

Műszaki Mecanikai Tanszék	Rúd hajlítólengésének sajátfrekvenciái	Házi Feladat III.
---------------------------------	---	----------------------

Név: Kelle Gergő
Neptun: GBBNUL

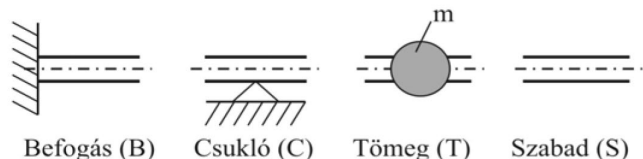
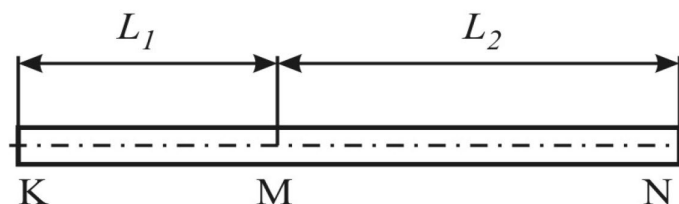
Kódszám: 563

A feladat részletezése:

Határozza meg a hajlítólengést végző rúd első néhány lengésképét és sajátfrekvenciáját analitikus számítással (csak az 1. sajátfrekvencia esetén) és VEM módszerrel!

Méréssel is határozza meg a vázolt rúd sajátfrekvenciáit és keresse meg a második és harmadik lengéskép csomópontjait! A mérésről készítsen jegyzőkönyvet, vesse össze mérési és számítási eredményeit, keressen magyarázatot az esetleges eltérésekre!

Adatok: $a = 30$ [mm] $m = 0,531$ [kg]
 $b = 5$ [mm] $\rho = 7800$ [kg/m³]
 $E = 210$ [GPa]



I.	1	2	3	4	5	6
L_1 [mm]	150	200	250	300	350	400
L_2 [mm]	410	360	310	260	210	160

II.	1	2	3	4	5	6
K	B	B	B	C	C	C

III.	1	2	3	4	5	6
M	C	C	C	T	T	S
N	C	T	S	C	B	B

A II. és III táblázat megadja, hogy az adott K, M és N keresztmetszetekben milyen típusú elem található. (B - befogás, C - csukló, T - tömeg, S - szabad)

Beadási határidő: 14. oktatási hét, péntek 12:00



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Gépek Dinamikája

3. Házi feladat

Kelle Gergő

2022. május 14.

Tartalomjegyzék

1. Konstrukció	4
2. Analitikus számítás	5
3. VEM módszer	7
4. Számítás mérési adatokból	8
5. Különböző számítási módszerek összehasonlítása	11

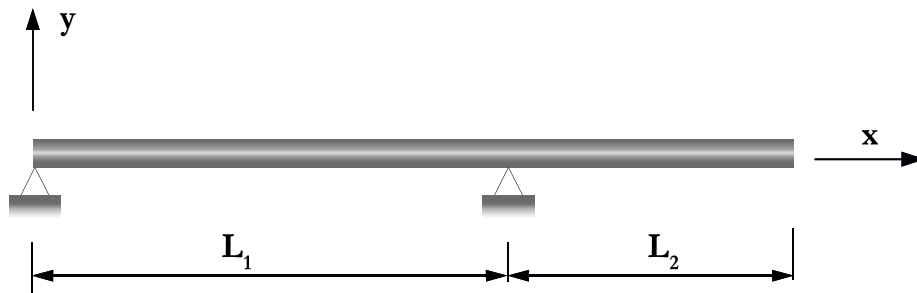
1. Konstrukció

A konstrukció összeállítása és méretei a kapott kód mentén adaptálódik. A feladat során a kapott, 563 kódhoz tartozó konstrukciót oldom meg.

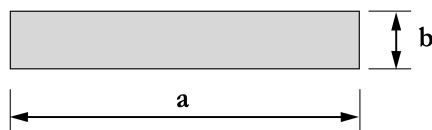
Jelölés	Érték	Mértékegység
a	30	[mm]
b	5	[mm]
m	0,531	[kg]
ρ	7800	$[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$
E	210	[GPa]
L_1	350	[mm]
L_2	210	[mm]

1. táblázat. Alapadatok

Az adatok alapján a szerkezet 1 rúd végi csuklóból, 1 rúd közepén (L_1 távolságra) lévő csuklóból és egy szabad végből áll.



1. ábra. Az 563 kódhoz tartozó méretarányos ábra



2. ábra. Konstrukció keresztmetszete

2. Analitikus számítás

Az analitikus számításhoz a Rayleigh-elv alapján készítjük el. A Rayleigh-elvet a laborhoz kiadott tanszéki segédlet mentén készítettem el *Python* környezetben.

Az elv alkalmazása során egy, a peremfeltételek számával megegyező fokszámú polinomiális függvénnyel közelítjük a kirajzolható lengésképet. Az elv alkalmazási feltételezései:

1. a csillapítatlan (konzervatív) rendszer első lengésképéhez tartozó megoldását nézzük;
2. a rendszer tisztán az első sajátrezgésével rezeg.

A polinomot a következőképp írhatjuk fel:

$$Y(x) = a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad (1)$$

Ahol $| Y(x)$: Lengésképfüggvény

A polinom együtthatói ismeretlenek számunkra azonban a konstrukciónkhoz felírhatunk 5 darab peremfeltételt melyet kiegészítünk az $a_5 = 1$ önkényes megválasztásával. Az a_5 értéke szabadon megválasztható, ugyanis a lengésképek bármely konstansszorososa egyaránt megfelelő megoldást ad. A peremfeltételek a korábban ismertetett elrendezés mentén a következőként alakulnak.

Rúd végi csukló:

$$Y(0) = 0 \quad (2)$$

$$Y''(0) = 0 \quad (3)$$

Közbenső csukló:

$$Y(L_1) = 0 \quad (4)$$

Szabad rúdvég:

$$Y''(L_1 + L_2) = 0 \quad (5)$$

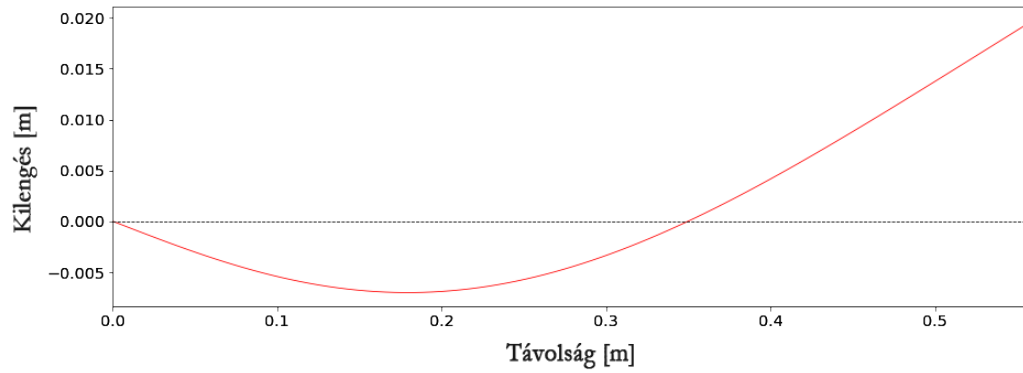
$$Y'''(L_1 + L_2) = 0 \quad (6)$$

A peremfeltételek figyelembevételével a lengésképfüggvény immár meghatározható.

$$Y(x) = x^5 - 1,876x^4 + 1,045x^3 - 0,063x$$

(7)

A megkapott egyenletet ábrázolva megkapjuk a lengésképet.



3. ábra. Első sajátfrekvenciához tartozó lengéskép

A Rayleigh-elv segítségével a kapott polinomból visszafejthető az első sajátfrekvencia értéke is. Az megoldás mögötti elmélet a következőképp vezethető le:

$$y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t) \quad (8)$$

Ahol $\left| \begin{array}{l} \omega: \text{ (első) sajátfrekvencia} \\ y: \text{ alakváltozás} \end{array} \right.$

A kiindulási feltételezésünk miszerint az alakváltozás csupán két mennyiségtől függ, az időtől és a rúd vizsgált súlypontjának x irányú pozíciójától. Az alakváltozási energia a (4) képlet második x szerinti deriváltjának, míg a kinetikus energia az első idő szerinti deriváltjával van összefüggésben.

$$\dot{y}(x, t) = -Y(x)\omega \sin(\omega t) \quad (9)$$

$$y''(x, t) = Y''(x) \cos(\omega t) \quad (10)$$

Az összefüggések a korábban tett észrevételek alapján felírhatók a kinetikus- és alakváltozási energia képletébe

$$U = \frac{IE}{2} \int_0^{L_1+L_2} Y''^2(x) \cos^2(\omega t) dx \quad (11)$$

A fenti összefüggés maximumát véve a következőt kapjuk.

$$U_{max} = \frac{IE}{2} \int_0^{L_1+L_2} Y''^2(x) dx \quad (12)$$

A maximális kinetikus energiához tartozó képlet hasonló módon áll elő, melyre végezve a következőt kapjuk.

$$T_{max} = \frac{\rho A \omega_1^2}{2} \int_0^{L_1+L_2} Y^2(x) dx \quad (13)$$

Az energia megmaradás révén ezen két energia egyenletnek egymással megegyező értékeket kell adniuk.

$$T_{max} = U_{max} \quad (14)$$

Az egyenletből kifejezhető az első sajátkörfrekvencia melyet rögtön sajátfrekvenciába váltunk.

Sajátfrekvencia:

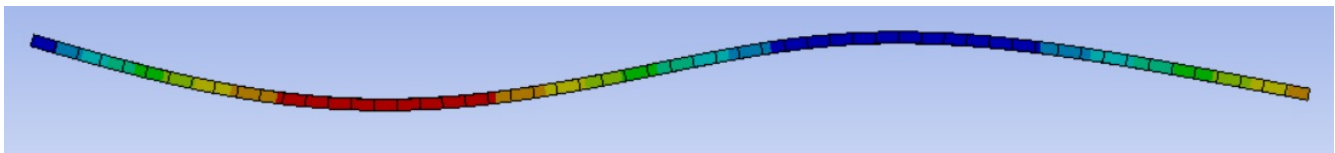
$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{IE}{\rho a \cdot b}} \sqrt{\frac{\int_0^{L_1+L_2} Y''^2(x) dx}{\int_0^{L_1+L_2} Y^2(x) dx}} = 51,866 \text{ [HZ]}$$

3. VEM módszer

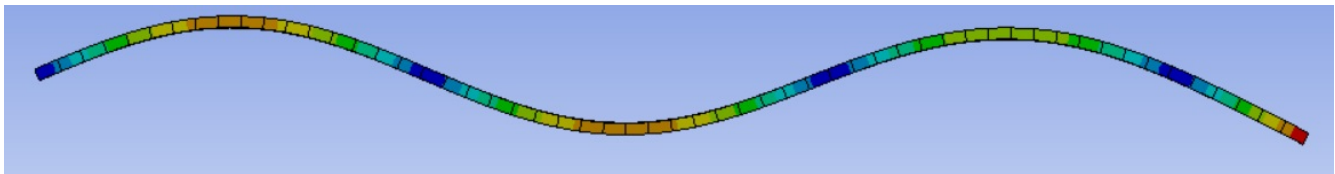
VEM módszer alkalmazásánál *Modal analysis* eszköztárat használtam, melyben az egyszerű geometria létrehozása után az egyéni konstrukcióhoz illő kényszereket adtuk hozzá. A kényszerek megfelelő beállítása után a szerkezetre vonatkozó sajátfrekvencia értékek és a hozzá tartozó lengésképek kiírhatók, ábrázolhatók. Fontos megjegyezni, hogy ellenben a mérési adatokból való számításnál itt az oldal irányú mozgást és a torziós mozgást leíró lengésképeket, sajátfrekvenciákat is megtalálja a program, azonban az eredmények összevetésére való igényünkre tekintettel ezeket figyelmen kívül hagyjuk a kiértékelés szempontjából számunkra közömbös.

i	Sajátfrekvencia [Hz]
1	49,128
2	134,26
3	395,16
4	542,57
5	938,43

2. táblázat. VEM módszerrel meghatározott sajátfrekvencia értékek



4. ábra. A második lengéskép VEM módszerrel



5. ábra. A harmadik lengéskép VEM módszerrel

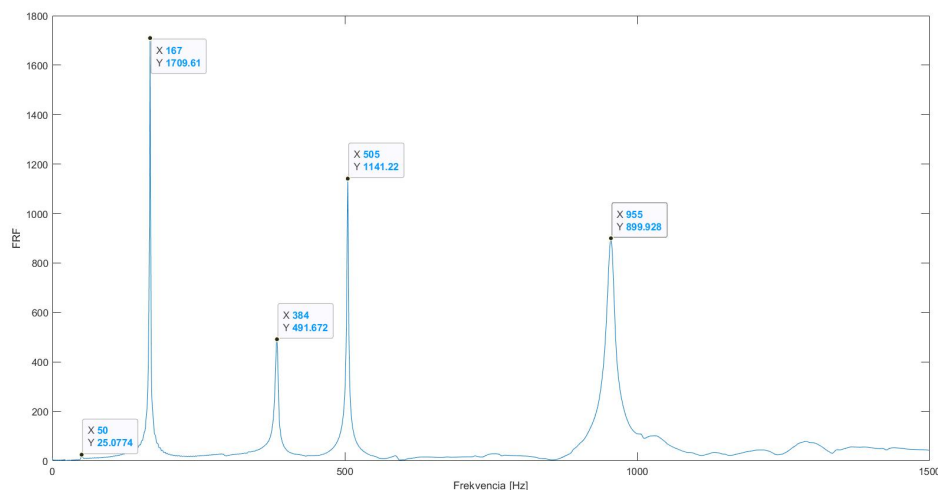
A lengésképekről immár leolvasható a hozzájuk tartozó csomópontok. A csomópontok keresésénél fontos figyelembe venni, hogy L_1 távolságra egy fizikai kényszer, egy csuklós megtámasztás van, ezen pont listázásától eltekintünk.

f_i	Csomópont helye [m]	
2	0,475	
3	0,19	0,51

3. táblázat. VEM módszerrel meghatározott második és harmadik lengéskép csomópontjainak elhelyezkedése az x tengelyen

4. Számítás mérési adatokból

A mérés során egy impulzus kalapáccsal gerjesztettük a szerkezetet melyre egy gyorsulásérzékelőt szereltünk mely a függőleges gyorsulásértékét rögzítette a szerkezetnek a felhelyezés pontjában. A felhelyezés során ügyeltünk arra, hogy az előzetesen VEM módszerrel számított lengésképeken megfigyelhető csomópontokat elkerüljük, hisz ez fals eredményeket szülne. A gerjesztésnél, lehetőség szerint minél jobban kell hasonlítani egy dirac delta gerjesztésre melyet nagyban hátráltatott, hogy a mérés során több ütés során is tapasztalható volt a prall-os ütés jelensége. Sajnos ez nem kiküszöbölhető tapasztalatlanságból adódott. Prall-os ütésről akkor beszélünk, mikor a kalapácsa szerkezethez való ütdését követően a szerkezet elmozdul majd a kalapács elvételét megelőzően újból nekiütközik az impulzuskalapácsnak. A mérési eredményekből felvehető FRF diagramról leolvashatóak a sajátfrekvencia értékek (melyek meghatározhatóak a szerkezet kizárólag függőleges elmozdulásának ismeretéből).



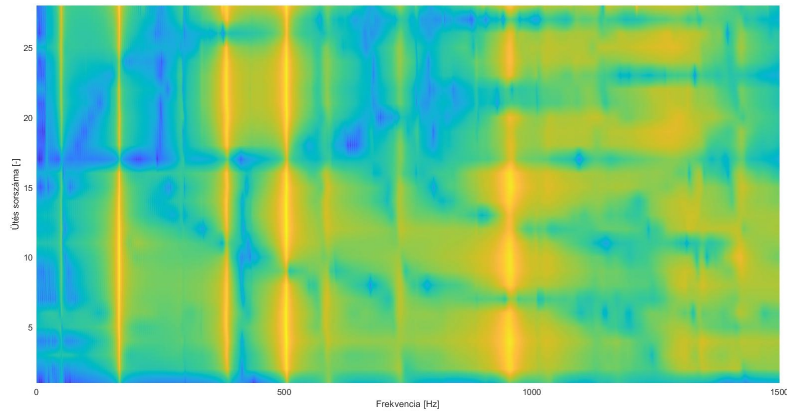
6. ábra. Mérési adatokból előállított frekvencia átviteli függvény

A leolvasott értékeket táblázatban összegyűjtve:

i	Sajátfrekvencia [Hz]
1	50
2	167
3	384
4	505
5	955

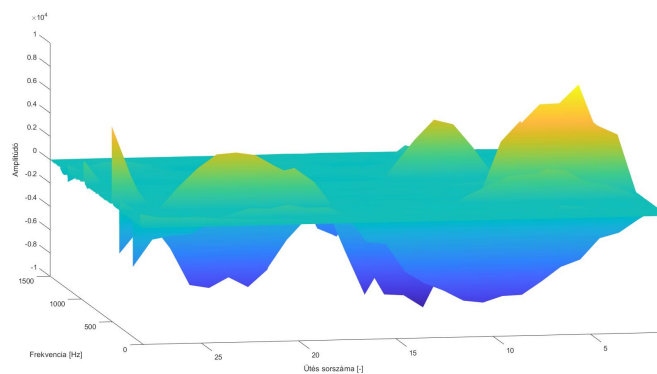
4. táblázat. Mérési adatokból meghatározott sajátfrekvencia értékek

A laborgyakorlat során megismertük, hogy a lengésképek előállíthatóak frekvencia átviteli függvény imaginárius részének ábrázolásával.



7. ábra. Vízés diagram

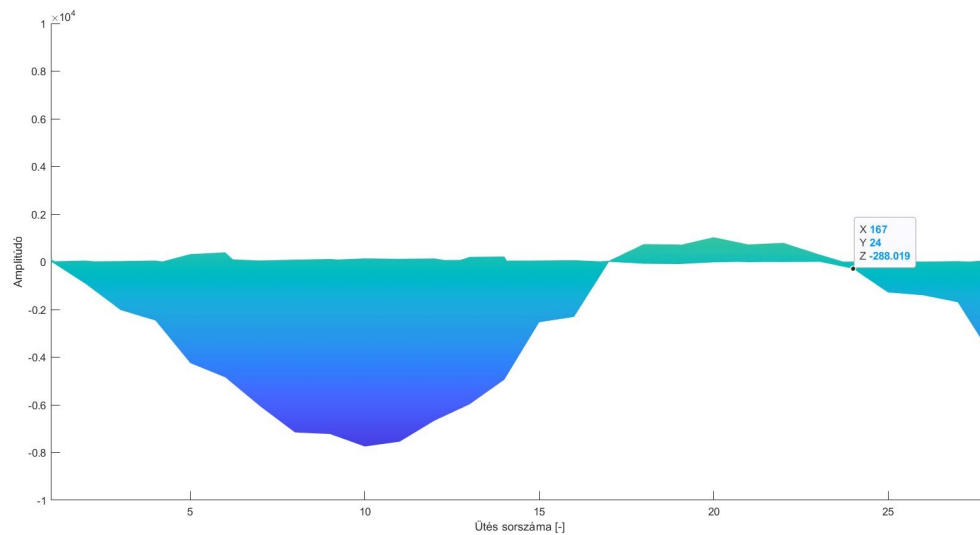
Az FRF abszolút értékének tyzes alapú logaritmusának vízés diagramján megfigyelhető továbbá a lengésképek csomópontjainak "vándorlása".



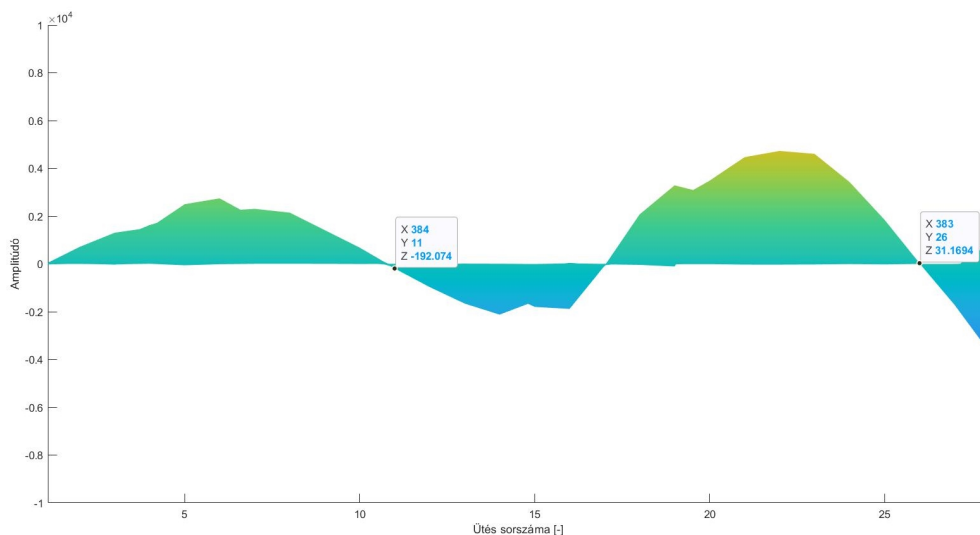
8. ábra. Vízés diagram képzetes része a lengésképek megjelenítésére

A ?? segítségével meghatározhatóak a feladatként megszabott vizsgált második és harmadik lengéskép, melyeken jól kivehető(ek) a csomópont(ok). A csomópontok vizsgálatánál fontos kiemelni, hogy a 17 és 18 ütésnél lévő értékek csupán a csuklós megtámasztásból adódnak, ezen fizikai csomópontot nem kell számításba venni.

A vízesés diagram képzetes részének ábrázolásával annak sajátfrekvenciái mentén felvett lengésképeit e megfelelő keresztmetszet kiválasztásával vizsgálhatjuk.



9. ábra. Második lengéskép



10. ábra. Harmadik lengéskép

A ?? ?? alapján jól kivehetőek a csomópontok melyek x tengelyen való elhelyezkedésük visszatejthető az ötös sorszámból hisz a szerkezeten 2 [cm] osztásközzel haladtunk így az ütés sorszáma · 0,02 összefüggéssel számítható.

f_i	Csomópont helye [m]	
2	0,48	
3	0,22	0,52

5. táblázat. Mérési adatokból meghatározott második és harmadik lengéskép csomópontjainak elhelyezkedése az x tengelyen

5. Különböző számítási módszerek összehasonlítása

Az analitikus számítás során alkalmazott Rayleigh-elv, a VEM módszer és a mérési eredményekkel meghatározott sajátfrekvenciákat és lengésképeket összehasonlítva láthatjuk, hogy összességében az értékek összecsengenek. Fontos megemlíteni, hogy a mérési eredményekre nagy hatással volt a rendelkezésre álló idő szűkössége, mely révén erősen prall-os ütések is elfogadásra, felvezetésre kerültek.

i	Sajátfrekvencia [Hz]		
	Analitikus számítás	Vem módszer	Mérési eredmény
1	51,866	49,128	50
2	-	134,26	167
3	-	395,16	384
4	-	542,57	505
5	-	938,43	955

6. táblázat. A függőleges irányítottaságú szenzorral kimérhető sajátfrekvenciák összehasonlítása

f_i	Csomópont helye [m]			
	Vem módszer		Mérési eredmény	
2	0,475		0,48	
3	0,19	0,51	0,22	0,52

7. táblázat. Második és harmadik lengésképeken a csomópontok x irányú elhelyezkedése

A csomópontokat összehasonlítva, minimális eltérés tapasztalható, ezt indokolhatja, hogy a mérés során 2 [cm] beosztásonként gerjesztettük a szerkezetet az impulzuskalapáccsal és vettünk fel mérési eredményeket. A VEM módszer alkalmazása során hálózás ennél jóval sűrűbb csomópontokat eredményez, így a számítási metódus pontosabb megoldásokat adhat a köztes pontokban mint a nagyobb osztásközzel felvett pontok közötti lineáris interpolálás.