Лекция 5

«Анри Пуанкаре.
Фазовые графики(диаграммы).
Фазовый портрет маятника»

Анри ПУАНКАРЕ (1854 - 1912)

Анри Пуанкаре — выдающийся французский ученый широкого профиля, внесший большой вклад во многие разделы математики, физики и механики. Основоположник качественных методов теории дифференциальных уравнений и топологии. Создал основы теории устойчивости движения. В его статьях до работ А. Эйнштейна были сформулированы основные положения специальной теории относительности, такие как, условность понятия одновременности, принцип относительности, постоянство скорости света, синхронизация часов световыми сигналами, преобразования Лоренца, инвариантность уравнений Максвелла и др. Разработал и применил метод малого параметра к задачам небесной механики, провел классическое исследование задачи трех тел. В философии создал новое направление, получившее название конвенционализма.

Основные математические результаты Анри Пуанкаре

Пуанкаре исследовал вопрос об особых точках дифференциальных уравнений. Он выделил и классифицировал особые точки семейства интегральных кривых, изучил характер поведения интегральных кривых в окрестности особых точек, исследовал предельные циклы. Четыре больших мемуара под общим названием *"О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями"*, вышедшие в свет в 1882-1886 годах составили содержание нового раздела математики. Название ему дал сам Пуанкаре: качественные методы теории дифференциальных уравнений. До него этот кардинально новый подход даже не затрагивался. Как одну из задач, которая решается качественными методами, он изучал интегральные кривые, заданные на торе. Пуанкаре разработал также метод малого параметра и теорию интегральных инвариантов, заложил основы теории устойчивости дифференциальных уравнений по начальным условиям и малым параметрам.

Подобно Эйлеру, Пуанкаре за короткий срок переосмыслил и обновил складывавшийся в течение двух столетий математический аппарат небесной механики, использовав самые последние достижения математики. В трехтомном трактате *"Новые методы небесной механики"* (1892-1899) Пуанкаре исследовал периодические и асимптотические решения дифференциальных уравнений, доказал асимптотичность некоторых рядов, являющихся решениями дифференциальных уравнений с частными производными, ввел методы малого параметра, метод неподвижных точек. Ему принадлежат также важные для небесной механики труды об устойчивости движения и о фигурах равновесия гравитирующей вращающейся жидкости. Метод "интегральных инвариантов", использованный Пуанкаре, стал классическим средством теоретического исследования не только в механике и астрономии, но и в статической физике и в квантовой механике.

Основные результаты Анри Пуанкаре в области физики

В его статьях в 1897 - 1905 гг. *до работ А. Эйнштейна* были сформулированы основные положения специальной теории относительности, такие как, условность понятия одновременности, принцип относительности, постоянство скорости света, синхронизация часов световыми сигналами, преобразования Лоренца, инвариантность уравнений Максвелла и др.

Активной творческой деятельности Пуанкаре в области теоретической физики способствовала большая педагогическая работа: в течение ряда лет он прочел большой курс лекций в Сорбонне по всем разделам тогдашней теоретической физики, который затем был издан в 12-ти томах.

В своих лекциях Пуанкаре освещал и самые актуальные вопросы тогдашней физики, а также и свои соображения по их решению. Именно в одной из лекций 1899 г. Эд. Уиттекер обнаружил утверждение Пуанкаре о принципиальной невозможности наблюдения абсолютного движения в оптических и электромагнитных опытах.

В статье *"Теория Лоренца и принцип противодействия"*, опубликованной *в 1900 году*, Пуанкаре пишет, что энергия излучения обладает массой m, равной E/c^2. (В статье А. Эйнштейна эквивалентная формула $E = mc^2$ появилась значительно позже в 1905 году.)

В 1902 году Пуанкаре публикует работу *"Наука и гипотеза"*, которая имела большой резонанс в научном сообществе. Там он, в частности, писал: *"Не существует абсолютного пространства и мы воспринимаем только относительные движения. Не существует абсолютного времени: утверждение, что два промежутка времени равны друг другу, само по себе не имеет никакого смысла. Оно может обрести смысл только при определенных дополнительных условиях. У нас нет непосредственной интуиции одновременности двух событий, происходящих в двух разных театрах. Мы могли бы что-либо утверждать о содержании фактов механического порядка, только отнеся их к какой-либо неевклидовой геометрии"*.

В сентябре 1904 года Пуанкаре приглашают в США прочитать в Сент-Луисе лекцию о состоянии науки и о будущем математической физики. Он начал лекцию с того, что рассказал о той роли, которую выпало играть в современной ему науке великим принципам, таким как закон сохранения энергии, второе начало термодинамики, равенство действия противодействию, закон сохранения массы, принцип наименьшего действия. К ним он затем добавляет радикальное нововведение: принцип относительности, в соответствии с которым законы физики должны быть одинаковыми, как для неподвижного наблюдателя, так и для наблюдателя, вовлеченного в равномерное движение, так, что мы не имеем и не можем иметь никакого способа узнать находимся ли мы или нет в подобном движении". Пуанкаре закончил свою лекцию словами: *"Возможно, нам предстоит построить механику, контуры которой уже начинают проясняться и где возрастающая со скоростью масса сделает скорость света непреодолимым барьером"*.

Именно Пуанкаре принадлежит доказательство инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца (Пуанкаре нашел общий вид этих преобразований, он же и назвал их преобразованиями Лоренца). Из высказываний Хендрика Лоренца, лауреата Нобелевской премии по физике 1902 года: *Я не установил принципа относительности, как строго и универсально справедливого. Пуанкаре, напротив, получил полную инвариантность и сформулировал принцип относительности – понятие, которое он же первым и использовал.*

В своей статье, опубликованной в *"Заметках Академии наук"* 5 июня 1905 года, Пуанкаре дал новую форму преобразованиям Лоренца и установил их групповую природу. В силу этих преобразований уравнения Максвелла инвариантны и этим удовлетворяется принцип относительности.
http://www.h-cosmos.ru/papers/thist.htm

Качественный (геометрический) подход к дифференциальным уравнениям развили Анри Пуанкаре (1854-1912) и Александр Михайлович Ляпунов (1857-1918) — выдающийся русский математик и механик.

Идея подхода:
Изобразив на одном и том же графике (фазовом графике) в плоскости (x, Dx), кривые соответствующие разным значениям энергии, можно легко составить общее представление о характере движения с данной энергией.

ФАЗА — состояние системы, состояние системы определяется точкой плоскости (x, Dx), то есть состояние системы определяется положением и скоростью системы в момент времени *t*.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,y) \\ \dot{y}(t) = g(x,y) \end{cases}$$

$x = 0$ ← Реш. системы

$y = 0$ точка покоя (равновесия).

Поведение решений (траекторий) вблизи точки покоя?

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Классификация Пуанкаре

$$\underline{D^2 x + a_1 Dx + a_0 x = 0} \quad (*) \qquad L_2 x = 0$$

$$y = Dx \Rightarrow D^2 x = -a_1 y - a_0 x$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} Dx = y \\ Dy = -a_0 x - a_1 y \end{cases}$$

$x(t)$ наз. <u>стац. реш.</u> ур $(*)$, если $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\quad x(t) \equiv c = \mathrm{const}$

любое ур. $L_2 x = 0$ имеет трив. реш. $x(t) \equiv 0$

Если $a_0 = 0$, то существует нетр. реш. $x(t) = \xi \in \mathbb{R}$

Если $a_0 \neq 0$, то единст. стац. реш. $x(t) = 0$.

<u>Множ. точек</u> вида

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = Dx(t) \end{cases}$$ $x(t)$ реш. ур. $L_2 x = 0$

наз. <u>фазовым графиком</u> (диагр.), а плоскость Oxy – фазовой пл-тью

Фазовым графиком стац. реш. ур. $L_2 x = 0$ явл. точка $(\xi, 0)$
Такие точки наз. <u>точками покоя</u> (равновесия)

Когда $a_0 \neq 0$, то единств. точка покоя для ур $L_2 x = 0$ есть $(0,0)$.

Т. (о фазовых графиках) Фаз. графики ур. $D^2x + a_1 Dx + a_0 x = 0$ либо не пересек. либо совпадают.

□ Заметим, что фазовые графики соот. реш. $x(t)$ и реш. $x(t-s)$ будут одинаковыми. Доп. $\exists$ два пересек. граф.

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = Dx(t) \end{cases}$ и $\begin{cases} x = x^*(t) \\ y = Dx^*(t) \end{cases}$ Пусть общая точка $(\xi, \eta) \Rightarrow$

$\begin{cases} \xi = x(s) \\ \eta = Dx(s) \end{cases}$ $\begin{cases} \xi = x^*(s^*) \\ \eta = Dx^*(s^*) \end{cases}$ Построим $\tilde{x}(t) = x^*(t - s + s^*) \Rightarrow$

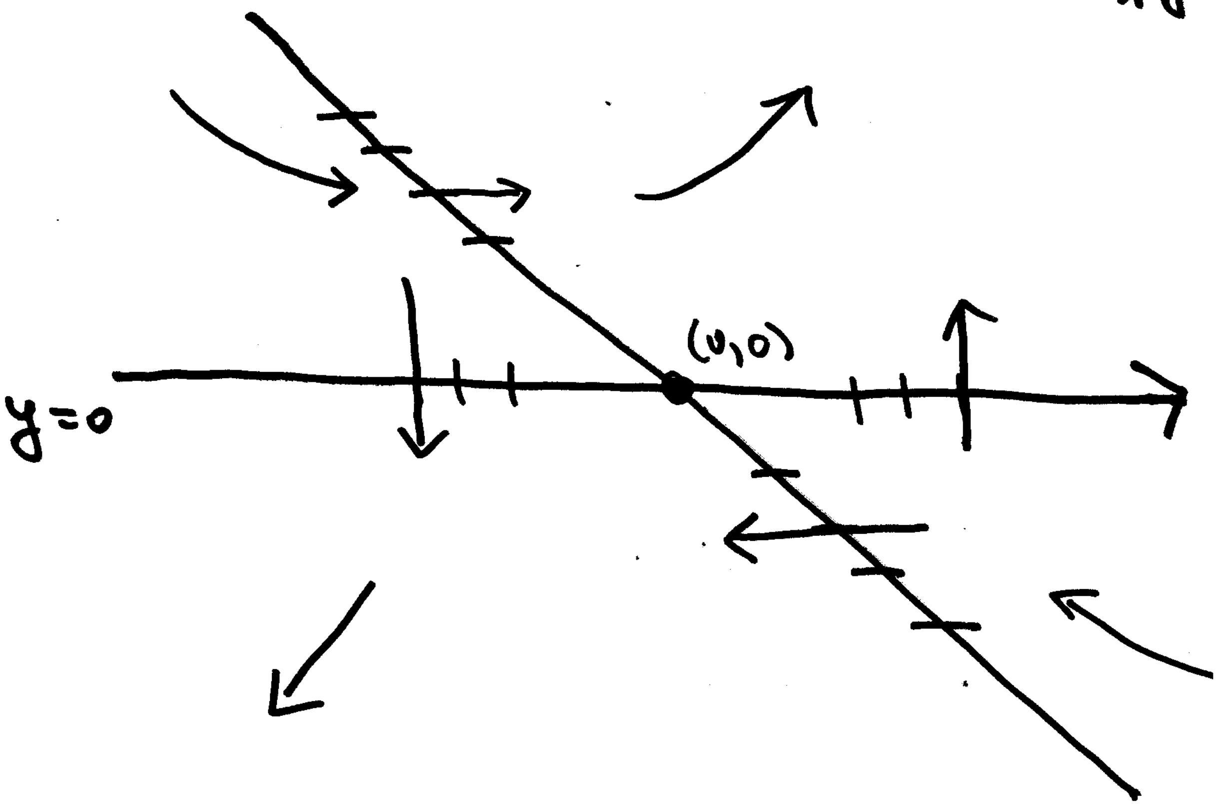
$\Rightarrow \begin{matrix} \tilde{x}(s) = x^*(s^*) = \xi = x(s) \\ D\tilde{x}(s) = Dx^*(s^*) = \eta = Dx(s) \end{matrix} \Rightarrow$ По теор. $\exists!$ з. Коши $\tilde{x} \equiv x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ фаз. гр. $\tilde{x}$ и x совп., но $\tilde{x}$ есть сдвиг x^* $\Rightarrow$ их гр. совпад. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ гр. x и x^* совп. $\boxtimes$

Напр. движения по фаз. графику. $a_0 \neq 0 \quad a_1 > 0$

Где $y > 0 \Rightarrow Dx(t) > 0$ движение по ф.гр. при возраст. t в верхн. полупл. происходит слева направо

$$-a_1 y - a_0 x > 0$$



$$Dy(t) = D^2 x(t) = -a_1 Dx(t) - a_0 x(t)$$

$$= -a_1 y - a_0 x > 0.$$

возрастает

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Dy(t)}{Dx(t)} = \frac{-a_1 y - a_0 x}{y}$$

$$-a_1 y - a_0 x < 0$$

убывает

$$-a_1 y - a_0 x = 0.$$

O^+ график, если $(x(t), y(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$

Лемма. $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} k \in \mathbb{R}$, а $(x(t), y(t))$ O^+ график, то k характ. число опер. L_2.

$\square$ $k = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim \dfrac{Dy(t)}{Dx(t)} = \lim \dfrac{-a_1 y(t) - a_0 x(t)}{y(t)} =$

$= -a_1 - a_0 \dfrac{1}{k}$ $\quad k \neq \infty, k \neq 0$ т.к $a_0 \neq 0 \Rightarrow$

$k = -a_1 - a_0 \dfrac{1}{k} \Rightarrow k^2 + a_1 k + a_0 = 0$ хар. ур. и k хар.ч. L_2

$\boxtimes$

Идея подхода: Изобразив на одном и том же графике в плоскости (x, Dx), кривые соответствующие разным значениям энергии, можно легко составить общее представление о характере движения с данной энергией.

$$\varphi'' + a_0 \varphi = 0, \quad a_0 > 0$$

малые колебания маятника

$$\frac{\varphi'^2}{2} + a_0 \frac{\varphi^2}{2} = E = \text{const}$$

↑ з-н сохр. эн.

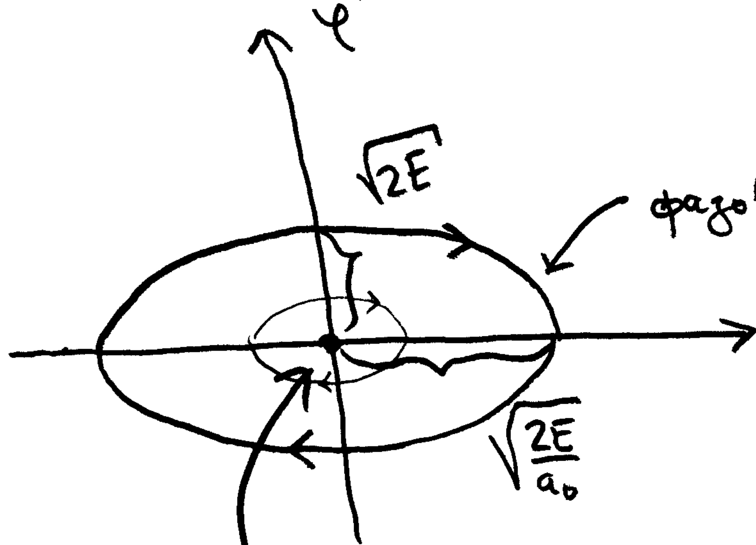
Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'^2}{2} + a_0 \frac{\varphi^2}{2}\right) = \varphi'\varphi'' + a_0 \varphi\varphi' =$$

$$= \varphi'(\varphi'' + a_0 \varphi) = 0.$$

$$\frac{\varphi'^2}{(\sqrt{2E})^2} + \frac{\varphi^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{a_0}}\right)^2} = 1$$

Эллипс



фазовой график

(0,0) точка покоя

тип точки покоя — центр

Типы точек покоя $\left(D^2x + a_1 Dx + a_0 x = 0 \right)$

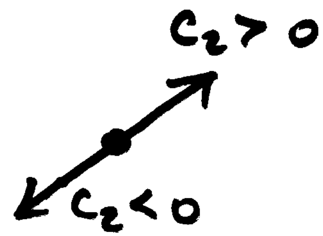
Седло хар. числа L_2 : $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$a_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$
$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

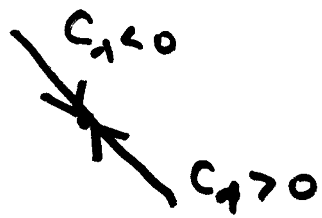
1. $C_1 = C_2 = 0$ фаз. тр. $(0,0)$ т. покоя

2. $C_1 = 0,\ C_2 \neq 0$ $\begin{cases} x(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow y = \lambda_2 x$



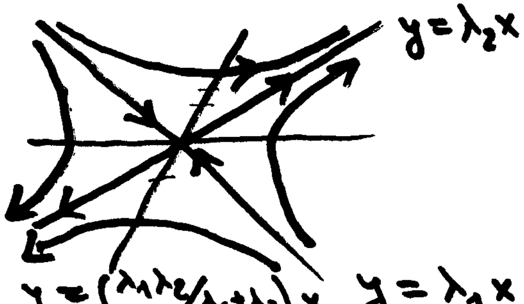
O^-, тр

3. $C_1 \neq 0,\ C_2 = 0$ $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \Rightarrow y = \lambda_1 x$



O^+, тр

4. $C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0$ $\quad -a_1 y - a_0 x = 0 \quad (\lambda_1 + \lambda_2) y - \lambda_1 \cdot \lambda_2 x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x$



$\dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} > \lambda_2$ действ.-но, $\lambda_1 \lambda_2 < \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} \begin{array}{l} \longrightarrow \lambda_2,\ t \to +\infty \\ \longrightarrow \lambda_1,\ t \to -\infty \end{array}$$

Бикритический узел $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 < 0, \ \lambda_2 < 0, \ \lambda_1 \neq \lambda_2$

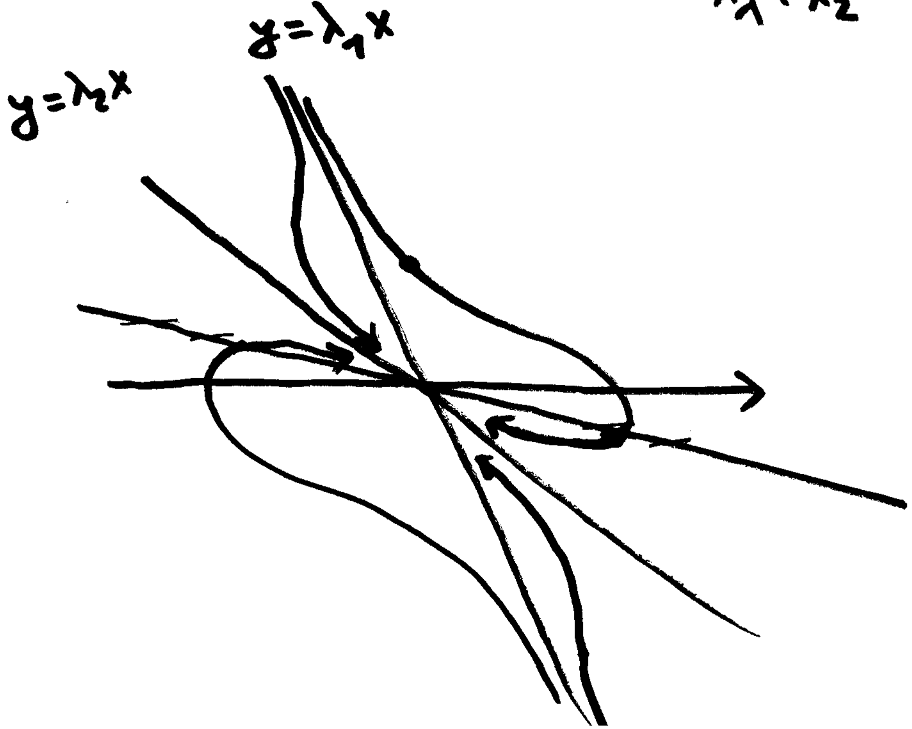
1. $C_1 = C_2 = 0 \qquad (0,0) \qquad \bullet$

2. $C_1 = 0, \ C_2 \neq 0 \Rightarrow \quad x(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \ y(t) = C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \quad y = \lambda_2 x$

3. $C_1 \neq 0, \ C_2 = 0 \Rightarrow \quad x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \ y(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \Rightarrow \quad y = \lambda_1 x$

4. $C_1 \neq 0, \ C_2 \neq 0 \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \qquad -a_1 y - a_0 x = 0, \ (\lambda_1 + \lambda_2) y - \lambda_1 \lambda_2 x = 0$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x$$



$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} \begin{array}{l} \to \lambda_2 \quad t \to +\infty \\ \to \lambda_1 \quad t \to -\infty \end{array}$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Монокрит. узел $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$

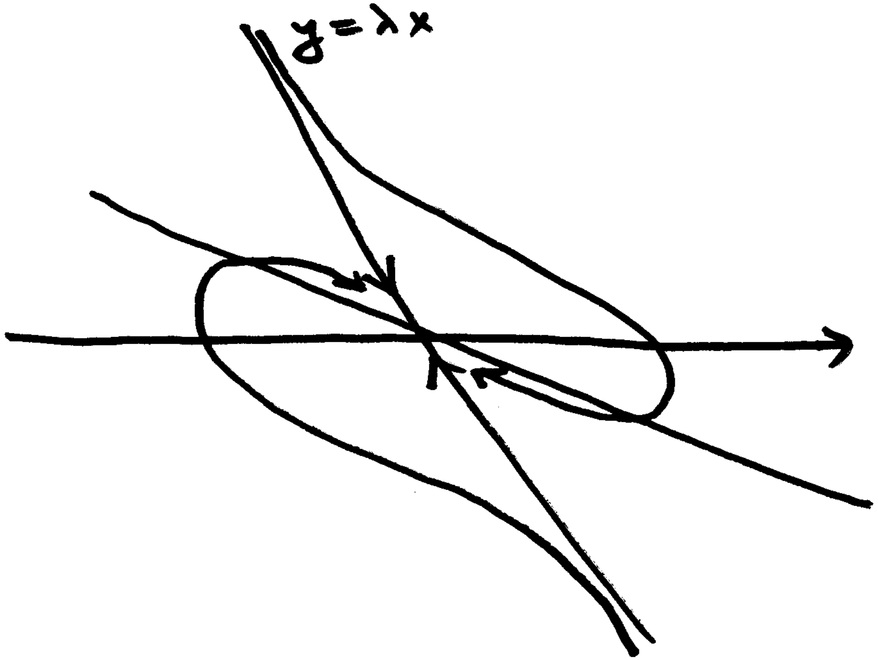
1. $C_1 = C_2 = 0$ $\quad (0,0) \quad \bullet$

2. $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ $\quad x(t) = C_2 e^{\lambda t}$, $y(t) = C_2 \lambda e^{\lambda t}$ $\quad y = \lambda x$

3. $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ $\quad x(t) = C_1 t e^{\lambda t}$, $y(t) = C_1 (1 + \lambda t) e^{\lambda t}$

4. $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ $\quad \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{(C_1 + \lambda C_1 t + \lambda C_2)\, e^{\lambda t}}{(C_1 t + C_2)\, e^{\lambda t}} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \lambda$

$y = \lambda x$



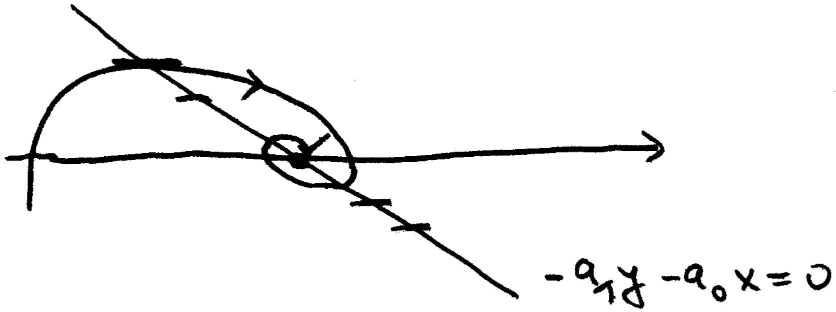
$-a_1 y - a_0 x = 0$

Фокус

$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha \neq 0$

$$x(t) = (c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t)\, e^{\alpha t} =$$
$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, \sin(\beta t + \varphi)\, e^{\alpha t}$$

$$y(t) = C\left(\beta\cos(\beta t + \varphi) + \alpha \sin(\beta t + \varphi)\right) e^{\alpha t}$$

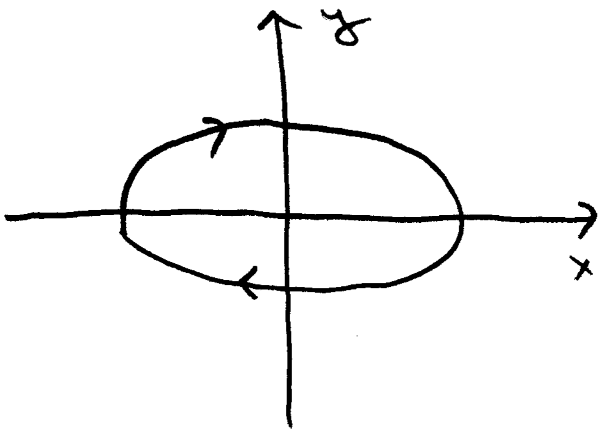


Центр

$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

$$x(t) = C \sin(\beta t + \varphi)$$

$$y(t) = C\beta \cos(\beta t + \varphi)$$



Классификация точек покоя невырожд. ур. $D^2x + a_1 Dx + a_0 x = 0$

$a_0 \neq 0$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ седло

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бикрит. узел

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$ монокрит. узел

$Im(\lambda_1) = -Im(\lambda_2) \neq 0$, $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) \neq 0$ фокус

$Im(\lambda_1) = -Im(\lambda_2) \neq 0$, $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$ центр

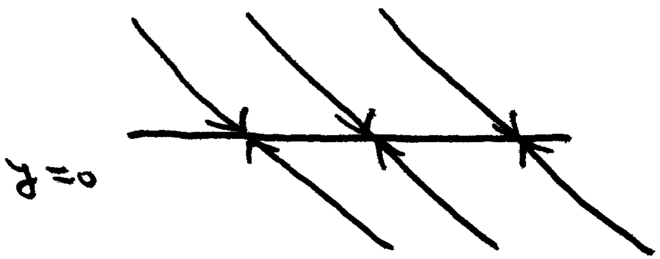
Вырожденное уравнение. $D^2x + a_1 Dx = 0 \quad (a_1 > 0)$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -a_1$, тогда $\quad x(t) = C_1 e^{-a_1 t} + C_2$

$y(t) = -a_1 C_1 e^{-a_1 t}$

При $C_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_2 \\ y(t) = 0 \end{cases} \Leftarrow$ прямая покоя

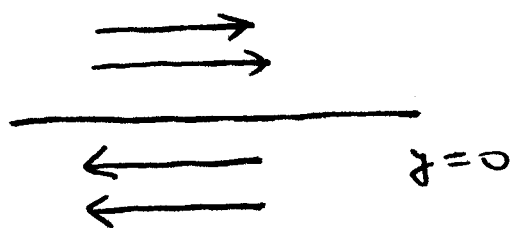
При $C_1 \neq 0 \Rightarrow \quad y = -a_1(x - C_2) \qquad (x(t), y(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (C_2, 0)$



$a_1 = 0$, то $\quad D^2 x = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\begin{cases} x(t) = C_1 t + C_2 \\ y(t) = C_1 \end{cases}$ $\qquad$ Если $C_1 = 0$, то $\begin{cases} x(t) = C_2 \\ y(t) = 0 \end{cases}$

Если $C_1 \neq 0$, то



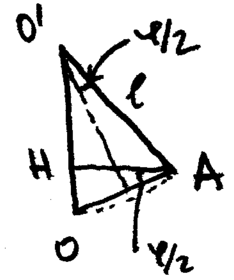
„Фазовий портрет маятника" $\varphi'' + \omega_0^2 \sin\varphi = 0$ $\quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$

$\varphi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ стац. реш.

кин. энергия $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \varphi'^2 = T$

пот. энергия

$U = mg\, 2l \sin^2\frac{\varphi}{2}$



$OA = 2l \sin\varphi/2 \Rightarrow OH = l - l\cos\varphi = l(1-\cos\varphi) =$

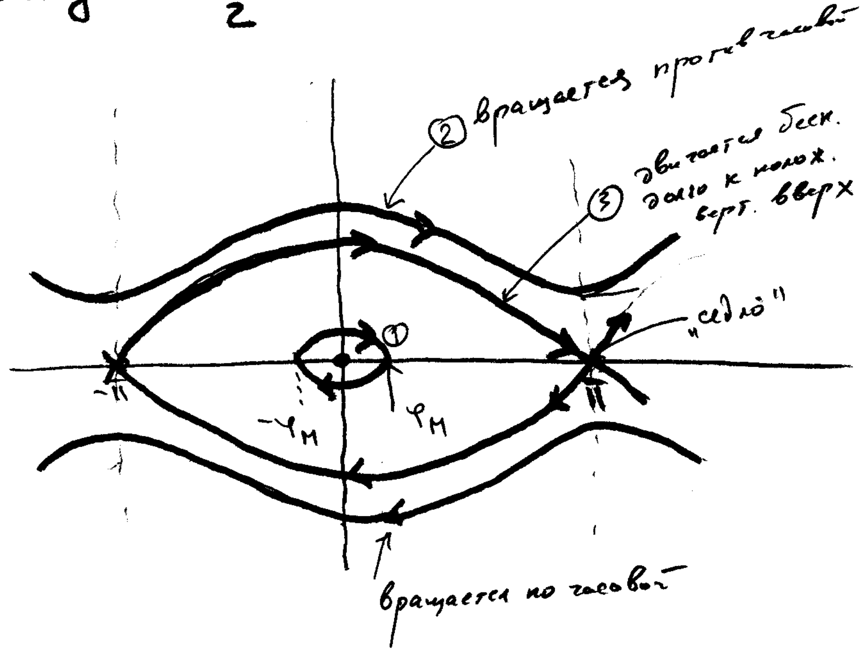
из $\Delta O'HA$ $\qquad = 2l\sin^2\varphi/2$

$U = mg \cdot OH$

$E = \frac{1}{2} m l^2 (\varphi')^2 + 2mgl \sin^2\frac{\varphi}{2}$

$$\boxed{\frac{(\varphi')^2}{\omega_0^2} + 4\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2E}{m\omega_0^2 l} = \frac{E}{E_0}}$$

$E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 l^2$



0) Если $E = 0$ маятник покоится, ф. гр. $(0,0)$

1) Если $\frac{E}{E_0} < 4$, то сущ. макс. знач. угла отклонения

$\varphi_M < \pi$, т.к. должно вып. $\frac{E}{E_0} - 4\sin^2\frac{\varphi}{2} > 0$

маят. колеблется между $-\varphi_M$ и φ_M

2) $\frac{E}{E_0} > 4$ маятник вращается

3) $\frac{E}{E_0} = 4$ из зак. сохр. $\frac{(\varphi')^2}{\omega_0^2} = 4\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 4\cos^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow$ $t=0$ $\varphi'(0) = 2\omega_0$, $\varphi(0) = 0$ $\Rightarrow E = 4E_0$

$\varphi' = 2\omega_0 \cos\varphi/2 \Rightarrow \varphi(t) = \pi - 4\,\mathrm{arctg}(e^{-\omega_0 t})$