5128.33	12.89
4811.25	5426.74	11.34
5053.99	6019.21	16.04
5434.50	6286.68	13.56
5650.53	6508.04	13.18

Таблица 3.2 — Регулярная сетка, 66 вершин, 100 треугольников

ν_a	ν_n	$\delta\nu, \%$
1997.76	2001.15	0.17
2526.99	2534.78	0.31
3221.30	3236.61	0.47
3683.69	3701.58	0.48
3995.53	4022.49	0.67
3995.53	4022.64	0.67
4467.14	4509.05	0.93
4811.25	4855.04	0.90
5053.99	5116.45	1.22
5434.50	5489.04	0.99
5650.53	5715.52	1.14

Таблица 3.3 — Регулярная сетка, 861 вершина, 1600 треугольников

ν_a	ν_n	$\delta\nu, \%$
1997.76	2052.56	2.67
2526.99	2627.90	3.84
3221.30	3424.98	5.95
3683.69	4029.21	8.58
3995.53	4340.93	7.96
3995.53	4416.12	9.52
4467.14	5064.52	11.80
4811.25	5314.40	9.47
5053.99	5985.27	15.56
5434.50	6415.96	15.30
5650.53	6546.25	13.68

Таблица 3.4 — Нерегулярная сетка, 56 вершин, 80 треугольников

ν_a	ν_n	$\delta\nu, \%$
1997.76	2000.67	0.15
2526.99	2532.96	0.24
3221.30	3233.71	0.38
3683.69	3702.19	0.50
3995.53	4018.86	0.58
3995.53	4020.12	0.61
4467.14	4500.14	0.73
4811.25	4853.45	0.87
5053.99	5102.55	0.95
5434.50	5492.85	1.06
5650.53	5716.34	1.15

Таблица 3.5 — Нерегулярная сетка, 722 вершина, 1346 треугольников

3.3 Фактический порядок аппроксимации

Для полной построенной численной схемы был получен фактический порядок сходимости. Для нахождения фактического порядка одна и та же задача решалась несколько раз с последовательным измельчением расчётной сетки. Контролировалась норма разности решений, полученных на сетках разной мелкости, использовались нормы L_1 , L_2 , L_∞ [24].

Для данных серий расчётов использовались сетки, состоящие из прямоугольников, каждый из которых диагональю делился на два треугольника, так как этот подход позволяет контролируемо уменьшать мелкость сетки на заданную величину. Для каждого следующего расчёта шаг сетки уменьшается в два раза (каждый прямоугольник переходит в четыре более мелких), шаг по времени также уменьшается в два раза. Вычислялась норма разности между значениями скоростей и смещений для k -го и $(k + 1)$ -го разбиения в точках, соответствующих всем вершинам наиболее крупной сетки.

Были рассмотрены различные постановки — симметричное и несимметричное воздействие, задание внешней нагрузки или фиксированной скорости ударника. Краткие описания постановок приведены в Таблице 3.6. В постановках 1, 2 рассматривается нагрузка, наложенная ровно на один средний квадрат (два треугольника) самой крупной сетки. В постановках 3, 4 фиксируется скорость в средней точке сетки, направленная, соответственно, по нормали и под углом $\frac{\pi}{6}$ к нормали.

Постановка	Описание
1	Нормальный удар с постоянной силой
2	Удар с постоянной силой под углом $\frac{\pi}{6}$ к нормали
3	Нормальный удар с постоянной скоростью
4	Удар с постоянной скоростью под углом $\frac{\pi}{6}$ к нормали
5	Нормальная нагрузка, задаваемая формулой (3.1)

Таблица 3.6 — Постановки численных экспериментов

Для демонстрации методики на Рис. 3.8 приведен график, использованный для оценки порядка сходимости в постановке 3 (нормальный удар с постоянной скоростью). По оси абсцисс откладывается число разбиений сетки k , по оси ординат — норма разности соседних решений в логарифмическом масштабе. Наклон прямой, проведенной через экспериментальные точки, определяет фактический порядок сходимости.

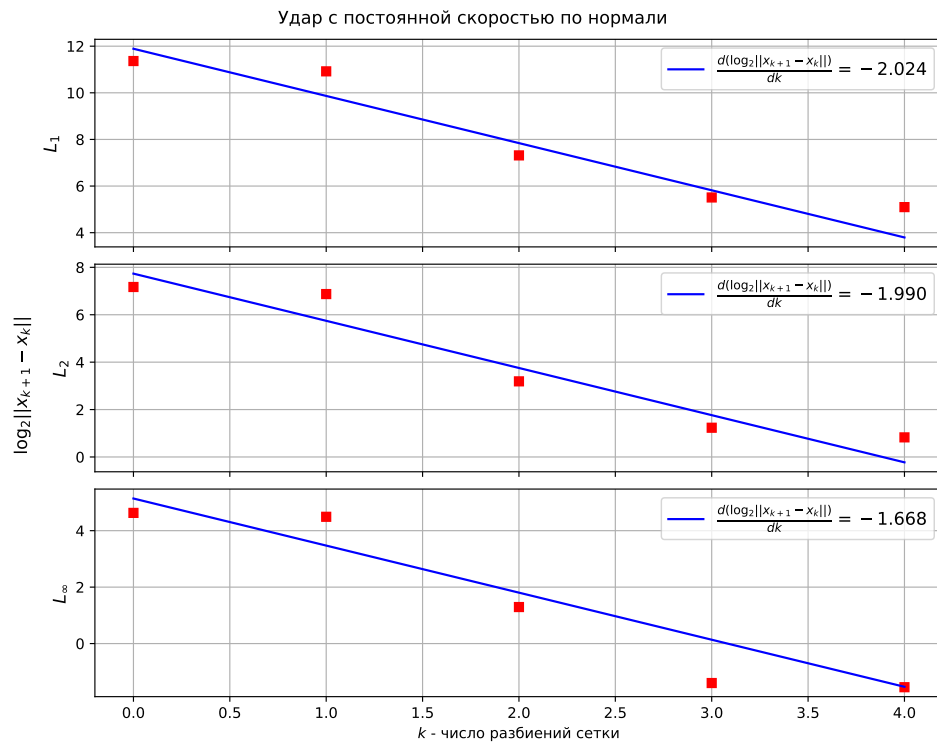


Рисунок 3.8 — Сходимость: нормальный удар

Результаты исследования фактических порядков сходимости для разных постановок представлены в таблице 3.7

Постановка	Порядок		
	L_1	L_2	L_∞
1	2.558	2.504	2.511
2	1.534	1.482	1.445
3	2.024	1.990	1.668
4	1.599	1.660	1.964
5	1.748	1.678	1.561

Таблица 3.7 — Фактические порядки сходимости

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описан численный метод для расчёта динамики тонкой мембраны для режимов, в которых скорости взаимодействия слишком велики для применения квазистатического подхода. Приведенная модель позволяет рассчитывать изделия со сложной геометрией и произвольными упругими параметрами материала.

Приведены результаты расчётов серии постановок, в том числе несимметричного и распределённого воздействия, которые совпадают с физичекой интуицией. Так, при нормальном ударе по изотропному материалу формируется симметричный конус деформации, при расчете анизотропного материала конус становится асимметричным. Также наблюдается отражение волн от свободных границ образца. Верификационные расчеты собственных частот для задачи о вибрации закрепленной прямоугольной мембраны из изотропного материала показывают достаточную точность (проценты) на не слишком мелких сетках. Вычисленный экспериментально для нескольких различных постановок фактический порядок аппроксимации находится в пределах от 1.4 до 2.5, что позволяет использовать описанный метод для прикладных расчётов, проводимых совместно с натурными экспериментами.

В будущем планируются:

- более полная верификация модели, в том числе, с использованием экспериментальных данных;
- расширение на случай разрушения материала, изучение формирования разрывов и оценка защитных характеристик;
- решение задачи определения параметров материала по экспериментальным данным с вибрационных испытаний.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Tan P., Tong L., Steven G.P. Modelling for predicting the mechanical properties of textile composites // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 1997, vol. 28, issue 11, pp. 903-922.
2. Naik N.K., Shembekar P.S. Elastic Behavior of Woven Fabric Composites // Journal of Composite Materials, 1992, vol. 26, issue 15, pp. 2196-2225.
3. Naik N.K., Ganesh V.K. Prediction of on-axes elastic properties of plain weave fabric composites // Composites Science and Technology, 1992, vol. 45, issue 2, pp. 135-152.
4. Ishikawa T., Chou T.W. Stiffness and strength behaviour of woven fabric composites // Journal of Materials Science, 1982, vol. 17, pp. 3211-3220.
5. Barbero E.J. Damiani T.M., Trovillion J. Micromechanics of fabric reinforced composites with periodic microstructure // International Journal of Solids and Structures, 2005, vol. 42, issues 9-10, pp. 2489-2504.
6. Jenkins C.H. Nonlinear dynamic response of membranes: State of the art - Update // Applied Mechanics Reviews, 1996, vol. 49, issue 10S, pp. 41-48.
7. Sathe S., Benney R., Charles R., Doucette E., Milette J., Senga M., Stein K., Tezduyar T.E. Fluid-structure interaction modeling of complex parachute designs with the space-time finite element techniques // Computers & Fluids, 2007, vol. 36, issue 1, pp. 127-135.
8. Miyazaki Y. Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, vol. 66, issue 7, pp. 1179-1209.
9. E. L. Christiansen, J. Arnold, A. Davis, J. Hyde et al. Handbook for Designing MMOD Protection // NASA Johnson Space Center, Houston, 2009.

10. Christiansen E.L., Crews J.L., Williamsen J.E., Robinson J.H., Nolen A.M. Enhanced meteoroid and orbital debris shielding // International Journal of Impact Engineering, 1995, vol. 17, issues 1-3, pp. 217-228.
11. Whipple F.L. Meteorites and Space Travel // Astronomical Journal, 1947, vol. 52, p.131.
12. Kobylkin I.F., Selivanov V.V. Materials and Structures of Light Armor Protection // BMSTU, Moscow, Russia, 2014. (in Russian)
13. Walker J.D. Constitutive Model for Fabrics with Explicit Static Solution and Ballistic Limit // Proceedings of the Eighteenth International Symposium on Ballistics, San Antonio, USA, 1999.
14. Walker J.D. Ballistic Limit of Fabrics with Resin // Proceedings of the Nineteenth International Symposium on Ballistics, Interlaken, Switzerland, 2001.
15. Porval P.K., Phoenix S.L. Modeling System Effects in Ballistic Impact into multi-Layered Fibrous Materials for Soft Body armor // International Journal of Fracture, 2005, vol. 135, issue 1-4, pp. 217-249.
16. Rakhmatulin K.A., Demianov Y.A. Strength under high transient loads // Israel Program for Scientific Translations, 1966.
17. Beklemysheva K.A., Vasyukov A.V., Ermakov A.S., Petrov I.B. Numerical simulation of the failure of composite materials by using the grid-characteristic method // Mathematical Models and Computer Simulations, 2016, vol. 8, issue 5, pp. 557-567.
18. Liu C., Tian Q., Yan D. and Hu H. Dynamic analysis of membrane systems undergoing overall motions, large deformations and wrinkles via thin shell elements of ANCF // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, vol. 258, pp. 81-95.
19. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics // Journal of the Engineering Mechanics Division, 1959, vol. 85, issue 3, pp. 67-94.

20. Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. Finite Element Method: Volume 1 - The Basis // 5th Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
21. Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 79, issue 11, pp. 1309-1331.
22. Yang X., Kweun J. M., Kim Y. Y. Theory for perfect transmodal Fabry-Perot interferometer //Scientific Reports. – 2018. – T. 8. – №. 1. – C. 1-6.
23. Yang X., Kweun M., Kim Y. Y. Monolayer metamaterial for full mode-converting transmission of elastic waves //Applied Physics Letters. – 2019. – T. 115. – №. 7. – C. 071901.
24. Khokhlov N.I., Golubev V.I. On the Class of Compact Grid-Characteristic Schemes // In: Smart Modeling for Engineering Systems, 2019, pp. 64-77.