



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Gépek Dinamikája

2. Házi feladat

Kelle Gergő

2022. április 26.

Tartalomjegyzék

1. Feladat - Analitikus számítás	4
1.1. Mátrixos mozgásegyenlet	4
1.2. A rendszer sajátfrekvenciája	7
1.3. A rendszer lengéskép vektorai	8
1.4. Állandósult állapot mozgásegyenlete	8
2. Feladat - VEM számítás	10
2.1. Sajátfrekvencia és lengésképek	10
2.1.1. Rúd tömege figyelmen kívül hagyva	10
2.1.2. Rúd tömege figyelembe véve	10
2.1.3. Lengésképek	11
3. Feladat - Numerikus szimuláció	12
4. Mérés	15
4.1. Ütési kísérlet	15
4.2. Gyors Fourier-transzformáció	16
4.3. Lissajous görbe	17
4.4. Lengésfojtó	17
5. Eredmények összehasonlítása	19
6. Melléklet	20
6.1. Python codes	20
6.1.1. System's eigenfrequency	20
6.1.2. System's eigenvectors	20
6.1.3. FFT from .csv	21
6.2. Interaktív diagramok	22
7. Forrás	23

1. Feladat - Analitikus számítás

1.1. Mátrixos mozgásegyenlet

Határozza meg rúd síkjában lévő 3 szabadsági fokú merev test mátrixos mozgásegyenletét!

A rendszer mozgásegyenletének meghatározása analitikus módon a Lagrange-egyenlet felhasználásával történik. A feladat megoldása során a rudak tömegétől eltekintünk ($\rho_{rud} \approx 0$).

A rendszert a $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix}$ általános koordináták segítségével írhatjuk le. A feladat feldolgozásához szükséges lesz a mátrix együtthatós differenciálegyenletében szereplő komponenseket előállítani.

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (1)$$

Ahol	\mathbf{M} : Tömeg mátrix \mathbf{C} : Csillapítási mátrix \mathbf{K} : Merevségi mátrix $\mathbf{Q}(t)$: Általános erővektor
------	---

A rendszerre felírható kinetikus energia egyenlet:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot \Theta_A \dot{\varphi}^2 \quad (2)$$

Ahol	m : $2m_1 + m_3 = 1,1$ [kg] Θ_A : A két 1-es jelű és a 3-as jelű test közös súlypontjába számított másodrendű nyomatéka Θ_A : $\frac{1}{12}m_3 \cdot (L_3 + 2 \cdot h_1)^2 + 2 \left(\frac{1}{12}m_1 (3r_1^2 + h^2) + m_1 \left(\frac{L_3}{2} + \frac{h_1}{2} \right)^2 \right) = 0,0031967$ [kgm ²]
------	--

Az így kapott kinetikus energia egyenletéből tömegmátrixot -a mátrixban elfoglalt helyétől függően- az általános koordináták szerinti másodrendű parciális deriválttal vagy vegyes parciális deriválással állíthatjuk elő.

$$M_{i,j} = \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j} \quad (3)$$

A kinetikus energiára felírt képletből látszik, hogy a tömegmátrixnak egy diagonál mátrixnak kell lennie.

Tömegmátrix:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0031967 \end{bmatrix} \text{ [SI]}$$

A csillapítási és merevségi mátrix meghatározásához a Castigliano-tételt fogjuk alkalmazni melyhez tartozó képletek forrása *Castigliano- és Betti-tételek összefoglalása, kidolgozott példa: Dr. Kossa Attila*.

A rúd egy bizonyos keresztmetszetének elmozdulása - a nyírásból származó alakváltozási energia elhanyagolásával - az alábbi összefüggés szerint számítható:

$$f = \int_L \left(\frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial F} + \frac{M_h}{IE} \frac{\partial M_h}{\partial F} + \underbrace{\frac{M_t}{I_p G} \frac{\partial M_t}{\partial F}}_{\text{esetünkben ez zérus}} \right) ds \quad (4)$$

ahol f a keresztmetszetnek az F erő irányába eső elmozdulása.

Egy adott keresztmetszet szögelfordulására adódó összefüggés:

$$\varphi = \int_L \left(\frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial M} + \frac{M_h}{IE} \frac{\partial M_h}{\partial M} + \underbrace{\frac{M_t}{I_p G} \frac{\partial M_t}{\partial M}}_{\text{esetünkben ez zérus}} \right) ds \quad (5)$$

ahol φ a keresztmetszet szögelfordulása az M -nek megfelelő értelemben.

A csillapítási- és a merevségi mátrix kapcsolatára és összetételére a következő összefüggések írhatóak föl:

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{p} \quad \text{és} \quad \mathbf{K} = \mathbf{W}^{-1} + \mathbf{K}_{\text{rugo}} \quad (6)$$

$$\text{Ahol} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{W}: \text{Rugóállandó mátrix} \\ \mathbf{W}: \mathbf{K}^{-1} \end{array} \right.$$

A fenti (4) és (5) egyenlet alapján felírhatjuk a szögelfordulására és keresztmetszet elmozdulására adódó képleteket a feladatban meghatározott szerkezetre.

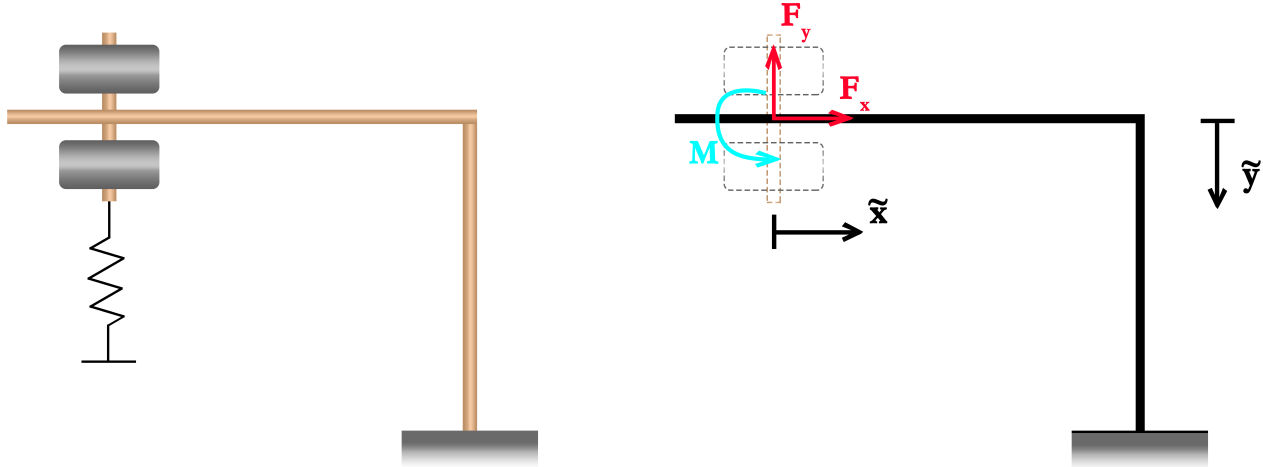
$$u = \int_0^{L_2} \left(\frac{N_1}{AE} \frac{\partial N_1}{\partial F_x} + \frac{M_{h1}}{IE} \frac{\partial M_{h1}}{\partial F_x} \right) d\tilde{x} + \int_0^{L_1} \left(\frac{N_2}{AE} \frac{\partial N_2}{\partial F_x} + \frac{M_{h2}}{IE} \frac{\partial M_{h2}}{\partial F_x} \right) d\tilde{y} \quad (7)$$

$$v = \int_0^{L_2} \left(\frac{N_1}{AE} \frac{\partial N_1}{\partial F_y} + \frac{M_{h1}}{IE} \frac{\partial M_{h1}}{\partial F_y} \right) d\tilde{x} + \int_0^{L_1} \left(\frac{N_2}{AE} \frac{\partial N_2}{\partial F_y} + \frac{M_{h2}}{IE} \frac{\partial M_{h2}}{\partial F_y} \right) d\tilde{y} \quad (8)$$

$$\varphi = \int_0^{L_2} \left(\frac{N_1}{AE} \frac{\partial N_1}{\partial M} + \frac{M_{h1}}{IE} \frac{\partial M_{h1}}{\partial M} \right) d\tilde{x} + \int_0^{L_1} \left(\frac{N_2}{AE} \frac{\partial N_2}{\partial M} + \frac{M_{h2}}{IE} \frac{\partial M_{h2}}{\partial M} \right) d\tilde{y} \quad (9)$$

$$\text{Ahol} \quad \left| \begin{array}{l} A: a \cdot b = 0,008 \text{ [m}^2\text{]} \\ I: \frac{a \cdot b^3}{12} = 2,667 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]} \end{array} \right.$$

A vízszintes- (u) és a függőleges (v) keresztmetszet elmozdulásához, valamint a szögelfordulás (φ) meghatározásához szükségünk van az igénybevételi függvényekre. Ehhez felrajzoljuk a szerkezetünket a 3-as jelű rúd és a súlyok erőkkel valamint nyomatékkal való helyettesítésével.



A könnyebb függvényleírás érdekében új inerciarendszert választottunk (\tilde{x}, \tilde{y}) . Az igénybevételi függvények a következőképp írhatók fel:

$$N_1(\tilde{x}) = F_x \quad (10)$$

$$N_2(\tilde{y}) = -F_y \quad (11)$$

$$M_{h1}(\tilde{x}) = F_y \cdot \tilde{x} - M \quad (12)$$

$$M_{h2}(\tilde{y}) = -F_y \cdot l_2 - F_x \cdot \tilde{y} + M \quad (13)$$

Az igénybevételi függvények ismeretében az (5)-(7) egyenletek megoldhatók, a képletekben szereplő F_x, F_y, M erőket és erőpárokat ismeretlennek vesszük melyeket később a Castigliano-tétel alkalmazásával a rugóállandó mátrixban elfoglalt helyük szerint definiálunk majd egység vagy zérus értékű erőkné.

Rugóállandó mátrix

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{bmatrix}$$

Castigliano-tétel alapján

$$\begin{aligned} w_{11} &= u(F_x = 1, F_y = 0, M = 0) \\ w_{21} &= v(F_x = 0, F_y = 1, M = 0) \\ w_{31} &= \varphi(F_x = 0, F_y = 0, M = 1) \\ w_{12} &= u(F_x = 1, F_y = 0, M = 0) \\ w_{22} &= v(F_x = 0, F_y = 1, M = 0) \\ w_{32} &= \varphi(F_x = 0, F_y = 0, M = 1) \\ w_{13} &= u(F_x = 1, F_y = 0, M = 0) \\ w_{23} &= v(F_x = 0, F_y = 1, M = 0) \\ w_{33} &= \varphi(F_x = 0, F_y = 0, M = 1) \end{aligned}$$

Rugóállandó mátrix:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3,8985 \cdot 10^{-4} & 5,8466 \cdot 10^{-4} & -8,3523 \cdot 10^{-4} \\ 5,8466 \cdot 10^{-4} & 1,5592 \cdot 10^{-3} & -2,5057 \cdot 10^{-3} \\ -8,3523 \cdot 10^{-4} & -2,5057 \cdot 10^{-3} & 4,7727 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ [SI]}$$

A (6) összefüggések alapján a rugóállandó mátrix ismeretében már a merevségi mátrix számítható annak invertálásával és a rugóból adódó merevségi mtrix összegével.

Merevségi mátrix:

$$\mathbf{K} = \mathbf{W}^{-1} + \mathbf{K}_{\text{rugo}} = \begin{bmatrix} 6409,5471 & -3844,4729 & -896,6775 \\ -3844,4729 & 6659,5471 & 2692,2295 \\ -896,6775 & 2692,2295 & 1466,0257 \end{bmatrix} \text{ [SI]}$$

A feladat kiírás szerint a csillapítási mátrix a merevségi mátrixból a megadott p arányossági tényezővel származtatható.

Csillapítási mátrix:

$$\mathbf{C} = p \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 19,2286 & -11,5334 & -2,69 \\ -11,5334 & 19,9786 & 8,0767 \\ -2,69 & 8,0767 & 4,3981 \end{bmatrix} \text{ [SI]}$$

A feladat kiírás alapján rugóval a megadott módon, a szerkezetet egy y irányú útgerjesztéssel terheljük.

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ r \cdot k \cdot \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,15 \cdot \cos(250t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az immár ismert tömeg, merevségi, csillapítási mátrix valamint az általános erővektor segítségével az (1) egyenlet alapján, a mátrix együtthatós differenciálegyenlet már maradéktalanul definiált.

Mozgásegyenlet:

$$\begin{bmatrix} 1,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0031967 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19,2286 & -11,5334 & -2,69 \\ -11,5334 & 19,9786 & 8,0767 \\ -2,69 & 8,0767 & 4,3981 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6409,5471 & -3844,4729 & -896,6775 \\ -3844,4729 & 6659,5471 & 2692,2295 \\ -896,6775 & 2692,2295 & 1466,0257 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,15 \cdot \cos(250t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2. A rendszer sajátfrekvenciája

A rendszer sajátfrekvenciáit a következő egyenlet ω_n -re való megoldásával kaphatjuk.

$$\det(\mathbf{K} - \omega_{n,i}^2 \cdot \mathbf{M}) = 0 \quad (14)$$

Elvégezve a behelyettesítéseket és a determináns kiszámítását a következő polinomot kapjuk:

$$-0,003867\omega_{ni}^6 + 1819,8464\omega_{ni}^4 - 12307449,8774\omega_{ni}^2 + 7659095285,1876 = 0$$

A váltakozó előjel biztosíték az eddigi számolások helyességét illetően.

Az egyenletet ω -ra megoldva megkapjuk a sajátkörfrekvencia és sajátfrekvencia értékeket.

i	$\omega_{n,i} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$f \text{ [Hz]}$
1	26,3302	4,1906
2	78,4881	12,4918
3	680,9097	108,3702

1.3. A rendszer lengéskép vektorai

A rendszer lengésképeit a következő képlettel számíthatjuk:

$$\det(\mathbf{K} - \omega_{n,i}^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{A}_i = 0 \quad (15)$$

A lengésképvektorok egy komponense szabadon megválasztható, így minden lengésképvektor első elemét önkényesen egynek választjuk. Természetesen ennek az \mathbf{A} nullvektor megoldása lenne de a triviálistól eltérő megoldást keresünk. Továbbá élünk azzal az egyszerűsítéssel, hogy a lengésképek vektorainak első komponensét önkényesen 1-nek választjuk. Ezt azért tehetjük meg, mert \mathbf{A} vektor minden konstans szorosa kielégíti az összefüggést.

Lengéskép vektorok:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,3221 \\ -3,6582 \end{bmatrix} [\text{SI}] \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4242 \\ 1,4096 \end{bmatrix} [\text{SI}] \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2,9441 \\ -548,9977 \end{bmatrix} [\text{SI}]$$

1.4. Állandósult állapot mozgásegyenlete

$$\mathbf{q}_p(t) = \mathbf{L} \cdot \cos(\omega t) + \mathbf{N} \cdot \sin(\omega t) \quad (16)$$

$$\mathbf{q}_p(t) = \mathbf{L} \cdot \cos(\omega t) + \mathbf{N} \cdot \sin(\omega t) \quad \cdot \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_p(t) = -\omega^2 \mathbf{L} \cdot \cos(\omega t) + -\omega^2 \mathbf{N} \cdot \sin(\omega t) \quad (17)$$

Az általános erővektor felbontása koszinuszos és szinuszos komponensekre:

$$\mathbf{Q}_{cos} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,15 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{Si}] \quad \mathbf{Q}_{sin} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K} & \omega \mathbf{C} \\ -\omega \mathbf{C} & -\omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{cos} \\ \mathbf{Q}_{sin} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Átrendezve a (18) összefüggést \mathbf{L} és \mathbf{N} vektorokra:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K} & \omega \mathbf{C} \\ -\omega \mathbf{C} & -\omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{cos} \\ \mathbf{Q}_{sin} \end{bmatrix} \quad (19)$$

L és **N** vektorokra kapott megoldás:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0,06289 \\ -2,2127 \\ 4,4807 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ Si} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -6,4395 \\ 4,7129 \\ 18,3145 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \text{ Si}$$

Az **L** és **N** vektorok ismeretében az állandósult mozgásegyenlet immár maradéktalanul definiált.

Állandósult mozgásegyenlet:

$$\mathbf{q}_p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,06289 \\ -2,2127 \\ 4,4807 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \cdot \cos(250t) + \begin{bmatrix} -6,4395 \\ 4,7129 \\ 18,3145 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \cdot \sin(250t)$$

2. Feladat - VEM számítás

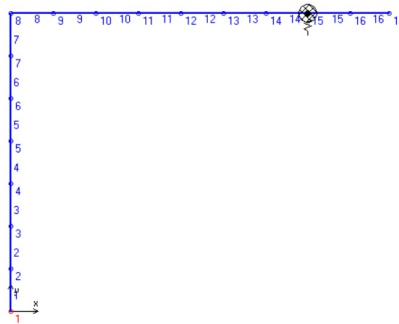
2.1. Sajátfrekvencia és lengésképek

Ellenőrizze az analitikusan számolt sajátfrekvenciákat és lengésképeket végelem módszerrel!

A VEM szimulációt a javasolt, tanszéki SIKERÉZ (a továbbiakban: Program) szoftver segítségével készítettem el. Kiértékelés során először egy, a rúd sűrűségét elhanyagolandó és egy, a rúd valós sűrűségét figyelembe vevő kiértékelést készítettem.

A Program beállításait tekintve a megadott geometriát hoztuk létre oly módon, hogy a 3-as jelű rúd, valamint a rá csatlakoztatott két henger tömeget helyettesítettük az "L" alakú szerkezethez való csatlakozási pontján egy koncentrált tömeggel, valamint egy tehetetlenségi nyomatékkal. Továbbá a rendszert kiegészítettük ezen pontján egy k rugómerevséggel.

A kirajzolt és használt modell csomópontjainak és elemeinek szemléltetése:



2.1.1. Rúd tömege figyelmen kívül hagyva

A Program sajátossága miatt, kötelező valamilyen sűrűséget megadni, így a cél érdekében ezt minimálisan kicsi $\rho = 1 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ értékre választottam. A keresztmetszet megadását követően ezen inputokkal operálva a következő sajátfrekvenciákat adja a Program:

i	$\omega_{n,i} \left[\frac{rad}{s} \right]$	$f \text{ [Hz]}$
1	26,3329	4,191
2	78,4617	12,4875
3	680,2875	108,2711

Ezen módszer és az analitikus megoldás során kapott sajátfrekvencia értékek közötti relatív eltérés kisebb mint 0,1%.

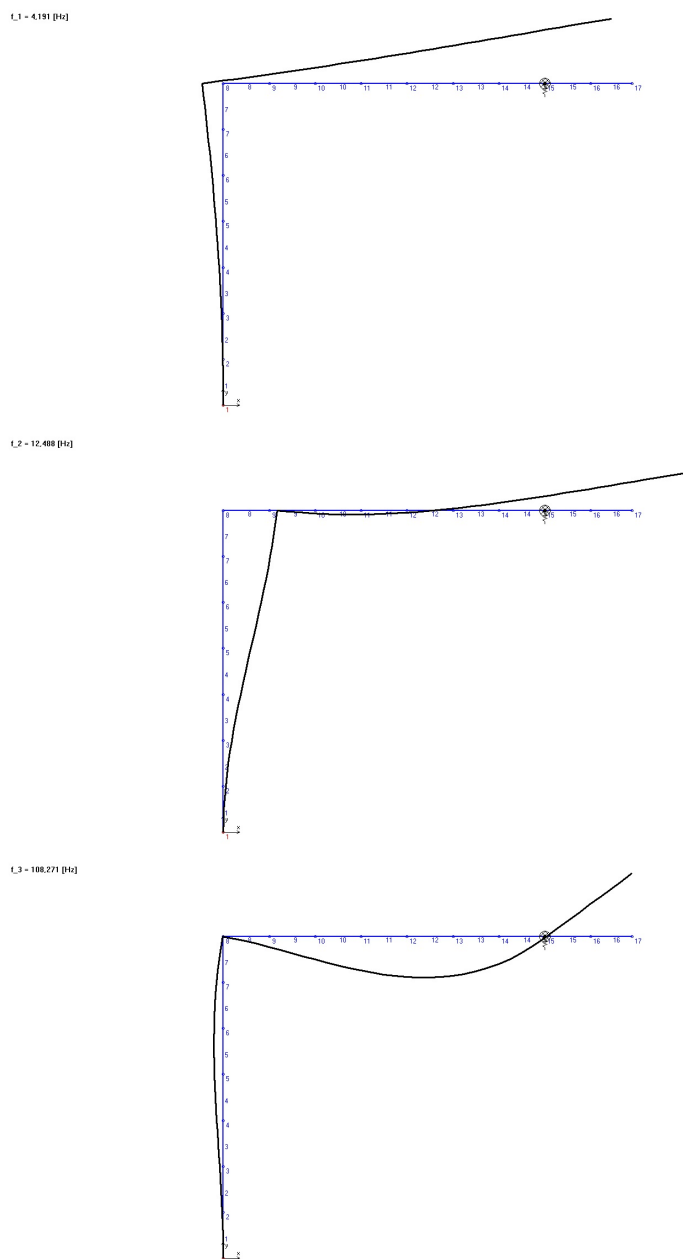
2.1.2. Rúd tömege figyelembe véve

A rúd tömegét figyelembe véve a Programban a sűrűség értékét $\rho = 700 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ -ra módosítva a következő értékeket kapjuk a rendszer sajátfrekvenciájára:

i	$\omega_{n,i} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$f \text{ [Hz]}$
1	23,2353	3,698
2	64,19	10,2161
3	421,0639	67,0144

2.1.3. Lengésképek

A Program a következő 3 lengésképet mutatta:

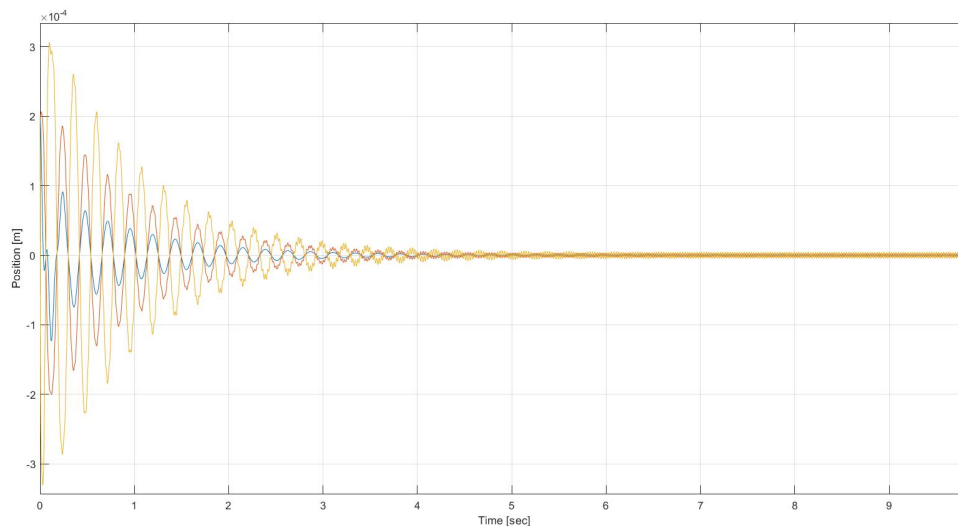


3. Feladat - Numerikus szimuláció

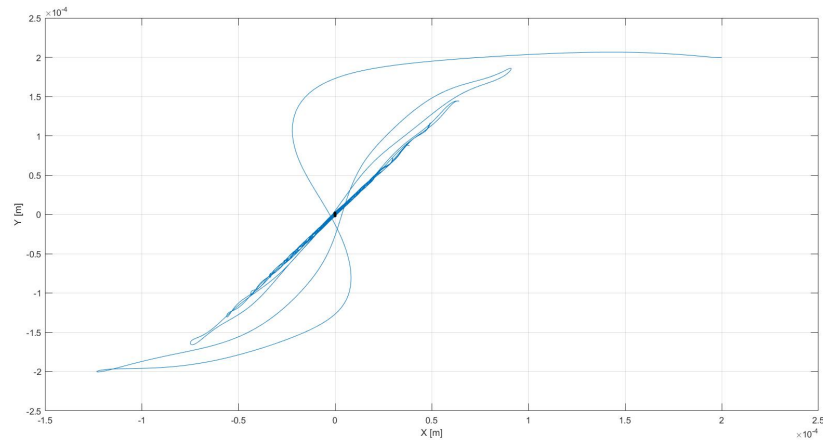
A numerikus szimulációt során a korábban már tanult [Differenciálgeometria és numerikus módszerei (BMETE94AX27)] Runge-Kutta módszerrel végezzük el. A módszer igényel kezdeti érték megadását melyet a segédlet alapján az impulzus jellegű gerjesztés révén egy, a kezdeti sebességeket és zérus elmozdulásokat előíró értéket adunk. A rendszerünk esetében a módszer alkalmazásának további bemeneti adatai az **1. Feladatban** analitikusan kiszámított tömeg- merevségi és csillapítási mátrix. A módszer további paraméterei a periódusidő, a két pont között eltelt idő (dt) a lépések száma, valamint a korábban már tisztázott kezdeti értékek. A Runge-Kutta módszer elsőrendű differenciálegyenletek numerikus megoldására szolgál azonban esetünkben ez nem elegendő így annak másodrendű differenciálegyenletét át kell vezetni elsőrendű differenciálegyenletté. Ezt a Cauchy-átírással tehetjük meg. A Cauchy-átírás lehetővé teszi, hogy átírjuk elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre az eredetileg másodrendű mozgásegyenletet. A Cauchy-féle átírás a Rezgésstan: Cernák Gábor - Stépán Gábor írása alapján történt. A rendszer lengésképe időtartományban, az x-y ábrák, valamint az FFT ábra a tanszéki MATLAB segédlet alapján készültek el.

Paraméterek	Periódusidő : T	$= \frac{2\pi}{\omega_{n,max}}$ [s]
	Időköz : dt	$= \frac{T}{10}$
	Lépésszám : n	$= 2048 \cdot 16$
	Kezdeti érték : z	$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0002 \\ 0,0002 \\ 0,0002 \end{bmatrix}$

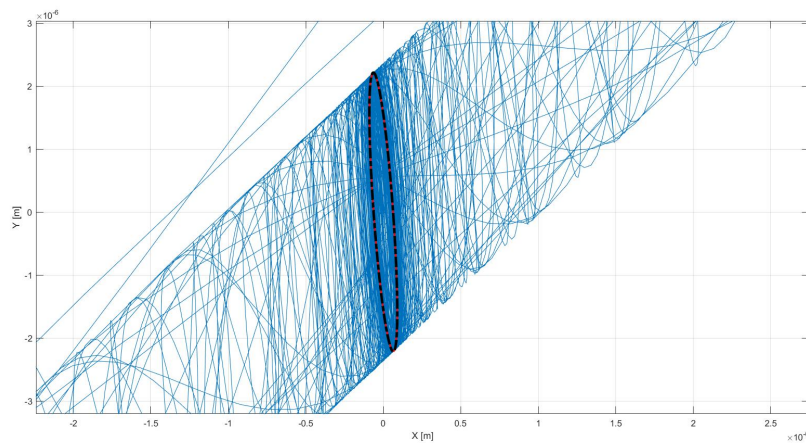
A rendszer lengésképe időtartományban ábrázolva:



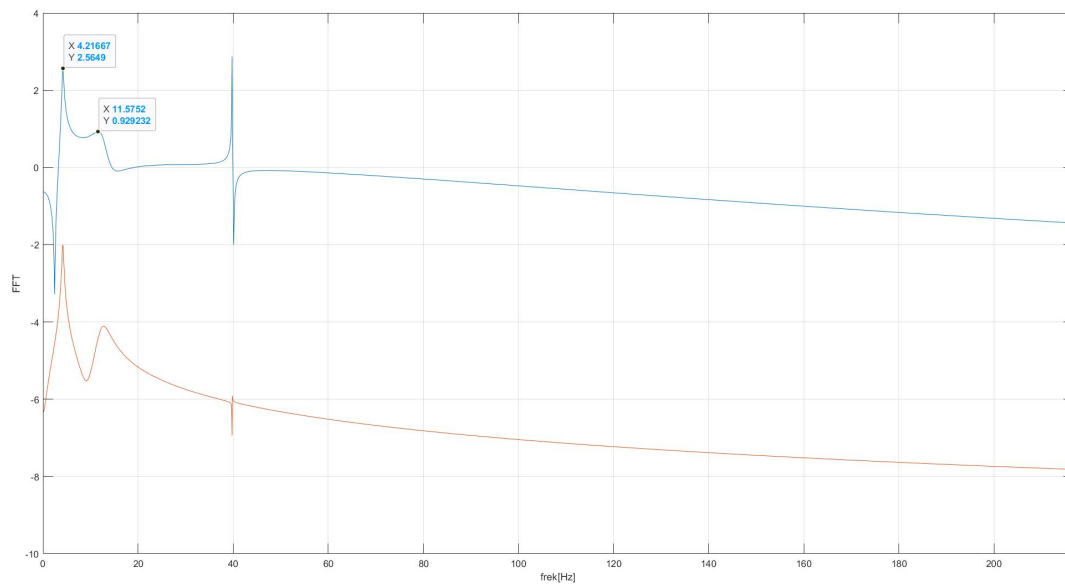
Az elmozdulás ábrázolása x-y ábrán:



Az x-y ábra közelebbi kirajzolása, az analitikus és a numerikus megoldás együttes ábrázolása:



A gyors Fourier-transzformáció (továbbiakban: FFT) lehetőséget nyújt az időtartományból frekvenciatartományba való áttérésre, gyakorta alkalmazott a rezgésanalízisek témakörében. Az FFT a diszkrét Fourier-transzformált kiszámítására szolgál. Ehhez $N = 2^n$ egyenközű mintavétel szükséges, ahol $n \geq 6$. A mintavételezés frekvenciáját úgy kell választani, hogy legalább kétszer akkora legyen, mint a maximális feldolgozandó frekvencia, különben torz kép jön létre.



A numerikus szimulációs során előállított FFT diagram csupán az első és második sajátfrekvencia értékek előállítására alkalmas, ezek a diagramról leolvashatók:

i	$\omega_{n,i} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$f \text{ [Hz]}$
1	26,496	4,2167
2	72,729	11,5752
3	—	—

A numerikus módszerrel előállított ábra alapján leolvasható sajátfrekvencia értékekről elmondható, hogy míg az első sajátfrekvencia esetében nincs számottevő különbség, addig a második sajátfrekvencia már meglehetősen különbözik az analitikusan számítottéhoz képest.

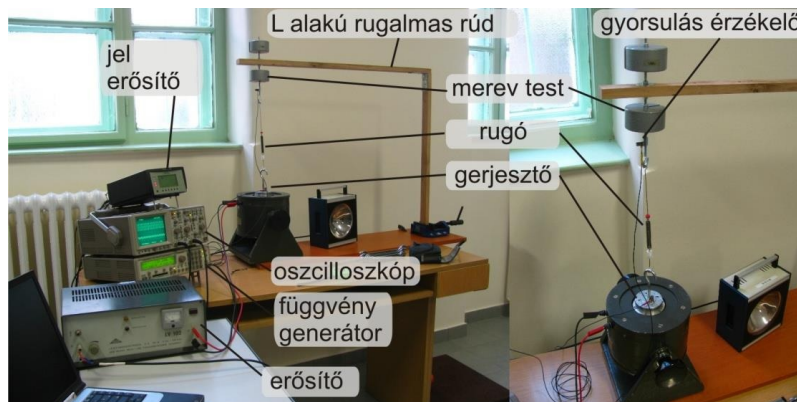
4. Mérés

4.1. Ütési kísérlet

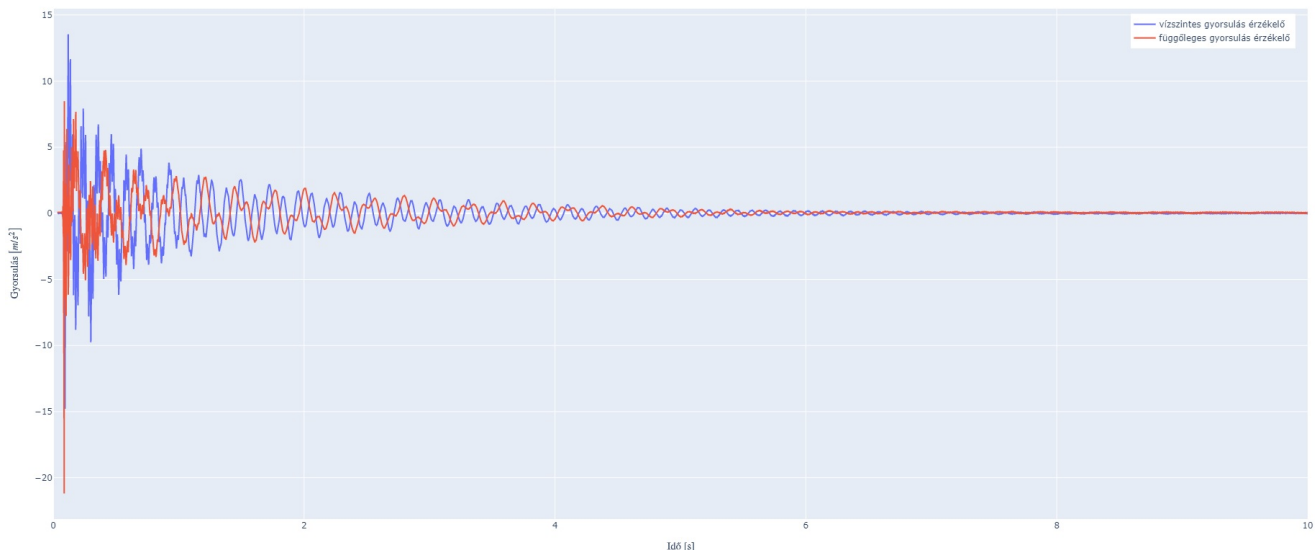
A mérési összeállítás egy befogott "L" alakú rúdból, a hozzá csatlakoztatott merev testekből, függőlegesen és vízszintesen elhelyezett gyorsulásérzékelőkből, egy gerjesztőhöz csatlakoztatott rugóból, és a kiértékelést segítő oszcilloszkópból, jel erősítőből, függvénygenerátorból valamint egy erősítőből áll. A merev testeket egy rúd segítségével kapcsoljuk az "L" alakú szerkezethez.

A gerjesztő jele a függvénygenerátor segítségével a gerjesztő hozza létre, melyet egy erősítőn átvezetve tudunk működtetni. Az útgerjesztést a szerkezet a k rugómerevségű tudón keresztül kapja a szerkezet.

A mérési elrendezés a labor segédletből:



Az ütési kísérlet során rögzített gyorsulás érzékelők értékei az idő függvényében ábrázoljuk, mellyel nyomon követhető annak lecsengése.



Az ábra .html kiterjesztéssel interaktív formában [itt](#) érhető el.

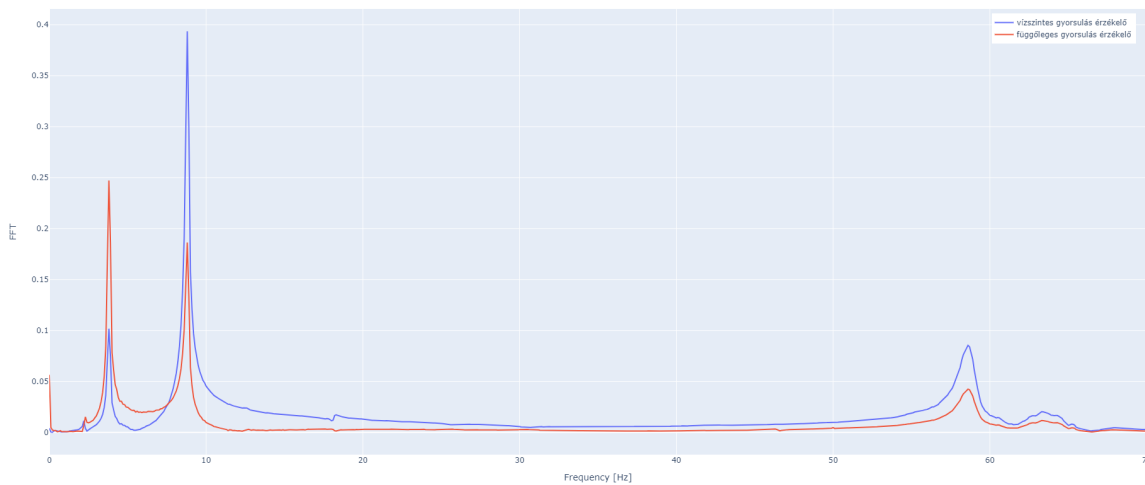
A sajátfrekvenciát a mérés során kétféle módszerrel is meghatároztuk.

1. Gyors Fourier-transzformáció segítségével.
2. Lissajous görbék segítségével.

4.2. Gyors Fourier-transzformáció

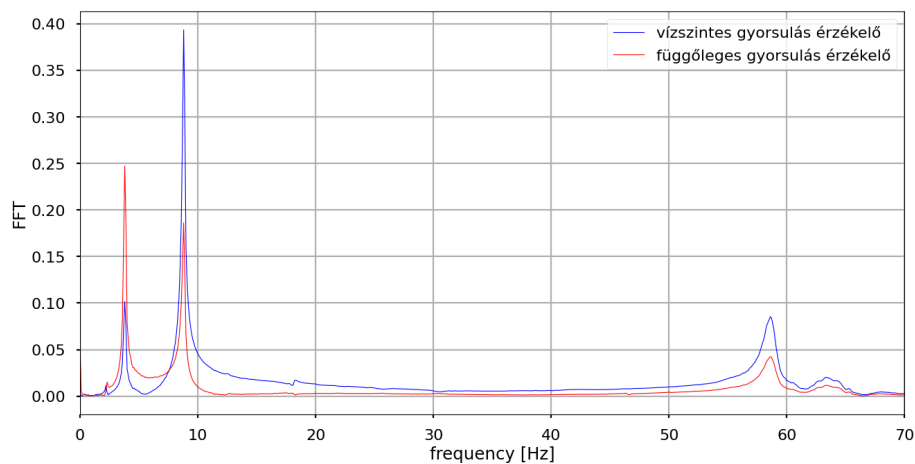
Az 1. esetben a tranziens rezgéseket ütési kísérlettel a *trigger* azaz az ütés utáni 10 másodperces időtartományban vizsgáltuk. A mért jel számítógép segítségével előben feldolgozásra került és láthatóvá váltak az FFT-ről jól leolvasható sajátfrekvencia értékek. A mért adatokat otthoni feldolgozásra kaptuk meg, melyet .csv kiterjesztésbe átemelve Python kóddal állítottam elő. A számításaim menetét a melléklet **6.1.3.** alpontjában részletezem (az így készült interaktív plot .html kiterjesztéssel megtekinthető a melléklet **6.2.** alpontjánál).

A mérési eredmények alapján készült FFT diagram:



Az ábra .html kiterjesztéssel interaktív formában [itt](#) érhető el.

FFT ábrázolása más ábrázoló eszköztárral:



A diagramról leolvasható sajátfrekvencia értékek:

i	$\omega_{n,i} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$f \text{ [Hz]}$
1	23,8761	3,8
2	55,292	8,8
3	368,195	58,6

4.3. Lissajous görbe

A 2. esetben a kapott sajátfrekvencia értékeket pontosítottuk, ellenőriztük. Az immár ismert sajátfrekvenciák szerint beállított gerjesztési frekvencia esetében akkor tekinthető validált eredménynek ha a kirajzolt Lissajous görbe egy tökéletes ellipszis alakot rajzol ki melynek kis és nagy átmérője rendre függőleges és vízszintes.

Az így kapott sajátfrekvencia értékek:

i	$\omega_{n,i} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$f \text{ [Hz]}$
1	23,939	3,84
2	55,166	8,78
3	373,975	59,52

Azonban itt fontos megjegyezni hogy az ipari felhasználásra szánt gerjesztő alacsony frekvencián való üzemeltetése több zavaró jelet is hordozott magában, ezzel a leolvasást nagyban megnehezítette.

4.4. Lengésfojtó

Lengésfojtót azon célból alkalmazunk, hogy elkerüljük a szerkezet mérnöki szempontból rezonanciatartományban való működését. Ekkor a célunk, hogy a kapott első sajátfrekvencián gerjesztve a rendszert a rezgéseket teljes mértékben elfojtsuk.

Ennek érdekében egy rugó és egy tömeg segítségével tervezni kell egy egyszabadságfokú lengőrendszert. A kívánt sajátfrekvencia egyszabadságfokú lengőrendszer esetén az alábbi összefüggéssel számolható:

$$\omega_{n,1} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Az elhangoláshoz szükséges m_d tömeget fix rugómerevség esetén az alábbi összefüggés adja

$$m_d = \frac{k}{\omega_{n,1}^2}$$

amíg a szükséges k_d rugómerevség fix tömeg esetén az alábbi formulával számítható

$$k_d = m\omega_{n,1}^2$$

Az elhangolást a feladat során kizárólag a rugómerevséget módosítottuk. A kívánt rugómerevség eléréséhez a rugó hosszát kell megváltoztatni. A rugóállandó lineárisan arányos a rugó terheletlen hosszával, viszont a rugómerevség fordítottan arányos vele. A rugó hossza és merevsége közötti kapcsolat az alábbi formulával adható meg

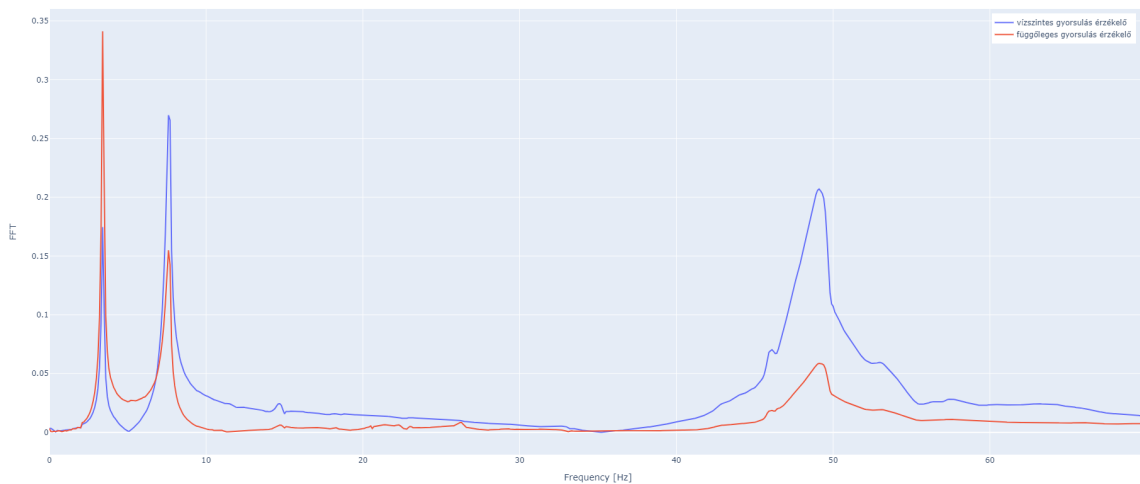
$$k_d = k \frac{l}{l_d}$$

ahol k az eredeti rugómerevség és l a terheletlen rugóhossz, valamint k_d és l_d a kívánt merevség és rugóhossz. Ez alapján a kívánt sajátfrekvenciát megvalósító rugóhossz az alábbi formulával számítható

$$l_d = l \frac{k}{k_d} = l \frac{k}{m\omega_{n,1}^2}$$

A laborgyakorlat ezen részét sajnos idő hiányában nem tudtuk elvégezni, azonban egy kezdeti (ismeretlen) elrendezés elhangolását a rugó hosszának és ezáltal rugómerevségének módosításával megmértük melynek adatait otthoni feldolgozásra kaptuk.

Az elhangolt rendszer mérési adataiból készült FFT:



Az ábra .html kiterjesztéssel interaktív formában [itt](#) érhető el.

A diagramról leolvasható sajátfrekvencia értékek:

A diagramról jól látszik, hogy -bár a konstrukció elhangolás előtti mérési adatai nincsen birto-

i	$\omega_{n,i} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$f \text{ [Hz]}$
1	21,363	3,4
2	47,752	7,6
3	380,504	49,1

kunkban összehasonlítási alapnak- a saját elrendezésem során mért értékekkel szemben az FFT diagramon az egyes sajátfrekvenciákhoz tartozó értékek megoszlottak, azokat elfojtottuk.

5. Eredmények összehasonlítása

i	Analitikus számítás		VEM $\rho \approx 0$		VEM $\rho = 700 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$		Mérés (FFT)		Numerikus szimuláció	
	$\omega_{n,i} \left[\frac{rad}{s}\right]$	$f [Hz]$	$\omega_{n,i} \left[\frac{rad}{s}\right]$	$f [Hz]$	$\omega_{n,i} \left[\frac{rad}{s}\right]$	$f [Hz]$	$\omega_{n,i} \left[\frac{rad}{s}\right]$	$f [Hz]$	$\omega_{n,i} \left[\frac{rad}{s}\right]$	$f [Hz]$
1	26,3302	4,1906	26,3329	4,191	23,2353	3,698	23,8761	3,8	26,496	4,2167
2	78,4881	12,4918	78,4617	12,4875	64,19	10,2161	55,292	8,8	72,729	11,5752
3	680,9097	108,3702	680,2875	108,2711	421,0639	67,0144	368,195	58,6	-	-
							Mérés (Lissajous)			
							23,939	3,84		
							55,166	8,78		
							373,975	59,52		

A kiértékelésből jól látszik, hogy az analitikus számítás (mely ugyancsak a rúd tömegének elhanyagolásával történt) teljes mértékben összecseng a VEM módszerrel számított azonos esetre, itt az eltérés kisebb mint 0,1%. A rúd tömegének figyelembevételével a VEM-es számítások már eltérnek a mérési eredmények kiértékeléséből származó valós értékektől, minél magasabb sajátfrekvencia értéket nézünk, annál inkább növekszik az eltérés. A Lissajous görbén beállított frekvenciaértékkel jól meglehetősen találni azon sajátfrekvencia értékeket melyeknél az ábra egy tökéletes ellipszist rajzol ki melynek nagytengelye vízszintes, ezáltal az eredmények közt is csekély eltérés látható.

Végezetül elmondható, hogy egy ilyen egyszerű szerkezet esetében is, a rúd tömegének elhanyagolása komoly eltérést eredményez a számolt és a valós sajátfrekvenciák közt. Viszonyítási alapként összehasonlítom az analitikus számítás során kapott értékeket a mérési eredmények FFT diagramjáról leolvasható sajátfrekvenciákkal.

$$\left(1 - \frac{3,8}{4,106}\right) \cdot 100 = 10,3 [\%]$$

$$\left(1 - \frac{8,8}{12,4918}\right) \cdot 100 = 31,9 [\%]$$

$$\left(1 - \frac{58,6}{108,2711}\right) \cdot 100 = 45,9 [\%]$$

Látható, hogy az eltérés számottevő, ezzel tisztában kell lenni a különböző eseteknél való alkalmazásoknál.

6. Melléklet

6.1. Python codes

6.1.1. System's eigenfrequency

```

1 # System's eigenfrequency
2 alpha = sp.symbols('alpha', real=True) #alpha = omega_n^2
3 cp = sp.det(sp.Matrix(M.subs(data)* (-alpha)+K.subs(data)))
4 print("K-alpha*M: \n", sp.Matrix(M_const* (-alpha)+K.subs(data)))
5 print(cp)
6 x_f, y_f = symbols('x_f y_f')
7 Eq(x_f, y_f)
8 sol_01= list(solveset(Eq(cp, 0), alpha))
9 print("Alpha values \n", sol_01)
10 # Convert aplha to omega
11 omega_1 = mt.sqrt(sol_01[0])
12 omega_2 = mt.sqrt(sol_01[1])
13 omega_3 = mt.sqrt(sol_01[2])
14 # Eigenfrequency
15 f_1 = np.real(omega_1/(2*mt.pi))
16 f_2 = np.real(omega_2/(2*mt.pi))
17 f_3 = np.real(omega_3/(2*mt.pi))

```

6.1.2. System's eigenvectors

```

1 f1_1 = (-omega_1**2*M+K) * sp.Matrix([[1], [A1_y], [A1_z]])
2 f2_1 = f1_1[0].subs(data)
3 f3_1 = f1_1[1].subs(data)
4
5 f4_1 = sp.solve([f2_1,f3_1], A1_y, A1_z)
6 A1_y = f4_1[A1_y]
7 A1_z = f4_1[A1_z]
8 A_1 = sp.Matrix([[1], [A1_y], [A1_z]])
9 print("First eigenvector: \n", A_1)
10 f1_2 = (-omega_2**2*M+K) * sp.Matrix([[1], [A2_y], [A2_z]])
11 f2_2 = f1_2[0].subs(data)
12 f3_2 = f1_2[1].subs(data)
13
14 f4_2 = sp.solve([f2_2,f3_2], A2_y, A2_z)
15 A2_y = f4_2[A2_y]
16 A2_z = f4_2[A2_z]
17 A_2 = sp.Matrix([[1], [A2_y], [A2_z]])
18 print("Second eigenvector: \n", A_2)
19 f1_3 = (-omega_3**2*M+K) * sp.Matrix([[1], [A3_y], [A3_z]])
20 f2_3 = f1_3[0].subs(data)
21 f3_3 = f1_3[1].subs(data)
22
23 f4_3 = sp.solve([f2_3,f3_3], A3_y, A3_z)
24 A3_y = f4_3[A3_y]
25 A3_z = f4_3[A3_z]
26 A_3 = sp.Matrix([[1], [A3_y], [A3_z]])
27 print("Third eigenvector: \n", A_3)

```

6.1.3. FFT from .csv

```

1 import sympy as sp
2 from sympy.solvers import solve
3 import numpy as np
4 import math as mt
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 from scipy.fftpack import fft, ifft
7 import pandas as pd
8 import plotly.graph_objects as go
9
10 # Import csv file
11 #FFT
12 import pandas as pd
13 import matplotlib.pyplot as plt
14 plt.style.use('seaborn-poster')
15
16 directory_path = 'D:/Desktop/BME/6. felev/GepDin/2HF/'
17 file_path = directory_path + 'data/main_data.csv'
18
19 data_main = pd.read_csv(file_path, delimiter=';')
20 Time_vec = data_main['Time']-13
21 Acc_1_vec = data_main['Acceleration_1']
22 Acc_2_vec = data_main['Acceleration_2']
23
24 #FFT
25 #number of sample points
26 N = len(Time_vec)
27 #frequency of signal (in days)
28 T = Time_vec[2]-Time_vec[1]
29 #create x-axis for time length of signal
30 x = np.linspace(0, N*T, N)
31 #create array that corresponds to values in signal
32 y1 = Acc_1_vec.to_numpy(dtype="float64")
33 y2 = Acc_2_vec.to_numpy(dtype="float64")
34 #perform FFT on signal
35 yf1 = fft(y1)/N
36 yf2 = fft(y2)/N
37 #create new x-axis: frequency from signal
38 xf = np.linspace(0.0, 1.0/(2.0*T), N//2)
39 print(np.diff(np.sign(np.diff(xf))))
40
41
42 #plot results
43
44 plot1 = plt.plot(xf, abs(yf1[0:N//2]), label = 'acc_signal1')
45 plt.setp(plot1, color='r', linewidth=0.8)
46
47 plot2 = plt.plot(xf, abs(yf2[0:N//2]), label = 'acc_signal2', color='r')
48 plt.setp(plot2, color='b', linewidth=0.8)
49 plt.grid()
50 plt.xlabel('Frequency (Hz)')
51 plt.ylabel('FFT')
52 plt.legend(loc=1)

```

```
53 plt.xlim(0, 100)
54 plt.show()
55
56 fig = go.Figure()
57
58 fig.add_trace(
59     go.Scatter(
60         name="vizszintes gyorsulas erzekelo",
61         y = abs(yf1[0:N//2]),
62         x = xf,
63         mode = 'lines',
64     ))
65
66 fig.add_trace(
67     go.Scatter(
68         name="fuggoleges gyorsulas erzekelo",
69         y = abs(yf2[0:N//2]),
70         x = xf,
71         mode = 'lines',
72     ))
73 fig.update_layout(
74     xaxis_title="Frequency [Hz]",
75     yaxis_title="FFT",
76 )
77 fig.update_xaxes(range=[0, 70])
78 fig.update_layout(legend=dict(
79     yanchor="top",
80     y=0.99,
81     xanchor="right",
82     x=0.99))
83 fig.show()
```

6.2. Interaktív diagramok

1. A mérési eredmények gyors Fourier transzformált kirajzolása interaktív formában letölthető [itt](#).
2. A mérési eredmények időtartományban vett kirajzolása interaktív formában letölthető [itt](#).
3. Az elhangolt szerkezet mérési eredményének gyors Fourier transzformált kirajzolása interaktív formában letölthető [itt](#).

7. Forrás

A dokumentációm során a következő forrásokat használtam.

1. Rezgésstan: Csernák Gábor - Stépán Gábor
2. Castigliano- és Betti-tételek összefoglalása, kidolgozott példa: Dr. Kossa Attila
3. Kiadott tanszéki mérési segédlet
4. Kiadott tanszéki MATLAB segédlet