

Аннотация

Данная работа посвящена моделированию повреждения композиционных материалов под действием низкоскоростной динамической нагрузки. Для численного решения используется сеточно-характеристический численный метод (СХМ). В работе рассмотрены критерии разрушения композитов Аззи-Цай-Хилла, Хоффмана, LaRC03 и LaRC04. Сформулированы алгоритмы использования данных критериев для расчётов динамических задач с применением СХМ.

В рамках работы разработаны программные модули для существующего программного комплекса на базе СХМ, позволяющие выполнять расчёты с использованием критериев Аззи-Цай-Хилла, Хоффмана, LaRC03 и LaRC04.

Выполнены расчёты динамического нагружения композитной панели с использованием реализованных критериев. Проведено сравнение результатов, полученных с использованием реализованных критериев Аззи-Цая-Хилла, Хоффмана, LaRC03 и LaRC04, и результатов расчётов по применявшимся ранее критериям Цая-Хилла, Цая-Ву, Друкера-Прагера, Хашина, Пака. Показано, что на качественном уровне результаты соответствуют друг другу, а с количественной точки зрения для разных критериев получено существенное различие формы и объема областей разрушений.

По результатам данной работы возможности существующего программного комплекса на базе СХМ существенно расширены, для новых постановок задач могут быть использованы дополнительные критерии разрушения материала, позволяющие учесть особенности режима нагружения в той или иной конкретной ситуации.

Содержание

1. Введение	4
1.1. Цель работы	4
1.2. Задачи	4
1.3. Актуальность исследования	4
2. Математическая модель и численный метод	6
2.1. Система динамических уравнений	6
2.2. Сеточно-характеристический метод	8
2.3. Расчет разрушения	9
3. Постановка задачи	10
3.1. Параметры композитного материала	10
3.2. Геометрия образцов и параметры удара	13
4. Критерии разрушения	14
4.1. Общий вид критериев разрушения	14
4.2. Критерий Аззи-Цай-Хилла	14
4.3. Критерий Хоффмана	17
4.4. Критерий LaRC03	21
4.5. Критерий LaRC04	30
5. Анализ полученных результатов	34
5.1. Сравнение критериев не различающих разрушение волокон и матрицы	34
5.2. Сравнение критериев различающих разрушение волокон и матрицы	36
6. Заключение	38
Список литературы	39

1. Введение

1.1. Цель работы

Целью данной работы является численное моделирование разрушения композиционного материала с использованием критериев разрушения: Аззи-Цай-Хилла, Хоффмана, LaRC03 и LaRC04.

1.2. Задачи

- 1) Описание реологии композиционного материала.
- 2) Обзор и физическое описание критериев разрушения.
- 3) Программная реализация критериев Аззи-Цай-Хилла, Хоффмана, LaRC03 и LaRC04.
- 4) Проведение расчетов и анализ результатов.

1.3. Актуальность исследования

Для моделирования и разработки композиционных материалов, активно использующихся в авиационно-космической промышленности, необходимо как можно более точное предсказание прочностных свойств как самих материалов, так и изготовленных из них деталей. Однако, несмотря на обширный накопленный опыт проектирования и эксплуатации композитных деталей, на данный момент не существует единой теории разрушения композитов, объясняющей и предсказывающей все эффекты, которые можно наблюдать в эксперименте. Проектирование конструкций зачастую идет с избыточным запасом прочности, что повышает вес и объем детали, существенно снижая эффективность использования композиционных материалов. Математическое моделирование с использованием распространенных коммерческих пакетов широко применяется при работе с традиционными конструкционными материалами, но в случае композитов не дает достаточно надежных результатов для применения на практике. Существенной

проблемой, появляющейся при моделировании разрушения композиционных материалов, является то, что большая часть критериев разрушения формулируется для двумерного случая. В трехмерном случае многие критерии зачастую не только имеют сложную формулировку, но и требуют физических констант, которые крайне сложно получить при экспериментах.

Данная работа основана на существующем опыте моделирования динамической прочности композитов научной группой на кафедре вычислительной физики МФТИ. Данная работа развивает прошлый опыт, добавляя четыре критерия разрушения, которые ранее не были рассмотрены для данных задач: Аззи-Цай-Хилла, Хоффмана, LaRC03, LaRC04. В работе выполнена реализация данных критериев, расчёты с их использованием, сравнение результатов с реализованными ранее критериями Друкера-Прагера, Хашина, Пака, Цая-Хилла и Цая-Ву [1].

Первые два критерия: Аззи-Цай-Хилла и Хоффмана физически схожи с критерием Цая-Хилла. В критерии Аззи-Цай-Хилла выражение совпадает с критерием Цая-Хилла, за исключением того, что берется абсолютное значение в слагаемом, содержащем совместные нормальные напряжения. Разница между критериями проявляется, когда нормальные напряжения противоположны по знаку. Критерий Хоффмана является расширенным вариантом критерия Цая-Хилла и учитывает свойства при растяжении или сжатии в одном критерии. Реализованный ранее критерий Цая-Ву представляет собой модификацию критерия Хоффмана. Наиболее современным же является семейство критериев LaRC, названных по имени Исследовательского центра НАСА в Лэнгли (NASA Langley Research Center), в котором оно и было разработано. Критерии LaRC03 и LaRC04 основаны на той же концепции, что и критерии Пака и Хашина, с их помощью рассматривается отдельно разрушение волокон и матрицы. Все реализованные критерии часто применяются в мировой практике для моделирования объемного разрушения композиционных материалов.

2. Математическая модель и численный метод

2.1. Система динамических уравнений

Для создания математической модели волновых процессов в деформируемом твёрдом теле с малыми деформациями и линейной упругостью применяется система динамических уравнений, включающая уравнения движения и реологические соотношения [2], [3].

$$\begin{cases} \rho \dot{\nu}_i = \nabla_j \sigma_{ij} + f_i \\ \dot{\sigma} = \mathbf{q} : \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (1)$$

Где ρ - плотность среды, ν_i - компоненты скорости смещения, ∇_j - ковариантная производная по j -й координате, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, ∇_j - j - производная по j -й координате, f_i - массовые силы, действующие на единицу объёма, δ_{ij} - символ Кронекера, λ и μ - параметры Ламе.

Система может быть переписана в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Где $\mathbf{u} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz})^T$ - вектор искомых функций, x, y, z - независимые пространственные переменные, t - время, $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ - матрицы девятого порядка, зависящие только от постоянных параметров материала.

Трёхмерная система уравнений (2) может быть разделена на три независимые системы уравнений для отдельных пространственных переменных. Одномерная система уравнений выглядит следующим образом

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Спектральное исследование матриц $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ проведено в [4], где показано, что для них существует полный набор собственных векторов, а также

приведены аналитические выражения. Следовательно, каждая из матриц может быть представлена в виде:

$$\mathbf{A} = \Omega^{-1} \Lambda \Omega \quad (4)$$

Где $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_j \}$ - диагональная матрица соответствующих собственных значений.

Подставляя разложение (4) в систему (3), получим систему:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Omega^{-1} \Lambda \Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Домножая слева на Ω , получим:

$$\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda \Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Если сделать замену $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{u}$ (переход к инвариантам Римана), исходная система запишется в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Где каждое уравнение может быть решено независимо и имеет вид:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_{ix} \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

Для решения каждого из получившихся одномерных уравнений переноса с постоянными коэффициентами, используется сеточно-характеристический метод [5].

2.2. Сеточно-характеристический метод

Рассмотрим работу данного метода на примере уравнения для x координаты относительно $w(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda_x \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

Она заключается в преобразовании дифференциального уравнения первого порядка в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль характеристики:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_x \quad (10)$$

Подставляя уравнение (10) в (9), получим:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

Откуда следует $dw/dt = 0$, что означает, что решение вдоль характеристики не зависит от времени.

Таким образом, в нашей задаче значения инвариантов Римана переносятся с временного слоя t^n на временной слой t^{n+1} вдоль характеристических кривых [6], [7].

Моделирование с использованием gsm-3d происходит на тетраэдральных сетках. В ходе расчёта для каждой характеристики, выпущенной из точки на новом временном слое, по углу наклона λ и шагу по времени τ определяется ячейка сетки (тетраэдр) на старом временном слое, в который попала характеристика. В точке пересечения характеристики со старым временным слоем интерполируется значение соответствующего инварианта [7]. Значение инварианта переносится в точку на новом временном слое. После того как описанным образом найдены все девять инвариантов Римана, можно найти в ней исходные компоненты вектора \mathbf{u} .

2.3. Расчет разрушения

В данной работе рассматривается дискретная модель разрушения материала образца. Каждый узел расчётной сетки может находиться в одном из двух состояний: целом или разрушенном. Для неразрушенного узла применяется следующий алгоритм расчёта:

- Расчёт напряжённо-деформированного состояния. По описанным выше соотношениям выполняется расчёт компонентов вектора \mathbf{u} на новом временном слое - скорости и напряжения: v_i, σ_{ij}
- Проверка выполнения критерия разрушения. При выполнении условий критерия данный узел расчётной сетки помечается как разрушенный.

Разрушенные узлы остаются в разрушенном состоянии до конца расчёта. Узлы не удаляются из расчётной сетки. Из следующей раскадровки видно, что разрушение происходит очень быстро, до того, как волна дойдет до краев пластинки.

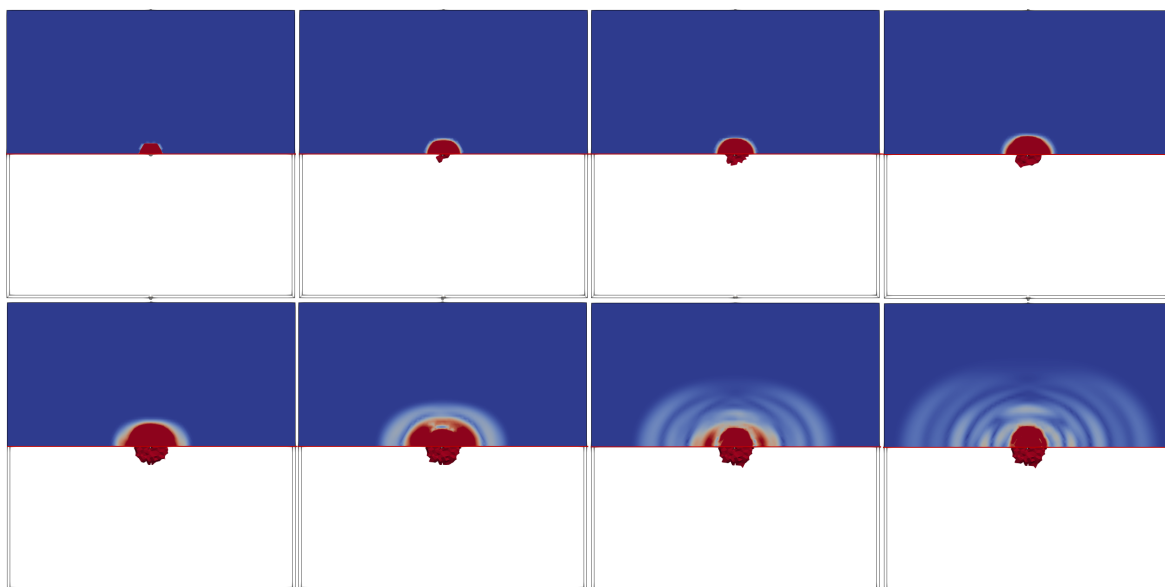


Рис. 1. Раскадровка разрушения композитной пластинки с использованием критерия Хоффмана. На каждой отдельной картинке на верхней части изображено распространение волны, на нижней - область разрушения.

3. Постановка задачи

3.1. Параметры композитного материала

Перепишем реологическое соотношение из системы уравнений (2):

$$\dot{\sigma} = \mathbf{q} : \dot{\varepsilon} \quad (12)$$

где \mathbf{q} - тензор упругих постоянных четвертого ранга, ε - тензор малых деформаций. Так как отклонение частиц от положения равновесия мало, то тензор деформации может быть выражен через производные перемещения:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \vec{\nu} + (\nabla \otimes \vec{\nu})^T) \quad (13)$$

Продифференцируем (13) и подставим в уравнение (12):

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}\mathbf{q} : (\nabla \otimes \vec{\nu} + (\nabla \otimes \vec{\nu})^T) \quad (14)$$

В индексной записи это будет:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2}q_{ijkl}(\nabla_k \nu_l + \nabla_l \nu_k) \quad (15)$$

В данной работе считаем \mathbf{q} постоянным. Несмотря на то, что число его компонент равно $3^4 = 81$, для любого реального произвольно анизотропного материала тензор упругих постоянных обладает максимум 21 независимым параметром [8]. Этот факт нетрудно показать.

- 1) Симметричные тензоры напряжений и деформаций имеют не 9, а 6 независимых величин, поэтому в \mathbf{q} остаётся 36 независимых компонент:

$$q_{ijkl} = q_{jikl} \quad q_{ijkl} = q_{ijlk} \quad (16)$$

- 2) Запишем выражение для потенциала упругой энергии W :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (17)$$

$$q_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad q_{ijkl} = \frac{\partial W^2}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (18)$$

Из независимости второй производной от порядка дифференцирования следует:

$$q_{ijkl} = q_{klij} \quad (19)$$

Таким образом, зависимость σ от ε можно представить в упрощенном виде:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Любые упругие материалы с количеством независимых компонент в тензоре \mathbf{q} больше двух называются анизотропными. Анизотропия материала с различными свойствами вдоль трёх взаимно перпендикулярных направлений называется орторомбической. Даже при такой довольно общего вида анизотропии число независимых компонент сокращается с двадцати одной до девяти:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Следовательно, для описания композитного материала необходимо знать эти девять компонент. Для моделирования разрушения также понадобятся значения: $\sigma_1^y, \sigma_2^y, \sigma_3^y$ - пороги разрушения при нормальном нагружении, $\tau_{12}^y, \tau_{23}^y, \tau_{31}^y$ - при сдвиговом, X_1^T - предел прочности слоистого материала при растяжении вдоль направления волокон, X_1^C - предел прочности слоистого материала при сжатии вдоль направления волокон, X_2^T - предел прочности слоистого материала при растяжении поперек направления волокон,

X_2^C - предел прочности слоистого материала при сжатии поперек направления волокон, S_{23} – предел прочности слоистого материала при сдвиге в плоскости, перпендикулярно направлению волокон, S_1 – предел прочности слоистого материала при сдвиге в плоскости, параллельной направлению волокон.

Параметры материала, использованные для расчётов, представлены ниже в виде таблиц.

Компонент	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{22}	c_{23}	c_{33}	c_{44}	c_{55}	c_{66}
Знач., ГПа	10,03	6,960	6,960	23,25	6,960	10,03	5,010	1,670	5,010

Таблица 1. Значение компонент тензора упругих коэффициентов.

Компонент	σ_1^y	σ_2^y	σ_3^y	τ_{12}^y	τ_{23}^y	τ_{31}^y
Знач., ГПа	2,04	0,15	0,15	0,15	0,11	0,15

Таблица 2. Пределы прочности без учета различия между растяжением и сжатием.

Компонент	X^T	X^C	Y^T	Y^C	S_{23}	S_1
Знач., ГПа	2,58	1,50	8,60	0,08	0,11	0,15

Таблица 3. Пределы прочности с учетом различия между растяжением и сжатием.

3.2. Геометрия образцов и параметры удара

В работе моделируется низкоскоростной удар в центр незакрепленной квадратной пластинки из композиционного материала. Пластика представляет собой субпакет, состоящий из 11 монослоев с укладкой $(+45^\circ, 0^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, -45^\circ, 0^\circ, +45^\circ)$. Пластика имеет ширину равную 135мм и высоту в 12мм. Удар моделируется как граничное условие на поверхности пластинки: область радиусом 12,7мм имеет постоянную скорость, равную $-0,0052\text{мм/с}$ и $-0,0104\text{мм/с}$, для двух разных расчетов.

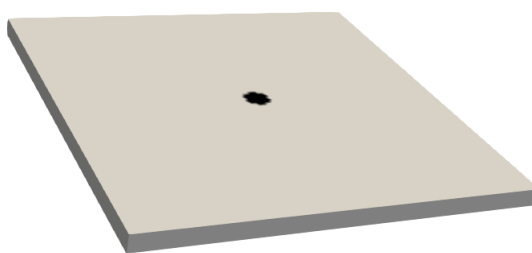


Рис. 2. Модель без стрингера. Черным выделена область граничного условия на нормальную скорость

Также рассматривается постановка задачи с теми же граничными условиями для пластинки со стрингером. Стрингер представляет собой конструкцию из 6 субпакетов, имеет ширину равную 13мм и высоту равную 55мм.

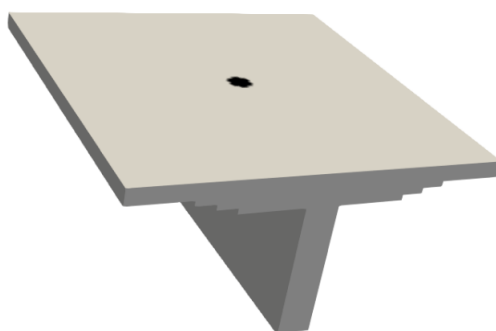


Рис. 3. Модель со стрингером. Черным выделена область граничного условия на нормальную скорость

4. Критерии разрушения

4.1. Общий вид критериев разрушения

Рассматриваемые критерии разрушения (FI - failure index) композиционных материалов в общем виде могут быть выражены как полиномы второго порядка:

$$FI = \sum_{i=1}^3 F_{ii} \sigma_{ii}^2 + \sum_{k=4}^6 \sum_{i \neq j=1}^3 F_{kk} \sigma_{ij}^2 + \sum_{i \neq j=1}^3 F_{ij} \sigma_{ii} \sigma_{jj} + \sum_{i=1}^3 F_i \sigma_{ii} > 1 \quad (22)$$

Где σ_{ij} - компоненты тензора напряжений σ . Критерии отличаются друг от друга тем, как определяются коэффициенты F_{ij} и F_i . Критерии LaRC03 и LaRC04 различают разрушение матрицы (matrix failure index FI_M) и разрушение волокон (fiber failure index FI_F). Выражение для FI_M и FI_F также представляют собой квадратичный полином, однако для расчета используются скорректированные (эффективные) значения элементов тензора напряжений.

4.2. Критерий Аззи-Цай-Хилла

Первым пробным критерием для данной работы было решено взять критерий Аззи-Цай-Хилла [9], в силу того, что он имеет меньше всего отличий от реализованного критерия Цая-Хилла, а значит наиболее прост в реализации. Исходный вариант Цая-Хилла, в свою очередь является обобщением критерия Мизеса для анизотропного материала. Критерий Мизеса имеет вид:

$$2f(\sigma_{ij}) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = 2Y^2 \quad (23)$$

где Y - порог разрушения при нормальном нагружении

Критерий Цая-Хилла был предложен Р. Хиллом в 1948г. как критерий перехода анизотропных металлов в пластическое состояние [13]. В трехмерном случае его выражение записывается в виде:

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (24)$$

где коэффициенты при компонентах тензора напряжений вычисляются следующим образом:

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\sigma_2^y)^2} + \frac{1}{(\sigma_3^y)^2} - \frac{1}{(\sigma_1^y)^2} \right) \quad (25)$$

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\sigma_1^y)^2} + \frac{1}{(\sigma_3^y)^2} - \frac{1}{(\sigma_2^y)^2} \right) \quad (26)$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\sigma_2^y)^2} + \frac{1}{(\sigma_1^y)^2} - \frac{1}{(\sigma_3^y)^2} \right) \quad (27)$$

$$L = \frac{1}{2(\tau_{23}^y)^2}, \quad M = \frac{1}{2(\tau_{31}^y)^2}, \quad N = \frac{1}{2(\tau_{12}^y)^2} \quad (28)$$

Из формул (25)-(28) видно, что в случае одинаковых характеристик прочности материала во всех направлениях критерий Цая-Хилла обращается в критерий Мизеса.

Множество авторов, включая самого Р. Хилла, дополняли критерий Хилла в основном для двумерных случаев. С. Цай предложил расширить использование критерия не только на пластическое состояние металла, но и на хрупкое разрушение анизотропного материала. Однако, главным недостатком этого критерия является то, что он не различает механизмы разрушения на сжатие и растяжение. Изначально критерий Хилла был разработан для металлов, где пороги прочности для растяжения и сжатия были одинаковыми. В композиционных материалах пороги прочности могут сильно отличаться, что вызывает сомнения в достоверности расчетов с использованием данного критерия.

В критерии Аззи-Цая-Хилла выражение совпадает с критерием Цая-Хилла, за исключением того, что берется абсолютное значение в слагаемом, содержащем совместные нормальные напряжения. Таким образом, все недостатки исходного критерия полностью переносятся на данный критерий. Раскрывая скобки и расставляя соответствующие модули, получим выражение для критерия Аззи-Цая-Хилла:

$$F(\sigma_{22}^2 - 2|\sigma_{22}\sigma_{33}| + \sigma_{33}^2) + G(\sigma_{11}^2 - 2|\sigma_{11}\sigma_{33}| + \sigma_{33}^2) + H(\sigma_{22}^2 - 2|\sigma_{22}\sigma_{11}| + \sigma_{11}^2) + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (29)$$

Отсюда видно, что разница между критериями будет проявляться, в случае, когда нормальные напряжения противоположны по знаку.

Для наглядности, приводится сравнение численных расчетов для одинаковых постановок. Моделирование показало, что области разрушения по критерию Аззи-Цая-Хилла, практически совпадают с областями разрушения по критерию Цая-Хилла.



Рис. 4. Сравнение критериев. Область разрушения образца. Слева направо: Цай-Хилл, Аззи-Цай-Хилл. Верхний ряд - вид сверху (плоскость соударения), нижний ряд - вид сбоку

Аналогичный вывод о равенстве областей разрушения можно сделать из моделирования задачи, в которой пластинка оснащена стрингером. Результаты приведены ниже.

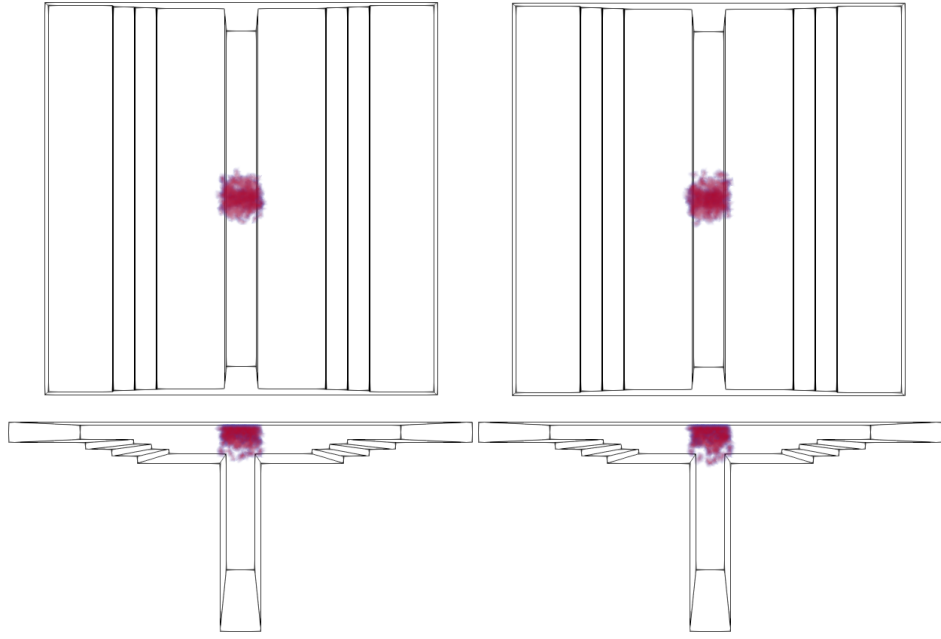


Рис. 5. Сравнение критериев. Область разрушения образца. Слева направо: Цай-Хилл, Аззи-Цай-Хилл. Верхний ряд - вид сверху (плоскость соударения), нижний ряд - вид сбоку

4.3. Критерий Хоффмана

Следующим в данной работе был реализован критерий Хоффмана [10], который по сути является модификацией критерия Цая-Хилла. Реализованный ранее критерий Цая-Ву, в свою очередь, является модификацией критерия Хоффмана.

В отличие от критерия Цая-Хилла, критерий разрушения Хоффмана учитывают разницу в прочности на растяжение и сжатие в продольном и поперечном направлениях слоя. Выражение для критерия имеет общий вид, задаваемый уравнением (22), раскрывая суммы, получим:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_3\sigma_{33} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{33}\sigma_{33}^2 + F_{44}\sigma_{23}^2 + F_{55}\sigma_{13}^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} = 1 \quad (30)$$

где коэффициенты при компонентах тензора напряжений вычисляются следующим образом:

$$F_1 = \left(\frac{1}{X^T} - \frac{1}{X^C} \right), \quad F_2 = F_3 = \left(\frac{1}{Y^T} - \frac{1}{Y^C} \right) \quad (31)$$

$$F_{11} = \frac{1}{X^T X^C}, \quad F_{22} = F_{33} = \frac{1}{Y^T Y^C} \quad (32)$$

$$F_{44} = \frac{1}{S_{23}^2}, \quad F_{55} = \frac{1}{S_1^2}, \quad F_{66} = \frac{1}{S_1^2} \quad (33)$$

$$F_{12} = F_{13} = \frac{1}{X^T X^C} \quad F_{23} = -\frac{1}{X^T X^C} + \frac{2}{Y^T Y^C} \quad (34)$$

Реализованный раннее критерий разрушения Цая-Ву совпадает с критерием Хоффмана по всем коэффициентам, кроме коэффициентов перед слагаемыми, связанными с взаимодействием прямых напряжений, а именно:

$$F_{12}^{Tsai-Wu} = F_{13}^{Tsai-Wu} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{X^T X^C} \frac{1}{Y^T Y^C}} \quad (35)$$

$$F_{23}^{Tsai-Wu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{X_2^T X_2^C} \quad (36)$$

Критерий Друкера-Прагера, также как и критерий Цая-Ву был уже реализован ранее и использует тот же набор констант, что и рассмотренные в этом пункте критерии. Основное отличие содержится в уравнении на условие разрушение, которое в критерии Друкера-Прагера имеет вид:

$$\sqrt{F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 + I\sigma_{11} + J\sigma_{22} + K\sigma_{33}} = 1 \quad (37)$$

Где, коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$F = \frac{1}{2}(\Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 - \Sigma_1^2), \quad G = \frac{1}{2}(\Sigma_1^2 + \Sigma_3^2 - \Sigma_2^2), \quad H = \frac{1}{2}(\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 - \Sigma_3^2) \quad (38)$$

$$L = \frac{1}{2S_{23}^2}, \quad M = N = \frac{1}{2S^2} \quad (39)$$

$$I = \frac{X^C - X^T}{2X^C X^T}, \quad J = K = \frac{Y^C - Y^T}{2Y^C Y^T} \quad (40)$$

коэффициенты $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ находятся из уравнений:

$$\Sigma_1 = \frac{X^C + X^T}{2X^C X^T}, \quad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \frac{Y^C + Y^T}{2Y^C Y^T} \quad (41)$$

Так как критерии Хоффмана, Цая-Ву и Друкера-Прагера по сути являются модификациями критерия Мизеса и используют одинаковые пределы прочности, интерес представляет их сравнение между собой.

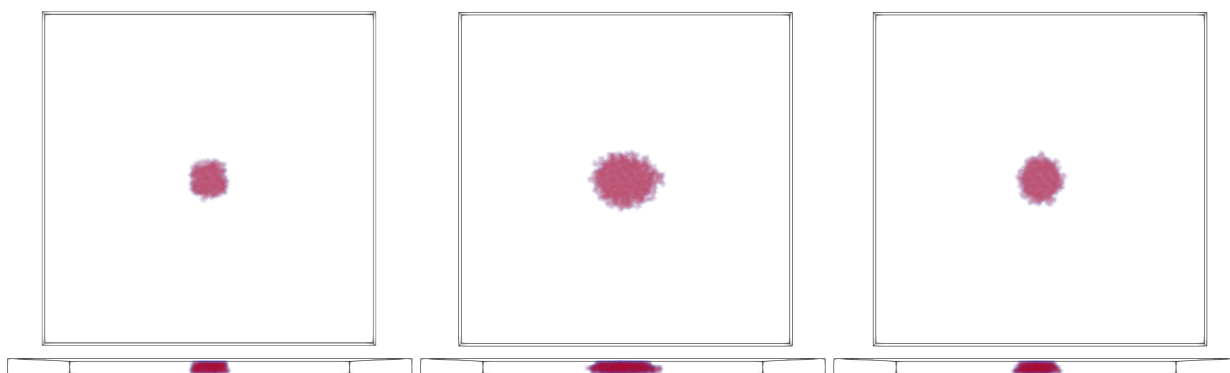


Рис. 6. Сравнение критериев. Область разрушения образца. Слева направо: Хоффмана, Цай-Ву, Друкер-Прагер. Верхний ряд - вид сверху (плоскость соударения), нижний ряд - вид сбоку

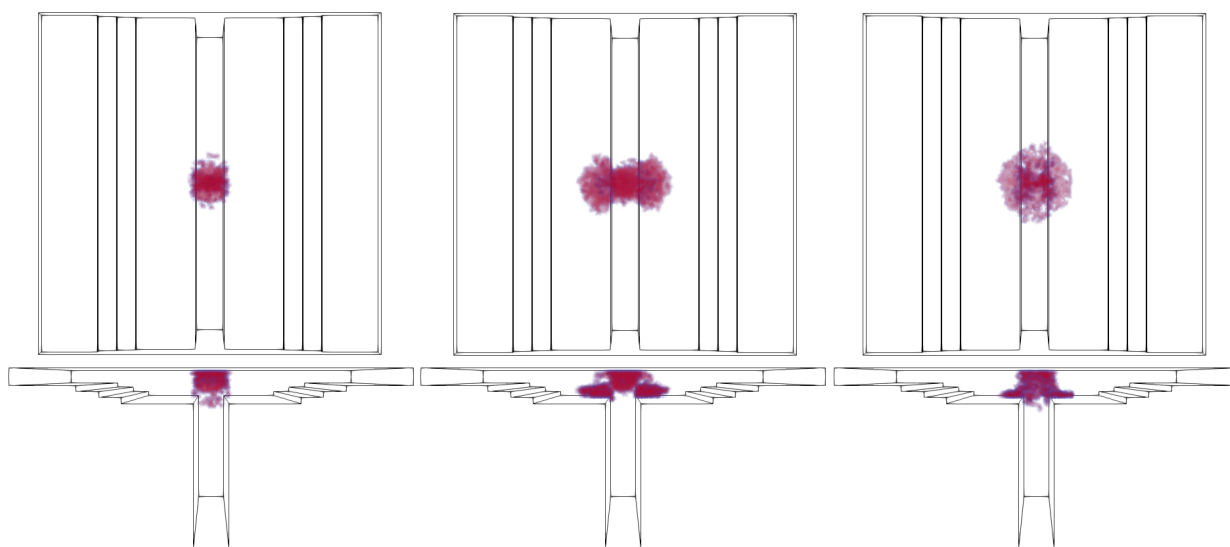


Рис. 7. Сравнение критериев. Область разрушения образца. Слева направо: Хоффмана, Цай-Ву, Друкер-Прагер. Верхний ряд - вид сверху (плоскость соударения), нижний ряд - вид сбоку

Из моделирования видно, что области разрушения имеют существенные отличия. Критерий Хоффмана дает наименьшую область разрушения, что особенно хорошо заметно в постановке со стрингером. Более подробный анализ будет приведен далее.

Следует отметить, что критерии Цая-Хилла, Аззи-Цай-Хилла, Хоффмана, Цая-Ву и Друкера-Прагера, не дают информации о том, что именно произошло в монослое - была разрушена матрица или волокно. Разруше-

ние матрицы отдельного монослоя не всегда приводит к потере его несущей способности, и поэтому пакет материала может продолжать выдерживать все большие нагрузки. По этой причине все большее распространение получают критерии, которые анализируют запасы прочности как матрицы, так и волокна отдельно. Критерии LaRC03 и LaRC04, которые будут рассмотрены далее, как раз принадлежат к этой группе.

4.4. Критерий LaRC03

В критерии LaRC03 [11] отдельно рассматривается разрушение матрицы и волокон. Начнем с получения выражений для прочности матрицы, которые базируются на концепциях, предложенных Хашином, и концепции Пака, согласно которой основной механизм разрушения - возникновения трещин. В случае растяжения матрицы плоскости излома перпендикулярны плоскости слоев и параллельны направлению волокон. При сжатии матрицы плоскость излома может быть не перпендикулярна слою, и Хашин не смог рассчитать угол плоскости излома. В настоящем предложении для расчета угла плоскости излома используются эффективные напряжения Мора-Кулона [12].

Критерий Мора-Кулона (МК) обычно используется в приложениях, где разрушение при растяжении отличается от разрушения при сжатии, например, в механике грунта или при разрушении чугуна. Рассмотрим случай поперечного сжатия ($\sigma_{22} < 0$). Критерий МК геометрически представлен на рис. 8 в виде круга Мора для состояния одноосного сжатия.

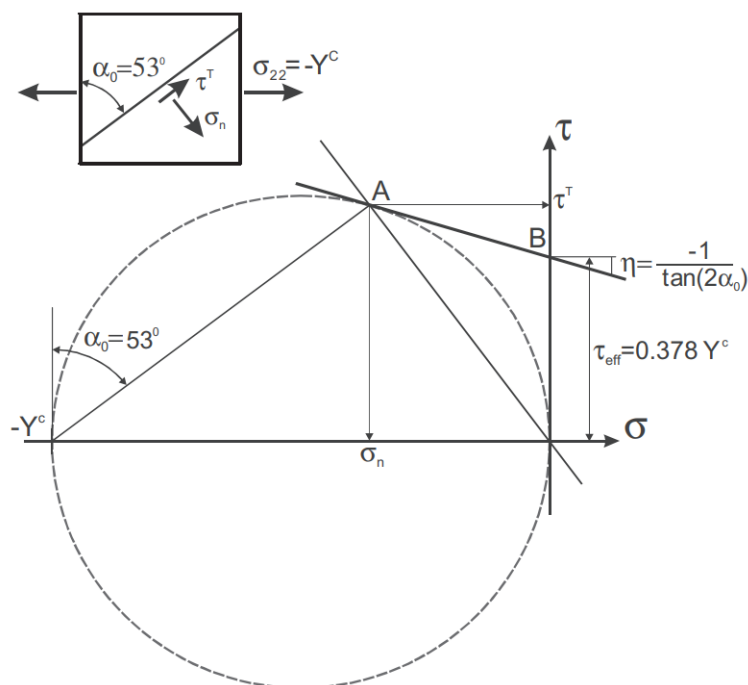


Рис. 8. Круг Мора для одноосного сжатия и эффективного поперечного сдвига

Угол плоскости перелома $\alpha_0 = 53^\circ$, что является типичным углом излома для слоистых композитов при поперечном сжатии [13]. Линия АВ является касательной к окружности Мора в точке А и называется линией кулоновского излома. Критерий МК постулирует, что в состоянии двухосного нормального напряжения разрушение происходит по любой окружности Мора, касательной к кулоновской линии разрушения. Как правило, плоскость трещины может подвергаться как поперечным, так и плоскостным напряжениям, и в этом случае эффективные напряжения должны определяться в обоих ортогональных направлениях. Для наглядности, изобразим это на следующем рисунке.

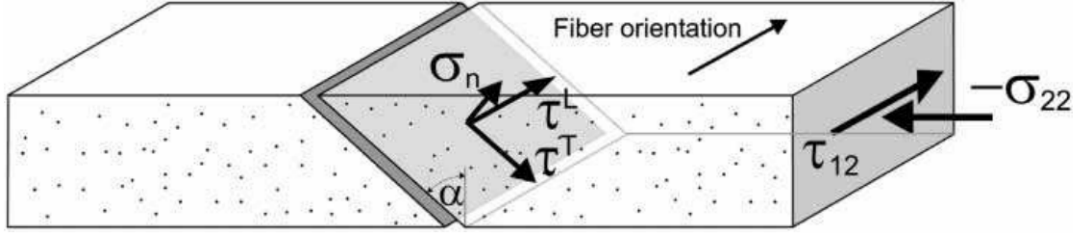


Рис. 9. Перелом однонаправленной пластинки, подвергнутой поперечному сжатию и сдвигу в плоскости

Эффективные напряжения τ_{eff} связаны с напряжениями τ и действует на плоскость излома выражениями:

$$\tau_{eff}^T = \langle |\tau^T| + \eta^T \sigma_n \rangle \quad (42)$$

$$\tau_{eff}^L = \langle |\tau^L| + \eta^L \sigma_n \rangle \quad (43)$$

где η^T и η^L обозначаются как коэффициенты поперечного и продольного влияния соответственно. Операнд $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$. Предполагается, что разрушение матрицы при сжатии является результатом квадратичного взаимодействия между эффективными касательными напряжениями, действующими на плоскость разрушения. Критерий разрушения записывается следующим образом:

$$FI_M = \left(\frac{\tau_{eff}^T}{S^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{eff}^L}{S^L} \right)^2 = 1 \quad (44)$$

где S^T и S^L - коэффициенты прочности на поперечный и продольный сдвиг соответственно, которые будут вычислены далее. Нижний индекс M указывает на то, что данное выражение записано для матрицы.

Компоненты напряжений, действующие на плоскость разрушения, могут быть выражены в терминах внутриплоскостных напряжений и угла наклона α плоскости разрушения, представленной на рис. 9:

$$\sigma_n = \sigma_{22} \cos^2 \alpha \quad (45)$$

$$\tau^T = -\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha \quad (46)$$

$$\tau^L = \tau_{12} \cos \alpha \quad (47)$$

Используя уравнения и эффективные напряжения для угла наклона плоскости разрушения от 0 до 90 равны:

$$\tau_{eff}^T = \langle -\sigma_{22} \cos \alpha (\sin \alpha - \eta^T \cos \alpha) \rangle \quad (48)$$

$$\tau_{eff}^L = \langle \cos \alpha (\tau_{12} + \eta^L \sigma_{22} \cos \alpha) \rangle \quad (49)$$

Коэффициенты влияния η^L и η^T получены для случая одноосного поперечного сжатия ($\sigma_{22} < 0, \tau_{12} = 0$). При разрушении, напряжение сжатия в плоскости равно прочности матрицы на сжатие, $\sigma_{22} = -Y^C$. Эффективное поперечное напряжение сдвига при разрушении равно:

$$\tau_{eff}^T = S^T = Y^C \cos \alpha (\sin \alpha - \tau^T \cos \alpha) \quad (50)$$

При одноосном поперечном сжатии разрушение происходит под углом разрушения α_0 , который максимизирует эффективный поперечный сдвиг. Вычисляя производную от напряжения поперечного сдвига (50), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{eff}^T}{\partial \alpha} = 0 &= -\sin \alpha_0 (\sin \alpha_0 - \eta^T \cos \alpha_0) + \cos \alpha_0 (\cos \alpha + \eta^T \sin \alpha_0) \\ &\Rightarrow \cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0 + 2\eta^T \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Выразим из получившегося уравнения η^T :

$$\eta^T = \frac{-1}{\tan 2\alpha_0} \quad (52)$$

Подставляя (48) в (46) получим выражение, связывающее прочность на поперечный сдвиг с прочностью на поперечное сжатие:

$$S^T = Y^C \cos \alpha_0 \left(\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{\tan 2\alpha_0} \right) \quad (53)$$

Коэффициент η^L можно оценить по прочности на продольный и поперечный сдвиг, как предложено Паком:

$$\frac{\eta^L}{S^L} = \frac{\eta^T}{S^T} \Rightarrow \eta^L = -\frac{S^L \cos 2\alpha_0}{Y^C \cos^2 \alpha_0} \quad (54)$$

На данном этапе мы получили все необходимые выражения и константы (кроме S^L , выражение для нее будет ниже) для численного моделирования случая поперечного сжатия ($\sigma_{22} < 0$).

Перейдем к рассмотрению случая поперечного растяжения ($\sigma_{22} > 0$). Предложенный здесь критерий разрушения для прогнозирования растрескивания матрицы в слое, подвергнутом сдвигу в плоскости и поперечному растяжению, основан на анализе механики разрушения щелевой трещины в слое, предложенном Дворжаком и Лоусом [14].

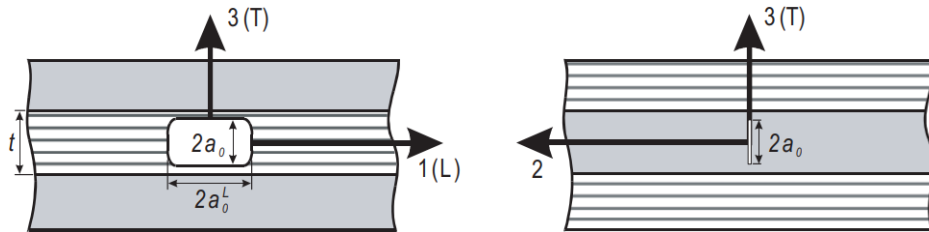


Рис. 10. Геометрия щелевой трещины

Физически эта трещина представляет собой распределение нарушений связи между матрицей и волокнами, которые могут присутствовать в слое как следствие производственных дефектов или остаточных термических напряжений, возникающих из-за различных коэффициентов теплового расширения волокон и матрицы. Таким образом, щелевая трещина является «эффективной трещиной», представляющей собой макроскопический эффект нарушения связи между матрицей и волокном, происходящий на микромеханическом уровне

Обозначим нагружением в режиме I - ситуацию, когда действует поперечное растягивающее напряжение, а нагружение в режиме II - случай, когда действует напряжение сдвига. Трещина, представленная на рис. 10, может расти в 1-м (продольном, L) направлении, в 3-м (поперечном, T) направлении или в обоих направлениях.

Компоненты скорости выделения энергии в режиме I и режиме II могут быть получены для -направления с использованием уравнений:

$$G_I(T) = \frac{\pi\alpha_0}{2}\Lambda_{22}^0\sigma_{22}^2 \quad (55)$$

$$G_{II}(T) = \frac{\pi\alpha_0}{2}\Lambda_{44}^0\tau_{12}^2 \quad (56)$$

где коэффициенты Λ_{22}^0 и Λ_{44}^0 можно вычислить как:

$$\Lambda_{22}^0 = 2\left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}^2}{E_1}\right) \quad \Lambda_{44}^0 = \frac{1}{G_{12}} \quad (57)$$

где ν_{12} - коэффициент Пуассона, E_i - модуль Юнга в i -ом направлении, G_{12} - модуль сдвига. В случае критического напряжения, выражения (55), (56) примут вид:

$$G_{Ic}(T) = \frac{\pi\alpha_0}{2}\Lambda_{22}^0(Y^T)^2 \quad (58)$$

$$G_{IIc}(T) = \frac{\pi\alpha_0}{2}\Lambda_{44}^0(S^L)^2 \quad (59)$$

Получив выражения для составляющих скорости выделения энергии, можно применить критерий разрушения для прогнозирования распространения щелевой трещины, представленной на рис. 11. При наличии как сдвига в плоскости, так и поперечного растяжения критическая скорость высвобождения энергии G_c зависит от совокупного эффекта всех микроскопических механизмов поглощения энергии, таких как создание новой поверхности разрушения. Опираясь на микроскопические исследования поверхности трещины, Хан и Йоханнессон [15] наблюдали что рельеф поверхности разрушения сильно зависит от типа нагрузки. Записанный в терминах скоростей выделения энергии в режиме I и режиме II , критерий Хана равен:

$$(1 - g)\sqrt{\frac{G_I(i)}{G_{Ic}(i)}} + g\frac{G_I(i)}{G_{Ic}(i)} + \frac{G_{II}(i)}{G_{IIc}(i)} = 1, \quad i = T, L \quad (60)$$

где материальная постоянная g определяется как:

$$g = \frac{G_{Ic}(i)}{G_{IIc}(i)} = \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left(\frac{Y^T}{S^L} \right)^2 \quad (61)$$

Подставляя выражения (55)-(59) в (60) получим критерий разрушения матрицы для случая поперечного растяжения:

$$FI_M = (1 - g) \frac{\sigma_{22}}{Y^T} + g \left(\frac{\sigma_{22}}{Y^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S^L} \right) = 1 \quad (62)$$

От матрицы перейдем к рассмотрению волокон. Критерий LaRC03 для разрушения волокна при растяжении - это критерий максимально допустимой деформации, который прост в измерении и не зависит от объемной доли волокна и модулей Юнга:

$$FI_F = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1^T} = 1 \quad (63)$$

где ε_{11} - малая деформация при растяжении, ε_1^T - предельная деформация при растяжении.

Разрушение волокон при сжатии происходит в результате перегиба при сдвиге и повреждения несущей матрицы. Соответственно, нам необходимо рассчитать угол смещения волокон, который мог бы привести к разрушению матрицы при одноосном сжатии.

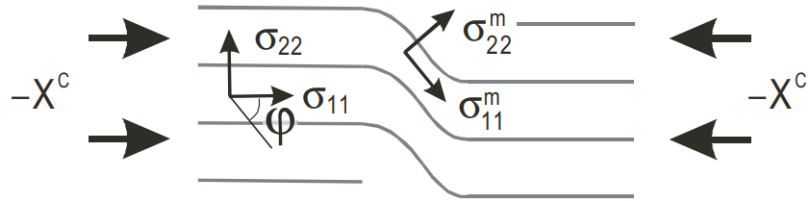


Рис. 11. Изгиб волокон при напряжении

Напряжения слоя в системе координат несоосности m , показанной на рисунке 9, равны:

$$\sigma_{11}^m = \cos^2 \varphi \sigma_{11} + \sin^2 \varphi \sigma_{22} + 2 \sin \varphi \cos \varphi |\tau_{12}| \quad (64)$$

$$\sigma_{22}^m = \cos^2 \varphi \sigma_{11} + \sin^2 \varphi \sigma_{22} - 2 \sin \varphi \cos \varphi |\tau_{12}| \quad (65)$$

$$\tau_{12}^m = -\sin \varphi \cos \varphi \sigma_{11} + \sin \varphi \cos \varphi \sigma_{22} + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) |\tau_{12}| \quad (66)$$

Для разрушения при осевом сжатии, $\sigma_{11} = -X^C$, $\sigma_{22} = \tau_{12} = 0$. Подставляя эти значения в уравнения (60)-(62), получим:

$$\sigma_{22}^m = -\sin^2 \varphi^C X^C \quad \tau_{12}^m = -\sin \varphi^C \cos \varphi^C X^C \quad (67)$$

Подставим найденные значения σ_{22}^m и τ_{12}^m в критерий разрушения матрицы (44):

$$\tau_{eff}^L = X^C (\sin \varphi^C \cos \varphi^C - \eta^L \sin^2 \varphi^C) = S^L \quad (68)$$

Запишем это уравнение относительно φ^C :

$$\tan^2 \varphi^C \left(\frac{C^L}{X^C} + \eta^L \right) - \tan \varphi^C + \left(\frac{S^L}{X^C} \right) = 0 \quad (69)$$

Наименьший из корней этого квадратного уравнения есть:

$$\varphi^C = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(S^L/X^C + \eta^L)(S^L/X^C)}}{2(S^L/X^C + \eta^L)} \right) \quad (70)$$

Общий угол смещения φ может быть разложен на начальный (постоянный) угол смещения φ^0 , который представляет собой производственный дефект, и дополнительную составляющую вращения φ^R , которая возникает в результате сдвиговой нагрузки. Углы φ^0 и φ^R могут быть вычислены с использованием приближений малых углов и уравнений:

$$\varphi^R = \frac{\tau_{12}^m}{G_{12}} = \frac{-\varphi \sigma_{11} + \varphi \sigma_{22} + |\tau_{12}|}{G_{12}} \quad (71)$$

$$\varphi^0 = \varphi^C - \varphi^R|_{X^C} = \varphi^C - \frac{\tau_{12}^m}{G_{12}} \Big|_{X^C} \Rightarrow \varphi^0 = \left(1 - \frac{X^C}{G_{12}} \right) \varphi^C \quad (72)$$

Вспоминая, что $\varphi = \varphi^0 + \varphi^R$, перепишем последнее выражение в виде зависимости $\varphi(\varphi^C)$:

$$\varphi = \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X^C) \varphi^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (73)$$

Разрушение волокна при сжатии из-за образования полосы перегиба прогнозируется с использованием напряжений из уравнения (64)-(66) и критерия разрушения для растяжения матрицы или сжатия матрицы. Критерием перегиба волокна становится:

$$FI_F = \left\langle \frac{|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m}{S^L} \right\rangle = 1 \quad (74)$$

Для сжатия волокна при растяжении матрицы преобразованные напряжения из уравнений (64)-(66) подставляются в критерий разрушения матрицы при растяжении, приведенный в уравнении (62), чтобы получить следующий критерий разрушения волокон:

$$FI_F = (1 - g) \frac{\sigma_{22}^m}{Y^T} + g \left(\frac{\sigma_{22}^m}{Y^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^m}{S^L} \right) = 1 \quad (75)$$

Таким образом получены все необходимые критерии:

- 1) разрушение матрицы при растяжении (44)
- 2) разрушение матрицы при сжатии (62)
- 3) разрушение волокон при растяжении (63)
- 4) разрушение волокон при сжатии, при сжатии матрицы (74)
- 5) разрушение матрицы при сжатии, при растяжении матрицы (75)

Приведем результаты численного моделирования для постановки задачи, описанной в пункте 4.2. Рассмотрим два случая: граничное условие на скорость равно -0,0052мм/с (стандартно для прошлых примеров) и с удвоенной скоростью равной -0,0104мм/с.

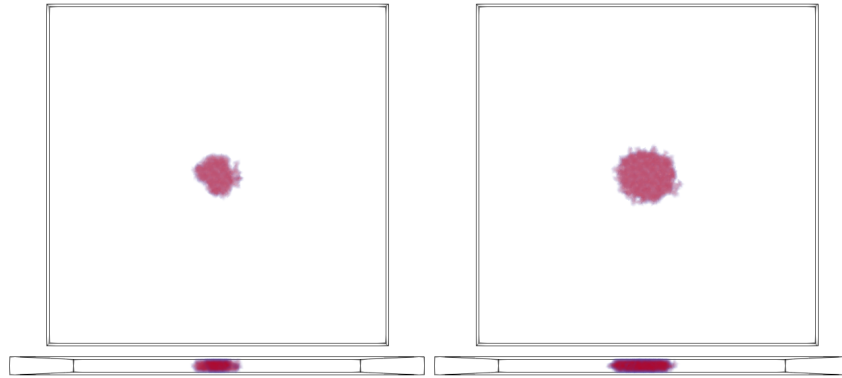


Рис. 12. Критерий разрушения LaRC03. Область разрушения образца. Постановка без стрингера. Сверху - вид сверху (плоскость соударения), снизу - вид сбоку

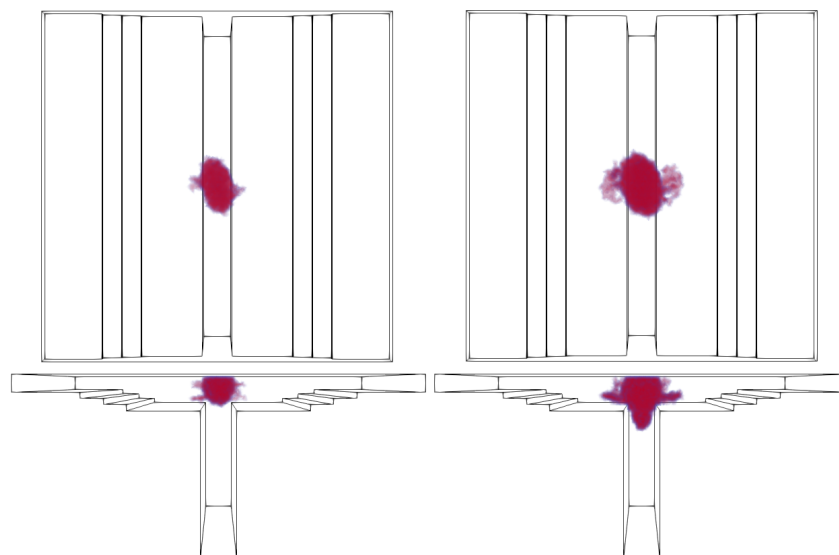


Рис. 13. Критерий разрушения LaRC03. Область разрушения образца. Постановка со стрингером. Сверху - вид сверху (плоскость соударения), снизу - вид сбоку

Из моделирования видно, что область разрушения для постановки без стрингера имеет схожую форму с областями разрушения по критериям Хоффмана и Цая-Хилла, что может свидетельствовать, о небольшой значимости разделения разрушения матрицы и волокон для двумерного рассмотрения.

4.5. Критерий LaRC04

Критерий LaRC04 [17] является расширением критерия LaRC03 на трехмерное пространство. Также, как и в прошлом пункте, начнем с описания критерия для разрушения матрицы при сжатии. В трехмерном случае уравнения (45)-(47) примут вид:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{23} \sin(2\alpha) \quad (76)$$

$$\tau^T = -\frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{23} \cos(2\alpha) \quad (77)$$

$$\tau^L = \tau_{12} \cos(\alpha) + \tau_{31} \sin(\alpha) \quad (78)$$

Выражения для η^T , η^L , S^T и S^L совпадают с выражениями для двумерного случая. Сам же критерий записывается в виде:

$$FI_M = \left(\frac{\tau^T}{S^T - \eta^T \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau^L}{S^L - \eta^L \sigma_n} \right)^2 = 1 \quad (79)$$

Для случая растяжения матрицы, критерий примет вид:

$$FI_M = (1 - g) \frac{\sigma_{22}}{Y^T} + g \left(\frac{\sigma_{22}}{Y^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S^L} \right)^2 + \frac{\Lambda_{23}^0}{2} \left(\frac{\tau_{23}}{S^L} \right)^2 = 1 \quad (80)$$

где Λ_{23}^0 - вычисляется аналогично 2D, с помощью уравнения (57).

Перейдем к рассмотрению разрушений волокон. Критерий LaRC04 для разрушения волокна при растяжении является критерием максимально допустимого напряжения. Следовательно, его можно записать в виде:

$$FI_F = \frac{\sigma_{11}}{X^T} = 1 \quad (81)$$

Остается рассмотреть случай разрушения волокон при сжатии. Основной причиной разрушения в этом случае будем считать изгиб матрицы. Изгиб можно определить как локальную сдвиговую деформацию матрицы вдоль волокна [18]. Рассмотрим однонаправленную пластину, находящуюся под напряжением сжатия, как показано на рис. 14(а). Напряжения, действующие на плоскость (2, 3), показаны на рис. 14(б). Плоскость излома находится под углом ψ к оси 2, как показано на рис. 14(с) и (д).

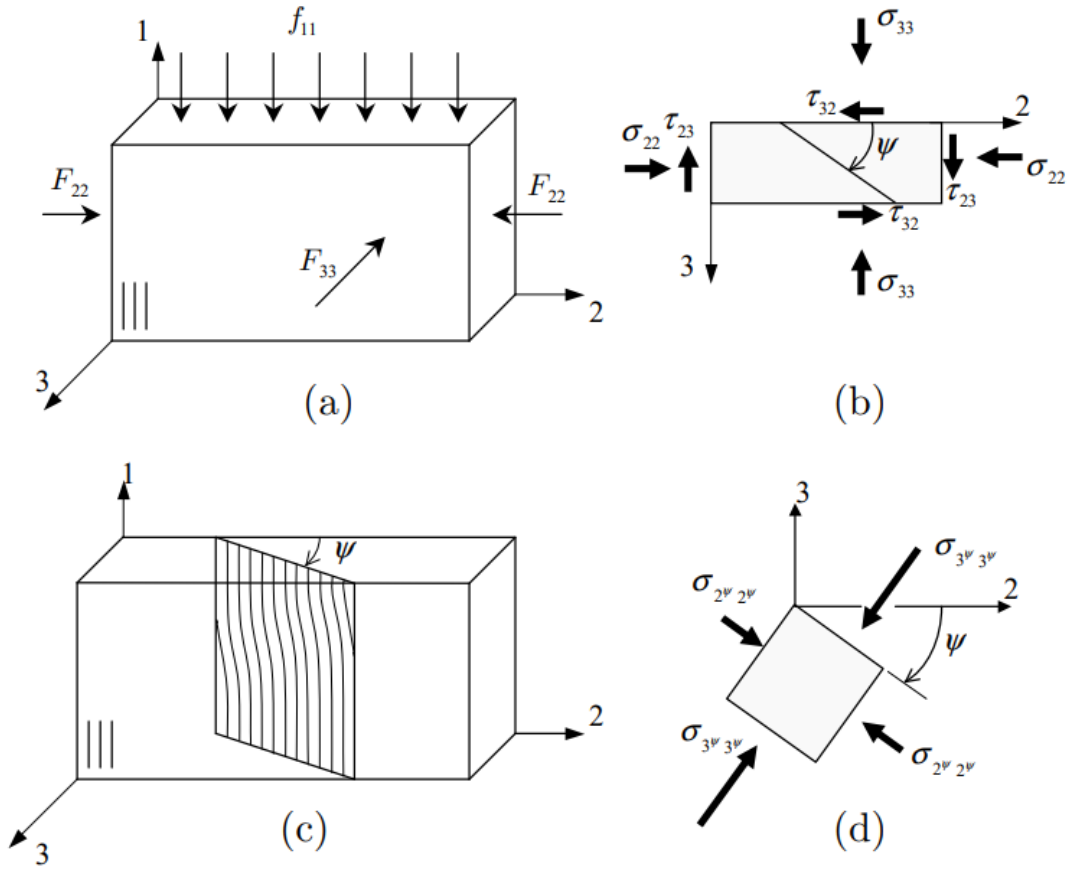


Рис. 14. Изгиб в 3D

В предположении, что плоскость излома происходит под таким углом, что $\tau_{2\psi 3\psi} = 0$, значение угла ψ , определяющего плоскость излома, задается формулой:

$$\tan(2\psi) = \frac{2\tau_{23}}{\sigma_{22} - \sigma_{33}} \quad (82)$$

Напряжения в плоскости излома определяются как:

$$\sigma_{2\psi 2\psi} = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2} \cos(2\psi) + \tau_{23} \sin(2\psi) \quad (83)$$

$$\sigma_{3\psi 3\psi} = \sigma_{22} + \sigma_{33} - \sigma_{2\psi 2\psi} \quad (84)$$

$$\tau_{12\psi} = \tau_{12} \cos(\psi) + \tau_{31} \sin(\psi) \quad (85)$$

$$\tau_{2\psi 3\psi} = 0 \quad (86)$$

$$\tau_{3\psi 1} = \tau_{31} \cos(\psi) - \tau_{12} \sin(\psi) \quad (87)$$

Решая эту систему уравнений, мы найдем все необходимые значения, для определения угла изгиба волокон. Рассмотрим однонаправленный композит со смещенной областью сжатия, как показано на рис.15.

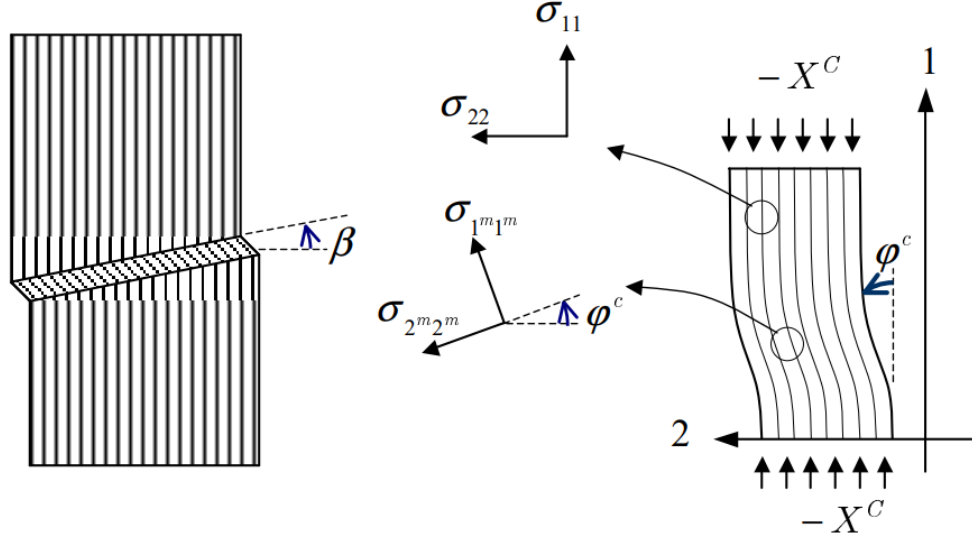


Рис. 15. Полоса изгиба

Угол изгиба волокон может быть определен как:

$$\varphi = \frac{\tau_{12\psi}}{|\tau_{12\psi}|} \varphi^C \quad (88)$$

где угол φ^C определяется как и в критерии LaRC03. Таким образом, зная угол изгиба волокон, можно записать выражения для напряжений следующим образом:

$$\sigma_{1m1m} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{2\psi 2\psi}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{2\psi 2\psi}}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{12\psi} \sin(2\varphi) \quad (89)$$

$$\sigma_{2m2m} = \sigma_{11} + \sigma_{2\psi 2\psi} - \sigma_{1m1m} \quad (90)$$

$$\tau_{1m2m} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{2\psi 2\psi}}{2} \sin(2\varphi) + \tau_{12\psi} \cos(2\varphi) \quad (91)$$

$$\tau_{2m3\psi} = \tau_{2\psi 3\psi} \cos(\varphi) - \tau_{3\psi 1} \sin(\varphi) \quad (92)$$

$$\tau_{3\psi 1m} = \tau_{3\psi 1\psi} \cos(\varphi) \quad (93)$$

Теперь можно записать выражение для критерия разрушения, которое в случае сжатия волокон и растяжения матрицы записывается в виде:

$$FI_F = \frac{|\tau_{1m2m}|}{S^L - \eta^L \sigma_{2m2m}} = 1 \quad (94)$$

Для случая сжатия волокон и сжатия матрицы критерий разрушения примет вид:

$$FI_F = (1 - g) \frac{\sigma_{2m2m}}{Y^T} + g \left(\frac{\sigma_{2m2m}}{Y^T} \right)^2 + \frac{\Lambda_{23}^0 \tau_{2m3\psi}^2}{2S^2} \quad (95)$$

Перейдем к численному моделированию данного критерия. Результаты для постановок со скоростями на границе, равными $-0,0052\text{мм/с}$ и $-0,0104\text{мм/с}$ представлены ниже. Видно, что область разрушения имеет сложную структуру, которая симметрично расширяется с увеличением скорости соударения.

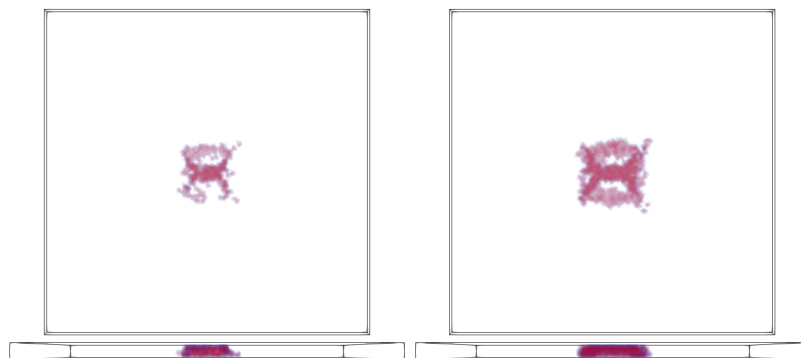


Рис. 16. Критерий разрушения LaRC04. Область разрушения образца. Постановка без стрингера. Сверху - вид сверху (плоскость соударения), снизу - вид сбоку

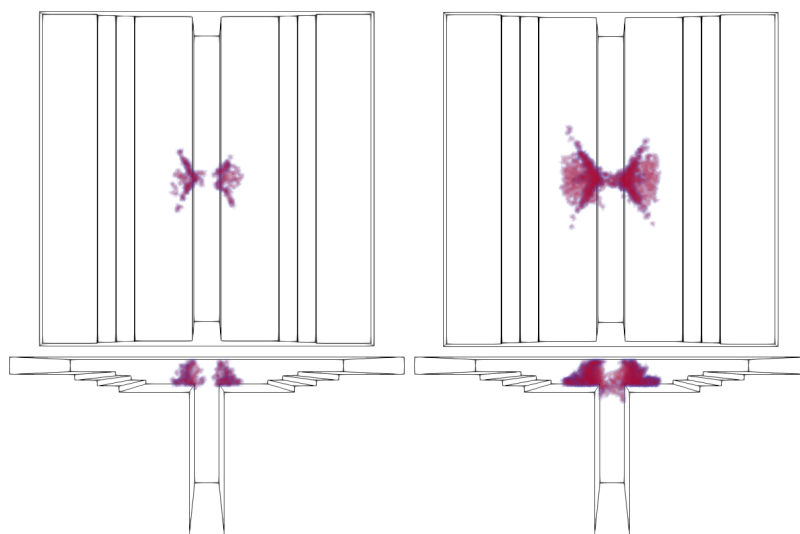


Рис. 17. Критерий разрушения LaRC04. Область разрушения образца. Постановка со стрингером. Сверху - вид сверху (плоскость соударения), снизу - вид сбоку

Здесь видна похожая структура, однако основное разрушение происходит уже не в центре, а по бокам от места соударения. Это можно объяснить тем, что стрингер рассеял часть ударной волны.

5. Анализ полученных результатов

5.1. Сравнение критериев не различающих разрушение волокон и матрицы

Для начала сравним результаты моделирования разрушения по критериям, которые не различают разрушение матрицы и волокна. К таким относятся: Цай-Хилл, Аззи-Цай-Хилл, Хоффман, Цай-Ву и Друкер-Прагер. Здесь и далее критерии идут слева направо, верхний ряд - вид сверху (плоскость соударения), нижний ряд - вид сбоку.

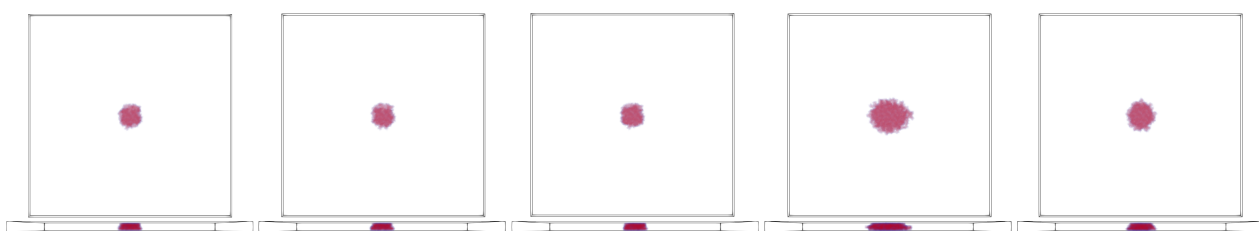


Рис. 18. Критерии разрушения Цай-Хилл, Аззи-Цай-Хилл, Хоффман, Цай-Ву и Друкер-Прагер. Область разрушения образца. Постановка без стрингера. Граничное условие на скорость: $-0,0052\text{мм/с}$

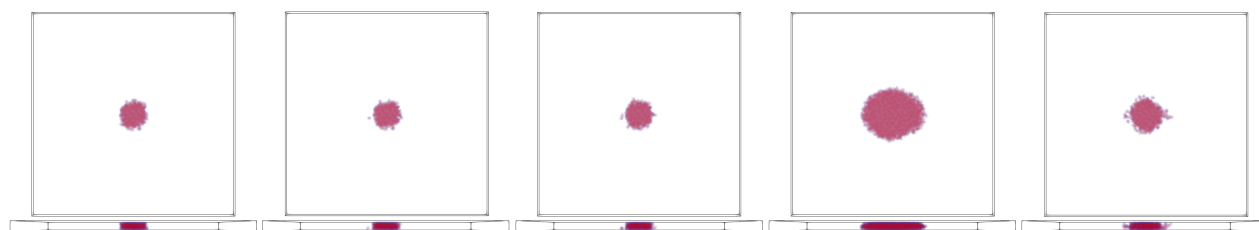


Рис. 19. Критерии разрушения Цай-Хилл, Аззи-Цай-Хилл, Хоффман, Цай-Ву и Друкер-Прагер. Область разрушения образца. Постановка без стрингера. Граничное условие на скорость: $-0,0104\text{мм/с}$

Из результатов можно выделить очень похожую по форме и размерам область разрушения для всех критериев кроме Цай-Ву, который дает значительно большую область. Увеличение скорости для граничного условия ожидаемо приводит к увеличению области разрушения.

Перейдем к рассмотрению результатов моделирования для постановки со стрингером.

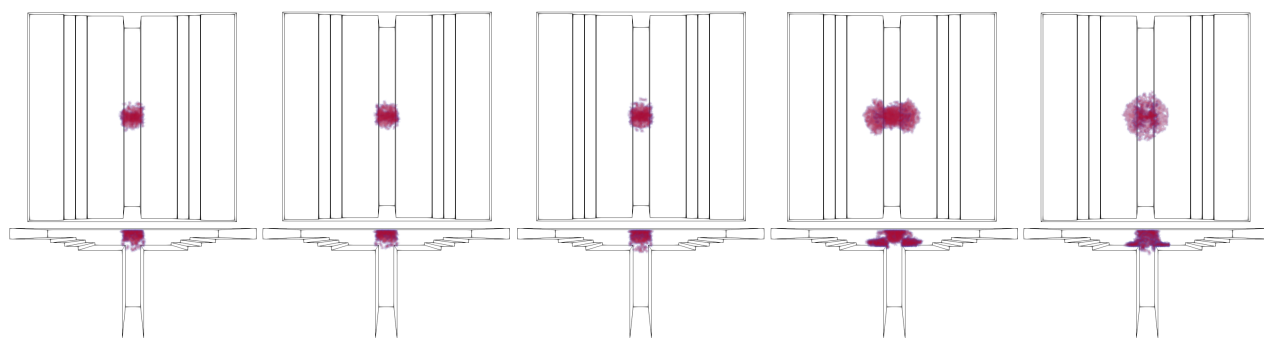


Рис. 20. Критерии разрушения Цай-Хилл, Аззи-Цай-Хилл, Хоффман, Цай-Ву и Друкер-Прагер. Область разрушения образца. Постановка со стрингером. Граничное условие на скорость: $-0,0052\text{мм/с}$

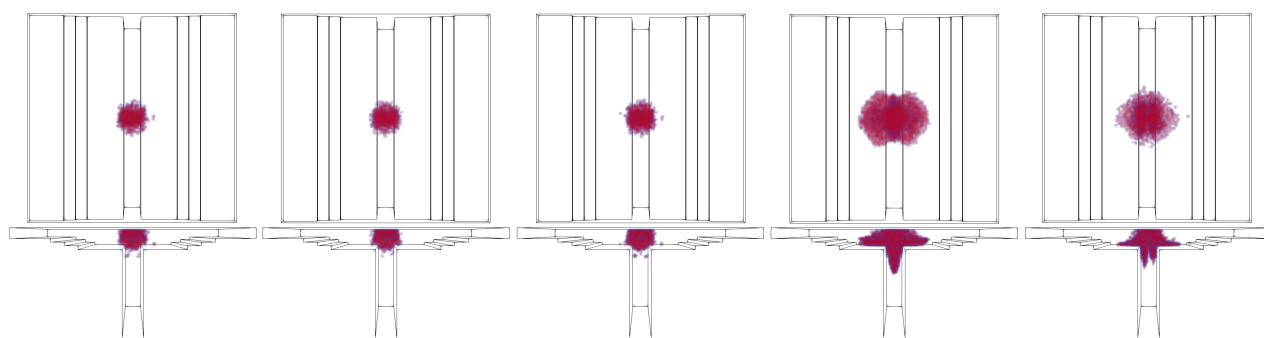


Рис. 21. Критерии разрушения Цай-Хилл, Аззи-Цай-Хилл, Хоффман, Цай-Ву и Друкер-Прагер. Область разрушения образца. Постановка со стрингером. Граничное условие на скорость: $-0,0104\text{мм/с}$

Из моделирования видно, что критерии Цая-Хилла, Аззи-Цай-Хилла и Хоффмана дают практически одинаковые области разрушения, причем объем разрушенного композиционного материала в самой пластинке примерно равен объему разрушений в стрингере. Критерии Цая-Ву и Друкера-Прагера имеют большую область разрушений, причем основная их часть приходится на стрингер, что хорошо видно в постановке с большей граничной скоростью.

5.2. Сравнение критериев различающих разрушение волокон и матрицы

Перейдем к результатам моделирования критериев LaRC03, LaRC04, Хашина и Пака, которые различают разрушение волокон и матрицы.

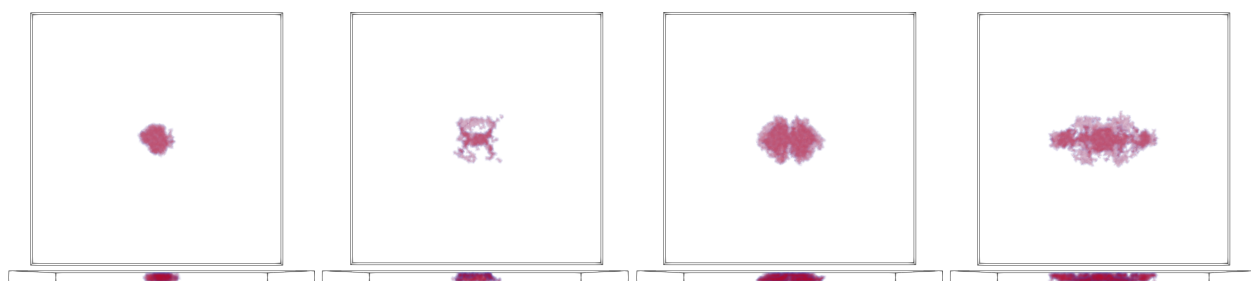


Рис. 22. Критерии разрушения LaRC03, LaRC04, Хашина и Пака. Область разрушения образца. Постановка без стрингера. Граничное условие на скорость: $-0,0052\text{мм/с}$

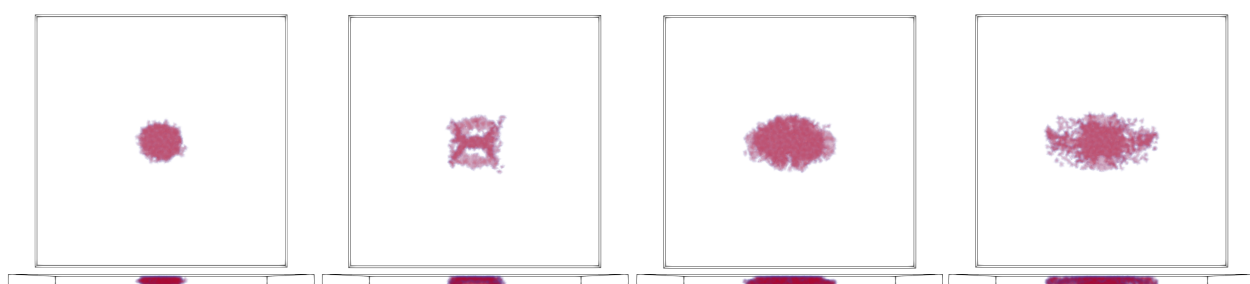


Рис. 23. Критерии разрушения LaRC03, LaRC04, Хашина и Пака. Область разрушения образца. Постановка без стрингера. Граничное условие на скорость: $-0,0104\text{мм/с}$

Здесь можно заметить существенное количественное и качественное отличие результатов моделирования. Области разрушения, даваемые критериями LaRC04, Хашина и Пака имеют сложную структуру, которая разрастается с увеличением скорости на границе. Наибольшее разрушение дает критерий Пака, а наименьшее - LaRC04.

Рассмотрим результаты моделирования для постановки со стрингером.

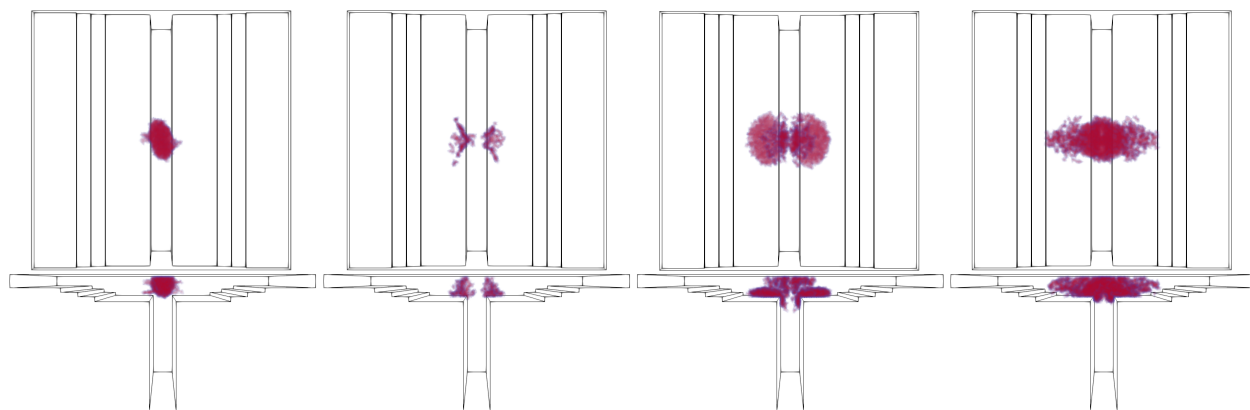


Рис. 24. Критерии разрушения LaRC03, LaRC04, Хашина и Пака. Область разрушения образца. Постановка со стрингером. Граничное условие на скорость: $-0,0052\text{мм/с}$

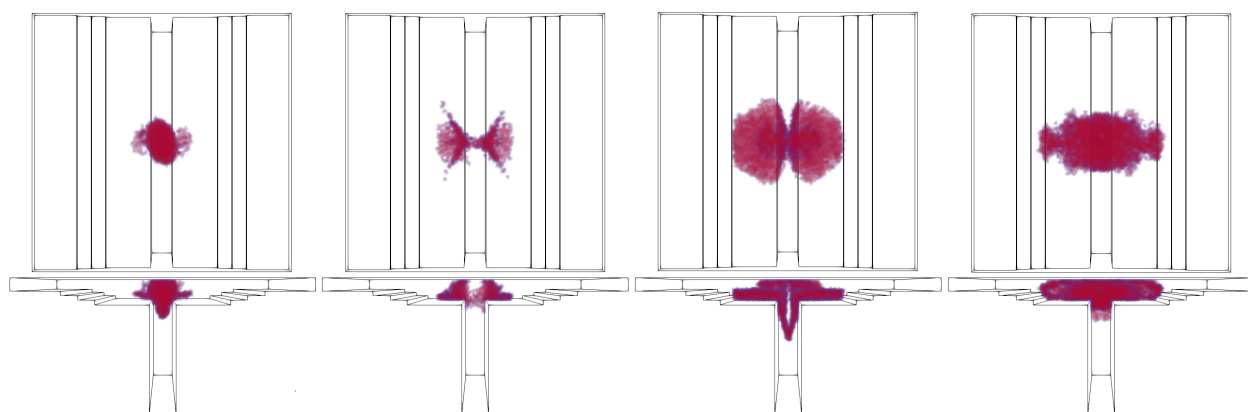


Рис. 25. Критерии разрушения LaRC03, LaRC04, Хашина и Пака. Область разрушения образца. Постановка со стрингером. Граничное условие на скорость: $-0,0104\text{мм/с}$

Аналогично постановке без стрингера все критерии дают существенно разную область разрушения, увеличивающуюся с увеличением скорости на границе. В критериях LaRC03, LaRC04 и Хашина хорошо видно, что основные разрушения происходят в стрингере. Это говорит о его дополнительной полезности для рассеяния ударной волны.

6. Заключение

В настоящей работе были получены следующие результаты:

- 1) Рассмотрены критерии разрушения композитов Аззи-Цай-Хилла, Хоффмана, LaRC03 и LaRC04. Сформулированы алгоритмы использования данных критериев для расчётов динамических задач сеточно-характеристическим методом (СХМ).
- 2) Разработаны программные модули для существующего программного комплекса на базе СХМ, позволяющие выполнять расчёты с использованием критериев Аззи-Цай-Хилла, Хоффмана, LaRC03 и LaRC04.
- 3) Выполнены расчёты динамического нагружения композитной панели с использованием реализованных критериев.
- 4) Проведено сравнение результатов, полученных с использованием реализованных критериев, и результатов расчётов по критериям, применявшимся ранее.

На качественном уровне результаты для критериев Аззи-Цая-Хилла, Хоффмана, LaRC03 и LaRC04 разумно соответствуют результатам, полученным с использованием критериев Цая-Хилла, Цая-Ву, Друкера-Прагера, Хашина, Пака. С количественной точки зрения получено существенное различие формы и объема областей разрушений, получаемых с использованием различных критериев. Это подчеркивают важность сравнения численного эксперимента с реальным, так как это может помочь определить наиболее подходящий критерий или совокупность критериев для конкретной постановки.

По результатам данной работы возможности существующего программного комплекса на базе СХМ существенно расширены, для новых постановок задач могут быть использованы дополнительные критерии разрушения материала, позволяющие учесть особенности режима нагружения в той или иной конкретной ситуации.

Список литературы

- [1] К. А. Беклемышева, А. В. Васюков, А. С. Ермаков, И. Б. Петров, Численное моделирование при помощи сеточно-характеристического метода разрушения композиционных материалов, Матем. моделирование, 2016, том 28, номер 2, 97– 110
- [2] В. Новацкий. Теория упругости. – М.: Мир, 1975
- [3] Л. И. Седов Механика сплошной среды. Т.1. – М.: Наука, 1970
- [4] Ф. Б. Челноков. Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах // Математическое моделирова т.18, №6, с. 96-108.
- [5] Челноков Ф. Б., Численное моделирование деформационных процессов в средах со сложной структурой, Дисс. канд. физ.-мат. наук, М., 2005
- [6] К. М. Магомедов, А.С. Холодов. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988.
- [7] И. Б. Петров, А. В. Фаворская. Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. // Информационные технологии, 2011, 9, с.30-32
- [8] А. О. Казаков. Численное моделирование волновых процессов в задачах ультразвукового неразрушающего контроля сеточно-характеристическим методом, Дисс. канд. физ.-мат. наук, М., 2019
- [9] Д. В. Гриневич, Н. О. Яковлев, А. В. Славин Критерии разрушения полимерных композиционных материалов (обзор) УДК 620.1:678.8
- [10] Муйземнек А.Ю., Карташова Е.Д. Механика деформирования и разрушения полимерных слоистых композиционных материалов. Учебное пособие – Пенза: Изд-во ПГУ, 2017. – 77 с

- [11] Davila C. G., Camanho P. P., Rose C. A. Failure criteria for FRP laminates //Journal of Composite materials. – 2005. – T. 39. – №. 4. – C. 323-345.
- [12] Salençon J. Handbook of continuum mechanics: General concepts thermoelasticity. – Springer Science Business Media, 2012.
- [13] Puck A., Schürmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models //Composites science and technology. – 2002. – T. 62. – №. 12-13. – C. 1633-1662.
- [14] Dvorak G. J., Laws N. Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates II. First ply failure //Journal of composite materials. – 1987. – T. 21. – №. 4. – C. 309-329.
- [15] Hahn H. T., Lorenzo L. Fatigue failure mechanisms in composite laminates //Fracture 84. – Pergamon, 1984. – C. 549-568.
- [16] Puck A., Schürmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models //Failure criteria in fibre-reinforced-polymer composites. – Elsevier, 2004. – C. 832-876.
- [17] Pinho S. T. et al. Failure models and criteria for FRP under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity. – 2005. – №. NASA/TM-2005-213530. S. T. Pinho, C. G. Davila, P. P. Camanho, L. Iannucci, P Robinson.
- [18] Hermann H. Treatise on materials science and technology. – Academic Press, 1972. pp. 79–114.