Лекция 3

«Однородное линейное стационарное уравнение n–ого порядка (оСтЛ-n). Базис пространства решений оСтЛ-n»

Общие св-ва решений лин. ур.

$$D^n x + a_{n-1}(t) D^{n-1} x + \ldots + a_1(t) D x + a_0(t) x = f(t)$$

$L_n x = f$ L_n - линейный оператор, т.е $L_n(z_1+z_2) = L_n(z_1) + L_n(z_2)$

$L_n(\alpha z) = \alpha L_n(z)$

1) Множ. решений лин. однородного ур. есть линейное пространство

2) Если $x_1 : L_n x_1 = f_1, \ldots \; x_m : L_n x_m = f_m \Rightarrow L_n(x_1 + \ldots + x_m) = f_1 + \ldots + f_m$

3) Структура общ. реш. лин. неодн. ур

Если x и y реш. ур. $L_n x = f$, $L_n y = f$ $\Rightarrow z = x - y$ есть реш. ур. $L_n z = 0$

Др. словами, общ. реш. лин. неодн. ур = общее реш. одн + некоторое частное неодн. ур.

L_n наз. стационарным, если $a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Однор. стац. лин. ур. n-ого пор. (оСтЛ-n)

Наша цель – доказать, что задача

$$\begin{cases} L_n x = 0 \\ D^k x(s) = \xi_k, \ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$ однозначно разрешима

Лемма 1 (о факторизации линейн. стац. опер.)

$$L_n = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0 \Rightarrow L_n = (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \ldots (D - \lambda_k)^{m_k}$$

λ_j корни характеристического ур. $\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$

m_j кратность λ_j

<u>характер. числа</u> опер. L_n

Док.-во $L_2 = D^2 + a_1 D + a_0 \qquad a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad a_0 = \lambda_1 \lambda_2$

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = D^2 - \lambda_2 D - \lambda_1 D + \lambda_1 \lambda_2 = D^2 + a_1 D + a_0$$

$\boxtimes$

Откуда взялось хар. ур.? Эйлер взял $x = e^{\lambda t}$ и подставил в ур.

$$0 = D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_0 x = (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_0) e^{\lambda t}$$

Лемма 2.

$$(D-\lambda)^m (e^{\lambda t} z) = e^{\lambda t} D^m z$$

□ $$(D-\lambda)(e^{\lambda t} z) = D(e^{\lambda t} z) - \lambda e^{\lambda t} z = \lambda e^{\lambda t} z + e^{\lambda t} Dz - \lambda e^{\lambda t} z =$$

$$= e^{\lambda t} Dz$$

$$(D-\lambda)^{n+1} (e^{\lambda t} z) = (D-\lambda)\left((D-\lambda)^n (e^{\lambda t} z)\right) = (D-\lambda)(e^{\lambda t} D^n z) =$$

$$= e^{\lambda t} D^{n+1} z$$

⊠

Теорема (о разрешимости з. К для оСЛ-п)

З.К. $\begin{cases} L_n z = 0 \\ D^k z(s) = \xi_k, \ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$ $\forall s \in \mathbb{R} \ \forall \xi_k \in \mathbb{C}$

однозначно разрешима на $\mathbb{R}$ и её реш. представимо в виде:

$$z(t) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(t) e^{\lambda_j t}$$, λ_j хар. числа опр. L_n с кратностями m_j

$\deg Q_j \leq m_j - 1$

Коэф. многочленов Q_j – лин. формы от ξ_k

$\square$ $L_2 z = 0 \quad z(s) = \xi_0, Dz(s) = \xi_1$

$$L_2 = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2) \qquad (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)z = 0$$

$$w = (D-\lambda_2)z$$

$$\begin{cases} (D-\lambda_1)w = 0 \\ w(s) = \xi_1 - \lambda_2 \xi_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (D-\lambda_2)z = w \\ z(s) = \xi_0 \end{cases}$$

Ф. Коши

$$w(t) = e^{\lambda_1(t-s)}(\xi_1 - \lambda_2\xi_0) + \int_s^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \cdot 0\, d\tau = e^{\lambda_1(t-s)}(\xi_1 - \lambda_2 \xi_0)$$

$$\begin{cases} (D-\lambda_2)z = w_0 e^{\lambda_1(t-s)} \\ z(s) = \xi_0 \end{cases}$$

Формула Коши

$$z(t) = e^{\lambda_2(t-s)} \zeta_0 + \int_s^t e^{\lambda_2(t-\tau)} w_0 e^{\lambda_1(\tau-s)} \, d\tau =$$

$$= e^{\lambda_2(t-s)} \zeta_0 + w_0 e^{-\lambda_1 s} e^{\lambda_2 t} \int_s^t e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} \, d\tau$$

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \longrightarrow \dfrac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} - e^{(\lambda_1-\lambda_2)s}}{\lambda_1-\lambda_2}$

$\Downarrow$

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

б) $\lambda_1 = \lambda_2$

$$e^{\lambda_2(t-s)} \zeta_0 + w_0 e^{-\lambda_1 s} e^{\lambda_2 t} (t-s) = (A_1 + A_2 t) e^{\lambda_1 t}$$

$\boxtimes$

Следствия.

1) Единст. реш. з. К $\begin{cases} L_n z = 0 \\ D^k z(s) = 0 \end{cases}$ явл. $z \equiv 0$ на $\mathbb{R}$

2) Если $a_k \in \mathbb{R}$ в L_n и $\xi_k \in \mathbb{R}$, то з. К. разрешима и её реш. представляется в виде:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{l}{}' Q_j(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{j=l+1}^{r}{}' \left(Q_j(t) \cos \beta_j t + Q_j^* \sin \beta_j t\right) e^{\alpha_j t}$$

$\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, l}$ $\qquad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ $\quad \beta_j \neq 0$ $\quad j = \overline{l+1, r}$

$$\lambda_j = \alpha_j + i \beta_j$$

кратности $\lambda_j - m_j$

$$\deg (Q_j, Q_j^*) \leq m_j - 1$$

Теорема (о полном решении о(т)λ-н)

Полное реш. ур. $L_n z = 0$ задаётся в виде квазиполинома

$z(t) = Q_1(t) e^{\lambda_1 t} + \ldots + Q_m(t) e^{\lambda_m t}$, $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ - хар. числа

опер. L_n с крат. $n_1, \ldots n_m$, а $\deg Q_j = n_j - 1$

□ ∀ нач. задача имеет реш. в виде квазипол.

$$z(t) = Q_1(t) e^{\lambda_1 t} + \ldots + Q_m(t) e^{\lambda_m t}.$$ Осталось пок, что

квазипол. уд. ур

$$L_n\left(\sum_{j=1}^{m} Q_j(t) e^{\lambda_j t}\right) = \sum_{j=1}^{m} L_n\left(Q_j(t) e^{\lambda_j t}\right) = \sum_{j=1}^{m} (D-\lambda_1)^{n_1} \ldots (D-\lambda_n)^{n_m} \left(Q_j(t) e^{\lambda_j t}\right)$$

$$e^{\lambda_j t} D^{n_j}(Q_j(t))$$

☒

Замечание. Если L_n имеет коэф. $a_k \in \mathbb{R}$, то полное реш. $L_n x = 0$

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} Q_j(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{j=r+1}^{\ell} \left(Q_j(t) \cos \beta_j t + Q_j^*(t) \sin \beta_j t \right) e^{\alpha_j t}$$

$$\lambda_1, \dots \lambda_r \qquad \alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i, \quad \dots \quad \alpha_\ell + \beta_\ell i$$

$$n_1, \dots n_r \qquad n_{r+1}, \qquad n_\ell$$

$$\deg Q_j = n_j - 1, \quad \deg Q_j^* = n_j - 1$$

Замечание. Ур. $L_n z = f$

его реш. $z = z_{одн} + z_{част}$

частное решение ур. $L_n z = f$

Квазиполином

общее решение ур $L_n z = 0$

Пример. Действительное реш. ур $D^2x+w^2x=0$

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$\lambda^2+w^2=0$

$\lambda_{1,2} = \pm wi$

Комплексное реш. ур $D^2z+w^2z=0$

$$z(t) = A_1 e^{-wit} + A_2 e^{wit}$$

A_1, A_2

Комплексные числа!

$z_1, \dots z_n$ $(n-1)$ раз диф

Вронскиан $\rightarrow$ $W(t) = \begin{vmatrix} z_1 & \dots & z_n \\ Dz_1 & & Dz_n \\ \vdots & & \vdots \\ D^{n-1}z_1 & & D^{n-1}z_n \end{vmatrix}$ Josef Wronski 1776-1853

Теор. (Остроградского – Лиувилля)
1801-1862 1809-1882

$D^n z + a_{n-1} D^{n-1} z + \dots + a_0 z = 0$ Если $z_1, \dots z_n$ реш. ур. $\Rightarrow$

$$W(t) = W(s) e^{-a_{n-1}(t-s)} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$\square$ $n=2$

$$DW(t) = D\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ Dz_1 & Dz_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Dz_1 & Dz_2 \\ Dz_1 & Dz_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ D^2 z_1 & D^2 z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ -a_1 Dz_1 - a_0 z_1 & -a_1 Dz_2 - a_0 z_2 \end{vmatrix} = -a_1 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ Dz_1 & Dz_2 \end{vmatrix} = -a_1 W(t)$$

$$DW(t) = -a_1 W(t)$$

$$\Downarrow$$

$$W(t) = Ce^{-a_1 t} \qquad W(s) = Ce^{-a_1 s} \Rightarrow C = W(s)e^{a_1 s}$$

$$W(t) = W(s)\, e^{-a_1 (t-s)}$$

$\boxtimes$

<u>Следствие.</u> Вронскиан сист. реш. ур. $L_n z = 0$ либо равен нулю либо не обращается в нуль ни в одной точке

□ Доп. $\exists\, t_0 : W(t_0) = 0 \Rightarrow \forall s \quad \underset{0}{\underset{\shortparallel}{W(t_0)}} = W(s)\, e^{-a_{n-1}(t_0 - s)} \Rightarrow$

$\Rightarrow W(s) = 0$

⊠

Опр. Сист. ф. $f_1, \dots f_n$, $I \subset \mathbb{R}$ <u>лин. зав</u>, если

$\exists$ $c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ не все равные нулю ($c_1^2 + \dots + c_n^2 \neq 0$)

и $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$ $\forall$ $t \in I$ (над $\mathbb{C}$ $|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 \neq 0$)

<u>лин. незав</u>

$$\forall\ c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 \neq 0$$

$$\exists\ t_0 \in I \ : \ c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) + \dots + c_n f_n(t_0) \neq 0$$

Пример. $\sin t$, $\cos t$

$e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$, $\dots e^{\lambda_n t}$ $\quad \lambda_i$ различ.

Теор: (о лин. зав. реш. ур. $L_n z=0$) Система решений $z_1, \dots z_n$ ур $L_n z=0$ лин. зав. на $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$, что

$$W(t_0)=0$$

$\Rightarrow$) $z_1 \dots z_n$ лин. зав $\Rightarrow$ некот $z_j = c_1 z_1 + \dots + c_n z_n$ $\Rightarrow$ столбец определителя Вронского будет лин. комб. остальных столбцов $\Rightarrow$ $W=0$

$\Leftarrow$ $\exists\, t_0 \in I$, что $W(t_0)=0$. Рассм. лин. сист. относит. $c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} z_1(t_0)c_1 + z_2(t_0)c_2 + \dots + z_n(t_0)c_n = 0 \\ z_1'(t_0)c_1 + z_2'(t_0)c_2 + \dots + z_n'(t_0)c_n = 0 \\ \vdots \\ z_1^{(n-1)}(t_0)c_1 + z_2^{(n-1)}(t_0)c_2 + \dots + z_n^{(n-1)}(t_0)c_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ ненул. реш. } c_1^*, \dots c_n^*$$

построим $z = c_1^* z_1 + \dots + c_n^* z_n$ z реш. ур $L_n z = 0$ и $D^k z(t_0) = 0$ $k=0,\dots n-1$. Но по теор. о разрешимости для

$$\begin{cases} L_n z = 0 \\ D^k z(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z \equiv 0 \Rightarrow z_1, \dots z_n \text{ лин. зав.}$$

$\boxtimes$

Следст.* Для того, чтобы реш. $z_1, \dots z_n$ ур $L_n z = 0$ были лин. незав. на $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, t_0 \in \mathbb{R} : W(t_0) \neq 0$

$\Rightarrow$) Доп. противное $z_1, \dots z_n$ лин. незав. и $W \equiv 0$ по Теор. $z_1, \dots z_n$ л. зав Противоречие с предпол.

$\Leftarrow$) $W(t_0) \neq 0$ и $z_1 \dots z_n$ зависимы Сл. к Теор. Остр-Лиув. либо $W \equiv 0$ либо $\underline{W(t) \neq 0 \ \forall t}$, но по Теор. $\exists\, t_1 : W(t_1) = 0$ Противоречие.

Необходимый признак лин. зав. сист. ф. $f_1, \dots f_n$

Теор. Если $f_1, \dots f_n$ лин. зав. на I и $f_i \in C^{(n-1)}(I)$, то $W \equiv 0$

$\square$ $f_1, \dots f_n$ лин. зав. $\exists$ нетрив. комбин. $\sum \alpha_i f_i \equiv 0$

Пусть для опред. $\alpha_1 \neq 0$

$$f_1^{(k)} = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} f_i^{(k)} \Rightarrow W \equiv 0$$

$k = 0, 1, \dots n-1$

$\boxtimes$

Сл. Если $W(t_0) \neq 0$, то $f_1, \dots f_n$ лин. незав

Зам. Из $W \equiv 0 \not\Rightarrow$ лин. зав. сист. функций

Пример лин. незав. сист. ф, у кот. Вр. = 0

$f_1 = t^2$, $f_2 = t|t|$, $I = [-1, 1]$

$$\text{const} \neq f_1/f_2 = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases} \Rightarrow f_1, f_2 \text{ лин. незав.}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0$$

Базис пр-ва реш. лин. одн. стац. ур. n-ого пор.

n задач Коши

$$\begin{cases} L_n \varphi_i = 0 \\ D^k \varphi_i(0) = \delta_{ik} \end{cases}$$

Каждая из задач имеет реш. $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots \varphi_{n-1}(t)$

По Следст.* $\varphi_0(t), \dots \varphi_{n-1}(t)$ лин. незав, т.к $W(0) = 1$

Т. (о представлении реш. $L_n z = 0$) $\forall$ реш. $z(t)$ ур. $L_n z = 0$ можно представить в виде

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(t), \quad c_k = D^k z(0), \quad k = 0, 1, \dots n-1$$

$\square$ Функция $\sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(t)$ есть лин. комб. реш.

ур. $L_n z = 0$ $\Rightarrow$ сама явл. реш., причём

$D^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i(t) \right) \Big|_{t=0} = c_k$. В то же время

$\forall$ реш z ур $L_n z = 0$ однозначно опред. (Т. о С-т Λ-n)

нач. усл $D^k z(0) = c_k$ $\Downarrow$ $z = \sum_{j=1}^{r} Q_j(t) e^{\lambda_j t}$

откуда и следует представление.

$\boxtimes$

В силу линейности L_n множ. реш. ур. $L_n z = 0$ явл. линейным пространством. Из док. теор. $\Rightarrow$ что пр-во реш. ур. конечномерно ($\varphi_0, \dots \varphi_{n-1}$ лин. незав.), $(\dim = n)$

а Сист. ф. $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots \varphi_{n-1}(t)$ явл. базисом этого пр-ва.

Сист. $\varphi_0(t) \dots \varphi_{n-1}(t)$ наз базисом Коши, норм. в $t = 0$.

Говорят, что $\varphi_0, \dots \varphi_{n-1}$ обр. фунд. сист. реш. (ФСР)

Огюстен Луи Коши (1789-1857)

Зам. Если $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_{n-1}$ явл. лин. незав. реш. ур. $L_n z = 0$, то они образуют базис пространства реш. ур $L_n z = 0$ и общее реш. ур $L_n z = 0$ представимо в виде:

$$C_0 \psi_0(t) + C_1 \psi_1(t) + \dots + C_{n-1} \psi_{n-1}(t)$$

Пример. $D^3 x - 3D^2 x + 3Dx - x = 0$ (!)

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0$$

$$x = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2) e^t$$

$$\psi_0 = e^t, \quad \psi_1 = t e^t, \quad \psi_2 = t^2 e^t$$

базис пр-ва реш. ур (!)

Лемма о сдвиге реш. одн. ур $L_n z = 0$

Лемма. $x(t)$ реш. ур. $L_n z = 0$, то $y(t) = x(t-s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$ также явл. реш. ур. $L_n z = 0$.

□ $D\, x(t-s) = \dfrac{d}{dt} x(t-s) = \dfrac{d\, x(t-s)}{d(t-s)} \dfrac{d(t-s)}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D^k x(t-s) = \frac{d^k\, x(t-s)}{d(t-s)^k} \qquad (*)$$

$$\frac{d^n x(t-s)}{d(t-s)^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t-s)}{d(t-s)^{n-1}} + \ldots + a_0 x(t-s) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

т.к $x(t)$ реш.

$$D^n x(t-s) + a_{n-1} D^{n-1} x(t-s) + \ldots + a_0 x(t-s) = 0$$

$L_n y = 0 \Rightarrow y(t) = x(t-s)$ реш. ур $L_n z = 0$.

⊠

Зам. 1 В силу $(*)$ $y(s) = x(0)$ $D^k y(s) = D^k x(0)$

$k = 1, \dots n-1$

Зам. 2 Если $\varphi_0(t), \dots \varphi_{n-1}(t)$ базис Коши, норм. в $t=0$, то

$\varphi_0(t-s), \dots \varphi_{n-1}(t-s)$ базис Коши, нормированный в точке $t=s$

$$\begin{cases} L_n z = 0 \\ D^k z(0) = \xi_k \end{cases} \qquad z(t) = \xi_0 \varphi_0(t) + \xi_1 \varphi_1(t) + \dots + \xi_{n-1} \varphi_{n-1}(t)$$

$$\begin{cases} L_n x = 0 \\ D^k x(s) = \xi_k^* \end{cases} \qquad x(t) = \xi_0^* \varphi_0(t-s) + \xi_1^* \varphi_1(t-s) + \dots + \xi_{n-1}^* \varphi_{n-1}(t-s)$$