Лекция 2

«Стационарное линейное уравнение 1-ого порядка. Формула Коши для СтЛ-1. Квазиполиномы»

„Квадратура гиперболы" $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(a)$

Вопрос о значении $\ln(-1)$.

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$i^2 = -1$

Гиперкомплексные числа

Кватернионы $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $a_m \in \mathbb{R}$

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = k$ $ji = -k$

$ik = -j$ $ki = j$

$kj = -i$ $jk = i$

$$Dx - \lambda x = f, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in C(I)$$

Теорема (о разрешимости для С+Л-1)

$\forall\ f \in C(I),\ \forall s \in I\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}$ З.К $\begin{cases} Dx - \lambda x = f \\ x(s) = \xi \end{cases}$

однозначно разрешима и её реш.

$$x(t) = e^{\lambda(t-s)}\xi + \int_s^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

Доказательство.

$$D(e^{\lambda t}x) = -\lambda e^{-\lambda t}x + e^{-\lambda t}x' = e^{-\lambda t}(x' - \lambda x)$$

$$e^{-\lambda t}(Dx - \lambda x) = e^{-\lambda t}f(t)$$

$$D(e^{-\lambda t}x) = e^{-\lambda t}f \qquad u = e^{-\lambda t}x$$

$$\Downarrow$$

$$u(s) = e^{-\lambda s}\cdot x(s) = e^{-\lambda s}\xi$$

Это однозн. разреш.

$$\Downarrow$$

$$u(t) = e^{-\lambda s}\xi + \int_s^t e^{-\lambda\tau}f(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = e^{\lambda t}u(t) = e^{\lambda(t-s)}\xi + \int_s^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau$$

$\boxtimes$

Полное решение ур. $Dx - \lambda x = f$

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot C + e^{\lambda t} \int_s^t e^{-\lambda \tau} f(\tau)\, d\tau$$

или

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot C + \int_s^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

C некоторая константа

Замечание:

Если z комплекснозначная функция и h комплекснознач.

$z: I \to \mathbb{C}$ $\quad$ $h = f + ig$

$\lambda \in \mathbb{C}$, то задача Коши

$$\begin{cases} Dz = \lambda z + h \\ z(s) = \zeta \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$z(t) = e^{\lambda(t-s)}\zeta + e^{\lambda t}\int_s^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau$$

Пример. $\begin{cases} x' - x = e^{2t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $x(t) = e^{\lambda(t-s)} \cdot \xi + e^{\lambda t} \int_s^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)\, d\tau$

$\lambda = 1 \quad s = 0$

$$x(t) = e^{1\cdot(t-0)} \cdot 1 + e^{t} \int_0^t e^{-\tau} \cdot e^{2\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{t} + e^{t} \int_0^t e^{\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{t} + e^{t}(e^{t} - 1) = e^{2t}$$

$$x(t) = e^{2t}$$

Квазиполиномы

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$$

$a_n \neq 0 \quad \deg P = n$

а) $a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

б) $a_i \in \mathbb{C} \Rightarrow P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$P(t) e^{\lambda t}$ - есть квазиполином

$$\sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad \lambda_j \neq \lambda_k, \ j \neq k$$

тоже квазиполином

действительный квазиполином

$$\sum_{j=1}^{k} P_j e^{\lambda_j t} + \sum_{j=k+1}^{m} \left(P_j(t) \cos \beta_j t + P_j^*(t) \sin \beta_j t \right) e^{\alpha_j t}$$

$\lambda_j \in \mathbb{R} \quad j = \overline{1,k}$

$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$

$j = \overline{k+1, m}$

полиномы с действ. коэфф.

Свойства квазиполиномов

$$D^k\left(P(t)e^{\lambda t}\right) = \sum_{m=0}^{k} C_k^m \, D^m P \, D^{k-m} e^{\lambda t} = Q(t)\, e^{\lambda t} \quad (*)$$

$$\deg Q = \deg P$$

$$\int_s^t P(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau = P(\tau) \frac{e^{\lambda\tau}}{\tau}\Bigg|_s^t - \frac{1}{\lambda}\int_s^t P'(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau = Q(t)\, e^{\lambda t} + c$$

$$\mathrm{dog}\, Q = \deg P$$

Критерий совпадения квазиполиномов

$$\sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{\lambda_j t} \equiv 0 \iff P_j(t) \equiv 0,\ j=\overline{1,m}$$

$\square$ По индукции $m=1$ $P(t) e^{\lambda t} \equiv 0 \iff P(t) \equiv 0$

$m=2$ $P_1(t) e^{\lambda_1 t} + P_2(t) e^{\lambda_2 t} \equiv 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и пусть $\deg P_1 \leq \deg P_2$

$$\Downarrow$$

$$P_1(t) + P_2(t) e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \equiv 0$$ продиф $\deg P_1 + 1$ раз по

свойству (*)

$$Q_2(t) e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \equiv 0 \Rightarrow Q_2 \equiv 0,$$ но по (*)

$\deg Q_2 = \deg P_2 \Rightarrow \deg P_2 = 0 \Rightarrow P_2 = \overset{\text{конст}}{c_2} \Rightarrow \deg P_1 = \deg P_2 \Rightarrow$

$P_1 = c_1$ $\left(c_1 + c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)' = c_2 \underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}_{\neq 0} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\boxtimes$ $c_1 e^{\lambda_1 t} \equiv 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Теорема (Стац. лин. ур. 1-ого порядка с правой частью в виде квазипол)

Общее решение ур $Dz - \lambda z = P_0(t) e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{\lambda_j t}$.

$\lambda \neq \lambda_j$

есть

$$z(t) = (C + t Q_0(t)) e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{m} Q_j e^{\lambda_j t}$$

$$\deg Q_j = \deg P_j \quad , \quad j = 0, 1, 2 .. m$$

Замечание $x'(t) - \lambda x(t) = f(t)$ ← действит. квазиполином

$$f(t) = P_0(t)e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{k} P_j(t)e^{\lambda_j t} + \sum_{j=k+1}^{m} \left(P_j(t)\cos\beta_j t + P_j^*(t)\sin\beta_j t\right)e^{\alpha_j t}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda_j \neq \lambda,\ j = \overline{1,k} \qquad \beta_j \neq 0 \qquad j = \overline{k+1, \dots m}$$

тогда решение

$$x(t) = \left(c + tQ_0(t)\right)e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{k} Q_j(t)e^{\lambda_j t} + \sum_{j=k+1}^{m} \left(Q_j(t)\cos\beta_j t + Q_j^*(t)\sin\beta_j t\right)e^{\alpha_j t}$$

$$\deg Q_j = \deg P_j \quad , \ j = \overline{0,k}$$

$$\deg Q_j\ ,\ \deg Q_j^* \leq \max\{\deg P_j,\ \deg P_j^*\}$$

$$j = \overline{k+1, \dots m}$$

Остывание нагретого тела.

X_0 – нач. темпер. тела $36{,}6^\circ$

a – темпер. окруж. среды

k – коэфф. $k = 0{,}22$

Закон Фурье

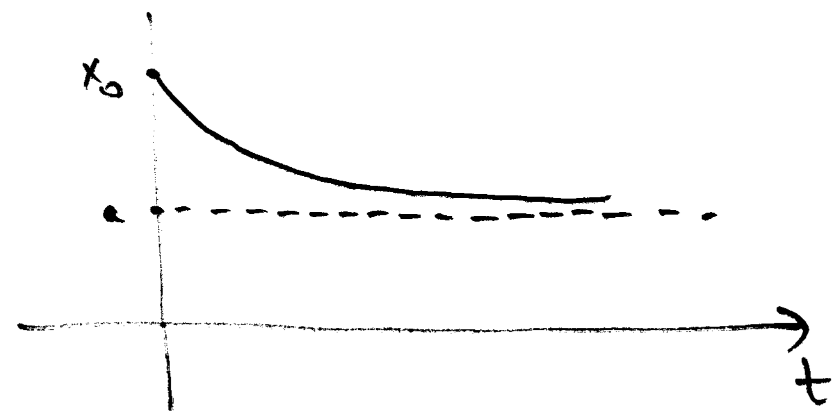
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k(x-a) \\ x(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\dot{x} + kx = ka$$

$$x(t) = Ce^{-kt} + a \qquad x(0) = x_0 \Rightarrow$$

$$x(t) = (X_0 - a)e^{-kt} + a$$

через 1 час	2ч	3ч	4ч	5ч
33,3	30,7	28,6	26,9	25,5



8ч

22,8

„Великий принцип" — всякое движение в мире описывается ур.

$x' = \lambda x$ или $dx = \lambda x \, dt$

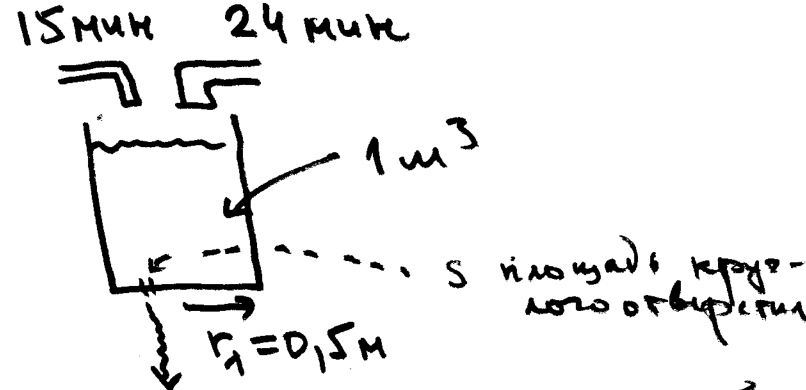
$\frac{dx}{x} = \lambda \, dt$

В каждом случае x и λ, ξ имеют свою определённую природу

$x(t) = e^{\lambda t} \cdot \xi$

Работает формула „квадратуры гиперболы"

Истечение жидкости из сосуда



За 1 мин $\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{24}\right)$ м³ воды попадает в бочку

За 1 мин $\frac{1}{120}$ м³ воды вытекает из бочки

За 2 часа вся вода из полной бочки вытекает

Школьное решение $\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\right)=\frac{1}{10}$ м³ $\Rightarrow$ За 10 мин бочка наполнится

Закон Торичелли (1641) $\quad v = k\sqrt{2gx}$, $k=0,6$, $g=9,8$

Как вытекает вода из сосуда?

$s \cdot k\sqrt{2gx}\,dt$ ← объём вытекшей воды

С другой стороны, уровень воды снизится за dt на $-dx$ ⇒ объём воды в бочке уменьшится на $-S(x)\,dx$

$S(x)$ ← площадь свободной поверхности на высоте x.

$$s \cdot k\sqrt{2gx}\,dt = -S(x)\,dx$$

$S(x) = \pi/4$ ← у нас

(З.К.) ⇒ $$\frac{dt}{dx} = -\frac{S(x)}{s \cdot k\sqrt{2gx}}, \quad t(0) = 0$$

$$t = \frac{2 \cdot \pi/4}{s \cdot k\sqrt{2g}}\sqrt{x}$$

$t_1 = 2ч = 2 \cdot 3600$ сек

$x_1 = \frac{4}{\pi} = h$ м ← высота бочки

⇓

$$s = \frac{\sqrt{\pi}}{t_1 k\sqrt{2g}} = 9{,}27 \cdot 10^{-5}\ м^2, \quad s = \pi r_0^2 \Rightarrow r_0 = 5{,}4 \cdot 10^{-3}\ м$$

5 мм

ДУ наполняемости сосуда. $Q = \frac{1}{60}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{24}\right)\frac{м^3}{с}$ поток воды из двух кранов

$Q\,dt$ – приращение объёма за dt

$sk\sqrt{2gx}\,dt$

Приращение уровня жидкости в сосуде

$$dx = \frac{Q\,dt}{\underset{\uparrow \pi/4}{S(x)}} - \frac{sk\sqrt{2gx}\,dt}{\underset{\uparrow \pi/4}{S(x)}}, \quad dx = \left\{\frac{4}{\pi}\frac{1}{16}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{24}\right) - \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{7200}\sqrt{x}\right\}dt$$

$$dt = \frac{dx}{a - b\sqrt{x}},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a - b\sqrt{x}}$$

$$a = \frac{13}{\pi\cdot 1800}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ 1800}$$

$$t = -\frac{2}{b}\sqrt{x} + \frac{2a}{b^2}\ln\frac{a}{|a - b\sqrt{x}|} \swarrow h = \frac{4}{\pi}$$

$t_{иск} = 618{,}13$ сек $\approx$ 10 мин 18 сек. погр. 3%