6.3 Momenty setrvačnosti a deviační momenty rovinných obrazců

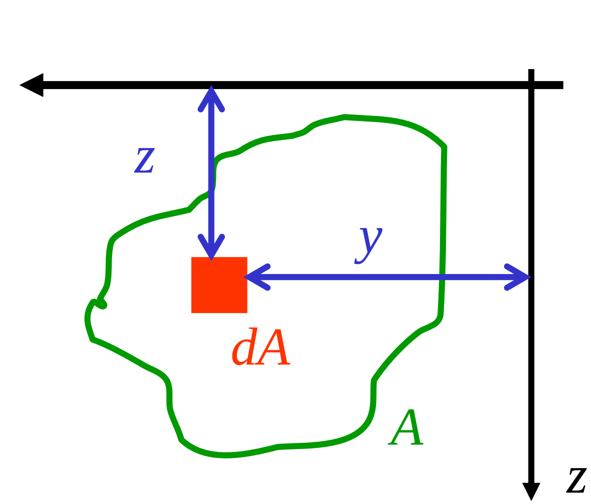
Statické momenty rovinného obrazce

-k ose y $S_y = \int_A z dA$ -k ose z $S_z = \int_A y dA$ [m^3]

Axiální momenty setrvačnosti rovinného obrazce

-k ose y $I_y = \int_A z^2 dA$ [m^4]

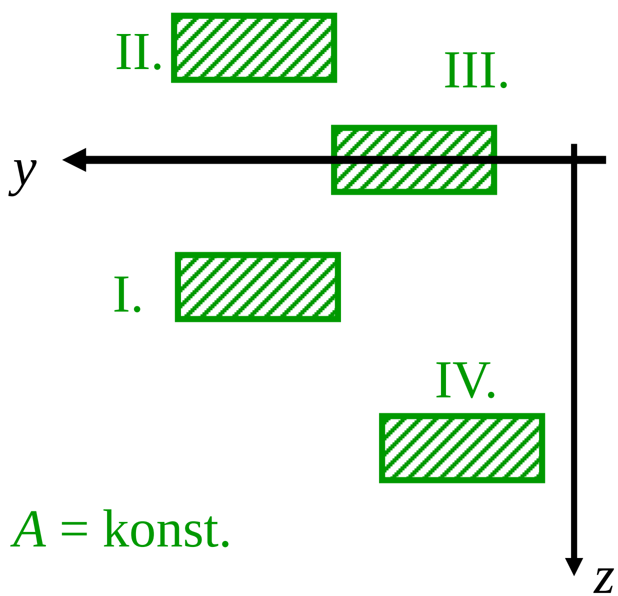
-k ose z $I_z = \int_A y^2 dA$ [m^4]



Pozn.:

1) I_y, $I_z > 0$

2) I_y, I_z závisí na vzdálenosti plochy od osy

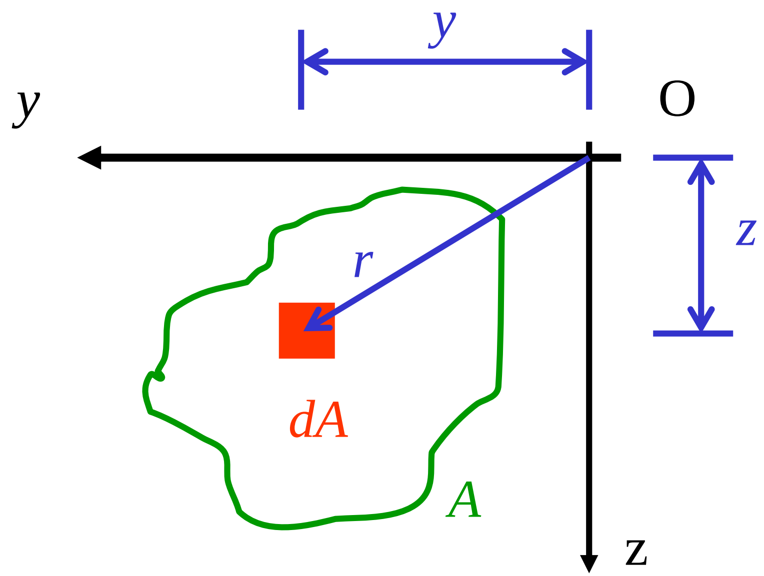


$$I_y^{I} = I_y^{II}$$

$$I_y^{III} < I_y^{I} = I_y^{II} < I_y^{IV}$$

Polární moment setrvačnosti rovinného obrazce

-k počátku O



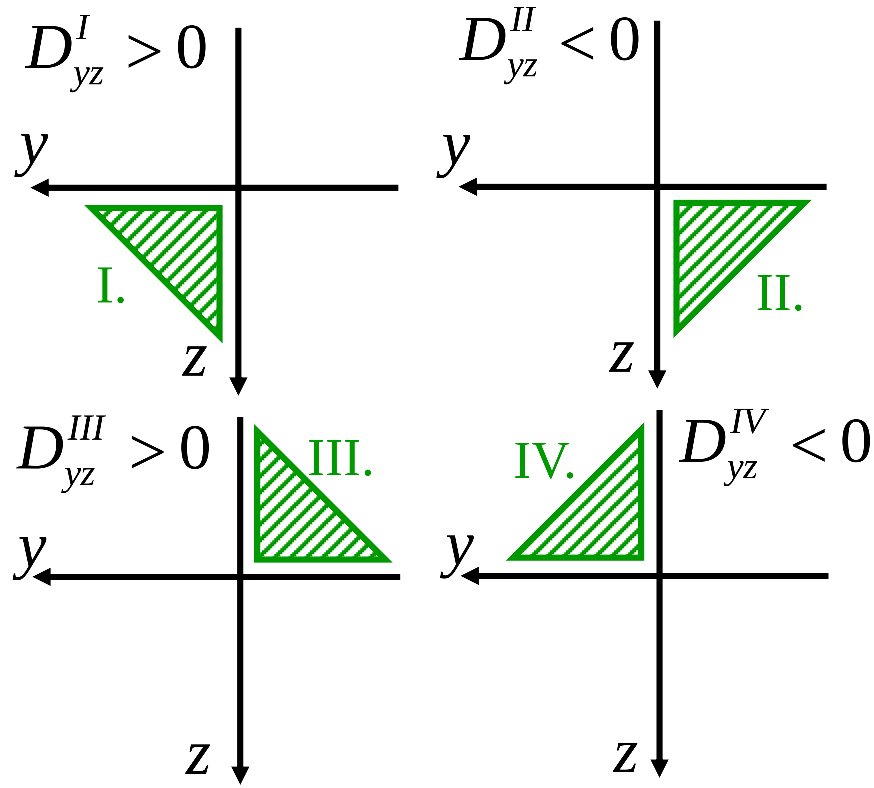
$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A \left(y^2 + z^2 \right) dA \qquad [\mathrm{m}^4]$$

$$pozn.: I_0 = I_z + I_y$$

Deviační moment rovinného obrazce

-k osám y,z

$$D_{yz} = \int_A yz\,dA \quad [\mathrm{m}^4]$$



Pozn.:

1) $D_{yz} \lesseqgtr 0$

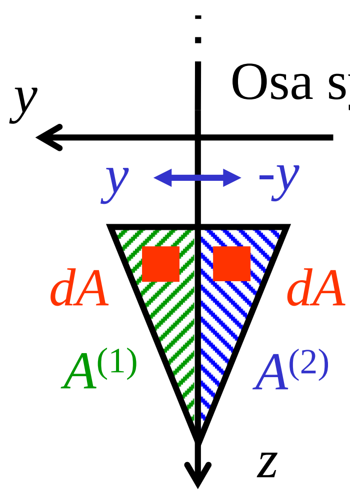
2) symetricky umístěný obrazec

$$D^{I}_{yz} = -D^{II}_{yz} = D^{III}_{yz} = -D^{IV}_{yz}$$

$$D^{I}_{yz} > 0$$

3) *y* nebo *z* ... osa symetrie

=> $D_{yz} = 0$



Osa symetrie = *z*

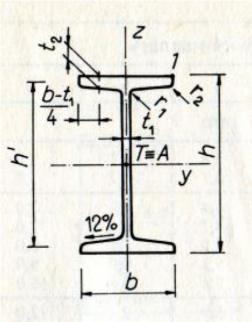
$$\int_A yz\,dA = \int_{A^{(1)}} yz\,dA + \int_{A^{(2)}} yz\,dA$$

$$\int_{A^{(1)}} yz\,dA = -\int_{A^{(2)}} yz\,dA \Rightarrow D_{yz} = 0$$

Výpočet:

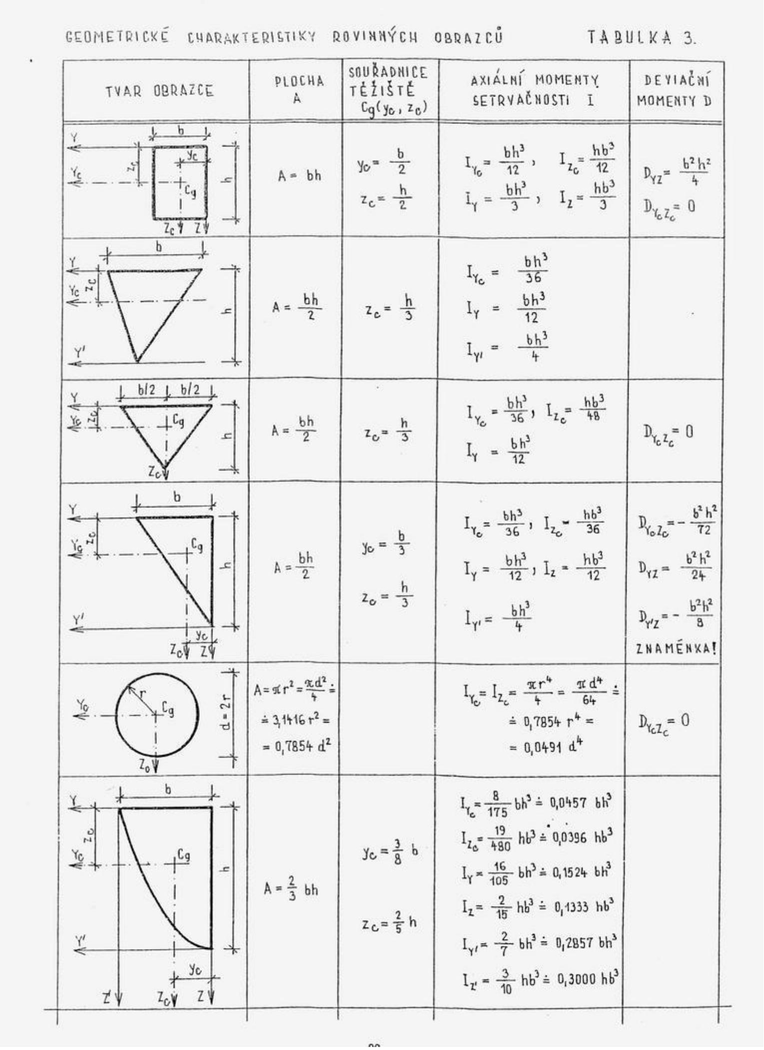
1. Přímou integrací

2. Skládáním základních geometrických útvarů



Statické veličiny

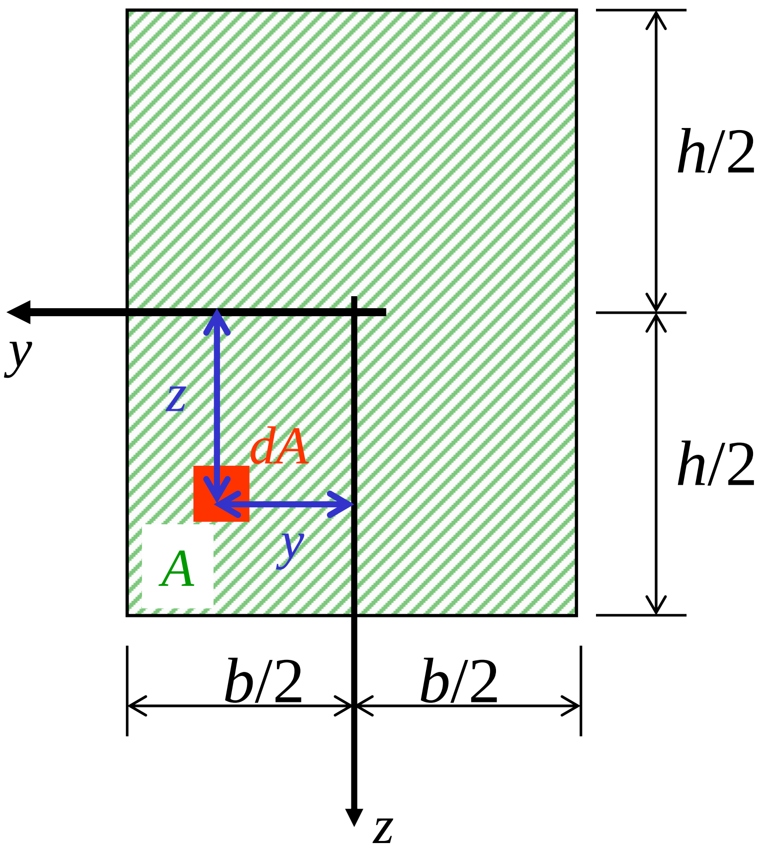
Označení průřezu IE	A mm²	I_y mm⁴	W_y mm³	i_y mm	I_z mm⁴	W_z mm³	i_z mm
80	610	0,81	20,2	32,3	74,9	3,06	9,8
100	1 200	1,98	39,7	40,6	179	6,49	12,2
120	1 470	3,50	58,4	48,8	279	8,72	13,8
140	1 740	5,72	81,7	57,3	419	11,5	15,5
160	2 020	8,73	109	65,7	586	14,5	17,0
180	2 340	12,9	143	74,2	826	18,4	18,8
200	2 680	18,4	184	82,8	1 150	23,1	20,7
220	3 060	25,5	232	91,3	1 570	28,6	22,7
240	3 480	34,6	289	99,7	1 980	34,5	23,9
270	4 020	50,1	371	112	2 600	41,5	25,4
300	4 650	70,8	472	122	3 370	49,9	26,9
330	5 380	98,4	597	135	4 190	59,9	27,9
360	6 190	133,8	743	147	5 160	71,1	28,9
400	7 140	189,3	947	163	6 660	85,9	30,5
450	8 300	274,5	1 220	182	8 070	101	31,2
500	9 780	392,9	1 570	200	10 400	122	32,6
Násobitel	—	10⁶	10³	—	10³	10³	—



GEOMETRICKÉ CHARAKTERISTIKY ROVINNÝCH OBRAZCŮ TABULKA 3.

TVAR OBRAZCE	PLOCHA A	SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ $C_g(y_c, z_c)$	AXIÁLNÍ MOMENTY SETRVAČNOSTI I	DEVIAČNÍ MOMENTY D
	$A = bh$	$y_c = \frac{b}{2}$, $z_c = \frac{h}{2}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{12}$, $I_{Z_c} = \frac{hb^3}{12}$, $I_Y = \frac{bh^3}{3}$, $I_Z = \frac{hb^3}{3}$	$D_{YZ} = \frac{b^2h^2}{4}$, $D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}$, $I_Y = \frac{bh^3}{12}$, $I_{Y'} = \frac{bh^3}{4}$	
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}$, $I_{Z_c} = \frac{hb^3}{48}$, $I_Y = \frac{bh^3}{12}$	$D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{3}$, $z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}$, $I_{Z_c} = \frac{hb^3}{36}$, $I_Y = \frac{bh^3}{12}$, $I_Z = \frac{hb^3}{12}$, $I_{Y'} = \frac{bh^3}{4}$	$D_{Y_cZ_c} = -\frac{b^2h^2}{72}$, $D_{YZ} = \frac{b^2h^2}{24}$, $D_{Y'Z} = -\frac{b^2h^2}{8}$ ZNAMÉNKA!
	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \doteq 3{,}1416\, r^2 = 0{,}7854\, d^2$		$I_{Y_c} = I_{Z_c} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \doteq 0{,}7854\, r^4 = 0{,}0491\, d^4$	$D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{2}{3}bh$	$y_c = \frac{3}{8}b$, $z_c = \frac{2}{5}h$	$I_{Y_c} = \frac{8}{175}bh^3 \doteq 0{,}0457\, bh^3$, $I_{Z_c} = \frac{19}{480}hb^3 \doteq 0{,}0396\, hb^3$, $I_Y = \frac{16}{105}bh^3 \doteq 0{,}1524\, bh^3$, $I_Z = \frac{2}{15}hb^3 \doteq 0{,}1333\, hb^3$, $I_{Y'} = \frac{2}{7}bh^3 \doteq 0{,}2857\, bh^3$, $I_{Z'} = \frac{3}{10}hb^3 \doteq 0{,}3000\, hb^3$	

Příklad 1a: Odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti obdélníka k těžišťové ose

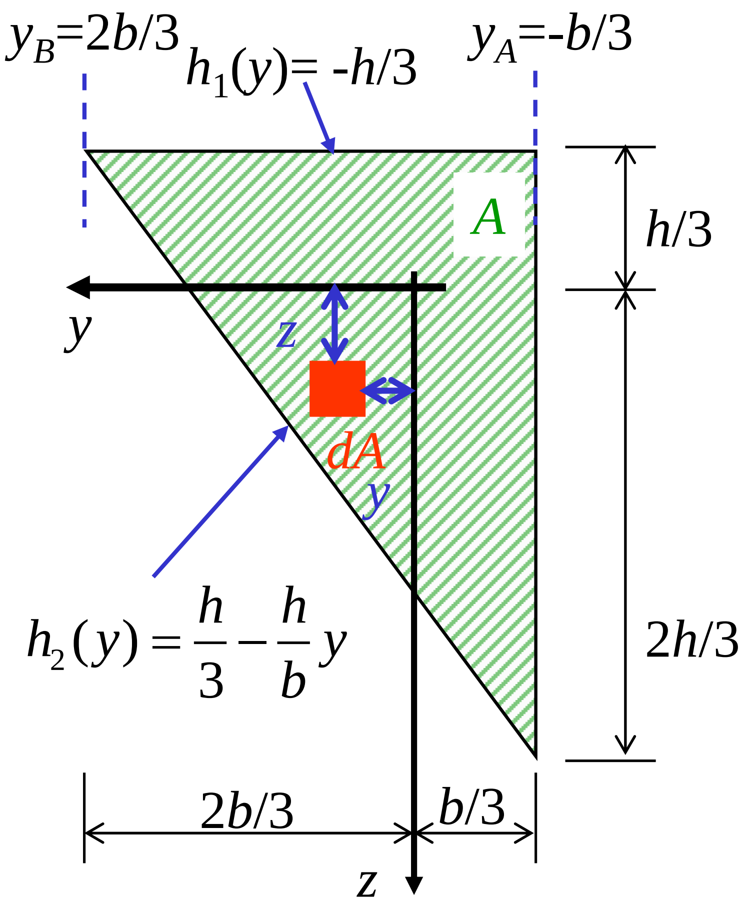


$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz \, dy$$

$$= \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=-h/2}^{h/2} dy = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{h^3}{12} dy$$

$$= \left[\frac{h^3}{12} y \right]_{y=-b/2}^{b/2} = \underline{\underline{\frac{1}{12} bh^3}}$$

Příklad 1b: Odvoďte vzorec pro deviační moment pravoúhlého trojúhelníka k těžišťovým osám



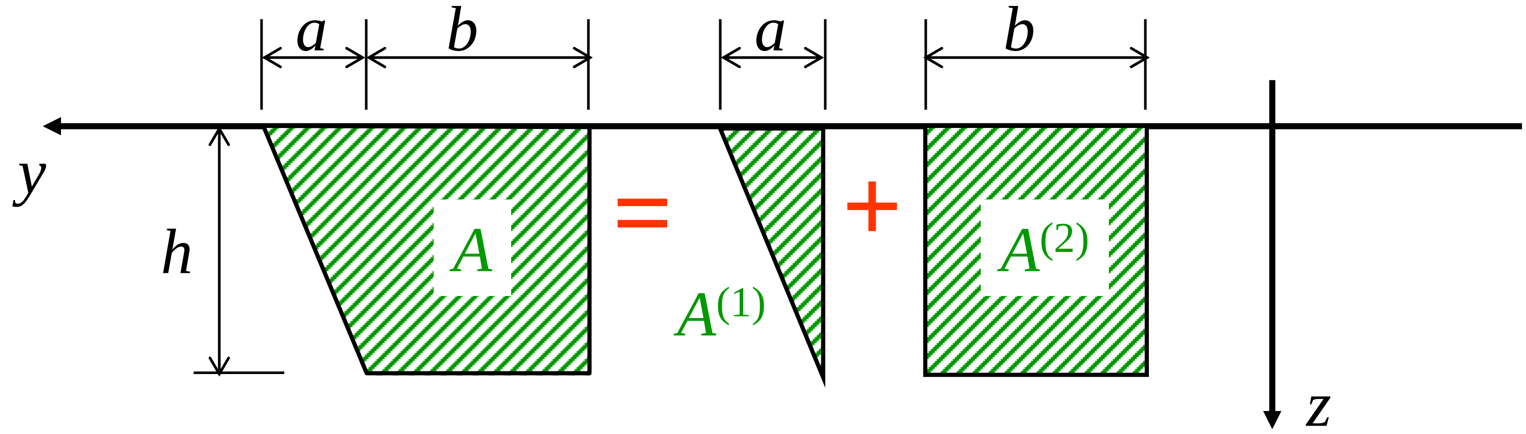
$$D_{yz}=\int_A yz\,dA=\int_{y=y_A}^{y_B}\left(\int_{z=h_1(y)}^{h_2(y)} yz\,dz\right)dy$$

$$=\int_{y=-\frac{b}{3}}^{\frac{2b}{3}}\left(\int_{z=-\frac{h}{3}}^{\frac{h}{3}-\frac{h}{b}y} yz\,dz\right)dy=\int_{y=-\frac{b}{3}}^{\frac{2b}{3}}\left(y\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=-\frac{h}{3}}^{\frac{h}{3}-\frac{h}{b}y}\right)dy$$

$$=\int_{y=-\frac{b}{3}}^{\frac{2b}{3}} y\left(\frac{\left(\frac{h}{3}-\frac{h}{b}y\right)^2}{2}-\frac{\left(-\frac{h}{3}\right)^2}{2}\right)dy$$

$$=\left[-\frac{h^2y^3}{9b}+\frac{h^2y^4}{8b^2}\right]_{y=-\frac{b}{3}}^{\frac{2b}{3}}=-\frac{b^2h^2}{72}$$

Příklad 2: Vypočtěte moment setrvačnosti složeného obrazce k ose y

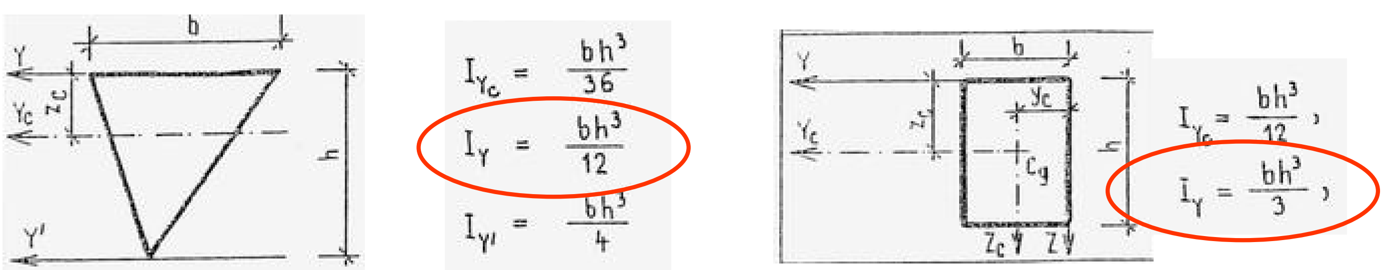


$$A \quad = \quad A^{(1)} \quad + \quad A^{(2)}$$

(rozdělení integrační oblasti)

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{A^{(1)}} z^2 dA + \int_{A^{(2)}} z^2 dA = I_y^{(1)} + I_y^{(2)}$$

z tabulek:

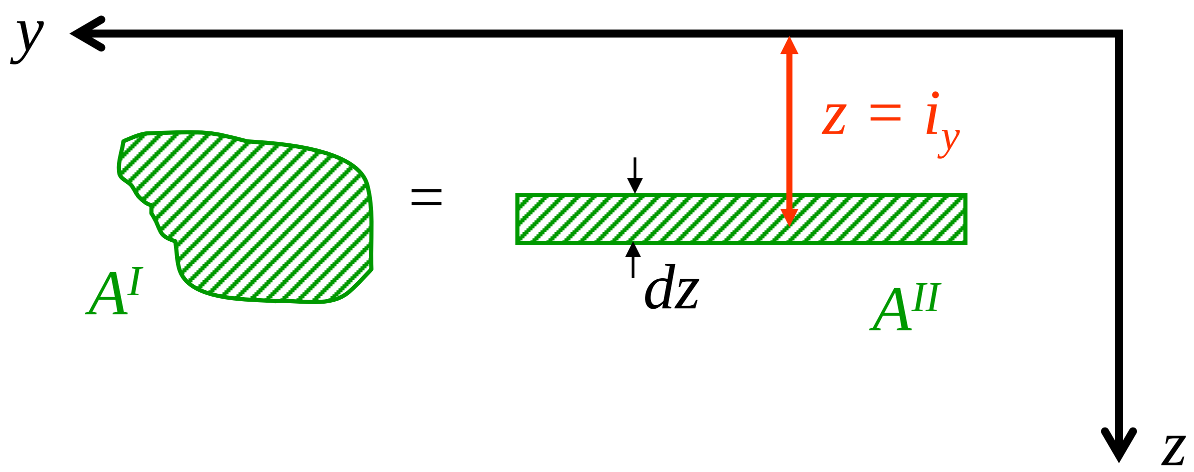


můžeme sčítat pouze momenty **ke stejné ose** !!!

$$I_y^{(1)} = \frac{ah^3}{12} \qquad I_y^{(2)} = \frac{bh^3}{3}$$

$$\boxed{I_y = \frac{ah^3}{12} + \frac{bh^3}{3}}$$

6.4 Poloměry setrvačnosti rovinného obrazce



Předpoklad:

$$A^I = A^{II} = A$$

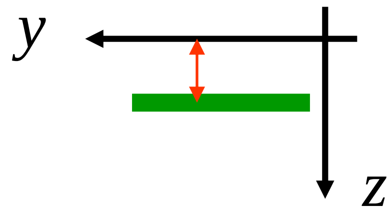
$$I_y^I = I_y^{II} = I_y$$

Platí: $$I_y^{II} = \int_{A^{II}} z^2 \, dA = i_y^2 \cdot A^{II}$$ (z = konst. = i_y)

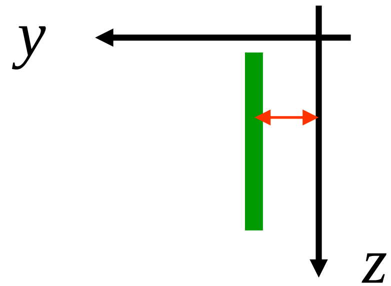
$$\Rightarrow \boxed{I_y = i_y^2 \cdot A}$$

Definujeme **poloměr setrvačnosti**

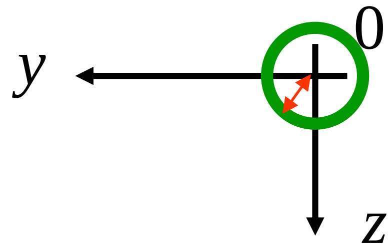
-k ose y : $i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}}$



-k ose z : $i_z = \sqrt{\dfrac{I_z}{A}}$



-k počátku 0 : $i_0 = \sqrt{\dfrac{I_0}{A}}$



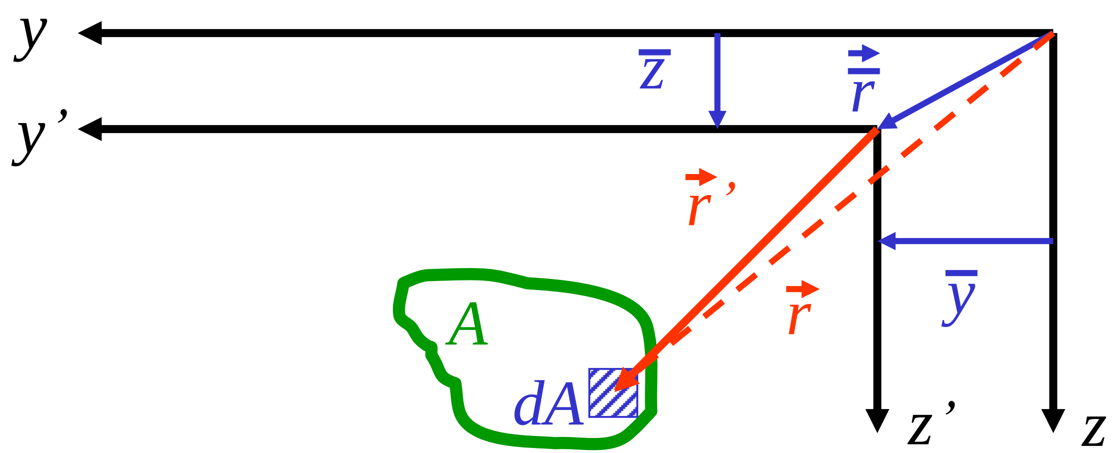
Pozn.: i_y, i_z, i_0 …. [m]

$$i_0^2 = i_y^2 + i_z^2$$

6.5 Transformace momentů setrvačnosti a deviačních momentů

Momenty setrvačnosti k **posunutým osám**

Známe momenty setrvačnosti a deviační moment k osám *y*, *z*;
určit momenty setrvačnosti a deviační moment k osám *y'*, *z'*.



Transformace souřadnic:

$$y' = y - \bar{y}$$

$$z' = z - \bar{z}$$

$$\left(\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\bar{r}}\right)$$

$$I_{z'} = \int_A y'^2\, dA = \int_A \left(y - \bar{y}\right)^2 dA = \int_A y^2 dA - 2\bar{y}\int_A y\,dA + \bar{y}^2 \int_A dA$$

$$= I_z - 2\bar{y}S_z + \bar{y}^2 A$$

Pozn.: $\bar{y} = konst.$

Podobně odvodíme:

$$I_{y'} = I_y - 2\,\bar{z}\,S_y + \bar{z}^2 A$$

$$I_{0'} = I_0 - 2\,\bar{y}\,S_z - 2\,\bar{z}\,S_y + A\left(\bar{y}^2 + \bar{z}^2\right)$$

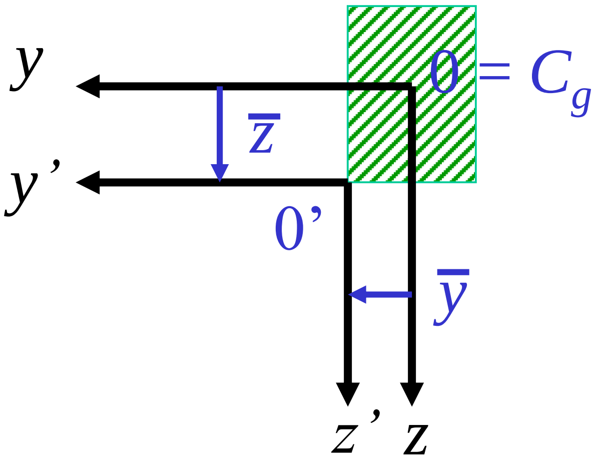
$$D_{y'z'} = D_{yz} - \bar{y}\,S_y - \bar{z}\,S_z + \bar{y}\,\bar{z}\,A$$

Pozn.:

$$I_{0'} = I_{y'} + I_{z'}$$

Zvolíme-li počátek souřadnic *y*, *z* v **těžišti obrazce**, pak $S_y = S_z = 0$

$$\left(y_c = \frac{S_z}{A} = 0 \qquad z_c = \frac{S_y}{A} = 0 \right)$$



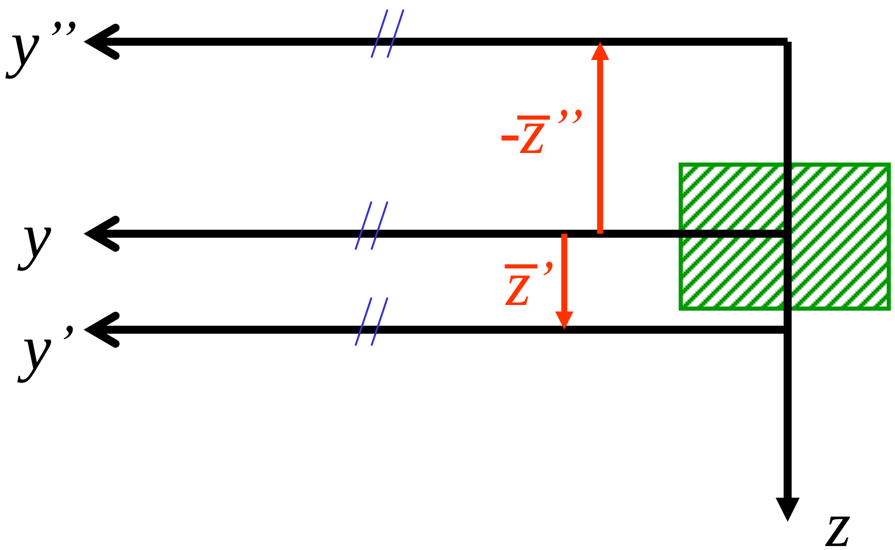
I_y, I_z, D_{yz}, I_0 …. **těžišťové (centrální)** momenty setrvačnosti, dev. moment

$$I_{y'} = I_y + \bar{z}^2 A \qquad D_{y'z'} = D_{yz} + \bar{y}\,\bar{z}\,A$$

$$I_{z'} = I_z + \bar{y}^2 A \qquad I_{0'} = I_0 + \left(\bar{y}^2 + \bar{z}^2\right) A$$

(Steinerova věta)

Poznámka:



$$I_{y'} = I_y + \bar{z}'^2 A$$

$$I_{y''} = I_y + (-\bar{z}'')^2 A$$

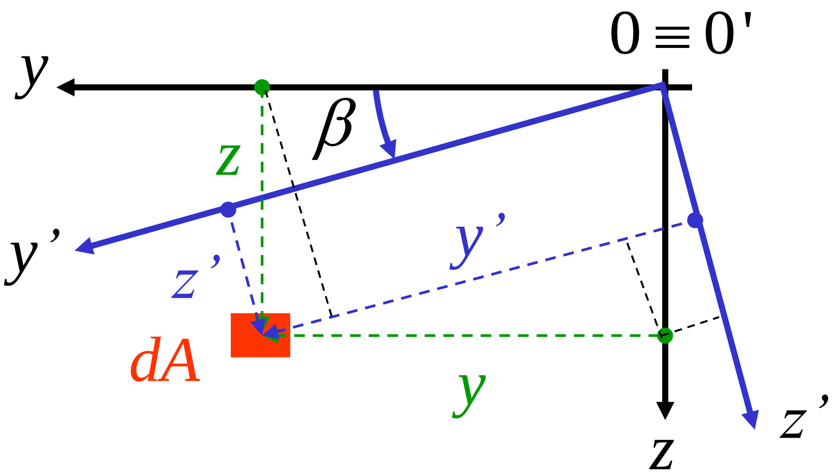
$$|\bar{z}'| < |\bar{z}''| \quad \Rightarrow$$

$$I_y < I_{y'} < I_{y''}$$

…. k těžišťové ose je moment setrvačnosti <u>nejmenší</u>.

Momenty setrvačnosti k **pootočeným osám**

Známe momenty setrvačnosti a deviační moment k osám *y*, *z*;
určit momenty setrvačnosti a deviační moment k osám *y'*, *z'*.



Transformace souřadnic:

$$y' = y \cdot \cos\beta + z \cdot \sin\beta$$

$$z' = -y \cdot \sin\beta + z \cdot \cos\beta$$

$$\{r'\} = \{T\}\{r\}$$

$$I_{z'} = \int_A y'^2 \, dA = \int_A \left(y \cdot \cos\beta + z \cdot \sin\beta\right)^2 dA$$

$$= \cos^2\beta \cdot \overbrace{\int_A y^2 dA}^{I_z} + \underbrace{2\sin\beta\cos\beta}_{\sin 2\beta} \overbrace{\int_A yz dA}^{D_{yz}} + \sin^2\beta \overbrace{\int_A z^2 dA}^{I_y}$$

$$= I_y \sin^2\beta + I_z \cos^2\beta + D_{yz} \sin 2\beta$$

Podobně odvodíme:

$$I_{y'} = I_y \cos^2\beta + I_z \sin^2\beta - D_{yz}\sin 2\beta$$

$$D_{y'z'} = \frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\beta + D_{yz}\cos 2\beta$$

Pozn.: platí pro libovolné osy y, z (nejen těžišťové)

$$I_{0'} = \underline{I_{y'} + I_{z'}} = (I_y + I_z)(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$$
$$+ \sin 2\beta \cdot (D_{yz} - D_{yz})$$
$$= \underline{I_y + I_z} = I_0$$

Maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} I_{y'} & -D_{y'z'} \\ -D_{y'z'} & I_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta ; & \sin\beta \\ -\sin\beta ; & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_y & -D_{yz} \\ -D_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta ; & -\sin\beta \\ \sin\beta ; & \cos\beta \end{bmatrix}$$

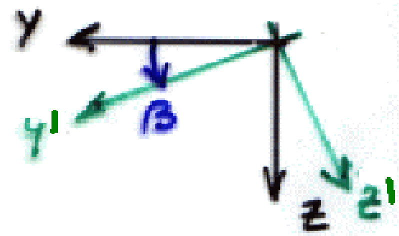
$$[I'] = [T][I][T]^T$$

$[I]$, $[I]$ ... tenzor setrvačnosti

$[T]$ ... transformační matice

Invarianty tenzoru setrvačnosti

Invariant ... výraz nezávislý na pootočení soustavy souřadnic



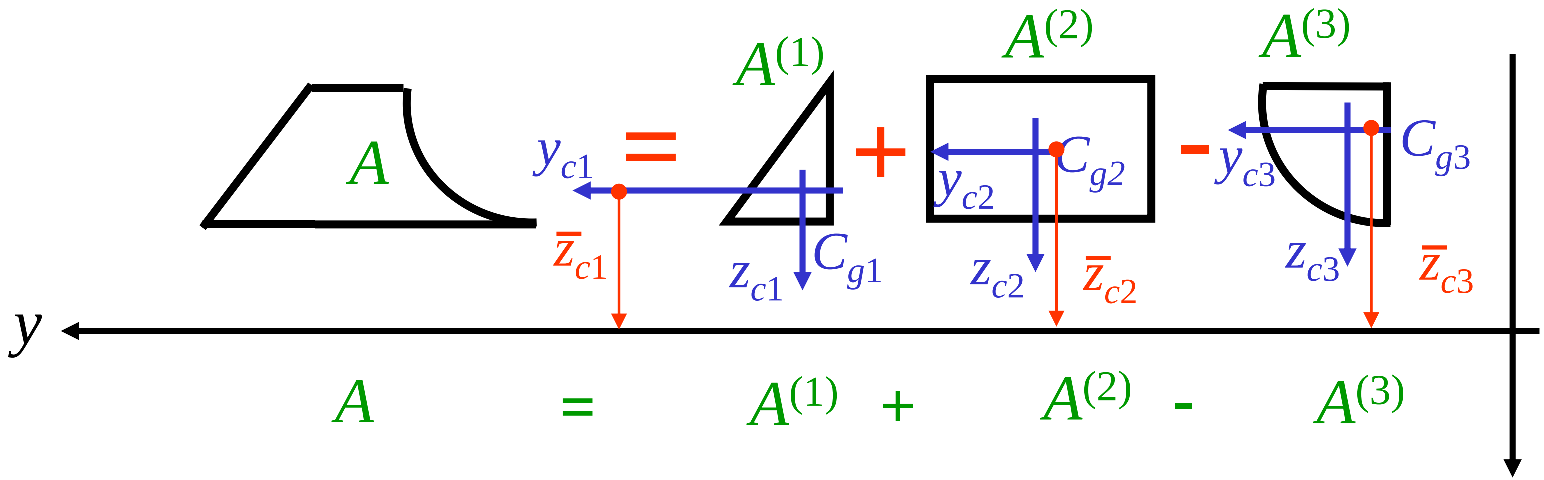
Lineární invariant

$$I_{1I} = I_y + I_z = I_{y'} + I_{z'} = I_0 \text{ (viz dříve)}$$

Kvadratický invariant

$$I_{2I} = I_y I_z - D_{yz}^2 = I_{y'} I_{z'} - D_{y'z'}^2$$

Použití: výpočet momentů setrvačnosti **složených obrazců;** např.



$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{A^{(1)}} z^2 dA + \int_{A^{(2)}} z^2 dA - \int_{A^{(3)}} z^2 dA$$

$$= I_y^{(1)} + I_y^{(2)} - I_y^{(3)}$$ (Pozn. vše k ose y !)

$$I_y^{(1)} = \underline{I_{yc1}^{(1)}} + A^{(1)} \underline{\bar{z}_{c1}^2}$$

$$I_y^{(2)} = \underline{I_{yc2}^{(2)}} + A^{(2)} \underline{\bar{z}_{c2}^2}$$

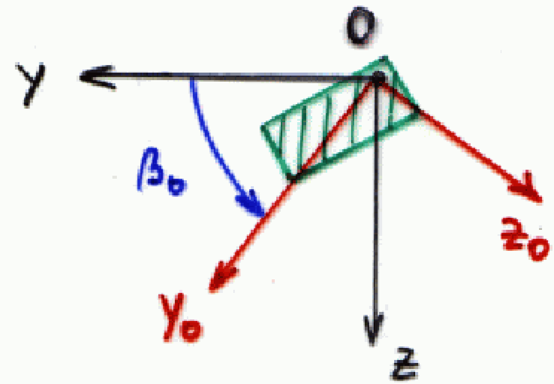
$$I_y^{(3)} = \underline{I_{yc3}^{(3)}} + A^{(3)} \underline{\bar{z}_{c3}^2}$$

Souřadnice počátku os y, z (vzhledem k osám y_{ci}, z_{ci})

Momenty setrvačnosti k těžišti jednotlivých obrazců (tj. centrální m. s.); např. z tabulek

6.6 Hlavní osy a momenty setrvačnosti

Pro zvolený počátek O hledáme úhel natočení souřadného systému takový, aby momenty setrvačnosti k pootočeným osám byly extrémní.



$$\frac{dI_{y'}}{d\beta} = (I_z - I_y)\sin 2\beta - 2D_{yz}\cos 2\beta = -\frac{dI_{z'}}{d\beta}$$

$$\frac{dI_{y'}}{d\beta} = 0 \Rightarrow \tan 2\beta_0 = \frac{2D_{yz}}{I_z - I_y}$$

$$\frac{dI_{z'}}{d\beta} = 0 \quad \Nearrow$$

hlavní směry (osy) setrvačnosti

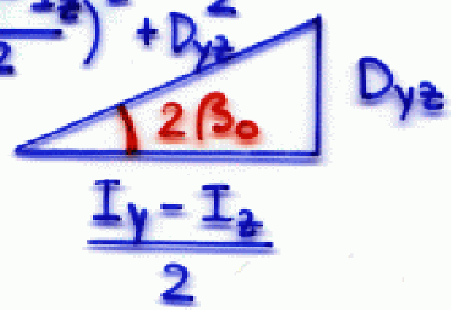
Hlavní momenty setrvačnosti:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{y_0} &= I_y \cos^2\beta_0 + I_z \sin^2\beta_0 - D_{yz} \sin 2\beta_0 \\ I_{z_0} &= I_y \sin^2\beta_0 + I_z \cos^2\beta_0 + D_{yz} \sin 2\beta_0 \end{aligned}}$$

$\cos^2\beta_0 = \frac{1}{2}(\cos 2\beta_0 + 1)$; $\sin^2\beta_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta_0)$

$$I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\beta_0 - D_{yz} \sin 2\beta_0$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}$$



$$\cos 2\beta_0 = \pm \frac{I_y - I_z}{2\sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + D_{yz}^2}}$$

$\sin 2\beta_0 = \ldots$

$$\left.\begin{aligned} I_{y_0} &= \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + D_{yz}^2} \\ I_{z_0} &= \frac{I_y + I_z}{2} \mp \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + D_{yz}^2} \end{aligned}\right\}$$

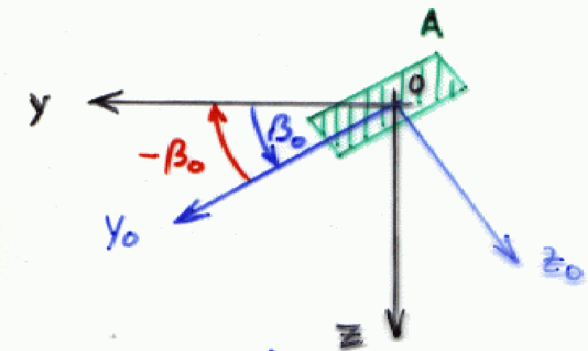
Hlavní momenty setrvačnosti

$I_{1,2}$ $(I_1 \geq I_2)$

$$D_{yz_0} = 0 \qquad (!)$$

Pozn.: $I_y + I_z$ ... první invariant

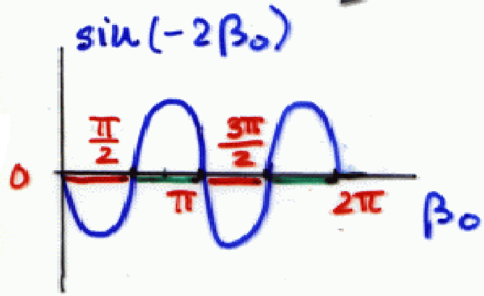
$\sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + D_{yz}^2}$ .... musí být nezávislé na pootočení souřad. systému

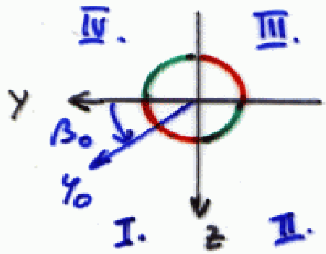


Transformace $(y_0, z_0) \rightarrow (y, z)$

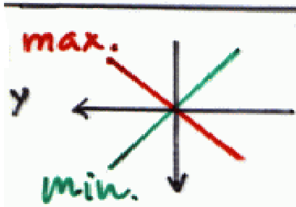
$$D_{yz} = \frac{1}{2}(I_{y_0} - I_{z_0}) \sin(-2\beta_0)$$

>0	$I_{y_0} > I_{z_0}$	>0	II., IV.
>0	$I_{z_0} > I_{y_0}$	<0	I., III.
<0	$I_{z_0} > I_{y_0}$	>0	II., IV.
<0	$I_{y_0} > I_{z_0}$	<0	I., III.
	$\uparrow$ I_1 $\quad$ $\uparrow$ I_2		

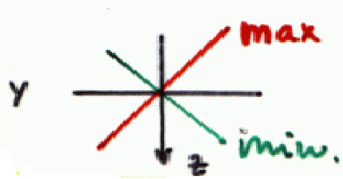




$\Downarrow$

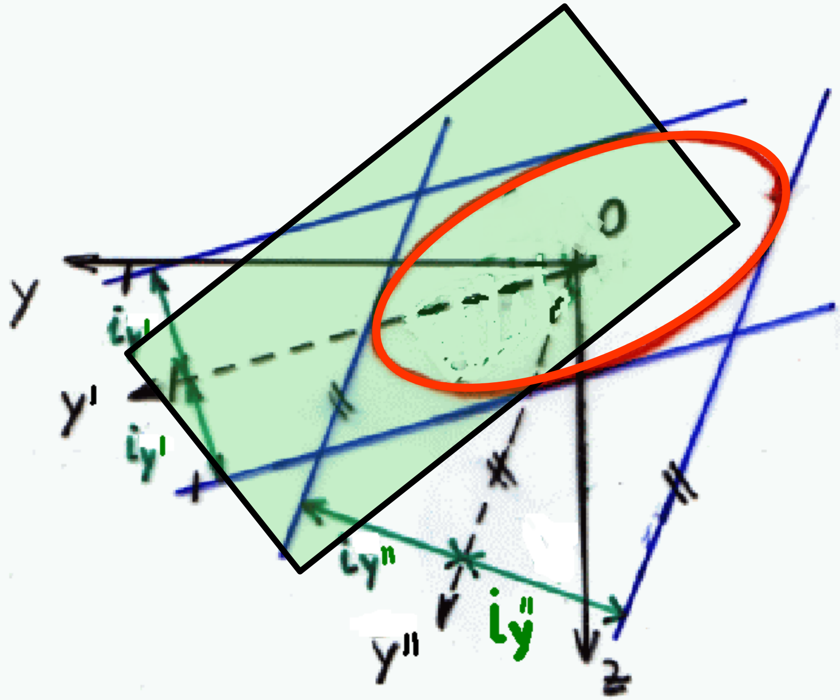


$\longleftrightarrow$ $D_{yz} > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{osa max. momentu s.} \\ \text{v II. a IV. kvadrantu} \end{array} \right.$



$\longleftrightarrow$ $D_{yz} < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{osa max. momentu s.} \\ \text{v I. a III. kvadrantu} \end{array} \right.$

6.7 Elipsa setrvačnosti



- vedeme přímky rovnoběžné s osami setrvačnosti y, y', y''... ve vzdálenosti příslušného poloměru setrv. $i_y, i_{y'}, i_{y''}$...
- tyto přímky obalí křivku – elipsu setrvačnosti

Pozn.:

$$i_{y'} = \sqrt{\frac{I_{y'}}{A}}, \ldots$$

Elipsa setrvačnosti je určena rovnicí

$$I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_{yz} yz = \frac{I_y I_z - D_{yz}^2}{A},$$

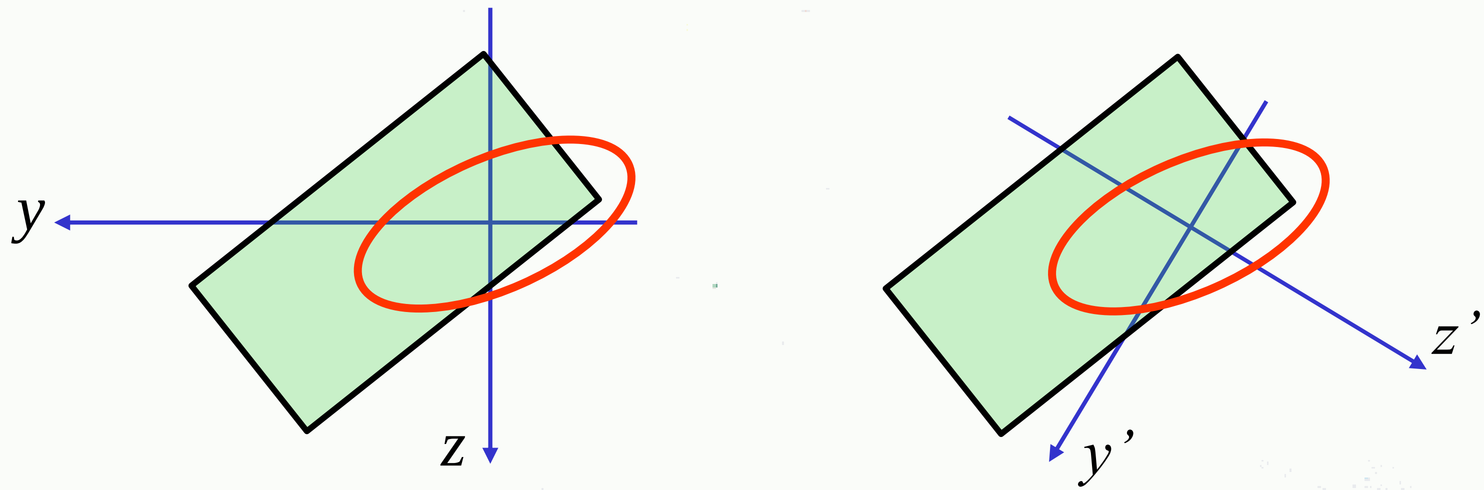
kterou je možno také zapsat ve tvaru:

$$\{y, z\}^T \begin{bmatrix} I_y & -D_{yz} \\ -D_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \frac{I_y I_z - D_{yz}^2}{A} \leftarrow I_{02}$$

(invariant)

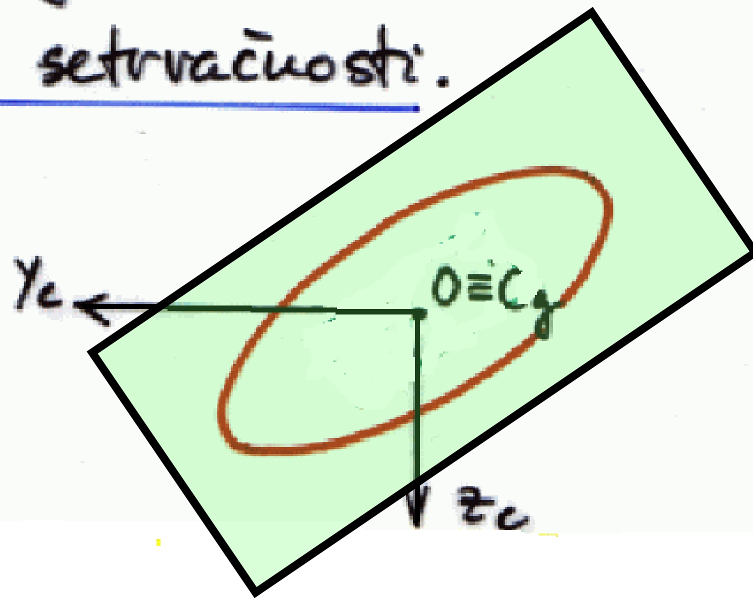
Použitím transformačních vztahů je možné ukázat, že pro vzájemně pootočené souřadnicové systémy platí

$$\{y, z\}^T \begin{bmatrix} I_y & -D_{yz} \\ -D_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \{y', z'\}^T \begin{bmatrix} I_{y'} & -D_{y'z'} \\ -D_{y'z'} & I_{z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ z' \end{Bmatrix}$$



- Tvar elipsy setrvačnosti nezávisí na natočení souřadného systému – závisí pouze na tvaru obrazce a poloze počátku O !

• Pro $O \equiv C_g$ (těžiště obrazce) ... centrální elipsa setrvačnosti.



• tvar centrální elipsy přibližně sleduje tvar obrazce

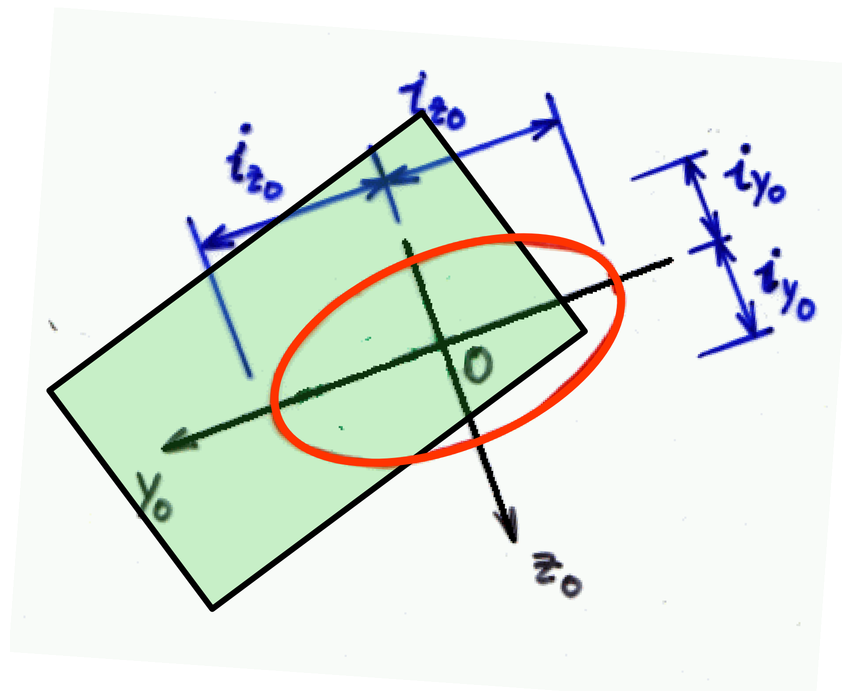
Rovnice elipsy setrvačnosti v hl. osách setrv.

$$I_{y_0} y_0^2 + I_{z_0} z_0^2 - 0 = \frac{I_{y_0} I_{z_0} - 0}{A} \quad / \cdot \frac{A}{I_{y_0} I_{z_0}}$$

$$\frac{A}{I_{z_0}} \cdot y_0^2 + \frac{A}{I_{y_0}} z_0^2 = 1$$

$$\frac{y_0^2}{i_{z_0}^2} + \frac{z_0^2}{i_{y_0}^2} = 1$$

i_{z_0}, i_{y_0} ... poloosy elipsy setrvačnosti



y_0, z_0 ... osy elipsy setrvačnosti

Tento dokument je určen výhradně jako doplněk k přednáškám z předmětu Stavební mechanika 2 pro studenty Stavební fakulty ČVUT v Praze. Dokument je průběžně doplňován, opravován a aktualizován a i přes veškerou snahu autora může obsahovat nepřesnosti a chyby.

Datum poslední revize: 24.4.2014