

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3.1.3

## **Измерение магнитного поля земли**

Б03-102

Куланов Александр

Долгопрудный, 2022 г.

- **Цель работы:** исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов: измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.
- **В работе используются:** неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника, медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

## 1 Теоретические сведения

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент  $\mathbf{m}$  тонкого витка площадью  $S$  с током  $I$  равен

$$\mathbf{m} = IS \quad (1)$$

где  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$  - вектор площади контура, образующий с направлением тока правовинтовую систему,  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали к площадке. Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению с расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь  $\mathbf{m}$  называют *элементарным*, или *точечным*. Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\mathbf{B}_{\text{дип}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad (2)$$

Во внешнем магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  на точечный магнитный диполь  $\mathbf{m}$  действует механический момент сил

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}] \quad (3)$$

При этом потенциальная энергия которой обладает диполь с постоянным  $\mathbf{m}$ , равна

$$W = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (4)$$

В *неоднородном* внешнем поле выражение для энергии постоянного диполя сохраняется. При этом кроме момента сил на диполь действует ещё и сила

$$\mathbf{F} = -\nabla W = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (5)$$

Где  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  - векторный оператор «набла» (оператор Гамильтона). В частности, проекция на ось  $x$  имеет вид

$$F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (6)$$

Таким образом из вышесказанного следует, что *свободный* магнитный диполь в неоднородном магнитном поле ориентируется вдоль силовых линий магнитного поля и втягивается в область более сильного поля, поскольку это ведёт к уменьшению энергии диполя. Выражения выше, позволяют рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$ . Когда моменты двух небольших магнитов направлены вдоль соединяющей их прямой:  $\mathbf{m}_{1,2} \parallel \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор между ними, они взаимодействуют с силой

$$F_{12} = m_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = m_1 \frac{\partial (2m_2/r^3)}{\partial r} = -\frac{6m_1 m_2}{r^4} \text{ (ед. СГС)}. \quad (7)$$

(при использовании системы СИ нужно домножить на  $\mu_0/4\pi$ ). Здесь магниты притягиваются, если их магнитные моменты сонаправлены, и отталкиваются, если направлены противоположно. Если магнитные моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой:  $\mathbf{m}_{1,2} \perp \mathbf{r}$ , то нетрудно показать, что сила их взаимодействия окажется в два раза меньшей и будет иметь противоположный знак:

$$F_{12} = \frac{3\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4} \text{ (ед. СИ)} \quad (8)$$

## 2 Экспериментальная установка

### 2.1 Неодимовые магниты

В работе используются неодимовые магниты шарообразной формы. Важно, чтобы вещество из которого они изготовлены, было *магнитожёстким* материалом и чтобы шары были намагничены однородно.

«Магнитожёсткость» материала означает, что магнитные моменты шаров в процессе работы не изменяются под действием внешних магнитных полей, т. е. шар ведет себя как постоянный («жесткий») диполь. В том числе, магнитные моменты не изменяются при контакте магнитов друг с другом.

Магнитное поле однородного намагниченного шара радиусом  $R$  может быть вычислено точно. На расстояниях  $r \geq R$  от центра шара оно совпадает с полем *точечного* магнитного диполя, расположенного в центре, магнитный момент  $\mathbf{m}$  которого совпадает с полным моментом шара. Внутри шара магнитное поле однородно. Нетрудно получить, что при  $r < R$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi R^3} \quad (9)$$

В качестве ещё одной характеристики материала магнита используют остаточную *намагниченность*  $\mathbf{M}$ . По определению, намагниченность равна *объёмной плотности магнитного момента*, поэтому для однородного намагниченного шара

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}V \quad (10)$$

где  $V = \frac{4\pi}{3}R^3$  - объём магнита. Величину  $\mathbf{B}_r = \mu_0 \mathbf{M}$  называют остаточной индукцией материала. Из сказанного выше нетрудно видеть, что индукция  $\mathbf{B}_p$  на *полюсах* однородно намагниченного шара направлена по нормали к поверхности и совпадает поэтому с индукцией внутри шара  $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_0$ . Величина  $B_p$  связана с остаточной индукцией  $B_r$  соотношением

$$B_p = B_o = \frac{2}{3}B_r \quad (11)$$

### 2.2 Определение магнитного момента магнитных шариков

**Метод А.** Величину магнитного момента  $\mathbf{m}$  двух одинаковых шариков можно рассчитать, зная их массу  $m$  и определив максимальное расстояние  $r_{max}$ , на котором они еще удерживают друг друга в поле тяжести. При максимальном расстоянии сила тяжести шариков  $mg$  равна силе их магнитного притяжения. Когда векторы двух магнитных моментов ориентированы вертикально, из (7) имеем

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{2\pi mgr_{max}^4}{3\mu_0}} \text{ (ед. СИ)}. \quad (12)$$

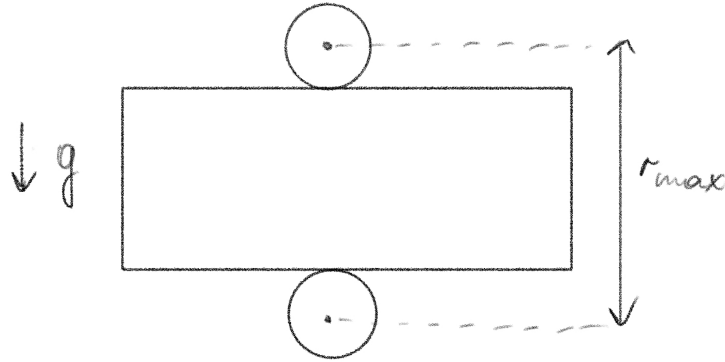


Рис. 1: Метод А

По величине  $\mathbf{m}$  с помощью (2) можно рассчитать величину индукции  $\mathbf{B}$  вблизи любой точки на поверхности шара радиуса  $R$ . Максимальная величина индукции наблюдается на полюсах.

**Метод Б.** Величину магнитного момента шариков можно определить также по силе их сцепления. Она определяется как сила, необходимая для разрыва двух сцепившихся магнитных шариков. Сила сцепления максимальна, если шары соединяются своими противоположными полюсами (магнитные моменты сонаправлены).

Максимальную силу сцепления можно определить по весу магнитной цепочки, которую способен удерживать самый верхний магнитный шарик. Если цепь состоит из одинаковых магнитных шариков, то при определённой длине она отрывается от верхнего шарика. При этом учитывая, что сила притяжения убывает как  $F \propto 1/r^4$ , где  $r$  - расстояния между центрами шаров, для расчёта прочности цепочки достаточно учитывать силу взаимодействия с 3-4 соседями. Сила сцепления двух одинаковых шаров радиусами  $R$  с магнитными моментами  $\mathbf{m}$  равна

$$F_0 = \frac{3\mu_0 \mathbf{m}^2}{32\pi R^4} \text{ (ед. СИ)}. \quad (13)$$

Тогда минимальный вес цепочки, при котором она оторвётся от верхнего шарика, равен

$$F = F_0 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \approx 1,08 F_0. \quad (14)$$

Отметим, что не обязательно составлять цепочку только из одинаковых шариков: на расстояниях, превышающих 20–30 диаметров шариков, можно подцепить любой груз. На результат это не повлияет.

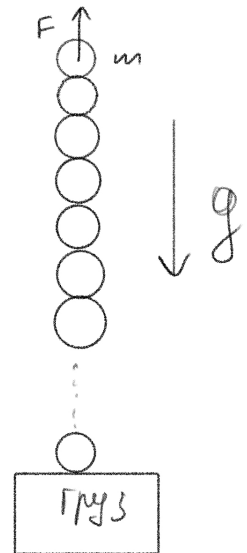


Рис. 2: Метод Б

### 3 Обработка результатов

Определим величину магнитного момента шарика по методу А. Радиус шарика  $r = 0.4 \pm 0.001$  см, расстояние между центрами при отрыве тогда  $r_{max} = 2.33 \pm 0.001$  см, масса шарика  $m = 0.834$  см, тогда

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{2\pi mgr_{max}^4}{3\mu_0}} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} \text{ (ед. СГС)} = 74.7 \pm 2 \text{ эрг/Гс} \quad (15)$$

Определим теперь величину момента по методу В. Масса системы без верхнего шарика  $m = 317,59$  г. Вес системы без верхнего шарика  $F = mg = 311236.3$  дин. Тогда имеем

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{8F_0 r^4}{3}} = \sqrt{\frac{8F r^4}{3.24}} \text{ (ед. СГС)} = 78.9 \pm 2 \text{ эрг/Гс} \quad (16)$$

Найдем индукцию на полюсах шарика:

$$B_p = B_0 = \frac{2}{3}B_r = \frac{2\mathfrak{m}}{r^3} \quad (17)$$

Для метода А:  $B_p = 5534 \pm 110$  Гс, для метода В:  $B_p = 5844 \pm 117$  Гс. Значение, полученное магнетометром равно 2140 Гс. Найдем остаточную индукцию:  $B_r = 3/2B_p = 8301 \pm 165$  Гс. Табличное значение около 11000 Гс

Определим горизонтальную составляющую магнитного поля Земли. Соберем установку с лямбда-подвесом. Результаты занесем в таблицу 1

Крутильные колебания									
5 шаров		7 шаров		9 шаров		11 шаров		13 шаров	
п	Т,с	п	Т,с	п	Т,с	п	Т,с	п	Т,с
1	1,34	1	1,52	1	1,98	1	2,28	1	4,77
2	1,24	2	1,56	2	1,76	2	2,33	2	4,58
3	1,1	3	1,64	3	1,83	3	2,32	3	4,57
4	1,16	4	1,65	4	1,94	4	2,42	4	4,71
5	1,28	5	1,63	5	1,86	5	2,16	5	4,93
6	1,2	6	1,57	6	1,84	6	2,47	6	4,63
7	1,38	7	1,67	7	2,03	7	2,53	7	4,86
8	1,32	8	1,69	8	1,85	8	1,98	8	4,57
9	1,25	9	1,55	9	1,81	9	2,45	9	4,32
10	1,24	10	1,6	10	2	10	2,45	10	4,89
11	1,25	11	1,76	11	1,78	11	2,12	11	
12	1,17	12	1,49	12	2,04	12	2,2	12	
13	1,19	13	1,46	13	1,89	13	2,5	13	
14	1,26	14	1,6	14	1,75	14	2,5	14	
15	1,27	15	1,62	15	2,1	15		15	
16	1,33	16	1,76	16	1,8	16		16	
$\langle T \rangle$	1,24	$\langle T \rangle$	1,61	$\langle T \rangle$	1,89	$\langle T \rangle$	2,33	$\langle T \rangle$	4,68

Таблица 1: Крутильные колебания

Построим график  $T(n)$ . Учтём, что последний столбец (для 13 шаров) измерен ошибочно, не будем его учитывать при аппроксимации.

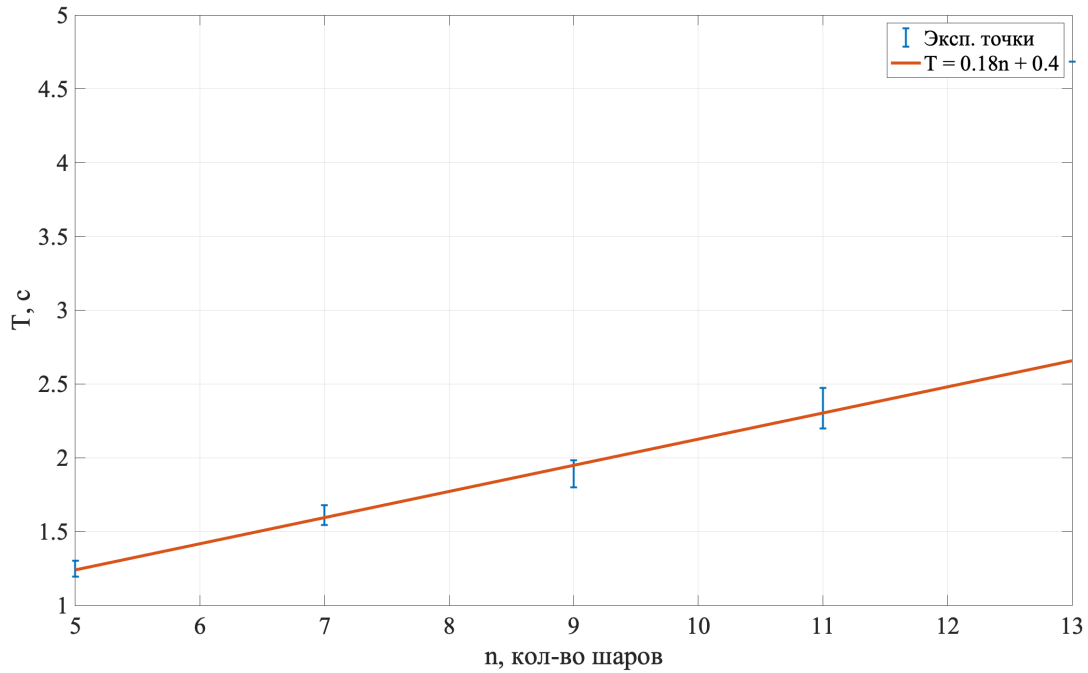


Рис. 3: Зависимость  $T(n)$

Из графика находим угловой коэфф.  $k$ , равный 0.18. Далее можем найти величину горизонтальной составляющей поля Земли:

$$B_h = \frac{4\pi^2}{k^2} \frac{mr^2}{3m} = 0.41 \pm 0.02 \text{ Гс} \quad (18)$$

Определим вертикальную составляющую магнитного поля Земли. Результаты занесем в таблицу 2, где  $m$  - масса подвеса,  $r$  - плечо:

$m$ , г	$r$ , см	$M$ , дин*см
0,19	0,6	109.4
0,153	1,2	176.2
0,116	1,8	200.5
0,178	1,2	205.4

Таблица 2: Вертикальная составляющая

Построим график  $M(n)$  (рис. 4). По графику определим угловой коэффициент. Он равен 15.6. Найдем вертикальное поле Земли:

$$B_v = \frac{k}{m} = 0.21 \text{ Гс} \quad (19)$$

Тогда полное поле равно корню из суммы квадратов:

$$B = \sqrt{B_v^2 + B_h^2} = 0.46 \pm 0.02 \text{ Гс} \quad (20)$$

Наклонение

$$\beta = \arctan(B_h/B_v) = 63 \text{ град.} \quad (21)$$

Табличное значение поля для широты Москвы равно  $\approx 0.5 \text{ Гс}$

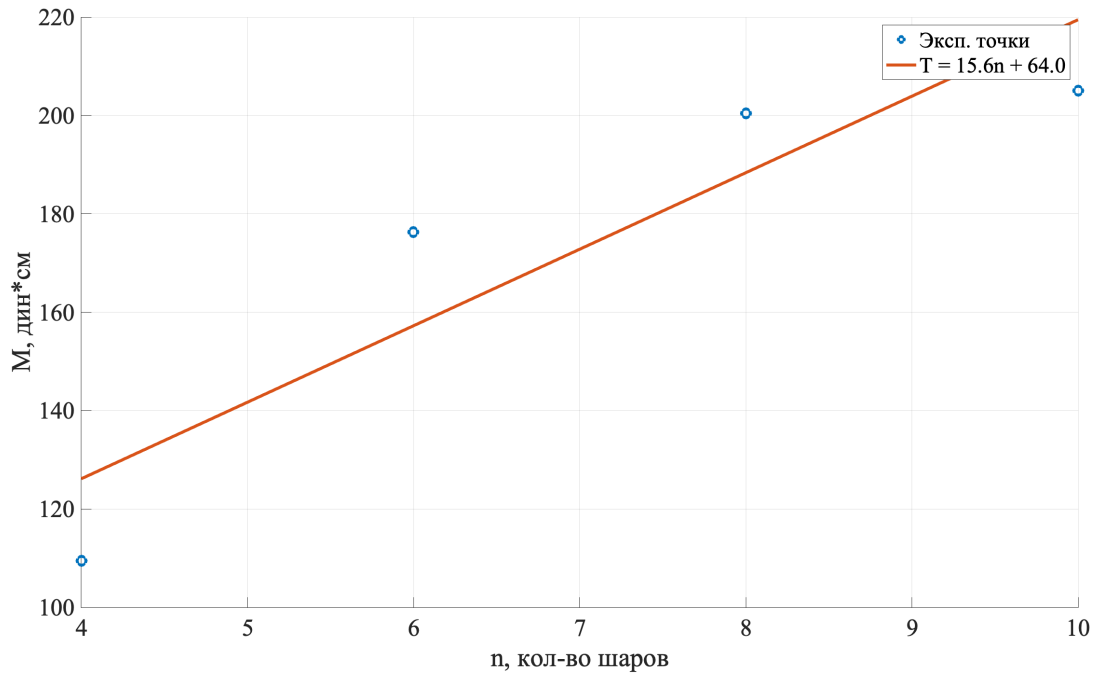


Рис. 4: Зависимость  $M(n)$

## 4 Вывод

Глядя на результаты работы, можно сказать, что теоретические данные сошлись с экспериментальными по порядку величины. Хочется отметить, что часть работы, посвященная вертикальной компоненте поля Земли, вероятно выполнена некачественно, так как зависимость данных не очень похожа на линейную. Это могло внести вклад в ошибку итоговых результатов.

## 5 Дополнительная часть

Убедимся в том, что формула для расчета поля витка справедлива:

$$B_{\text{дип}} = \frac{2\pi I R^2}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \quad (22)$$

Померяем магнетометром поле на оси цилиндрического магнита на разных расстояниях от магнита. Построим график зависимости и кубически аппроксимируем (рисунок 5). Зеленым пунктиром на графике реальная граница образца магнита. Как мы видим, даже на небольших расстояниях с хорошей точностью выполняется формула 21.

На примере соленоида убедимся, что справедлива формула:

$$B = \frac{2\pi i}{c} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (23)$$

Построим график зависимости поля от координаты:

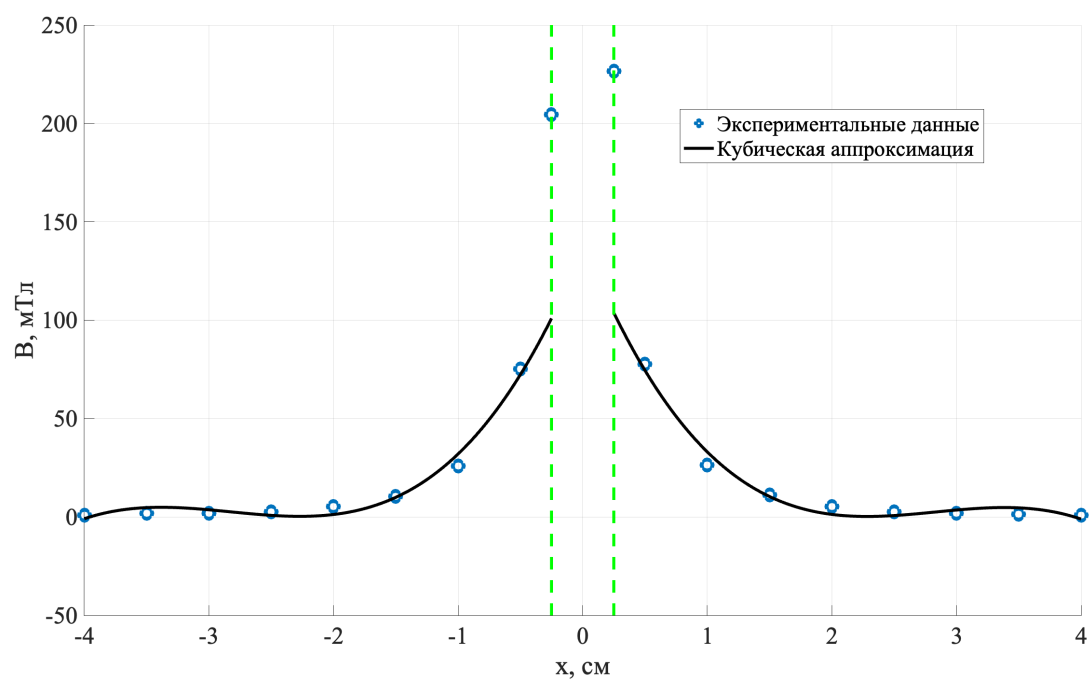


Рис. 5: Поле магнита

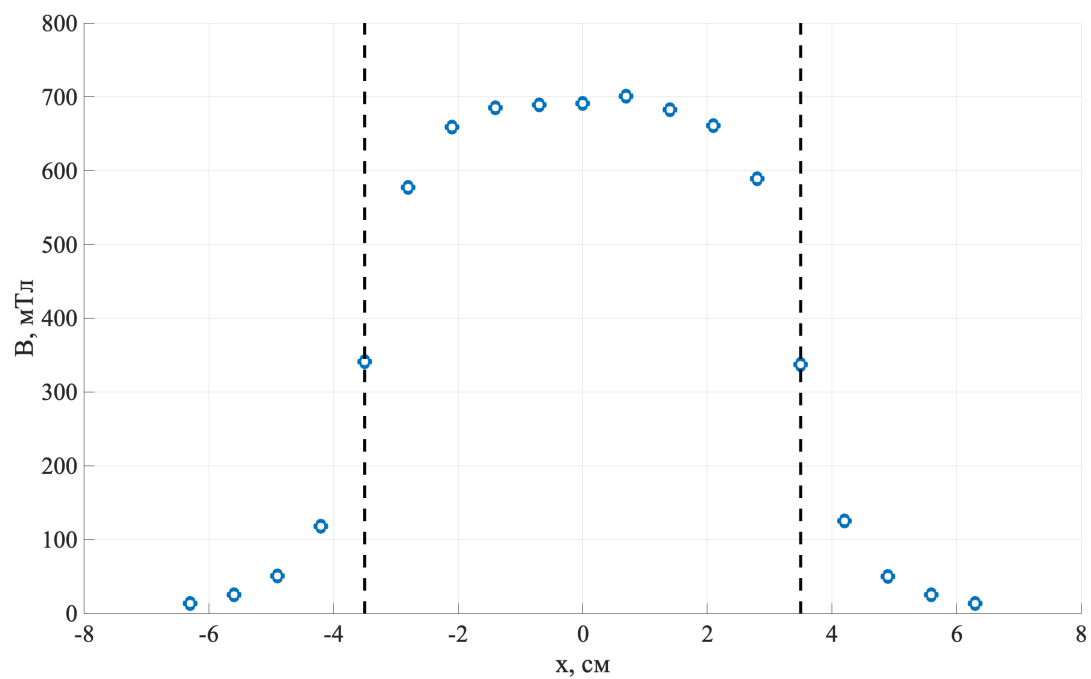


Рис. 6: Поле соленоида