Лекция 10

«Методы решения одн.СтЛВУ на одном примере.

Устойчивость по Ляпунову решений СтЛВУ»

Метод Эйлера состоит в разыскании n лин. независимых решений ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$ в виде $\vec{x}(t) = \vec{\gamma} e^{\lambda t}$

λ собст. зн. A $\vec{\gamma}$ собств. вектор

Если независимых реш. вида $\vec{x}(t)$, соотв. собств. знач. меньше чем кратность этого собственного значения, то производится пополнение совокупности построенных лин. незав. решений с помощью функций вида:

$$\{\vec{a}_l t^l + \vec{a}_{l-1} t^{l-1} + \ldots + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0\} e^{\lambda t}$$

Более детально, если $\lambda = \lambda_0$ корень кратности k, то ему будет соответствовать ровно k лин. незав. решений:

m из них будут иметь вид $\vec{\gamma}_1(1) e^{\lambda_0 t}, \dots \vec{\gamma}_1(m) e^{\lambda_0 t}$

$\vec{\gamma}_1(1), \dots \vec{\gamma}_1(m)$ лин. незав. собств. векторы матр. A, $m = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_0 E)$

↑ число клеток Жордана соотв. собств. знач. λ_0

остальные $k-m$ будут иметь вид

$$\left\{ \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} \vec{\gamma}_1(j) + \frac{t^{q-2}}{(q-2)!} \vec{\gamma}_2(j) + \dots + \vec{\gamma}_q(j) \right\} e^{\lambda_0 t}, \qquad \begin{array}{l} q = 1, 2, \dots s(j) \\ j = 1, 2, \dots m \end{array}$$

присоединённые векторы к $\vec{\gamma}_1(j)$

$\vec{\gamma}_1(j) \neq 0$

$$A \vec{\gamma}_1(j) = \lambda_0 \vec{\gamma}_1(j)$$

$$A \vec{\gamma}_2(j) = \lambda_0 \vec{\gamma}_2(j) + \vec{\gamma}_1(j)$$

$$\vdots$$

$$A \vec{\gamma}_{s(j)}(j) = \lambda_0 \vec{\gamma}_{s(j)}(j) + \vec{\gamma}_{s(j)-1}(j)$$

Методы решения одн. СтЛВУ на одном примере.

$\boxed{\text{Эйлер}}$

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \qquad D\vec{x}=A\vec{x}$$

$$\vec{x}(t)=\vec{\gamma}e^{\lambda t}$$

$$\lambda\vec{\gamma}e^{\lambda t}=A\vec{\gamma}e^{\lambda t} \Rightarrow A\vec{\gamma}=\lambda\vec{\gamma} \qquad \det(A-\lambda E)=0$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -(1-\lambda^2)+2=0 \Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$$

$\lambda_1=i$

$$\begin{pmatrix}1-i & 1\\ -2 & -1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad (1-i)\gamma_1+\gamma_2=0 \Rightarrow \gamma_2=-2,\ \gamma_1=1+i$$

$$\begin{pmatrix}1+i\\ -2\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=-i$

$$\begin{pmatrix}1+i & 1\\ -2 & -1+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad (1+i)\beta_1+\beta_2=0 \Rightarrow \beta_2=-2,\ \beta_1=1-i$$

$$\begin{pmatrix}1-i\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} e^{it} \qquad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix} e^{-it}$$

$\mathrm{Re}\,\vec{x}(t)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,\vec{x}(t)$

2 лин. незав реш.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (1+i)(\cos t + i\sin t) \\ -2(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \\ -2\cos t + i(-2\sin t) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ -2\cos t & -2\sin t \end{pmatrix}$$

базисная матрица

$\boxed{\text{Коши}}$ (с матр. Жордана)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad D\vec{x} = A\vec{x} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\lambda_1 = i \quad \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -i \quad \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix}$$

Замена переменных $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$S\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = AS\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = S^{-1}AS\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)e^{it} & (1-i)e^{-it} \\ -2e^{it} & -2e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1+i)(\cos t + i\sin t) \\ -2(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \\ -2\cos t + i(-2\sin t) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ -2\cos t & -2\sin t \end{pmatrix}$$ ← базисная матрица

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ -2\cos t & -2\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Вычисление экспоненты матр.

$$e^{At} = e^{\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix}1+i&1-i\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{it}&0\\0&e^{-it}\end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix}(1+i)e^{it}&(1-i)e^{it}\\-2e^{it}&-2e^{-it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -\frac{(1+i)}{2}\, i e^{it} + \frac{(1-i)}{2}\, i e^{-it} & -\frac{1}{4}(1+i)^2 e^{it} - \frac{1}{4}(1-i)^2 e^{-it} \\ i e^{it} - i e^{-it} & \frac{1}{2}(1+i)e^{it} + \frac{1}{2}(1-i)e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} e^{it} + \frac{i+1}{2} e^{-it} & -\frac{1}{2} i e^{it} + \frac{1}{2} i e^{-it} \\ i(e^{it}-e^{-it}) & \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) + \frac{i}{2}(e^{it}-e^{-it}) \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Мазаник С.А. - Сорпонд И.Ю.}}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$$

лучше минимальный?

$$D^2\varphi + \varphi = 0 \qquad \varphi_1(t) = C_1\cos t + C_2 \sin t \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 1$$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi'(0) = 1$

$$\varphi_1(t) = \underline{\sin t = \alpha_1(t)}$$

α_{m-1}	$b_{m-1}\cdot\alpha_{m-1}$	$b_{m-2}\cdot\alpha_{m-1}$	...	$b_1\cdot\alpha_{m-1}$	b_0
α_{m-1}	$\alpha_{m-2} = D\alpha_{m-1} + b_{m-1}\cdot\alpha_{m-1}$	$\alpha_{m-3} = D\alpha_{m-2} + b_{m-2}\cdot\alpha_{m-1}$	...	$\alpha_0 = D\alpha_1 + b_1\alpha_{m-1}$	0

$\sin t$	$0\cdot\sin t$	$1\cdot\sin t$
$\sin t$	$D\sin t + 0\cdot\sin t$ $\parallel$ $\cos t$	0

$$e^{At} = \alpha_0(t)E + \alpha_1(t)A, \qquad \begin{matrix} \alpha_0(t) = \cos t \\ \alpha_1(t) = \sin t \end{matrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}t} = \cos t\cdot E + \sin t\cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t & \sin t \\ -2\sin t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Радченко Н.Я.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \qquad \det(A-\lambda E)=0 \qquad \lambda^2-\mathrm{tr}A\cdot\lambda+\det A=0$$

$$\mathcal{D}=(\mathrm{tr}A)^2-4\det A$$

$$P(\lambda)=\lambda^2+1$$

$\mathcal{D}=0^2-4=-4<0$ (компл.ч)

$\mathcal{D}>0$ (двойные)

$\mathcal{D}=0 \quad |a_{12}|+|a_{21}|\neq 0$ (дуальные)

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{tr}A}{2} & -\frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}\\ \frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2} & \frac{\mathrm{tr}A}{2}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{tr}A}{2} & \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2}\\ \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2} & \frac{\mathrm{tr}A}{2}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{tr}A}{2} & 0\\ 1 & \frac{\mathrm{tr}A}{2}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{tr}A}{2}+\frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}i \qquad \frac{\mathrm{tr}A}{2}+\frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2}\varkappa \qquad \frac{\mathrm{tr}A}{2}+\varepsilon$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\leftrightarrow i$$

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ u & v\end{pmatrix} \qquad AT=TB \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ u & v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad T^{-1}AT=B$$

$$u=1 \qquad v=-1$$

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Замена переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{pmatrix} = AT\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \dot z = iz$$

$$z(t) = e^{it}\cdot c = (\cos t + i\sin t)(c_1 + ic_2) = c_1\cos t - c_2\sin t + i(c_1\sin t + c_2\cos t)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\cos t - c_2\sin t \\ c_1\sin t + c_2\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t - \sin t & -\sin t - \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Вычисление экспоненты.

$$e^{At} = e^{TBT^{-1}t} = T e^{Bt} T^{-1}, \qquad e^{Bt} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} \longleftrightarrow e^{it} = \cos t + i \sin t .$$

$$T^{-1} A T = B$$

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t - \sin t & -\sin t - \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

(1) $\begin{cases} D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f}, & t \in I = [s, +\infty) \\ \vec{x}(s) = \vec{\xi} \end{cases}$

невозм.

$\vec{x}(t, s, \vec{\xi})$

(2) $\begin{cases} D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f}, & t \in I = [s, +\infty) \\ \vec{x}(s) = \vec{\xi} + \Delta\vec{\xi} \end{cases}$

возм.

$\vec{x}(t, s, \vec{\xi} + \Delta\vec{\xi})$

<u>Опр.</u> Реш. задачи (1) уст. по Ляпунову в положит. напр., если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta\vec{\xi}, \ \|\Delta\vec{\xi}\| \le \delta \Rightarrow \|\vec{x}(t, s, \vec{\xi} + \Delta\vec{\xi}) - \vec{x}(t, s, \vec{\xi})\| \le \varepsilon \quad \forall t \in I$$

<u>Опр.</u> Реш. задачи (1) $\vec{x}(t, s, \vec{\xi})$ асимпт. уст. по Ляпунову в положит. напр, если

1) оно уст.

2) для достаточно малых $\Delta\vec{\xi}$ $\quad \|\vec{x}(t, s, \vec{\xi}) - \vec{x}(t, s, \vec{\xi} + \Delta\vec{\xi})\| \to 0$, $t \to +\infty$

$$\vec{x}(t,s,\vec{\xi}) = e^{A(t-s)}\vec{\xi} + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$$

$$\vec{x}(t,s,\vec{\xi}+\Delta\vec{\xi}) = e^{A(t-s)}(\vec{\xi}+\Delta\vec{\xi}) + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$$

$$\Downarrow$$

$\| \vec{x}(t,s,\vec{\xi}+\Delta\vec{\xi}) - \vec{x}(t,s,\vec{\xi}) \| = \| e^{A(t-s)} \Delta\vec{\xi} \| \Rightarrow$ отклонение реш. не зав. от $\vec{\xi}$ и $\vec{f}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ уст. или неуст. одного реш. равносильна уст. или неуст. всех реш.

Уст. или неуст. реш. (1) равносильна уст. или неуст. нулевого реш. однор. ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$, $t \in I = [s, +\infty)$

Опред. Трив. реш. $\vec{x}(t) \equiv 0$ наз. неуст. по Ляпунову

если для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$

найдутся решение $\vec{x}(t, s, \vec{\xi})$ и момент вр. $t_1 > s$:

$$\|\vec{x}(t, s, \vec{\xi})\| > \varepsilon \quad \text{хотя} \quad \|\vec{\xi}\| \le \delta$$

Лемма. Стац. лин. сист.

$$(3)\quad D\vec{x} = A\vec{x} \quad \text{и} \quad (4)\quad D\vec{y} = B\vec{y}$$ одновр. уст (асимп. уст.),

если A и B подобны.

$\square$ $A = S^{-1}BS$ $\quad D\vec{x} = S^{-1}BSx \iff SD\vec{x} = BS\vec{x}$

$$\iff D(S\vec{x}) = B(S\vec{x})$$

$\vec{y} = S\vec{x}$ $\quad D\vec{y} = B\vec{y}$

$\vec{x} = S^{-1}y$

Предпол. (3) уст

$$\|\vec{y}(t,s,\vec{\xi}+\Delta\vec{\xi}) - \vec{y}(t,s,\vec{\xi})\| = \|\vec{y}(t,s,\Delta\vec{\xi}) - \vec{y}(t,s,0)\| = \|\vec{y}(t,s,\Delta\vec{\xi})\| =$$

$$= \|S\vec{x}(t,s,\Delta\vec{\xi})\| \le \|S\|\,\|\vec{x}(t,s,\Delta\vec{\xi})\|$$

по опред. (3) уст.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\ \|\Delta\vec{\xi}_1\| \le \delta \Rightarrow \|\vec{x}(t,s,\Delta\vec{\xi})\| \le \varepsilon$$

$$\forall t \in [s,+\infty)$$

$\boxtimes$

<u>Теор.</u> (А.М. Ляпунов) $D\vec{x} = A\vec{x}$ (1)

Для устойчивости трив. реш. ур. (1) $\Longleftrightarrow$ все собст. значения λ_i матр. A уд. усл. $Re(\lambda_i) \le 0$, причём собст. зн. λ_j такие, что $Re(\lambda_j) = 0$, имеют простые элем. делители (все $s(j) = 1$).

Для асимпт. уст. ур. (1) $\Longleftrightarrow$ $Re(\lambda_i) < 0$.

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \left.\begin{matrix}\lambda_i & 1 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & \lambda_i\end{matrix}\right\} s(1) & & \\ & & \left.\begin{matrix}\lambda_i & 1\\ 0 & \lambda_i\end{matrix}\right\} s(2) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

□ Предп. A имеет простые собст. зн. λ_i и $\vec{h}_i$ собст. вект.

$A\vec{h}_i = \lambda_i \vec{h}_i \quad i = 1, \dots n \Rightarrow$ общ. реш. ур. (1)

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{h}_i e^{\lambda_i t}, \quad C_i \text{ произв. пост.}$$

При наличии кратных собст. значений приведём матр. A к жордановой форме.

Если λ_i есть r-кратное собств. значение, то ему соотв-ет $m(i)$ клеток Жордана B_j размерности $s(j)$,

$$s(1)+s(2)+\ldots+s(m(i))=r$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 & & & & \\ & 0 & \lambda_i & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & \lambda_i & & & & \\ & & & & \lambda_i & 1 & & \\ & & & & 0 & \lambda_i & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \left.\right\} s(1) \\ \\ \\ \left.\right\} s(2) \\ \\ \\ \left.\right\} s(m(i)) \end{array}$$

Каждой клетке Жордана B_j соот-ет серия векторов $\vec{h}_l$ $(l=1,\ldots s(j))$

$$\vec{h}_1\neq 0 \quad A\vec{h}_1=\lambda_i h_1$$
$$A\vec{h}_2=\lambda_i\vec{h}_2+h_1,\ \ldots$$
$$A\vec{h}_{s(j)}=\lambda_i\vec{h}_{s(j)}+\vec{h}_{s(j)-1}$$

, при этом реш. (1) явл. ф-ции

$$\vec{x}_q(t)=\vec{w}_q(t)\,e^{\lambda_i t}, \quad (*)$$

$$\vec{w}_q(t)=\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}\vec{h}_1+\frac{t^{q-2}}{(q-2)!}\vec{h}_2+\ldots+\vec{h}_q, \quad q=1,\ldots s(j)$$

Кол-во лин. незав. реш. (1) вида (*) есть n

Общ. реш. (1) - лин. комб. (*)

$\boxtimes$

Из теор. Ляпунова следует, что для асимпт. уст. ур. (1) $\Leftrightarrow$ $Re(\lambda_i) < 0$. Установить нер-ва $Re(\lambda_i) < 0$ можно с помощью кр. Рауса-Гурвица.

Если хар. ур. имеет вид $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, то сост. матр. Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a_0 \end{pmatrix}$$

Все корни хар. ур. имеют отриц. дейст. части $\Leftrightarrow$ диаг. миноры (гл. миноры) матр. Гурвица положительны.

Т. (необх. пр. уст.)

Все коэф асимпт. уст. многочлена положительны.

□ $\lambda_j = -\alpha_j \pm i\beta_j \quad (j = 1, \dots r) \qquad \alpha_j > 0$

$\lambda_k = -\gamma_k \,, \quad (k = 1, \dots l) \qquad \gamma_k > 0$

$$P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda^2 + 2\alpha_j + \alpha_j^2 + \beta_j^2) \cdot \prod_{k=1}^{l} (\lambda + \gamma_k) =$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n-1} > 0 \,, \ a_{n-2} > 0 \ \dots \ a_0 > 0$$

⊠