通过一个例子简析傅里叶级数与傅里叶变换的关系

注：笔者由于对信号与系统了解甚少，故本文仅从数学角度进行分析，如果有误，恳请批评指正。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{jn\omega t}$$

其中，

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega t}\mathrm{d}t$$

Question

例：半波整流，在电子学中表示一个交变电压$E\sin\omega t$经整流后所得到的周期波形。在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0 & -\dfrac{\pi}{\omega}\le t<0\\ E\sin\omega t & 0\le t\le\dfrac{\pi}{\omega}\end{cases}.$$

求f复数形式的Fourier展开式.

Answer

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(t)e^{-jn\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}E\sin\omega t e^{-jn\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}E\sin\omega t(\cos n\omega t-j\sin n\omega t)\mathrm{d}t\\&=\frac{E\omega}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t\cos n\omega t\mathrm{d}t-j\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t\sin n\omega t\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{E\omega}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/\omega}\frac{\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t}{2}\mathrm{d}t-j\int_0^{\pi/\omega}\frac{\cos(1-n)\omega t-\cos(1+n)\omega t}{2}\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

接下来需要分类讨论，

当$n=1$时

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{E\omega}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/\omega}\frac{\sin 2\omega t}{2}\mathrm{d}t - j\int_0^{\pi/\omega}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{\cos 2\omega t}{4\omega}\Big|_0^{\pi/\omega} - j(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2\omega t}{4\omega})\Big|_0^{\pi/\omega}\right] \\
&= \frac{E\omega}{2\pi}\cdot(-j\frac{\pi}{2\omega}) \\
&= -j\frac{E}{4}
\end{aligned}
$$

当$n=-1$时

$$
\begin{aligned}
C_{-1} &= \frac{E\omega}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/\omega}\frac{\sin 2\omega t}{2}\mathrm{d}t - j\int_0^{\pi/\omega}\frac{\cos 2\omega t-1}{2}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{\cos 2\omega t}{4\omega}\Big|_0^{\pi/\omega} - j(\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}-\frac{t}{2})\Big|_0^{\pi/\omega}\right] \\
&= \frac{E\omega}{2\pi}\cdot(j\frac{\pi}{2\omega}) \\
&= j\frac{E}{4}
\end{aligned}
$$

当$n\neq\pm1$时

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{E\omega}{2\pi}\left(\left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{2\omega(1+n)}-\frac{\cos(1-n)\omega t}{2\omega(1-n)}\right]\Bigg|_0^{\pi/\omega} - j\left[\frac{\sin(1-n)\omega t}{2\omega(1-n)}-\frac{\sin(1+n)\omega t}{2\omega(1+n)}\right]\Bigg|_0^{\pi/\omega}\right) \\
&= \frac{E\omega}{2\pi}\cdot[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{2\omega(1+n)}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{2\omega(1-n)}] \\
&= \frac{E}{4\pi}\cdot[\frac{1-(-1)^{n-1}}{1+n}+\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-n}] \\
&= \frac{E}{2\pi}\cdot\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-n^2}
\end{aligned}
$$

此时关于n的奇偶需要分类讨论，

$$
\begin{cases}
n=2k-1 & C_n=C_{2k-1}=0(k\in(-\infty,+\infty)\text{且}k\neq0\text{或}1) \\
n=2k & C_n=C_{2k}=\dfrac{E}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1-4k^2}(k\in(-\infty,+\infty))
\end{cases}
$$

综上所述，$f(t)$的傅里叶级数展开式为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -j\frac{E}{4}e^{j\omega t}+j\frac{E}{4}e^{-j\omega t}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{E}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4k^2}e^{2k\omega tj} \\
&= -j\frac{E}{4}(\cos\omega t+j\sin\omega t)+j\frac{E}{4}(\cos\omega t-j\sin\omega t)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{E}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4k^2}e^{2k\omega tj} \\
&= \frac{E}{2}\sin\omega t+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{E}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4k^2}e^{2k\omega tj}
\end{aligned}
$$