Дифференциальные уравнения

доц. Радыно Николай Яковлевич

каф. высшей математики 333

mir@bsu.by

Литература.

1. Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. „Курс д. у" Мн. 1996
2. Альсевич Л.А., Мазаник С.А., Черенкова Л.П. „Практикум по д. у. Мн. 1990 2000
3. Богданов Ю.С. „Лекции по д. у." Мн. 1977
4. Степанов В.В. „Курс д. у" Физматгиз 1959
5. Матвеев В.Н. „Д. У" Мн. 1968
„Методы интегрирования обыкн. д. у" Мн. 1974
6. Еругин Н.П. „Книга для чтения по общему курсу дифф. ур". Мн. 1979
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифф. ур" 1976
8. Петровский И.Г. „Лекции по теории о. д. у" МГУ 1984
9. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. „ДУ" М. Наука 1985
10. Федорюк М.В. „ОДУ" М, Наука 1980
11. Понтрягин Л.С „ОДУ" М. Наука 1982
12. Амелькин В.В. „ДУ в приложениях" М, Наука 1987

13. Бибиков Ю.Н. „Курс ДУ" 1991

14. Эльсгольц Л.Э „ДУ и вариационное исчисление"

15. Босс „Лекции по математике Т.2. ДУ", 2004

16. Четаев Н.Г. „Устойчивость движения" 1955

17. Демидович Б.П. „Лекции по мат. теор устойчивости" 1965

18. Малкин И.Г. „Теория устойчивости движения" 1966

www.poiskknig.ru

.djvu

Лекция № 1

Простейшие дифференциальные уравнения

Опр. Уравнение относится к дифференциальным, если оно содержит неизвестную функцию и её производные или дифференциалы

Общий вид: $F(t, x(t), x'(t), \dots x^{(n)}(t)) = 0$

$$y' = y^2$$

Опр. Порядок ур. — порядок старшей производной или старшего дифф-ла неизвестных функций

$$x\,dx + dt = 0$$

$y''' + 5y' + 3y = \sin x$ ← Диф. ур 3-его пор.

Опр. Если неиз. функция д.у. зависит от 1ого аргумента, то д.у наз. обыкновенным

Если неиз. функция д.у зависит от неск. аргументов — д.у. с частными производными

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$ лин. ур 1ого пор. в част. произ-х

$I \subset \mathbb{R}$ $\qquad I=[a,b],\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b)$

$tx'-1=0$ рассм. либо на $(-\infty,0)$, либо $(0,+\infty)$

$x(t)=\ln|t|$

но не на $\cancel{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$

Опр. Функцию $x: I \to \mathbb{R}$ наз. реш. д.у. на I, если при подстановке в уравнение эта функция обращает его в тождество на промежутке I. x обладает всеми производными вплоть до порядка ур. включительно.
Все функции, задающие уравнение, определены вдоль функции $x(t)$ и её производных

Опр. Если доп. усл. на решение относятся к одному и тому же значению аргумента, то такие условия над начальными условиями.

если к различным значениям аргумента — граничными усл.

Те и другие вместе — краевые усл

Нач. задача = ДУ + нач. усл

Гранич. задача = ДУ + гр. усл.

Задача Коши

$$\begin{cases} F(t, x(t), \dots x^{m}(t)) = 0 \\ \left. \begin{array}{l} x(s) = \xi_0 \\ x'(s) = \xi_1 \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(s) = \xi_{m-1} \end{array} \right\} \leftarrow \text{усл. Коши} \end{cases}$$

Опр. Простейшее д.у. 1ого пор. — $Dx = f(t)$, $t \in I$, $f \in C(I)$

$C^1(I)$ непр. дифф $\quad C^k(I)$ k раз непр. дифф.

$C^\infty(I)$ беск. дифф.

Теорема (о разрешимости)

$\forall f \in C(I)$, $\forall s \in I$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ з. К. $\begin{cases} Dx = f(t), & t \in I \\ x(s) = \xi \end{cases}$

однозначно разрешима на I и её решение

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau)\, d\tau$$

Из анализа: x есть первообразные f

мн-во всех первообразных f можно записать в виде

$$x(t) = \int_s^t f(\tau)\,d\tau + C$$ (других решений быть не может)

Для того, чтобы было выполнено усл. $x(s) = \xi$

надо подобрать C

$$x(s) = \int_s^s f(\tau)\,d\tau + C \Rightarrow C = \xi$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau)\,d\tau$$

Опр. Реш. ДУ содержащее произв. пост наз. общим реш

Реш. ДУ, полученное из общего, при конкретном значении произв. постоянных наз частным решением

Реш. ДУ, содержащее все решения данного ур. наз полным решением

$t \in \mathbb{R}$ $\quad D^2 x + x = 0 \quad \ddot{x} + x = 0 \quad x'' + x = 0$

$x(t) = \sin t \leftarrow$ част $\qquad x(t) = C_1 \sin t \leftarrow$ общее

$x(t) = \cos t \leftarrow$ част $\qquad x(t) = C_2 \cos t \leftarrow$ общее

$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \leftarrow$ полное

Граничные задачи

Нач. зад. $\begin{cases} D^2 x = 0 \\ x(0) = \xi_0 \\ Dx(0) = \xi_1 \end{cases} \rightarrow x(t) = C_1 t + C_2$

$Dx(0) = C_1 = \xi_1$

$x(0) = C_2 = \xi_0$

$\Rightarrow x(t) = \xi_0 t + \xi_1$

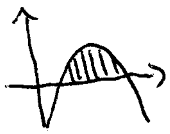
Гр. зад. $\begin{cases} D^2 x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x(t) = -t + 1$

Всегда ли разрешима задача? Единственным ли образом?

$$\begin{cases} Dx = 0 \\ x(0) = z_0 \\ x(1) = z_1 \end{cases}$$

„Квадратура параболы"

Архимед 287-212 г. н.э.



$$\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$$

Формула Ферма 1601-1665

$$\int_0^a x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$n \geq 1$

Галилей 1564-1642

Кеплер 1571-1630

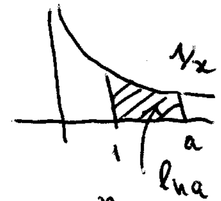
1604-05 

Декарт 1596-1650

Квадратура гиперболы

Н. Кауфманн (Меркатор) 1620-1687

$$\int_1^a \frac{1}{x}dx = \ln a$$



1668

$$\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

Формула Ньютона-Лейбница

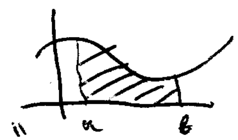
1643-1727 1646-1716

И. Барроу 1650-1677

$$\left(\int_0^t f(x)dx\right)' = f(t)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$



1687

„Мат. основы натур. физ."

обыкн. д. у. $\ddot{z} = -\frac{cz}{|z|^3}$

Якоб Бернулли 1654-1705

Иоганн Бернулли 1667-1748

Леонард Эйлер 1707-1783

Даниил Бернулли 1700-1782

ур. Эйлера

ур. в част. произв.

1755

Лопиталь

Д'Аламбер 1717-1783

Лагранж 1736-1813

1788 ур. Эйлера-Лагранжа

Фурье 1768-1830

Коши 1789-1857

Гамильтон 1805-1865

ур. Гамильтона 1843

Лиувилль 1809-1882

Пуассон 1781-1840

Лобачевский 1782-1865

Остроградский 1801-1862

Чебышев

Пуанкаре 1854-1912

Ляпунов А.М 1857-1918

устойчивость движ. 1892

Крылов А.Н

Четаев 1902-1959

Стеклов

Лаппо-Данилевский

Еругин 1907-1990

Келдыш 1911-1978

Колмогоров 1903-87

Боголюбов 1909-1992

Соболев