Метод Эйлера состоит в разыскании n лин. незав. реш.

ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$ в виде $\vec{x}(t) = \vec{\gamma} e^{\lambda t}$, λ собст. зн. A

A — пост. матр. $n \times n$

$\vec{\gamma}$ собст. вектор (вектор с неопр. коэф.)

Если независимых реш. $\vec{x}(t)$, соотв. собст. зн. λ_k меньше чем его кратность d_k, то пополнение совокупности построенных лин. незав. решений производится с помощью

$$\vec{x}(t) = (\vec{a}_0 + \vec{a}_1 t + \ldots + \vec{a}_l t^l) e^{\lambda_k t},$$ где

$\vec{a}_0, \vec{a}_1, \ldots \vec{a}_l$ векторы с неопред. коэфф.

Число незав реш. отвеч. λ_k должно быть равно кратности d_k

Объединение всех лин. незав реш. — базис простр. реш.

Методы решения одн. СтЛВУ на одном примере.

$\boxed{\text{Эйлер}}$ $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $D\vec{x} = A\vec{x}$

$$\vec{x}(t) = \vec{\gamma} e^{\lambda t}$$

$$\lambda \vec{\gamma} e^{\lambda t} = A \vec{\gamma} e^{\lambda t} \Rightarrow A\vec{\gamma} = \lambda \vec{\gamma} \qquad \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1-\lambda^2) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$\lambda_1 = i$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-i)\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -2, \ \gamma_1 = 1+i$$

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -i$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1+i)\beta_1 + \beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -2, \ \beta_1 = 1-i$$

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} e^{it} \qquad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix} e^{-it}$$

$\operatorname{Re} \vec{x}(t)$ $\qquad$ $\operatorname{Im} \vec{x}(t)$

2 лин. незав. реш.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (1+i)(\cos t + i\sin t) \\ -2(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \\ -2\cos t + i(-2\sin t) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ -2\cos t & -2\sin t \end{pmatrix}$$

базисная матрица

$\boxed{\text{Коши}}$ (с матр. Жордана)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \quad D\vec{x}=A\vec{x} \qquad \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$$

$$\lambda_1=i \quad \begin{pmatrix}1+i\\ -2\end{pmatrix} \qquad\qquad \lambda_2=-i \quad \begin{pmatrix}1-i\\ -2\end{pmatrix}$$

Замена переменных $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$

$$S\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=AS\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=S^{-1}AS\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=e^{\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}t}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{it} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)e^{it} & (1-i)e^{-it} \\ -2e^{it} & -2e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1+i)(\cos t + i \sin t) \\ -2(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \\ -2\cos t + i(-2\sin t) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ -2\cos t & -2\sin t \end{pmatrix}$$ ← базисная матрица

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ -2\cos t & -2\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Вычисление экспоненты матр.

$$e^{At} = e^{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{it} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix}(1+i)e^{it} & (1-i)e^{it}\\ -2e^{it} & -2e^{-it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -\frac{(1+i)}{2}ie^{it} + \frac{(1-i)}{2}ie^{-it} & -\frac{1}{4}(1+i)^2e^{it} - \frac{1}{4}(1-i)^2e^{-it}\\ ie^{it} - ie^{-it} & \frac{1}{2}(1+i)e^{it} + \frac{1}{2}(1-i)e^{-it}\end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2}e^{it} + \frac{i+1}{2}e^{-it} & -\frac{1}{2}ie^{it} + \frac{1}{2}ie^{-it}\\ i(e^{it}-e^{-it}) & \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) + \frac{i}{2}(e^{it}-e^{-it})\end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix}\cos t + \sin t & \sin t\\ -2\sin t & \cos t - \sin t\end{pmatrix}.$$

Мазаник С.А. – Сорроид И.Ю.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$$

лучше минимальный?

$$D^2\varphi + \varphi = 0 \qquad \varphi_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \Rightarrow C_1 = 0, \; C_2 = 1$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(0) = 1 \qquad \underline{\varphi_1(t) = \sin t = \alpha_1(t)}$$

α_{m-1}	$b_{m-1} \cdot \alpha_{m-1}$	$b_{m-2} \cdot \alpha_{m-1}$	$\ldots$	$b_1 \cdot \alpha_{m-1}$	b_0
α_{m-1}	$\alpha_{m-2} = D\alpha_{m-1} + b_{m-1} \cdot \alpha_{m-1}$	$\alpha_{m-3} = D\alpha_{m-2} + b_{m-2} \cdot \alpha_{m-1}$	$\ldots$	$\alpha_0 = D\alpha_1 + b_1\alpha_{m-1}$	0

$\sin t$	$0 \cdot \sin t$	$1 \cdot \sin t$
$\sin t$	$D \sin t + 0 \cdot \sin t$ $\overset{\parallel}{\cos t}$	0

$$e^{At} = \alpha_0(t)\,E + \alpha_1(t)\,A, \qquad \alpha_0(t) = \cos t, \quad \alpha_1(t) = \sin t$$

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} t} = \cos t \cdot E + \sin t \cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t & \sin t \\ -2\sin t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Радченко Н.Я.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \quad \det(A-\lambda E)=0 \quad \lambda^2 - \mathrm{tr}A\cdot\lambda + \det A = 0$$

$$\mathcal{D} = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$$

$P(\lambda) = \lambda^2+1$

$\mathcal{D} = 0^2-4=-4<0$ (компл.2)

$\mathcal{D}>0$ (двойные)

$\mathcal{D}=0 \quad |a_{12}|+|a_{21}|\neq 0$ (дуальные)

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{tr}A}{2} & -\frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}\\ \frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2} & \frac{\mathrm{tr}A}{2}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{tr}A}{2} & \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2}\\ \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2} & \frac{\mathrm{tr}A}{2}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{tr}A}{2} & 0\\ 1 & \frac{\mathrm{tr}A}{2}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{tr}A}{2}+\frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}i \qquad \frac{\mathrm{tr}A}{2}+\frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2}\varkappa \qquad \frac{\mathrm{tr}A}{2}+\varepsilon$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \leftrightarrow i$$

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ u & v\end{pmatrix} \qquad AT=TB \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ u & v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad T^{-1}AT=B$$

$$u=1 \quad v=-1$$

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Замена переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = AT\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \dot{z} = iz$$

$$z(t) = e^{it} \cdot c = (\cos t + i \sin t)(c_1 + i c_2) = c_1 \cos t - c_2 \sin t + i(c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t - \sin t & -\sin t - \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Вычисление экспоненты.

$$e^{At} = e^{TBT^{-1}t} = Te^{Bt}T^{-1}, \qquad e^{Bt} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} \longleftrightarrow e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$T^{-1}AT = B \qquad \qquad \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t - \sin t & -\sin t - \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$