Лекция 9

«Методы интегрирования неодн. СтЛВУ. Вычисление матричной экспоненты без использования жордановой нормальной формы матрицы»

Метод Коши.

$$\begin{cases} D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f} \\ \vec{x}(s) = \vec{\xi} \end{cases} \qquad t \in I \quad \vec{f} \in C(I)$$

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-s)}\vec{\xi} + \int_s^t e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

Метод Лагранжа

Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ реш. ур. $D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad \text{и} \quad D\vec{x} = D\vec{x}_1 - D\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 + \vec{f} - (A\vec{x}_2 + \vec{f}) =$$

$$= A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{x}_{\text{неодн. общ.}}(t) = \vec{x}_{\text{одн. общ.}}(t) + \vec{x}_{\text{част. неод.}}(t)$$

Рассм. однор. ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$, его общ. реш.

$$\vec{x}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{фунд. матрица}}}{X(t)}\,\vec{c}$$

Идея Лагранжа — частное реш. неодн. ур. $D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f}$

искать в виде $\vec{x}^*(t) = \underline{X}(t)\,\vec{u}(t)$.

$$D\vec{x}^* = D\big(\underline{X}(t)\,\vec{u}(t)\big) = \big(D\underline{X}(t)\big)\vec{u}(t) + \underline{X}(t)\,D\vec{u}(t) =$$

$$= \underline{A\underline{X}\,\vec{u}(t)} + \underline{X}\,D\vec{u}(t)$$

$$\| \qquad A\underline{X}\vec{u} + \vec{f}$$

$$\underline{X}\,D\vec{u} = \vec{f} \quad \Rightarrow \quad D\vec{u}(t) = \underline{X}^{-1}(t)\,\vec{f}(t) \quad (!)$$

$$\vec{u}(t) = \int_s^t \underline{X}^{-1}(\tau)\,\vec{f}(\tau)\,d\tau \;, \quad s \in I \quad \Rightarrow$$

$$\vec{x}^*(t) = \underline{X}(t) \cdot \int_s^t \underline{X}^{-1}(\tau)\,\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

Общ. реш. ур. $D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f}$

частное реш. неоднор. ур.

$$x(t) = \underline{X}(t)\vec{c} + \underline{X}(t)\cdot\int_s^t \underline{X}^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

общ. реш. однор. ур

$$x(t) = \underline{X}(t)\vec{c} + \int_s^t \underline{X}(t)\cdot\underline{X}^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \underline{X}(t)\vec{c} + \int_s^t K(t,\tau)\vec{f}(t)\,d\tau$$

Метод Эйлера. Отличие → Если α контрольное число явл. k-кратным корнем хар. ур., то степень соотв. многочленов в частных реш. повышается на k единиц.

$$\dot{x} = 4x + y - e^{2t}$$
$$\dot{y} = -2x + y$$

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$\alpha = 2$ однокр. корень хар. ур. $\Rightarrow$ частное решение ищем в виде

$$x^*(t) = (at+b)e^{2t} \qquad\qquad x^*(t) = (t+1)e^{2t}$$
$$\Rightarrow$$
$$y^*(t) = (ct+d)e^{2t} \qquad\qquad y^*(t) = -2t\, e^{2t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -2e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} \\ -2t\,e^{2t} \end{pmatrix}$$

<u>Замечание</u>. Если $S^{-1}AS = J$ или $AS = SJ$, то

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1} \leftarrow$$ фунд. матр. сист. (ур.)

$$D\vec{x} = A\vec{x}$$

S^{-1} невыр. преоб.

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}$$

тоже фунд. матр. ур. $D\vec{x} = A\vec{x}$

$$\underline{X}(t) = S e^{Jt} \Rightarrow$$ общ. реш. $\vec{x}(t) = S e^{Jt} \vec{c}$

Выч. матр. экспоненты без исп. жорд. норм. формы матр.

Использование аннулирующего многочлена – идея метода Мазаника С. А. – Сироида И. Ю.

$$P(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$$ аннул. (минимальный?)

$$P(A) = A^m + b_{m-1}A^{m-1} + \ldots + b_1 A + b_0 E = 0 \Rightarrow$$

$$A^m = -(b_{m-1}A^{m-1} + \ldots + b_1 A + b_0 E)$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) A^k$$

$$e^{At} = \alpha_0(t)E + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \ldots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1}$$

$$e^{At} = \alpha_0(t)E + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \ldots + \alpha_{m-2}(t)A^{m-2} + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1}$$

$\alpha_{m-1}(t)$ — функция Коши оператора $L_m = D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \ldots + b_1 D + b_0$

$$\alpha_k(t) = b_{k+1}\alpha_{m-1}(t) + D\alpha_{k+1}(t), \quad k = m-2, m-3, \ldots 2, 1, 0.$$

Аналог сх. Горнера

	α_{m-1}	$b_{m-1}\alpha_{m-1}$	$b_{m-2}\alpha_{m-1}$	$\ldots$	$b_1\alpha_{m-1}$
D	α_{m-1}	$b_{m-1}\alpha_{m-1} + D\alpha_{m-1} = \alpha_{m-2}$	$b_{m-2}\alpha_{m-1} + D\alpha_{m-2} = \alpha_{m-3}$	$\ldots$	$b_1\alpha_{m-1} + D\alpha_1 = \alpha_0$

$$\alpha_k(t) = b_{k+1}\,\alpha_{m-1}(t) + D\,\alpha_{k+1}(t) \quad , \; k = m-2, m-3, \dots$$

$$\alpha_{m-2}(t) = b_{m-1}\,\alpha_{m-1}(t) + \alpha'_{m-1}(t) \qquad \underline{k=m-2}$$

$$\left(\alpha_0(t)E + \dots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1}\right)' = A\left(\alpha_0(t)E + \dots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1}\right)$$

$$+ \dots + \alpha'_{m-1}(t)A^{m-1} = \dots + \alpha_{m-2}(t)A^{m-1} + \alpha_{m-1}(t)A^{m}$$

$$A^m = -\left(b_{m-1}A^{m-1} + \dots + b_1 A + b_0 E\right)$$

$$+ \dots + \alpha'_{m-1}(t)\underline{\underline{\underline{A^{m-1}}}} = \dots + \alpha_{m-2}(t)\underline{\underline{\underline{A^{m-1}}}} - b_{m-1}\,\alpha_{m-1}(t)\underline{\underline{\underline{A^{m-1}}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{m-2}(t) = b_{m-1}\,\alpha_{m-1}(t) + \alpha'_{m-1}(t)$$

$(l_1, l_2, l_3) \ : \ l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$

$$e^{(l_1 A_1 + l_2 A_2 + l_3 A_3)t} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix} t} = e^{At}$$

$$D\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)\lambda$$
$$= \lambda^3 + \lambda \qquad \boxed{\pm i, 0}$$

$$L_3 = D^3 + D$$

функция Коши $\quad 1 - \cos t = \varphi_2(t)$

$$e^{At} = E + \sin t \, A + (1 - \cos t) A^2$$

Изоморфизм

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow a+ib \quad \text{компл. числа}, \qquad i^2=-1$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow a+\varkappa b \quad \text{двойные числа}, \qquad \varkappa^2=1$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow a+\varepsilon b \quad \text{дуальные числа}, \qquad \varepsilon^2=0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_0+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k$$

Ф-ла Эйлера

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

$$e^{\varkappa t} = \operatorname{ch} t + \varkappa \operatorname{sh} t$$

$$e^{\varepsilon t} = 1+\varepsilon t$$

$$ij=k,\ ji=-k$$
$$ik=-j,\ ki=j$$
$$kj=-i,\ jk=i$$
$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$$e^{i\lambda_1+j\lambda_2+k\lambda_3} = \cos\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}\sin\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j$$

	1	i	j
1	1	i	j
i	i	j	1
j	j	1	i

$$e^{\lambda_0+\lambda_1 i+\lambda_2 j} = e^{\lambda_0}\big(cx(\lambda_1)+i\,mx(\lambda_1)+j\,px(\lambda_1)\big)\big(cx(\lambda_2)+i\,px(\lambda_2)+j\,mx(\lambda_2)\big)$$

$$cx(t) = 1 + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

$$e^t = cx(t) + mx(t) + px(t)$$

$$mx(t) = t + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

$$px(t) = \frac{t^2}{2!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^8}{8!} + \cdots$$

$$e^t = ch(t) + sh(t)$$

Пример.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix}x_0(0)=1\\x_1(0)=0\\x_2(0)=0\end{matrix} \iff \dot{u}=iu,\ u(0)=1$$

$$\uparrow$$
$$i$$

$$u(t)=e^{it}u(0)=$$
$$=cx(t)+i\,mx(t)+j\,px(t)$$
$$\Downarrow$$
$$x_0(t)=cx(t)$$
$$x_1(t)=mx(t)$$
$$x_2(t)=px(t)$$

$$cx(t)=\frac{1}{3}e^{t}+\frac{2}{3}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$mx(t)=\frac{1}{3}e^{t}+\frac{2}{3}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$px(t)=\frac{1}{3}e^{t}+\frac{2}{3}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{2}{3}\pi\right)$$

Поле Алгебра

Линейное пространство $\mathcal{A}$ наз. алгеброй, если в нём введена ещё одна алгебраическая операция — умножение

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

2. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

3. $\alpha \cdot (x \cdot y) = (\alpha \cdot x) \cdot y = x \cdot (\alpha \cdot y)$ α принадл. числ. полю над которым рассм. линейное прост-во $\mathcal{A}$

4. Если сущ. элемент $e \in \mathcal{A}$: $e \cdot x = x \cdot e = x$ $\forall x \in \mathcal{A}$, то e наз. единицей, а $\mathcal{A}$ наз. алгеброй с единицей

5. Если $x \cdot y = y \cdot x$, то алгебра $\mathcal{A}$ наз. коммутат.

Т. Фробениуса

Комплексные числа явл единств. (с точностью до изоморфизма) расширением поля действительных чисел с сохранением всех законов сложения и умн.

Отказ от коммутат. умножения – кватернионы (4 х мерн. обоб. компл. ч.)

Отказ от ассоциат. умножения – октавы Кэли (8 мр. обоб. компл. ч.)

и других возможностей построения умножения вектор-в, хорошо согласованного со сложением – нет!

Основная теорема алгебры

Полином над полем $\mathbb{C}$

$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней с учётом кратных.

В алгебре двойных чисел

$x + y\varkappa$

$\varkappa^2 = 1$

$z^2 - 1 = 0$ четыре корня

1

-1

$\varkappa$

$-\varkappa$

$z = x + \varepsilon y$ $\qquad \ln(z) = \ln(x+\varepsilon y) = \ln x + \varepsilon \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0$

$$\ln(1+\varepsilon a) = a\varepsilon \qquad (\text{т.к. } e^{a\varepsilon} = 1+\varepsilon a)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$z = x + \varkappa y$ $\qquad \ln(x+\varkappa y) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(x+y) + \ln(x-y)\right) + \varkappa \dfrac{1}{2}\left(\ln(x+y) - \ln(x-y)\right)$

$$x \neq y$$

$$\ln(2+\varkappa) = \ln\sqrt{3} + \varkappa \ln\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\sqrt{3} & \ln\sqrt{3} \\ \ln\sqrt{3} & \ln\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Компл. числа $\qquad \ln(-1) = i\pi(1+2m) \Rightarrow \ln\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi(1+2m) \\ \pi(1+2m) & 0 \end{pmatrix}$