

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3.6.1 (150A)

**Спектральный анализ электрических  
сигналов**

Б03-102

Куланов Александр

Долгопрудный, 2022 г.

- **Цель работы:** изучить спектры периодических электрических сигналов и сравнить их с рассчитанными теоретически
- **В работе используются:** компьютер, USB - осциллограф АКИП - 4107, функциональный генератор WaveStation 2012, соединительные кабели

## 1 Экспериментальная установка

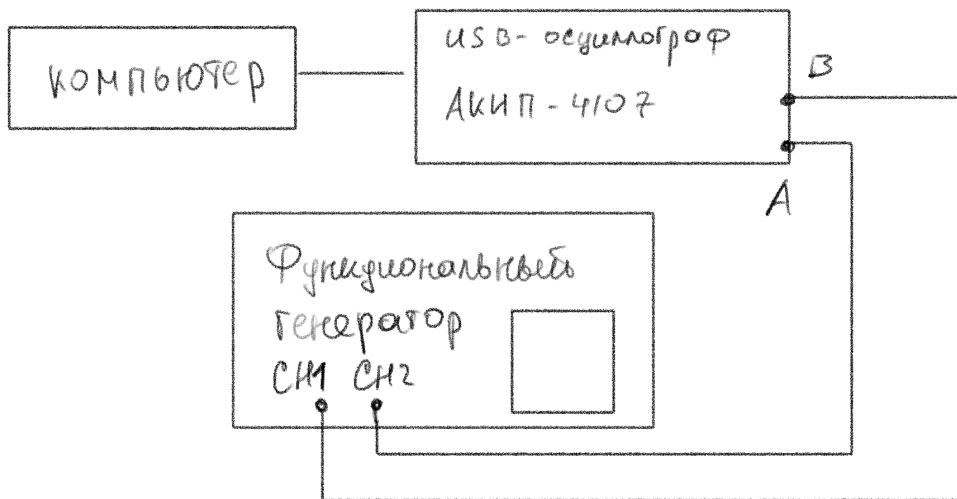


Рис. 1: Схема установки

Функциональный генератор WaveStation 2012 позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала — "CH1" и "CH2". Сигнал с канала "CH1" подается на вход "A" а сигнал с канала "CH2" — на вход "B" USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа, на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов.

При включении функционального генератора, на его экране отображается информация о параметрах электрического сигнала.

1. Кнопка включения
2. USB - разъем
3. Экран
4. Кнопки экранного меню
5. Кнопки выбора типов сигналов
6. Цифровая панель
7. Функциональные кнопки
8. Разъемы с кнопками включения (выключения) выходных сигналов

9. Кнопки перемещения

10. Подстроечный регулятор

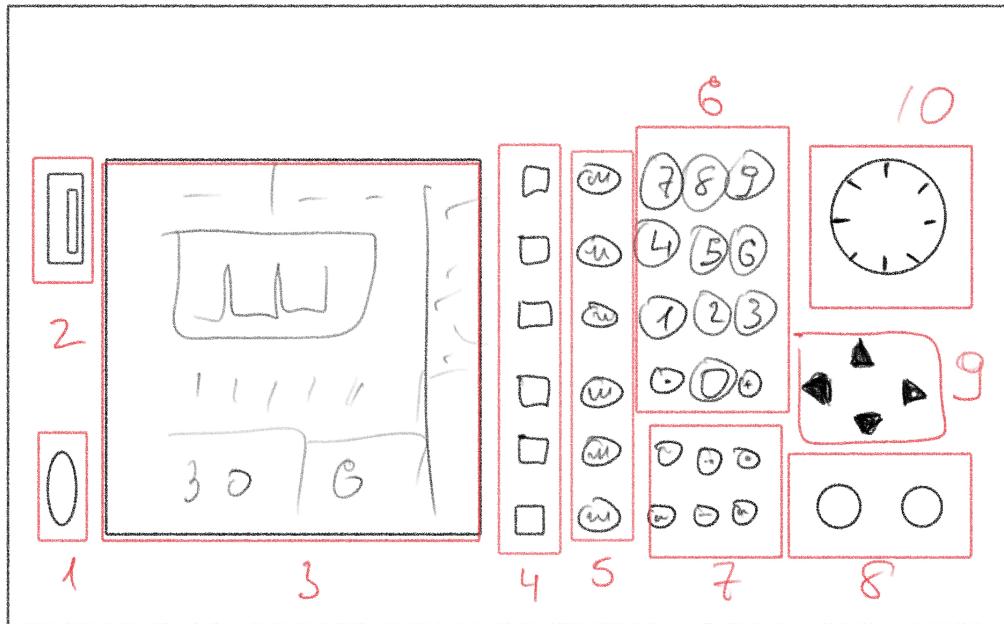


Рис. 2: Передняя панель функционального генератора

## 2 Теоретические сведения

### Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Пусть задана функция  $f(t)$ , которая периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно  $t = 0$ , в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот. Коэффициенты определяются по формуле

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt.$$

Здесь  $t_1$  — время, с которого мы начинаем отсчет. Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для  $A_n$  и  $\psi_n$ :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

### Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Введем величину:  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  — период повторения импульсов. Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

Здесь  $V_0$  — амплитуда сигнала. Поскольку наша функция четная, то  $b_n = 0$ . Пусть  $T$  кратно  $\tau$ . Тогда введем ширину спектра, равную  $\Delta\omega$  — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающей, как нетрудно убедиться при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

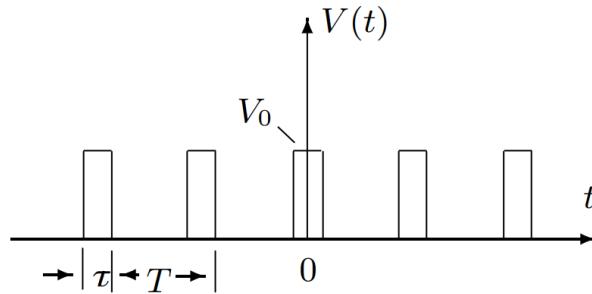


Рис. 3: Прямоугольный сигнал

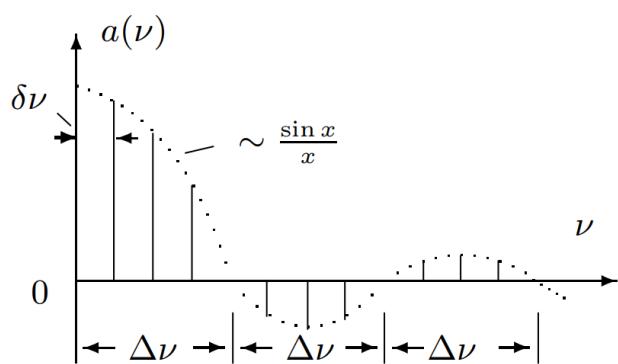


Рис. 4: Спектр прямоугольного сигнала

## Периодическая последовательность цугов

Возьмём цуги колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторений  $T$ . Функция  $f(t)$  снова является четной относительно  $t = 0$ . Коэффициент при  $n$ -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right). \quad (7)$$

Пусть  $T$  кратно  $\tau$ . Тогда спектры последовательности прямоугильных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на  $\omega_0$ .

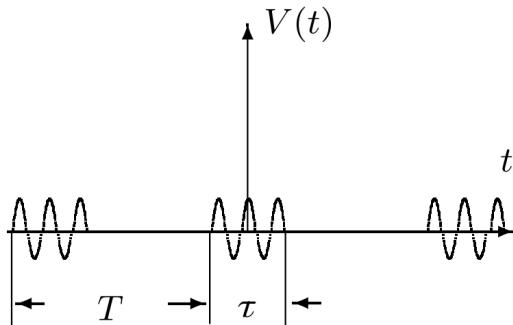


Рис. 5: Цуги

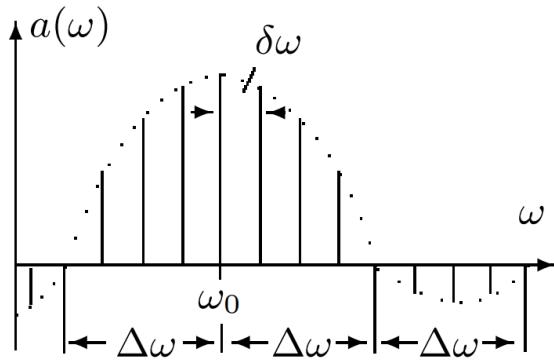


Рис. 6: Спектр цугов

## Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega \ll \omega_0$ .

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (8)$$

Коэффициент  $m$  называется *глубиной модуляции*. При  $m < 1$  амплитуда меняется от минимальной  $A_{min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \quad (9)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

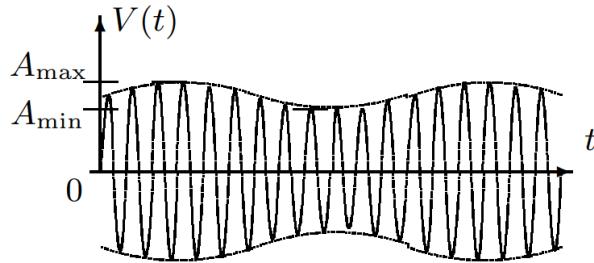


Рис. 7: Амплитудно-модулированный сигнал

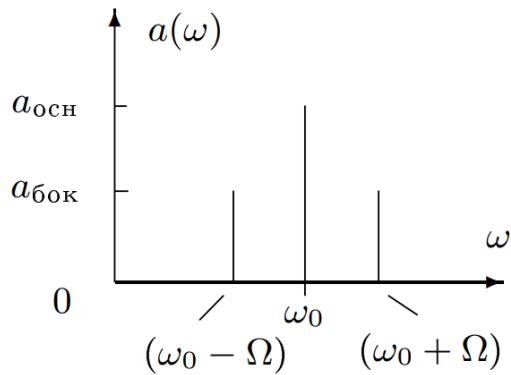


Рис. 8: Спектр амплитудно-модулированного сигнала

### 3 Обработка результатов

#### 3.1 Прямоугольный сигнал

Картины спектров прямоугольного сигнала для различных значений приведены на рисунках 10-15 приложения. При анализе картин стало ясно, что при возрастании  $\tau$  в два раза, ширина спектра уменьшается в два раза и в два раза возрастает амплитуда. Также  $\Delta\nu$  сохраняется между гармониками.

#### 3.2 Цуги

Картины спектров цугов для различных сигналов приведены на рисунках 16-19 приложения. При увеличении периода пульса в пять раз, амплитуда уменьшается в то же количество раз.

Построим график зависимости  $\Delta\nu(1/\tau)$ :

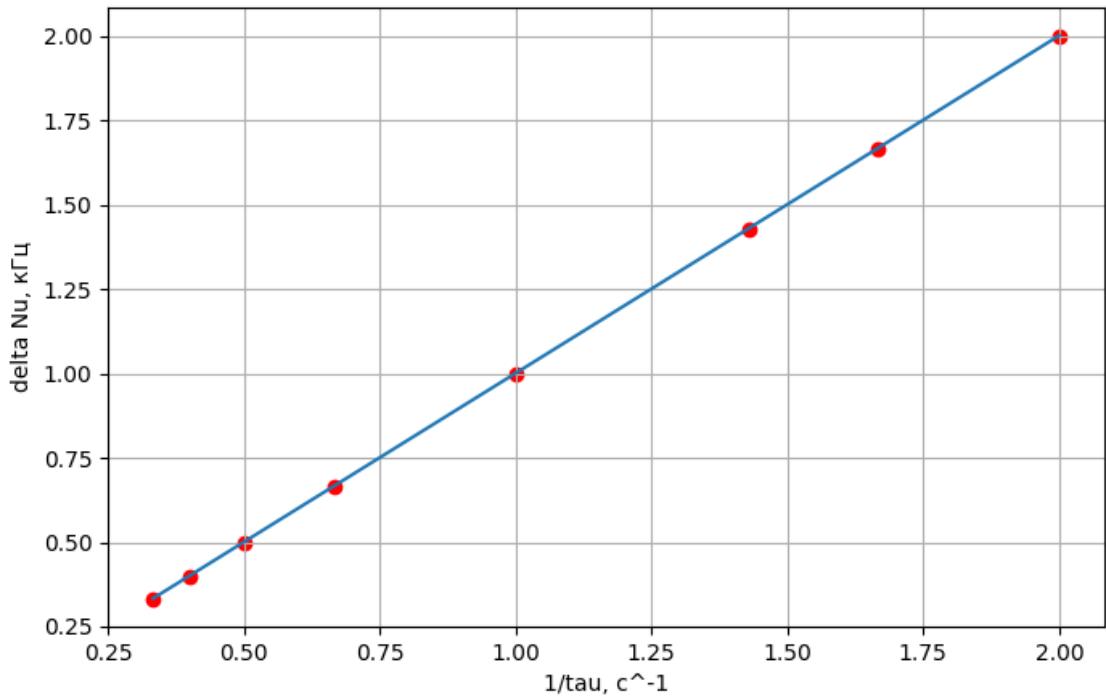


Рис. 9: Зависимость  $\Delta\nu(1/\tau)$

Как видно по графику, соотношение неопределенности хорошо выполняется.

### 3.3 Амплитудная модуляция

Выведем картину амплитудно-модулированного сигнала с глубиной модуляции 0.5, частотой 50 кГц и частотой модуляции 2 кГц (рисунок 20). Проверим соотношение (9):

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{802}{1889} = 0.43 \quad (11)$$

Из формулы 10 следует, что  $a_{\text{осн}} = A_0$ ,  $a_{\text{бок}} = mA_0/2$ . Убедимся в этом, построив график (рисунок 10). Как видно по графику, соотношение выполняется. Угол наклона прямой равен **0.96**

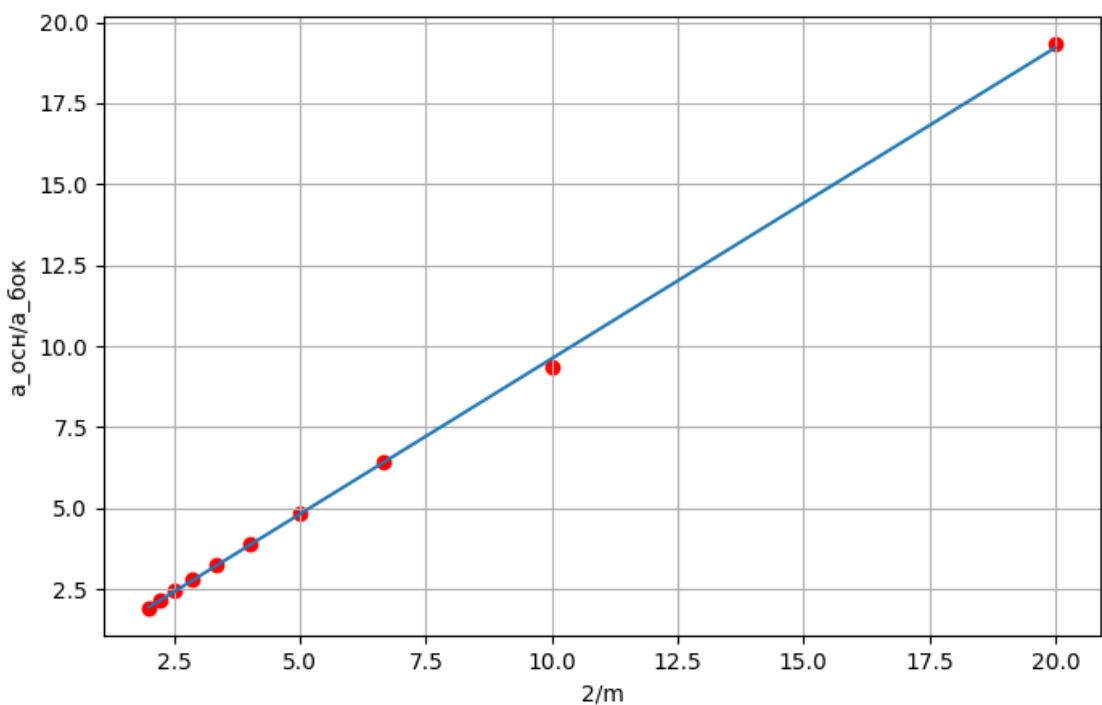


Рис. 10: К амплитудной модуляции

## 4 Вывод

Были исследованы несколько типов периодических сигналов и их разложение в гармонический спектр, получены картины спектров. Проверена справедливость нескольких соотношений, в том числе соотношения неопределенности.

## 5 Приложение

### Прямоугольный сигнал

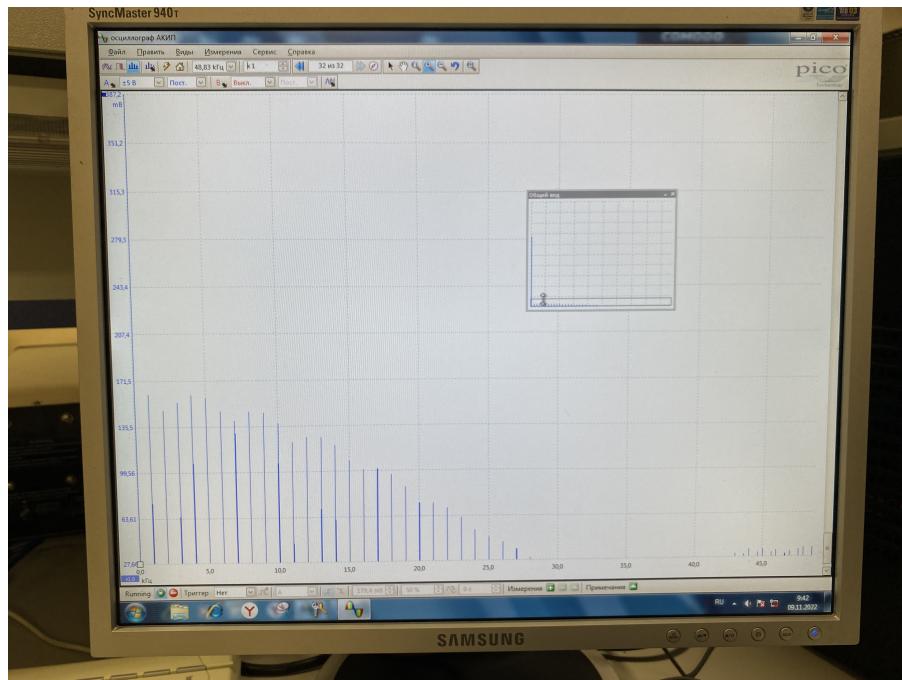


Рис. 11:  $f = 1kHz, \tau = 30\mu s$

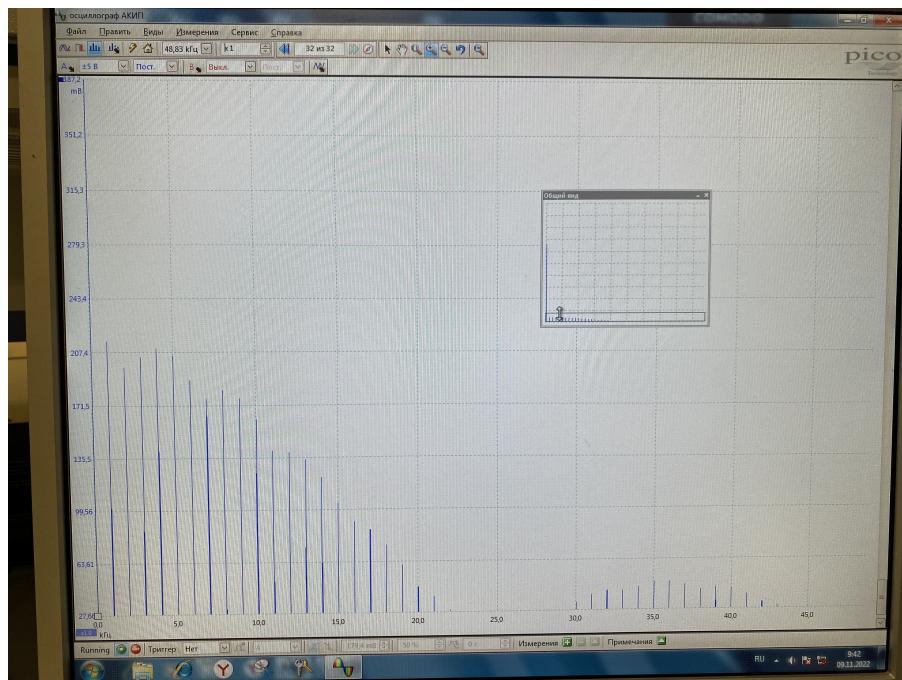


Рис. 12:  $f = 1kHz, \tau = 40\mu s$

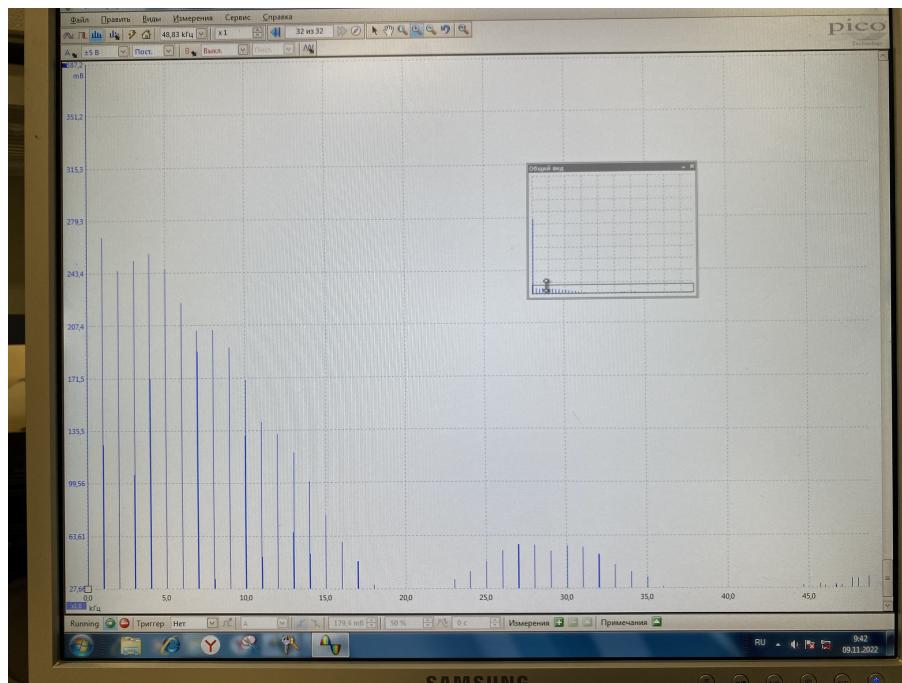


Рис. 13:  $f = 1\text{kHz}, \tau = 50\mu\text{s}$

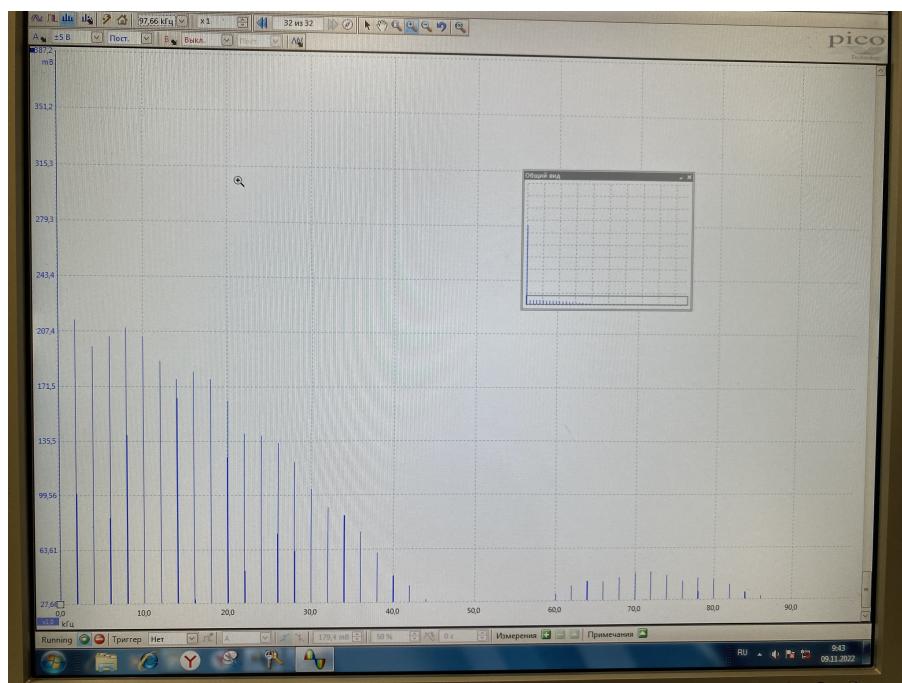


Рис. 14:  $f = 2\text{kHz}, \tau = 20\mu\text{s}$

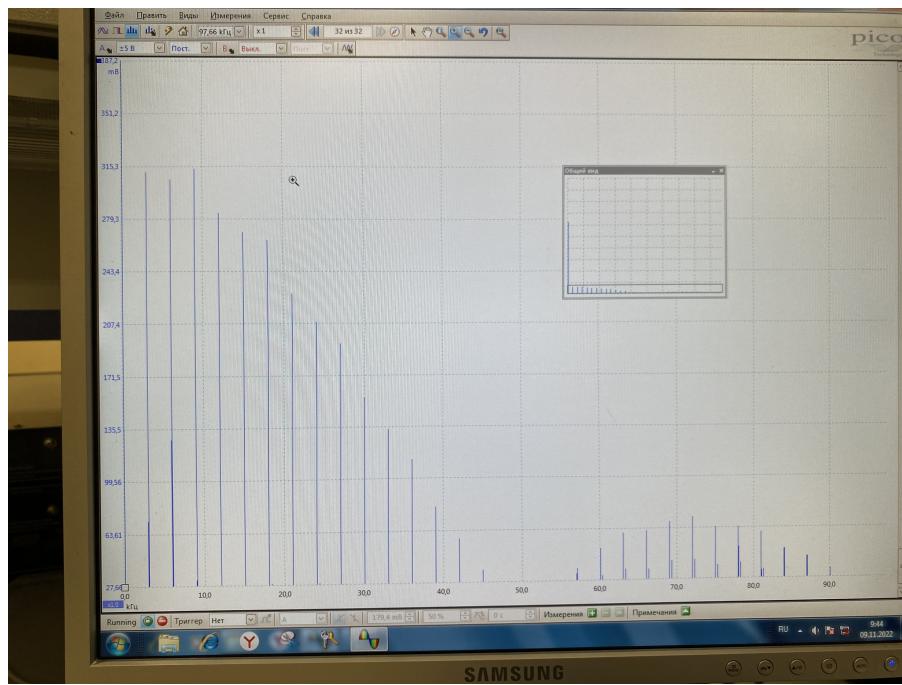


Рис. 15:  $f = 3\text{kHz}$ ,  $\tau = 20\mu\text{s}$

Цуги

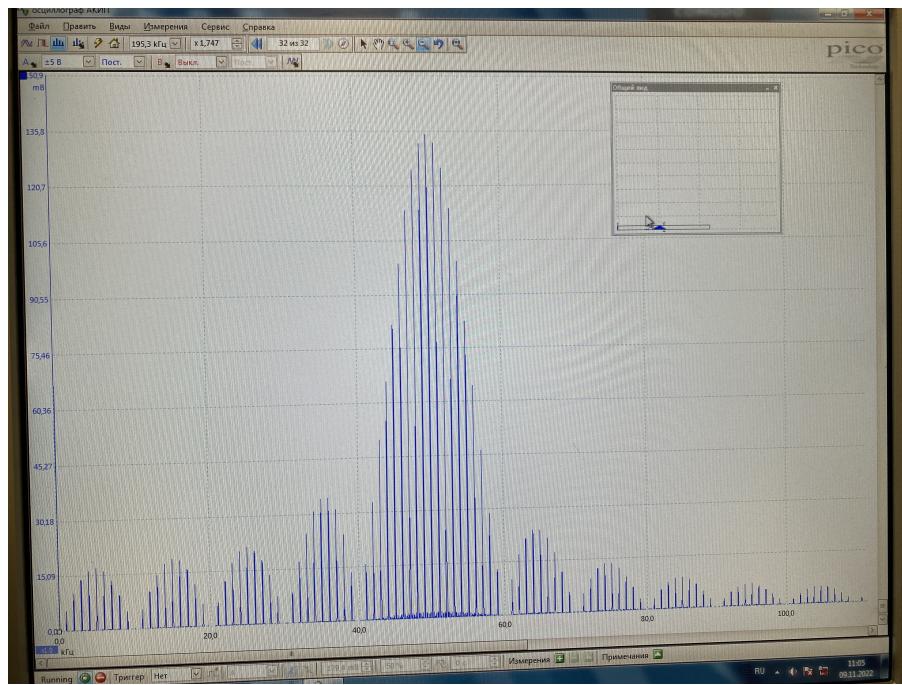


Рис. 16:  $f = 50\text{kHz}$ ,  $\tau = 1\text{ms}$ ,  $N = 5$

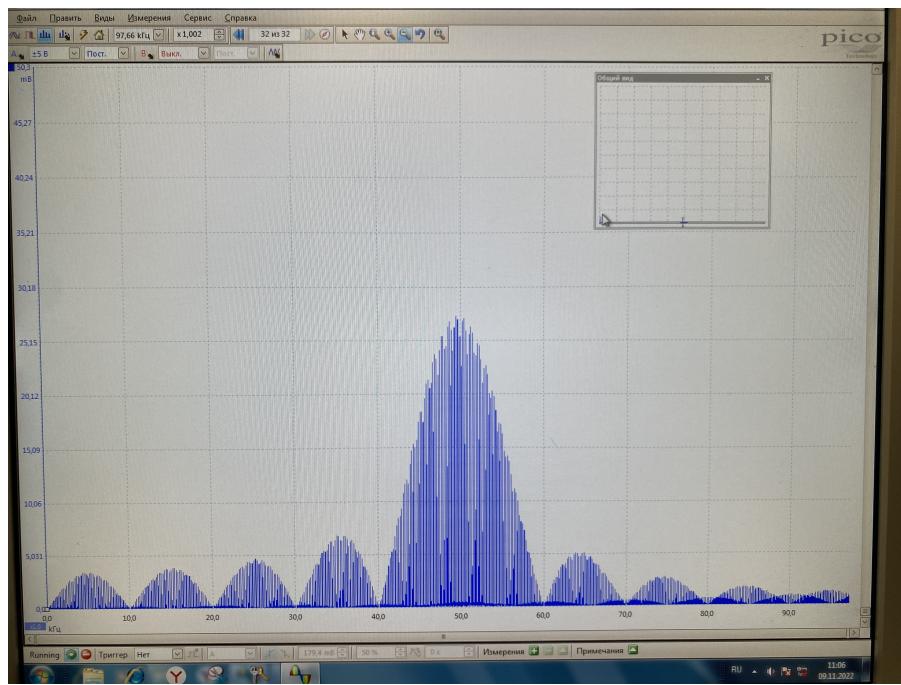


Рис. 17:  $f = 50\text{kHz}$ ,  $\tau = 5\text{ms}$ ,  $N = 5$

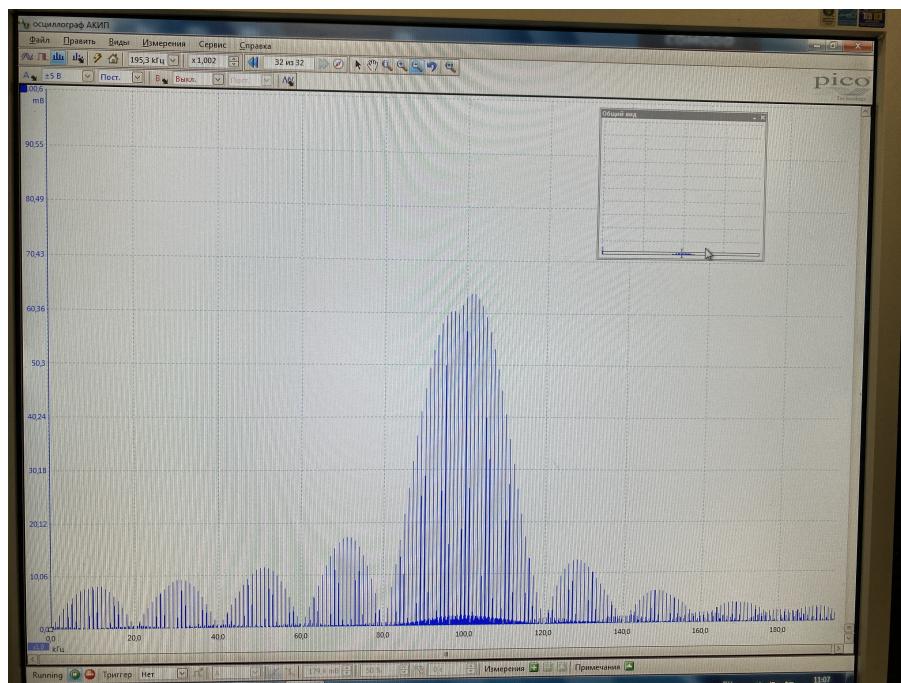


Рис. 18:  $f = 100\text{kHz}$ ,  $\tau = 1\text{ms}$ ,  $N = 5$

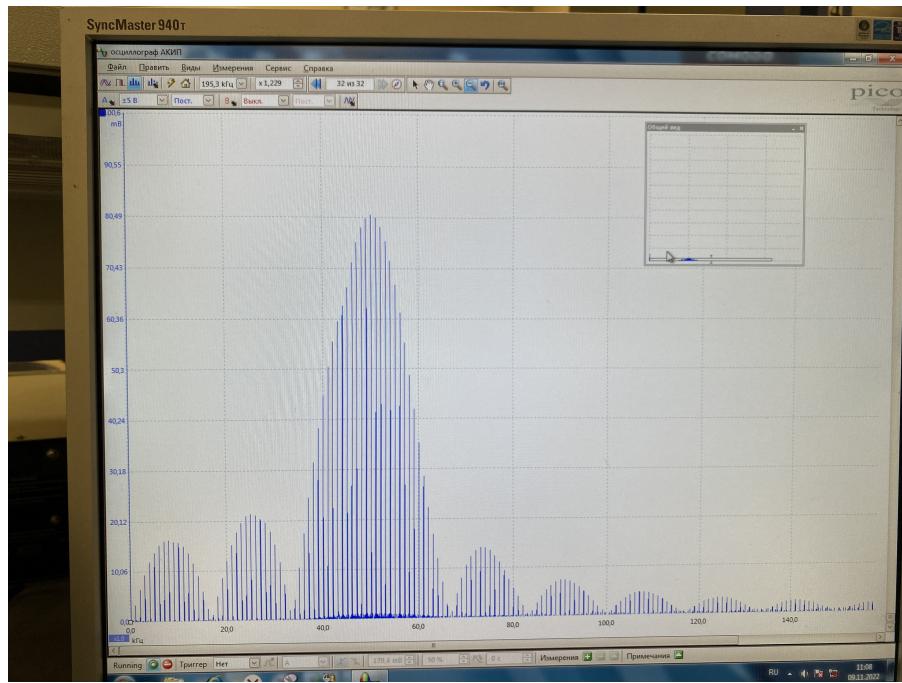


Рис. 19:  $f = 50\text{kHz}$ ,  $\tau = 1\text{ms}$ ,  $N = 3$

## Амплитудная модуляция

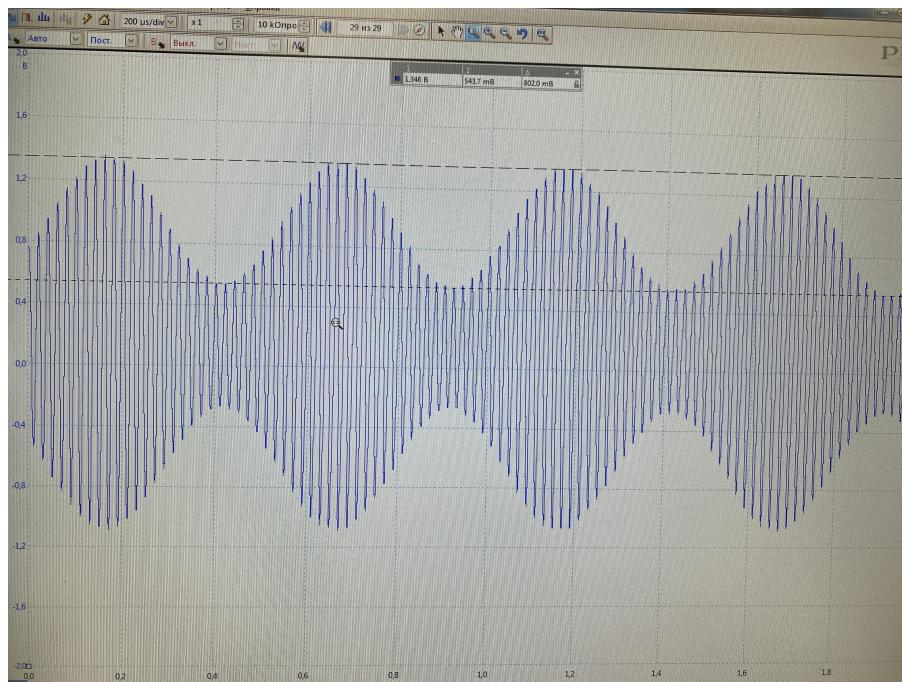


Рис. 20: Амплитудно-модулированный сигнал, глубина 0.5