Лекция 4

«Неоднородные линейные стационарные уравнения n–ого порядка и методы их решения»

$$L_n = (D-\delta_1)\ldots(D-\delta_n) \qquad \Delta\delta_j = \delta_j - \delta_{j-1}, \; j = \overline{2,n}$$

<u>Т</u>. (о реш. нулевой нач. задачи для неоднор. ур.)

$f \in C(I)$ $\quad \begin{cases} L_n x = f \\ D^k x(s) = 0 \quad k = \overline{0,n-1} \end{cases} \quad \forall s \in I \quad x(t) = \int\limits_s^t F(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$

$$F(t) = \int\limits_0^t d\tau_{n-1} \int\limits_0^{\tau_{n-1}} d\tau_{n-2} \ldots \int\limits_0^{\tau_2} e^{\delta_n t - \Delta\delta_n \tau_{n-1} - \ldots - \Delta\delta_2 \tau_1} d\tau_1$$

$\uparrow$ функция Коши

□

$n=2$ $\begin{cases} (D-\delta_1)(D-\delta_2)x = f(t) \\ x(s) = 0 \quad Dx(s) = 0 \end{cases}$

$$F(t) = \int\limits_0^t e^{\delta_2 t - (\delta_2 - \delta_1)\tau_1} d\tau_1$$

$\begin{cases} (D-\delta_2)x = w \\ x(s) = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} (D-\delta_1) w = f \\ w(s) = 0 \end{cases}$ т.к $\underset{0}{\underset{\parallel}{(D-\delta_2)x(s)}} = w(s)$

$\Downarrow$ по т. о разреш. з. К

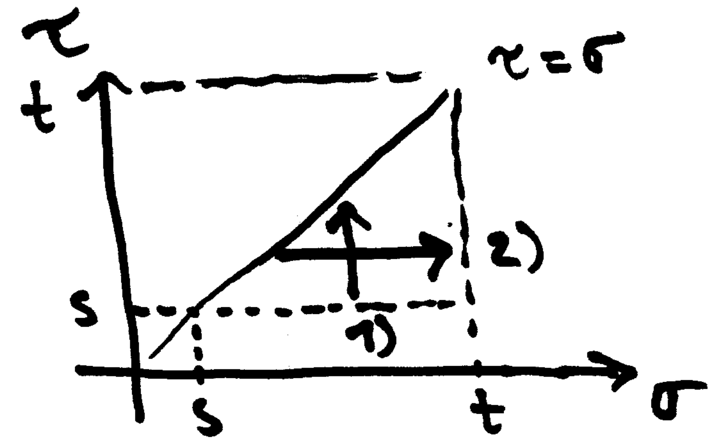
$$\Downarrow$$

$$w(t) = \int_s^t e^{\delta_1 (t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{cases} (D - \delta_2) x = w \\ x(s) = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \int_s^t e^{\delta_2 (t-\sigma)} \left(\int_s^\sigma e^{\delta_1 (\sigma-\tau)} f(\tau)\, d\tau \right) d\sigma$$

1) $= \int\limits_s^t \int\limits_s^\sigma e^{\delta_2(t-\sigma)} e^{\delta_1(\sigma-\tau)} f(\tau)\, d\tau\, d\sigma$



2) $= \int\limits_s^t d\tau \int\limits_\tau^t e^{\delta_2(t-\sigma)} e^{\delta_1(\sigma-\tau)} f(\tau)\, d\sigma$

$/\ \sigma - \tau = \tau_1 \Rightarrow \sigma = \tau_1 + \tau\ /$

$$= \int\limits_s^t \left\{ \int\limits_0^{t-\tau} e^{\delta_2(t-\tau-\tau_1)} e^{\delta_1 \tau_1}\, d\tau_1 \right\} f(\tau)\, d\tau = \int\limits_s^t F(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

$$F(t-\tau) = \int\limits_0^{t-\tau} e^{\delta_2(t-\tau) - \Delta\delta_2 \tau_1}\, d\tau_1$$

F ф. Коши оператора L_n не зав. от s и f.

Пример. Функция Коши опер. D^n

$$F(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\begin{cases} D^n x = f \\ D^k x(s) = 0, \ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

$$x(t) = \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau = \int_s^t F(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

Лемма. (о представл. стац. опер.)

$$L_n = (D-\delta_1)\dots(D-\delta_n)$$

$$L_n x = e^{\delta_1 t} D\left(e^{\Delta\delta_2 t} D\left(e^{\Delta\delta_3 t} D\left(\dots e^{\Delta\delta_n t} D\left(e^{-\delta_n t} x\right)\right)\dots\right)\right)$$

$\square$ $\quad n=2 \qquad L_2 x = e^{\delta_1 t} D\left(e^{(\delta_2-\delta_1)t} D\left(e^{-\delta_2 t} x\right)\right)$

$$(D-\delta)x = e^{\delta t} D\left(e^{-\delta t} x\right)$$

$$L_2 x = (D-\delta_1)(D-\delta_2)x = (D-\delta_1)\left(e^{\delta_2 t} D\left(e^{-\delta_2 t} x\right)\right) =$$

$$= e^{\delta_1 t} D\left(e^{-\delta_1 t} e^{\delta_2 t} D\left(e^{-\delta_2 t} x\right)\right)$$

$\boxtimes$

Теор. (о функции Коши стац. опер.)

$F(t)$ ф. Коши стац. опер. L_n совпадает с ф. $\varphi_{n-1}(t)$ из базиса Коши $\varphi_0(t), \varphi_1(t) \dots \varphi_{n-1}(t)$ нормированного в нуле.

□ $\varphi_{n-1}(t)$ уд.
$$\begin{cases} L_n \varphi_{n-1}(t) = 0 \\ D^k \varphi_{n-1}(0) = 0 \quad k = 0, \dots n-2 \\ D^{n-1} \varphi_{n-1}(0) = 1 \end{cases}$$

$$L_2 F = (D-\delta_1)(D-\delta_2) F = e^{\delta_1 t} D\left(e^{(\delta_2-\delta_1)t} D\left(e^{-\delta_2 t} F\right)\right) = \varnothing$$

$$F(t) = \int_0^t e^{\delta_2 t - (\delta_2-\delta_1)\tau_1} d\tau_1$$

$$\varnothing = e^{\delta_1 t} D\left(e^{(\delta_2-\delta_1)t} D\left(\int_0^t e^{-(\delta_2-\delta_1)\tau_1} d\tau_1\right)\right) =$$

$$= e^{\delta_1 t} D\, 1 = 0$$

$$F(t) = \int_0^t e^{\delta_2 t - (\delta_2 - \delta_1)\tau_1} \, d\tau_1$$

$$F(0) = 0$$

$$DF(t)\Big|_{t=0} = \delta_2 e^{\delta_2 t} \int_0^t e^{-(\delta_2 - \delta_1)\tau_1} \, d\tau_1 + e^{\delta_2 t} \left(e^{-(\delta_2 - \delta_1) t} \right)\Big|_{t=0} = 1$$

$\boxtimes$

З.К. для неодн. стац. лин. д.у. n-ого пор.

<u>Теор.</u> (о разреш. неодн. Ст Л-н)

$\forall f \in C(I)\ \forall s \in I\ \forall \xi_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\quad k = \overline{0, n-1}$

З. Коши

$$(*)\ \begin{cases} L_n x = f(t) \\ D^k x(s) = \xi_k, \ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$ имеет единственное решение

$$(**)\ x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots \varphi_{n-1}(t)$ базис Коши, нормир. в нуле

□ Рассм. З.К. $\begin{cases} L_n x = f \\ D^k x(s) = 0 \quad k = \overline{0, n-1} \end{cases} \Rightarrow \exists!$ реш.

$$x^*(t) = \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

Пусть $x(t)$ реш. $(*)$, тогда

рассм. $y = x - x^* \Rightarrow L_n y = L_n x - L_n x^* = f - f = 0$

$$D^k y(s) = D^k x(s) - D^k x^*(s) = \xi_k - 0 = \xi_k$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s)$$

$\varphi_0(t), \ldots \varphi_{n-1}(t)$ базис, норм. в нуле

$$\Downarrow$$

реш. задачи $(*)$ единст. и представимо в виде:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

⊠

Зам. Существование реш. $x(t)$ задачи (*) доказывается след. обр.

$$\begin{cases} (D-\delta_1)(D-\delta_2)x = f \\ x(s) = \xi_0 \\ Dx(s) = \xi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-\delta_2)x = \omega \\ x(s) = \xi_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D-\delta_1)\omega = f \\ \omega(s) = Dx(s) - \delta_2 x(s) = \xi_1 - \delta_2 \xi_0 \end{cases}$$

Формула $x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$ (**)

даёт метод Коши интегрир. ст Л-н

1) строим базис Коши, нормир. в нуле соответствующий ур $L_n x = 0$

2) выписываем реш. з.К $\begin{cases} L_n x = f \\ D^k x(s) = \xi_k \end{cases}$

по формуле (**)

3) упрощаем полученное выр.

Методы интегр. неодн. Ст Л-п. Лагранжа и Эйлера

$L_n x = f$

$f \in C(J)$

$$x_{одн}(t) = c_1 \psi_1(t) + c_2 \psi_2(t) + \ldots + c_n \psi_n(t)$$

общее реш. однор. ур $L_n x = 0$

$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ базис пр-ва реш. ур

Идея Лагранжа – поиск частного решения
1736–1813 ур. $L_n x = f$ в виде:

$$x^*(t) = x_2(t) = u_1(t)\psi_1(t) + u_2(t)\psi_2(t) + \ldots + u_n(t)\psi_n(t) \; (!)$$

Теор. $\forall f \in C(I)$ функция $x_{част}(t) = u_1(t)\,\psi_1(t) + \ldots + u_n(t)\,\psi_n(t)$ явл. реш. ур. $L_n x = f$, если $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ базис пр-ва реш. ур. $L_n x = 0$, а $u_1(t), \ldots u_n(t)$ первообразные функций $v_1, \ldots v_n$, кот. удовл. след. системе ур.

$$\begin{cases} v_1 \psi_1 + \ldots + v_n \psi_n = 0 \\ v_1 D\psi_1 + \ldots + v_n D\psi_n = 0 \\ \vdots \\ v_1 D^{n-1}\psi_1 + \ldots + v_n D^{n-1}\psi_n = f \end{cases}$$

$\square$ $n=2$

$$\begin{cases} v_1\psi_1 + v_2\psi_2 = 0 \\ v_1 D\psi_1 + v_2 D\psi_2 = f \end{cases}$$

ψ_1, ψ_2 базис $\Rightarrow W[\psi_1,\psi_2] \neq 0 \Rightarrow$ сист. имеет ед. реш.

f непр. и ψ_1,ψ_2 квазипол. $\Rightarrow$ непр. φ $\Rightarrow$ v_1, v_2 непр. $\Rightarrow$ первообр. $\exists$

$x^* = u_1\psi_1 + u_2\psi_2$ реш. ур. $L_2 x = f$

$u_1 = \int v_1\,dt$

$u_2 = \int v_2\,dt$

Действительно,

$$Dx^* = Du_1\psi_1 + u_1 D\psi_1 + Du_2\psi_2 + u_2 D\psi_2 =$$
$$= u_1 D\psi_1 + u_2 D\psi_2$$

$$D^2x^* = Du_1 D\psi_1 + u_1 D^2\psi_1 + Du_2 D\psi_2 + u_2 D^2\psi_2 =$$
$$= u_1 D^2\psi_1 + u_2 D^2\psi_2 + f$$

$$D^2x^* + a_1 Dx^* + a_0 x^* =$$
$$= u_1 D^2\psi_1 + u_2 D^2\psi_2 + f + a_1(u_1 D\psi_1 + u_2 D\psi_2) + a_0(u_1\psi_1 + u_2\psi_2)$$
$$= u_1[D^2\psi_1 + a_1 D\psi_1 + a_0\psi_1] + u_2[D^2\psi_2 + a_1 D\psi_2 + a_0\psi_2] + f = f$$

$\blacksquare$

Алг. Лагранжа

1) строим базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ соот. ур $L_n x = 0$

2) сост. систему и решаем её

3) находим первообр. ф-ций $v_1, \dots v_n \to x_1, \dots x_n$

Зам. Если известна ФСР для ур. $L_n x = 0$ то метод „работает" даже если L_n не явл. стац.

Пример реш. ур. методом Лагранжа. (методом произвольных постоянных)

$$x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t} \leftarrow$$ не явл. квазимн.

$$x_{одн}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t \qquad e^t,\ te^t \text{ — базис}$$

$$x^*(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)te^t \leftarrow$$ частное реш. ищем в виде

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)te^t = 0 \\ C_1'(t)e^t + C_2'(t)(e^t + te^t) = \frac{e^t}{t} \end{cases}$$

$$C_2'(e^t + te^t) - C_2' te^t = \frac{e^t}{t}$$

$$C_2' e^t = \frac{e^t}{t} \qquad C_2' = \frac{1}{t} \Rightarrow C_2(t) = \ln|t| + K_2$$

$$C_1' e^t + e^t = 0 \Rightarrow C_1'(t) = -1,\ C_1(t) = -t + K_1$$

$$x^*(t) = (-t + K_1)e^t + (\ln|t| + K_2)te^t \Leftrightarrow$$ можно пол. $K_1 = K_2 = 0$

$$x(t) = \underbrace{K_1 e^t + K_2 te^t}_{\text{реш одн}} + (te^t)\ln|t| - te^t = x_{одн}(t) + x_{част}(t)$$

Метод Эйлера

$$L_n x = \sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{\alpha_j t}$$

$$L_n x = P(t) e^{\alpha t}$$

α контрольное число квазипол.

Теор. Частное реш. ур. может быть представлено в виде $x^*(t) = t^r Q(t) e^{t}$

$\deg(Q) = \deg(P)$ коэфф. Q однозначно опред. коэфф. P, а r кратность характ. числа, которое <u>совпадает</u> с контрольным числом

$r=0$, если такие числа отсутствуют

□ Схема док-ва.

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2) = P(t)e^{\alpha t}$$

$$(D-\lambda_1)w = P(t)e^{\alpha t} \qquad w = (D-\lambda_2)x$$

$$e^{\lambda_1 t} D(e^{-\lambda_1 t} w) = P(t)e^{\alpha t}$$

$$D(e^{-\lambda_1 t} w) = P(t)e^{(\alpha-\lambda_1)t}$$

$$e^{-\lambda_1 t} w = \int_0^t P(\tau)e^{(\alpha-\lambda_1)\tau}d\tau + C$$

$$w = Ce^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}\int_0^t P(\tau)e^{(\alpha-\lambda_1)\tau}d\tau$$

⊠

Зам.

$$L_n x = (P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t)\, e^{\alpha t}$$

имеет действ. коэфф.

r - кратность хар. числа, кот. совпадает с контрольным числом квазипол. $\alpha + i\beta$

$$x^*(t) = t^r\,(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t)\, e^{\alpha t}$$

$$\deg(Q_1),\ \deg(Q_2) = \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$$

Правило Эйлера

$P(t)e^{\alpha t}$	$\lambda_i \neq \alpha \ \forall i$	$Q(t)e^{\alpha t}$, $\deg(Q)=\deg(P)$
$P(t)e^{\alpha t}$	$\exists j_0 : \lambda_{j_0}=\alpha$ λ_{j_0} имеет кр. r	$t^r Q(t)e^{\alpha t}$, $\deg(Q)=\deg(P)$
$e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t+P_2(t)\sin\beta t)$	$\lambda_j \neq \alpha \pm i\beta$ $\forall j$	$e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t)$ $\deg Q_1, \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$
$e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t+P_2(t)\sin\beta t)$	$\exists j_0 : \lambda_{j_0}=\alpha \pm i\beta$ λ_{j_0} имеет кратность r	$t^r e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t+Q_2(t)\sin\beta t)$

Алгоритм Эйлера

1) Находим хар. числа опер. L_n

2) Исп. табл. выписываем частное решение неодпор. ур.

Пример. $(D^2+1)(D-3)^2 x = \sin t + (t^2+1)e^{3t} + \cos 2t + te^{2t}$

$\lambda_1 = i \quad d_1 = 1$

$\lambda_2 = -i \quad d_2 = 1$

$\lambda_3 = 3 \quad d_3 = 2$

$\sin t \to t(A\sin t + B\cos t)$

$(t^2+1)e^{3t} \to t^2(A_1 t^2 + B_1 t + C_1)e^{3t}$

$\cos 2t \to \mathcal{D}_1 \cos 2t + \mathcal{D}_2 \sin 2t$

$te^{2t} \to (E_1 t + E_2)e^{2t}$

Аналогия метода Эйлера (Digital Signal Processing)

$$\begin{cases} x(n) - \frac{1}{4}x(n-2) = f(n), \ n \geq 0 \\ x(-1) = 0 \\ x(-2) = 0 \end{cases} \qquad f(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$x'' - \frac{1}{4}x = 0 \qquad e^{\lambda t}$$

Част. реш. будем искать в виде $x_{част} = C_1 \Rightarrow C_1 - \frac{1}{4}C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{4}{3}$

Рассм. одкор. $x(n) - \frac{1}{4}x(n-2) = 0$ $\quad z^n$

$$z^n - \frac{1}{4}z^{n-2} = z^{n-2}\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow z^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

аналог хар. ур.

$$\Rightarrow z_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \qquad x_{одн}(n) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$x(n) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{3}, \ n \geq 0$$

$$x(-1) = A_1 \cdot 2 - 2A_2 + \frac{4}{3} = 0$$

$$x(-2) = A_1 \cdot 4 + 4A_2 + \frac{4}{3} = 0$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} \quad A_2 = \frac{1}{6}$$

$$x(n) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{3}, \ n \geq 0$$