Лекция 6

«Устойчивость. Устойчивость решений СтЛ-n».

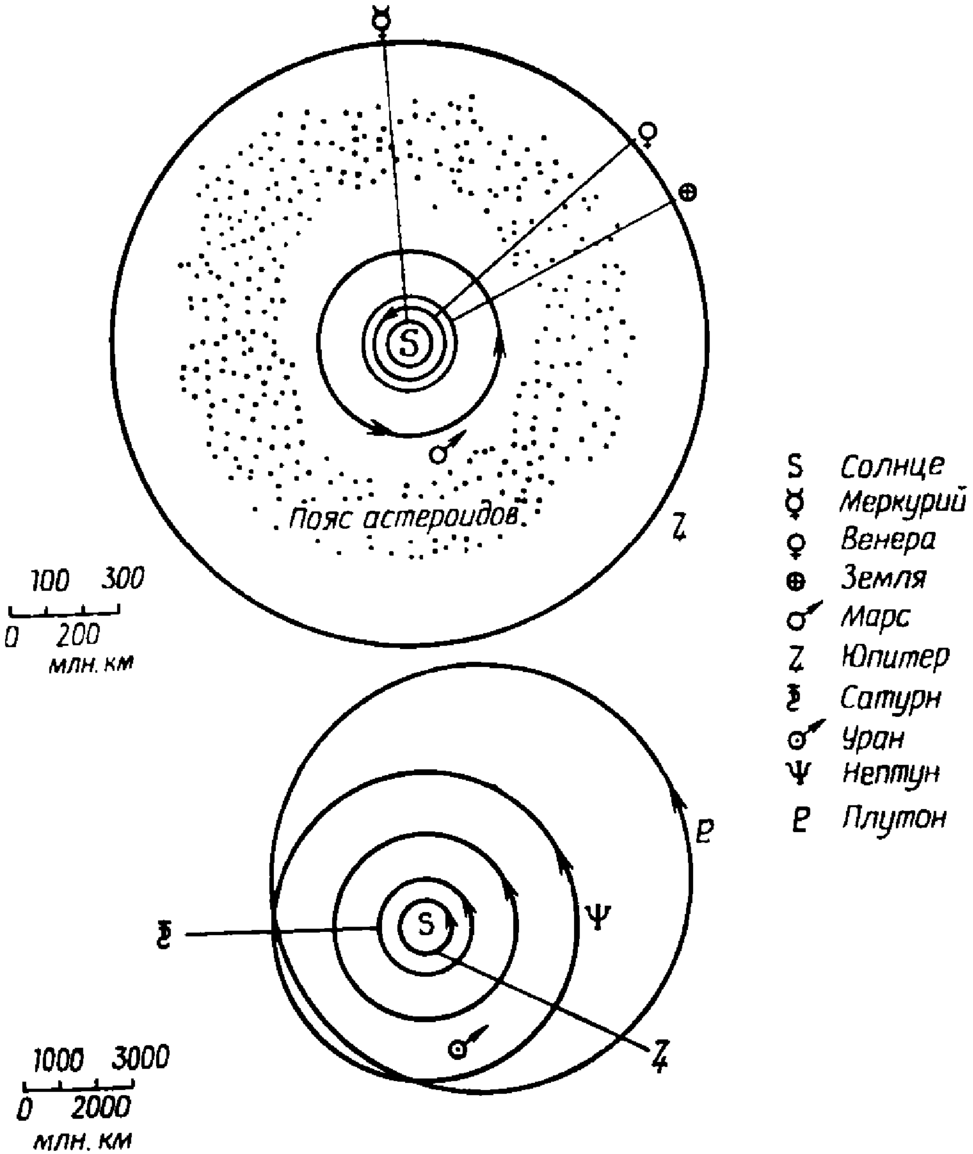


Схема солнечной системы

Астрономические задачи и математика

И. Кеплер „Новая астрономия или Небесная физика, содержащая исследования движения Марса по наблюдениям Тихо Браге"
1607

законы Кеплера — результат обработки эмпирических данных

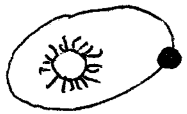

Марс

И. Ньютон „Математические начала натуральной философии"
1687

дифф. ур., описывающие движ. планет

законы движ. планет по эллипт. орбитам

расчёт силы притяжения сфер. тел — теория потенциала

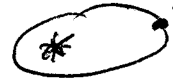

Земля

теория приливов

Эйлер, Д'Аламбер, Клеро (1713-1765)

1752 конкурс работ. Парижской ак. наук


Земля
Луна


Земля
Юпитер и Сатурн

Метод возмущений. Идея метода возмущений закл. в том чтобы выделить самые сильные взаимодействия, определяющие главные особенности движения, а остальными малыми взаимодействиями (их наз. возмущениями) пренебречь. Если движение (невозмущ. движение) такой упрощённой системы удаётся рассчитать, то затем можно выч. поправки т.е. найти возмущённое движение

Лагранж; Лаплас „Небесная механика"
1802

Пуассон

вековое ускорение среднего движ. Луны


Уран

Нептун?

Адамс, Леверье

1846г.

Плутон

1930 (Лоуренс Лоуэлл)

движения внутр. планет теория 526'' 83 в столет.
практ. 565'',1

38'',3

Меркурий

1888 открытия электромагн. волн

Пуанкаре „новая механика, - теория относит"

1905 Смещение перигелия Меркурия


Меркурий (39-59 км/сек)

Расчёты Эйнштейна
1916

„Основы общей теории относительности"

А.М. Ляпунов
1892

Развитие метода возмущений
„Общая задача об уст. движения"

квантовая механика → Нанотехнологии

задачи нелин. радиофизики → вычислит. техника

задачи космонавтики
Теория управления → задачи связ. с космич. исследованиями

Интегральная непрерывность решений

$$\begin{cases} L_n x = f \\ D^k x(s) = \xi_k, \ k = \overline{0, n-1} \end{cases} \quad (1) \text{ невозмущ. задача}$$

$$\begin{cases} L_n x = f \\ D^k x(s) = \xi_k + \Delta\xi_k \end{cases} \quad (2) \text{ возмущ. задача}$$

$x(t, \xi)$ $\qquad$ $x(t, \xi + \Delta\xi)$

Отклонение решений задач (1) и (2) $\rho(t, \Delta\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} |D^j x(t,\xi) - D^j x(t, \xi + \Delta\xi)|$

$$x(t,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

$\varphi_0, \dots \varphi_{n-1}$ базис Коши норм. в 0.

$$(3) \quad \rho(t, \Delta\xi) \le \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\xi_k| \, |D^j \varphi_k(t-s)|$$

Не зависит от ξ и f.

Опр. Реш. невозмущ. задачи $x(t,\xi)$ наз. непр. зависящим от нач. данных на промеж. $I_1 \subset I$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \Delta\xi_k \in \mathbb{R}$ как только $|\Delta\xi_k| \le \delta$

$\Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \le \varepsilon \quad \forall t \in I_1 \ (s \in I_1)$

Опр. Если реш. невозмущ. задачи $x(t,\xi)$ явл. непрерывно зависящим от нач. данных для любого компактного промеж. $I_1 \subset I$, то реш. $x(t,\xi)$ интегрально непр. на I.

Теор. (об инт. непр. реш. стац. лин. д.у. n-го пор.) Если f непр. на I, то любое реш. задачи $\begin{cases} L_n x = f \\ D^k x(s) = \xi_k \end{cases}$ интегр. непр. на I.

□ Рассм. отложение реш. невозм. и возм. задач

$$\rho(t, \Delta\xi) \le \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\xi_k| \, |\varphi_k^{(j)}(t-s)|.$$

Рассм. произв. компакт $I_0 \subset I$

$\varphi_0, \dots \varphi_{n-1}$ квазином $\Rightarrow$ $\varphi_k^{(j)}$ квазином и все они явл. непр. ф.

по теор. Вейерштрасса все $\varphi_k^{(j)}$ ограничены на I_0, т.е

$$\exists\, M : \forall s, t \in I_0 \quad |\varphi_k^{(j)}(t-s)| \le M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \frac{\varepsilon}{M \cdot n^2} : \Delta\xi_k \in \mathbb{R} \ |\Delta\xi_k| \le \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \le \delta \cdot M \cdot n^2 = \varepsilon$$

⊠

Пример. $\begin{cases} x' - x = 0 \\ x(0) = \xi \end{cases}$ $\begin{cases} x' - x = 0 \\ x(0) = \xi + \Delta\xi \end{cases}$

$$x(t,\xi) = \xi e^t \qquad x(t, \xi+\Delta\xi) = (\xi+\Delta\xi)e^t \qquad \rho(t,\Delta\xi) = |\Delta\xi| e^t$$

Если промеж. I, на кот. мы рассм. реш. не явл. компактом, то из интегральной непр. на I не следует непр. зависимость этого решения от нач. значений на I

$$I = [0, +\infty) \qquad \rho(t,\Delta\xi) = |\Delta\xi| e^t \to +\infty \text{ при } t \to +\infty$$

как ни мало было $\Delta\xi$

Устойчивость решений

$$\begin{cases} L_n x = f, & t \in [s, +\infty) \\ D^k x(s) = \xi_k \end{cases} \quad (1^*) \quad \text{невозм. задача}$$

$$\begin{cases} L_n x = f, & t \in [s, +\infty) \\ D^k x(s) = \xi_k + \Delta\xi_k \end{cases} \quad (2^*) \quad \text{возмущ. зад.}$$

Опр. Решение задачи (1^*) наз. <u>устойчивым</u> (уст. по Ляпунову в положит. напр.), если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \Delta\xi_k \in \mathbb{R}, \; |\Delta\xi_k| \le \delta \Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \le \varepsilon \;\; \forall\, t \in [s, +\infty)$

Устойчивость реш. — это непр. зависимость реш. от начальных данных на всём инт. $[s, +\infty)$

Опр. Решение задачи (1^*) $x(t, \xi)$ наз. <u>асимптотически устойчивым</u>, если 1) $x(t, \xi)$ устойчиво

2) для всех достаточно малых $\Delta\xi$ $\rho(t, \Delta\xi) \to 0$, $t \to +\infty$

Замечание: $\rho(t, \Delta z)$ не зависит от f и z_k, поэтому если устойчиво одно реш. ур (1*), то устойчивы все его решения. Если уст. реш. $L_n x = 0$, то уст. и решения ур (1*) и наоборот

Уст-ть любого решения (1*) $\Longleftrightarrow$ устойчивости нулевого реш. однор. ур. $L_n x = 0$.

Говорят, ур. $L_n x = 0$ устойчиво

Замечание: Уст-ть реш. нелин. ур зависит от нач. данных и от решения.

Теор. (Кр. Ляпунова устойч. СтΛ-н) Для того, чтобы ур. $L_n x = 0$, $t \in [s, +\infty)$ было устойчивым $\Longleftrightarrow$ действительные части хар. чисел опер. L_n были неположит. ($Re(\lambda_k) \le 0$), а хар. числа λ_i для кот $Re(\lambda_j) = 0$ были однократные.

$\Leftarrow$ Пусть $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j \le 0$. Любое реш. $L_n x = 0$ имеет вид:

$$x(t, \Delta\xi) = \sum_{j:\alpha_j \ne 0}' (P_j(t) \cos\beta_j t + Q_j(t) \sin\beta_j t) e^{\alpha_j t} + \sum_{j:\alpha_j = 0}' (a_j \cos\beta_j t + b_j \sin\beta_j t)$$

$D^k x(s) = \Delta\xi_k$ $\quad$ φ_k — лин. комб. функц.

$P_j(t), Q_j(t), a_j, b_j$ опред. нач. усл. $\quad$ $\rho(t, \Delta\xi) \le \sum_{j=0}^{n-1}' \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\xi_k| \, |D^j \varphi_k(t-s)|$

Функц. $\underline{D^j \varphi_k(t-s)\ \text{огр. на}\ [s, +\infty)}$! $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \Delta\xi_k \in \mathbb{R}, |\Delta\xi_k| \le \delta \Rightarrow \rho(t, \Delta\xi) \le \varepsilon$

$\Rightarrow$) Реш. уст-во. Пусть 1) $\exists \lambda = \alpha + i\beta$ и $Re(\lambda) = \alpha > 0$ или $\quad$ Тогда

2) $\exists \lambda = i\mu$ кратности > 1

$$\rho(t, \Delta\xi) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n-1}' |D^k x(t, \Delta\xi) - D^k x(t, 0)| = \sum_{k=0}^{n-1} |D^k x(t, \Delta\xi)|$$

$x(t,0) \equiv 0$

1) есть слагаемое $|ce^{\alpha t} \cos\beta t|$, $\alpha > 0$ неогр. ф. на $[s, +\infty)$

2) $|ct \cos\beta t|$ неогр. на $[s, +\infty)$

$\boxtimes$

Теор. (Кр. асимпт. устойчивости) Для того, чтобы ур. $L_n x = 0$, $t \in [s, +\infty)$ было асимп. уст. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$.

$\Leftarrow$) Ур. устойчиво по критерию Ляп. Кроме того, $|P(t) e^{\lambda t}| = |P(t)| e^{\mathrm{Re}(\lambda) t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ т.к $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$

Значит, $\rho(t, \Delta z) \to 0$, $t \to +\infty$.

$\Rightarrow$) Реш. асимпт. уст. $\Rightarrow$ уст. $\Rightarrow$ (по кр. Ляп.) $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$

Допустим $\exists\ \lambda$: $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ $\Rightarrow$ среди слагаемых, входящих в решение присут. $a \cos \mu t + b \sin \mu t$, $\mu \in \mathbb{R}$, но оно $\not\to 0$ при $t \to +\infty$ $\Rightarrow$ $\rho(t, \Delta z) \not\to 0$ при $t \to +\infty$, что противоречит асимпт. уст-ти.

$\boxtimes$

Говорят об уст-ти хар. мн. $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$

<u>Необходимое усл. уст-ти</u> $P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$

<u>Теор</u>. Для уст. хар. ур необходимо, чтобы все его коэф. были неотр.
(Все коэф. уст. многочлена неотриц.)

□ Н.п. Если хар. ур. уст., то $a_{n-1} \geq 0$, $a_{n-2} \geq 0$ .... $a_0 \geq 0$

Ур. уст. (хар. мн. уст) $\Leftrightarrow$ $Re(\lambda_j) \leq 0$ для всех j, т. е можно записать

$\lambda_j = -\alpha_j + i\beta_j \quad j = \overline{1,r}, \ \alpha_j \geq 0$

$\lambda_k = -\gamma_k, \ k = \overline{1,l}, \quad \gamma_k \geq 0$

$\Downarrow$

$$P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda^2 + 2\alpha_j\lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2) \cdot \prod_{k=1}^{l} (\lambda + \gamma_k)$$

раскрывая скобки видим, что все коэф. ≥ 0.

⊠

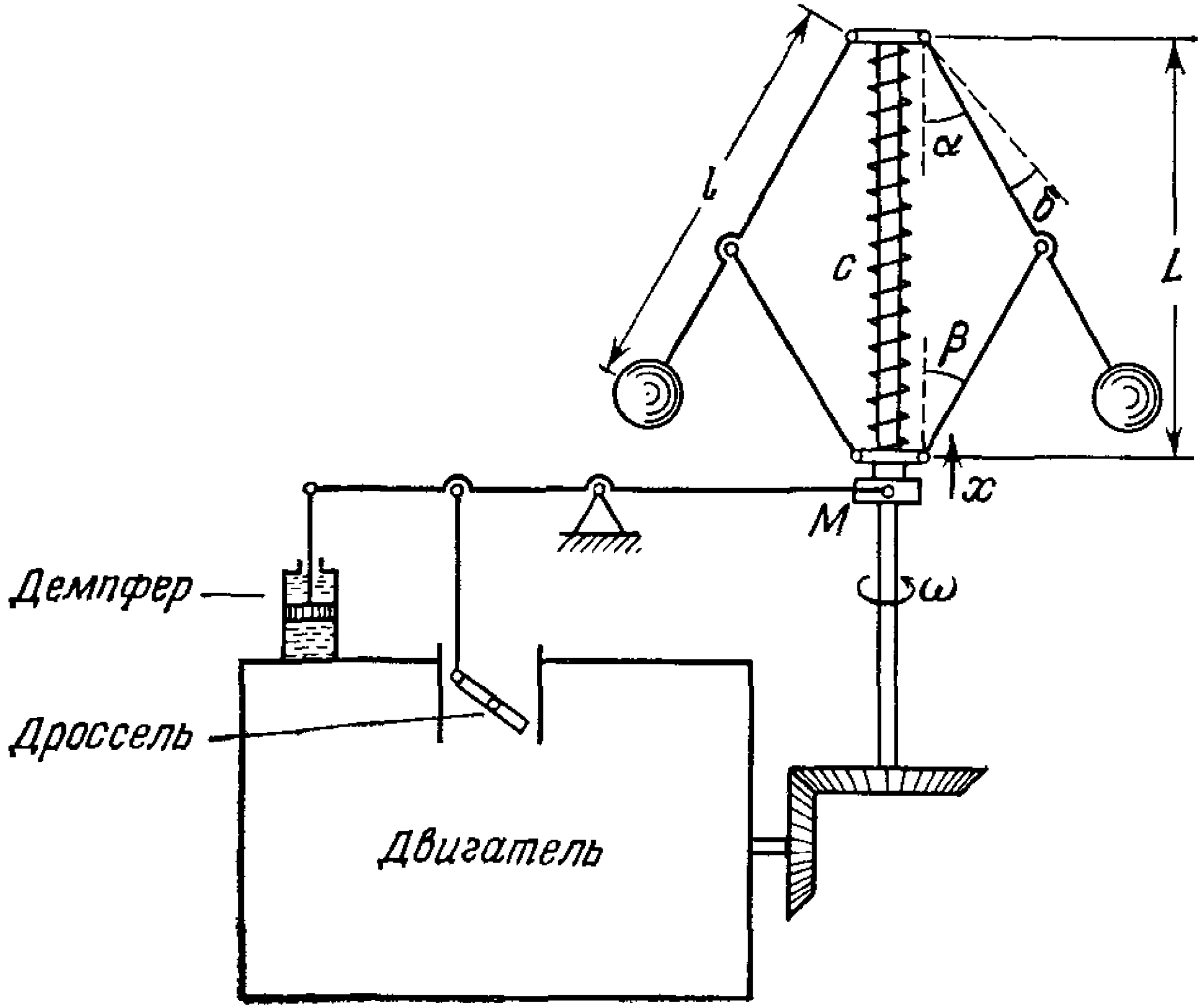
Необх. усл. асимпт. уст.

Теор. Для асимпт. уст. хар. ур. необходимо чтобы все его коэф. были положит.

Критерий Гурвица асимпт. уст.

Теор. Для того, чтобы ур $L_n x = 0$, $t \in [s, +\infty)$ было асимпт. уст. $\Leftrightarrow$ все главные миноры определителя T были положит.

$$T = \begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$



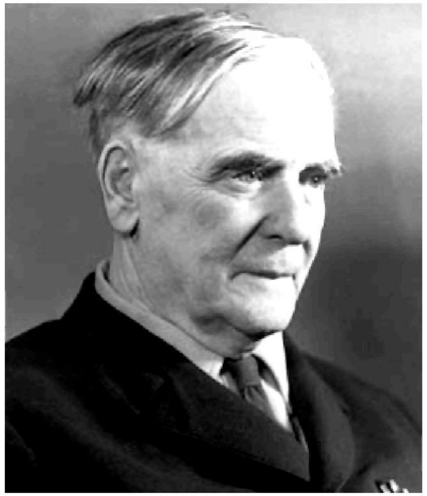
Регулятор Ползунова 1766 (Уатт 1784)

Устойчивость установившегося режима двигателя с центробежным регулятором устанавливается с исп. кр. Гурвица для многочлена $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$

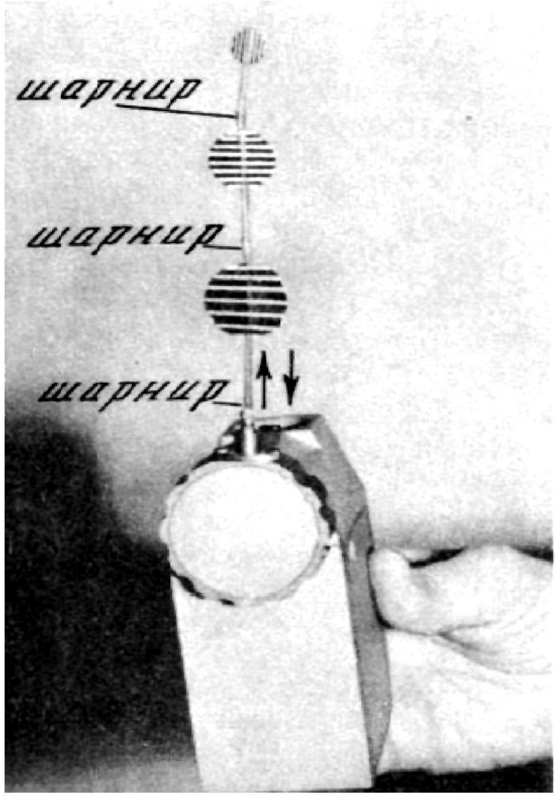
$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_3 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_3 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \qquad a_3 > 0$$

Устойчивость некоторых систем.

	**КАПИЦА Петр Леонидович** (1894-1984). Учёный, физик. Защитил диссертацию в Кембридже (1923). Заместитель директора Кавендишской лаборатории по магнитным исследованиям (1926). Член-корреспондент по Отделению физико-технических наук с 1929 г., академик по Отделению математических и естественных наук (физика) с 1939 г. Награжден золотой медалью им. М.В.Ломоносова за совокупность работ по физике низких температур (1959 г.); медалью Резерфорда от Английского Физического общества (1966). В 1978 г. получил Нобелевскую премию по физике «за фундаментальные изобретения и открытия в области физики низких температур».
	**ЧЕЛОМЕЙ Владимир Николаевич** (1914-1984). Ученый, механик. Академик АН СССР (1962), дважды Герой Социалистического Труда (1959, 1963). Руководил разработкой ракеты-носителя «Протон» и искусственного спутника Земли «Полет», орбитальных станций типа «Салют». Труды по теории колебаний, устойчивости упругих систем, динамике машин. Основал кафедру «Динамика машин» в Московском государственном техническом университете имени Н.Э.Баумана. Ленинская премия (1959), Государственная премия СССР (1967, 1974, 1982). Награжден 4 орденами Ленина, орденом Октябрьской Революции и медалями. Золотая медаль им. Н.Е. Жуковского "За лучшую работу по теории авиации" (1964), золотая медаль им. А.М. Ляпунова АН СССР "За выдающиеся работы в области математики и механики" (1977).

Модель маятников В.Н.Челомея



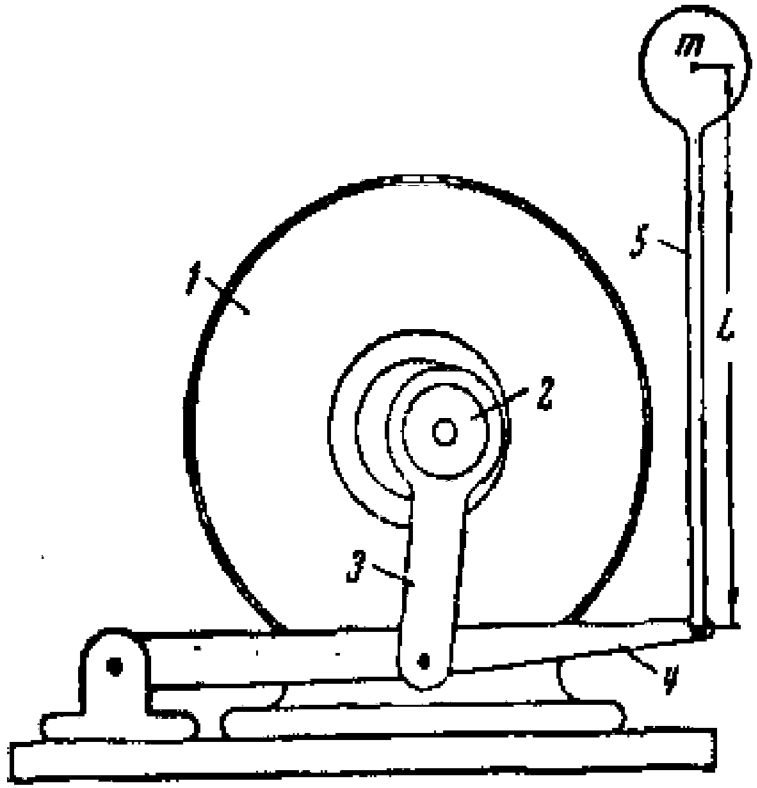
Фотография действующей модели.

Связанные маятники находятся в устойчивом положении при вибрации.

Конструкция механизма передачи колебаний П.Л.Капицы

Конструкция механизма передачи колебаний точке подвеса маятника.

Прибор демонстрирующий явление устойчивости маятника с вибрирующей точкой подвеса.



Явление устойчивости маятника

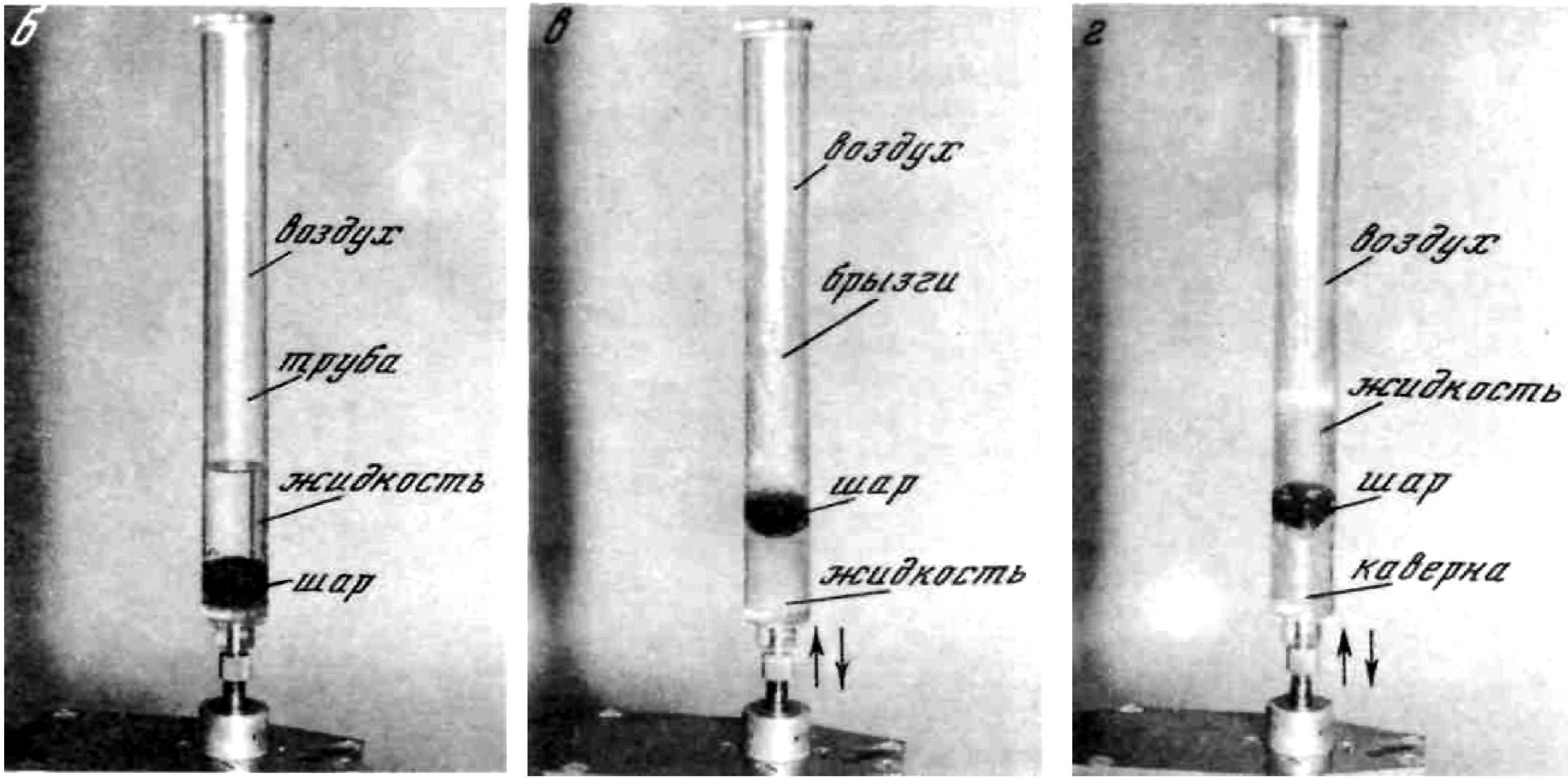
Когда прибор приведен в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто бы для него существует особая сила, направленная по оси колебания подвеса. Поскольку частота колебаний подвеса велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размытым, и колебательное движение незаметно. Поэтому явление устойчивости производит неожиданное впечатление. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он начинает качаться как обычный маятник с периодом, данным выражением

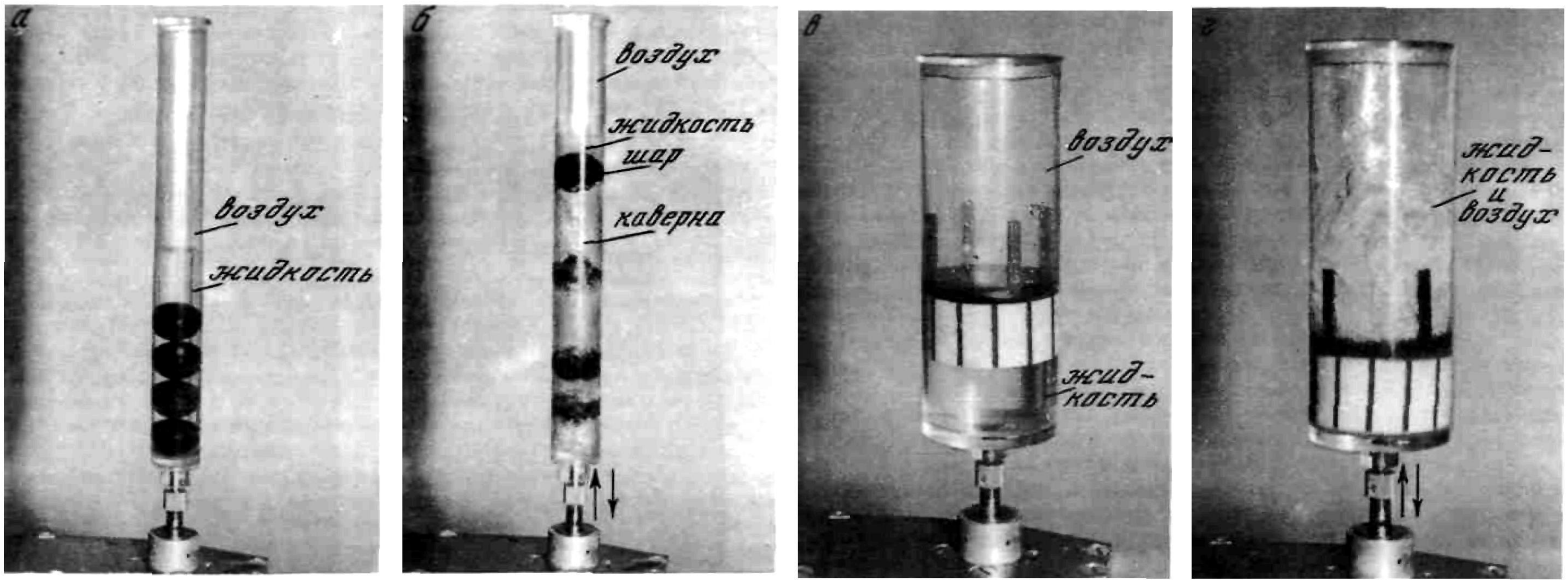
$$\tau = \frac{L}{a} T \left(\frac{1}{2} - \frac{gL}{a^2\omega^2} \right)^{-1/2}$$

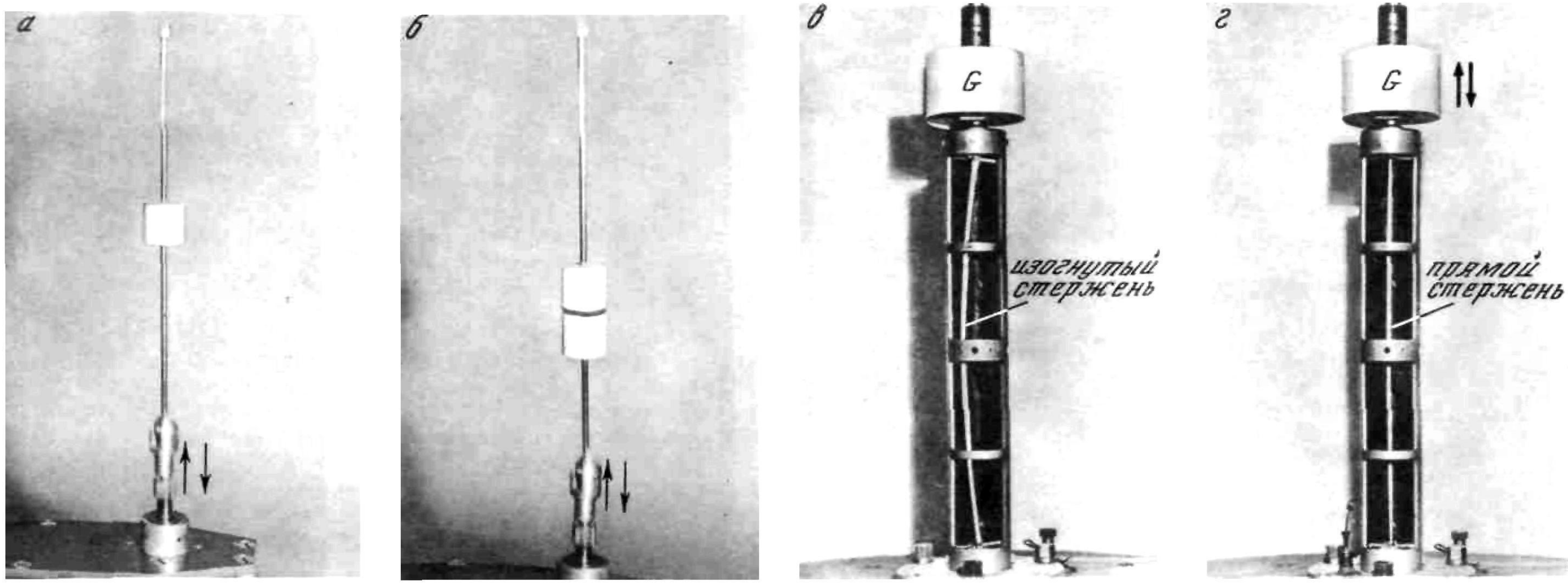
Условие устойчивости маятника

$$a^2\omega^2 \geq 2gL$$

Опыты В.Н.Челомея




а
воздух
жидкость
б
воздух
жидкость
шар
каверна
в
воздух
жид-
кость
г
жид-
кость
и
воздух


а
б
в
G
изогнутый стержень
г
G
прямой стержень

«Лазерный пинцет»

К понятию устойчивость.

<u>Пример.</u> (Дж. Уилкинсон)

$$(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-20) = \lambda^{20} - 210\lambda^{19} + \ldots = p(\lambda)$$

$$p(\lambda) + 2^{-23}\cdot\lambda^{19} = 0 \quad (*)$$

↖ мизерное изменение коэфф. многочлена

Вычисляем корни $(*)$

$\lambda_{16,17}$ $\qquad$ λ_{20}

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$16,731 \pm 2,813i$ $\qquad$ $20,847$ относительная погр. 5% !

плохо обусловленная задача

Пример. $(\lambda - 1)^4 = 10^{-8}$

$\lambda_{1,2} \simeq 1 \pm 10^{-2}$

$\lambda_{3,4} = 1 \pm 10^{-2} i$

Ошибка в коэфф. в 10^{-6} % приводит к погрешности решения в 1%

Пример.

$$(!)\begin{cases} -0{,}9901\,p_1 + p_2 = 0{,}980299 \\ -0{,}9801\,p_1 + 0{,}99\,p_2 = 0{,}970299 \end{cases}$$

Решение

$p_1 = -1{,}99$

$p_2 = -0{,}99$

Округлили

$$\begin{cases} -0{,}99\,p_1 + p_2 = 0{,}9800 \\ -0{,}98\,p_1 + 0{,}99\,p_2 = 0{,}9702 \end{cases}$$

Погрешности в коэфф. по сравнению с системой (!) не превышают $\underline{\underline{0{,}03\%}}$

Решение

$p_1 = 0$

$p_2 = 0{,}98$

При решении систем получается погрешность порядка $\underline{\underline{200\%}}$

Матрица сист. плохо обусловлена.