卷积微分性质的证明

若函数f(x,t), $f_x(x,t)$ 在区间[a,b]上连续, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 在[a,b]上可导, 满足 $a \leq \varphi(x)$, $\psi(x) \leq b$, 则含参量的变限积分函数

$$egin{aligned} F(x) &= \int_{arphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t) \mathrm{d}t \ F'(x) &= rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{arphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,t) \mathrm{d}t + f(x,\psi(x)) \psi'(x) - f(x,arphi(x)) arphi'(x) \end{aligned}$$

证明: 卷积的微分

$$egin{split} rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)] &= f_1(t)*rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t) + f_1(t)f_2(0) \ &= rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t) + f_1(0)f_2(t) \end{split}$$

证明如下:

$$egin{aligned} rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)] &= rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_0^t f_1(au) f_2(t- au) \mathrm{d} au
ight] \ &= \int_0^t rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [f_1(au) f_2(t- au)] \mathrm{d} au + f_1(t) f_2(t-t) \ &= \int_0^t f_1(au) rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t- au) \mathrm{d} au + f_1(t) f_2(0) \ &= f_1(au) * rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t) + f_1(t) f_2(0) \end{aligned}$$

如果将卷积式写作 $\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$ 即可得到下面的等式,也可以使用分部积分。下面演示分部积分

$$egin{split} \int_0^t f_1(au) rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t- au) \mathrm{d} au &= \int_0^t -f_1(au) \mathrm{d}f_2(t- au) \ &= -f_1(au) f_2(t- au) igg|_0^t + \int_0^t f_2(t- au) \mathrm{d}f_1(au) \ &= -f_1(t) f_2(0) + f_1(0) f_2(t) + \int_0^t [rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_1(t- au)] f_2(au) \mathrm{d} au \end{split}$$

所以

$$f_1(t)*rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)+f_1(t)f_2(0)=rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t)+f_1(0)f_2(t)$$