材料力学笔记

第1章 绪论

材料力学的任务

结构物或机器均由若干**零部件**组装而成。为了力学分析，分离出来的零部件称为**构件。**
构件按几何形状可分为：**杆、板、壳、块体**四大类。
材料力学的研究对象：**杆类构件**

$$\text{杆的两个几何要素}\begin{cases}\text{轴线：各横截面形心的连线。}\\ \text{横截面：垂直于轴线的截面。}\end{cases}$$

$$\text{根据杆的轴线和横截面特点，杆可以分类为}\begin{cases}\text{直杆：轴线为直线的杆。}\\ \text{曲杆：轴线为曲线的杆。}\\ \text{等直杆：横截面形状尺寸不变的直杆。}\\ \text{变截面杆：横截面大小不等的杆。}\end{cases}$$

构件工作时受到载荷作用，会发生形状和尺寸上的改变，称为**变形。**
设计不合理或选用材料不合适，会使构件发生**过度变形或破坏**，从而**失去承载能力。**

$$\text{承载能力包括三个主要方面}\begin{cases}\text{强度：抵抗破坏(断裂或显著的永久变形)的能力。}\\ \text{刚度：抵抗变形的能力。}\\ \text{稳定性：保持原有平衡形式的能力。}\end{cases}$$

材料力学是研究杆类构件承载能力的一门科学。
材料力学的主要任务：在**安全**和**经济**前提下，对构件进行材料和截面的设计。

变形固体的概念

力学是研究力对物体作用效应的科学。
外效应：引起物体运动状态改变。
内效应：引起物体变形。
变形：构件受力后，其形状或尺寸所发生的改变。
弹性变形：卸载时能够完全恢复的变形。
塑性变形：卸载时变形部分消失，残留下来的一部分永久变形。

变形固体的基本假设

均匀性假设：物体由同一均匀材料组成，各点的力学性质相同。
连续性假设：物质毫无间隙地充满整个几何空间，物理量是连续函数。

各向同性假设：各个方向具有相同性质，力学性质不随方向而发生改变。
小变形假设：构件在外力作用下发生的变形，相对于构件尺寸而言非常小。

内力和应力

外力：作用在构件上的所有载荷和支座反力。

$$\text{外力按形式可以分为}\begin{cases}\text{集中力}\\\text{集中力偶}\\\text{分布力}\\\text{分布力偶}\end{cases}$$

$$\text{外力按性质可以分为}\begin{cases}\text{静载荷：载荷由零缓慢增加，到达某值后保持不变。}\\\text{冲击载荷：在短时间内以很大速度作用在构件上的载荷。}\\\text{交变载荷：随时间发生周期变化的载荷。}\end{cases}$$

内力：在外力作用下，构件内各质点的相应位置发生了变化，从而引起的各部分间相互作用力的改变量，又称“附加内力”。
内力随外力的增加而增加，直至构件发生破坏。
截面法是显示内力、确定内力的一种方法。（结果为合力或合力偶矩）

$$\text{截面法步骤}\begin{cases}(1)\text{一截为二}\\(2)\text{去一留一}\\(3)\text{平衡求解}\end{cases}$$

问题：电线杆为什么上细下粗?
应力：内力分布的集度。
全应力与$\mathrm{d}F$方向一致。

$$p=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$$

一般分解为正应力（垂直于截面的应力）和切应力（平行于截面的应力）。

$$\sigma=\frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}A},\tau=\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}A}$$

单位为Pa。
单元体很小，可以认为：
各个面上的应力均匀分布。
相互平行的面上应力大小和方向相同。
切应力互等定理：在单元体互相垂直的截面上，垂直于截面交线的切应力大小相等，而方向均指向或背离此交线。

$$\tau=\tau'$$

位移、变形与应变

$$\text{变形位移}\begin{cases}\text{线位移}\\\text{角位移}\end{cases}$$

$$\text{应变}\begin{cases}\text{线应变：线段相对的变形量}\epsilon_x = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\\text{角应变：直角的改变量}\gamma\end{cases}$$

胡克定律

$$\sigma = E\epsilon，\tau = G\gamma$$

E - - 弹性模量，G - - 切变模量

杆件变形的基本形式

$$\begin{cases}\text{拉伸与压缩}\\\text{扭转}\\\text{弯曲}\\\text{剪切}\end{cases}$$

第2章 轴向拉伸与压缩

概述

受力特点：外力的合力与杆的轴线重合。
变形特点：沿轴线伸长或缩短。

轴向拉压的内力、应力与强度条件

直杆横截面上的内力

截面法 设正法
轴力的符号规则：当轴力F_N的方向与轴面外法线方向一致，轴力为正，此时杆件受拉；反之则为负，杆件受压。

直杆横截面上的应力

平截面假设：变形前横截面内各点，变形后仍在同一平面内。

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

$F_N > 0$，$\sigma > 0$ 拉应力
$F_N < 0$，$\sigma < 0$ 压应力
圣维南原理：在静力等效的条件下，不同的加载方式只对加载处附近区域的应力分布有影响，而在离加载处较远的区域，其应力分布没有显著的区别。

拉压强度条件

极限应力σ^0：使材料发生破坏的最小应力。
为使构件能够正常工作，其工作应力应小于材料的极限应力。

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \le \frac{\sigma^0}{n} = [\sigma]$$

式中，n为安全因数，$[\sigma]$为许用应力。
安全因数的引入，使构件具有安全储备。

$$\text{强度条件的应用}\begin{cases}\text{强度校核} & \text{定性}\\ \text{设计截面面积} & \text{定型}\\ \text{确定许可载荷} & \text{定载}\end{cases}$$

$$\text{公式适用范围}\begin{cases}\text{截面突跳处不适用。}\\ \text{集中力作用处不适用。}\\ \text{可推广适用于微曲杆。}\end{cases}$$

拉压直杆斜截面上的应力

$$p_\alpha = \frac{F_{N\alpha}}{A_\alpha} = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha$$

式中：A为杆的横截面面积，σ为杆横截面上的正应力。将p_α分解为垂直于斜截面的正应力σ_α和平行于斜截面的切应力τ_α。

轴向拉压的变形

轴向变形

$$\Delta l = l_1 - l$$

拉压胡克定律：

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

式中：E称为材料**拉压弹性模量**（简称为**弹性模量**或**杨氏模量**），其单位为MPa或GPa，数值随材料而异，并由试验确定；EA称为杆的截面**抗拉压刚度**。

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F_N}{EA} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = E\epsilon$$

横向变形

$$\Delta b = b_1 - b$$

$$\epsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = -\mu$$

$$\epsilon' = -\mu\epsilon$$

式中，μ称为泊松比（或横向变形系数）。

刚度条件

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \leq [\Delta l]$$

式中，$[\Delta l]$称为许可变形。
一般认为该条件自然满足。
点的位移向杆做投影为杆的变形量。

材料拉压的力学性质

拉压超静定问题

静定结构：所有未知力均能由静力平衡方程确定的结构。
超静定结构或静不定结构：仅仅通过平衡方程不能求得所有未知力的结构。
多余约束：维持平衡所不需要的约束。
超静定次数：未知力数与独立平衡方程数的差。
补充方程往往是几何方程，或称变形协调方程。
（解除多余约束，以约束反力替代。）

超静定结构特点

$$\text{求解内力}\begin{cases}\text{平衡方程}\\\text{几何方程}\\\text{物理方程}\end{cases}$$

内力与刚度有关，刚度越大，内力越大；若刚度增加，内力增加。
变形状态可以任意假设（设正法）。
装配误差、温度变化会使超静定结构产生内力，进而产生应力，称为装配应力、温度应力。

> **Tip**
>
> 切线替代圆弧。

第3章 扭转

$$
特征\begin{cases}构件多为圆截面等直杆\\外力偶的矢量方向与杆轴线平行\\横截面之间绕杆轴线产生相对角位移\end{cases}
$$

- 扭转角：横截面之间的相对角位移。
- 轴：以扭转变形为主的杆件。
  外力偶矩：转矩M_e
  功率单位为千瓦，转速为$n(rad/min)$则

$$M_e = 9549\frac{P}{n}(N\cdot m)$$

  内力偶矩：扭矩T
- 符号规则：按右手螺旋法则，扭矩T的矢量方向与横截面外法线方向一致时为正。反之，则为负。

圆轴扭转的应力

- 平截面假设：圆杆的横截面变形后仍保持为平面。
  几何条件

$$\gamma \mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi R$$

$$\gamma_\rho \mathrm{d}x = \rho \mathrm{d}\varphi$$

  物理条件

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

  平衡条件

$$\mathrm{d}T = \tau_\rho \mathrm{d}A \times \rho$$

$$
\begin{aligned}
T &= \int \mathrm{d}T = \int_A \tau_\rho \mathrm{d}A \times \rho \\
&= \int_A G \times \rho^2 \times \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \times \mathrm{d}A \\
&= G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_A \rho^2 \mathrm{d}A \\
&= G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} I_p
\end{aligned}
$$

  单位长度扭转角

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{GI_p}$$

$$\tau_\rho = \frac{T}{I_p}\rho$$

极惯性矩

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_\rho 2\pi\rho^3 \mathrm{d}\rho$$

当ρ等于横截面半径R时（即圆截面边缘各点），切应力将达到最大值，即

$$\tau_{max} = \frac{TR}{I_p} = \frac{T}{W_p}$$

式中：W_p称为抗扭截面系数

$$W_p = \frac{I_p}{R}$$

设圆轴内、外径分别为d、D，计算

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi\rho^3 \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$$

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

其中，$\alpha = d/D$。I_p的量纲是长度的四次方，W_p的量纲是长度的三次方。

圆轴扭转的强度条件

- 扭转强度条件

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \le [\tau] = \frac{\tau^0}{n}$$

$$\text{应用}\begin{cases}\text{校核强度} & \text{定性}\\ \text{设计截面} & \text{定形}\\ \text{确定许可载荷} & \text{定载}\end{cases}$$

$$\text{适用条件}\begin{cases}\text{适用于圆截面直杆}\\ \text{变截面杆截面突跳处不适用}\\ \text{材料处在线弹性范围内}\end{cases}$$

圆轴扭转的变形和刚度条件

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{GI_p}$$

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \int_l \frac{T}{GI_p}\mathrm{d}x$$

单位为弧度，式中GI_p为抗扭刚度。
两端作用力偶的等直轴

$$\varphi=\frac{Tl}{GI_p}(rad)，\ \varphi=\frac{Tl}{GI_p}\times\frac{180^\circ}{\pi}(^\circ)$$

单位长度扭转角

$$\Phi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{GI_p}\times\frac{180^\circ}{\pi}(^\circ/m)$$

刚度条件

$$\Phi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{GI_p}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\le[\Phi]$$

$$\text{许用单位长度扭转角}[\Phi]\begin{cases}0.25-0.5^\circ/m & \text{精密轴}\\ 0.50-1.0^\circ/m & \text{一般轴}\\ 1.0-3.0^\circ/m & \text{粗糙轴}\end{cases}$$

> **Caution**
>
> 对于受扭构件，强度条件和刚度条件同等重要。

第4章 弯曲内力

概述

- 受力特点：力偶或外力作用垂直于轴线。
- 变形特点：杆件的轴线由直线变为曲线。
  以弯曲为主要变形的杆称之为梁。

  $$\text{支座形式}\begin{cases}\text{固定铰支座}\\ \text{活动铰支座}\\ \text{固定端}\end{cases}$$

  静定梁：支座反力可以由静力平衡方程直接确定的梁。

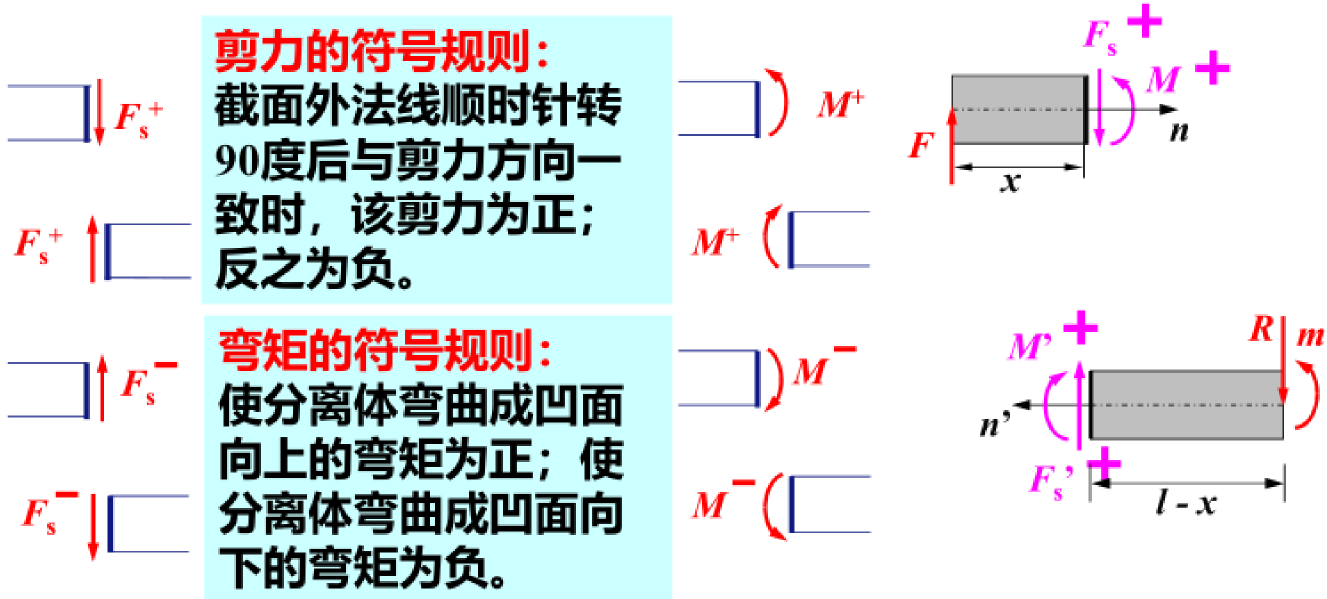
  $$\text{静定梁形式}\begin{cases}\text{简支梁：一端固定铰支座、另一端可动铰支座的梁。}\\ \text{外伸梁：具有一个或两个外伸部分的简支梁。}\\ \text{悬臂梁：一端固定、另一端自由的梁。}\end{cases}$$

  超静定梁：梁上的支反力数目超过平衡方程个数，仅靠平衡方程不能求解。

梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

内力F_s称为剪力，内力偶矩M称为弯矩。

- 剪力符号规则：剪力与外法线顺时针向旋转90°方向相同时为正，反之为负。
- 弯矩符号规则：使分离体弯曲成凹面向上的弯矩为正，反之为负。



力区：能用一个方程来表达内力的变化规律的区间。

$$
\text{规律}\begin{cases}\text{剪力图突跳处对应集中力}\\ \text{剪力图斜率对应均布力大小}\\ \text{弯矩图斜率对应剪力图中剪力大小}\\ \text{弯矩图突跳处对应集中力偶}\end{cases}
$$

弯矩、剪力与载荷之间的微分 - 积分关系

微分关系

$$
\frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x} = q(x)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = F_s(x)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x} = q(x)
$$

- 几何意义：剪力图某处的斜率等于该处分布力的大小；弯矩图某处的斜率等于该处剪力的大小；剪力为零处的弯矩有极值。

积分关系

$$
\int_{F_{s1}}^{F_{s2}} \mathrm{d}F_s(x) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)\mathrm{d}x
$$

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathrm{d}M(x) = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x)\mathrm{d}x$$

- 几何意义：任意两截面的剪力差等于两截面间分布力所包围的面积；任意两截面的弯矩差等于两截面间剪力图所包围的面积。

突跳关系

$$F_s^R(x) = F + F_s^L(x)$$

$$M^R(x) = M + M^L(x)$$

- 几何意义：集中力作用处剪力图突跳该力的大小，突跳方向与集中力的方向一致；集中力偶作用处的弯矩图突跳该力偶的大小，且顺时针力偶向上突跳。

常见载荷下剪力图、弯矩图的特征

	无载荷	均布力(–)	均布力(+)	集中力(+)	集中力偶(顺)
载荷	A B x	q A B x	q A B x	F A A^L A^R dx	m A A^L A^R dx
F_s图	水平线 斜率为0 $F_s^A = F_s^B$	下斜直线 斜率为-q $F_s^A - qx = F_s^B$	上斜直线 斜率为q $F_s^A + qx = F_s^B$	突跳 F 正F向上突跳 $F_s^{AL} + F = F_s^{AR}$	无变化 连续 $F_s^{AL} = F_s^{AR}$
M图	斜直线 斜率为F_s^A $M^A + F_s^A x = M^B$	上凸抛物线 极值在$F_s=0$处 $M^A + S(F_s) = M^B$	下凸抛物线 极值在$F_s=0$处 $M^A + S(F_s) = M^B$	有拐点 连续 $M^{AL} = M^{AR}$	突跳 m 顺m向上突跳 $M^{AL} + m = M^{AR}$

对称结构

- 对称结构受反对称载荷时，剪力图正对称，弯矩图反对称。
- 对称结构受正对称载荷时，剪力图反对称，弯矩图正对称。
- 反对称轴通过的截面弯矩为零，正对称轴通过的截面剪力为零。

刚架与曲杆的弯曲内力

- 轴线为平面折线或平面曲线的杆件称为平面刚架和平面曲杆，简称为刚架和曲杆。
- 若载荷也作用于该平面，刚架和曲杆中的内力有：弯矩M、剪力F_s和轴力F_N。
- 刚架和曲杆内力的符号规则：
  M：凹面向外为正；
  F_s：截面外法线方向顺时针转90度后一致为正；
  F_N：截面外法线方向一致为正。

第5章 弯曲应力

概述

- 研究范围：平面弯曲下的直梁
- 平面弯曲：梁的横截面具有纵向对称轴，所有对称轴组成纵向对称平面，外载荷作用在纵向对称平面内，梁的轴线在纵向对称平面内弯曲成一条平面曲线。
- 剪切弯曲：既有弯矩又有剪力，同时发生弯曲变形和剪切变形。
- 纯弯曲：只有弯矩没有剪力，只发生弯曲变形。

弯曲正应力

平截面假设：横截面在弯曲变形后仍然保持平面。

$$\text{推理}\begin{cases}\text{横截面上无切应力}\\\text{横截面上存在正应力}\\\text{既不伸长也不缩短的那一层称为中性层}\end{cases}$$

- 中性轴：中性层与横截面的交线。

$$\epsilon=\frac{(\rho+y)\mathrm{d}\theta-\rho\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta}=\frac{y}{\rho}$$

$$\sigma=E\epsilon=E\frac{y}{\rho}$$

  横截面上的微内力组成一个与横截面垂直的空间平行力系，此力系可等效为三个内力分量
- 平行于x轴的合力

$$F=\int_A\sigma\mathrm{d}A=0$$

  中性轴z通过截面形心。
- 对y轴的合力偶矩

$$m_y=\int_A z\sigma\mathrm{d}A=0$$

  yz轴为形心主惯轴。

- 对z轴的合力偶矩

$$m_z = \int_A y\sigma \mathrm{d}A = M$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y$$

- 适用条件：

1. 在线弹性范围；
2. 拉伸区与压缩区的E相等；
3. 梁发生的是平面弯曲；
4. 剪切弯曲可推广使用。

弯曲正应力强度计算

最大应力

$$\sigma_{max}^{+} = \frac{M}{I_z} y_{max}^{+} = \frac{M}{W_z^{+}}$$

$$\sigma_{max}^{-} = \frac{M}{I_z} y_{max}^{-} = \frac{M}{W_z^{-}}$$

其中，W_z^{+}、W_z^{-}为抗弯截面模量。

弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{max}^{+} = \frac{M}{W_z^{+}} \leq [\sigma^{+}]$$

$$\sigma_{max}^{-} = \frac{M}{W_z^{-}} \leq [\sigma^{-}]$$

梁弯曲正应力强度的计算步骤

1. 梁的外力分析，确定约束力；
2. 梁的内力分析，作弯矩图，确定危险截面；
3. 在危险截面上确定危险点，确定拉伸区和压缩区，确定抗弯截面模量；
4. 确定危险点的正应力，代入正应力强度条件里进行检验。

- 弯矩图画在受压一侧。
- 最大拉压应力应校核最大正弯矩和最大负弯矩。

弯曲切应力及其强度条件

- 翘曲：剪切弯曲时，横截面不再保持为平面，而发生翘曲。

矩形截面梁的切应力

- 假设所有的τ都平行于y。
- 假设同一高度y处τ相等。

$$\mathrm{d}F_s' = \tau' b\mathrm{d}x = \tau b\mathrm{d}x$$

$$F_{N2} = \int_{A^*} \sigma \mathrm{d}A = \int_{A^*} \frac{M + \mathrm{d}M}{I_z} y^* \mathrm{d}A = \frac{M + \mathrm{d}M}{I_z} S_z^*$$

$$F_{N1} = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{N2} - F_{N1} = \mathrm{d}F_s'$$

$$\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \frac{S_z^*}{bI_z}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_s$$

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{bI_z}$$

对于矩形横截面

$$\tau = \frac{6F_s}{bh^3}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

$$\tau_{max} = \frac{3F_s}{2bh}$$

其它常用截面梁的弯曲切应力

工字型截面

- 腹板上：

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{dI_z}$$

  沿高度按平坦抛物线分布。
- 翼缘上：分布较复杂，一般较小，可忽略。

$$\tau_{max} = \frac{F_s S_{zmax}^*}{dI_z} = \frac{F_s}{d(I_z/S_{zmax}^*)} = \frac{F_s}{A'}$$

$$A' = d(h - 2t)$$

式中，d、A'分别为腹板宽度与面积。

圆截面梁

- AB两点：切应力方向与圆周相切。
- AB弦上各点：切应力的垂直分量τ_y都相等，作用线相交于p点。
- AB弦中点：切应力的方向沿铅垂。

$$\tau_y = \frac{F_s S_z^*}{b_{AB} I_z}$$

- 最大切应力在中性轴上。

$$S_{zmax}^* = \frac{2R^3}{3}$$

$$\tau = \frac{4F_s}{3A}$$

薄壁圆环截面梁

- 切应力沿壁厚均匀分布。
- 任意一点的切应力方向与圆周相切。

$$\tau_y = \frac{F_s S_z^*}{2tI_z}$$

- 最大切应力在中性轴上。

$$S_{zmax}^* = \frac{2(R+t/2)^3}{3} - \frac{2(R-t/2)^3}{3} = 2R^2 t$$

$$I_z = \frac{\pi(R+t/2)^4}{4} - \frac{\pi(R-t/2)^4}{4} = \pi R^3 t$$

$$\tau_{max} = \frac{F_s}{\pi R t} = 2\frac{F_s}{A}$$

$$A = 2\pi R t$$

切应力强度条件

- 一般细长梁受弯曲变形，只校核正应力强度条件，切应力可以忽略。

- 其他受弯曲变形的构件，一般采用正应力强度条件进行设计，再采用切应力强度条件进行校核。
- 少数特殊的梁，需要先采用切应力强度条件进行设计，再采用正应力强度条件进行校核。
  不能忽略切应力的梁，如：

1. 木梁、焊接梁、粘接梁；
2. 粗短梁；
3. 有较大集中力作用在支座附近。

提高弯曲强度的措施

- 等强度梁：梁所有截面上的最大正应力均相等，都等于许用应力$[\sigma]$。
- 如：阶梯轴、钻床横臂、空心鱼腹浆、吊兰叶

> **Note**
>
> 弯矩产生正应力，剪力产生切应力。

第6章 弯曲变形

概述

- 挠度：截面形心的竖向线位移，用ν表示；
- 转角：横截面绕中性轴转过的角度，用θ表示。
- $$\theta = \tan\theta = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}x} = \nu'(x)$$
- 纯弯曲正应力公式推导时得：

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\nu''}{(1+\nu'^2)^{3/2}} = \nu''$$

$$\nu''(x) = \theta'(x) = \frac{M(x)}{EI_z} = \frac{1}{\rho(x)}$$

- 公式的适用条件：

1. 材料在线弹性范围内；
2. 小变形；

3. 忽略剪力对挠度的影响。

直接积分法

$$EI_z\theta(x) = \int M(x)\mathrm{d}x + C$$

$$EI_z\nu(x) = \iint M(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x + Cx + D$$

查表叠加法

- 变形是载荷的线性函数。
- 叠加法：当梁上有多个载荷同时作用时，总的变形等于每个载荷单独作用时变形之和。

逐段刚化法

- 可用于变截面梁和刚架。

微段积分法

等效载荷法

构造载荷法

正对称 + 反对称

梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施

$$\nu_{max} \leq [\nu]$$

许用挠度

$$\theta_{max} \leq [\theta]$$

许用转角

变形比较法求解超静定梁

1. 接触约束
2. 几何方程
3. 物理方程
4. 补充方程
5. 解得
   解除哪点的约束，就在哪点列几何方程。

外伸梁 = 简支梁 + 悬臂梁（逐段刚化法）

第7章 应力状态分析

应力状态的概念

- 应力状态：通过同一点不同方位截面上的应力的集合，称为该点的应力状态。
- 单元体：应力可以用无限小正六面体表示，称为单元体。
- 单元体很小，可以认为：

1. 各个面上的应力均匀分布。
2. 相互平行的平面上，应力大小和性质完全相同。

- $$\text{应力状态的分类}\begin{cases}\text{单向应力状态：某两对面上的应力为零}\\ \text{平面应力状态：某一对面上的应力为零}\\ \text{三向应力状态：各对面上的应力均不为零}\end{cases}$$

二向应力状态分析 - 公式解析法

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha$$

最大和最小正应力

$$\alpha_0=\frac{1}{2}\arctan\frac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\sigma_{max}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_x^2}$$

$$\sigma_{min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_x^2}$$

此时，$\tau_{\alpha 0}=0$。

最大和最小切应力

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\arctan\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_x}$$

$$\tau_{max}=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_x^2}$$

$$\tau_{min} = -\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x^2}$$

极值切应力平面与极值正应力平面

$$\alpha_1 = \alpha_0 \pm 45^\circ$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} + \sigma_\alpha = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = -\tau_\alpha$$

- 主应力：极值正应力。
- 主平面：主应力所在截面，此平面上的切应力必为零。
- 主单元体：单元体的三对面均为主平面。

二向应力状态分析 - 图解解析法

- 应力圆：
  圆心C

$$C(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$$

  半径

$$R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x^2}$$

- 画应力圆的步骤：

1. 根据三个已知应力的大小，建立$\sigma - \tau$坐标系；
2. 在$\sigma - \tau$坐标系中，确定x、y面所对应的两点D_x、D_y；（找相互垂直的面）
3. 连接两点D_x、D_y，交横轴得圆心C点；
4. 以C点为圆心，以CD_x为半径画圆，即为应力圆。

- 从D_x（或D_y）点出发，根据单元体α角的转向，沿圆周转动2α圆心角，得到D_α点，该点的坐标即为α截面上的应力。
- 应力圆与单元体的关系：点面对应，转向一致，转角加倍。
- 极值正应力的截面上，切应力一定为零；极值切应力的截面上，正应力不一定为零，且两正应力大小相等，符号一致。
- 极值切应力的作用面与主平面间的夹角是45°。
- 互相垂直的截面上，切应力等值反向，正应力之和为常数。

典型的三向应力状态

- $$\text{应力状态的分类}\begin{cases}\text{单向应力状态：非零主应力的个数为1}\\\text{平面应力状态：非零主应力的个数为2}\\\text{三向应力状态：非零主应力的个数为3}\end{cases}$$
- 第一主应力≥第二主应力≥第三主应力

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

- 以斜截面上应力为坐标的点，必位于两个小圆之外，大圆之内。
- 关于x和y轴对称就是纯剪切应力状态。

广义胡克定律

- 胡克定律

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

- 泊松比：横向应变与纵向应变的比值（取正）
- 广义胡克定律（主单元体）

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

对于非主单元体，在小变形的前提下，切应力不影响单元体棱边的长度变化。

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha\pm 90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y$$

- 体积应变

$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_m = \frac{\sigma_m}{K}$$

式中，K为体积弹性模量。
证明纯剪切应力状态下单元体的体积不变

Seealso

拉剪应力状态（设正法）

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2} - \tau$$

$$\sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma}{2} + \tau$$

第8章 强度理论

$$\text{宏观破坏现象}\begin{cases}\text{塑性屈服(认为已经破坏)} & \text{切应力}\\ \text{脆性断裂(脆性材料)} & \text{拉应力}\end{cases}$$

- 对于金属材料，切应力导致晶格滑移，拉应力导致晶格断裂。（微观）

第一强度理论（最大拉应力理论）

- 材料发生脆性断裂的主要原因是最大拉应力。
- 在复杂应力状态下，只要最大拉应力σ_1达到了简单拉伸试验所确定的极限应力σ_b时，材料就会发生脆性断裂。
- 断裂判据

$$\sigma_1 = \sigma_b$$

- 强度条件

$$\sigma_1 \leq \frac{\sigma_b}{n} = [\sigma]$$

- 无法应用于只有压应力的情况。

第二强度理论（最大拉应变理论）

- 材料发生脆性断裂的主要原因是最大拉应变。
- 在复杂应力状态下，只要最大拉应变ϵ_1达到了简单拉伸试验所确定的极限应变ϵ_b时，材料就会发生脆性断裂。
- 断裂判据

$$\epsilon_1 = \epsilon_b$$

- 强度条件

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \frac{\sigma_b}{n} = [\sigma]$$

第三强度理论（最大切应力理论）

- 材料发生塑性屈服的主要原因是最大切应力。

- 在复杂应力状态下，只要最大切应力τ_{max}达到了简单拉伸试验所确定的极限切应力τ_s时，材料就会发生塑性屈服。
- 屈服判据

$$\tau_{max} = \tau_s$$

- 强度条件

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_s}{n} = [\sigma]$$

第四强度理论（均方根切应力理论）

- 材料发生塑性屈服的主要原因是均方根切应力。
- 在复杂应力状态下，只要均方根切应力τ_m达到了简单拉伸试验所确定的极限均方根切应力τ_m^0时，材料就会发生塑性屈服。
- 屈服判据

$$\tau_m = \tau_m^0$$

- 强度条件

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq \frac{\sigma_s}{n} = [\sigma]$$

强度理论的应用

相当应力

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

拉剪应力状态

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2}$$

压力容器

- 圆筒轴向应力

$$\sigma_x = \frac{pD}{4t}$$

环向应力

$$\sigma_t = \frac{pD}{2t}$$

第9章 组合变形

- 组合变形：杆件中同时有两种以上的基本变形。
- 求解方法：叠加法
- 研究对象：细长杆（剪力所产生的切应力可忽略）
- 步骤

1. 组合变形作外力分析，分解简化为基本变形。
2. 通过内力分析确定危险截面。
3. 通过应力分析确定危险点。
4. 通过应力状态分析确定主应力。
5. 根据强度理论确定相当应力。
6. 强度计算。

- $$\text{分类}\begin{cases}\text{斜弯曲(两个相互垂直平面内的弯曲组合)}\\ \text{拉伸或压缩与弯曲的组合}\\ \text{拉伸或压缩与扭转的组合}\\ \text{弯曲与扭转的组合}\\ \text{其他组合}\end{cases}$$

斜弯曲

- 单向应力状态，正应力

矩形截面

- 中性轴与载荷作用平面不互相垂直，最大应力在距离中性轴最远的点。
- 挠曲线与载荷作用平面不共面，但挠曲线平面与中性层仍然相互垂直。

圆截面

- $\alpha = \beta = \varphi$

- 可以简化为平面弯曲。
- 合成外力/合成内力

拉压与弯曲

- 单向应力状态，正应力
- 拉伸 + 弯曲（向压缩区移动）
- 压缩 + 弯曲（向拉伸区移动）

偏心拉压

- 向轴线上转移

弯曲与扭转

- 二向应力状态，正应力与切应力
- 圆截面的弯扭组合变形

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + T^2}}{W_z}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + 0.75T^2}}{W_z}$$

第10章 能量法计算位移

外力功与变形能

- 外力功：载荷在其相应位移上作的功。
- 变形能：不计能量损失，外力功将以能量的形式储存于弹性体中，称为弹性变形能。
- 功能原理：外力功全部转化为杆件的变形能

$$U = W$$

- 研究对象为线弹性系统，材料需符合胡克定律，载荷与变形、应力与应变均为线性关系。

轴向拉伸或压缩

$$U = W = \frac{1}{2}F_N\Delta l$$

若杆的轴力和截面不变化

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

若杆的轴力和截面变化

$$U=\int_l \frac{F_N^2(x)\mathrm{d}x}{2EA(x)}$$

扭转

$$U=W=\frac{1}{2}T\varphi$$

$$U=\frac{T^2 l}{2GI_p}$$

$$U=\int_l \frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_p(x)}$$

弯曲

$$U=W=\frac{1}{2}M\theta$$

$$U=\frac{M^2 l}{2EI}$$

$$U=\int_l \frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI(x)}$$

广义力与广义位移

广义力	广义位移
集中力	力作用点沿力方向的线位移
集中力偶	力偶作用面沿力偶方向的转角
一对等值反向的集中力	两力作用点的相对位移
一对等值反向的力偶	两力偶作用面的相对转角

变形能的基本性质

1. 变形能只与构件受力和变形的最终状态有关，与加载顺序无关。
2. 引起同一种基本变形的数个载荷在杆内所产生的变形能，不等于各个载荷分别作用所产生变形能的叠加。（不满足叠加原理）（多一项附加功）
3. 当杆内有两种或两种以上的基本变形时，总变形能等于各个基本变形的变形能之和。

功能原理

局限于只作用一个广义力，且所求位移为该广义力所对应的广义位移的简单情况。

单位载荷法

$$\Delta_i=\int_l\frac{M(x)M^0(x)\mathrm{d}x}{EI}+\int_l\frac{F_N(x)+F_N^0(x)\mathrm{d}x}{EA}+\int_l\frac{T(x)+T^0(x)\mathrm{d}x}{GI_p}$$

式中，$M(x)$为原载荷产生的弯矩，$M^0(x)$为构造单位载荷产生的弯矩。

- 求什么加什么载荷。

图形互乘法

- $$\Delta=\int_l\frac{M(x)M^0(x)}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}(kS_M+a\omega_M)=\frac{1}{EI}(k\omega_Mx_C+a\omega_M)=\frac{\omega_M}{EI}M_C^0$$

  式中，S_M为静矩，ω_M为面积，M_C^0为弯矩图的形心对应M^0图中的弯矩。

1. 适用于等截面直杆、桁架或刚架，曲杆不适用。
2. 原载荷弯矩图尽可能简单。
3. 多个载荷时可采用叠加法。
4. 两个弯矩图应采用相同的符号规则。
5. 特别注意弯矩图的正负。

互等定理

$$F_1\Delta_{12}=F_2\Delta_{21}$$

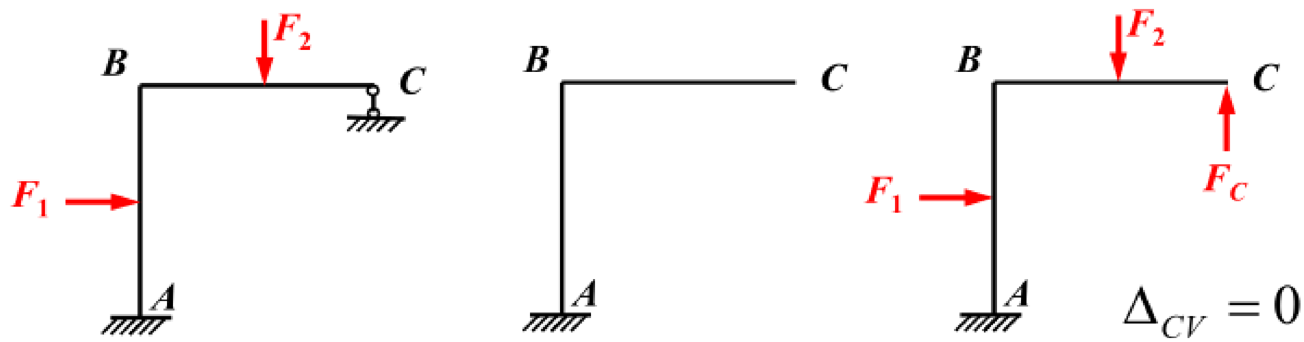
位移互等定理

$$\Delta_{12}=\Delta_{21}(F_1=F_2\text{时})$$

第11章 超静定系统

静定基与相当系统

- 静定基：解除多余约束后，得到的静定基本系统。
- 相当系统：在静定基上施加原载荷和多余约束力（未知），考虑变形协调条件，得到与原超静定结构完全等效的静定系统。



静定基　　相当系统

1. 静定基或相当系统不是唯一的。
2. 静定基解除的约束必须是多余的。

$$
\text{分类}\begin{cases}\text{外力超静定}\\ \text{内力超静定}\\ \text{混合超静定}\end{cases}
$$

超静定次数的判断

- 超静定次数 = 未知力的个数 - 独立平衡方程数
- 外力超静定 = 约束力个数 - 独立平衡方程数
- 内力超静定：桁架（b个杆，c个节点）$n = b - 2c + 3$
  刚架：一个封闭刚架为三次超静定；增加一个铰链，减少一次超静定；增加一个铰接杆，增加一次超静定。

力法正则方程

- 以多余约束力作为未知量，通过变形协调条件建立补充方程，求解超静定问题的方法，称为力法。
- $$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta_{1F}\\ \Delta_{2F}\\ \vdots\\ \Delta_{nF}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \vdots\\ \Delta_n\end{bmatrix}$$
- 根据位移互等定理知$[\delta]$为对称矩阵。

1. 判断超静定类型、超静定次数。
2. 解除多余约束，代之以多余约束力F_{Xi}，建立静定基和相当系统。
3. 用广义单位力替代各多余约束力F_{Xi}，将原载荷、广义单位力均单独作用在静定基上。
4. 考虑变形协调条件（在解除约束处），建立正则方程。

5. 利用能量法计算正则方程中的系数δ_{ij}和Δ_{iF}。
6. 联立正则方程求解，求出各多余约束力F_{Xi}。
7. 在相当系统上，求出其他约束，进而可以求出内力并作内力图，求解强度（应力）和刚度（变形）问题。

结构的对称性及其利用

- 对称结构承受正对称载荷时的特性

1. 变形、内力、约束力均正对称
2. 轴力图、弯矩图正对称，剪力图反对称
3. 在对称轴通过的截面上，剪力F_s为零，而弯矩M，轴力F_N均不为零
4. 在对称轴通过的截面上，垂直于对称轴的线位移为零，转角为零，沿着对称轴的线位移不为零
5. 故超静定结构沿其对称轴将结构切开，可将超静定问题的阶数降低一阶

- 对称结构承受反对称载荷时的特性

1. 变形、内力、约束力均反对称
2. 轴力图、弯矩图反对称，剪力图正对称
3. 在对称轴通过的截面上，弯矩M，轴力F_N均为零，而剪力F_s不为零
4. 在对称轴通过的截面上，沿着对称轴的线位移为零，垂直于对称轴的线位移不为零，转角不为零
5. 故超静定结构沿其对称轴将结构切开，可将超静定问题的阶数降低两阶

第12章 动载荷

概述

- 静载荷：载荷由零缓慢增加，到达某值后保持不变。
- 动载荷：引起构件加速度的载荷或冲击载荷。
- 动变形和动应力：在动载荷下产生的变形和应力。
- 惯性力问题：已知加速度
- 冲击问题：未知加速度（能量守恒）
- 疲劳问题：持续变化的载荷作用
- 振动问题：（不涉及）
- 基本假设：

1. 动载荷作用下应力应变仍保持线性关系。
2. 能量守恒。

惯性力问题

直线加速

静内力

$$F_N = Q$$

静应力

$$\sigma_{st} = \frac{F_N}{A} = \frac{Q}{A}$$

静变形

$$\Delta_{st} = \frac{F_N l}{EA} = \frac{Ql}{EA}$$

动内力

$$F_{Nd} = Q + ma = (1 + a/g)Q = K_d F_N$$

动应力

$$\sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = (1 + \frac{a}{g})\frac{Q}{A} = K_d \sigma_{st}$$

动变形

$$\Delta_d = \frac{F_{Nd} l}{EA} = \frac{(1 + a/g)Ql}{EA} = K_d \Delta_{st}$$

式中，$K_d = 1 + a/g$为动荷因数。

匀角速转动

离心惯性力

$$\mathrm{d}F_d = \mathrm{d}m \cdot a_n = \frac{A\gamma \mathrm{d}s}{g} \cdot \frac{D\omega^2}{2}$$

离心惯性力集度

$$q_d = \frac{\mathrm{d}F_d}{\mathrm{d}s} = \frac{A\gamma D\omega^2}{2g}$$

动内力

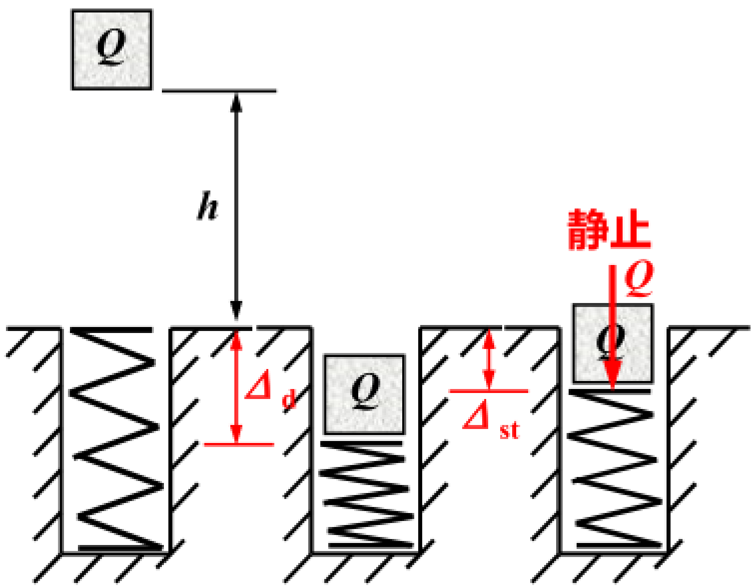
$$F_{Nd} = \frac{q_d D}{2} = \frac{A\gamma D^2\omega^2}{4g}$$

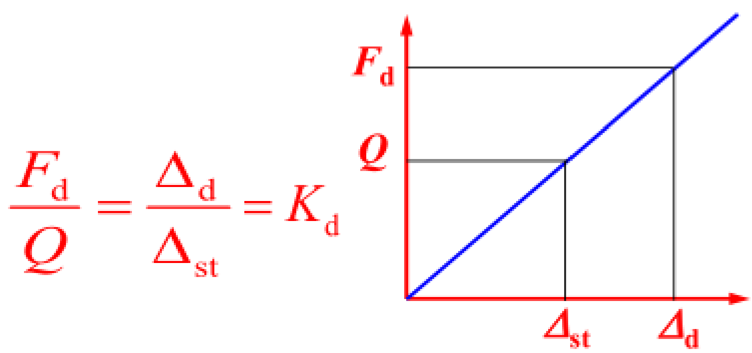
动应力

$$\sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = \frac{\gamma D^2 \omega^2}{4g} = \frac{\gamma v^2}{g}$$

- 轮缘横截面上的应力与轮缘轴线上各点的线速度v及材料比重有关，与横截面面积无关。
- 为了保证轮缘的强度，对轮缘的转速应有一定的限制，增加横截面面积并不能提高飞轮的强度。

冲击应力与变形





- 冲击：运动物体与静止物体之间的相互作用。
- 运动的物体称为冲击物，静止的物体称为被冲击物。
- 冲击物给被冲击物作用一个惯性力，当冲击物的速度减为零时，该惯性力达到最大F_d，被冲击物的变形Δ_d也达到最大，被冲击物处在最危险状态。
- 简化假设

1. 冲击过程中，被冲击物的变形始终处于线弹性范围之内。
2. 冲击物为刚性，冲击时冲击物的变形及变形能不计。
3. 支撑被冲击物的支座和基础不变形，不运动，也不吸收能量。
4. 冲击物的质量远远大于被冲击物的质量，被冲击物的势能变化忽略不计。

5. 冲击过程其它的能量损失不计。

自由落体冲击

$$\Delta T + \Delta V = \Delta U$$

冲击物动能与势能的减少量之和等于被冲击物变形能增加量

$$\Delta T = 0$$

$$\Delta V = Q(h + \Delta_d) = Q(h + K_d \Delta_{st})$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} F_d \Delta_d = \frac{1}{2} K_d^2 Q \Delta_{st}$$

解得

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

- 公式适用于任何自由落体线性系统。
- 整个系统只有一个动荷因数，动荷因数只通过冲击点的静变形计算得到。
- 若还有初速度v_0

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0 + T_0}{U_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2gh + v_0^2}{g\Delta_{st}}}$$

- 若只有初速度v_0

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\Delta_{st}}}$$

- 若$h >> \Delta_{st}$

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

水平冲击

$$\Delta T = \frac{Q}{2g} v^2$$

$$\Delta V = 0$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} P_d \Delta_d = \frac{1}{2} K_d^2 Q \Delta_{st}$$

$$K_d = \frac{v}{\sqrt{g\Delta_{st}}}$$

- 适用于任何水平冲击线性系统。

冲击载荷下的强度条件

$$(\sigma_d)_{max} = K_d(\sigma_{st})_{max} \leq [\sigma]$$

$$(\tau_d)_{max} = K_d(\tau_{st})_{max} \leq [\tau]$$

- 只适用于承受冲击载荷作用的光滑构件。

冲击载荷下的刚度条件

$$(\Delta_d)_{max} = K_d(\Delta_{st})_{max} \leq [\Delta]$$

- 求解步骤

1. 确定动荷因数计算公式：自由落体冲击或水平冲击或其他
2. 计算冲击点沿冲击方向的静变形（若为超静定结构，先建立静定基，求多余约束），最终确定动荷因数
3. 计算静载荷下的静内力、静应力、静变形
4. 相应与动荷因数相乘，得到动载荷下的动内力、动应力、动变形
5. 动载荷下的强度或刚度计算。

第13章 疲劳强度

疲劳破坏的概念

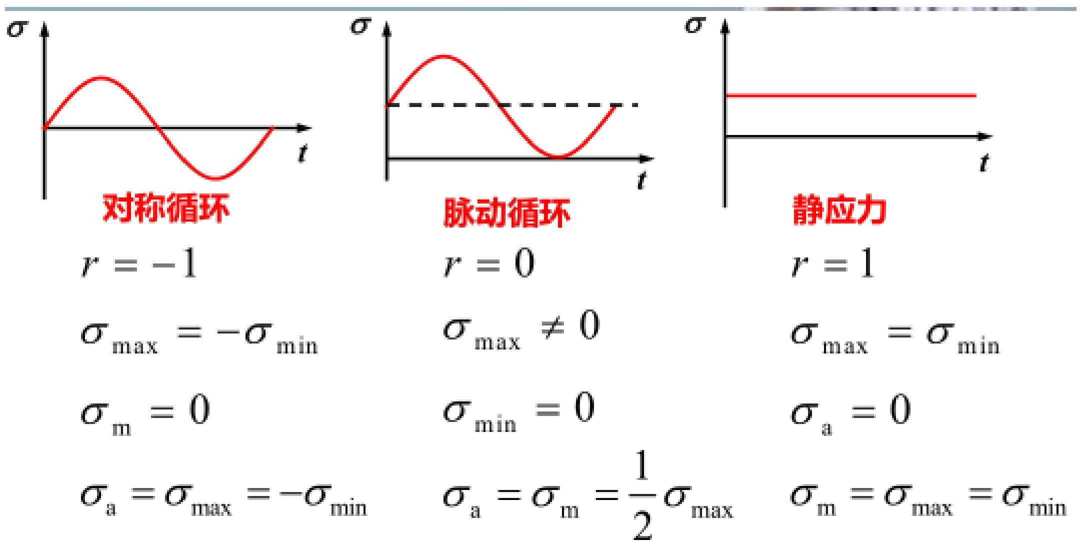
- 交变载荷：随时间作周期性交替变化的载荷
- 交变应力：随时间作周期性交替变化的应力
- 应力循环：交变应力重复变化一次的过程
- 疲劳破坏：构件在交变应力下的破坏
- 疲劳强度：构件抵抗疲劳破坏的能力
- 疲劳破坏的主要特点：

1. 疲劳强度远小于材料的强度极限，甚至小于屈服极限
2. 疲劳破坏是一个损伤积累的过程，要经历一定次数的应力循环
3. 无论塑性材料还是脆性材料，疲劳破坏时都发生脆性断裂，无明显塑性变形，所以危害极大
4. 疲劳断口具有明显特征，有光滑区和粗糙区两个区域

- 疲劳破坏分三个阶段

1. 裂纹萌生阶段
2. 裂纹扩展阶段
3. 脆性断裂阶段

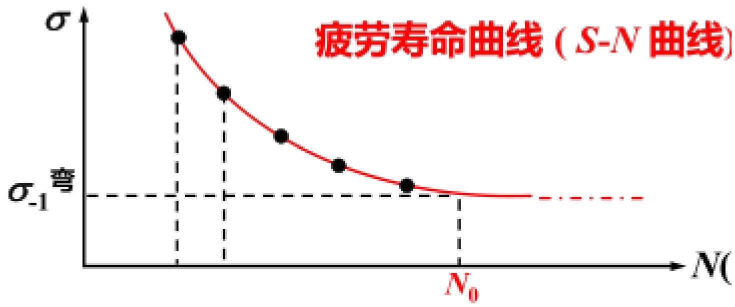
交变应力及其循环特征

- 最大应力σ_{max}
- 最小应力σ_{min}
- 平均应力$\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$
- 应力幅$\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$
- 循环特征$r = \sigma_{min}/\sigma_{max}$
- 

- 对称循环是交变应力中最危险的一种工况。
- 非对称循环可以看作是静应力与对称循环的叠加。
- 应力幅不随时间发生改变的交变应力称为等幅交变应力，反之称为变幅交变应力。

材料的疲劳极限

- 材料的持久极限（或疲劳极限）：材料可以经受无限次应力循环而不发生疲劳破坏的最高应力值。
- 当工作应力小于持久极限时，该材料不会发生疲劳破坏。
- 材料的持久极限通过疲劳试验来确定。
- 设备：旋转弯曲疲劳试验机
- 试件：标准光滑小试件

- 

- 循环基数：$N_0 = 10^7$

对称循环下构件的疲劳极限

- 构件的疲劳强度不仅与材料相关，而且与构件的结构相关。
- 一般情况下，构建的持久极限低于材料的持久极限。
- 影响构件持久极限的基本因素

1. 应力集中
2. 构件尺寸
3. 表面质量

- 若为对称循环

$$\sigma_{-1}^{构} = \frac{\epsilon_\sigma \beta}{K_\sigma}\sigma_{-1}$$

式中，σ_{-1}为材料的持久极限；K_σ为有效应力集中因数；β为表面质量因数；ϵ_σ为尺寸因数。

非对称循环下构件的疲劳极限

- 若为非对称循环

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

$$\sigma_r^{构} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}(\sigma_a + \sigma_m)$$

式中，ψ_σ与材料有关，称为敏感因数。

构件的疲劳强度条件

- 若为对称循环

$$\sigma_a \le [\sigma_{-1}^{构}] = \frac{\sigma_{-1}^{构}}{[n]}$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}^{构}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta}\sigma_a} \geq [n]$$

- 若为非对称循环

$$\sigma_a + \sigma_m \leq [\sigma_r^{构}] = \frac{\sigma_r^{构}}{[r]}$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \geq [n]$$

- 脆性材料在交变载荷作用下，易发生疲劳破坏，故主要考虑疲劳强度条件；塑性材料较复杂，需综合考虑：

1. 当$r < 0$，构件破坏形式一般为疲劳破坏；
2. 当$0 < r < 1$，构件破坏形式可能为屈服破坏，或可能为疲劳破坏，故应同时校核屈服和疲劳强度；
3. 当$\sigma_a << \sigma_m$或r接近1时，构件发生的是屈服破坏，故应校核屈服强度。
4. 若为弯扭组合疲劳

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n]$$

构件的疲劳寿命估算简介

- 通过疲劳损伤理论，可以对构件进行有限寿命设计。
- 损伤：在有效载荷作用下，材料产生的破坏程度。
- 疲劳损伤理论：当材料承受高于疲劳极限的交变应力时，每一次应力循环都会使材料产生一定量的损伤，当损伤积累到一定程度，达到某一临界值，构件将产生疲劳破坏。
- 变幅交变应力：应力幅值随时间发生变化。
- 线性累积损伤理论：
  一个应力循环造成的损伤

$$D = \frac{1}{N_i}$$

  n_i个应力循环造成的损伤

$$D = \frac{n_i}{N_i}(\text{等幅})$$

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N_i}(\text{变幅})$$

失效时的临界损伤

$$D_{cr}=1$$

提高构件疲劳强度的措施

1. 合理设计构件形状，减少应力集中
2. 提高表面质量，降低表层应力集中系数
3. 合理选择材料，避免使用脆性材料

第14章 压杆的稳定性

- 稳定平衡：当撤去干扰力后，圆球总会自动回到原来的平衡位置。
  不稳定平衡：只要受到侧向微小推力，圆球就会偏离原来的平衡位置。
  临界平衡：圆球受到侧向微小推力，仍可保持平衡，但不能自动恢复原有的平衡状态。
- 丧失稳定性：压杆不能保持其初始的直线平衡状态。
- 压杆由稳定平衡过渡到不稳定平衡时，轴向压力的临界值称为临界力或临界载荷，用F_{cr}表示。
- 拉杆不会失稳。

细长压杆的临界力

两端铰支细长压杆的临界力

$$\nu''+k^2\nu=0$$

式中，$k^2=F/EI$，通解为

$$\nu=C_1\sin kx+C_2\cos kx$$

代入边界条件得

$$C_2=0,\sin kl=0$$

$$k=\frac{n\pi}{l}(n=0,1,2,\ldots)$$

欧拉公式

$$F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{l^2}$$

一端固定、一端自由的压杆临界力

$$\nu''+\frac{F_{cr}}{EI}\nu=\frac{F_{cr}}{EI}\Delta$$

通解为

$$\nu = C_1 \sin\sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}}x + C_2 \cos\sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}}x + \Delta$$

代入边界条件得

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

- 可以将欧拉公式进一步推广

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

  式中，μ为长度因数，μl为相当长度。当一端固定一端自由时为2，两端铰支时为1，一端固定一端铰支时为0.7，两端固定时为0.5。

压杆的临界应力

细长压杆的临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

式中，$\lambda = \mu l / i$为压杆的柔度，$i = \sqrt{I/A}$为惯性半径。

1. 柔度越大，临界压力越小，压杆越容易失稳。
2. 在计算临界应力时，压杆总是在最容易发生弯曲的方向上失稳，故轴惯矩应取最小值，柔度应取最大值。

欧拉公式的适用范围

$$M(x) = EI\nu''(x)$$

材料必须处在线弹性范围内。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_p^2$$

$$\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p$$

将$\lambda \ge \lambda_p$的压杆称为细长杆。

- 只有细长杆才能使用欧拉公式来计算临界力和临界应力。

经验公式

- 当$\lambda < \lambda_p$时，

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

（a、b为材料常数）

- 适用条件：$\sigma_p \le \sigma_{cr} = a - b\lambda \le \sigma_s$
- 中长杆

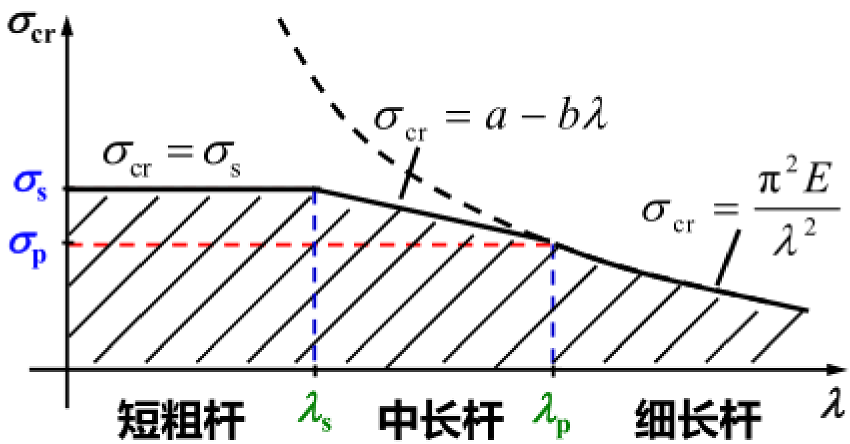
$$\lambda_s \le \lambda \le \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

$$\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

- 中长杆使用直线公式来计算临界应力。
- 将$\lambda < \lambda_s$的杆称为短粗杆

$$\sigma_{cr} = \sigma_s$$

- 临界应力总图



- 注意：临界压力是压杆的固有属性，与外载荷无关！

柱状铰链

压杆的稳定性校核

安全因数法

$$|\sigma| \le \frac{\sigma_{cr}}{[n_{st}]}$$

$$|F_N| \le \frac{F_{cr}}{[n_{st}]}$$

$$n_{st}=\frac{F_{cr}}{|F_N|}=\frac{\sigma_{cr}}{|\sigma|}\geq[n_{st}]$$

上式，$[n_{st}]$规定稳定安全因数，n_{st}实际稳定安全因数。

折减系数法

$$\frac{\sigma_{cr}}{[n_{st}]}=[\sigma_{st}]$$

$$[\sigma_{st}]=\varphi[\sigma]$$

$$\sigma=\frac{F}{A}\leq\varphi[\sigma]$$

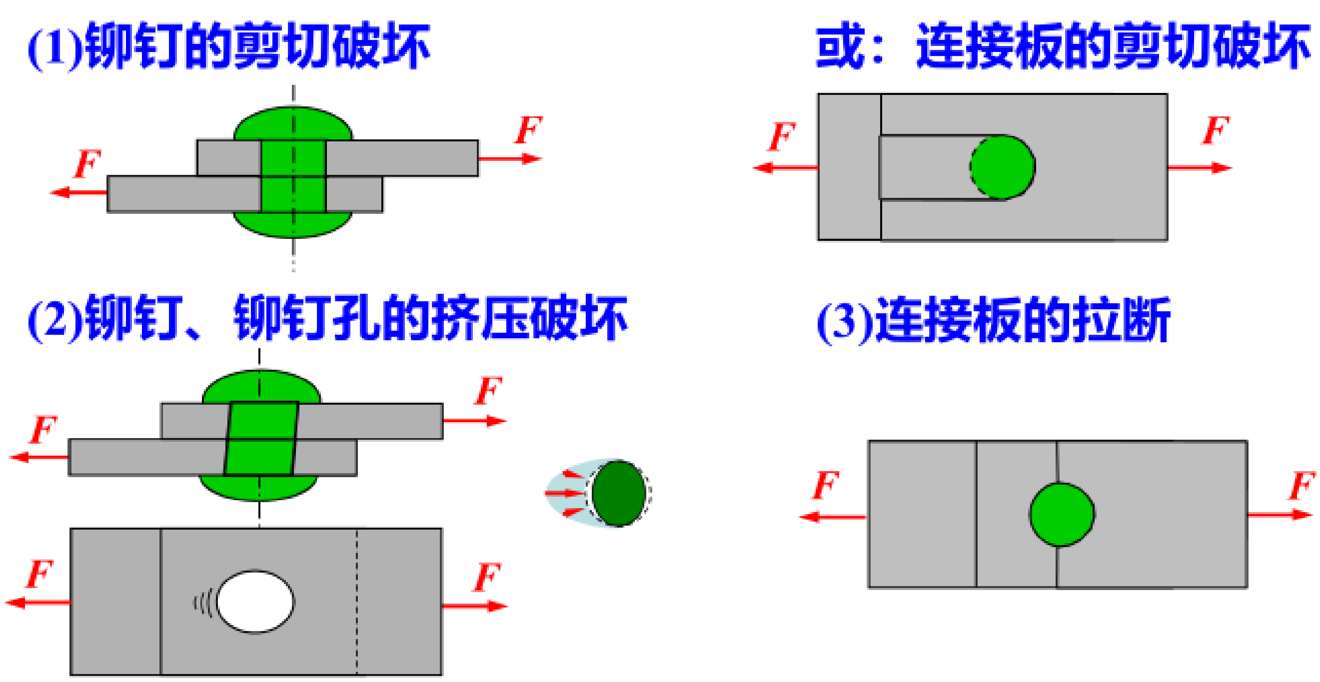
式中，φ为折减系数，与压杆柔度λ和材料有关。

提高压杆稳定性的措施

- 改善支座形式，增加压杆的约束，减小长度因数μ。
- 缩短压杆长度，或增加中间支座。
- 合理选择截面形状，增大惯性半径。
- 采用等稳定性结构。
- 改变结构布局，或者变压杆为拉杆。
- 选择合理的材料。细长杆选高弹性模量材料，中长杆选高强度材料。

第15章 连接件的强度

连接件的实用算法



铆钉（或连接板）的剪切破坏

受力特点：外力垂直于轴线，等值反向，相距较近。
变形特点：截面沿外力的方向产生相对错动。
实用计算方法：由于剪力在截面上分布复杂，精确的切应力很难得到，因此假设剪力在截面上均匀分布。
名义切应力公式

$$\tau = \frac{F_s}{A_s}$$

名义极限切应力

$$\tau^0 = \frac{F_s^0}{A_s}$$

名义许用切应力

$$[\tau] = \frac{\tau^0}{n}$$

剪切强度条件

$$\tau = \frac{F_s}{A_s} \leq [\tau]$$

1. 正确确定剪力（受力平衡）
2. 正确确定剪切面（与外力平行）

铆钉、铆钉孔的挤压破坏

连接件在发生剪切作用的同时，一般都伴随挤压作用。
假设挤压力在挤压面上均匀分布。（挤压面取直径面，即计算挤压面）

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

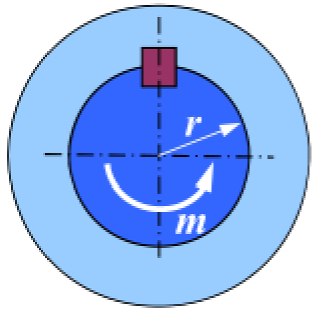
连接板的拉断

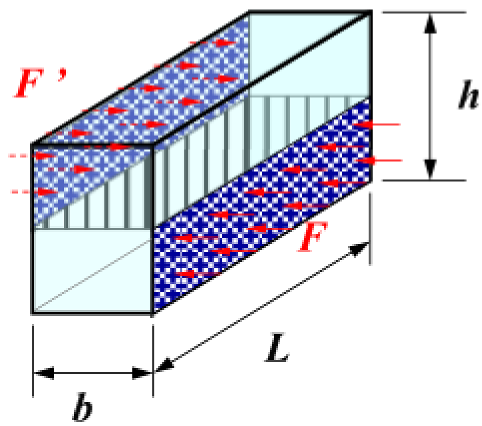
忽略孔边的应力集中现象，并假设轴向拉力在净面积上均匀分布。

$$\sigma = \frac{F_N}{A_{净}} \leq [\sigma]$$

实用算法应用

键的强度计算





外力

$$F = F' = \frac{m}{r}$$

剪切强度

剪力

$$F_s = F = \frac{m}{r}$$

剪切面面积

$$A_s = bL$$

剪切强度

$$\tau = \frac{F_s}{A_s} = \frac{m}{rbL} \le [\tau]$$

挤压强度

挤压力

$$F_{bs} = F = \frac{m}{r}$$

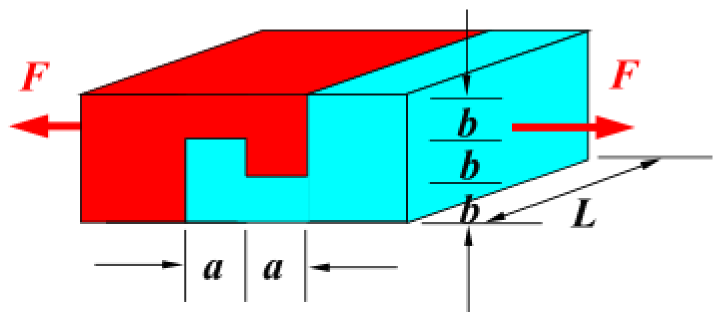
挤压面面积

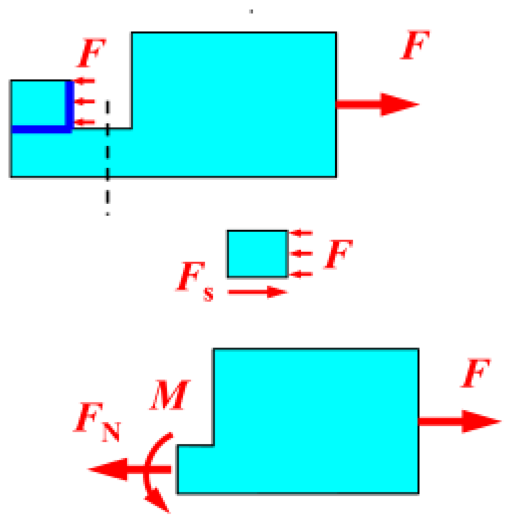
$$A_{bs}=\frac{Lh}{2}$$

挤压强度

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{2m}{rhL}\leq[\sigma_{bs}]$$

木榫结构的强度计算





剪切强度

剪力

$$F_s=F$$

剪切面面积

$$A_s=aL$$

剪切强度条件

$$\tau=\frac{F_s}{A_s}=\frac{F}{aL}\leq[\tau]$$

挤压强度

挤压力

$$F_{bs} = F$$

挤压面面积

$$A_{bs} = bL$$

挤压强度条件

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} = \frac{F}{bL} \leq [\sigma_{bs}]$$

拉伸+弯曲强度

轴力

$$F_N = F$$

弯矩

$$M = Fb$$

拉伸+弯曲强度条件

$$\sigma = \frac{F}{bL} + \frac{6Fb}{b^2L} \leq [\sigma]$$

附录A 截面图形的几何性质

静矩和形心

静矩定义:

$$S_z = \int_A y \mathrm{d}A$$

$$S_y = \int_A z \mathrm{d}A$$

$$\text{性质}\begin{cases}\text{同一截面图形对不同坐标轴的静矩不同}\\ \text{静矩的数值可能为正，可能为负，也可能为零}\\ \text{其量纲为[长度}^3]\end{cases}$$

形心定义

$$y_C = \frac{S_z}{A}$$

$$z_C = \frac{S_y}{A}$$

$$\text{性质}\begin{cases}\text{截面对某轴的静矩为零，则该轴必通过截面的形心} \\ \text{截面对通过其形心的坐标轴，静矩恒等于零}\end{cases}$$

组合图形

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum S_{zi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i}$$

$$z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i z_{Ci}}{\sum A_i}$$

惯性矩和惯性积

惯性矩定义
极惯性矩

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

惯性矩

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A$$

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

惯性积

$$I_{yz} = \int_A yz \mathrm{d}A$$

平行移轴公式

$$I_y = I_{y_C} + b^2 A$$

$$I_z = I_{z_C} + a^2 A$$

$$I_{yz} = I_{y_C z_C} + abA$$

> **Warning**
>
> 等式右边的惯性矩和惯性积均为对过形心的轴。

Summary

矩形：平行于轴的边长一次方，垂直于轴的边长三次方。

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

或

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

圆形：

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi d^4}{64}$$

半圆形：

$$I_z = \frac{1}{2} \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{128}$$

正六边形：对所有过形心轴的惯性矩相等。

转轴公式、主惯轴与主惯矩