Лекция 8

«Экспоненциальное представление решения задачи Коши для СтЛВУ. Формула Коши. Экспонента матрицы. Вычисление матричной экспоненты»

Простейшее д.у. $Dx = \lambda x \Rightarrow x(t) = c e^{\lambda t}$, c – конст.

$D\vec{x} = A\vec{x}$ Гипотеза $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{c}$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\vec{x}(t) = e^{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}t}\vec{c}$

Принцип соответствия

матричная экспонента

e^{At}? e^{A}?

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ Норма вектора — функция $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1.) $\|\vec{x}\| \geq 0$

$\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$

2.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \, \|\vec{x}\|$

3.) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (нер-во Δ)

Норма матр. A (норма опер. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|\vec{x}\| \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|\vec{x}\| = 1} \|A\vec{x}\|$$

Норма $\|A\|$ согласована с нормой на $\mathbb{R}^n$

Пример. $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ - евклидова. $(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$

$\|A\| = \sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$ Найти норму матр. это

найти максимум квадратичной формы $\|A\vec{x}\|^2 = (A\vec{x}, A\vec{x}) =$

$= (\vec{x}, \overline{A}^T A\vec{x}) = (\vec{x}, A^* A\vec{x})$ при условии $\|\vec{x}\| = 1$

Сост. ф. Лагранжа $L(\vec{x}, \lambda) = (\vec{x}, A^* A\vec{x}) - \lambda(\vec{x}, \vec{x})$

Необх усл. экстр. $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0$

$\Updownarrow$

$A^* A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\|\vec{x}\| = 1$ $\Rightarrow$ $\|A\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, A^* A\vec{x}) =$

$= (\vec{x}, \lambda\vec{x}) = \lambda$

спектральный радиус

$r(A^*A) = \max\limits_k |\lambda_k|$

λ_k - собств. зн. матр. A^*A

$\|A\| = \sqrt{r(A^*A)}$ $B = A^*A$ $r(A^*A) = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} (\|B^n\|)^{1/n}$

спектральная норма

имеет вещ. собст. зн.

Пример. $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = A^*A = \begin{pmatrix} 2 & +1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5}$$

$$\|A\vec{x}\| \leq \|A\| \, \|\vec{x}\|$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\| \leq \sqrt{5} \, \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|$$

$$\sqrt{(2x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 2x_2)^2} \leq \sqrt{5} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Для норм матр. справедливо св-во (мультиплик.)

$$\|A\cdot B\| \le \|A\|\cdot\|B\|$$

Лемма. $\forall A, \forall n \in \mathbb{N} \quad \|A^n\| \le \|A\|^n, \quad \|E\| = 1$

Опр Мат. $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} A \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall k \ge n_0 \Rightarrow \|A_k - A\| \le \varepsilon$

$$a_{ij}^{(k)} \underset{k\to\infty}{\to} a_{ij} \quad \forall i,j$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится и B сумма ряда, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = b_{ij}$$

Аналогично, $A_k(t) \to A(t)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(t) = B(t)$

Экспонентой матрицы A наз. ряд

$$\boxed{e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$$

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \le \frac{\|A\|^k}{k!} \Rightarrow$$

$$\|e^A\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad \forall t \in [-t_0, t_0] \quad \|e^{At}\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k |t|^k}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\| t_0^k}{k!} = e^{\|A\| t_0}$$

ряд сх. равномерно на отр. по кр. Вейерштрасса

Лемма. $D(e^{At}) = A e^{At}$

$\square$

Формально

$$D(e^{At}) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1} \cdot k}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At}$$

ряд локально равном. сх. на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ дифф-е законно.

$\boxtimes$

1.) $e^{0t} = E$, 0 - нулевая матр.

2.) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$, $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{Bt} \cdot e^{At}$

3.) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\widetilde{E}_3$$

$$A_3^3 = -A_3$$

$$A_3^4 = \widetilde{E}_3$$

$$e^{tA_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A_3^n}{n!} = E + \widetilde{E}_3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + A_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} =$$

$$= E + \widetilde{E}_3 (\cos t - 1) + A_3 \sin t = \varnothing$$

$$\varnothing = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin t & 0 \\ \sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\varnothing = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{tA_3}$$

$$DX(t) = A_3 X(t) \Rightarrow X(t) = e^{A_3 t}$$ ← Поворот $\mathbb{R}^3$ вокруг оси Oz на угол t.

Любой поворот простр.-ва $\mathbb{R}^3$ на угол t вокруг оси (l_1, l_2, l_3)

единичный вектор

$$e^{(l_1 A_1 + l_2 A_2 + l_3 A_3)t}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Т. (об экспоненц. предст. з. К. для (т ЛВУ) $\vec{f}$ непр. на I.

Тогда $\forall s \in I$ $\forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ реш. $D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f}$, $t \in I$ $\vec{x}(s) = \vec{\xi}$

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-s)}\vec{\xi} + \int_s^t e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

$\square$ $$D\vec{x} = D(e^{A(t-s)})\vec{\xi} + D\left(e^{At}\int_s^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)\,d\tau\right) = Ae^{A(t-s)}\vec{\xi} +$$

$$+ Ae^{At}\int_s^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)\,d\tau + e^{At}\cdot e^{-At}\vec{f}(t) =$$

$$= A\left(e^{A(t-s)}\vec{\xi} + \int_s^t e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)\,d\tau\right) + \vec{f}(t).$$

$$x(s) = e^{A0}\vec{\xi} + \int_s^s e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)\,d\tau = E\vec{\xi} + 0 = \vec{\xi}$$

$\boxtimes$ Пр-ло Коши для реш. неод. д.у.

e^{At} - базисная (фундаментальная) матрица для $D\vec{x} = A\vec{x}$, т.е.

e^{At} удовлет. ур и $\det e^{At} = e^{\operatorname{tr} At} \neq 0 \quad \forall t$.

$X(t)$ - фунд. матр. нормир. в т. s, если $X(s) = E$

$X_1(t)$ - фунд. матр. и $X_2(t)$ - фунд. матр. $\exists$ невырожд. матр. C:

$$X_1 = X_2 \cdot C$$

Пусть $X_0(t)$ нормир. в т. 0 $\quad X_0(0) = E$

$X_s(t)$ нормир. в т. s $\quad X_s(s) = E$

Если $X_s(t) = X_0(t) \cdot C \Rightarrow X_s(0) = X_0(0) \cdot C \Rightarrow X_s(0) = C$

$$\Rightarrow X_s(t) = X_0(t) \cdot X_s(0) \Rightarrow X_0(t) = X_s(t) \cdot X_s^{-1}(0)$$

Пусть $X(t)$ произв. фунд. матр. $\Rightarrow$ $X(t) \cdot X^{-1}(\tau) = K(t,\tau)$

$\forall\, t$ $K(t,\tau)$ фунд. матр. решений, причём

$K(\tau,\tau) = E$

$K(t,\tau)$ наз. <u>матр. Коши</u> ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$

Если A пост. матр., то $K(t,\tau) = e^{At} e^{-A\tau} = e^{A(t-\tau)}$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

1) $A = \mathrm{diag}\{a_1, \dots a_n\}$, $A^k = \mathrm{diag}\{a_1^k, \dots a_n^k\}$

$$e^{At} = \mathrm{diag}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^l t^l}{l!}, \dots \right\} =$$

$$= \mathrm{diag}\{ e^{a_1 t}, e^{a_2 t}, \dots e^{a_n t} \}$$

$\exists S : \det S \neq 0$ и $S^{-1} A S = J$,

$J = \cancel{\mathrm{diag}}\{ J_1(\lambda_1), \dots J_{p_m}(\lambda_m) \}$

Хар. числу λ_1 кратности k соответствует столько клеток Жордана $J_{\rho_1}(\lambda_1), J_{\rho_2}(\lambda_1), \dots J_{\rho_m}(\lambda_1)$ сколько лин. незав. векторов соот. хар. числу λ_1, т.е

$m = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_1 E)$ $\qquad \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m = k$

Обозначим $J_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$

$$e^{At} = \sum \frac{SJ^kS^{-1}t^k}{k!} = S\left(\sum \frac{J^kt^k}{k!}\right)S^{-1} = Se^{Jt}S^{-1}$$

$A = SJS^{-1}$

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}\{e^{J_1t}, e^{J_2t}, \dots e^{J_mt}\}$$

$$J(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\ 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}}_{p} \Big\}\, p \qquad J(\lambda) = \lambda E + H \qquad H^p = 0$$

$$EH = HE \Rightarrow e^{J(\lambda)t} = e^{\lambda E t + Ht} = e^{\lambda H t} \cdot e^{Ht} = e^{\lambda t} E e^{Ht} = \underline{\underline{e^{\lambda t} e^{Ht}}}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = H_1^2, \ \ldots \quad H_{p-1} = H_1^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^k = 0 \quad k \geq p \qquad H^0 = E$$

$$e^{Ht} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{H^k t^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{J(\lambda)t} = e^{\lambda t} e^{Ht} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Пример.

$$\underset{A}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}} \qquad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & & 0 & \\ 0 & e^{2t} & & & \\ & & e^{-3t} & te^{-3t} & \frac{t^2}{2!}e^{-3t} \\ & 0 & 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ & & 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$