Лекция 7

«Линейные дифференциальные системы с постоянными коэффициентами. Пространство решений одн.СтЛВУ. Формула Остроградского –Лиувилля. Метод Эйлера построения фундаментальной матрицы решений. Теорема Лиувилля о фазовом потоке. Теорема Пуанкаре о возвращении»

Сист. д.у. имеет <u>нормальную</u> форму, если старшая производная каждой неизвестной функции входит лишь в одно уравнение, и это уравнение разрешимо относит. старших производных

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + x_2' \\ x_2''' = x_1 + x_2'' \end{cases}$$

$\forall$ сист. в нормальной форме можно привести к системе 1ого порядка, посредством введения новых перем.

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 & D y_1 &= y_2 \\
y_2 &= x_1' & D y_2 &= y_2 + y_4 \\
y_3 &= x_2 & D y_3 &= y_4 \\
y_4 &= x_2' & D y_4 &= y_5 \\
y_5 &= x_2'' & D y_5 &= y_1 + y_5
\end{aligned}$$

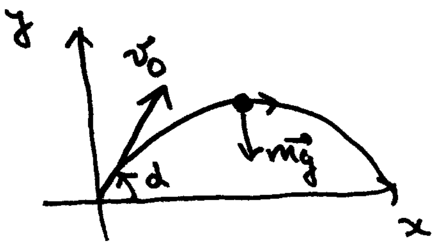
$$\Rightarrow \quad D\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

(1) $$D\vec{x} = A(t)\cdot\vec{x} + \vec{f}(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

лин. векторное ур.

мат; элементы кот функции

Тело, брошенное под углом α к горизонту



$m\vec{a} = \vec{F}$

Решение (закон движения тела)

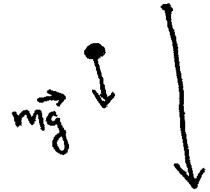
$$\begin{aligned} m x'' &= 0 \\ m y'' &= -mg \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x'' &= 0 \\ y'' &= -g \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ y(t) = (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0$

$x'(0) = v_0 \cos\alpha \qquad y'(0) = v_0 \sin\alpha$

Задача Коши для сист. д.у

Падение тела с высоты



$$m\ddot{x} = mg$$

$$\ddot{x} = g$$

Замена $\quad x_0 = x, \quad y_0 = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_0 = y_0 \\ \dot{y}_0 = g \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$x_0(t) = c_0 + c_1 t + \frac{g}{2} t^2$$

$$y_0(t) = c_1 + gt$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}$$

$$D\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ \vdots \\ Dx_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \int_0^t \vec{x}(\tau)\,d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^t x_1(\tau)\,d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t x_n(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{матрица}}{D\underline{X}(t)} = \underset{\text{матрица}}{\left[D x_{ij}(t)\right]}, \qquad \int_s^t \underset{\text{матрица}}{\underline{X}(\tau)}\,d\tau = \underset{\text{матрица}}{\left[\int_s^t x_{ij}(\tau)\,d\tau\right]}$$

$$D(A(t)\cdot B(t)) = DA(t)\cdot B(t) + A(t)\,DB(t), \qquad A(t),\ B(t)$$

матрицы, элементами кот. явл. функц.

$$D(\underline{X}(t)\vec{c}) = (D\underline{X}(t))\vec{c}, \qquad \vec{c} \text{ - постоянный вектор}$$

$$D(A\vec{x}(t)) = A\,D\vec{x}(t), \qquad A \text{ - матр. с числовыми элементами}$$

$$\int_s^t A\vec{x}(\tau)\,d\tau = A\cdot\int_s^t \vec{x}(\tau)\,d\tau, \qquad \int_s^t A(\tau)\cdot B\,d\tau = \int_s^t A(\tau)\,d\tau\cdot B$$

$$\int_s^t U(\tau)\, dV(\tau) = U(\tau)\cdot V(\tau)\Big|_s^t - \int_s^t dU(\tau)\cdot V(\tau)$$

Ур. $D\vec{x} = A(t)\vec{x} + \vec{f}$ наз.

линейным стац. векторным ур (стац. лин. системой)

если $A(t) \equiv A$, т.е все элементы матрицы A являются числами.

(2) $D\vec{x} = A\vec{x}$ лин. однор. система соот.-щая (1)

Специальные стац. линейно-векторные уравнения

A диагональная матр.

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1 & x_1(s) = \xi_1 \\ Dx_2 = a_{22}x_2 + f_2 & x_2(s) = \xi_2 \\ \vdots & \vdots \\ Dx_n = a_{nn}x_n + f_n & x_n(s) = \xi_n \end{cases}$$

Т1. (ТоР для СЛВУ с диаг. матр) $\vec{f}$ непр. на I, тогда

$\forall s \in I$, $\forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ Задача Коши

$D\vec{x} = A\vec{x} + f$, A диаг. однозначно разрешима на I.

A треуг. (Δ^0)

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + f_1 & x_1(s) = \xi_1 \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2 & x_2(s) = \xi_2 \\ \vdots & \vdots \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n & x_n(s) = \xi_n \end{cases}$$

$\exists!$ $x_1(t) = e^{a_{11}(t-s)}\xi_1 + \int_s^t e^{a_{11}(t-\tau)} f_1(\tau)\,d\tau$ ← дифф-а на I ⇒ $x_1(t)$ непр. ⇒

⇒ $\underbrace{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2}_{\text{непр}}$ ⇒ $\exists!$ $x_2(t)$ ... и т.д. Для треуг. ($_0\nabla$)

Аналогично!

$\underline{\text{Т.}}$ (ТоР для Ст. ЛВУ с произв. матр.) Если $\vec{f}$ непр. на I, то $\forall s \in I$, $\forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ з.К. $\begin{cases} D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f} \\ \vec{x}(s) = \vec{\xi} \end{cases}$ однозначно разрешима.

$\square$ $\forall$ числовой матр. A $\exists$ S : $\det S \neq 0$ $J = S^{-1}AS$ $\vec{x} = S\vec{y}$

$$D(S\vec{y}) = AS\vec{y} + \vec{f} \Leftrightarrow S(D\vec{y}) = AS\vec{y} + \vec{f}$$

$$D\vec{y} = S^{-1}AS\vec{y} + S^{-1}\vec{f}$$

$$(\star) \begin{cases} D\vec{y} = J\vec{y} + \vec{g} \\ \vec{y}(s) = S^{-1}\vec{x}(s) = S^{-1}\vec{\xi} \end{cases}, \quad \vec{g} = S^{-1}\vec{f}$$

непр.

J треугольная $\Rightarrow$ З.К ($\star$) однозначно разрешима на I $\Rightarrow$ однозначно разрешима исходная задача и

$$\vec{x}(t) = S\vec{y}(t)$$

$\boxtimes$

Пространство решений одн. СтЛВУ

(1) $D\vec{x} = A\vec{x}$, $t \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ Пусть есть n решений ур. (1) : $\vec{x}_1(t), \dots \vec{x}_n(t)$

рассм. $\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t)$ (2)

$\vec{x}(t)$ также реш. (1) $D\vec{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} D(c_k\vec{x}_k(t)) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(A\vec{x}_k(t)) = A\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\vec{x}_k(t)$

$\Rightarrow$ множ. реш. (1) есть линейное пространство.

Матр. реш. ур. (1) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow D\Phi(t) = A\Phi(t)$

Определим функцию $W(t) = \det\Phi(t)$ (3)

$\underline{\text{Т.}}$ Пусть $\vec{x}_1(t), \dots \vec{x}_n(t)$ реш. ур. (1), тогда имеет место ф-ла Остроградского – Лиувилля

(4) $$W(t) = W(s)\, e^{\operatorname{Tr}A\,(t-s)}, \quad \operatorname{Tr}A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

□ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad W(t) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$ $\quad \begin{array}{c} D\vec{x}_1 = A\vec{x}_1 \\ D\vec{x}_2 = A\vec{x}_2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} Dx_{11} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} \\ Dx_{21} = a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} \end{array}$

$\uparrow \vec{x}_1 \quad \uparrow \vec{x}_2$

$$Dx_{12} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22}$$
$$Dx_{22} = a_{11}x_{11} + a_{22}x_{22}.$$

Выч. $DW(t) = \begin{vmatrix} Dx_{11} & Dx_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ Dx_{21} & Dx_{22} \end{vmatrix} = \varnothing$

$$\varnothing = \begin{vmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ a_{22}x_{21} & a_{22}x_{22} \end{vmatrix} = a_{11}W(t) + a_{22}W(t) = (a_{11} + a_{22})W(t)$$

$$W(t) = C e^{(a_{11}+a_{22})t} \quad W(s) = C e^{(a_{11}+a_{22})s} \Rightarrow C = W(s)e^{-(a_{11}+a_{22})s} \Rightarrow W(t) = W(s)e^{(a_{11}+a_{22})(t-s)}$$

⊠

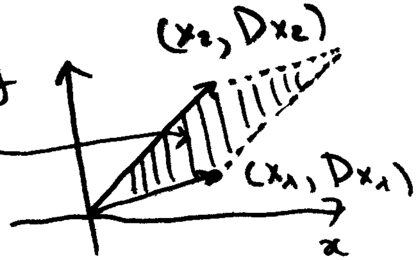
Следствие. Если $W(s) \neq 0 \Rightarrow$ по ф. О.-Л. $W(t) = W(s)\, e^{(a_{11}+\ldots+a_{nn})(t-s)}$

$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad W(t) \neq 0$

Напоминание

$$W(t) = \boxed{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ Dx_1(t) & Dx_2(t) \end{vmatrix}} = W(0)\, e^{-a_1 t} = \begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ Dx_1(0) & Dx_2(0) \end{vmatrix} e^{-a_1 t}$$

$$D^2 x + a_1 Dx + a_0 x = 0$$



$$Dx = y$$

$$Dy = -a_0 x - a_1 y$$

фазовая плоскость

$$\begin{pmatrix} Dx \\ Dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr} A = -a_1$$

Опред. Решения ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n$ образуют базис, если определитель $W(t)$ матр. этих реш. $\neq 0 \ \forall t$. В этом случае матр. $\Phi(t) = [\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n]$ наз. базисной или фундаментальной

Теор. Пусть $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots \vec{x}_n(t)$ базис пр-ва реш. $D\vec{x} = A\vec{x}$, тогда функция

$$\underset{(!)}{\vec{x}(t)} = \sum_{k=1}^{n} c_k \vec{x}_k(t)$$

явл. общим реш. ур.

□ Покажем, что в (!) содержатся все реш. ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$. Рассм. произв. задачу Коши

$$(!!)\begin{cases} D\vec{x} = A\vec{x} \\ \vec{x}(s) = \vec{\xi} \end{cases} \quad \forall s, \in \mathbb{R} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$\exists c_k$, что из (!) получим реш. (!!)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1 x_{11}(s) + \dots + c_n x_{1n}(s) \\ &\ \ \vdots \\ \xi_n &= c_1 x_{n1}(s) + \dots + c_n x_{nn}(s) \end{aligned} \qquad W(t) \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ алг. сист.}$$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \dots + c_n x_{1n} \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \dots + c_n x_{nn} \end{pmatrix} = \Phi(t)\vec{c}$$

⊠

Правило Эйлера. Решить $D\vec{x} = A\vec{x}$ значит найти фунд. матр. $\Phi(t)$:

$\det\Phi(t) \neq 0$ и $D\Phi(t) = A\,\Phi(t) \Rightarrow$

общее реш. ур. $\boxed{\vec{x}(t) = \Phi(t)\,\vec{c}}$.

Идея Эйлера —

поиск реш. ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$ в виде $\vec{x} = \vec{\gamma}\, e^{\lambda t}$, $\vec{\gamma}$ ненул. вектор

(из этих реш. состоит базисная матр.)

$$\vec{\gamma}\,\lambda e^{\lambda t} = A\,\vec{\gamma}\, e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad A\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}$$ алг. сист. однор. ур.

$$(A - \lambda E)\,\vec{\gamma} = 0, \quad \vec{\gamma} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda E) = 0 \leftarrow$$ характ. ур.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ корни хар. ур.

1) $\lambda_1, \dots \lambda_n$ действ. и различ. $\Rightarrow$ каждому λ_k соот-ет реш. $\begin{pmatrix} \gamma_1(k)\, e^{\lambda_k t} \\ \vdots \\ \gamma_n(k)\, e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}$, где

$$A\vec{\gamma}(k) = \lambda_k \vec{\gamma}(k)$$

$\vec{\gamma}(k)$ — собст. вектор соот. λ_k

2) каждому компл. х.ч. $\lambda_1 = a + bi$ и его сопр. $\lambda_2 = a - bi$ соот-ет 2 лин. незав. действительных реш., для этого находим компл. реш. по ф-ле $\vec{\gamma} e^{\lambda t}$ для корня λ_1 как и в случае 1) затем выделяют дейст. и мнимую части этого реш. получают 2 лин. незав. част. реш. Реш, соот. $\lambda_2 = a - bi$ будут лин. зав. с полученными.

3) если $\lambda = \lambda_0$ корень кратности k, то реш. соотв-е этому х.ч. следует искать в виде $x_1(t) = P^{(1)}_{k-m}(t) e^{\lambda_0 t}, \dots x_n(t) = P^{(n)}_{k-m}(t) e^{\lambda_0 t}$

$P^{(i)}_{k-m}$ - мн-н с неопр. коэф. степени $k-m$, k кратность х.ч. λ_0,

m - число лин. незав. собст. векторов, соот-х х.ч. λ_0 $\quad m = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_0 E)$

Чтобы найти коэф. $P^{(i)}_{k-m}$ $i = \overline{1,n}$ подст. в $D\vec{x} = A\vec{x}$, т.е.

$$D \begin{pmatrix} P^{(1)}_{k-m}(t) e^{\lambda_0 t} \\ \vdots \\ P^{(n)}_{k-m}(t) e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} P^{(1)}_{k-m}(t) e^{\lambda_0 t} \\ \vdots \\ P^{(n)}_{k-m}(t) e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}$$

Пример. $\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 8\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = -(1-\lambda^2)-8=\lambda^2-9=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2=\pm 3$$

$\lambda_1=3$ $\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\vec\gamma(1)=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

$\vec x_1(t)=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}e^{3t}=\begin{pmatrix}2e^{3t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}$

$\lambda_2=-3$ $\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\vec\gamma(2)=\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}$

$\vec x_2(t)=\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}e^{-3t}=\begin{pmatrix}-4e^{-3t}\\ e^{-3t}\end{pmatrix}$

Фунд. матр.

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}2e^{3t} & -4e^{-3t}\\ e^{3t} & e^{-3t}\end{pmatrix}$$

Общее реш. $\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$$\vec x(t)=\Phi(t)\vec c=\Phi(t)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=c_1\vec x_1(t)+c_2\vec x_2(t)=\begin{pmatrix}c_1\cdot 2e^{3t}+c_2(-4e^{-3t})\\ c_1e^{3t}+c_2e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$\ddot q = -\frac{\partial U}{\partial q}$ (ур. Ньютона) $\ddot q(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$

$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$ ← ур. Гамильтона

$H(p,q)$ – ф. Гамильтона $H(p,q) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 \frac{q^2}{2}$ $\begin{cases} \dot q = p \\ \dot p = -\omega_0^2 q \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \dot q \\ \dot p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

$(q(0), p(0))$ точка фазовой пр-ти при $t=0$

Опр. Фазовым потоком наз. однопараметрическая группа преобразований фазового пр-ва $g^t : (q(0), p(0)) \longrightarrow (q(t), p(t))$, где $p(t), q(t)$ реш. сист. ур. Гамильтона.

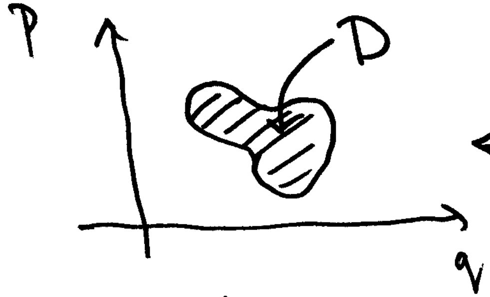
Теор. Лиувилля. Фазовый поток сохраняет объём.

$\forall$ обл-ти D имеем: объём $g^t D$ = объём D

$$\begin{vmatrix} q_1(t) & q_2(t) \\ p_1(t) & p_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1(0) & q_2(0) \\ p_1(0) & p_2(0) \end{vmatrix} e^{\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} t}$$

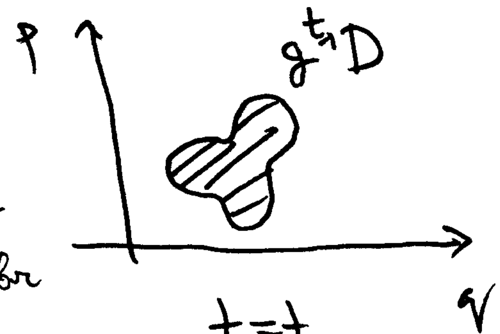
$\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$W(t) \qquad W(0)\, e^{0t} = W(0)$



$t=0$

площади области одинаковы



$t=t_1$

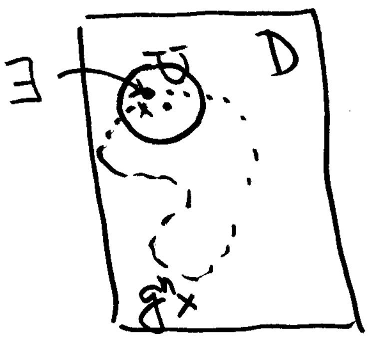
Теор. Пуанкаре (о возвращении)

Пусть g – сохран. объём непр. взаимнооднозн. отобр., переводящее огр. область D евклидова пр-ва в себя: $gD = D$

Тогда в $\forall$ окр U любой точки обл. D найдётся точка $x \in U$, которая возвращается в область U, т.е

$$g^n x \in U \quad \text{при некот. } n$$

Теор. применима к фазовому потоку g^t



Т. Лиувилля + Т. Пуанкаре даёт предсказание

Если открыть перегородку, раздел. камеру с газом и камеру с вакуумом, то через некот. время молекулы газа снова соберутся в первой камере.