

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3.7.1

## Скин-эффект в полом цилиндре

Б03-102

Куланов Александр

Долгопрудный, 2022 г.

- **Цель работы:** исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр.
- **В работе используются:** генератор звуковой частоты, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас из диэлектрика, медный экран в виде трубки, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, осциллограф.

## 1 Теоретические сведения

В работе изучается Скин-эффект в длинном тонкостенном медном цилиндре, помещенном внутрь соленоида.

Теоретически такая задача сложнее, чем рассмотренный в п. 3.1 скин-эффект в полубесконечном пространстве: здесь требуется совместное решение уравнений скин-эффекта (уравнение диффузии поля) (7.22/23) в стенке цилиндра и квазистационарных уравнений поля в его полости.

Пусть цилиндр достаточно длинный, так что в нём можно пренебречь краевыми эффектами. В этом приближении магнитное поле  $H$  всюду направлено по оси системы, а вихревое электрическое поле  $E$  будет всюду перпендикулярно радиусу, то есть линии поля образуют соосные окружности. Все величины будем считать колеблющимися по гармоническому закону с некоторой частотой  $\omega$ , задаваемой частотой колебания тока в соленоиде. Тогда для ненулевых компонент поля можно записать

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, E_\phi = E(r)e^{i\omega t}$$

где  $H(r)$  и  $E(r)$  — комплексные амплитуды колебаний соответствующих полей, зависящие только от расстояния  $r$  до оси системы. Заметим, что на границе цилиндра должны быть непрерывны касательные к поверхности компоненты  $E$  и  $H$ , поэтому функции непрерывны во всей исследуемой области.

Пусть длинный полый цилиндр имеет радиус  $a$  и толщину стенки  $h \ll a$ . Последнее условие позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться одномерным приближением. При этом для полного решения задачи необходимо вычислить и распределение поля внутри цилиндра.

Поскольку внутри цилиндра ток отсутствует, магнитное поле там является однородным (аналогично полю внутри пустого соленоида):  $H_z(r, t) = H_1 e^{i\omega t}$ , где  $H_1 = \text{const}$  — амплитуда поля на внутренней поверхности цилиндра. Для нахождения вихревого электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции в интегральной форме:

$$E_\phi \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{dH_z}{dt} \quad \rightarrow \quad E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1.$$

Отсюда получим связь амплитуд колебаний электрического и магнитного полей на внутренней границе цилиндра:

$$E_1 = -\frac{1}{2}i\omega a\mu_0 H_1 \quad (1)$$

Поле внутри тонкой стенки цилиндра («экрана») описывается уравнением скин-эффекта (7.25) (уравнением диффузии поля) в плоской геометрии (рис. 2). Поместим начало отсчёта на внешнюю поверхность цилиндра и направим ось  $x$  к оси системы, и аналогично (7.26) запишем дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды магнитного поля:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H \quad (2)$$

(для медного цилиндра можно положить  $\mu \approx 1$ ).

Граничные условия для (2) зададим в виде

$$H(0) = H_0, \quad H(h) = H_1 \quad (3)$$

Здесь  $H_0$  - амплитуда колебаний магнитного поля на внешней границе цилиндра. Её значение определяется только током в обмотке соленоида, и совпадает с полем внутри соленоида в отсутствие цилиндра. Величина  $H_1$  также поддаётся непосредственному измерению - это амплитуда колебаний однородного поля внутри цилиндра. Поля  $H_0$  и  $H_1$  не являются независимыми - они связаны через решение уравнений поля вне проводника, т. е. внутри «экрана». Эта связь выражена соотношением (1). Решение (2) ищем в виде

$$H(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad (4)$$

где  $A, B$  - определяемые из граничных условий константы,

$$\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{i\pi/4} \quad (5)$$

- один из корней уравнения (7.28),  $\delta$  - глубина скин-слоя (7.30). Заметим, что это решение немного отличается от (7.29): ранее мы использовали только один корень уравнения (7.28), однако здесь мы имеем дело уже не с полупространством, а с конечной областью в виде плоского слоя  $h$ , поэтому решение должно содержать оба корня.

Первое условие (3) даёт  $A + B = H_0$ , что позволяет исключить  $A$  из (4):

$$H(x) = H_0e^{-\alpha x} + 2B \operatorname{sh} \alpha x,$$

Выразим электрическое поле из закона Ампера (7.21), В одномерном случае

$$E(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{dH}{dx} = \frac{\alpha}{\sigma} (-H_0e^{-\alpha x} + 2B \operatorname{ch} \alpha x),$$

Далее положим  $x = h$ , воспользуемся условием (1), и, исключив константу  $B$  получим после преобразований связь между  $H_0$  и  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch} \alpha h + \frac{1}{2}\alpha a \operatorname{sh}(\alpha h)} \quad (6)$$

Рассмотрим предельные случаи (6).

1. При малых частотах толщина скин-слоя превосходит толщину цилиндра  $\delta \gg h$ . Тогда  $|\alpha h| \ll 1$ , поэтому  $\operatorname{ch} \alpha h \approx 1$ ,  $\operatorname{sh} \alpha h \approx \alpha h$  и

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{ah}{\delta^2}} \quad (7)$$

Заметим, что величина  $ah/\delta^2$  в общем случае не мала, поскольку при  $h \ll a$  возможна ситуация  $h \ll \delta \ll a$ . Отношение модулей амплитуд здесь будет равно

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}} \quad (8)$$

При этом колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол  $\psi$ , определяемый равенством  $\operatorname{tg} \psi = \frac{ah}{\delta^2}$ .

2. При достаточно больших частотах толщина скин-слоя станет меньше толщины стенки:  $\delta \ll h$ . Тогда  $|\alpha h| \gg 1$  и  $|\alpha a| \gg 1$ , а также  $\text{sh}(\alpha h) \approx \text{ch}(\alpha h) \approx \frac{1}{2}e^{\alpha h}$ . Выражение (6) с учётом (5) переходит в

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta})} \quad (9)$$

Как видно из формулы (9), в этом пределе поле внутри цилиндра по модулю в  $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-h/\delta}$  раз меньше, чем снаружи, и, кроме того, запаздывает по фазе на

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad (10)$$

## 2 Экспериментальная установка

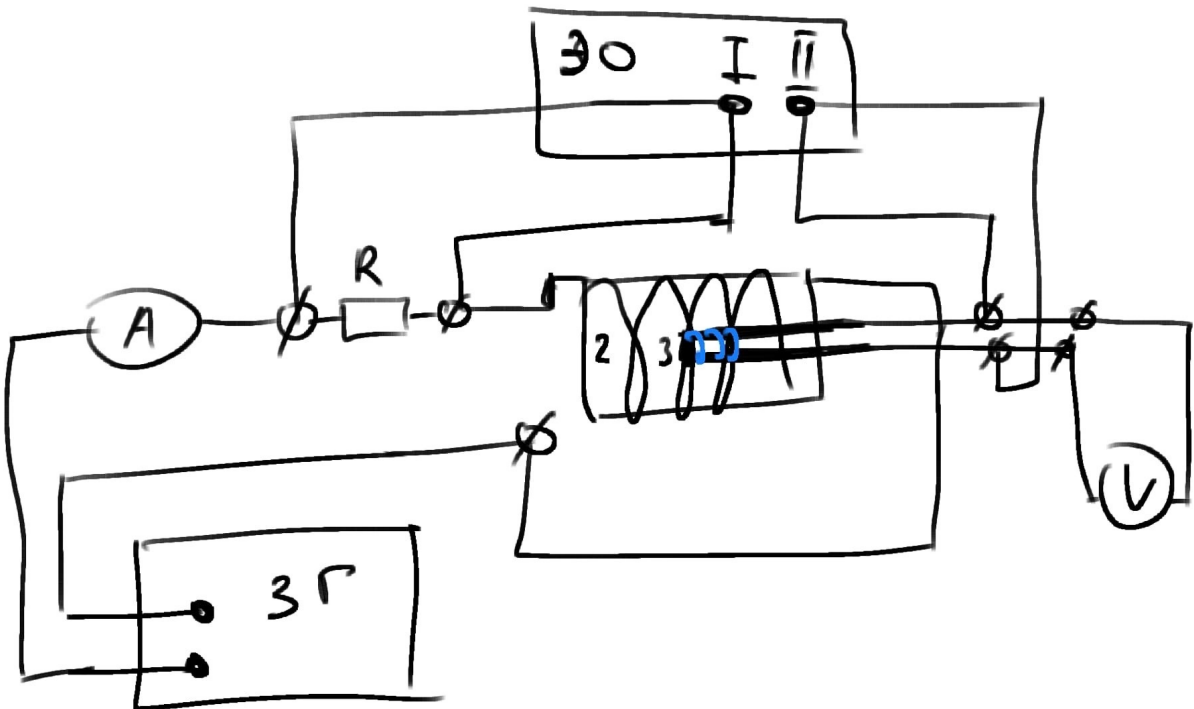


Рис. 1: Схема установки

Схема экспериментальной установки для исследования проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр изображена на рис. 1. Переменное магнитное поле создаётся с помощью соленоида, намотанного на полый цилиндрический каркас 1 из поливинилхлорида, который подключается к генератору звуковой частоты. Внутри соленоида расположен медный цилиндрический экран 2. Для измерения магнитного поля внутри экрана используется измерительная катушка 3. Необходимые параметры соленоида, экрана и измерительной катушки указаны на установке. Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется амперметром  $A$ , а действующее значение напряжения на измерительной катушке измеряет вольтметр  $V$ . Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф. На вход одного канала подаётся напряжение с резистора  $R$ , которое

пропорционально току, а на вход второго канала - напряжение с измерительной катушки. Измерение отношения амплитуд магнитного поля внутри и вне экрана. С помощью вольтметра  $V$  измеряется действующее значение ЭДС индукции, которая возникает в измерительной катушке, находящейся в переменном магнитном поле  $H_1 e^{i\omega t}$ . Комплексная амплитуда ЭДС индукции в измерительной катушке равна

$$U = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t},$$

где  $SN$  - произведение площади витка на число витков измерительной катушки. Показания вольтметра, измеряющего это напряжение:

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1|.$$

Видно, что модуль амплитуды магнитного поля внутри экрана  $|H_1|$  пропорционален  $U$  и обратно пропорционален частоте сигнала  $\nu = \omega/2\pi$  :

$$|H_1| \propto \frac{U}{\nu}.$$

При этом поле вне экрана  $|H_0|$  пропорционально току  $I$  в цепи соленоида, измеряемому амперметром  $A$  :

$$|H_0| \propto I.$$

Следовательно,

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \text{const} \cdot \frac{U}{\nu I} \quad (11)$$

Таким образом, отношение амплитуд магнитных полей снаружи и вне экрана (коэффициент ослабления) может быть измерено по отношению  $U/\nu I$  при разных частотах. Незвестная константа в соотношении (11) может быть определена по измерениям при малых частотах  $\nu \rightarrow 0$ , когда согласно (8)  $|H_1|/|H_0| \rightarrow 1$ .

### 3 Обработка результатов