卷积微分性质的证明

若函数$f(x,t)$，$f_x(x,t)$在区间$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$，$\psi(x)$在$[a,b]$上可导，满足$a \le \varphi(x), \psi(x) \le b$，则含参量的变限积分函数

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \\ F'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,t)\mathrm{d}t + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x) \end{aligned}$$

证明：卷积的微分

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] &= f_1(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t) + f_1(t) f_2(0) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_1(t) * f_2(t) + f_1(0) f_2(t) \end{aligned}$$

证明如下：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(\tau) f_2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau + f_1(t) f_2(t-t) \\ &= \int_0^t f_1(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau + f_1(t) f_2(0) \\ &= f_1(\tau) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t) + f_1(t) f_2(0) \end{aligned}$$

如果将卷积式写作$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$即可得到下面的等式，也可以使用分部积分。下面演示分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^t f_1(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau &= \int_0^t -f_1(\tau)\mathrm{d}f_2(t-\tau) \\ &= -f_1(\tau) f_2(t-\tau)\Big|_0^t + \int_0^t f_2(t-\tau)\mathrm{d}f_1(\tau) \\ &= -f_1(t) f_2(0) + f_1(0) f_2(t) + \int_0^t [\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_1(t-\tau)] f_2(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

所以

$$f_1(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t) + f_1(t) f_2(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_1(t) * f_2(t) + f_1(0) f_2(t)$$