

Содержание

Введение	4
0.1 Аннотация	4
0.2 Актуальность работы	4
0.3 Цели работы	6
0.4 Обзор литературы	6
Глава 1. Волновые процессы в средах сложной структуры	8
1.1 Механика деформируемого твёрдого тела	8
1.2 Рассмотрение линейно упругого тела	9
1.3 Волновые процессы	12
1.4 Продольные и поперечные волны	12
1.5 Взаимный переход продольных и поперечных при отражении от границы	14
1.6 Задача Лэмба	15
Глава 2. Численный метод	18
2.1 Одномерная задача	18
2.2 Алгоритм поиска значений переменных \vec{v}	19
2.3 Разностные схемы для структурированных сеток	20
2.3.1 Схема Куранта-Изаксона-Рис	20
2.3.2 Схема Лакса-Вендрофа	21
2.3.3 Гибридная схема	21
2.4 Схемы для неструктурированных сеток	22
Глава 3. Осуществление расчётов и их анализ	24
3.1 Общий обзор работ	24
3.2 Генерация xml-файлов	25

3.3	Применение моделей машинного обучения к полученной вы-	
	борке	26
3.3.1	Линейная регрессия	26
3.3.2	Гребневая регрессия	28
3.3.3	Результаты расчётов	29
Заключение и план дальнейших исследований		31
Список литературы		32

Введение

0.1 Аннотация

В этой работе рассматривается проблема исследования и реконструкции параметров среды сложной структуры по данным, полученным ультразвуковым сканированием. Под сложной структурой мы понимаем композиционный материал.

Для численного моделирования задачи и её решения используется программный комплекс gsm-3d, в основу которого лёг гибридный сеточно-характеристический метод. Комплекс gsm-3d разработан Васюковым Алексеем Викторовичем [6].

Обучающую выборку для моделей машинного обучения получим при численном моделировании распространения волн в исследуемой среде. В рамках численных экспериментов изучается эффективность применения такого метода для задач, близких к ультразвуковым исследованиям композиционных материалов.

0.2 Актуальность работы

Применение композитных материалов открывает большие возможности в аэрокосмической и авиационной промышленности. Речь идет об их главных качествах – высокой прочности и легкости. В последнее время рассматривается возможность их использования для изготовления конструкции различных частей самолета. Это заметно уменьшит вес конструкции, и благодаря этому можно будет улучшить характеристики летательных аппаратов.

Действительно серьёзная задача, которая сейчас стоит на повестке – это разработка новых композиционных материалов, а также создание методов проверки их надежности при использовании. Существующие сейчас мето-

ды проверки изделий из металлов и сплавов оказываются неэффективными для композитов из-за их сложной внутренней структуры. Это происходит из-за того, что они изготавливаются из слоев материала с анизотропными свойствами, и поэтому волновая картина в исследуемых образцах намного сложнее, чем в однослойных образцах с изотропной реологией. Этот факт, в свою очередь, усложняет анализ показаний приборов неразрушающего контроля, например, УЗИ.

Из-за сложной внутренней структуры и наличия компонент, у которых сильно выделяются реологические качества, композиционные материалы вследствие нагрузки имеют все шансы лишиться той прочности, которая была изначально, даже при отсутствии заметных повреждений. Это связано с образованием микротрещин, которые вслед за тем, соединяясь, преобразуются в макротрещины. Расслоение материала, образующееся впоследствии нагрузки, имеет возможность быть незамеченным, но это делает образец непригодным для последующего применения. Такой вид повреждений называют едва заметным, потому что этот вид повреждения можно обнаружить только при ультразвуковом исследовании. Этот эффект делает композиты либо опасными, либо дорогими [2][11]. Стоит отметить, что ультразвуковое исследование – это дешевый и один из самых распространенных способов неразрушающего контроля.

При моделировании настоящих инженерных систем нужно применять численные способы, которые дают возможность производить вычисление в областях со сложной геометрией. Есть некоторое количество популярных численных способов, которые подходят для решения аналогичных задач. К ним можно отнести сеточно-характеристический метод, разрывный метод Галёркина, а также рейтрейсинг.

0.3 Цели работы

1. Исследование волновых процессов в композиционных материалах на основе численного моделирования удара по инженерной конструкции
2. Решение задач о поверхностных волнах в средах сложной структуры с помощью сеточно-характеристический метода
3. Предсказание параметров Ламэ исследуемого композиционного материала

0.4 Обзор литературы

Большинство источников, которые рассматривались при подготовке, используют для обучения реальные данные. Основным используемым источником, в котором шла речь про численно смоделированные задачи, была диссертация А.В. Васюкова [6].

Про численные методы, которые подходят для решения рассматриваемой нами задачи подробно написано в [1], [14]. Про разрывный метод Галёркина, который хорошо зарекомендовал себя для решения гиперболических задач на нерегулярных в расчетных областях сложной формы [15], [16].

Решение неправильно поставленных и обратных задач – это активно развивающаяся тема научных исследований, которая находит применение во многих прикладных областях современной науки. Примером могут послужить геофизика (сейсморазведка, гравиразведка и т.д.) и медицина (задачи томографии).

В статье [13] представлен обзор наиболее часто встречающихся в приложениях обратных задач. Теоретические аспекты решения обратных задач математической физики обсуждаются, например, в книге [17], а классическим численным методам их решения посвящена книга [14]. Получившие в последнее время широкое распространение алгоритмы машинного

обучения, и глубокие нейронные сети в частности, также решают задачи некорректно поставленные с математической точки зрения.

Существенным преимуществом алгоритмов нейронных сетей является возможность работы с данными без предварительной обработки. Идеи, используемые в этих областях, относительно легко переносятся произвольно на задачи, в которых содержатся сильно коррелированные необработанные данные, такие как данные ультразвукового исследования. Например, [7] описывает решение проблемы обнаружения дефектов в стальном образце с помощью ультразвуковых данных с использованием методов машинного обучения.

Глава 1

Математические модели

1.1 Механика деформируемого твёрдого тела

Теоретическую сводку к имеющейся проблеме стоит начать с рассмотрения теории механики деформируемого твёрдого тела. Для описания математической модели волновых процессов деформируемого твёрдого тела необходимо записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij} + f_i \\ \sigma_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + F_{ij},\end{aligned}\tag{1}$$

где ρ – плотность среды, v_i – компоненты скорости смещения, ∇_j – ковариантная производная по j -й координате, ε_{kl} и σ_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, q_{ijkl} – тензор 4х упругих постоянных, f_i – массовые силы, действующие на единицу объёма, F_{ij} – правая часть, используемая для описания диссипации в моделях с учётом вязкости.

В случае малых деформаций тензор скоростей $e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{kl}$ можно выразить через компоненты скорости смещения линейным образом:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)\tag{2}$$

Подставив (2) уравнение во (1), получим:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}q_{ijkl}(\nabla_k v_l + \nabla_l v_k) + F_{ij},\tag{3}$$

Вид F_{ij} , q_{ijkl} и ρ зависит от реологии среды. Т.е. они зависят от её состояния, то есть от v и σ .

1.2 Рассмотрение линейно упругого тела

Тензор q_{ijkl} вместе с правой частью F_{ij} для линейно упругого тела в (1) принимают следующий вид [21]:

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad 4$$

где λ и μ - параметры Ламэ, которые определяют реологические свойства линейно-упругой среды, а δ_{ij} - символ Кронекера. При этом $F_{ij} = 0$. Параметры Ламэ в нашем случае – это функции, которые зависят только от координаты.

Уравнения (1), при в отсутствии внешних сил в трехмерном пространстве и декартовых координатах, принимают вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad 5$$

Эти уравнения справедливы в приближении малых деформаций. Перепишем их в матричной форме:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0 \quad 6$$

где вектор функций $\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T$, которые нам необходимо найти. x, y, z - независимые пространственные переменные, а t - время. Если записать в общем виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{f}, \quad 7$$

где \vec{f} - вектор правых частей, а вид матриц $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ зависит от реологии среды.

Для линейно упругого тела эти матрицы принимают вид:

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Волновые процессы

Рассмотрим однородное упругое изотропное тело. Уравнение движения для него представимо в виде следующего дифференциального уравнения:

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \vec{u} + \mu\Delta \vec{u} + \rho \left(\vec{F} - \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad 8$$

Теперь распишем выражения для объёмных сил и поля перемещений в виде:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \nabla \Phi + \operatorname{rot} \vec{\Psi} \\ \vec{u} &= \nabla \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi} \end{aligned} \quad 9$$

Векторное поле \vec{u} является решением уравнения (8), если функции φ и ψ удовлетворяют следующим соотношениям [6]:

$$\begin{aligned} c_1^2 \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\Phi \\ c_2^2 \Delta \vec{\psi} - \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} &= \vec{\Psi}, \end{aligned} \quad 10$$

Причём $c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, а $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ (λ , μ – параметры Ламе, ρ – плотность).

1.4 Продольные и поперечные волны

Рассмотрим случай, когда $\vec{\Psi} \equiv 0$. При этом начальные условия следующие – $t = t_0$, $\varphi = 0$. Тогда для нахождения φ мы получаем однородное уравнение с нулевыми начальными условиями. Из этого следует, что $\varphi \equiv 0$. Волны, которые описываются такими условиями, называются продольными (Р-волны) [6]. В продольных волнах частицы вещества движутся поступательно. Стоит отметить, что продольные волны не генерируют поперечных при распространении. Скорость распространения её фронта – c_1 .

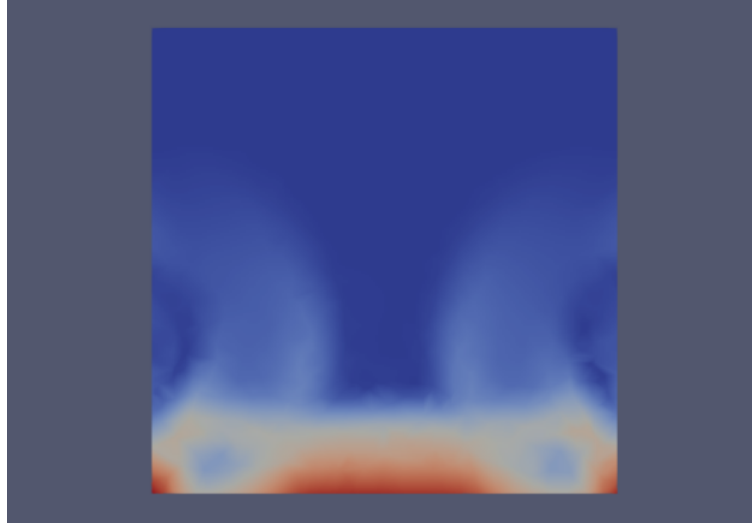


Рис. 1: Вид смоделированной Р-волны

Теперь представим, что такая волна распространяется вдоль оси z . Тогда волна будет иметь следующие параметры:

$$v_z = -f(z) \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = C_p$$

$$v_x = v_y = 0$$

$$\sigma_{zz} = f(z)(\lambda + 2\mu)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = f(z)\lambda$$

$$\sigma_{ij} = 0 \text{ для } i \neq j \quad 11$$

$f(z)$ - функция, которая задаёт форму волны. Она зависит только от z .

Вернёмся к (10). В случае, когда $\Phi \equiv 0$ мы получаем волны, у которых объемное расширение равно нулю. Такие волны называются поперечными (S-волны). Скорость распространения её фронта - c_2 .

Пусть поперечная волна, аналогично продольной волне, распространяется вдоль z . Аналогично продольной волне, $f(z)$ - функция, задающая форму волны. В этом случае волна будет иметь следующие параметры:

$$v_z = -f(z) \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = C_s$$

$$v_x = v_y = 0$$

$$\sigma_{ij} = f(z)\mu \text{ для одной из пар } i \neq j$$

$$\sigma_{ij} = 0 \text{ для } i = j$$

12

1.5 Взаимный переход продольных и поперечных при отражении от границы

Если в рассматриваемой среде имеются границы, то картина значительно усложняется. Для прямолинейной границы и прямолинейного фронта есть точное решение, а в остальных интересующих нас случаях можно свести нелинейные границу и фронт к наборам линейных участков [18].

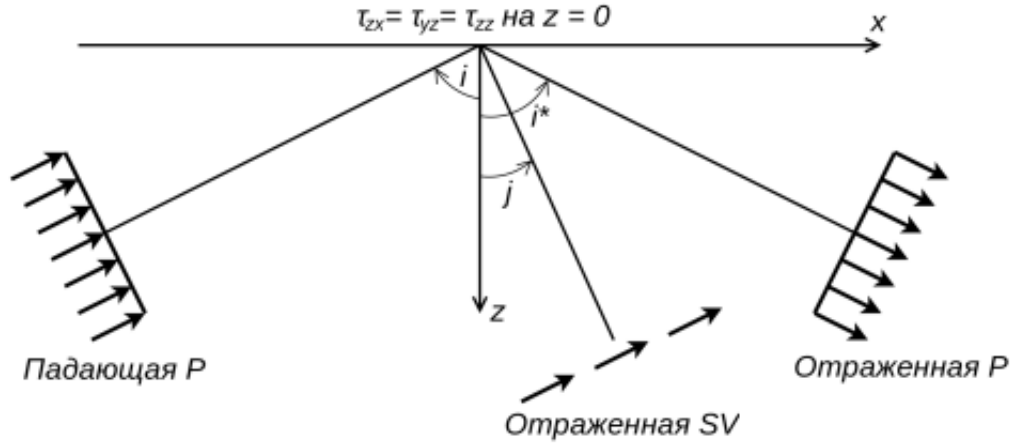


Рис. 2: Система лучей, которые используются при изучении волн

Рассмотрим упругое полупространство с плоской свободной границей. В данном случае мы можем следить 3 вида волн: P, SH и SV волны, где SH и SV-волны — поперечные. Они выделяются тем, собственно, что моментальная скорость частиц в SH-волне параллельна плоскости грани. Фронт этих волн распространяется с схожей скоростью, перпендикулярной скоростям частиц. В соответствии с этим, в SV-волне она ориентирована под углом к границе. Стоит обозначить, собственно, что в двухмерной постановке задачи SH-волны увидеть невозможно.

В однородной среде эти волны распространяются автономно, но при отражении от границы обстановка изменяется. SH-волны распространяются и отражаются например же автономно, а Р и SV волны генерируют друг друга при отражении.

1.6 Задача Лэмба

Рассмотрим упругие возмущения, которые распространяются в пластинке со свободными границами. У них есть смещение как в направлении распространения волны, так и перпендикулярно плоскости пластинки [12]. Часто их называют нормальными волнами в пластине, но чаще распространено название – волны Лэмба.

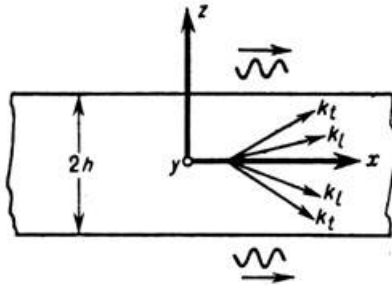


Рис. 3: Распространение волн в пластине

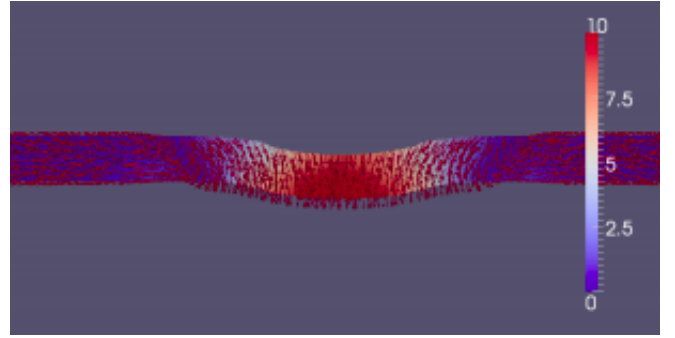


Рис. 4: Формирование волны Лэмба. Цветом выделен модуль скорости

В работе [6] были получены уравнения, которые описывают две группы волн. Каждая группа может распространяться в пластинке независимо от другой, т.к. удовлетворяет волновым уравнениям движения и соблюдены начальные условия.

$$U = U_s + U_a$$

$$W = W_s + W_a$$

$$U_s = Ak_s \left(\frac{\text{ch } q_s z}{sh q_s d} - \frac{2q_s s_s}{k_s^2 + s_s^2} \frac{\text{ch } s_s z}{sh s_s d} \right) e^{i(k_s x - \omega t - \pi/2)}$$

$$\begin{aligned}
W_s &= -Aq_s \left(\frac{\text{sh } q_s z}{\text{sh } q_s d} - \frac{2k_s^2}{k_s^2 + s_s^2} \frac{\text{sh } s_s z}{\text{sh } s_s d} \right) e^{i(k_s x - \omega t)} \\
U_a &= Bk_a \left(\frac{\text{sh } q_a z}{\text{ch } q_a d} - \frac{2q_a s_a}{k_a^2 + s_a^2} \frac{\text{sh } s_a z}{\text{ch } s_a d} \right) e^{i(k_a x - \omega t - \pi/2)} \\
W_a &= -Bq_a \left(\frac{\text{ch } q_a z}{\text{ch } q_a d} - \frac{2k_a^2}{k_a^2 + s_a^2} \frac{\text{ch } s_a z}{\text{ch } s_a d} \right) e^{i(k_a x - \omega t)}
\end{aligned} \tag{13}$$

где U и W – потенциалы, которые описывают продольные и поперечные волны. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\
W &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}
\end{aligned} \tag{14}$$

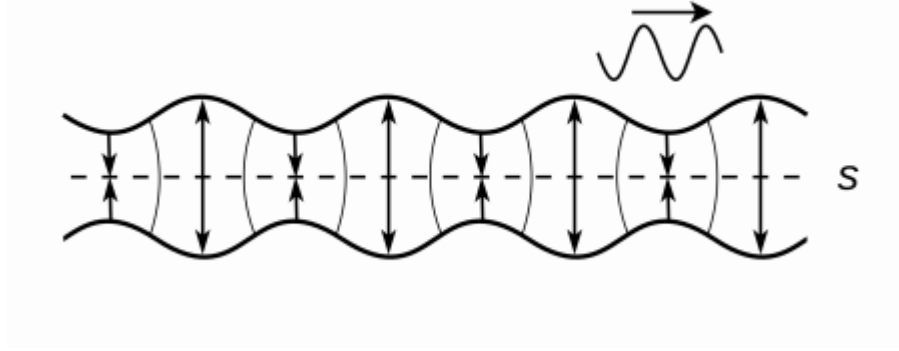


Рис. 5: Симметричные волны

Группа волн S описывает волны, в которых движение происходит симметрично плоскости $z = 0$. Вторая же группа волн – это соответственно антисимметричные волны (индекс a).

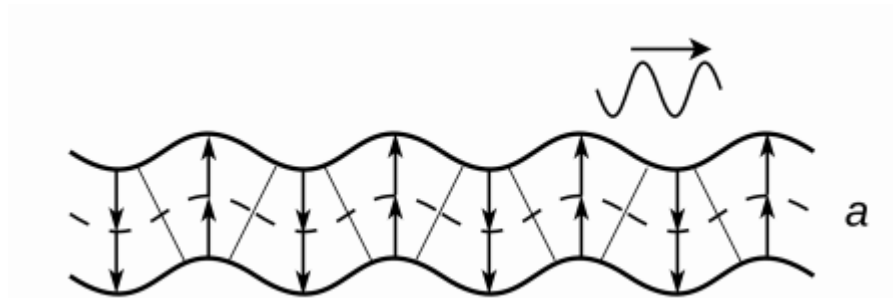


Рис. 6: Симметричные волны

Глава 2

Численный метод

2.1 Одномерная задача

Рассмотрим уравнение вида:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad 15$$

Если \mathbf{A} будет иметь полный набор вещественных собственных значений, то уравнение примет гиперболический вид. Решения этого уравнения, в свою очередь, будут соответствовать процессам, которые имеют волновой характер. Для любой из матриц \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z существует следующее разложение:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}, \quad 16$$

где $\mathbf{\Omega}$ - матрица, состоящая из собственных векторов матрицы \mathbf{A} , а $\mathbf{\Lambda}$ - диагональная матрица соответствующих собственных значений.

Если мы домножим уравнение (15) на $\mathbf{\Omega}$, а затем перейдя к инвариантам Римана, получим:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \quad 17$$

где $\vec{v} = \mathbf{\Omega} \vec{u}$, а затем можем разложить на n одномерных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = 0, \quad 18$$

Таким образом мы получаем 9 независимых уравнений переноса. Разберём эти уравнения подробнее. Рассмотрим характеристические кривые Γ вдоль которых наши уравнение переноса принимают вид:

$$\frac{dv_i}{dt} = 0$$

19

Значения инвариантов Римана переходят с n -го на $n + 1$ слой вдоль характеристических кривых Γ . Причём характеристические кривые определяются выражением: $\frac{dx}{dt} = \lambda$. При этом λ_i определяются реологией среды.

2.2 Алгоритм поиска значений переменных \vec{v}

Найдём собственные значения λ_i для матрицы \mathbf{A} . Они определяют наклон характеристик, выпущенных из рассматриваемой точки. Для удобства обозначим её как x_m^{n+1} .

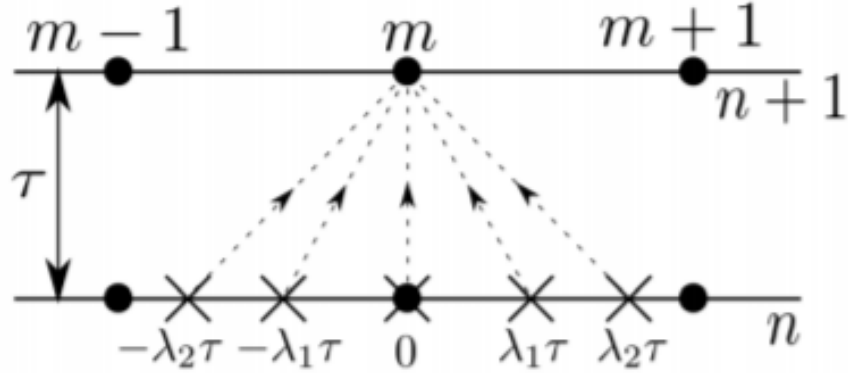


Рис. 7: Основной принцип СХМ

Теперь для каждой из характеристик Γ_i определим точку пересечения с n -м временным слоем — x_{i*}^n . В этой точке определяется переменная \vec{u}_{i*}^n .

Затем по этим значениям находим инварианты Римана v_{i*}^n в точке x_{i*}^n . Инварианты Римана со следующего временного слоя переносятся с предыдущего, как было сказано выше.

$$v_{im}^{n+1} = v_{i*}^n \quad 20$$

После нахождения всех инвариантов Римана, мы можем найти значения исходных переменных \vec{v} .

2.3 Разностные схемы для структурированных сеток

Хотя расчёты в нашей задаче и проводились на тетраэдральных сетках, рассмотрение разностных схем и принципа построения гибридной схемы стоит начать рассматривать со структурированных прямоугольных сеток. После того, как мы пришли к 9 одномерным уравнениям для инвариантов Римана, нам необходимо найти решение каждого из них. Для этого следует использовать различные разностные схемы на структурированных сетках. Примером таких схем могут послужить: схема Куранта-Изаксона-Рис и схема Лакса-Вендрофа.

2.3.1 Схема Куранта-Изаксона-Рис

Это монотонная схема первого порядка аппроксимации, которая строится на трёхточечном шаблоне, благодаря чему позволяет явно выразить значение u_m^{n+1} :

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{h} \Omega^{-1} \Lambda^+ \Omega (u_{m+1}^n - u_m^n) - \frac{\tau}{h} \Omega^{-1} \Lambda^- \Omega (u_m^n - u_{m-1}^n) \quad 21$$

Эта схема минимально размывает волновой фронт среди всех схем первого порядка аппроксимации [8].

2.3.2 Схема Лакса-Вендрофа

Это не монотонная схема единственная имеет второй порядок точности на трёхточечном шаблоне $(m-1, m, m+1)$. Сама схема имеет следующий вид:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{2h} A (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) - \frac{\tau^2}{2h^2} A^2 (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad 22$$

Поскольку схема имеет второй порядок аппроксимации, она обеспечивает более точное отображение формы волнового фронта по сравнению со схемами первого порядка. Из-за не монотонности появляются нефизические численные колебания на разрывах точного решения.

2.3.3 Гибридная схема

Данная схема – это линейная комбинация двух предыдущих. Её можно записать в следующем виде [9]:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{2h} A (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{1}{2} \left((1-a) \frac{\tau}{h} \Omega^{-1} |\Lambda| \Omega + a \frac{\tau^2}{h^2} A^2 \right) (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad 23$$

При $a = 0$ схема переходит в схему Куранта-Изаксона-Рис и имеет первый порядок аппроксимации. В случае, когда $a = 1$ схема переходит в схему Лакса-Вендрофа и имеет второй порядок приближения. Если параметр a выбирается из диапазона $0 < a < 1$, то схему называем гибридной. Полученное численное решение в таком случае является некоторым усреднением решений первого и второго порядка. Схема называется гибридной, если значение a выбирается независимо в каждой точке сетки на каждом шаге времени в зависимости от локальных числовых свойств решения.

Стоит также упомянуть про критерий переключения опорных схем. Этот критерий основан на локальной гладкости решения [9]:

$$\frac{(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{2} \leq K \frac{(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{2} \quad 24$$

Если условие (24) не выполнено, то решение считается разрывным. При этом параметр a в данной точке становится равным 0. Если же условие (24) выполнено, то параметр будет равен 1. Гибридная схема сочетает достоинства и исключает недостатки обеих предыдущих схем.

2.4 Схемы для неструктурированных сеток

Теперь можем перейти к рассмотрению случая неструктурированных сеток. Основной формой ячейки неструктурированной сетки в двумерном случае является треугольник, а для трёхмерном – тетраэдр.

Подробно метод решения многомерной задачи описан в [6]. Но отдельного рассмотрения требует случай, когда узел находится на границе расчётной области. В этом случае для правильной постановки задачи требуется задать граничные условия для каждого внешнего узла сетки. Количество этих условий равно числу выходящих характеристик.

В нашем случае это три условия: условие на свободную границу, заданную внешнюю силу и заданную скорость границы.

$$\sigma_\tau = \sigma_n = 0 \quad 23$$

где σ_τ – тангенциальное напряжение в граничной точке, а σ_n – нормальное.

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau_0}, \quad \sigma_n = \sigma_{n_0} \quad 24$$

где σ_{τ_0} и σ_{n_0} – заданные извне тангенциальное и нормальное напряжения.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \quad 25$$

где \vec{v}_0 – заданный извне вектор скорости в точке границы.

Глава 3

Осуществление расчётов и их анализ

3.1 Общий обзор работ

Перед началом расчётов были установлены программа Paraview и программный комплекс gsm-3d [6], с помощью которого будем генерировать обучающую выборку, а также дополнительные пакеты для gsm-3d. Paraview необходима для визуализации проведённых расчётов.

После тестирования на простых задачах необходимо сгенерировать достаточное количество xml-файлов, которые содержат параметры задачи, которую нам необходимо смоделировать. В каждом конфигурационном xml-файле прописаны геометрические параметры исследуемого тела(в нашем случае – пластина 10x10x1(см)), реология материала, а также пластичность и вязкость материала. Для получения выборки было сгенерированно 150 xml-файлов.

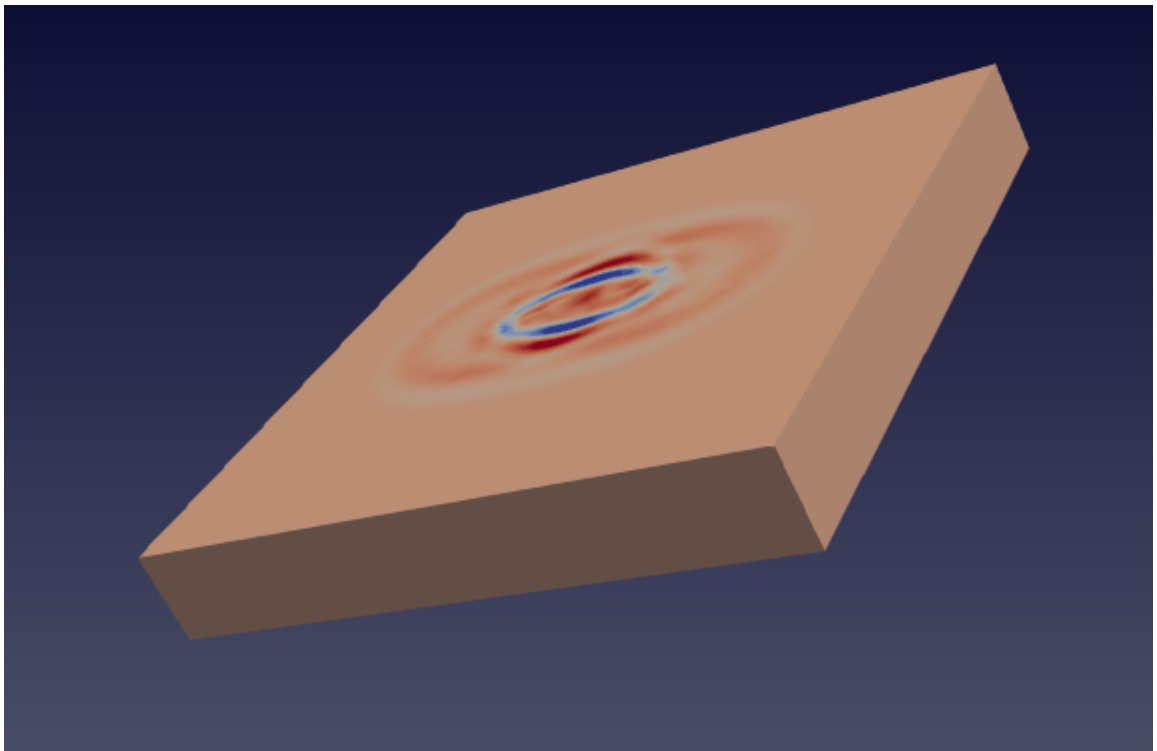


Рис. 8: Визуализация одной из тестовых задач

Весь процесс занял полтора месяца, поскольку численное моделирование одной задачи занимает от 6 до 8 часов. На выходе мы получили 150 csv-файлов для различных рассматриваемых материалов. Каждый файл содержит по 150 строк.

После этого все csv-файлы были обработаны и собраны в единую выборку. Это выборку поделили на обучающую и тестовую. Далее можем предсказать значение одного из параметров Ламэ(λ или μ).

3.2 Генерация xml-файлов

Для быстрой генерации конфигураци был написан Python-модуль. Ценность этого модуля в его гибкости и лёгкой настройке под необходимую задачу. С его помощью были сгенерированы все конфигурационные xml-файлы для нашей задачи.

Модуль находится в открытом доступе. При необходимости можно использовать этот модуль в других исследований, где применяется программный комплекс gsm-3d [6].

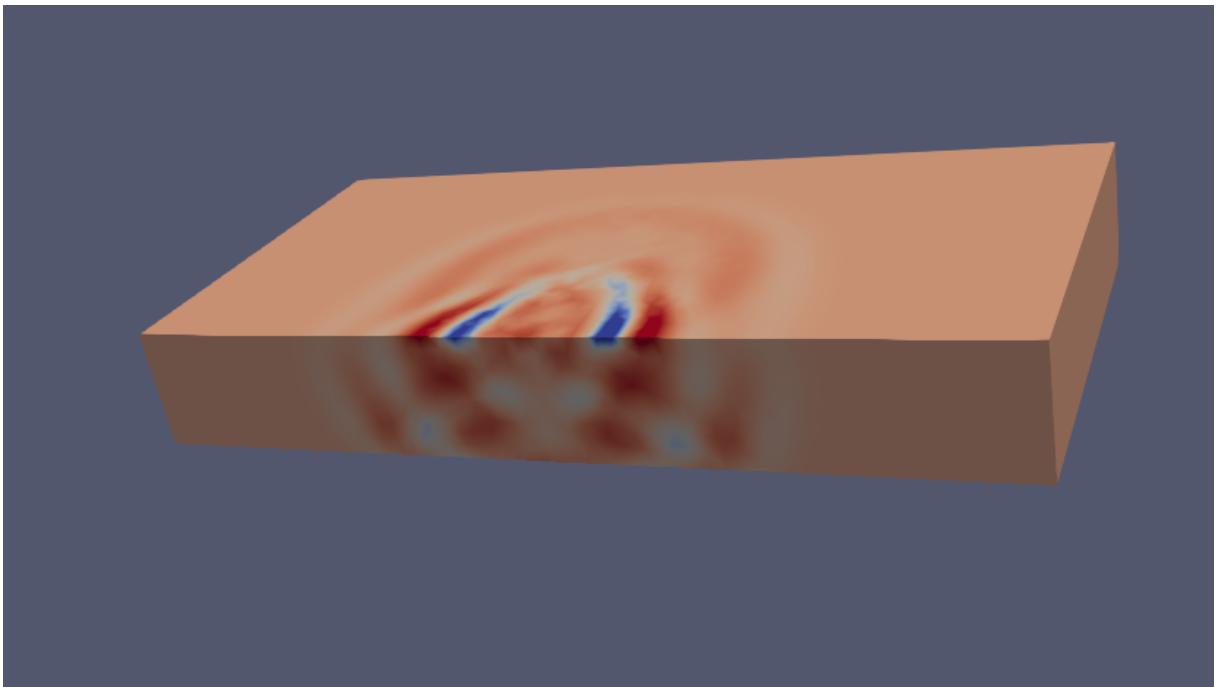


Рис. 9: Визуализация задачи с анизотропным материалом

Было сгенерировано 150 файлов для 3-х видов материалов (steelB, steel09g2s, monolayer). steelB и steel09g2s – изотропные материалы, а monolayer – анизотропный. Изотропные материалы отличаются параметром Ламэ λ .

3.3 Применение моделей машинного обучения к полученной выборке

Перед представлением результатов, которые были получены в результате применения линейной регрессии и метода опорных коэффициентов к нашей выборке, стоит сделать небольшое теоретическое отступление по этим моделям машинного обучения.

3.3.1 Линейная регрессия

Линейная регрессия является одним из самых простых подходов к статистическому обучению. Это хорошая отправная точка для более продвинутых подходов, и на самом деле многие причудливые методы статистического обучения можно рассматривать как расширение линейной регрессии. Поэтому понимание этой простой модели просто необходимо для рассмотрения других подходов.

Линейная регрессия используется для изучения линейной зависимости между зависимой переменной (y) и одной или несколькими независимыми переменными (\mathbf{X}). Линейность взаимосвязи между зависимыми и независимыми переменными является предположением модели. Связь моделируется с помощью члена случайного возмущения (или переменной ошибки) ε . Возмущение в первую очередь важно, потому что мы не можем охватить все возможные влияющие факторы на зависимую переменную модели. Чтобы охватить все другие факторы, не включенные в качестве независимой переменной, которые влияют на зависимую переменную, в модель линейной регрессии добавляется термин возмущения. Таким образом, мо-

дель линейной регрессии принимает следующий вид:

$$y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \varepsilon =$$

$$= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_K x_K + \varepsilon \quad 26$$

где $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, K$ – коэффициенты регрессии модели, а K – количество включенных независимых переменных. Уравнение (26) называется уравнением регрессии.

Рассмотрим простую линейную регрессию, которая включает только одну независимую переменную.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

где индекс i относится к конкретному наблюдению (всего имеется n точек данных). Здесь β_0 и β_1 – это параметры, которые необходимо оценить на основе данных. β_0 – это постоянный член, а β_1 – градиент. В простой линейной регрессии мы предсказываем значение зависимой переменной y_i , используя оценку независимой переменной x_i для наблюдения i .

Чтобы получить надежные оценки коэффициентов и интерпретировать результаты на основе случайной выборки данных, необходимо сделать предположения модели. Существует пять допущений, связанных с моделью линейной регрессии (они называются допущениями Гаусса-Маркова):

- **Линейность:** Связь между зависимой переменной, независимой переменной и возмущением является линейной

- Случайная выборка: У нас есть случайная выборка размера $n(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n$, где наблюдения независимы друг от друга.
- Отсутствие идеальной коллинеарности: ни одна из независимых переменных не является постоянной, и между независимыми переменными нет точных линейных соотношений.
- Экзогенность: Член возмущения имеет ожидаемое значение, равное нулю, при любом значении независимой переменной. Другими словами, $E(\varepsilon|x_i) = 0$
- Гомоскедастичность: член возмущения имеет одинаковую дисперсию при любом значении независимой переменной. Другими словами, $Var(\varepsilon|x_i) = \sigma^2$.

Допущения Гаусса-Маркова гарантируют достоверность обычных наименьших квадратов (МНК) для оценки коэффициентов регрессии.

3.3.2 Гребневая регрессия

Ридж-регрессия или гребневая регрессия – это один из методов понижения размерности. Часто его применяют для борьбы с переизбыточностью данных, когда независимые переменные коррелируют друг с другом (т.е. имеет место мультиколлинеарность). Следствием этого является плохая обусловленность матрицы $X^T X$ и неустойчивость оценок коэффициентов регрессии. Оценки могут иметь неправильный знак или значения, которые намного превосходят те, которые приемлемы из физических или практических соображений.

Когда мы делаем линейную регрессию, то функция потерь выглядела так:

$$\mathcal{L}(X, \vec{y}, \vec{w}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\vec{x}_i^T \vec{w} - y_i)^2$$

Пеперь в ридж-регрессии мы добавляем к ней $\lambda \sum_{j=1}^m |w_j|$, где X обозначает размер штрафа. Если $\lambda = 0$, то это обычная линейная регрессия. Теперь формула выглядит так:

$$\mathcal{L}(X, \vec{y}, \vec{w}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\vec{x}_i^T \vec{w} - y_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^m |w_j|$$

Чем меньше λ , тем выше дисперсия и ниже смещение. Чем больше λ , тем ниже дисперсия и выше смещение.

Взяв производную от этой функции, мы получим формулу, которая не имеет аналитического решения, т.е. МНК не подходит. Следовательно, необходимо использовать градиентный спуск.

3.3.3 Результаты расчётов

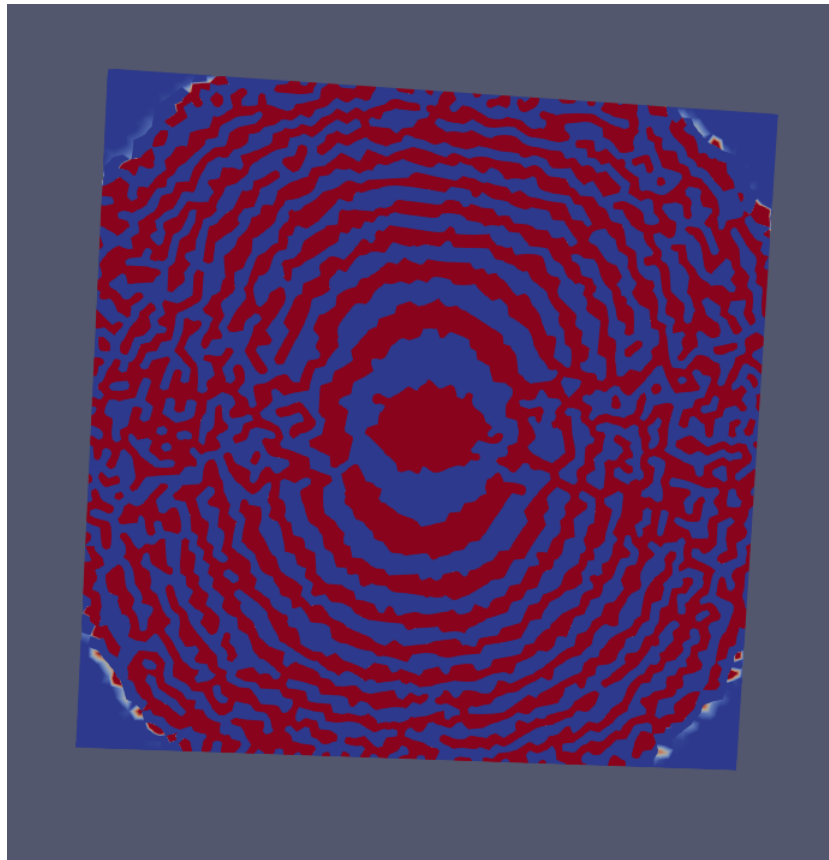


Рис. 10: Визуализация задачи с анизотропным материалом

Разделим наш датасет на обучающую и тестовую выборки в отношении 7:3. Обучив на ней первую модель мы получаем точность определения параметра Ламэ 84,2% для выборки изотропных материалов. Для анизотропных материалов точность на линейной регрессии составила: 80,6%.

Обучая гребневую регрессию на выборке получаем точность определения параметра Ламэ 96,4% для выборки изотропных материалов. Для анизотропных материалов точность на линейной регрессии составила: 91,5%.

Заключение и план дальнейших исследований

В рамках работы была рассмотрена проблема ультразвукового исследования и восстановления различных параметров композиционных материалов. В рамках исследования были проведены численные эксперименты как с изотропными, так и с анизотропными материалами. Были написаны модели машинного обучения, восстанавливающие один из параметров Ламэ.

Полученные результаты дают надежду, что использование подобных методов для задач, в которых вариации в геометрии среды существенно влияют на полученную сейсмограмму, как минимум оправдано. Однако полученные результаты необходимо дополнительно верифицировать на реальных данных, так как датасеты, которые мы использовали, имели полностью искусственную природу.

Следующим этапом будет доработка уже разработанных методов и дополнительное тестирование на реальных данных. Одним из способов улучшения полученного результата может быть использование нескольких точечных источников, которые нужно расположить в разных точках поверхности. Кроме этого нужно повысить разрешения ультразвуковых диаграмм, путем установки нескольких дополнительных датчиков.

Список литературы

- [1] Магомедов К.М., Холодов А.С. – *Сеточно-характеристические численные методы* – Издательство Юрайт (Москва), 2017.
- [2] Liu, J., Li, Y., Yu, X., Gao, X., Liu, Z. – *Design of aircraft structures against threat of bird strikes* – Chinese Journal of Aeronautics; 31(7), 1535–1558 (2018).
- [3] W. Yang, H. Zhang, J. Yang, J. Wu, X. Yin, Y. Chen, H. Shu, L. Luo, G. Coatrieux, Z. Gui and Q. Feng – *Improving low-dose ct image using residual convolutional network* – IEEE Access, vol. 5, pp. 24 698–24 705, 2017.
- [4] M. Arbabshirani, B. Fornwalt, G. Mongelluzzo, J. Suever, B. Geise, A. Patel and G. Moore – *Advanced machine learning in action: Identification of intracranial hemorrhage on computed tomography scans of the head with clinical workflow integration*”, *npj Digital Medicine* – vol. 1, 2018.
- [5] J.-H. Lee, D.-H. Kim, S.-N. Jeong, and S.-H. Choi – *Detection and diagnosis of dental caries using a deep learning-based convolutional neural network algorithm*”, *Journal of Dentistry* – vol. 77, pp. 106–111, 2018.
- [6] Васюков А.В. – *Численное моделирование деформаций и повреждений в сложных конструкциях при действии динамической нагрузки*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, 2012
- [7] G. Tripathi, H. Anowarul, K. Agarwal, and D. K. Prasad – *Classification of micro-damage in piezoelectric ceramics using machine learning of ultrasound signals* – Sensors (Basel, Switzerland), vol. 19, no. 19, 2019.

- [8] Белоцерковский О.М. – *Численное моделирование в механике сплошных сред* – Физико-математическая литература. 1994, 442 с.
- [9] Федоренко Р.П. – *Введение в вычислительную физику* – Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994, 528 с.
- [10] Beklemysheva, K.A., Petrov, I.B. – *Damage Modeling in Hybrid Composites Subject to Low-Speed Impact* – Mathematical Models and Computer Simulations 11(3), 469–478 (2019).
- [11] Abrate, F. – *Impact on laminated composites: recent advances* – Applied Mechanics Reviews; 11(47), 517–544 (1994).
- [12] И.А. Викторov. – *Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике* – Наука, 1966.
- [13] F. Yaman, V. Yakhno, and R. Potthast – *A survey on inverse problems for applied sciences* – Mathematical Problems in Engineering, vol. 2013, 2013.
- [14] В. П. Самарский А. А. – *Численное решение обратных задач математической физики* – Издательство ЛКИ, Москва, 2009.
- [15] M. C. Piastra, A. Nüßing, J. Vorwerk, H. Bornfleth, R. Oostenveld, C. Engwer, and C. H. Wolters – *The discontinuous galerkin finite element method for solving the meg and the combined meg/eeg forward problem* – Frontiers in Neuroscience, vol. 12, p. 30, 2018.
- [16] V. Miryaha, A. Sannikov, and P. Igor – *Discontinuous galerkin method for numerical simulation of dynamic processes in solids* – Mathematical Models and Computer Simulations, vol. 7, pp. 446–455, 2015.
- [17] К. С. И. – *Обратные и некорректные задачи* – Сибирское Научное Издательство, Новосибирск, 2009.

- [18] К. Аки, П.Ричардс. – *Количественная сейсмология : теория и методы* – Мир, 1983