I. Простейшее уравнение n-го порядка

$D^n x = f(t)$, $t \in I$

① Метод последовательного интегрирования: понижаем порядок ур-ия с каждым интегрированием

② $x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k}_{\text{общее реш. однородного}} + \underbrace{\int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,d\tau}_{\text{частное решение неоднородного}}$, $s \in I$

Задача Коши:

$$\begin{cases} D^n x = f(t), \ t \in I \\ D^k x \big|_{t=s} = \xi_k, \ k = \overline{0,n-1} \end{cases}$$

Решение: $x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \frac{(t-s)^k}{k!} + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,d\tau$

II. Стационарное линейное об. диф. ур. n-го порядка (СтЛОД-n)

$D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + a_{n-2}D^{n-2}x + \dots + a_1 Dx + a_0 = f(t)$, $t \in I$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{0,n-1}$

$n=0$: $D^n x = f(t)$

$n=1$: $Dx + a_0 x = f(t)$, $t \in I$ — Линейное уравнение I порядка

$\underbrace{x(t)}_{\text{общее реш. неоднородн.}} = \underbrace{C_0 e^{-a_0 t}}_{\text{общее реш. однородного}} + x_{\text{ч.р. неоднородного}}$

Задача Коши:

$$\begin{cases} Dx + a_0 x = f(t) \\ x\big|_{t=s} = \xi \end{cases}$$

Решение: $x(t) = \xi e^{-a_0(t-s)} + \int_s^t e^{-a_0(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$

Методы для нахождения $x_{\text{ч.р. неоднородного}}$

а) Метод Коши

$x_{\text{ч.р. неоднородного}} = \int_s^t e^{-a_0(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$

$x(t) = C_0 e^{-a_0 t} + \int_s^t e^{-a_0(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau$

<u>Пример</u> $Dx + x = 2e^t$

$x(t) = C_0 e^{-t} + \int_s^t e^{-(t-\tau)} 2e^{\tau}\,d\tau = \dots = C_0 e^{-t} + e^t - e^{-t} = e^t + \tilde{C}_0 e^{-t}$

б) Метод Фурье

$x = u(t)\vartheta(t)$

$Du \cdot \vartheta + u D\vartheta + a_0 u\vartheta = f$

$$\begin{cases} u D\vartheta + a_0 u \vartheta = 0 \\ Du\, \vartheta = f \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} D\vartheta + a_0 \vartheta = 0 \\ \vartheta Du = f \end{cases}$$

<u>Пример.</u> $Dx + x = 2e^t$

$x = u \cdot \vartheta$

$\vartheta Du + u D\vartheta + u\vartheta = 2e^t$

$$\begin{cases} D\vartheta + \vartheta = 0 \\ \vartheta Du = 2e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vartheta = Ce^{-t} = e^{-t} \\ e^{-t} Du = 2e^t \end{cases}$$ (ур. I порядка: имеет 1 произв. постоянную => 1 частное решение, напр. $C = 1$) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vartheta = e^{-t} \\ Du = 2e^{2t} \end{cases} \quad \begin{cases} \vartheta = e^{-t} \\ u = \int 2e^{2t} dt + C \end{cases} \quad \begin{cases} \vartheta = e^{-t} \\ u = e^{2t} + C \end{cases}$$

$x = u\vartheta$

$x = (e^{2t} + C)e^{-t} = e^t + Ce^{-t}$

в) Метод Лагранжа (Метод вариации произвольных постоянных)

Метод для получения общего решения неоднородного ур-ия, зная общее решение однородного ур-ия без нахождения частного решения.

$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_1 Dx + a_0 x = 0$ — одноф. линейное ур-ие.

Если $(\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t))$ — базис (из n решений), то общее решение однородного ур-ия зависит от n произвольных постоянных:

$x(t) = C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 + \ldots + C_{n-1}\varphi_{n-1}$

В общем решении для поиска $x_{ч.р.неодн.}$ считаем, что произвольные постоянные C_k есть ф-ии от t. Подставляя в исходное ур-ие, находим их.

$Dx + a_0 x = f(t)$

$Dx + a_0 x = 0$

$x_{общ.одн.} = Ce^{-a_0 t}$

$x_{ч.р.неодн.} = C(t)e^{-a_0 t}$

$D(x_{ч.р.неодн.}) + a_0 \cdot x_{ч.р.неодн.} = f(t)$

$D(C(t)e^{-a_0 t}) + a_0 \cdot C(t)e^{-a_0 t} = f(t)$

$DC(t) \cdot e^{-a_0 t} - a_0 C(t)e^{-a_0 t} + a_0 C(t)e^{-a_0 t} = f(t)$

$DC(t)\, e^{-a_0 t} = f(t)$

Отсюда определяем $C(t)$ и находим частное решение.

<u>Пример.</u> $Dx + x = 2e^t$

$x_{общ.одн.} = Ce^{-t}$

$x_{ч.р.неодн.} = C(t)e^{-t}$

$D(C(t)e^{-t}) + C(t)e^{-a_0 t} = 2e^t$

$DC(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = 2e^t$

$DC(t)e^{-t} = 2e^t$

$DC(t) = 2e^{2t}$

$C(t) = e^{2t}$

$C(t) = \int 2e^{2t} + C_0$

(Мы находим <u>одно</u> частное реш. - поэтому напр. $C_0 = 0$)

$x_{ч.р.неодн.} = e^{2t} \cdot e^{-t} = e^t$

$x(t) = Ce^{-t} + e^t$

г) Метод Эйлера (когда $f(t)$ является квазиполиномом)

Однородные линейные ур-ия n-ого порядка

Стационарное однородное ур-ие n-ого порядка

$$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \dots + a_1 D x + a_0 x = 0$$

Подставим $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\boxed{\begin{aligned} Dx &= \lambda e^{\lambda t} \\ D^2 x &= \lambda^2 e^{\lambda t} \\ &\dots\dots \\ D^n x &= \lambda^n e^{\lambda t} \end{aligned}}$$

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ — х-ое уравнение.

n линейно независимых решений из λ - базис.

Пример. $D^2 x + Dx - 2x = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$

$\left[\begin{aligned} \lambda_1 &= -2, & k_1 = 1 \\ \lambda_2 &= 1, & k_2 = 1 \end{aligned}\right.$

$x_1 = e^{t}$

$x_2 = e^{-2t}$

Две ф-ции образуют базис решений; они линейно независимы.

$$x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t}$$

$$\boxed{x(t) = P(\lambda) e^{\lambda t}, \quad \deg(P(\lambda)) = k-1, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Базис пространства решений.

Совокупность n линейно независимых решений $\varphi_k(t)$, $k = \overline{0,n-1}$, однородного ур-ия $L_n x = 0$ образует базис пространства решений.

Совокупность решений $\varphi_k(t)$, $k = \overline{0,n-1}$, линейно независима на I, если определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \dots & \varphi_{n-1} \\ D\varphi_0 & \dots & D\varphi_{n-1} \\ \dots & & \dots \\ D^{n-1}\varphi_0 & \dots & D^{n-1}\varphi_{n-1} \end{vmatrix}$$

не обращ. в 0 ни в одной точке I. Из формулы Лиувилля-Остроградского $W(t) = W(0) e^{-a_{n-1} t}$ следует, что $W(0) \neq 0 \Rightarrow W(t) \neq 0$ на I.

Общее решение однородного уравнения строится с помощью базиса по ф-ле:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \varphi_k(t), \quad C_k \in \mathbb{R}, \ k = \overline{0,n-1}$$

Общее решение однородного ур-ия:

$$x(t) = \sum_{l=1}^{r} \left(Q_l(t)\cos\mu_l t + R_l(t)\sin\mu_l t \right) e^{\lambda_l t} + \sum_{j=2r+1}^{m} P_j(t) e^{\lambda_j t},$$

$\lambda_{2l-1} = \lambda_l + i\mu_l$

$\lambda_{2l} = \lambda_l + i\mu_l$, — попарно комплексно-сопряженные корни х-ого полинома

$l = \overline{1,r}$

λ_j, $j = \overline{2r+1, m}$ — действ. корни

Q_l, R_l, P_j — полиномы с произвольными действ. коэф.

Методы нахождения частного решения СтЛОД-n

I. Метод Коши

$$x_{ч.р.н.} = \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$$, где φ_{n-1} – ф-ия Коши.

Чтобы найти $\varphi_{n-1}(t)$ $(s=0)$, нужно решить начальную задачу (задачу Коши):

$$\begin{cases} L_n x = 0 \\ D^k x \big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, n-2} \\ D^{n-1} x \big|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

Тогда общее решение неоднородного ур-ия $L_n x = f(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \psi_k(t) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$$, где $\psi_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$ – некоторый базис пространства решений $L_n x = 0$.

Пример $D^2 x + 2Dx + x = e^{2t}$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, k_1 = 2$

$\boxed{x_{oo}(t) = c_0 e^{-t} + c_1 t e^{-t}}$

$\varphi_1(t)$ – ф-ия Коши:

$$\begin{cases} x_{oo}(t) \big|_{t=0} = 0 \\ Dx_{oo}(t) \big|_{t=0} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 e^{-t} + c_1 t e^{-t} \big|_{t=0} = 0 \\ -c_0 e^{-t} - c_1 t e^{-t} + c_1 e^{-t} \big|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi_1(t) = t e^{-t}}$$

$$\boxed{x_{ч.р.н.}} = \int_0^t \varphi_1(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) e^{-(t-\tau)} f(\tau) d\tau = \ldots = \boxed{\frac{e^{2t}}{9} - \frac{t}{3e^t} - \frac{1}{9e^t}}$$

$$x(t) = c_0 e^{-t} + c_1 t e^{-t} + \frac{e^{2t}}{9} - \frac{t}{3e^t} - \frac{1}{9e^t}$$ (где-то косяк в подсчётах !!)

Решение начальной задачи

$$\begin{cases} L_n x = f(t), \quad t \in I \\ D^k x \big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau}$$

$\varphi_0(t-s), \ldots, \varphi_{n-1}(t-s)$ – нормированный в $t=s$ базис реш-ий $L_n x = 0$

II Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных)

Чтобы найти общее решение ур-ия $L_n x = f(t)$:

1) Находим $x_{oo}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(t)$

2) Для поиска частного решения делаем c_k зависимыми от t:

$$x_{ч.р.н.} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)\varphi_k(t)$$

3) Составляем систему:

$$\begin{cases} \varphi_0 Du_0 + \dots + \varphi_{n-1} Du_{n-1} = 0 \\ D\varphi_0 Du_0 + \dots + D\varphi_{n-1} Du_{n-1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1}\varphi_0 Du_0 + \dots + D^{n-1}\varphi_{n-1} Du_{n-1} = f \end{cases}$$

4) Находим $Du_0, \dots, Du_{n-1}$, вычисляем первообразные и подставляем в (2).

Пример. $D^2x + 2Dx + x = e^{2t}$

$x_{oo}(t) = (c_0 + c_1 t)e^{-t}$

$\varphi_0(t) = e^{-t} \quad \varphi_1(t) = te^{-t}$

$x_{ч.р.неодн.} = u_0(t)e^{-t} + u_1(t)te^{-t}$

$$\begin{cases} e^{-t}Du_0 + te^{-t}Du_1 = 0 \\ -e^{-t}Du_0 + (e^{-t} - te^{-t})Du_1 = e^{2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} Du_0 + tDu_1 = 0 \\ e^{-t}Du_1 = e^{2t} \end{cases}$$

$Du_1 = e^{3t} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3}e^{3t}$

$Du_0 = -te^{3t} \Rightarrow u_0 = \frac{1}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}te^{3t}$

$x_{ч.р.н.} = -\frac{1}{3}te^{2t} + \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{2t} = \frac{1}{9}e^{2t}$

$x_{о.р.н.} = (c_0 + c_1 t)e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}$

III Метод Эйлера (если $L_n x = f(t) \leftarrow$ квазиполином)

1) если $L_n x = P(t)e^{\lambda t}$, то $x_{ч.р.н.} = t^r Q(t)e^{\lambda t}$, где
- $\deg P = \deg Q$
- r – кратность х-ого числа λ_j оператора L_n, которое совпадает с λ (иначе $r = 0$)

2) если $L_n x = (P(t)\cos\beta t + \tilde{P}(t)\sin\beta t)e^{\lambda t}$, то
$x_{ч.р.н.} = t^r(Q(t)\cos\beta t + \tilde{Q}(t)\sin\beta t)e^{\lambda t}$, где
- r – определяется так же, как в п. 1
- $\deg Q, \deg\tilde{Q} = \max(\deg P, \deg\tilde{P})$

Пример 1) $D^2x - 2Dx - 3x = e^{4t}$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_1 = -1, \ k_1 = 1$

$\lambda_2 = 3, \ k_2 = 1$

$x_{oo}(t) = C_0 e^{-t} + C_1 e^{3t}$

$x_{ч.р.н.} = t^0 A e^{4t} \quad (\deg A = \deg P = 0)$

$Dx_{ч.р.н.} = 4Ae^{4t}$

$D^2 x_{ч.р.н.} = 16Ae^{4t}$

$(16A - 2\cdot 4A - 3\cdot A)e^{4t} = e^{4t}$

$5A = 1$

$\boxed{A = \frac{1}{5}} \Rightarrow \boxed{x_{ч.р.н.} = \frac{1}{5}e^{4t}}$

$\boxed{x_{орн} = C_0 e^{-t} + C_1 e^{3t} + \frac{1}{5}e^{4t}}$

2) $D^2x - 4Dx + 8x = e^{2t} + \sin 2t$

$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$

$D = (4i)^2$

$\lambda_1 = 2+2i, \ k_1 = 1$

$\lambda_2 = 2-2i, \ k_2 = 1$

Разобьем $f(t) = e^{2t} + \sin 2t$ на слагаемые:

$f_1(t) = e^{2t} \quad \gamma_1 = 2, \ \deg P_1 = 0$

$f_2(t) = \sin 2t \quad \gamma_2 = 2i, \ \deg P_2 = 0$

$x_{ч.р.н.} = t^0 A e^{2t} + t^0 (B\cos 2t + C\sin 2t)e^{0t} =$

$= \underline{Ae^{2t} + B\cos 2t + C\sin 2t}$, $\deg A = \deg P_1 = 0$

$\deg B = \deg C = \max\{0, 0\} = 0.$

$Dx_{ч.р.н.} = \underline{2Ae^{2t} - 2B\sin 2t + 2C\cos 2t}$

$D^2 x_{ч.р.н.} = \underline{4Ae^{2t} - 4B\cos 2t - 4C\sin 2t}$

Подставим ____ -штучки в исходное ур-ие. Получим:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ -4B - 8C + 8B = 0 \\ -4C + 8B + 8C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 1/10 \\ C = 1/20 \end{cases}$$

$\boxed{x_{ч.р.н.} = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{20}\sin 2t}$

$x_{орн.} = (C_0\cos 2t + C_1 \sin 2t)e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{20}\sin 2t$