



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Ronny Bergmann

Translationsinvariante Räume multivariater anisotroper Funktionen auf dem Torus

Dissertation.

Aus dem Institut für Mathematik
der Universität zu Lübeck
Institutsdirektor: Prof. Dr. J. Prestin

Translationsinvariante Räume multivariater anisotroper Funktionen auf dem Torus

Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Universität zu Lübeck
— aus der Sektion Informatik/Technik —
vorgelegt von Ronny Bergmann aus Hamburg.

Lübeck, im April 2013

Vorsitzender Prof. Dr. Rüdiger Reischuk, Universität zu Lübeck

1. Berichterstatter Prof. Dr. Jürgen Prestin, Universität zu Lübeck

2. Berichterstatter Prof. Dr. Dirk Langemann, TU Braunschweig

Tag der mündlichen Prüfung Mittwoch, den 10. Juli 2013

Zum Druck genehmigt. Lübeck, den 5. August 2013

Berichte aus der Mathematik

Ronny Bergmann

Translationsinvariante Räume multivariater
anisotroper Funktionen auf dem Torus

Shaker Verlag
Aachen 2013

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Lübeck, Univ., Diss., 2013

Copyright Shaker Verlag 2013

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Gesetzt in der Schriftart „Vollkorn“ von Friedrich Althausen,
friedrichalthausen.de/vollkorn.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-2266-7

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	I
1 Grundlagen	7
1.1 Gitter und multivariate Restklassen	9
Die Smith-Normalform	12
Die Musternormalform	13
Vollständigkeit	16
Ein schneller Algorithmus zur Mustererzeugung.....	17
1.2 Räume periodischer Funktionen	19
1.3 Die diskrete Fourier-Transformation auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$	25
1.4 Endlichdimensionale translationsinvariante Räume.....	29
1.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse	34
Multivariate periodische Wavelets	38
Die Wavelet-Transformation	41
Die dyadische Multiskalen-Analyse	47
2 Approximation durch Interpolation	51
2.1 Das Interpolations-Problem	52
2.2 Die elliptischen Strang-Fix-Bedingungen.....	54
2.3 Der Interpolationsfehler $\ f - L_M f\ $	55
Interpolationsfehler bei trigonometrischen Polynomen	56
Approximation durch trigonometrische Polynome	57
Allgemeine Approximation durch Interpolation	61
3 Die schnelle diskrete Fourier- und Wavelet-Transformation	63
3.1 Basen für Muster und erzeugende Menge	64
3.2 Die schnelle Fourier-Transformation	67
Vermeidung der Umsortierung	68

Der Algorithmus	70
Beispiel	73
3.3 Die schnelle Wavelet-Transformation	75
Die Skalierungs-Eigenschaft	76
Der Algorithmus	79
4 Trigonometrische Polynome	83
4.1 Einführung und Idee	84
Die klassischen de la Vallée Poussin-Mittel	85
Verallgemeinerung ins Mehrdimensionale	87
Box-Splines	90
4.2 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen	92
4.3 Dyadische de la Vallée Poussin-artige Wavelets	100
4.4 Richtungsselektive Wavelets	103
4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume	116
Literaturverzeichnis	129
Verzeichnisse	135
wissenschaftlicher Werdegang	137

Einleitung

Die Betrachtung eines Bildes beginnt mit dem Erfassen des Bildes als Ganzes. Je mehr Zeit ein Betrachter danach vor dem Bild verbringt, umso mehr Details wird er wahrnehmen, beginnend bei den Auffälligsten oder Markantesten bis hin zur Pinselführung an bestimmten Objekten in der dargestellten Szene. Schreibe der Betrachter seine Beobachtungen in zeitlich korrekter Reihenfolge auf, so könnte man durch Zerlegen des Textes und etwa die Betrachtung nur des hintersten Drittels, sich eben nur mit den Details beschäftigen.

Der gleichen Philosophie folgt die seit Ende der 1980er Jahre in Arbeiten von Daubechies [12, 13], Meyer [37], Mallat [32, 33] und anderen entstandene Theorie der Wavelets auf der reellen Achse. Der Begriff selbst bezeichnet als Zusammensetzung des englischen Wortes „Wave“ für Welle und der verniedlichenden, verkleinernden Endung „lette“ aus dem Französischen eben jene Betrachtung verschiedener Detailstufen, den sogenannten Skalen. Dies entspricht verschiedenen Zeitintervallen des Betrachters aus dem ersten Abschnitt. Die große Verbreitung der Wavelets begründet sich in der Einfachheit des Frameworks der Multiskalen-Analyse und den daraus resultierenden schnellen Algorithmen, die eine Wavelet-Zerlegung in $\mathcal{O}(n)$ Rechenschritten ermöglichen [33, Abschnitt 7.3.1]. In diesem Framework erzeugen die Translate einer für jede Skale unterschiedlich gestreckten Skalierungsfunktion ineinander geschachtelte Räume, zu denen die Wavelets orthogonale Räume „zwischen“ den Skalierungsräumen aufspannen. Neben den Skalierungsräumen mit ihrer Translationsinvarianz sind die wichtigsten Werkzeuge für den schnellen Algorithmus die Fourier-Transformation und die Zwei-Skalen-Gleichungen, die den Zusammenhang zweier aufeinanderfolgender Räume beschreiben.

Neben den „klassischen“ Wavelets auf der reellen Achse sind die periodischen Wavelets auf dem Kreis oder dem Intervall mit identifiziertem Rand definiert. Sie entstanden zunächst für die Betrachtung periodischer Funktionen durch die Periodisierung der Wavelets aus dem letzten Abschnitt. Dabei wurden die Eigenschaften, wie etwa die des translationsinvarianten Raumes, auf das Periodische übertragen und später periodische Wavelets direkt durch ihre Fourier-Koeffizienten definiert [8]. Die Algorithmen zur periodischen Wavelet-Transformation lassen sich direkt in den Fourier-

Koeffizienten beschreiben. Für diskrete Abtastungen der Funktion f entsteht so der natürliche Zusammenhang zur diskreten Fourier-Transformation. Auch hier bildet die Multiskalen-Analyse den wichtigsten konstruktiven Zugang zur Definition von Wavelets [39, 45, 50, 52]. Aufbauend auf einer periodischen Multiskalen-Analyse lassen sich beispielsweise Approximationsfehler studieren [53]. Für die klassischen und die periodischen Wavelets ist der häufigste Fall, dass eine Skalierung um den Dilatationsfaktor 2 verwendet wird, also auf jedem Level der Multiskalen-Analyse genau ein Wavelet den Raum aufspannt, der das orthogonale Komplement eines Skalierungsraumes im nächstgrößeren Raum bildet. Dies wird auch als dyadische Multiskalen-Analyse bezeichnet.

Ausgehend von den eindimensionalen Wavelets wurden bereits früh mehrdimensionale Verallgemeinerungen, die Tensorprodukt-Wavelets, betrachtet [13, 37], bei denen die Skalierungsfunktion im \mathbb{R}^d als Produkt von eindimensionalen Skalierungsfunktionen entsteht und die Translationen dann auf dem Gitter \mathbb{Z}^d betrachtet werden. Im Periodischen wurde dies in [25, 46, 55] ebenso betrachtet, wobei in beiden Fällen für die Verallgemeinerung der dyadischen Multiskalen-Analyse eine Dilatation mit der Diagonalmatrix $\mathbf{J} = \text{diag}(2, \dots, 2)$ gegeben ist. Dadurch entstehen in jeder Skale allerdings $2^d - 1$ Räume, die jeweils durch die Translate eines Wavelets erzeugt werden. Diese Wavelets entstehen als Produkt eindimensionaler Wavelet- und Skalierungsfunktionen.

Eine Verallgemeinerung des Tensorprodukt-Falles findet sich in [5, 7], wo anstelle des Tensorprodukt-Gitters Muster betrachtet werden, welche durch eine allgemeine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ entstehen und auf denen eine diskrete Fourier-Transformation definiert werden kann. Der Tensorprodukt-Fall findet sich hier in den Diagonalmatrizen $N\mathbf{E}_d$ wieder, welche lediglich ein und denselben ganzzahligen Wert auf der Hauptdiagonalen besitzen. Auf Basis der Multiskalen-Analyse bezüglich einer Folge von Diagonalmatrizen werden Approximationseigenschaften des dazugehörigen Wavelet-Systems untersucht. Dazu werden die Strang-Fix-Bedingungen in [25, 46] ins Periodische übertragen und damit eine Approximationsgüte für die betrachteten Wavelet-Systeme angegeben, insbesondere auch für die Approximation von Funktionen, die in verschiedene Richtungen jeweils ein unterschiedliches Abklingverhalten in den Fourier-Koeffizienten besitzen.

Darauf aufbauend lassen sich Skalierungsräume einführen, die analog zum eindimensionalen Dilatationsfaktor jeweils durch Dilatation mit einer festen Matrix \mathbf{M} auseinander hervorgehen [34, 40]. Es ist jedoch im Mehrdimensionalen nicht mehr nur

durch den Dilatationsfaktor zwingend ein eindeutiger Zusammenhang zu den Räumen gegeben. In der Verallgemeinerung ergibt sich für Matrizen, deren Determinante betragsmäßig identisch ist, die gleiche Skalierung um einen Faktor, während sich die Dilatationsrichtungen deutlich unterscheiden können [29]. Dadurch ist durch einen festen Dilatationsfaktor nicht mehr eindeutig beschrieben, mit welchen Dilatationsmatrizen die Skalierungsräume geschachtelt sind.

Für Funktionen, die auf dem \mathbb{R}^d definiert sind, bilden Curvelets [15, 17] oder Shearlets [11, 21, 22] anisotrope Wavelet-Systeme, d. h. die Konstruktion der Multiskalen-Analyse geht bei diesen Wavelets nicht aus der Tensorprodukt-Bildung eindimensionaler Funktionen hervor. So bilden diese Systeme einen Ansatz, Richtungen in den Wavelets zu bevorzugen und damit gewisse richtungsbezogene Details auf einer Skale zu beschreiben.

In dieser Arbeit werden zunächst in Kapitel 1 diejenigen Begriffe und Eigenschaften in einer einheitlichen Notation und Begriffsbildung zusammengetragen, die als Grundlage der folgenden Kapitel benötigt werden. Ausgehend vom Muster $\mathcal{P}(M)$ und der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M)$ einer regulären ganzzahligen Matrix M führt der Abschnitt 1.1 die Smith- und Musternormalform ein und schließt mit einer Beschreibung aller diskreten Untergruppen des Torus \mathbb{T}^d . Neben den Räumen $L_p(\mathbb{T}^d)$ Lebesgue-integrierbarer Funktionen und den Folgenräumen $\ell_q(\mathbb{Z}^d)$ führt Abschnitt 1.2 Räume ein, bei denen die enthaltenen Funktionen ein richtungsbezogenes Abklingverhalten in ihren Fourier-Koeffizienten besitzen und somit eine gewisse Glattheit aufweisen. Mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation bezüglich des Musters einer Matrix aus Abschnitt 1.3 definiert Abschnitt 1.4 translationsinvariante Räume bezüglich Translation auf dem Muster und trägt deren Eigenschaften im Lemma 1.23 zusammen. In Abschnitt 1.5 dienen diese Räume als Grundlage für die periodische, anisotrope Multiskalen-Analyse ($\{\mathbf{J}_k\}_{k \geq 0}$, $\{V_j\}_{j \geq 0}$) und die dazugehörige Wavelet-Transformation periodischer Funktionen. Für den Spezialfall einer dyadischen Multiskalen-Analyse wird abschließend eine explizite Konstruktionsmethode der dazugehörigen Wavelets vorgestellt.

Kapitel 2 betrachtet die Lösbarkeit des Interpolations-Problems auf Mustern $\mathcal{P}(M)$ und eine Verallgemeinerung der in [46] eingeführten periodischen Strang-Fix-Bedingungen, die anisotropen Strang-Fix-Bedingungen. Mit diesen ist es möglich, die Approximationseigenschaften aus [55] aus dem Tensorprodukt-Fall auf allgemeine Matrizen zu übertragen. Dabei ergibt sich eine Fehlerabschätzung für die Interpolation, welche die Glattheit des Fundamentalinterpolanten entlang verschiedener Richtun-

gen in Verbindung setzt mit dessen Interpolationsfehler für gewisse Funktionen f , die ebenso einer gewissen Richtungsglattheit unterliegen.

Für die in den Abschnitten 1.3 und 1.5 eingeführte Fourier- und Wavelet-Transformation auf dem Muster bzw. in translationsinvarianten Räumen bezüglich des Musters beschreibt Kapitel 3 schnelle Algorithmen, die bereits in [2] veröffentlicht wurden. Für die Fourier-Transformation bezüglich einer Matrix M lässt sich die Berechnung zurückführen auf ein Kronecker-Produkt von eindimensionalen Fourier-Matrizen, das von der Smith-Normalform abhängt. Mit diesem Ansatz lässt sich die gleiche Komplexität wie bei der eindimensionalen diskreten Fourier-Transformation erreichen, jedoch lässt sich die multivariate diskrete Fourier-Transformation vielfältiger parallelisieren. Für diesen schnellen Algorithmus ist eine gewisse Anordnung der Elemente des Musters notwendig, die gleichzeitig Zyklen im Muster charakterisiert und sich auf die erzeugende Menge übertragen lässt. Mit dieser Anordnung wird es aber ebenso möglich, für die Wavelet-Transformation aus Abschnitt 1.5 einen schnellen Algorithmus anzugeben, der im Fourier-Bereich durchgeführt die gleiche Komplexität besitzt wie die oben genannte eindimensionale Wavelet-Transformation auf der reellen Achse, d. h. lediglich linear von der Anzahl der Abtastpunkte abhängt, die in diesem mehrdimensionalen Szenario durch den Betrag der Determinante von M gegeben ist.

Kapitel 4 widmet sich einer wesentlichen Eigenschaft der Wavelets, der Lokalisierung. Zunächst werden in diesem Kapitel die eindimensionalen de la Vallée Poussin-Mittel eingeführt und so formuliert, dass sie mit einem Tensorprodukt-Ansatz selbst für die Konstruktion einer Skalierungsfunktion bezüglich einer Matrix M genutzt werden können. Diese als Motivation eingeführte Idee eignet sich jedoch nicht für Dilatationsmatrizen, die mit Drehung oder Scherung nicht dieser Tensorprodukt-Idee folgen. Der allgemeine Fall der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen in Abschnitt 4.2 lässt beliebige Dilatationsmatrizen zu und ermöglicht es zusätzlich, die Fourier-Koeffizienten der Skalierungsfunktion aus der Abtastung einer beliebig glatten Funktion g zu erhalten. Diese Konstruktion lässt sich direkt auf die Konstruktion dyadischer Wavelets, den de la Vallée Poussin-artigen Wavelets, übertragen, deren Fourier-Koeffizienten ebenfalls als Abtastung einer Funktion entstehen, die in ihrer Glattheit mit der Funktion g übereinstimmt. Mit diesen entsteht in dieser Arbeit ein erstes periodisches Wavelet-System, das Scherungsmatrizen in der Folge der Dilatationsmatrizen einer Multiskalen-Analyse ermöglicht. Darauf aufbauend beschreibt Abschnitt 4.4 einen schematischen Zugang für die Annäherung einer Richtung in der sukzessiven Auswahl von Teilmustern ausgehend von einem beliebigen Muster. Das Detail, das in dieser Richtung in den mehrdimensionalen Daten vorkommt, findet

sich dabei in einem Wavelet-Raum wieder. Diese Richtung kann beliebig genau angenähert werden. Illustriert wird dies an zwei Zerlegungen, deren Ausgangsfunktionen Unstetigkeitsstellen in den Richtungsableitungen besitzen. Der Abschnitt 4.5 charakterisiert die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen und -Wavelets abhängig von der Funktion g dahingehend, wann für die Definition der Skalierungsfunktion zum Level j nur endlich viele Dilatationsmatrizen für die darüber liegenden Räume notwendig sind. Damit ist es in gewissen Fällen möglich, multivariate de la Vallée Poussin-Mittel und -Wavelets anzugeben, also Funktionen, für deren Definition wie im Eindimensionalen lediglich die Dilatation zwischen zwei Skalierungsräumen notwendig ist.

Danksagung. In erster Linie möchte ich mich bei Prof. Dr. Jürgen Prestin bedanken für die vielen motivierenden und konstruktiven Diskussionen zu den Themen dieser Dissertation sowie bei den Mitarbeitern des Instituts für Mathematik der Universität zu Lübeck für die Gespräche und Ideen, insbesondere Dr. Peter Dencker für die Hilfe bei der Formulierung des Beweises von Satz 1.8. Bei David Gregorczyk, Claudia Paulick und Sebastian Penka möchte ich mich für das Korrekturlesen bedanken sowie bei Inga Stolz und Lisa Kausch, für ihr Interesse und Engagement am Thema.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Familie bedanken und allen, die meine Zeit während des Studiums und der Promotion in Lübeck, auch abseits der Universität, so abwechslungsreich gemacht haben. Insbesondere Mandy, Dorinja, Lukas, Richard, Albert und Stella, aber auch vielen anderen, mit denen ich im „Blauen Engel“, der MetaMeute oder der Hamster-WG interessante Gespräche und wunderschöne Abende verbracht habe, ein herzliches Dankeschön für die Beschäftigung mit und der Ablenkung von der Mathematik.

Lübeck, den 24. April 2013
Ronny Bergmann

I

Grundlagen

Im Zentrum dieser Arbeit stehen Funktionen $f, g : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem d -dimensionalen Torus $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / 2\pi\mathbb{Z}^d$. Eine andere Darstellung der Faktorgruppe \mathbb{T}^d entsteht aus dem skalierten, verschobenen Einheitskubus $2\pi[0, 1]^d$ durch Identifikation gegenüberliegender Seiten, so dass die Betrachtung der Funktion auf dem halboffenen Kubus entsteht. Der Torus lässt sich also auch als $\mathbb{T}^d \cong [-\pi, \pi)^d$ schreiben. In Abbildung I.1 sind sowohl der 2-Torus als auch eine Funktion auf diesem gezeigt. Die in diesem Kapitel vorgestellten Resultate finden sich etwa in den Büchern [27, 48, 59, 61] und dem Artikel [29]. Viele der Ergebnisse aus den Dissertationen [46, 50, 55] lassen sich direkt aus dem Eindimensionalen bzw. dem Tensorprodukt-Fall auf den Fall allgemeiner Matrizen M übertragen. Trotzdem sollen in diesem Kapitel die Beweise mit aufgeführt werden und so einem besseren Verständnis der Grundlagen dienen.

Zunächst werden in Abschnitt I.1 das Muster $\mathcal{P}(M)$ und die dazugehörige Mustergruppe $(\mathcal{P}(M), +|_{\mathcal{P}(M)})$ sowie die erzeugende Menge $\mathcal{G}(M)$ und die erzeugende Gruppe $(\mathcal{G}(M), +|_{\mathcal{G}(M)})$ eingeführt. Während Ersteres zur Abtastung auf dem Torus verendet wird und die gleichverteilten Punkte auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ ins Mehrdimensionale verallgemeinert, bildet die zweite Menge die Grundlage zur Beschreibung der mehrdimensionalen Frequenzen, die durch bestimmte Muster beschrieben werden können. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Struktur der Mustergruppe bzw. der erzeugenden Gruppe und der Isomorphie verschiedener Mustergruppen. Damit ist es dann möglich, alle endlichen Gruppen auf dem Torus zu beschreiben.

Anschließend werden in Abschnitt I.2 Räume von Funktionen auf dem Torus eingeführt, die verschiedene Glattheitseigenschaften der Funktion und ihrer partiellen Ableitungen charakterisieren. Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei das Abklingverhalten der Koeffizienten in der Fourier-Reihenentwicklung dieser Funktionen. In der vorgestellten Allgemeinheit steht die Betrachtung anisotroper Glattheitseigenschaften im Vordergrund.

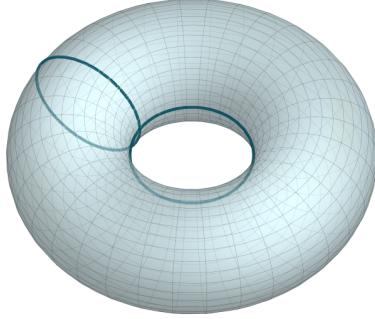
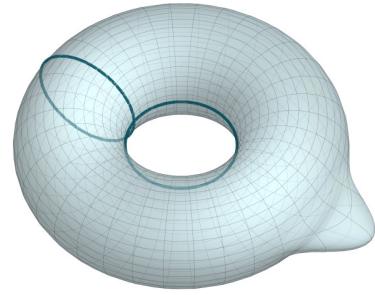
**a.** Der Torus \mathbb{T}^2 .**b.** $f(x)$ auf dem Torus geplottet.

Abbildung I.1. Der 2-Torus und die Funktion $f(x) = \exp(-20\|x\|^2)$, $x \in [-\pi, \pi]^2$, auf dem Torus geplottet. Die identifizierten Ränder $\pm\pi$ sind durch eine Linie hervorgehoben.

Auf dem Muster kann, analog zu der klassischen eindimensionalen, eine diskrete Fourier-Transformation betrachtet werden. Diese wird in Abschnitt I.3 definiert und zur Charakterisierung der translationsinvarianten Räume V_M^φ in Abschnitt I.4 verwendet. Die Eigenschaften translationsinvarianter Räume lassen sich damit in Fourier-Koeffizienten beschreiben. Dies verallgemeinert sowohl den eindimensionalen, als auch den Tensorprodukt-Fall auf den anisotropen Fall der Translationsinvarianz auf dem Muster.

Mit Hilfe der Teilmuster $\mathcal{P}(N) \subset \mathcal{P}(M)$ aus Abschnitt I.1 und den daraus gebildeten translationsinvarianten Unterräumen der Räume aus Abschnitt I.4 wird in Abschnitt I.5 die Multiskalen-Analyse $(\{J_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ eingeführt. Mit dieser lassen sich sowohl Wavelets mit ihren Räumen W_j zu diesen Räumen V_j konstruieren als auch die Wavelet-Transformation als algorithmische Zerlegung einer Funktion f . Abschließend werden für den Spezialfall einer dyadischen Multiskalen-Analyse explizite Formeln zur Konstruktion von Wavelets und für die Zerlegung vorgestellt. Dies verallgemeinert den eindimensionalen Fall aus [8, 28, 39, 45, 50, 52, 53], der in [55] für Diagonalmatrizen und in [34, 40] für den Fall einer festen Dilatationsmatrix betrachtet worden ist. Die hier verwendete Multiskalen-Analyse $(\{J_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ basiert auf den Arbeiten [2, 29], welche verschiedene Dilatationsmatrizen ermöglichen und wird hier erstmals formell definiert. Für eine dyadische Multiskalen-Analyse $(\{J_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$, d. h. bei der jeweils $|\det J_k| = 2$ gilt, schließen die Betrachtungen der Konstruktion von Wavelets das Kapitel ab.

I.I Gitter und multivariate Restklassen

Im Folgenden seien die natürlichen, ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen mit \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} bezeichnet. Für eine beliebige Dimension $d \in \mathbb{N}$, üblicherweise $d \geq 2$, werden Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{C}^d$ und Folgen $\mathbf{c} = \{c_k\}_{k \in I}$ einer Indexmenge $I \subseteq \mathbb{Z}^d$ in kleinen fettgedruckten Buchstaben gesetzt. Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ sind die Großbuchstaben vorbehalten, sie werden ebenso fett gesetzt. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{k}, \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d$ sei mit $\mathbf{k}^T \mathbf{h} := k_1 h_1 + \dots + k_d h_d$ bezeichnet, mit $\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, die p -Norm des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d$ und mit $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_d|\}$ dessen Maximumnorm. Insbesondere bezeichne $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)^T$ den Einsvektor und $\mathbf{e}_j := (\delta_{k,j})_{k=1}^d$, $j \in \{1, \dots, d\}$ den j -ten Einheitsvektor, wobei

$$\delta_{k,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das Kronecker-Symbol bezeichnet.

I.I Gitter und multivariate Restklassen

Gegeben sei eine ganzzahlige Matrix $\mathbf{M} = (m_{i,j})_{i,j=1}^d \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Es bezeichne stets $m := |\det \mathbf{M}|$ den Betrag der Determinante von \mathbf{M} . Ist $m > 0$, so heißt die Matrix \mathbf{M} regulär. Insbesondere bezeichne \mathbf{E}_d die Einheitsmatrix, d. h. $e_{i,j} = \delta_{i,j}$. Da $m > 0$ ist, existiert die inverse Matrix $\mathbf{M}^{-1} \in \mathbb{Q}^{d \times d}$, für die $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{E}_d$ gilt.

Zu einer Matrix \mathbf{M} bezeichne \mathbf{M}^T die transponierte Matrix von \mathbf{M} , die gegeben ist durch die Einträge $m_{i,j}^T = m_{j,i}$. Weiter bezeichne $\lambda_1(\mathbf{M}), \dots, \lambda_d(\mathbf{M})$ die Eigenwerte, welche hier in einer betragsmäßig aufsteigenden Reihenfolge gegeben seien, also für $i < j$ gilt $|\lambda_i(\mathbf{M})| \leq |\lambda_j(\mathbf{M})|$.

Für ein $N \in \mathbb{N}$ bildet die Menge $\{0, \dots, N-1\}$ mit der Addition Modulo N eine endliche abelsche Gruppe. Die Elemente können sowohl als ganze Zahlen als auch als Restklassenrepräsentanten der Kongruenzrelation $h \equiv k \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : h = k + zN$ gesehen werden. Im Mehrdimensionalen lässt sich dies wie folgt verallgemeinern:

Zwei Vektoren $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ (bzw. \mathbb{R}^d) heißen kongruent bezüglich einer regulären Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, d. h. $\mathbf{h} \equiv \mathbf{k} \pmod{\mathbf{M}}$, falls

$$\exists \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}\mathbf{z}.$$

Weiter bezeichne $[k]_M := \{h ; h \equiv k \pmod{M}\}$ die Restklasse von k bezüglich M . Mit der üblichen Addition zweier Restklassen $[h]_M + [k]_M = [h + k]_M$ bildet die Menge aller Restklassen $\{[k]_M ; k \in \mathbb{Z}^d\}$ eine abelsche Gruppe,

$$\left(\{[k]_M ; k \in \mathbb{Z}^d\}, + \right) = \mathbb{Z}^d / M\mathbb{Z}^d.$$

Diese Gruppe lässt sich jedoch anstelle über die Äquivalenzklassen ebenso über ein Repräsentantensystem von Vektoren betrachten.

Definition I.I.

Gegeben sei eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Eine Menge von Repräsentanten der Äquivalenzklassen heißt *erzeugende Menge* $\mathcal{G}(M) \subset \mathbb{Z}^d$, falls

$$|[k]_M \cap \mathcal{G}(M)| = 1, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Eine erzeugende Menge $\mathcal{G}(M)$ enthält per Definition genau einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse. Es bezeichne $\circ|_{\mathcal{G}(M)} : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathcal{G}(M)$ diejenige Abbildung, welche einem ganzzahligen Vektor $k \in \mathbb{Z}^d$ den entsprechenden Restklassenrepräsentanten $[k]_M \cap \mathcal{G}(M)$ zuordnet. Dann heißt

$$(\mathcal{G}(M), +|_{\mathcal{G}(M)}) \cong \mathbb{Z}^d / M\mathbb{Z}^d$$

die erzeugende Gruppe von M . Die Isomorphie folgt aus der Tatsache, dass die additive Gruppe auf den Äquivalenzklassen $(\{[k]_M ; k \in \mathbb{Z}^d\}, +)$ isomorph zur erzeugenden Gruppe $(\mathcal{G}(M), +|_{\mathcal{G}(M)})$ ist.

Es seien weiter die Kronecker-Symbole $\delta_{h,k}$ analog zum Eindimensionalen und

$$\delta_{h,k}^M := \begin{cases} 1 & \text{falls } h \equiv k \pmod{M}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

Eine andere Sichtweise auf die erzeugenden Gruppe $(\mathcal{G}(M), +|_{\mathcal{G}(M)})$ entsteht durch die Betrachtung des Gitters von M , das gegeben ist durch

$$\Lambda(M) := \{y \in \mathbb{R}^d ; My \in \mathbb{Z}^d\} = M^{-1}\mathbb{Z}^d. \quad (\text{I.I})$$

Jeder Punkt $y = M^{-1}z \in \Lambda(M)$, $z \in \mathbb{Z}^d$, kann also auch interpretiert werden als eine ganzzahlige Linearkombination der Spalten von M^{-1} . Somit genügt es, sich in

I.I Gitter und multivariate Restklassen

der Definition des Gitters $\Lambda(\mathbf{M})$ in (I.I) auf $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}^d$ zu beschränken. Diese Betrachtung der Gitter bilden die Grundlage der Geometrie der Zahlen [4, Kapitel I].

Da für $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ und ein beliebiges $\mathbf{y} \in \Lambda(\mathbf{M})$ der Term $\mathbf{M}(\mathbf{z} + \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^d$ ist, ist jedes Gitter 1-periodisch und mit der bijektiven Abbildung $\phi(\circ) := \mathbf{M}^{-1}\circ$ isomorph zum \mathbb{Z}^d . Die Äquivalenzklassen

$$[\mathbf{y}]_{\mathbf{E}_d} := \{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{M}) ; \mathbf{x} \equiv \mathbf{y} \text{ mod } \mathbf{E}_d\}, \quad \mathbf{y} \in \Lambda(\mathbf{M}),$$

auf $\Lambda(\mathbf{M})$ bezüglich der Einheitsmatrix \mathbf{E}_d bilden analog zur Gruppe der Äquivalenzklassen mod \mathbf{M} auf \mathbb{Z}^d die Gruppe $(\{[\mathbf{y}]_{\mathbf{E}_d} ; \mathbf{y} \in \Lambda(\mathbf{M})\}, +) \cong \Lambda(\mathbf{M})/\mathbb{Z}^d$. Analog zur erzeugenden Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ lässt sich für diese Gruppe ebenso eine beliebige Menge an eindeutigen Repräsentanten betrachten. Das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M}) \subset \Lambda(\mathbf{M})$ ist definiert als eine Menge an Gitterpunkten, so dass

$$|[\mathbf{y}]_{\mathbf{E}_d} \cap \mathcal{P}(\mathbf{M})| = 1, \quad \mathbf{y} \in \Lambda(\mathbf{M}), \tag{I.2}$$

erfüllt ist. Die Abbildung $\circ|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})} : \Lambda(\mathbf{M}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{M})$ ist definiert als diejenige Abbildung, die jedem Punkt $\mathbf{y} \in \Lambda(\mathbf{M})$ des Gitters seinen Repräsentanten $\mathbf{x} \in [\mathbf{y}]_{\mathbf{E}_d} \cap \mathcal{P}(\mathbf{M})$ zuordnet. Damit entsteht die Mustergruppe $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), +|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})})$. Es gilt die Isomorphie $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), +|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}) \cong \Lambda(\mathbf{M})/\mathbb{Z}^d$ und mit obiger Abbildung ϕ als Gruppenisomorphismus ergibt sich

$$(\mathcal{P}(\mathbf{M}), +|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}) \cong (\mathcal{G}(\mathbf{M}), +|_{\mathcal{G}(\mathbf{M})}).$$

Im Vergleich zur erzeugenden Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ lassen sich für das Muster sehr einfach explizite Repräsentantens Mengen angeben. Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge, so dass $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\mathbf{M}) := \Lambda(\mathbf{M}) \cap \mathcal{K}$ ein Muster ist. Aufgrund der Kongruenz bzgl. \mathbf{E}_d ist etwa mit $\mathcal{K} = \mathbf{x} + [0, 1]^d$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, stets ein Muster definiert. Insbesondere bezeichne mit $\mathcal{Q}_d := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$

$$\mathcal{P}_I(\mathbf{M}) := \Lambda(\mathbf{M}) \cap [0, 1]^d \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_S(\mathbf{M}) := \Lambda(\mathbf{M}) \cap \mathcal{Q}_d \tag{I.3}$$

das Muster des Einheitskubus und des um $\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\mathbf{1}$ verschobenen Einheitskubus. Mit dem Gruppenisomorphismus ϕ ist

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K}}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\mathbf{M}) = \{\mathbf{k} ; \mathbf{k} = \mathbf{My}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\mathbf{M})\}$$

eine erzeugende Menge und insbesondere entstehen die zwei expliziten erzeugenden Mengen

$$\mathcal{G}_I(\mathbf{M}) := \mathbf{M}\mathcal{P}_I(\mathbf{M}) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_S(\mathbf{M}) := \mathbf{M}\mathcal{P}_S(\mathbf{M}).$$

Eine andere Darstellung entsteht, setzt man in dieser Definition die Gleichung (I.3) ein. Die erzeugende Menge $\mathcal{G}_I(\mathbf{M}) = \mathbf{M}[0, 1]^d \cap \mathbb{Z}^d$ enthält also alle ganzzahligen Vektoren innerhalb des von $\mathbf{M}[0, 1]^d$ aufgespannten Parallelotops. Mit [3, Lemma II.7] gilt $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\mathcal{G}(\mathbf{M})| = m$.

Im Eindimensionalen entspricht die erzeugende Gruppe $(\mathcal{G}_I(N), +|_{\mathcal{G}_I(N)})$, $N \in \mathbb{N}$, der üblichen Restklassenrepräsentantenmenge bezüglich der Kongruenz modulo N mit der erzeugenden Menge $\mathcal{G}_I(N) = \{0, 1, \dots, N - 1\}$. Das Muster $\mathcal{P}_S(N)$ wird gebildet von den gleichmäßig verteilten Punkten $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{2} - \frac{1}{N}\}$. Die dazu gehörigen Gruppen sind über die Abbildung $\phi = N(\circ + \frac{1}{2})$ isomorph. Die zyklischen Gruppen seien zur besseren Unterscheidbarkeit mit $\mathcal{C}_n = (\mathcal{G}_I(n), +|_{\mathcal{G}_I(n)})$, $n \in \mathbb{N}$, bezeichnet.

Die Smith-Normalform

Zur Charakterisierung verschiedener Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ und erzeugender Mengen $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ werden Normalformen benötigt. Eine erste Charakterisierung, die auf den eindimensionalen Restklassen basiert, liefert die

Definition I.2 (Smith-Normalform).

Für eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ heißt eine Zerlegung

$$\mathbf{M} = \mathbf{QER}, \quad \mathbf{R}, \mathbf{E}, \mathbf{Q} \in \mathbb{Z}^{d \times d} \tag{I.4}$$

mit $|\det \mathbf{R}| = |\det \mathbf{Q}| = 1$ und $\mathbf{E} = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ *Smith-Normalform* der Matrix \mathbf{M} , wobei \mathbf{E} die Diagonalmatrix der Elementarteiler $\varepsilon_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, mit $\varepsilon_j | \varepsilon_{j+1}$, $j = 1, \dots, d - 1$, ist.

Der Satz über Elementarteiler [27, S. 242] liefert die Existenz der Smith-Normalform und die Eindeutigkeit der Matrix \mathbf{E} . Die beiden Matrizen \mathbf{R} , \mathbf{Q} beschreiben Koordinatentransformationen, somit ist

$$(\mathcal{G}(\mathbf{M}), +|_{\mathcal{G}(\mathbf{M})}) \cong (\mathcal{G}(\mathbf{E}), +|_{\mathcal{G}(\mathbf{E})}).$$

I.1 Gitter und multivariate Restklassen

Die transponierte Matrix besitzt wegen $M^T = R^T E Q^T$ die gleichen Elementarteiler wie die Matrix M . Für eine Diagonalmatrix E wie in Definition I.2 ist die erzeugende Gruppe $(\mathcal{G}(E), +|_{\mathcal{G}(E)})$ offensichtlich darstellbar als direktes Produkt der zyklischen Gruppen $\mathcal{C}_{\epsilon_1}, \dots, \mathcal{C}_{\epsilon_d}$. Das direkte Produkt zweier Gruppen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sei mit $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ bezeichnet. Somit gelten folgende Isomorphismen

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}(M), +|_{\mathcal{G}(M)}) &\cong (\mathcal{G}(E), +|_{\mathcal{G}(E)}) \cong (\mathcal{G}(M^T), +|_{\mathcal{G}(M^T)}) \\ &\cong (\mathcal{P}(M^T), +|_{\mathcal{P}(M^T)}) \cong (\mathcal{P}(E), +|_{\mathcal{P}(E)}) \\ &\cong (\mathcal{P}(M), +|_{\mathcal{P}(M)}) \cong \mathcal{C}_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_{\epsilon_d}. \end{aligned} \quad (I.5)$$

Die Musternormalform

Eine weitere Klassifizierung bietet die Betrachtung möglicher Zerlegungen eines Gitters $\Lambda(M)$, der sogenannten Teilgitter.

Theorem I.3.

Gegeben seien zwei reguläre Matrizen $M, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Dann ist $\Lambda(N)$ ein Teilgitter von $\Lambda(M)$, d. h. es gilt $\Lambda(N) \subseteq \Lambda(M)$, genau dann, wenn eine reguläre Matrix $J \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ existiert, so dass $M = JN$ ist.

Beweis. Angenommen es existiert eine reguläre Matrix $J \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, so dass $M = JN$ erfüllt ist. Es gilt für einen Punkt $y \in \Lambda(N)$, dass $Ny \in \mathbb{Z}^d$ und somit $My = JNy \in \mathbb{Z}^d$. Deshalb ist jedes $y \in \Lambda(N)$ auch in $\Lambda(M)$ enthalten.

Angenommen $\Lambda(N) \subset \Lambda(M)$. Dann gilt für jedes $y \in \Lambda(N)$, dass ein $z \in \mathbb{Z}^d$ existiert, so dass $My = MN^{-1}z \in \mathbb{Z}^d$ erfüllt ist. Da $\Lambda(N) = N^{-1}\mathbb{Z}^d$, gilt also für alle $z \in \mathbb{Z}^d$, dass $MN^{-1}z \in \mathbb{Z}^d$ und somit, dass mit $J := MN^{-1} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ die Existenz gezeigt ist. \square

Ist $\Lambda(N) \subset \Lambda(M)$, so gilt dies auch für die Restklassenrepräsentanten, von denen sich für jedes $y \in \mathcal{P}(N)$ eine Restklasse $[x]_{E_d}$, $x \in \mathcal{P}(M)$, finden lässt, so dass $[y]_{E_d} = [x]_{E_d}$ ist. Somit gilt die Teilmengen-Eigenschaft in diesem Sinne auch für die Muster, die kurz mit $\mathcal{P}(N) \subset \mathcal{P}(M)$ bezeichnet sei. Sind beide Muster bezüglich des gleichen \mathcal{K} gegeben, so ist dies die übliche Teilmengenbeziehung.

Korollar I.4.

Für zwei reguläre Matrizen $M, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ gilt $\Lambda(N) = \Lambda(M)$ genau dann, wenn die reguläre Matrix J aus Theorem I.3 die Eigenschaft $|\det J| = 1$ erfüllt.

Beweis. Mit Theorem I.3 gelten $\Lambda(M) \subseteq \Lambda(N)$ und $\Lambda(N) \subseteq \Lambda(M)$ genau dann, wenn $J = MN^{-1} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und $J^{-1} = NM^{-1} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ erfüllt sind. Dies ist die Aussage $|\det J| = 1$. \square

Weiter lassen sich die Elemente eines Musters eindeutig durch Verschiebungen eines Teilmusters adressieren, es gilt folgendes

Lemma I.5.

Gegeben seien zwei reguläre Matrizen $M, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit $M = JN$, $J \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Dann gilt:

Für jedes $y \in \mathcal{P}(M)$ existieren eindeutige Elemente $x \in \mathcal{P}(N)$, $z \in \mathcal{P}(J)$, so dass

$$y = (x + N^{-1}z)|_{\mathcal{P}(M)}.$$

Beweis. Es gilt $\Lambda(M) = \Lambda(JN) = N^{-1}J^{-1}\mathbb{Z}^d = N^{-1}\Lambda(J)$. Aus der 1-Periodizität eines jeden Musters folgt mit $\Lambda(E_d) = \mathbb{Z}^d$ weiter

$$\Lambda(J) = \bigcup_{z \in \mathcal{P}(J)} \Lambda(E_d) + z,$$

zusammen also

$$\Lambda(M) = \bigcup_{z \in \mathcal{P}(J)} N^{-1}\Lambda(E_d) + N^{-1}z = \bigcup_{z \in \mathcal{P}(J)} \Lambda(N) + N^{-1}z.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Disjunktheit der Mengen in der Vereinigung, denn wegen $z \in \mathcal{P}(J)$ gilt $N^{-1}z \in \mathcal{P}(N)$ genau dann, wenn $z = 0|_{\mathcal{P}(N)}$. \square

Wendet man Lemma I.5 auf $\mathcal{P}(M^T)$ an, so folgt außerdem: Für jedes Element $h \in \mathcal{G}(M^T)$ existieren eindeutige Elemente $k \in \mathcal{G}(N^T)$, $g \in \mathcal{G}(J^T)$, so dass

$$h = (k + N^Tg)|_{\mathcal{G}(M^T)}. \quad (I.6)$$

Um gleiche Gitter und somit gleiche Muster $\mathcal{P}_K(M) = \mathcal{P}_K(N)$ für eine feste Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ zu charakterisieren, sei die Relation \sim_Λ definiert durch $M \sim_\Lambda N$ genau dann, wenn $\Lambda(M) = \Lambda(N)$. Die Relation \sim_Λ ist wegen Korollar I.4 mit $J = E_d$ reflexiv. Analog folgen Symmetrie und Transitivität, d. h. \sim_Λ ist eine Äquivalenzrelation.

I.1 Gitter und multivariate Restklassen

Definition I.6 (Musternormalform).

Eine ganzzahlige reguläre Matrix $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^d \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ liegt in *Musternormalform* vor, falls sie eine obere Dreiecksmatrix ist und $0 \leq m_{i,j} \leq m_{j,j}$ für $1 \leq i < j \leq d$ erfüllt ist.

Theorem I.7.

Seien $M, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ reguläre Matrizen. Dann gelten folgende Aussagen:

- a) Zu jeder Matrix M existiert genau eine Matrix M° in Musternormalform, mit $M \sim_\Lambda M^\circ$ und
- b) $M \sim_\Lambda N \Leftrightarrow M^\circ = N^\circ$.

Beweis. Die Aussage a) folgt aus der Tatsache, dass sich das Gaußsche Eliminationsverfahren, welches die Matrix M in eine obere Dreiecksmatrix überführt, unter Verwendung des euklidischen Algorithmus, der für zwei natürliche Zahlen den größten gemeinsamen Teiler berechnet, auf der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen anwenden lässt. Anschließend kann durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen der zweiten Zeile zur ersten $m_{1,2} < m_{2,2}$ erreicht werden. Analog ist dies für die Einträge $m_{1,3}$ und $m_{2,3}$ durch Addition der dritten Zeile zur ersten und zweiten möglich. Die entstandene Matrix M° steht bezüglich \sim_Λ in Relation, denn jeder Schritt des Verfahrens lässt sich als Multiplikation von links mit einer ganzzahligen Matrix J , $|\det J| = 1$, beschreiben.

Stehen zwei reguläre Matrizen $M, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ in Musternormalform zueinander in Relation, dann erzeugen sie das gleiche Gitter, erfüllen also den Zusammenhang, dass $M = JN$ mit $|\det J| = 1$ gilt, wobei $J = MN^{-1} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ ebenso eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit besteht die Hauptdiagonale von J aus dem 1-Vektor und alle anderen Elemente sind wegen der Musternormalform von M und N positiv, jedoch kleiner als 1. Aufgrund der Ganzzahligkeit von J folgt $J = E_d$ und somit die Eindeutigkeit der Musternormalform M° .

Die Aussage b) folgt aus a), denn da $M \sim_\Lambda M^\circ$ und $N \sim_\Lambda N^\circ$ gelten, folgt die Rückrichtung aus der Transitivität. Sei $M \sim_\Lambda N$, dann ist $M \sim_\Lambda N^\circ$ aufgrund der Transitivität. Somit folgt $M^\circ = N^\circ$ aus der Eindeutigkeit in a). \square

Vollständigkeit

Jedes Muster $\mathcal{P}(M)$ einer regulären Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ bildet eine endliche additive Untergruppe der Quotientengruppe $\mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Es gilt jedoch auch die Umkehrung, dass jede endliche additive Untergruppe identisch zum Muster $\mathcal{P}(M)$ einer regulären Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ ist. Diese Tatsache wurde im Kontext der Muster bisher nicht betrachtet und wird hier somit erstmals formuliert und bewiesen.

Theorem I.8.

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{N} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\} \subset \mathbb{R}^d$, $m > 0$, so dass $(\mathcal{N}, + \text{ mod } E_d)$ eine abelsche Gruppe ist.

Dann existiert eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, so dass $\mathcal{N} = \mathcal{P}(M)$ ist.

Beweis. Die Gruppe $(\mathcal{N}, + \text{ mod } E_d)$ kann als eine Untergruppe der Quotientengruppe $\mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ aufgefasst werden. Sei

$$\mathcal{N}' = \mathbb{Z}^d + \mathcal{N} := \{\mathbf{y} + \mathbf{z} ; \mathbf{y} \in \mathcal{N}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Da die Menge \mathcal{N} endlich ist und insbesondere keine Häufungspunkte besitzt, besitzt auch $\mathcal{N}' \subset \mathbb{R}^d$ keine Häufungspunkte. Nach [19, Kapitel VI, Hilfssatz I.1] existieren für $\mathcal{N}' \subset \mathbb{R}^d$ linear unabhängige Vektoren $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k \in \mathbb{R}^d$, $k \leq d$, so dass

$$\mathcal{N}' = \sum_{j=1}^k \mathbb{Z} \mathbf{n}_j := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d ; \mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{n}_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, k \right\}.$$

Es sei $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \cap \mathcal{N}$ das neutrale Element der abelschen Gruppe $(\mathcal{N}, + \text{ mod } E_d)$. Wegen $\mathbf{k} \in \mathcal{N}$ ist $\mathbb{Z}^d \subset \mathcal{N}'$, somit ist $\mathbf{e}_j \in \mathcal{N}'$, $j = 1, \dots, d$, und darum $k = d$. Die Matrix $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d)$ ist regulär. Es gilt

$$\mathcal{N}' = \mathbf{N} \mathbb{Z}^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d ; \mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d ; \mathbf{N}^{-1} \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Wegen $\mathbb{Z}^d \subset \mathcal{N}'$ gilt insbesondere $\mathbf{N}^{-1} \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^d$, $j = 1, \dots, d$. Mit der Wahl $M = \mathbf{N}^{-1} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ ist mit (I.1) das Gitter $\Lambda(M) = \mathcal{N}'$ und nach (I.3) folgt die Aussage des Satzes. \square

Ausgehend von der Musternormalform gibt [29, Lemma 2.6] die Anzahl möglicher Muster für einen festen Betrag $m > 0$ der Determinante an. Mit Theorem I.8 charakterisiert dies auch die Anzahl Punktmengen, mit denen eine endliche additive Unter-

I.1 Gitter und multivariate Restklassen

gruppe auf dem Torus gebildet werden kann. Die Smith-Normalform hingegen gibt an, wie viele mögliche Gruppenstrukturen es gibt, nämlich so viele, wie es Faktorisierungen vom m in Elementarteiler gibt. Verschiedene Matrizen können das gleiche Muster besitzen, was genau dann der Fall ist, wenn ihre Musternormalformen identisch sind. Weiter können jedoch auch zwei Muster unterschiedlicher Musternormalformen die gleiche Gruppenstruktur in ihren Mustergruppen aufweisen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Elementarteiler beider Matrizen übereinstimmen.

Ein schneller Algorithmus zur Mustererzeugung

Da die Menge der Musternormalformen eine Menge von Äquivalenzklassenrepräsentanten bzgl. \sim_Λ ist, charakterisieren diese die möglichen Muster. Der folgende, hier erstmals formulierte Algorithmus gibt eine Möglichkeit zur schnellen Erzeugung der Musterpunkte einer Matrix in Musternormalform an.

Lemma I.9 (Musterkonstruktion).

Sei eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ gegeben und $M^\circ = (m_{i,j}^\circ)_{i,j=1}^d$ die dazugehörige Musternormalform. Dann ist der Abstand zweier Punkte x, y des Musters $\mathcal{P}_S(M)$ in ihrer i -ten Komponente $|y_i - x_i| \geq m_{i,i}^\circ$. Für jedes $y \in \mathcal{P}_S(M)$ existiert ein $x \in \mathcal{P}(M)$, so dass in eben genannter Ungleichung die Gleichheit gilt.

Beweis. Da $M \sim_\Lambda M^\circ$ gilt, ist $\mathcal{P}_S(M) = \mathcal{P}_S(M^\circ)$. Der Beweis folgt dann per Induktion über $i \in \{1, \dots, d\}$:

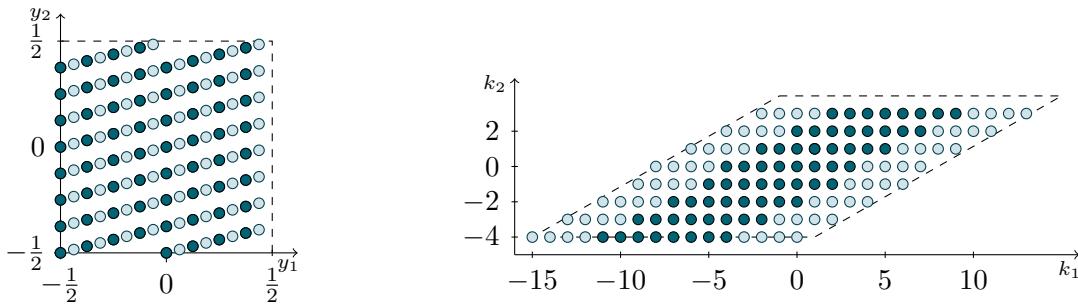
Für y_d gilt die Aussage, denn es gilt für ein $y \in \mathcal{Q}_d$

$$(M^\circ y)_d \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y_d \in \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{m_{d,d}^\circ}, \dots, -\frac{1}{2} + \frac{m_{d,d}^\circ - 1}{m_{d,d}^\circ} \right\},$$

da M° eine obere Dreiecksmatrix ist. Für feste Werte $y_d, y_{d-1}, \dots, y_{d-j+1}$ hat y_{d-j} , $j \in \{1, \dots, d-1\}$, die Gestalt

$$y_{d-j} = \frac{a}{m_{d-j,d-j}^\circ} + \sum_{i=1}^{j-1} y_{d-i} m_{d-j,d-i}, \quad a \in \mathbb{Z},$$

wobei in dieser Gestalt a derart eingeschränkt wird, dass $y_{d-j} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist. Dabei hängt die hintere Summe jedoch nicht von a ab und es folgt die Aussage. \square



a. $\mathcal{P}_S(\mathbf{M})$ und $\mathcal{P}_S(\mathbf{N})$.

b. $\mathcal{G}_S(\mathbf{M}^T)$ und $\mathcal{G}_S(\mathbf{N}^T)$.

Abbildung I.2. Für die Matrizen \mathbf{M}, \mathbf{N} mit $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N}$ aus Beispiel I.10 sind die Muster $\mathcal{P}_S(\mathbf{N}) \subset \mathcal{P}_S(\mathbf{M})$ in a) und die erzeugenden Mengen $\mathcal{G}_S(\mathbf{N}^T) \subset \mathcal{G}_S(\mathbf{M}^T)$ der transponierten Matrizen in b) dargestellt.

Beginnt man mit der Konstruktion bei y_d , lassen sich alle Punkte auf der x_d -Achse in $\mathcal{O}(m_{d,d})$ Operationen bestimmen und darauf aufbauend alle Punkte in der $x_d \times x_{d-1}$ -Ebene in weiteren $\mathcal{O}(m_{d-1,d-1}m_{d,d})$ Operationen. Setzt man dies iterativ fort, benötigt der Algorithmus $\mathcal{O}(md)$ Rechenschritte, wobei hier die Konstante in der \mathcal{O} -Notation nicht von d abhängt. Dies verbessert das Resultat aus [26, Abschnitt 5.2], wo ein Algorithmus der Komplexität $\mathcal{O}(m^d)$ präsentiert wird. Weder für die Überführung einer Matrix \mathbf{M} in ihre Musternormalform \mathbf{M}° noch für die Berechnung der Elemente $y \in \mathcal{P}_S(\mathbf{M})$ ist es hier notwendig, die Smith-Normalform (I.4) zu berechnen.

Für die erzeugende Menge $\mathcal{G}_S(\mathbf{M})$ ist dieser Algorithmus ebenso anwendbar, entweder indem durch Multiplikation aller Formeln mit \mathbf{M} ein analoger Algorithmus implementiert wird oder durch Berechnung der Elemente des Musters $\mathcal{P}_S(\mathbf{M})$ und eine anschließende Multiplikation aller Vektoren $y \in \mathcal{P}_S(\mathbf{M})$ mit \mathbf{M} .

Analog lässt sich diese Konstruktion auf eine beliebige kompakte, zusammenhängende Menge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ erweitern, indem die Grenzen, die in der obigen Ausführung stets $\pm \frac{1}{2}$ sind, entsprechend angepasst werden.

Beispiel I.10.

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$. Sie besitzt die Elementarteiler $\varepsilon_1 = 2$ und $\varepsilon_2 = 64$. Die Musternormalform lautet $\mathbf{M}^\circ = \begin{pmatrix} 2 & 56 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$. Das Muster $\mathcal{P}_S(\mathbf{M})$ und die erzeugende Gruppe $\mathcal{G}_S(\mathbf{M}^T)$ sind in Abbildung I.2 dargestellt. Für das Teilmuster der Matrix \mathbf{N} der Zerlegung $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$ sind in Abbildung I.2 ebenso Muster und erzeugende Menge dargestellt.

I.2 Räume periodischer Funktionen

I.2 Räume periodischer Funktionen

Der Banach-Raum der p -Lebesgue-integrierbaren periodischen Funktionen ist gegeben durch

$$L_p(\mathbb{T}^d) := \{f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C} ; \|f|_{L_p(\mathbb{T}^d)}\| < \infty\}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (\text{I.7})$$

mit der Norm

$$\|f|_{L_p(\mathbb{T}^d)}\| := \begin{cases} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess-sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})| & \text{falls } p = \infty, \end{cases}$$

wobei für die Norm verkürzend die Schreibweise $\|f|_{L_p}\| = \|f|_{L_p(\mathbb{T}^d)}\|$ verwendet wird. Wie üblich sind die Elemente des Raumes $L_p(\mathbb{T}^d)$ Äquivalenzklassen von Funktionen, die im Sinne des Lebesgue-Maßes fast-überall identisch sind. Die Elemente $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ werden in dieser Arbeit der Einfachheit halber Funktionen genannt.

Für eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ sind die Fourier-Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}(f)$ definiert durch

$$c_{\mathbf{k}}(f) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \quad (\text{I.8})$$

Die Folge der Fourier-Koeffizienten sei bezeichnet mit $\mathbf{c}(f) = \{c_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $p = 2$, denn der Raum $L_2(\mathbb{T}^d)$ ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

ein Hilbert-Raum, wobei \bar{z} das konjugiert Komplexe von $z \in \mathbb{C}$ bezeichne. Die Fourier-Koeffizienten lassen sich dort beschreiben durch $c_{\mathbf{k}}(f) = \langle f, e^{i\mathbf{k}^T \circ} \rangle$. Da die Monome $e^{i\mathbf{k}^T \circ}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, eine orthonormale Basis des $L_2(\mathbb{T}^d)$ bilden, gilt für $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(f) e^{i\mathbf{k}^T \circ}. \quad (\text{I.9})$$

Die Summe auf der rechten Seite in (I.9) heißt Fourier-Reihe von f .

Analog zu den L_p -Räumen sei für den diskreten Fall der Banach-Raum der q -summierbaren Folgen $\ell_q(\mathcal{X})$ auf einer Indexmenge $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}^d$ definiert durch

$$\ell_q(\mathcal{X}) := \left\{ \{c_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathcal{X}} ; \|\{c_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathcal{X}} | \ell_q(\mathcal{X})\| < \infty \right\}, \quad 1 \leq q \leq \infty \quad (\text{I.IO})$$

mit der Norm

$$\|\{c_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathcal{X}} | \ell_q(\mathcal{X})\| := \begin{cases} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{X}} |c_{\mathbf{k}}|^q \right)^{1/q} & \text{falls } 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{\mathbf{k} \in \mathcal{X}} |c_{\mathbf{k}}| & \text{falls } q = \infty. \end{cases}$$

Da die Indexmenge in der Norm gegeben ist, findet die Kurzschreibweise $\|\mathbf{c} | \ell_p(\mathcal{X})\|$ häufig Verwendung. Für $\mathcal{X} = \mathbb{Z}^d$ wird diese verkürzt zu $\|\mathbf{c} | \ell_q\| = \|\mathbf{c} | \ell_q(\mathbb{Z}^d)\|$.

Für $p = q = 2$ gilt die Parsevalsche Gleichung: Seien $f, g \in L_2(\mathbb{T}^d)$ und die Folgen der Fourier-Koeffizienten bezeichnet mit $\mathbf{c}(f) = \{c_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ und $\mathbf{c}(g) = \{c_{\mathbf{k}}(g)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$, dann gilt

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathbf{c}(f), \mathbf{c}(g) \rangle_{\ell_2} := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(f) \overline{c_{\mathbf{k}}(g)}. \quad (\text{I.II})$$

Somit sind insbesondere mit $f = g$ wegen

$$\|f | L_2\| = \|\mathbf{c}(f) | \ell_2\| \quad (\text{I.I2})$$

die Räume $L_2(\mathbb{T}^d)$ und $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ isomorph.

Es bezeichne $A(\mathbb{T}^d)$ die Wiener-Algebra der Funktionen mit absolut konvergenter Fourier-Koeffizienten-Folge, d. h.

$$A(\mathbb{T}^d) := \left\{ f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C} ; \|f | A\| := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{k}}(f)| < \infty \right\}. \quad (\text{I.I3})$$

Weiter bezeichne $C(\mathbb{T}^d)$ den Banach-Raum der 2π -periodischen stetigen Funktionen auf dem Torus \mathbb{T}^d mit der Maximumnorm $\|f | C(\mathbb{T}^d)\| := \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})$. Aus der absoluten Konvergenz der Fourier-Reihe von f folgt mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium für Funktionenfolgen die gleichmäßige Konvergenz und somit die Stetigkeit von f , also ist $A(\mathbb{T}^d) \subset C(\mathbb{T}^d)$.

I.2 Räume periodischer Funktionen

Für ein festes $j \in \{1, \dots, d\}$ und eine Funktion $f \in A(\mathbb{T}^d)$, deren partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} f \in A(\mathbb{T}^d)$ ist, gilt mit $\mathbf{h} = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$, $h_j \neq 0$, dass

$$\frac{c_{\mathbf{k}}(f(\circ - \mathbf{h})) - c_{\mathbf{k}}(f)}{h_j} = \left(\frac{e^{i\mathbf{h}^T \mathbf{k}} - 1}{h_j} \right) c_{\mathbf{k}}(f) \xrightarrow{h_j \rightarrow 0} ik_j c_{\mathbf{k}}(f), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

Die Fourier-Koeffizienten der partiellen Ableitungen von f lassen sich also durch die Fourier-Koeffizienten von f ausdrücken:

$$c_{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right) = ik_j c_{\mathbf{k}}(f), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

Es bezeichne $\nabla \mathbf{f} := (\frac{\partial}{\partial x_j} f)_{j=1}^d$ den Vektor aller partiellen ersten Ableitungen. Sind diese stetig, lässt sich die Ableitung in Richtung $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$, auch schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f = \mathbf{v}^T \nabla \mathbf{f} = \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial}{\partial x_j} f. \tag{I.14}$$

Betrachtet man für eine Funktion $f \in A(\mathbb{T}^d)$, deren erste und zweite partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} f$, $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f$ in $A(\mathbb{T}^d)$ sind, die zweifache Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} f$ mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$, $\|\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{w}\|_2 = 1$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{w}^T \nabla \mathbf{f}) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d v_j w_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f$$

und somit folgt

$$c_{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} f \right) = -(\mathbf{v}^T \mathbf{k})(\mathbf{w}^T \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}(f).$$

Liegen \mathbf{v} und \mathbf{w} beispielsweise in der x_i - x_j -Ebene, so genügt es, wenn mindestens die beiden dazugehörigen Richtungsableitungen in $A(\mathbb{T}^d)$ liegen. Die Glattheit in x_i - und x_j -Richtung spiegelt sich dann im Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}(f)$ wieder. Diese Idee führt auf die Definition der Bessel-Potential- oder L_p -Sobolev-Räume.

Definition I.11 (L_p -Sobolev-Räume).

Seien $1 < p < \infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Sobolev-Raum $H_p^\alpha(\mathbb{T}^d)$ der Ordnung α ist definiert durch

$$H_p^\alpha(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}^d) ; \|f|_{H_p^\alpha}\| < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|f|_{H_p^\alpha}\| := \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} (1 + \|\mathbf{k}\|_2^2)^{\alpha/2} c_{\mathbf{k}}(f) e^{i\mathbf{k}^T \circ} |L_p| \right\|.$$

In Analogie zur Parsevalschen Gleichung und den ℓ_p -Räumen lassen sich Räume von Funktionen definieren, bei denen die Eigenschaften auf den jeweiligen Folgen der Fourier-Koeffizienten der Funktionen beruhen.

Definition I.12.

Es seien $1 \leq q \leq \infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Raum $A_q^\alpha(\mathbb{T}^d)$ der Ordnung α ist gegeben als

$$A_q^\alpha(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}^d) ; \|f|_{A_q^\alpha}\| < \infty \right\}$$

mit

$$\|f|_{A_q^\alpha}\| := \left\| \{(1 + \|\mathbf{k}\|_2^2)^{\alpha/2} c_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} | \ell_q \right\|.$$

Diese Räume sind auch als isotrope Funktionenräume bekannt. Die Isotropie kann durch die Niveaulinien des Gewichtes $\sigma_\beta^{\mathbf{E}_d}(\mathbf{k}) := (1 + \|\mathbf{k}\|_2^2)^{\alpha/2}$ verdeutlicht werden. Das Gewicht bildet in den Niveaulinien der ganzen Zahlen konzentrische Kreise, vgl. Abbildung I.3 a). Diese liegen um so dichter, je größer α gewählt wird. Sie erzwingen so ein gewisses gleichmäßiges Abklingverhalten aller Fourier-Koeffizienten. Im Kontrast dazu stehen die Räume gemischt dominierter Glattheit, bei denen die Koordinatenrichtungen unterschiedlich gewichtet werden, siehe [48, Kapitel 4], allerdings orientieren sich auch diese an den Koordinatenachsen. Für weitere Charakterisierungen, wie Einbettungssätze dieser isotropen linearen Folgenräume, siehe [55, Kapitel I] und [51].

Es bezeichne $\|\mathbf{M}\|_2 := \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{Mx}\|_2$ die Spektralnorm der Matrix \mathbf{M} .

I.2 Räume periodischer Funktionen

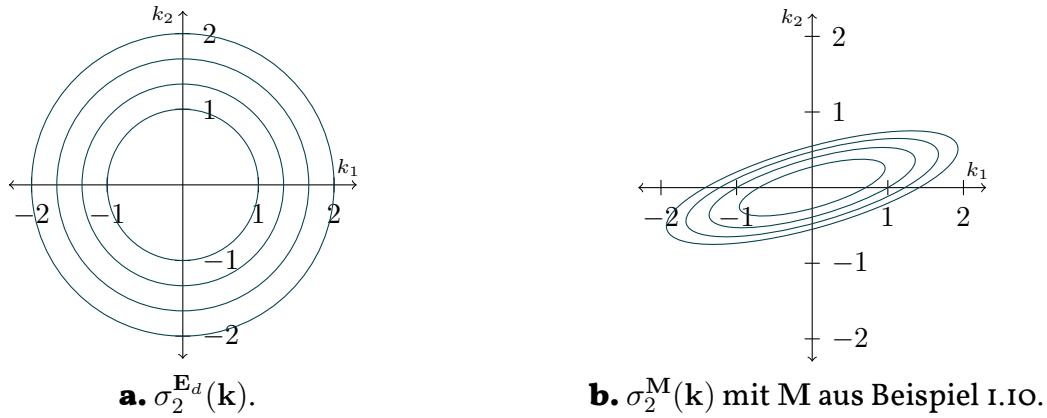


Abbildung I.3. Die Niveaulinien $\sigma_2^M(k) = a$, $a \in \{2, 3, 4, 5\}$, verdeutlichen das Abklingverhalten, das die elliptische Gewichtsfunktion modelliert. Für den Fall, dass $M = E_d$ ist, entsteht der klassische, isotrope Fall in a), andernfalls elliptische Niveaulinien in b).

Definition I.13 (Elliptische Gewichtsfunktion).

Für eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ ist die *elliptische Gewichtsfunktion* σ_β^M gegeben durch

$$\sigma_\beta^M(k) := (1 + \|M\|_2^2 \|M^{-T}k\|_2^2)^{\beta/2}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Ist die Matrix aus dem Kontext klar, so wird die verkürzte Schreibweise $\sigma_\beta := \sigma_\beta^M$ verwendet. Der Name entstammt der bildlichen Erklärung des anisotropen Falles, der im Zweidimensionalen elliptische Niveaulinien hervorbringt, siehe Abbildung I.3 b). Dort sind für die Matrix $M = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$ aus Beispiel I.10 die Niveaulinien der Gewichtsfunktion $\sigma_2^M(k)$ dargestellt.

In der Tat ist die Gewichtsfunktion σ_β^M unabhängig von der Skalierung der Matrix M . Dies zeigt das folgende

Lemma I.14.

Für eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, gilt

$$\sigma_\beta^M(k) = \sigma_\beta^{\alpha M}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^d. \tag{I.15}$$

Beweis. Die Aussage folgt aus der Definition der elliptischen Gewichtsfunktion σ_β^M und der Tatsache, dass $(\alpha M)^{-T} = \alpha^{-1} M^{-T}$ ist. \square

Lemma I.15.

Für eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit $\|M\|_2 \geq 2$ und eine elliptische Gewichtsfunktion σ_α^M mit nichtnegativem $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma_\alpha^M(k + M^T z) \leq \|M\|_2^\alpha \sigma_\alpha^M(k) \sigma_\alpha^M(z), \quad \text{für } k, z \in \mathbb{Z}^d. \quad (\text{I.I6})$$

Beweis. Es gilt die Gleichung $2 \leq \|M\|_2 = \sqrt{\lambda_d(M^T M)}$, wobei $\lambda_d(M^T M)$ der größte Eigenwert des Matrixproduktes $M^T M$ ist. Für $z = 0$ oder $k = 0$ gilt die Aussage. Für $k, z \neq 0$ gilt mit der Dreiecks-Ungleichung und der Submultiplikativität der Spektral-norm weiter

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^M(k + M^T z) &= (1 + \|M\|_2^2 \|M^{-T}(k + M^T z)\|_2^2)^{\alpha/2} \\ &\leq \|M\|_2^\alpha (1 + \|M^{-T}k\|_2^2 + 2\|M^{-T}k\|_2 \|z\|_2 + \|z\|_2^2)^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

Es gelten $\|M\|_2 \|M^{-T}k\|_2 \geq 1$, $\|z\|_2 \geq 1$ und $\|M\|_2 \geq 2$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^M(k + M^T z) &\leq \|M\|_2^\alpha (1 + \|M^{-T}k\|_2^2 + \|M\|_2^4 \|M^{-T}k\|_2^2 \|z\|_2^2 + \|M^T M^{-T} z\|_2^2)^{\alpha/2} \\ &\leq \|M\|_2^\alpha (1 + \|M\|_2^2 \|M^{-T}k\|_2^2)^{\alpha/2} (1 + \|M\|_2^2 \|M^{-T}z\|_2^2)^{\alpha/2} \\ &= \|M\|_2^\alpha \sigma_\alpha^M(k) \sigma_\alpha^M(z). \end{aligned} \quad \square$$

Damit lassen sich nun Räume von Funktionen mit Abklingverhalten definieren.

Definition I.16.

Gegeben seien eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, $\beta \in \mathbb{R}$ und ein Exponent $q \geq 1$. Dann ist der Raum $A_{M,q}^\beta$ definiert durch

$$A_{M,q}^\beta(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}^d) \mid \|f \mid A_{M,q}^\beta\| < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|f \mid A_{M,q}^\beta\| := \left\| \{\sigma_\beta^M(k) c_k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell_q}.$$

Die Räume $A_{M,q}^\beta(\mathbb{T}^d)$ verallgemeinern die Räume periodischer Funktionen aus Definition I.2 in [55]. Dort wird durch die Norm $\|k\|_2$ ein kreisförmiges Abklingverhal-

I.3 Die diskrete Fourier-Transformation auf dem Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$

ten der Fourier-Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}(f)$ modelliert. Durch die Einführung der Anisotropie bzgl. der Matrix \mathbf{M} entsteht in den Räumen $A_{\mathbf{M},q}^{\beta}(\mathbb{T}^d)$ ein Abklingverhalten, bei dem die Ellipsoide der Niveaulinien durch die Matrix \mathbf{M} beschrieben werden. Im Spezialfall, dass die Matrix $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{E}_d$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist, entstehen die Räume aus Definition I.2 in [55].

I.3 Die diskrete Fourier-Transformation auf dem Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$

Aus den diskreten Werten einer Abtastung der Funktion $f \in C(\mathbb{T}^d)$ lassen sich die Fourier-Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}(f)$ aus (I.8) approximieren. Dazu sei $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ eine reguläre Matrix, dann sind die diskreten Fourier-Koeffizienten $c_{\mathbf{h}}^{\mathbf{M}}(f)$, $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d$ definiert durch

$$c_{\mathbf{h}}^{\mathbf{M}}(f) := \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} f(2\pi\mathbf{y}) e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \approx c_{\mathbf{h}}(f). \quad (\text{I.17})$$

Das Integral aus Gleichung (I.8) wird hier durch die Trapezregel auf den skalierten Musterpunkten $2\pi\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, approximiert. Aufgrund der Periodizität von f ist diese identisch zur multivariaten Rechteck- oder Gitter-Regel, siehe [54, Kapitel 2]. Außerdem ist das Volumen des Parallelotops $\mathbf{M}^{-1}[0, 1)^d$ nach [3, Lemma II.7] als $\frac{1}{m}$ bekannt.

Für eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, und ein $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ gilt

$$e^{2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} = e^{2\pi i (\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z})^T \mathbf{y}} = e^{2\pi i \mathbf{h}^T (\mathbf{y} + \mathbf{z})},$$

denn da $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ ist, folgt $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$ und somit ist $e^{2\pi i \mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{y}} = 1$. Die zweite Gleichheit folgt, da $\mathbf{h}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$.

Die Definition der diskreten Fourier-Koeffizienten (I.17) hängt daher nicht von der Wahl des jeweiligen Repräsentanten $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ der dazugehörigen Äquivalenzklasse $[\mathbf{x}]_{\mathbf{M}}$, $\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{M})$, ab. Analog gilt dies auch für die Elemente \mathbf{h} der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ und deren Äquivalenzklassen $[\mathbf{k}]_{\mathbf{M}^T}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$.

Für eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und ein $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ gilt nach [54, Lemma 2.7]

$$\sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} e^{2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} = m \delta_{\mathbf{0}, \mathbf{k}}^{\mathbf{M}}. \quad (\text{I.18})$$

Für die diskreten Fourier-Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}^M(f)$ gilt das

Lemma I.17 (Aliasing Formel).

Sei $f \in A(\mathbb{T}^d)$ und $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ eine reguläre Matrix. Dann gilt

$$c_{\mathbf{k}}^M(f) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k} + M^T \mathbf{z}}(f), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

Beweis. Entwickelt man in (I.17) die Funktion f in einem Punkt $2\pi\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(M)$, in ihre Fourier-Reihe, so erhält man aufgrund der absoluten Konvergenz der Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}}^M(f) &= \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(M)} f(2\pi\mathbf{y}) e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(M)} \left(\sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h}}(f) e^{2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \right) e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h}}(f) \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(M)} e^{-2\pi i (\mathbf{k} - \mathbf{h})^T \mathbf{y}} \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k} + M^T \mathbf{z}}(f). \end{aligned} \tag{I.19}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich daraus, dass die Summe über \mathbf{y} sich zu m ergibt, falls $\mathbf{k} \equiv \mathbf{h} \pmod{M^T}$ und andernfalls verschwindet, siehe Gleichung (I.18). \square

Diese letzte Summe in (I.19) wird auch *Bracket-Summe* genannt und mit

$$[\mathbf{c}(f)]_h^M = [\{c_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}]_h^M := \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h} + M^T \mathbf{z}}(f)$$

bezeichnet.

Aus der Aliasing-Formel ergibt sich, dass die diskreten Fourier-Koeffizienten $c_h^M(f)$ periodisch sind, in dem Sinne, dass für $\mathbf{h}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ die Gleichheit $c_h^M(f) = c_{\mathbf{h} + M^T \mathbf{z}}^M(f)$ gilt. Damit genügt es, die diskreten Fourier-Koeffizienten aus (I.17) lediglich auf einer erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M^T)$ zu betrachten. Die Periodizität charakterisiert die Abbildung von den Abtastwerten auf die diskreten Fourier-Koeffizienten als eine endliche Transformation $(f(2\pi\mathbf{y}))_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(M)} \mapsto (c_h^M)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)}$, die sich allgemein formulieren lässt durch die

I.3 Die diskrete Fourier-Transformation auf dem Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$

Definition I.18 (Fourier-Matrix).

Gegeben sei eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Dann ist die *Fourier-Matrix* $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ definiert durch

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) := \frac{1}{\sqrt{m}} \left(e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (\text{I.20})$$

Dabei hängt die Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ sowohl von der Anordnung der Elemente in der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, welche die Zeilen adressieren als auch von der Anordnung der Elemente des Musters $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ für die Spalten ab.

Sei \mathbf{E} die Diagonalmatrix der Smith-Normalform aus Gleichung (I.4). Aufgrund der Isomorphismen (I.5) existiert sowohl eine Permutations-Matrix \mathbf{P}_y , welche die Indizes $y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ derart umsortiert, dass sie der kanonischen Reihenfolge in $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ entsprechen, als auch eine Matrix \mathbf{P}_h , welche die Umordnung der Elemente $h \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ in die kanonische Reihenfolge in $\mathcal{G}(\mathbf{E})$ beschreibt. Eine genauere Betrachtung der Permutations-Matrizen $\mathbf{P}_y, \mathbf{P}_h$ ist für die Implementierung und insbesondere für die Laufzeit des Algorithmus der schnellen Fourier-Transformation von wesentlicher Bedeutung. Diesem Aspekt der Fourier-Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ widmet sich das Kapitel 3.

Für die Fourier-Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ lässt sich die Idee des Row-Column-Algorithmus [16] direkt schreiben als

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{P}_h \mathcal{F}(\mathbf{E}) \mathbf{P}_y = \mathbf{P}_h \mathcal{F}_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\varepsilon_d} \mathbf{P}_y, \quad (\text{I.21})$$

wobei $\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e^{-2\pi i \frac{kl}{n}} \right)_{k,l=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, die eindimensionale Fourier-Matrix und \otimes das Kronecker-Produkt zweier Matrizen bezeichnet. Es gilt mit den Rechenregeln des Kronecker-Produktes [57, S. 12] und wegen $\mathbf{P}_h^T \mathbf{P}_h = \mathbf{P}_y^T \mathbf{P}_y = \mathbf{E}_d$, dass

$$\mathcal{F}(\mathbf{M})^{-1} = \overline{\mathcal{F}(\mathbf{M})}^T.$$

Sind weiter die erzeugende Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ und das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ in gleicher Reihenfolge angeordnet, d. h. ist $\mathbf{P}_h = \mathbf{P}_y^{-1}$, so ist wegen $\mathbf{P}_y^T = \mathbf{P}_y^{-1}$ und $\mathbf{P}_h^T = \mathbf{P}_h^{-1}$ auch

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \mathcal{F}(\mathbf{M})^T$$

und somit

$$\mathcal{F}(\mathbf{M})^{-1} = \overline{\mathcal{F}(\mathbf{M})}.$$

Für einen Vektor $\mathbf{a} = (a_y)_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$, dessen Anordnung mit derjenigen der Spalten der Fourier-Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ übereinstimmt, ist die diskrete Fourier-Transformation bezüglich \mathbf{M} gegeben durch

$$\hat{\mathbf{a}} := (\hat{a}_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} = \sqrt{m} \mathcal{F}(\mathbf{M}) \mathbf{a} \in \mathbb{C}^m,$$

wobei $\hat{\mathbf{a}} = (a_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)}$ die gleiche Reihenfolge der Elemente aufweist wie die Zeilen der Fourier-Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{M})$. Sind die Werte $a_y, y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, durch $a_y = f(2\pi y)$ gegeben, so ist mit (I.17) und Lemma I.17 $\hat{a}_{\mathbf{h}} = \frac{1}{m} c_{\mathbf{h}}^{\mathbf{M}}(f)$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$.

Sei $\mathbf{a} = (a_y)_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^m$ Vektor der Länge m . Dann heißt die Matrix

$$\text{circ } \mathbf{a} := (a_{y-x|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}})_{x,y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^{m \times m} \quad (\text{I.22})$$

zirkulante Matrix.

Lemma I.19.

Eine zirkulante Matrix $\text{circ } \mathbf{a}$ lässt sich mit Hilfe der Fourier-Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ diagonalisieren. Es gilt

$$\text{circ } \mathbf{a} = \mathcal{F}(\mathbf{M})^T \text{diag } \hat{\mathbf{a}} \overline{\mathcal{F}(\mathbf{M})}.$$

Beweis. Für die Einträge der Matrix $\mathbf{B} = (b_{\mathbf{h},\mathbf{k}})_{\mathbf{h},\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} = \overline{\mathcal{F}(\mathbf{M})} \text{circ } \mathbf{a} \mathcal{F}(\mathbf{M})^T$ gilt

$$b_{\mathbf{h},\mathbf{k}} = \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} e^{2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{x}} \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{x}-\mathbf{y}|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}} e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} \right).$$

Mit der Substitution $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ folgt

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{h},\mathbf{k}} &= \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} e^{2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{w}} e^{-2\pi i \mathbf{k}^T (\mathbf{x}-\mathbf{w})} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{w}} e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{w}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} e^{2\pi i (\mathbf{h}-\mathbf{k})^T \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Die erste Summe entspricht einer Zeile aus (I.20) und mit Gleichung (I.18) ist

$$b_{\mathbf{h},\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{h}}^{\mathbf{M}}.$$

□

I.4 Endlichdimensionale translationsinvariante Räume

I.4 Endlichdimensionale translationsinvariante Räume

Die eindimensionalen translationsinvarianten Räume periodischer Funktionen wurden bereits in [14, 30] untersucht. Für den Tensorprodukt-Fall und Frames wurden diese in [5] und für Basen in [25, 46] betrachtet.

Definition I.20 (Translationsoperator).

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$. Der *Translationsoperator* T_y ist definiert durch

$$T_y f := f(\circ - 2\pi\mathbf{y}).$$

Es genügt dabei, sich auf $\mathbf{y} \in [0, 1)^d$ zu beschränken, da die Funktion f auf dem Torus \mathbb{T}^d definiert ist.

Bemerkung I.21.

Für die Fourier-Koeffizienten einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ ergibt sich durch Substitution in (I.8) der Zusammenhang

$$c_{\mathbf{k}}(T_y f) = e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} c_{\mathbf{k}}(f), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{I.23})$$

Unter Verwendung der in Abschnitt I.1 vorgestellten Muster lässt sich dann folgende Eigenschaft eines Vektorraumes definieren.

Definition I.22 (Translationsinvarianter Raum).

Ein Vektorraum $V \subset L_1(\mathbb{T}^d)$ heißt *translationsinvariant bezüglich* M oder kurz M -invariant, falls

$$\forall \varphi \in V \forall \mathbf{y} \in \Lambda(M) : T_y \varphi \in V.$$

Es genügt jedoch auch hier, sich auf eine Menge von Restklassenrepräsentanten bezüglich $\text{mod } E_d$ zu beschränken. Das Gitter $\Lambda(M)$ kann also in der Definition durch ein beliebiges Muster $\mathcal{P}(M)$ ersetzt werden.

Für eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ und eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ bezeichne

$$V_M^f := \text{span}\{T_y f ; \mathbf{y} \in \mathcal{P}(M)\}$$

die lineare Hülle der Translate von f .

Weiter bezeichne s_h^f , $h \in \mathcal{G}(M^T)$, die orthogonalen Splines von $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ bezüglich M , die definiert sind durch

$$s_h^f := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{h+M^T k}(f) e^{i(h^T + k^T M) \circ}. \quad (\text{I.24})$$

Diese wurden in [28] eingeführt, siehe auch [29, 45].

Das folgende Lemma verallgemeinert Lemma 2.1.4 aus [50] über grundlegende Eigenschaften translationsinvarianter Räume vom Eindimensionalen auf den Fall allgemeiner Translationen auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$, siehe auch [29, Abschnitt 3] und [34, Abschnitt 3].

Lemma I.23.

Es seien $f, g \in L_2(\mathbb{T}^d)$ und $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ eine beliebige reguläre Matrix. Der Vektor der Translate $\mathbf{f} := (T_y f)_{y \in \mathcal{P}(M)}$ von f sei für eine beliebig aber fest gewählte Reihenfolge der Elemente von $\mathcal{P}(M)$ gegeben. Dann gelten folgende Aussagen:

- a) Ein M -invarianter Teilraum des $L_2(\mathbb{T}^d)$ ist für jedes Teilmuster $\mathcal{P}(N) \subset \mathcal{P}(M)$, $N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, auch N -invariant.
- b) V_M^f ist M -invariant.
- c) $V_M^f = \text{span}\{s_h^f; h \in \mathcal{G}(M^T)\}$.
- d) Der Vektor der Translate von f lässt sich darstellen in der Form

$$\mathbf{f} = \sqrt{m} \mathcal{F}(M)^T (s_h^f)_{h \in \mathcal{G}(M^T)}, \quad (\text{I.25})$$

wobei die Anordnung der Spalten der Matrix $\mathcal{F}(M)$ mit der des zweiten Vektors übereinstimmt.

- e) Es gilt $g \in V_M^f$ genau dann, wenn ein Vektor $\mathbf{a} = (a_y)_{y \in \mathcal{P}(M)}$ existiert, so dass

$$c_{h+M^T z}(g) = \hat{a}_h c_{h+M^T z}(f), \quad \text{für alle } h \in \mathcal{G}(M^T) \text{ und } z \in \mathbb{Z}^d, \quad (\text{I.26})$$

I.4 Endlichdimensionale translationsinvariante Räume

wobei $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)}$ die diskrete Fourier-Transformierte des Vektors $\mathbf{a} = (a_y)_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M}^T)}$ ist. Insbesondere ist dann

$$g = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} T_{\mathbf{y}} f.$$

f) Die Matrix $\mathbf{G} = (\langle T_{\mathbf{y}} f, T_{\mathbf{x}} g \rangle)_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$ ist zirkulant und es gilt

$$\mathbf{G} = \mathcal{F}(\mathbf{M})^T \operatorname{diag} \left(m \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f) \overline{c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(g)} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \overline{\mathcal{F}(\mathbf{M})}. \quad (\text{I.27})$$

g) Die Menge der Translate $\{T_{\mathbf{y}} f ; \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)|^2 > 0, \quad \text{für alle } \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T). \quad (\text{I.28})$$

h) Die Menge der Translate $\{T_{\mathbf{y}} f ; \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$ ist genau dann orthonormal, wenn

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)|^2 = \frac{1}{m}, \quad \text{für alle } \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T). \quad (\text{I.29})$$

i) Gilt (I.28), so besteht der Vektor

$$\mathbf{f}^{\text{on}} := \mathcal{F}(\mathbf{M})^T \operatorname{diag} \left((m \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{l}}(f)|^2)^{-\frac{1}{2}} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \overline{\mathcal{F}(\mathbf{M})} \mathbf{f} \quad (\text{I.30})$$

aus orthonormalen Translates $\mathbf{f}^{\text{on}} = (T_{\mathbf{y}} f^{\text{on}})_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$, so dass $V_{\mathbf{M}}^f = V_{\mathbf{M}}^{f^{\text{on}}}$. Die Funktion $f^{\text{on}} \in L_2(\mathbb{T}^d)$ ist gegeben durch die Fourier-Koeffizienten

$$c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f^{\text{on}}) = \frac{c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)}{\left(m \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{l}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d. \quad (\text{I.31})$$

Beweis. a) Sei $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ eine reguläre Matrix, die ein Teilmuster $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbf{M})$ erzeugt, d. h. nach Satz I.3, dass für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ ein $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ existiert mit $\mathbf{y} = \mathbf{x}|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}$. Somit sind Operatoren $T_{\mathbf{y}} = T_{\mathbf{x}}$ identisch. Damit folgt für einen \mathbf{M} -invarianten Teilraum $V \in L_2(\mathbb{T}^d)$, dass für alle $f \in V$ und $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ gilt $T_{\mathbf{x}} f = T_{\mathbf{y}} f \in V$.

- b) Gegeben sei eine Funktion $g \in V_M^f$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass ein Vektor $(a_y)_{y \in \mathcal{P}(M)}$ existiert, so dass sich g schreiben lässt als

$$g = \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_y T_y f.$$

Sei $x \in \mathcal{P}(M)$, dann gilt aufgrund der Linearität von T_y mit der Substitution $w = x + y$, dass

$$T_x g = \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_y T_{x+y} f = \sum_{w \in \mathcal{P}(M)} a_{(w-x)|_{\mathcal{P}(M)}} T_w f \in V_M^f.$$

- c) Sei $y \in \mathcal{P}(M)$. Die Funktion $T_y f$ lässt sich in seine Fourier-Reihe (I.9) entwickeln und es folgt mit (I.23)

$$T_y f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i k^T y} c_k(f) e^{ik^T \circ}.$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}^d$ existiert nach Lemma I.5 die eindeutige Darstellung $k = h + M^T z$, $h \in \mathcal{G}(M^T)$, $z \in \mathbb{Z}^d$. Durch Anwenden dieser Zerlegung auf jeden Summanden der Fourier-Reihenentwicklung von $T_y f$ folgt mit $e^{2\pi i z^T M y} = 1$, dass

$$\begin{aligned} T_y f &= \sum_{h \in \mathcal{G}(M^T)} e^{-2\pi i h^T y} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{h+M^T z}(f) e^{i(h^T + z^T M) \circ} \\ &= \sum_{h \in \mathcal{G}(M^T)} e^{-2\pi i h^T y} s_h^f. \end{aligned} \tag{I.32}$$

Somit ist für beliebiges $y \in \mathcal{P}(M)$ die Funktion $T_y f \in V_M^{s_h^f}$, also $V_M^f \subseteq V_M^{s_h^f}$. Außerdem ist aber für ein $h \in \mathcal{G}(M^T)$ mit Gleichung (I.18)

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} e^{-2\pi i h^T y} T_y f &= \sum_{k \in \mathcal{G}(M^T)} \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} e^{-2\pi i (h-k)^T y} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{k+M^T z}(f) e^{i(k^T + z^T M) \circ} \\ &= m \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{h+M^T z}(f) e^{i(h^T + z^T M) \circ} \\ &= ms_h^f. \end{aligned}$$

Somit ist $s_h^f \in V_M^f$ für beliebiges $h \in \mathcal{G}(M^T)$ und es folgt die Aussage c).

I.4 Endlichdimensionale translationsinvariante Räume

d) Die Gleichung (I.32) entspricht einer Zeile der Gleichung (I.25). Die Aussage folgt, da (I.32) für beliebiges $y \in \mathcal{P}(M)$ gilt.

e) Für $g \in V_M^f$ gilt per Definition, dass ein Vektor $a = (a_y)_{y \in \mathcal{P}(M)}$ existiert, so dass

$$g = \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_y T_y f.$$

Diese Gleichung lässt sich ebenso in Fourier-Koeffizienten betrachten. Dort lautet dieser Zusammenhang für ein beliebig aber fest gewähltes $k \in \mathbb{Z}^d$ mit $h = k|_{\mathcal{G}(M^T)}$, dem eindeutig bestimmten $z \in \mathbb{Z}^d$ für das $k = h + M^T z$ und der Tatsache, dass $e^{2\pi i k^T y} = e^{2\pi i h^T y}$,

$$\begin{aligned} c_k(g) &= \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_y e^{-2\pi i k^T y} c_k(f) = \left(\sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_y e^{-2\pi i h^T y} \right) c_{h+M^T z}(f) \\ &= \hat{a}_h c_{h+M^T z}(f). \end{aligned} \tag{I.33}$$

Ist andererseits ein Vektor $\hat{a} = (\hat{a}_h)_{h \in \mathcal{G}(M^T)}$ gegeben, der (I.26) für alle $k \in \mathbb{Z}^d$ erfüllt, so existiert der Vektor a als inverse diskrete Fourier-Transformation von \hat{a} eindeutig und die umgekehrte Reihenfolge der Rechenschritte in (I.33) schließt den Beweis der Aussage ab.

f) Die Matrix $G = (\langle T_y f, T_x g \rangle)_{x,y \in \mathcal{P}(M)}$ ist zirkulant, da $\langle T_y f, T_x g \rangle = \langle f, T_{x-y} g \rangle$. Somit lässt sich Lemma I.19 anwenden und es gilt für einen Hauptdiagonaleintrag der Diagonalmatrix aufgrund der Parsevalschen Gleichung (I.11), d. h. für $h \in \mathcal{G}(M^T)$,

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} \langle f, T_y g \rangle e^{-2\pi i h^T y} &= \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} e^{-2\pi i h^T y} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k(f) \overline{c_k(T_y g)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k(f) \overline{c_k(g)} \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} e^{-2\pi i (h-k)^T y} \\ &= m \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{h+M^T z}(f) \overline{c_{h+M^T z}(g)}. \end{aligned}$$

g) Die Funktionen $T_y f$, $y \in \mathcal{P}(M)$, sind genau dann linear unabhängig, wenn ihre Gramsche Matrix $G = (\langle T_y f, T_x f \rangle)_{x,y \in \mathcal{P}(M)}$ regulär ist. Mit Aussage f) muss dafür jedoch aufgrund der Regularität von $\mathcal{F}(M)$ die Diagonalmatrix regulär sein, also folgt die Aussage g).

- h) Analog zu g) folgt die Orthonormalität der Translate, falls G und somit auch die Diagonalmatrix der Einheitsmatrix entspricht. Dies ist gleichbedeutend damit, dass

$$m \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f) \overline{c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(g)} = 1, \quad \text{für alle } \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T).$$

- i) Aus dem zweiten Teil von c) folgt eine Darstellung für $\overline{\mathcal{F}(\mathbf{M})}\mathbf{f}$. Nach der Multiplikation mit der Diagonalmatrix aus (I.30) folgt mit dem ersten Teil von c) die Darstellung von f^{on} durch die Fourier-Koeffizienten in (I.31).

Die Gramsche Matrix $\mathbf{G} = (\langle T_y f^{on}, T_x f^{on} \rangle)_{x,y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$ ist unter Verwendung von f) dieses Lemmas zusammen mit (I.31) identisch mit der Einheitsmatrix E_d . Somit bildet die Menge der Translate $\{T_y f^{on}, y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbf{M} -invarianten Raumes $V_{\mathbf{M}}^{f^{on}}$. Mit den Koeffizienten

$$\hat{a}_{\mathbf{h}} = \frac{1}{\sqrt{m \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)|^2}}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T),$$

Gleichung (I.31) und Teil e) folgt $f^{on} \in V_{\mathbf{M}}^f$ und wegen $\hat{a}_{\mathbf{h}} \neq 0, \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, ebenso $f \in V_{\mathbf{M}}^{f^{on}}$. Da sowohl die Translate von f als auch die von f^{on} linear unabhängig sind, ist $V_{\mathbf{M}}^f = V_{\mathbf{M}}^{f^{on}}$. \square

Im Folgenden wird bei Rechnungen auf dem Muster bzw. der erzeugenden Menge auf die Angabe $\circ|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}$ bzw. $\circ|_{\mathcal{G}(\mathbf{M})}$ der Lesbarkeit halber verzichtet. Dies tritt insbesondere in den Indizes der Koeffizientenvektoren a und \hat{a} auf. Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis stets mit dem entsprechenden in $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ bzw. $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ enthaltenen Restklassenrepräsentanten der Äquivalenzklasse des Ergebnisses zu identifizieren.

I.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

Definition I.24 (Die Multiskalen-Analyse).

Gegeben seien eine Folge $\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}$ regulärer Matrizen $\mathbf{J}_k \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit $|\det \mathbf{J}_k| > 1$ und eine Folge von Räumen $\{V_j\}_{j \geq 0}, V_j \subset L_2(\mathbb{T}^d)$. Weiter bezeichne $\mathbf{M}_0 := E_d, m_0 := 1$ und für $j > 0$

$$\mathbf{M}_j := \mathbf{J}_j \mathbf{M}_{j-1} = \prod_{k=j}^1 \mathbf{J}_k = \mathbf{J}_j \cdot \dots \cdot \mathbf{J}_1 \quad \text{und} \quad m_j := |\det \mathbf{M}_j|. \quad (I.34)$$

1.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

Eine *anisotrope, periodische Multiskalen-Analyse* des $L_2(\mathbb{T}^d)$ ist gegeben durch das Tupel der beiden Folgen $(\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j\geq 0})$, falls folgende Eigenschaften gelten:

MR1 Für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert eine Funktion $\varphi_j \in V_j$, deren Translate $T_y \varphi_j, y \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)$, eine Basis von V_j bilden.

MR2 Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $V_j \subset V_{j+1}$.

MR3 Die Vereinigung aller V_j liegt dicht in $L_2(\mathbb{T}^d)$.

Der Raum V_j heißt Skalierungsraum des Levels j und die Funktion φ_j Skalierungsfunktion des Levels j . Wegen MR1 ist V_j insbesondere \mathbf{M}_j -invariant, d. h.

$$f \in V_j \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j) : T_y f \in V_j$$

$$\text{und } \dim V_j = m_j = |\det \mathbf{M}_j| = \prod_{k=1}^j |\det \mathbf{J}_k|.$$

Die Definition der periodischen Multiskalen-Analyse wurde zunächst in [28, 39, 45, 50] für den eindimensionalen Fall beschrieben. Eine multivariate periodische Multiskalen-Analyse mit einer festen Dilatationsmatrix $\mathbf{M}_j = \mathbf{M}^j$ wird in [20, 34] als mehrdimensionale Verallgemeinerung dazu eingeführt.

Während diese beiden Versionen und die ursprüngliche Definition der Multiskalen-Analyse von Mallat und Meyer [33, 37] stationär sind, das heißt eine Funktion mit ihren Dilatationen alle Skalierungslevel erzeugt, siehe etwa auch [6, 31], fordert Definition 1.24 dies nicht. Somit orientiert sie sich an [9, 39] und [55]. Die differenziertere Bezeichnung der Multiskalen-Analyse aus Definition 1.24 ist somit, dass es sich um eine nichtstationäre periodische Multiskalen-Analyse handelt.

Im Unterschied zu allen bisher genannten Definitionen der Multiskalen-Analyse ist es in Definition 1.24 für einen festen Dilatationsfaktor, etwa den dyadischen Fall einer Dilatation um den Faktor 2 bzw. mit einer Matrix \mathbf{J} mit $|\det \mathbf{J}| = 2$, zwischen den Leveln möglich, in den Dilatationsmatrizen Richtungspräferenzen zu spezifizieren. Diese Möglichkeit ergibt sich im eindimensionalen Fall nicht, im Mehrdimensionalen wurde sie zuerst für verschiedene Unterräume basierend auf den Teilmustern in [29] betrachtet. Dies führt direkt auf die Definition 1.24 und macht es dort notwendig, dass die Folge der Dilatationsmatrizen $\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}$ in die Definition der Multiskalen-Analyse aufgenommen wird, selbst wenn sie alle die gleiche Determinante besitzen.

Im Folgenden werden für die Eigenschaften einer Multiskalen-Analyse aus Definition I.24 äquivalente Aussagen formuliert, die auf den Fourier-Koeffizienten $c_k(\varphi_j)$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $j \in \mathbb{N}$, der Skalierungsfunktionen φ_j basieren. Die wesentliche Grundlage dazu bilden die in Abschnitt I.4 behandelten Eigenschaften translationsinvarianter Räume. Anschließend wird auf die Konstruktion der Wavelet-Räume, dem jeweils orthogonalen Komplement von V_j in V_{j+1} , eingegangen. Die folgenden Aussagen übertragen die Korollare 3.I.2 bis 3.I.4 von [50] aus dem Eindimensionalen auf den Fall allgemeiner Dilatationsmatrizen \mathbf{J}_k , $k \in \mathbb{N}$.

Lemma I.25.

Sei $j \in \mathbb{N}$. Die Aussage MR1 ist gleichbedeutend mit $\dim V_j = m_j$ und der Existenz einer Funktion $\varphi_j \in V_j$, für die

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}_j^T \mathbf{z}}(\varphi_j)|^2 > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_j^T) \text{ gilt.}$$

Beweis. Die Translations-Invarianz, die sich aus der Basis-Eigenschaft in MR1 ergibt, sichert zu, dass $T_y \varphi_j \in V_j$ für $y \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)$ gilt. Zusammen mit der Dimension von V_j und Lemma I.23 g) folgt dann die Aussage des Lemmas. \square

Sei die Eigenschaft MR1 erfüllt. Um MR2 mittels Fourier-Koeffizienten zu beschreiben, kann für die Räume V_j und V_{j+1} auf die Basen bestehend aus den Translates von φ_j und φ_{j+1} zurückgegriffen werden.

Lemma I.26.

Sei MR1 erfüllt. Die Eigenschaft MR2 gilt genau dann, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ ein Vektor $\hat{\mathbf{a}}_j = (\hat{a}_{j,\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^T)} \in \mathbb{C}^{m_{j+1}}$ existiert, so dass

$$c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}_{j+1}^T \mathbf{z}}(\varphi_j) = \hat{a}_{j,\mathbf{h}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}_{j+1}^T \mathbf{z}}(\varphi_{j+1}), \quad \text{für alle } \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^T), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \quad (I.35)$$

gilt. Dann ist

$$\varphi_j = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} a_{j,\mathbf{y}} T_{\mathbf{y}} \varphi_{j+1}, \quad (I.36)$$

wobei $\mathbf{a}_j = (a_{j,\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})} = \overline{\mathcal{F}(\mathbf{M}_{j+1})}^T \hat{\mathbf{a}}_j$ ist.

1.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

Beweis. Gilt die Aussage (1.35) für fest gewähltes j , so ist mit Lemma 1.23 e) $\varphi_j \in V_{j+1}$, wegen Lemma 1.23 a) $V_j \subset V_{j+1}$ und somit MR2 erfüllt. Gilt MR2, so folgt die Aussage (1.35) mit den beiden gleichen Argumenten. \square

Für stationäre Multiskalen-Analysen ist der Vektor $\mathbf{a} = \mathbf{a}_j$ unabhängig vom Level j . Die Gleichung (1.36) heißt dann Zwei-Skalen-Gleichung oder im Englischen refinement equation. Für nichtstationäre Multiskalen-Analysen ist diese Zwei-Skalen-Gleichung möglicherweise von Level zu Level unterschiedlich.

Sind die ersten beiden Eigenschaften MR1 und MR2 gegeben, lässt sich auch für die dritte Eigenschaft eine äquivalente Beschreibung in den Fourier-Koeffizienten $\mathbf{c}(\varphi_j)$ angeben. Dabei sind die Skalierungsräume V_j nach Eigenschaft MR2 gestaffelt und somit gilt insbesondere mit Lemma 1.23 e), dass

$$\text{supp}(\mathbf{c}(\varphi_j)) \subset \text{supp}(\mathbf{c}(\varphi_{j+1})), \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0. \quad (1.37)$$

Lemma 1.27.

Gelten MR1 und MR2, so ist MR3 genau dann erfüllt, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{supp}(\mathbf{c}(\varphi_j)) = \mathbb{Z}^d. \quad (1.38)$$

Beweis. Der Beweis lässt sich aus dem Eindimensionalen, siehe [43, 44], auf den allgemeinen Matrix-Fall übertragen.

Angenommen (1.38) gilt nicht. Dann existiert ein $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{Z}^d$, so dass $c_{\mathbf{k}_0}(\varphi_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist jedoch von der Basis $\{e^{i\mathbf{k}^T \circ} ; \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ des $L_2(\mathbb{T}^d)$ die Funktion $e^{i\mathbf{k}_0^T \circ}$ orthogonal zu allen Räumen V_j . Somit liegt die Vereinigung nicht dicht in $L_2(\mathbb{T}^d)$ und MR3 ist nicht erfüllt.

Es gelte (1.38). Angenommen es existiert eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $f \neq 0$, für die

$$f \perp \text{clos}_{L_2(\mathbb{T}^d)} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} V_j \right) \quad (1.39)$$

gilt, wobei $\text{clos}_{L_2(\mathbb{T}^d)}(V)$, $V \subseteq L_2(\mathbb{T}^d)$, die abgeschlossene Hülle von V in $L_2(\mathbb{T}^d)$ bezeichnet. Dann gibt es ein $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{Z}^d$ mit der Eigenschaft

$$|c_{\mathbf{k}_0}(f)| = \max\{|c_{\mathbf{k}}(f)| ; \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\} > 0.$$

Mit (I.38) und der Staffelung der Räume nach (I.37) existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $\mathbf{k}_0 \in \text{supp}(\mathbf{c}(\varphi_{j_0}))$ ist. Zusätzlich ist $\varphi_{j_0} \in V_j$, $j \geq j_0$, und somit insbesondere $V_{\mathbf{M}_{j_0}}^{\varphi_{j_0}} \subset V_j$. Wegen (I.39) ist $f \perp V_j$ und daher auch $f \perp V_{\mathbf{M}_{j_0}}^{\varphi_{j_0}}$. Es gilt analog zum Beweis von I.23 f) für jedes $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_j^T)$ und jedes $j \geq j_0$

$$0 = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)} \langle f, T_{\mathbf{y}} \varphi_{j_0} \rangle e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} = m_j \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}_j^T \mathbf{z}}(f) \overline{c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}_j^T \mathbf{z}}(\varphi_{j_0})}.$$

Für genau eines der $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_j^T)$ gilt $\mathbf{h} \equiv \mathbf{k}_0 \bmod \mathbf{M}_j^T$ für jedes $j \geq j_0$. Die dazugehörige Summe lässt sich schreiben als

$$0 = c_{\mathbf{k}_0}(f) \overline{c_{\mathbf{k}_0}(\varphi_{j_0})} + \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} c_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{M}_j^T \mathbf{z}}(f) \overline{c_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{M}_j^T \mathbf{z}}(\varphi_{j_0})}, \quad j \geq j_0. \quad (\text{I.40})$$

Sei $\varepsilon := |c_{\mathbf{k}_0}(f) \overline{c_{\mathbf{k}_0}(\varphi_{j_0})}| > 0$. Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz angewandt auf die Folgen der Beträge der Fourier-Koeffizienten gilt

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{z}}(f) \overline{c_{\mathbf{z}}(\varphi_{j_0})}| \leq \|\mathbf{c}(f)\| \cdot \|\mathbf{c}(\varphi_{j_0})\| < \infty.$$

Es existiert somit ein $j_1 \geq j_0$, so dass

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j_1}^T)} |c_{\mathbf{z}}(f) \overline{c_{\mathbf{z}}(\varphi_{j_0})}| \leq \varepsilon/2.$$

Dies führt für $j = j_1$ in (I.40) zu einem Widerspruch und es gilt $f = 0$. Damit folgt aus (I.38) die Eigenschaft MR3. \square

Die Eigenschaft MR3 ist beispielsweise erfüllt, falls für den betragsmäßig kleinsten Eigenwert gilt, dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_1(\mathbf{M}_j) = \infty.$$

Multivariate periodische Wavelets

Die Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ aus Definition I.24 ermöglicht die Be trachtung einer Funktion f auf verschiedenen Detailstufen, den Leveln j , indem die Projektion von f in V_j betrachtet wird. In dieser Betrachtung verändert sich von einem zum nächsten Level die Präferenz an Detail, sowohl beschrieben durch die Än-

I.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

derung des Musters $\mathcal{P}(M_j)$ zu $\mathcal{P}(M_{j+1})$ als auch der Funktionen φ_j und φ_{j+1} . Eine systematische Untersuchung dieses Details bieten Funktionen, die genau diesen Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Skalierungsräumen beschreiben. Deren Existenz und Anzahl behandelt das folgende

Theorem I.28.

Gegeben sei die Multiskalen-Analyse $(\{J_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ und für den M_{j+1} -invarianten Raum V_{j+1} sei φ_{j+1} die dazugehörige Skalierungsfunktion aus Eigenschaft MRI.

Dann existieren Funktionen $\psi_{j,g}$, $g \in \mathcal{G}(J_{j+1}^T)$, deren Translate $T_y \psi_{j,g}$, $y \in \mathcal{P}(M_j)$, linear unabhängig sind und die den Raum V_{j+1} in die direkte Summe

$$V_{j+1} = V_{M_{j+1}}^{\varphi_{j+1}} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}(J_{j+1}^T)} V_{M_j}^{\psi_{j,g}} \quad (\text{I.41})$$

zerlegen.

Beweis. Nach Lemma I.23 c) ist

$$V_{j+1} = \text{span}\{s_h^{\varphi_{j+1}} ; h \in \mathcal{G}(M_{j+1}^T)\}.$$

Die orthogonalen Splines $s_h^{\varphi_{j+1}}$, $h \in \mathcal{G}(M_{j+1}^T)$, bilden ebenso eine Basis des V_{j+1} , wie die Translate $T_y \varphi_{j+1}$, $y \in \mathcal{P}(M_{j+1})$, sie sind jedoch auch orthogonal zueinander, denn für $h, k \in \mathcal{G}(M_{j+1}^T)$ gilt $\langle s_h^{\varphi_{j+1}}, s_k^{\varphi_{j+1}} \rangle = 0$ genau dann, wenn $h \neq k$.

Mit der Zerlegung aus (I.6) angewandt auf jedes $h \in \mathcal{G}(M_{j+1}^T)$ ist

$$h = k + M_j^T g, \quad k \in \mathcal{G}(M_j^T), \quad g \in \mathcal{G}(J_{j+1}^T). \quad (\text{I.42})$$

Wendet man dies auf die obige Basis an, ergibt sich V_{j+1} als direkte Summe

$$V_{j+1} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}(J_{j+1}^T)} \text{span}\{s_{k+M_j^T g}^{\varphi_{j+1}} ; k \in \mathcal{G}(M_j^T)\}. \quad (\text{I.43})$$

Für festes $g \in \mathcal{G}(J_{j+1}^T)$ sei die Funktion $\psi_{j,g}$ gegeben durch die Fourier-Koeffizienten

$$c_{k+M_j^T l + M_{j+1}^T z}(\psi_{j,g}) := \begin{cases} c_{k+M_j^T l + M_{j+1}^T z}(\varphi_{j+1}) & \text{falls } l = g, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $k \in \mathcal{G}(M_j^T)$, $l \in \mathcal{G}(J_{j+1}^T)$, $z \in \mathbb{Z}^d$.

Die lineare Unabhängigkeit der Translate $T_x \psi_{j,g}$, $x \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)$, von $\psi_{j,g}$, $g \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_{j+1}^T)$, folgt direkt aus der linearen Unabhängigkeit der Translate $T_y \varphi_{j+1}$, $y \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{j+1})$: Für festes $k \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_j^T)$ und $g \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_{j+1}^T)$ gilt

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{k} + \mathbf{M}_j^T \mathbf{z}}(\psi_{j,g})|^2 = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{k} + \mathbf{M}_j^T g + \mathbf{M}_{j+1}^T \mathbf{z}}(\varphi_{j+1})|^2 > 0, \quad (\text{I.44})$$

denn mit (I.42) entspricht $\mathbf{k} + \mathbf{M}_j^T g$ genau einem $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{j+1}^T)$ und somit die zweite Summe genau einer der Summen aus Lemma I.25. \square

Die Gleichung (I.44) kann auch dazu verwendet werden, für ein gegebenes System von zueinander orthogonalen Funktionen $\psi_{j,g}$, $g \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_j^T)$, die lineare Unabhängigkeit der Translate zu prüfen. Die direkte Summe der Räume bildet dann eine Zerlegung des Skalierungsraumes V_{j+1} . Neben dem enthaltenen, kleineren Skalierungsraum V_j entstehen dabei weitere Räume.

Definition I.29 (Wavelet-Räume).

Gegeben sei eine Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ nach Definition I.24, ein $j \in \mathbb{N}$ und eine feste Sortierung der Elemente $\{g_0, g_1, \dots, g_{|\det \mathbf{J}_{j+1}| - 1}\} = \mathcal{G}(\mathbf{J}_{j+1}^T)$. Es seien weiter Funktionen $\psi_{j,k} = \psi_{j,g_k}$, $k = 0, \dots, |\det \mathbf{J}_{j+1}| - 1$, gegeben, welche analog zur Gleichung (I.43) der Zerlegung

$$V_{j+1} = \bigoplus_{k=0}^{|\det \mathbf{J}_{j+1}| - 1} V_{\mathbf{M}_j}^{\psi_{j,k}}$$

genügen, wobei $V_{\mathbf{M}_j}^{\psi_{j,0}} = V_{\mathbf{M}_j}^{\varphi_j}$ gelte.

Dann heißen die Vektorräume

$$W_{j,k} := V_{\mathbf{M}_j}^{\psi_{j,k}} = \text{span}\{T_y \psi_{j,g_k} ; y \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_j)\}, \quad k = 1, \dots, |\det \mathbf{J}_{j+1}| - 1,$$

Wavelet-Räume zum Level j .

Wendet man die Zerlegung in die Wavelet-Räume $W_{j,k}$ auf jeden Skalierungsraum V_j , $j \in \mathbb{N}$, einer Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ an, so ergibt sich eine Zerlegung des $L_2(\mathbb{T}^d)$ in die direkte Summe der Räume

$$L_2(\mathbb{T}^d) = \text{clos}_{L_2(\mathbb{T}^d)} \left(V_0 \oplus \bigoplus_{j \geq 0} \bigoplus_{k=1}^{|\det \mathbf{J}_{j+1}| - 1} W_{j,k} \right). \quad (\text{I.45})$$

I.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

Die Wavelet-Transformation

Für die Zerlegung einer Funktion $f \in V_{j+1}$ in die Anteile

$$f = g + \sum_{l=1}^{|\det \mathbf{J}_{j+1}|-1} h_l, \quad g \in V_j, h_l \in W_{j,l}, l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}_j| - 1, \quad (\text{I.46})$$

gibt dieser Abschnitt Algorithmen an. Diese Zerlegung lässt sich anschließend mit $g \in V_j$ auf die Zerlegung des Levels j übertragen und analog auf die Level $j-1, j-2, \dots$. Die gesamte Zerlegung

$$f = g_0 + \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{|\det \mathbf{J}_{k+1}|-1} h_{k,l}, \quad g_0 \in V_0, h_{k,l} \in W_{k,l},$$

heißt Wavelet-Transformation oder Wavelet-Analyse von f . Die Umkehrung, also die Rekonstruktion von f aus den Funktionen $g_0, h_{k,l}$, heißt inverse Wavelet-Transformation oder Wavelet-Synthese von f .

Für diesen Abschnitt sei eine Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_k\}_{k \geq 0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ nach Definition I.24 gegeben und $j \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt. Dann bezeichne vereinfachend $\mathbf{N} := \mathbf{M}_j, \mathbf{J} := \mathbf{J}_{j+1}, \mathbf{M} := \mathbf{M}_{j+1} = \mathbf{J}\mathbf{N}$, $n := |\det \mathbf{N}|$ und $m := |\det \mathbf{M}|$. Bei den Funktionen sei verkürzend $\xi := \varphi_{j+1}, \varphi := \varphi_j$ und $\psi_l := \psi_{j,l}, l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$. Dabei sind die Wavelets $\psi_{j,l}$, und mit ihnen die Wavelet-Räume $W_{j,l}$, analog zur Definition I.29 sortiert, indem eine beliebige aber feste Anordnung der Elemente $g_l, l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(\mathbf{J}^T)$ gewählt wurde, siehe auch Definition I.18 und Anmerkungen danach. Somit gilt für die translationsinvarianten Räume

$$V_{j+1} = V_{\mathbf{M}}^\xi = V_{\mathbf{N}}^\varphi \oplus \bigoplus_{l=1}^{|\det \mathbf{J}|-1} V_{\mathbf{N}}^{\psi_l} = V_j \oplus \bigoplus_{l=1}^{|\det \mathbf{J}|-1} W_{j,l}.$$

Insbesondere besitzt der Raum $V_j = V_{\mathbf{N}}^\varphi = V_{\mathbf{N}}^{\psi_0}$ mit den Translates $T_x \varphi, x \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, und den Translates $T_x \psi_0, x \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, zwei Basen. Für die Implementierung und Be trachtung der Laufzeit der Wavelet-Transformation ist eine spezielle Sortierung der Elemente $g \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T)$ notwendig, die in Kapitel 3 genauer betrachtet wird.

Die Funktionen φ, ψ_l, f liegen also alle in $V_{\mathbf{M}}^\xi$. Sie könne somit als gewichtete Summe der Translate $T_y \xi, y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, dargestellt werden. Auf diesem Weg lassen sich die Algorithmen zur Zerlegung einer Funktion f in Waveletanteile h_l durch endliche Sum-

men beschreiben. Mit den Eigenschaften der translationsinvarianten Räume aus Abschnitt I.4 lassen sich auch diese Summationen im Fourier-Bereich formulieren. Dabei bleiben diese Summen endlich, selbst wenn die Fourier-Koeffizienten der Funktionen keinen endlichen Träger besitzen. Insbesondere ist die Anzahl Summanden durch die Anzahl der Translate gegeben. Diese entspricht der Anzahl Abtastpunkte, auf denen f basiert, also der Anzahl Musterpunkte $m = |\det \mathbf{M}|$.

Im Folgenden seien $\mathbf{a} = (a_y)_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$, $\mathbf{b}_l = (b_{l,y})_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$, $l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$ und $\mathbf{d} = (d_y)_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$ gegeben, so dass

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_y T_y \xi, \\ \psi_l &= \sum_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} b_{l,y} T_y \xi, \quad l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1,\end{aligned}$$

und

$$f = \sum_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} d_y T_y \xi. \tag{I.47}$$

Die Fourier-Transformierten seien bezeichnet mit $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_h)_{h \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} = \sqrt{m} \mathcal{F}(\mathbf{M}) \mathbf{a}$ und analog mit $\hat{\mathbf{b}}_l$, $l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, und $\hat{\mathbf{d}}$. Damit lassen sich die Eigenschaften der Wavelets auch in den Koeffizienten aus (I.47) ausdrücken. Insbesondere ist Teil b) des folgenden Lemmas erstmals hier in dieser Form genannt und ermöglicht eine schnelle Konstruktion einer orthonormalen Basis für die Wavelet-Räume $W_{j,l}$ und den Skalierungsraum V_j , falls $\{T_y \xi ; y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$ eine orthonormale Basis von V_{j+1} ist.

Lemma I.30.

Gegeben seien die Funktionen $\psi_l \in V_{\mathbf{M}}^\xi$, $l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, mit den Koeffizienten aus (I.47). Dann gelten für feste $l, h \in \{0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1\}$, $h \neq l$, folgende Aussagen:

a) Die Funktionen $T_x \psi_l$, $x \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\sum_{g \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T)} |\hat{b}_{l,k+N^T g}|^2 > 0 \quad \text{für alle } k \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T) \text{ gilt.}$$

I.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

- b) Bilden die Translate $T_y \xi$, $y \in \mathcal{P}(M)$, eine orthonormale Basis von V_{j+1} , so sind die Funktionen $T_x \psi_l$, $x \in \mathcal{P}(N)$, genau dann orthonormal zueinander, wenn

$$\sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} |\hat{b}_{l,k+N^T g}|^2 = |\det J| \quad \text{für alle } k \in \mathcal{G}(N^T) \text{ gilt.}$$

- c) Die Wavelet-Räume W_l, W_h sind orthogonal, d. h. $W_l \perp W_h$, genau dann, wenn

$$\sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} \hat{b}_{h,k+N^T g} \overline{\hat{b}_{l,k+N^T g}} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |c_{k+N^T g + M^T z}(\xi)|^2 = 0, \quad \text{für alle } k \in \mathcal{G}(N^T).$$

- d) Der Vektor der Translate $\psi_l = (T_x \psi_l)_{x \in \mathcal{P}(N)}$ kann mit $\xi = (T_y \xi)_{y \in \mathcal{P}(M)}$ geschrieben werden als

$$\overline{\mathcal{F}(N)} \psi_l = \frac{1}{\sqrt{|\det J|}} \mathbf{B}_l \overline{\mathcal{F}(M)} \xi, \quad (\text{I.48})$$

wobei die Matrix $\mathbf{B}_l \in \mathbb{C}^{n \times m}$ die Gestalt

$$\mathbf{B}_l := \left(\text{diag}(\hat{b}_{l,k+N^T g_0})_{k \in \mathcal{G}(N^T)} \dots \text{diag}(\hat{b}_{l,k+N^T g_{|\det J|-1}})_{k \in \mathcal{G}(N^T)} \right) \quad (\text{I.49})$$

hat.

Bemerkung I.31.

Teil a), b) und d) des Lemmas gelten analog mit dem Koeffizientenvektor \hat{a} für φ sowie c) als $V_j \perp W_l$, $l = 1, \dots, |\det J| - 1$.

Beweis des Lemmas I.30. a) Der Zusammenhang $\psi_l \in V_M^\xi$ über die Koeffizienten b_l aus (I.47) lässt sich mit Lemma I.23 e) in Fourier-Koeffizienten mittels \hat{b}_l darstellen. Jedes $w \in \mathbb{Z}^d$ ist mit Lemma I.5 eindeutig zerlegbar in $w = g + J^T z$, $g \in \mathcal{G}(J^T)$, $z \in \mathbb{Z}^d$. Nach Lemma I.23 g) sind die Translate $T_x \psi_l$, $x \in \mathcal{P}(N)$, genau dann linear unabhängig, wenn für alle $k \in \mathcal{G}(N^T)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} |c_{k+N^T w}(\psi_l)|^2 &= \sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |c_{k+N^T g + M^T z}(\psi_l)|^2 \\ &= \sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} |\hat{b}_{k+N^T g}|^2 \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |c_{k+N^T g + M^T z}(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Da die Translate $T_y \xi$, $y \in \mathcal{P}(M)$, linear unabhängig sind, folgt die Aussage, denn die zweite Summe ist stets echt positiv.

- b) Lemma I.23 h) charakterisiert die Orthonormalität sowohl der Translate $T_y \xi$, $y \in \mathcal{P}(M)$, als auch der Translate $T_x \psi_l$, $x \in \mathcal{P}(N)$, mittels Fourier-Koeffizienten. Es folgt mit den Umformungen aus a), dass die Orthonormalität der zweiten Translate äquivalent dazu ist, dass für alle $k \in \mathcal{G}(N^T)$ gilt

$$\begin{aligned} |\det J| &= \frac{m}{n} = m \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} |c_{k+N^Tw}(\psi_l)|^2 \\ &= m \sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} |\hat{b}_{l,k+N^Tg}|^2 \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |c_{k+N^Tg+M^Tz}(\xi)|^2 \\ &= \sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} |\hat{b}_{l,k+N^Tg}|^2. \end{aligned}$$

- c) Die Aussage $W_h \perp W_l$ ist genau dann erfüllt, wenn $G = (\langle T_y \psi_h, T_x \psi_l \rangle)_{x,y \in \mathcal{P}(N)}$ identisch zur Nullmatrix ist. Nach Lemma I.23 e) und f) ist dies mit (I.47) und den Umformungen in a) äquivalent dazu, dass für alle $k \in \mathcal{G}(N^T)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} c_{k+N^Tw}(\psi_h) \overline{c_{k+N^Tw}(\psi_l)} \\ &= \sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} \hat{b}_{h,k+N^Tg} \overline{\hat{b}_{l,k+N^Tg}} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |c_{k+N^Tg+M^Tz}(\xi)|^2. \end{aligned}$$

- d) Die linke Seite von (I.48) lässt sich mit Lemma I.23 d) und der gleichen Aufspaltung wie in a) und c) umformen zu

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}(N)} \psi_l &= \sqrt{n} \left(\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} c_{k+N^Tw}(\psi_l) e^{i(k^T + w^T N) \circ} \right)_{k \in \mathcal{G}(N)^T} \\ &= \sqrt{\frac{n}{m}} \left(\sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} \hat{b}_{l,k+N^Tg} \sqrt{m} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{k+N^Tg+M^Tz}(\xi) e^{i(k^T + g^T N + z^T M) \circ} \right)_{k \in \mathcal{G}(N)^T} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\det J|}} B_l \sqrt{m} \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{h+M^Tz}(\xi) e^{i(h^T + z^T M) \circ} \right)_{h \in \mathcal{G}(M^T)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\det J|}} B_l \overline{\mathcal{F}(M)} \xi, \end{aligned}$$

I.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

mit der eindeutigen Zerlegung jedes Elementes $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, genauer $\mathbf{h} = \mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}$, $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)$, $\mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T)$, aus Lemma I.5 und \mathbf{B}_l wie in (I.49). \square

Ist nun eine Funktion f wie in (I.47) gegeben, so lässt sich mit d) des vorhergehenden Lemmas die Zerlegung aus (I.46) angeben, wobei die Berechnungen lediglich auf den Koeffizientenvektoren \mathbf{a}, \mathbf{d} und \mathbf{b}_l , $l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, basieren. Gesucht sind also Koeffizienten $\mathbf{d}_l = (d_{l,\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})}$, $l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, bzw. deren Fourier-Transformierte $\hat{\mathbf{d}}_l$, so dass für die Funktionen aus (I.46) gilt

$$g = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})} d_{0,\mathbf{x}} \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \varphi \quad \text{und} \quad h_l = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})} d_{l,\mathbf{x}} \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \psi_l, \quad l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1.$$

Dazu kann auf jeden einzelnen Unterraum $V_{\mathbf{N}}^\varphi, V_{\mathbf{N}}^{\psi_l}, l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, die Gleichung (I.48) angewandt werden. Die Funktionenvektoren φ, ξ und ψ_l werden dabei durch die gewichteten Vektoren

$$(d_{0,\mathbf{x}} \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \varphi)_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})}, \quad (d_{\mathbf{y}} \mathbf{T}_{\mathbf{y}} \xi)_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$$

und

$$(d_{l,\mathbf{x}} \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \psi_l)_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})}, \quad l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1,$$

ersetzt. Mit den Beweisschritten aus Teil d) des vorhergehenden Lemmas gilt mit

$$\mathbf{A} = \left(\text{diag}(\hat{a}_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}_0})_{\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)} \dots \text{diag}(\hat{a}_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}_{|\det \mathbf{J}| - 1}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)} \right),$$

dass

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \left(\sum_{\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d} \overline{\hat{d}_{0,\mathbf{k}}} c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{w}}(\varphi) e^{i(\mathbf{k}^T + \mathbf{w}^T \mathbf{N}) \circ} \right)_{\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N})^T} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \mathbf{A} \sqrt{m} \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \overline{\hat{d}_{\mathbf{h}}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\xi) e^{i(\mathbf{h}^T + \mathbf{z}^T \mathbf{M}) \circ} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \end{aligned}$$

und für $l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \left(\sum_{\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d} \overline{\hat{d}_{l,\mathbf{k}}} c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{w}}(\psi_l) e^{i(\mathbf{k}^T + \mathbf{w}^T \mathbf{N}) \circ} \right)_{\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \mathbf{B}_l \sqrt{m} \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \overline{\hat{d}_{\mathbf{h}}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\xi) e^{i(\mathbf{h}^T + \mathbf{z}^T \mathbf{M}) \circ} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)}. \end{aligned}$$

Daraus lassen sich die Koeffizienten \mathbf{d}_l , $l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}|$, der Funktionen g und h_l , $l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, ablesen. Für $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)$ erhält man aus

$$\hat{d}_{0,\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \sum_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T)} \overline{\hat{a}_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}}} \hat{d}_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}} \quad (I.50)$$

und

$$\hat{d}_{l,\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \sum_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T)} \overline{\hat{b}_{l,\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}}} \hat{d}_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}}, \quad l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1, \quad (I.51)$$

die gesuchten Koeffizienten $\mathbf{d}_l = (d_{l,\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})}$, $l = 0, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, durch die inverse Fourier-Transformation.

Für die Umkehrung, die inverse Wavelet-Transformation oder Wavelet-Synthese von f , sind die Koeffizienten $d_{0,\mathbf{x}}$ für $g \in V_N^\varphi$ gegeben sowie die Koeffizienten $d_{l,\mathbf{x}}$ der Funktionen $h_l \in V_N^{\psi_l}$, $l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, bzw. jeweils deren Fourier-Transformierte $\hat{d}_{l,\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)$. Aus diesen Koeffizienten ergeben sich wie in den ersten beiden Summen aus (I.47) die Funktionen g und h_l , $l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1$, mit der gleichen Ersetzung durch die gewichteten Funktionen-Vektoren wie bei der Wavelet-Transformation. Aus der dritten Summe der gewichteten Vektoren sind die Koeffizienten d_y , $y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, gesucht. In Fourier-Koeffizienten lauten die Zusammenhänge, dass für alle $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ gilt

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{z}}(g) &= \hat{d}_{0,\mathbf{k}} c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{z}}(\varphi) \\ c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{z}}(h_l) &= \hat{d}_{l,\mathbf{k}} c_{\mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{z}}(\psi_l), \quad l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\varphi) &= \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\xi) \\ c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\psi_l) &= \hat{b}_{l,\mathbf{h}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\xi), \quad l = 1, \dots, |\det \mathbf{J}| - 1. \end{aligned}$$

I.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

Es folgt mit $c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f) = \hat{d}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\xi)$ und $f = g + \sum_{l=1}^{|\det \mathbf{J}| - 1} h_l$, dass

$$\hat{d}_{\mathbf{h}} = d_{0,\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{N}^T \mathbf{g}} + \sum_{l=1}^{|\det \mathbf{J}| - 1} \hat{d}_{l,\mathbf{k}} \hat{b}_{l,\mathbf{k}+\mathbf{N}^T \mathbf{g}}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T),$$

ist, wobei $\mathbf{h} = \mathbf{k} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}$, $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)$, $\mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T)$, die eindeutige Zerlegung nach Lemma I.5 ist.

Die dyadische Multiskalen-Analyse

Definition I.32 (Dyadische Multiskalen-Analyse).

Eine Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ aus Definition I.24 heißt *dyadisch*, falls

$$|\det \mathbf{J}_k| = 2, \quad \text{für alle } k > 0.$$

Dann ist insbesondere $\dim V_j = 2^j$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist das Element $\mathbf{g}_k \in \mathcal{G}(\mathbf{J}_k^T)$, $\mathbf{g}_k \neq 0$, eindeutig, da jede erzeugende Menge $\mathcal{G}(\mathbf{J}_k^T)$ aus zwei Elementen besteht. Zu jedem Skalierungsraum $V_{\mathbf{M}_j}^{\varphi_j}$ gehört genau ein Wavelet-Raum $V_{\mathbf{M}_j}^{\psi_j}$ mit $\psi_j = \psi_{j,1}$ wie in Definition I.29. Für eine dyadische Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ liefert das folgende Lemma einen Konstruktionsansatz der dazugehörigen Wavelets ψ_j . Der Beweis findet sich in [29, Lemma 4.3].

Lemma I.33 (Konstruktion dyadischer Wavelets).

Gegeben sei eine dyadische Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ und für einen Zerlegeschritt die Notation von S. 41, insbesondere diejenige aus (I.47) für φ und ξ , dass

$$c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\varphi) = \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\xi), \quad \text{für alle } \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d,$$

gilt. Dann ist der von einer Funktion $\psi \in V_{\mathbf{M}}^\xi$ erzeugte \mathbf{N} -invariante Raum $V_{\mathbf{N}}^\psi$ genau dann das orthogonale Komplement von $V_{\mathbf{N}}^\varphi$ in $V_{\mathbf{M}}^\xi$, falls Koeffizienten $\sigma_{\mathbf{h}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, mit

$$\sigma_{\mathbf{h}} = -\sigma_{\mathbf{h}+\mathbf{N}^T \mathbf{g}}, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{I.52}$$

existieren, so dass

$$c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\psi) = \frac{\sigma_{\mathbf{h}} \overline{\hat{a}_{\mathbf{h}+\mathbf{N}^T \mathbf{g}}}}{\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{k}}(\xi)|^2} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\xi), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d, \quad (I.53)$$

gilt.

Für die Konstruktion eines Wavelets ψ sind die Werte $\sigma_{\mathbf{h}}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)$, frei wählbar, aus denen sich dann mittels $\sigma_{\mathbf{k}} = -\sigma_{\mathbf{h}}$, $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T) \setminus \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)$, mit $\mathbf{h} \equiv \mathbf{k} \pmod{\mathbf{N}^T}$, also $\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{N}^T \mathbf{g}$, $\mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$, die restlichen Koeffizienten ergeben.

Das folgende Theorem charakterisiert die Koeffizienten $\sigma_{\mathbf{h}}$ zusätzlich dahingehend, wann aus der Wahl dieser Koeffizienten eine Orthonormalbasis für den dazugehörigen Wavelet-Raum entsteht. Dadurch ist es insbesondere möglich, in der Konstruktion der Wavelets aufbauend auf den Koeffizienten $\hat{a}_{\mathbf{h}}$ aus Gleichung (I.47) die Koeffizienten $\hat{b}_{\mathbf{h}}$ einer Orthonormalbasis zu bestimmen. Dies wird in dieser Form hier erstmals genannt und bewiesen.

Theorem I.34.

Gegeben sei eine dyadische Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_k\}_{k>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ und für Funktionen φ, ξ, ψ wie in Lemma I.33 seien $\sigma_{\mathbf{h}}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, gegeben, die (I.52) erfüllen. Die Translate $T_y \xi$, $y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, und $T_x \varphi$, $x \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, seien orthonormale Basen in den Räumen V_M^ξ und V_N^φ .

Dann sind die Translate $T_x \psi$, $x \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, genau dann orthonormal, wenn

$$|\sigma_{\mathbf{h}}| = \frac{1}{m} \quad \text{für alle } \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T) \text{ gilt.}$$

Beweis. Nach (I.53) gilt mit $c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\psi) := \hat{b}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{z}}(\xi)$ und der Orthonormalität der Translate $T_y \xi$, $y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, dass

$$\hat{b}_{\mathbf{h}} = \frac{\sigma_{\mathbf{h}} \overline{\hat{a}_{\mathbf{h}+\mathbf{N}^T \mathbf{g}}}}{\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T \mathbf{k}}(\xi)|^2} = m \sigma_{\mathbf{h}} \overline{\hat{a}_{\mathbf{h}+\mathbf{N}^T \mathbf{g}}}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T).$$

Sei $\mathbf{g} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Die Translate $T_y \psi$, $y \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, sind nach Lemma I.30 b) genau dann orthonormal, wenn für alle $\mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{N}^T)$ gilt

$$2 = |\hat{b}_{\mathbf{k}}|^2 + |\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{N}^T \mathbf{g}}|^2 = m^2 |\sigma_{\mathbf{k}}|^2 (|\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{N}^T \mathbf{g}}|^2 + |\hat{a}_{\mathbf{k}}|^2) = 2m^2 |\sigma_{\mathbf{k}}|^2. \quad \square$$

I.5 Die anisotrope periodische Multiskalen-Analyse

Sind die Skalierungsräume $V_j, j \geq 0$, durch orthonormale Translate von Skalierungsfunktionen φ_j gegeben, lassen sich also aus deren Koeffizienten direkt Wavelets $\psi_j, j > 0$, erzeugen, deren Translate $T_x \psi_j, x \in \mathcal{P}(N)$, eine orthonormale Basis des Raumes W_j bilden und die der Zerlegung (I.45) genügen. Dabei verbleiben mit der einen Hälfte der Koeffizienten, etwa $\sigma_k \in \mathbb{C}, k \in \mathcal{G}(M_{j-1}^T)$, selbst dann noch viele Freiheitsgrade, wenn eine orthonormale Basis erzeugt werden soll, also der Betrag dieser Koeffizienten auf $\frac{1}{m_j}$ festgelegt ist.

2

Approximation durch Interpolation

Die Approximation einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch äquidistante Translate $T_n\varphi$, $n \in \mathcal{P}(N)$, $N \in \mathbb{N}$, einer zweiten Funktion φ geht im Falle der B-Splines zurück auf Arbeiten von I. J. Schönberg, siehe etwa die Monographie [49]. Dabei wird die Funktion f so durch die Translate angenähert, dass sie an ebenso äquidistanten Knoten mit der gewichteten Summe $L_N f$ der Translate übereinstimmt. Es entsteht das sogenannte Interpolations-Problem, dessen Lösbarkeit lediglich von φ und ebendiesen Knoten abhängt. Seit dem Beginn der 1980er Jahre wurde die periodische Interpolation durch Translate betrachtet [14, 30] und die Lösbarkeit des Interpolations-Problems sowie Fehlerabschätzungen $\|L_N f - f\|$ studiert.

Bereits in [49] beschreibt ein Absatz mehrdimensionale Räume von Translates einer Funktion φ auf einem Tensorprodukt-Gitter, also auf dem in jeder Dimension um einen Faktor N_i^{-1} , $N_i \in \mathbb{N}$, gestauchten \mathbb{Z}^d . Dies wird in [23] für die Interpolation genauer untersucht. Die Betrachtung des Interpolationsfehlers wurde durch Einführung der periodischen Strang-Fix-Bedingungen in [46] vereinfacht, die für verschiedene Tensorprodukt-Gitter zur Fehlerabschätzung genutzt wurden [47, 51, 55, 56]. Von besonderer Bedeutung ist dabei, wie groß der Fehler dieser Approximation durch Translate zu f ist, wenn sowohl f als auch φ bestimmte Eigenschaften erfüllen. Ist f etwa in einer gewissen Richtung sehr glatt und ändert sich entlang dieser Richtung wenig, so enthält die Richtung in gewissem Sinne wenige Informationen. Entlang dieser Richtung ist es somit für φ eventuell möglich, die Funktion ebenso glatt zu wählen und dabei mit nur wenigen Translates eine gute Näherung für f zu erhalten.

In diesem Kapitel werden zunächst die Interpolation auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$ einer regulären Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und die Lösbarkeit des dazugehörigen Interpolations-Problems betrachtet. Die Angabe des Problems in den Fourier-Koeffizienten $c_k(f)$, $c_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}^d$, der abgetasteten Funktion f und der approximierenden Funktion φ führt

zu einer Existenzbedingung des Fundamentalinterpolanten $I_M \in V_M^\varphi$ im Raum der Translate $T_y\varphi, y \in \mathcal{P}(M)$. Existiert der Fundamentalinterpolant, so lässt sich das Interpolations-Problem mit einem schnellen Algorithmus lösen, der linear in der Anzahl Abtastpunkte, den Musterpunkten $2\pi y, y \in \mathcal{P}(M)$, ist. Schließlich werden die von [46] definierten und in [55] erweiterten periodischen Strang-Fix-Bedingungen auf diesen Fall übertragen. Erfüllt die Funktion φ diese Eigenschaften, so lassen sich die bekannten Resultate für den Interpolationsfehler in Sobolev-Räumen auf die anisotropen Sobolev-Räume $A_{M,q}^\beta(\mathbb{T}^d)$ aus Abschnitt I.2 übertragen.

2.1 Das Interpolations-Problem

Gegeben sei der Raum der Translate V_M^φ einer Funktion φ . Das *Interpolations-Problem* besteht darin, für eine Funktion f die eindeutige Funktion $\psi \in V_M^\varphi$ zu finden, die

$$f(2\pi y) = \psi(2\pi y), \quad y \in \mathcal{P}(M),$$

erfüllt. Dabei muss die Funktion f mindestens an den Musterpunkten auswertbar sein, d. h. die Werte $f(2\pi y), y \in \mathcal{P}(M)$, müssen existieren. Für die Berechnung der Funktion ψ , genauer die Bestimmung der Koeffizienten $a_y, y \in \mathcal{P}(M)$, die $\psi \in V_M^\varphi$ beschreiben, entsteht dann ein lineares Gleichungssystem. Ein hilfreiches Werkzeug in Hinsicht auf die Projektion in translationsinvariante Räume durch Interpolation und somit zur Lösung des Gleichungssystems ist der Fundamentalinterpolant.

Definition 2.1.

Gegeben sei eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und eine Funktion φ . Eine Funktion $I_M \in V_M^\varphi$ heißt *Fundamentalinterpolant* oder *Lagrange-Funktion* für das Muster $\mathcal{P}(M)$, falls

$$I_M(2\pi y) = \delta_{0,y}^{E_d} = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \equiv 0 \pmod{E_d}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}, \quad y \in \mathcal{P}(M). \quad (2.1)$$

Das folgende Lemma charakterisiert den Raum V_M^φ dahingehend, wann ein Fundamentalinterpolant $I_M \in V_M^\varphi$ in diesem Raum existiert und verallgemeinert so Lemma I.3 aus [46].

2.1 Das Interpolations-Problem

Lemma 2.2.

Gegeben sei eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und eine Funktion $\varphi \in A(\mathbb{T}^d)$. Dann existiert ein Fundamentalinterpolant $I_M \in V_M^\varphi$ genau dann, wenn

$$c_h^M(\varphi) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{h+M^T z}(\varphi) \neq 0, \quad \text{für alle } h \in \mathcal{G}(M^T). \quad (2.2)$$

Existiert ein Fundamentalinterpolant $I_M \in V_M^\varphi$, so ist er eindeutig bestimmt.

Beweis. Angenommen, ein Fundamentalinterpolant existiert. Dann gilt nach Lemma I.23 e), dass ein Vektor $a = (a_h)_{h \in \mathcal{G}(M)}$ mit diskreter Fourier-Transformation $\hat{a} = \sqrt{m} \mathcal{F}(M)a$ existiert, so dass

$$c_{h+M^T z}(I_M) = \hat{a}_h c_{h+M^T z}(\varphi), \quad h \in \mathcal{G}(M^T), \quad z \in \mathbb{Z}^d.$$

Es gilt für $h \in \mathcal{G}(M^T)$

$$c_h^M(I_M) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{h+M^T z}(I_M) = \hat{a}_h \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{h+M^T z}(\varphi) = \hat{a}_h c_h^M(\varphi). \quad (2.3)$$

Andererseits erfüllt der Fundamentalinterpolant I_M per Definition die Gleichung (2.1), so dass sich mit der diskreten Fourier-Transformation, vgl. (I.17), und der Aliasing-Formel aus Lemma I.17

$$c_h^M(I_M) = \frac{1}{m} \quad (2.4)$$

ergibt und somit aus (2.3) die Gleichung (2.2) folgt.

Angenommen (2.2) ist erfüllt und sei die Funktion g gegeben durch die Fourier-Koeffizienten

$$c_k(g) = \frac{c_k(\varphi)}{m c_k^M(\varphi)}, \quad k \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.5)$$

Dann ist mit $\hat{a}_h = (m c_h^M(\varphi))^{-1}, h \in \mathcal{G}(M^T), g \in V_M^\varphi$, erfüllt. Die diskreten Fourier-Koeffizienten $c_h^M(g)$ genügen der Gleichung (2.4) und somit ist g ein Fundamentalinterpolant zum Muster $\mathcal{P}(M)$. Existiert ein Fundamentalinterpolant I_M , so ergibt sich aus Gleichung (2.5) auch die Eindeutigkeit. \square

Die Faktoren $(mc_k^M(\varphi))^{-1}$, welche in der Umrechnung der Funktion φ in ihren Fundamentalinterpolanten I_M vorkommen, werden Abmilderungsfaktoren, im Englischen attenuation factors, genannt und wurden im Mehrdimensionalen auf Tensorprodukt-Gittern in [23, 58] betrachtet. Unter den Existenzbedingungen des Fundamentalinterpolanten lässt sich nun eine auf den Musterpunkten gegebene Funktion durch Interpolation approximieren.

Definition 2.3 (Interpolationsoperator).

Gegeben sei eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und ein Fundamentalinterpolant I_M . Der *Interpolationsoperator* L_M ist für jede auf den Musterpunkten $2\pi y, y \in \mathcal{P}(M)$, des Torus \mathbb{T}^d auswertbare Funktion f gegeben durch

$$L_M f := \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} f(2\pi y) T_y I_M.$$

Ist $f \in A(\mathbb{T}^d)$, so gilt mit dem gleichen Ansatz wie in Lemma 2.2 für die Fourier-Koeffizienten der interpolierenden Funktion

$$c_k(L_M f) = m \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c_{k+M^T z}(f) \right) c_k(I_M) = mc_k^M(f) c_k(I_M).$$

Es bezeichne

$$\mathcal{T}_M := \left\{ f ; f = \sum_{h \in \mathcal{G}(M^T)} a_h e^{ih^T \circ}, \quad a_h \in \mathbb{C} \right\}$$

den Raum aller trigonometrischen Polynome f , deren Fourier-Koeffizienten $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}^d$, lediglich auf der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M^T)$ von 0 verschieden sind. Die Fourier-Summe $S_M f$ zur Matrix M ist für ein $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ definiert durch

$$S_M f := \sum_{k \in \mathcal{G}(M^T)} c_k(f) e^{ik^T \circ} \in \mathcal{T}_M.$$

2.2 Die elliptischen Strang-Fix-Bedingungen

Die Strang-Fix-Bedingungen [60] charakterisieren für einen translationsinsvarianten Raum auf der reellen Achse dessen Approximationsgüte. Anstelle der dort verwendeten Rekonstruktion von Polynomen, wurden in [46] ausgehend von trigonometri-

2.3 Der Interpolationsfehler $\|f - L_M f\|$

schen Polynomen Strang-Fix-Bedingungen für den d -dimensionalen Torus und $\alpha = 1$ eingeführt und in [55] auf $\alpha \geq 0$ übertragen. Die Bedingungen charakterisieren die Güte der Approximation eines translationsinvarianten Raumes V durch das Reproduktionsvermögen eines Interpolationsoperators I_M . Die Menge der dabei betrachteten trigonometrischen Polynome entspricht in beiden Ausarbeitungen dem Fall \mathcal{T}_M , $M = \text{diag}(N, \dots, N)$, $N \in \mathbb{N}$. In Analogie zur elliptischen Gewichtsfunktion aus Definition 1.13 ergibt sich eine synonyme Namensgebung für die folgende

Definition 2.4 (Elliptische Strang-Fix-Bedingungen).

Gegeben sei eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ erfüllt die (*periodisch-elliptischen Strang-Fix-Bedingungen*) der Ordnung $s > 0$ zu $q \geq 1$ und einem $\alpha \in \mathbb{R}^+$, falls eine nichtnegative Folge $b = \{b_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{R}_0^+$ existiert, so dass für alle $k \in \mathcal{G}(M^T)$, $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, gilt

$$a) |1 - mc_k(f)| \leq b_0 \|M^{-T}k\|_2^s,$$

$$b) |mc_{k+M^Tz}(f)| \leq \frac{b_z}{\|M\|_2^\alpha} \|M^{-T}k\|_2^s$$

und

$$c) \gamma_{SF} := \|\{\sigma_\alpha^M(z)b_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d} \mid \ell_q(\mathbb{Z}^d)\| < \infty.$$

Für die hier betrachteten regulären Matrizen ist die Konditionszahl κ_M endlich, da das Produkt der Singulärwerte $\lambda_i(M^T M)$, $i = 1, \dots, d$, der Matrix M gerade der Determinante entspricht. Es gilt wegen $s > 0$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}^d$, dass

$$\|k\|_2^s = \|M^T M^{-T} k\|_2^s \leq \|M\|_2^s \|M^{-T} k\|_2^s \leq (1 + \|M\|_2^2 \|M^{-T} k\|_2^2)^{s/2} = \sigma_s^M(k). \quad (2.6)$$

2.3 Der Interpolationsfehler $\|f - L_M f\|$

Im folgenden Abschnitt wird der Interpolationsfehler $\|f - L_M f\|$ in unterschiedlichen Räumen betrachtet und eine obere Schranke angegeben, wenn sowohl die Funktion f als auch der zur Interpolation gehörige Fundamentalinterpolant I_M gewisse Glattheitseigenschaften erfüllen. Zunächst werden in den Theoremen 2.5, 2.6 und 2.7 Ter-

me betrachtet, die zur Gesamtabschätzung in Theorem 2.9 verwendet werden. Für eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ bezeichne

$$\kappa_M := \sqrt{\frac{\lambda_d(M^T M)}{\lambda_1(M^T M)}}$$

die Konditionszahl der Matrix M .

Interpolationsfehler bei trigonometrischen Polynomen

Theorem 2.5.

Sei $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ eine reguläre Matrix mit $\|M\|_2 \geq 2$, $f \in \mathcal{T}_M$ ein trigonometrisches Polynom auf der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M^T)$ und $I_M \in L_1(\mathbb{T}^d)$ ein Fundamentalinterpolant, der die elliptischen Strang-Fix-Bedingungen für feste Werte $s, q, \alpha > 0$ erfüllt. Dann gilt

$$\|f - L_M f| A_{M,q}^\alpha\| \leq \left(\frac{\kappa_M}{\|M\|_2} \right)^s \gamma_{SF} \|f| A_{M,q}^{\alpha+s}\|.$$

Beweis. Es gilt aufgrund der Aliasing-Formel und wegen $f \in \mathcal{T}_M$ für beliebiges $h \in \mathcal{G}(M^T)$, dass $c_h(L_M f) = mc_h^M(f)c_h(I_M) = mc_h(f)c_h(I_M)$, und somit folgt für den Approximationsfehler

$$\|f - L_M f| A_{M,q}^\alpha\| = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (c_k(f) - mc_k^M(f)c_k(I_M)) e^{ik^T \circ} |A_{M,q}^\alpha| \right\|.$$

Mit der Zerlegung $k = h + M^T z$, $h \in \mathcal{G}(M^T)$, $z \in \mathbb{Z}^d$, gilt

$$\begin{aligned} & \|f - L_M f| A_{M,q}^\alpha\| \\ &= \left\| \sum_{h \in \mathcal{G}(M^T)} \left(c_h(f) - mc_h^M(f)c_h(I_M) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} c_{h+M^T z}^M(f) mc_{h+M^T z}(I_M) e^{iz^T M \circ} \right) e^{ih^T \circ} |A_{M,q}^\alpha| \right\| \\ &= \left\| \sum_{h \in \mathcal{G}(M^T)} c_h(f) e^{ih^T \circ} \left((1 - mc_h(I_M)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} mc_{h+M^T z}(I_M) e^{iM^T z \circ} \right) |A_{M,q}^\alpha| \right\|. \end{aligned}$$

2.3 Der Interpolationsfehler $\|f - L_M f\|$

Durch Anwenden der Norm in $A_{M,q}^\alpha(\mathbb{T}^d)$ gilt weiter

$$\begin{aligned} & \left\| f - L_M f \Big| A_{M,q}^\alpha \right\|^q \\ &= \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} |c_{\mathbf{h}}(f)|^q \left(|(1 - mc_{\mathbf{h}}(I_M))\sigma_\alpha^M(\mathbf{h})|^q \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} |mc_{\mathbf{h} + M^T \mathbf{z}}(I_M)|\sigma_\alpha^M(\mathbf{h} + M^T \mathbf{z}) \right). \end{aligned}$$

Dies lässt sich mit den elliptischen Strang-Fix-Bedingungen von I_M und den Gleichungen (1.16) und (2.6) abschätzen

$$\begin{aligned} & \left\| f - L_M f \Big| A_{M,q}^\alpha \right\|^q \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} \|M^{-T} \mathbf{h}\|_2^{sq} |\sigma_\alpha^M(\mathbf{h}) c_{\mathbf{h}}(f)|^q \right) \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} (\sigma_\alpha^M(\mathbf{z}) b_{\mathbf{z}})^q \right) \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} \|M^{-T}\|_2^{sq} \|\mathbf{h}\|_2^{sq} |\sigma_\alpha^M(\mathbf{h}) c_{\mathbf{h}}(f)|^q \right) \gamma_{SF}^q \\ &\leq \gamma_{SF}^q \kappa_M^{sq} \|M\|_2^{-sq} \|f \Big| A_{M,q}^{\alpha+s}\|^q. \end{aligned}$$

□

Approximation durch trigonometrische Polynome

Theorem 2.6.

Sei $f \in A_{M,q}^\mu(\mathbb{T}^d)$ gegeben mit $q \geq 1$ und $\mu \geq \alpha \geq 0$. Dann gilt

$$\|f - S_M f \Big| A_{M,q}^\alpha\| \leq \left(\frac{2}{\|M\|_2} \right)^{\mu-\alpha} \|f \Big| A_{M,q}^\mu\|.$$

Beweis. Es gilt

$$\|f - S_M f \Big| A_{M,q}^\alpha\| = \left\| \{\sigma_\alpha^M(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{G}(M^T)} \Big| \ell_q(\mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{G}(M^T)) \right\|$$

und somit mit $\sigma_\alpha^M(\mathbf{k}) = \sigma_{\alpha-\mu}^M(\mathbf{k}) \sigma_\mu^M(\mathbf{k})$

$$\|f - S_M f \Big| A_{M,q}^\alpha\| \leq \max_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{G}(M^T)} \sigma_{\alpha-\mu}^M(\mathbf{k}) \|f \Big| A_{M,q}^\mu\|.$$

Das Maximum lässt sich genauer bestimmen, denn nach Voraussetzung ist $\alpha - \mu \leq 0$ und für $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{G}(M^T)$ existiert die eindeutige Zerlegung $\mathbf{k} = \mathbf{h} + M^T \mathbf{z}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)$,

$\mathbf{0} \neq \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$. Keiner dieser Punkte, über die das Maximum gebildet wird, liegt innerhalb des Parallelotops $\mathbf{M}^T \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d$, sondern alle liegen außerhalb oder auf dem Ellipsoid, das entsteht, wenn man den Kreis mit Radius $\frac{1}{2\|\mathbf{M}\|_2}$ mit der Matrix \mathbf{M}^T abbildet. Die Punkte $\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{M}^T \mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, d$, liegen exakt auf diesem Ellipsoid und bilden daher insgesamt die Menge der möglichen Maxima.

$$\begin{aligned}
 \max_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \sigma_{\alpha-\mu}^{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) &= \max_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} (1 + \|\mathbf{M}\|_2^2 \|\mathbf{M}^{-T} \mathbf{k}\|_2^2)^{\frac{\alpha-\mu}{2}} \\
 &\leq \max_{j \in \{1, \dots, d\}} (1 + \|\mathbf{M}\|_2^2 \|\mathbf{M}^{-T} \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{e}_j\|_2^2)^{\frac{\alpha-\mu}{2}} \\
 &= \max_{j \in \{1, \dots, d\}} \left(1 + \frac{\|\mathbf{M}\|_2^2}{4} \|\mathbf{e}_j\|_2^2 \right)^{\frac{\alpha-\mu}{2}} \\
 &\leq \left(\frac{\|\mathbf{M}\|_2^2}{4} \right)^{\frac{\alpha-\mu}{2}} \\
 &= \left(\frac{\|\mathbf{M}\|_2}{2} \right)^{\alpha-\mu}.
 \end{aligned}$$

□

Für das folgende Theorem sei der Vektor der Beträge mit $|\mathbf{z}| := (|z_1|, \dots, |z_d|)^T$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$, bezeichnet.

Theorem 2.7.

Gegeben seien eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit $\|\mathbf{M}\|_2 > 1$ und eine Funktion $f \in A_{\mathbf{M}, q}^\mu(\mathbb{T}^d)$ mit $q \geq 1$, $\mu \geq \alpha \geq 0$ und $\mu > d(1 - 1/q)$. Für den Fundamentalinterpolanten $I_{\mathbf{M}}$ sei

$$\gamma_{\text{IP}} := m \begin{cases} \max_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \left(|c_{\mathbf{h}}(I_{\mathbf{M}})|^q + \|\mathbf{M}\|_2^{\alpha q} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} |\sigma_\alpha(\mathbf{z}) c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(I_{\mathbf{M}})|^q \right)^{1/q} & \text{falls } q < \infty, \\ \max_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \sup \{ |c_{\mathbf{h}}(I_{\mathbf{M}})|, \|\mathbf{M}\|_2^\alpha |\sigma_\alpha(\mathbf{z}) c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(I_{\mathbf{M}})|; \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\} \} & \text{falls } q = \infty \end{cases}$$

endlich. Dann gilt die Abschätzung

$$\| L_{\mathbf{M}}(f - S_{\mathbf{M}} f) \|_{A_{\mathbf{M}, q}^\alpha} \leq \gamma_{\text{IP}} \gamma_{\text{Sm}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^{\mu-\alpha} \| f \|_{A_{\mathbf{M}, q}^\mu}$$

2.3 Der Interpolationsfehler $\|f - L_M f\|$

mit

$$\gamma_{Sm} := (1+d)^{\alpha/2} 2^{-\mu} \begin{cases} \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \|2|\mathbf{z}| - 1\|_2^{-p\mu} \right)^{1/p} & \text{für } q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \|2|\mathbf{z}| - 1\|_2^{-\mu} & \text{für } q = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Bemerkung 2.8.

Während γ_{IP} lediglich vom gewählten Fundamentalinterpolanten I_M abhängt, ergibt sich γ_{Sm} eindeutig aus q und der Glattheitsordnung μ der Funktion f , ist jedoch insbesondere unabhängig von der Funktion f und der Matrix M . Mit den Voraussetzungen an μ ist γ_{Sm} stets endlich.

Beweis des Theorems 2.7. Im Folgenden wird der Beweis für den Fall $q < \infty$ geführt. Für den Fall $q = \infty$ folgt der Beweis analog. Die Betrachtung der Norm ergibt

$$\begin{aligned} \|L_M(f - S_M f)|A_{M,q}^\alpha\|^q &= \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \sigma_\alpha^M(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}(L_M(f - S_M f)) e^{i\mathbf{k}^T \circ} |A_{M,q}^\alpha| \right\|^q \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\sigma_\alpha^M(\mathbf{k}) m c_{\mathbf{k}}^M(f - S_M f) c_{\mathbf{k}}(I_M)|^q. \end{aligned}$$

Durch Aufteilen der Summe in $\mathbf{k} = \mathbf{h} + M^T \mathbf{z}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$, und mit Gleichung (1.16) gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\|L_M(f - S_M f)|A_{M,q}^\alpha\|^q \\ &\leq \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} |\sigma_\alpha^M(\mathbf{h}) m c_{\mathbf{h}}^M(f - S_M f)|^q \\ &\quad \times \left(|c_{\mathbf{h}}(I_M)|^q + \|M\|_2^{\alpha q} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} |\sigma_\alpha^M(\mathbf{z}) c_{\mathbf{h}+M^T \mathbf{z}}(I_M)|^q \right) \\ &\leq \gamma_{IP}^q \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} |\sigma_\alpha^M(\mathbf{h}) c_{\mathbf{h}}^M(f - S_M f)|^q. \end{aligned}$$

Zur Behandlung der verbleibenden Summe wird zunächst die Definition der Bracket-Summe angewandt. Anschließend folgt mit der Hölder-Ungleichung angewandt auf die Form $c_{\mathbf{k}}(f) = \sigma_{\mu}^{\mathbf{M}}(\mathbf{k})\sigma_{-\mu}^{\mathbf{M}}(\mathbf{k})c_{\mathbf{k}}(f) \cdot 1$ für $1 < q < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$, dass

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} |\sigma_{\alpha}^{\mathbf{M}}(\mathbf{h})c_{\mathbf{h}}^{\mathbf{M}}(f - S_{\mathbf{M}}f)|^q \\ &= \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \sigma_{\alpha q}^{\mathbf{M}}(\mathbf{h}) \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)| \right)^q \\ &\leq \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \sigma_{\alpha q}^{\mathbf{M}}(\mathbf{h}) \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \sigma_{-\mu p}^{\mathbf{M}}(\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}) \right)^{q/p} \\ &\quad \times \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} |\sigma_{\mu}^{\mathbf{M}}(\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z})c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)|^q \right). \end{aligned}$$

Die Summe im mittleren Faktor konvergiert aufgrund der Voraussetzung, dass $p\mu > d$ ist. Genauer folgt analog zur Abschätzung im Beweis zu Theorem 2.6 für beliebiges $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \sigma_{-\mu p}^{\mathbf{M}}(\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}) &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} (1 + \|\mathbf{M}\|_2^2 \|\mathbf{M}^{-T}(\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z})\|_2^2)^{-p\mu/2} \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} (1 + \|\mathbf{M}\|_2^2 \|\mathbf{M}^{-T}\mathbf{h} + \mathbf{z}\|_2^2)^{-p\mu/2} \\ &\leq \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} (1 + \|\mathbf{M}\|_2^2 \||\mathbf{z}| - \frac{1}{2}\mathbf{1}\|_2^2)^{-p\mu/2} \\ &\leq \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(\frac{\|\mathbf{M}\|_2^2}{4} \|2|\mathbf{z}| - \mathbf{1}\|_2^2 \right)^{-p\mu/2} \\ &= \|\mathbf{M}\|_2^{-p\mu} 2^{-p\mu} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \|2|\mathbf{z}| - \mathbf{1}\|_2^{-p\mu}. \end{aligned}$$

2.3 Der Interpolationsfehler $\|f - L_M f\|$

Außerdem lässt sich auch für den letzten Faktor folgende Abschätzung angeben, so dass insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} |\sigma_\alpha^M(\mathbf{h}) c_\mathbf{h}^M(f - S_M f)|^q \\
& \leq \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} \sigma_{q\alpha}^M(\mathbf{h}) \|M\|_2^{-q\mu} 2^{-q\mu} \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \||2\mathbf{z}| - 1\|^{-p\mu} \right)^{q/p} \\
& \quad \times \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} |\sigma_\mu^M(\mathbf{h} + M^T \mathbf{z}) c_{\mathbf{h} + M^T \mathbf{z}}(f)|^q \right) \\
& \leq \|M\|_2^{-q\mu} 2^{-q\mu} \left(\max_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} \sigma_{q\alpha}^M(\mathbf{h}) \right) \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \||2\mathbf{z}| - 1\|^{-p\mu} \right)^{q/p} \\
& \quad \times \left(\sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} |\sigma_\mu^M(\mathbf{h} + M^T \mathbf{z}) c_{\mathbf{h} + M^T \mathbf{z}}(f)|^q \right) \\
& \leq \|M\|_2^{q\alpha} \gamma_{Sm}^q \|M\|_2^{-q\mu} \|f| A_{M,q}^\mu\|^q.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, denn für $\alpha \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\max_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(M^T)} \sigma_\alpha^M(\mathbf{h}) & \leq (1 + \|M\|_2^2 \|M^{-T} M^T \frac{1}{2} \mathbf{1}\|_2^2)^{\alpha/2} \\
& = \left(1 + \|M\|_2^2 \frac{d}{4} \right)^{\alpha/2} \\
& \leq \|M\|_2^\alpha (1 + d)^{\alpha/2}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

□

Allgemeine Approximation durch Interpolation

Mit den Theoremen 2.5, 2.6 und 2.7 lässt sich nun für die allgemeine Approximation folgende Abschätzung angeben. Es gilt für ein $f \in A_{M,q}^\mu$ mit der Dreiecksungleichung in der jeweiligen Norm des Raumes

$$\begin{aligned}
\|f - L_M f\| & = \|f - S_M f + S_M f - L_M S_M f + L_M S_M f - L_M f\| \\
& \leq \|S_M f - L_M S_M f\| + \|f - S_M f\| + \|L_M(f - S_M f)\|
\end{aligned}$$

und somit folgendes

Theorem 2.9.

Gegeben sei eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit $\|\mathbf{M}\|_2 \geq 2$, eine Funktion $f \in A_{\mathbf{M}, q}^\mu(\mathbb{T}^d)$ mit $q \geq 1$, $\mu \geq \alpha \geq 0$ und $\mu > d(1 - 1/q)$ und ein Fundamentalinterpolant $I_{\mathbf{M}}$, der die periodischen elliptischen Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung s für q, α erfüllt. Dann gilt mit $\rho = \min\{s, \mu - \alpha\}$

$$\|f - L_{\mathbf{M}} f|A_{\mathbf{M}, q}^\alpha\| \leq C_\rho \left(\frac{\kappa_{\mathbf{M}}}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^\rho \|f|A_{\mathbf{M}, q}^\mu\|$$

mit

$$C_\rho := \begin{cases} \gamma_{\text{SF}} + 2 + \gamma_{\text{IP}} \gamma_{\text{Sm}} & \text{falls } \rho = s, \\ (1+d)^{s+\alpha-\mu} \gamma_{\text{SF}} + 2 + \gamma_{\text{IP}} \gamma_{\text{Sm}} & \text{falls } \rho = \mu - \alpha. \end{cases}$$

Beweis. Für $\rho = s$ lassen sich wegen $\kappa_{\mathbf{M}} \geq 1$ und

$$\|f|A_{\mathbf{M}, q}^{\alpha+s}\| \leq \|f|A_{\mathbf{M}, q}^\mu\|$$

die Theoreme 2.5, 2.6 und 2.7 direkt anwenden.

Ist $\rho = \mu - \alpha$, so ist anstelle des Theorems 2.5 eine Aussage in der Norm bezüglich μ notwendig. Mit ebendiesem Theorem und der Abschätzung in Gleichung (2.8) gilt

$$\begin{aligned} & \|S_{\mathbf{M}} f - L_{\mathbf{M}} S_{\mathbf{M}} f|A_{\mathbf{M}, q}^\alpha(\mathbb{T}^d)\| \\ & \leq \gamma_{\text{SF}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^s \left\| \{\sigma_{\alpha+s}^{\mathbf{M}}(\mathbf{h}) c_{\mathbf{h}}(f)\}_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \middle| \ell_q(\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)) \right\| \\ & \leq \gamma_{\text{SF}} \max_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \sigma_{\alpha+s-\mu}(\mathbf{h}) \left(\frac{1}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^s \left\| \{\sigma_\mu^{\mathbf{M}}(\mathbf{h}) c_{\mathbf{h}}(f)\}_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} \middle| \ell_q(\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)) \right\| \\ & \leq \gamma_{\text{SF}} (1+d)^{s+\alpha-\mu} \|\mathbf{M}\|^{s+\alpha-\mu} \left(\frac{1}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^s \|f|A_{\mathbf{M}, q}^\mu\|. \end{aligned} \quad \square$$

3

Die schnelle diskrete Fourier- und Wavelet-Transformation

Um eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ auf dem Torus durch ihre Fourier-Reihe zu beschreiben, sind unendlich viele Fourier-Koeffizienten $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}^d$, notwendig. Mit Hilfe der Interpolation aus Kapitel 2 kann f durch endlich viele Translate, deren Anzahl durch den Betrag der Determinante $m = |\det M|$ einer regulären „Sampling-Matrix“ M charakterisiert ist, approximiert werden. Dazu ist es notwendig, die diskrete Fourier-Transformation aus Definition 1.18 effizient zu berechnen. Im eindimensionalen Fall bildet der Cooley-Tukey-Algorithmus [10] die Grundlage für die schnelle Berechnung. Für ein diskretes Signal der Länge n , also die äquidistant auf $[-\pi, \pi)$ verteilten Punkte x_0, \dots, x_{n-1} , ist die Fourier-Transformation in $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritten berechenbar. Analog lässt sich diese Berechnung auf den d -dimensionalen Fall übertragen, beschrieben durch den sogenannten Row-Column-Algorithmus [16].

Dieses Kapitel basiert auf den in [2] präsentierten Resultaten, die hier jedoch für allgemeine biorthogonale Basen betrachtet werden. Im ersten Abschnitt werden die in einem Muster $\mathcal{P}(M)$ vorliegenden Richtungen charakterisiert, insbesondere, wie diese sich bei der Einschränkung auf Teilmuster $\mathcal{P}(N)$, $M = JN$, verändern. Dazu werden Basen für die Muster eingeführt, welche auf der Smith-Normalform aufbauen. Im zweiten Abschnitt wird ein verallgemeinerter Row-Column-Algorithmus für die Fourier-Transformation auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$ vorgestellt. Dessen Laufzeit entspricht der eindimensionalen schnellen Fourier-Transformation, denn der Algorithmus lässt sich so implementieren, dass er eine Komplexität von $\mathcal{O}(m \log m)$ Rechenschritten hat. Das heißt, dass auch die anisotrope diskrete Fourier-Transformation effizient berechnet werden kann. Die Konstante in der Laufzeit hängt dabei nicht von der Dimension d der zugrundeliegenden Abtastpunkte ab, selbst im linearen Anteil des Algorith-

mus nicht. Zusätzlich wird auf die Möglichkeiten der Parallelisierung eingegangen, die im Gegensatz zum Eindimensionalen hier vielfältiger sind.

Die in Abschnitt 1.5 eingeführte Wavelet-Transformation ist mit einem ähnlichen Ansatz der Basen ebenso schnell implementierbar. Wie im Eindimensionalen lässt sich ein Algorithmus der Komplexität $\mathcal{O}(m)$ angeben, insbesondere ist auch hier die Komplexität der Transformation unabhängig von der Dimension d . Dazu wird zunächst eine Charakterisierung der Richtungen vorgenommen, die beschreibt, wie diese sich von einem Skalierungsraum zum nächstkleineren verändern.

3.1 Basen für Muster und erzeugende Menge

Für den Fall $d = 1$ ist sowohl für das Muster, etwa $\mathcal{P}_I(N) = \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$, als auch für die erzeugende Menge $\mathcal{G}_I(N) = \{0, 1, \dots, N-1\}$ eine natürliche Ordnung gegeben. Im Mehrdimensionalen ist dies nicht der Fall, schon für die Definition der Fourier-Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ in Gleichung (1.20) wird eine beliebig, aber fest gewählte Anordnung der Elemente beider Mengen $\mathcal{P}(\mathbf{M}), \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ vorausgesetzt.

Im diesem Abschnitt wird für das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ einer regulären Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ der Begriff der Basis eingeführt und mit dessen Hilfe eine Charakterisierung von Teilmustern angegeben. Analog ist dies auch für die erzeugende Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ möglich, indem die entsprechenden Formeln mit \mathbf{M} multipliziert werden. Der Abschnitt stellt abschließend für die erzeugende Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, also ausgehend vom Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M}^T)$ und der Multiplikation mit der Matrix \mathbf{M}^T , die wichtigsten Eigenschaften zusammen.

Definition 3.1 (Basis des Musters $\mathcal{P}(\mathbf{M})$).

Gegeben sei eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit den Elementarteilern $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ der Smith-Normalform aus (1.4) und

$$d_{\mathbf{M}} := |\{\varepsilon_i ; \varepsilon_i > 1, i = 1, \dots, d\}|.$$

Eine Menge $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_{\mathbf{M}}}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{M})$ heißt *Basis des Musters $\mathcal{P}(\mathbf{M})$* , falls

a) für alle $i = 1, \dots, d_{\mathbf{M}}$ gilt, dass

$$\min_{c \in \mathbb{N}} \{c ; c\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^d\} = \varepsilon_{d-d_{\mathbf{M}}+i}$$

und

b) die Vektoren $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_{\mathbf{M}}}$ linear unabhängig sind.

3.1 Basen für Muster und erzeugende Menge

Bemerkung 3.2.

Die Anordnung der Basisvektoren $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_M}$ ist nicht eindeutig. Existieren zwei identische Elementarteiler $\varepsilon_{d-d_M+i} = \varepsilon_{d-d_M+i+1} > 1$, so ist auch die Menge mit vertauschten $\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1}$ eine Basis des Musters $\mathcal{P}(\mathbf{M})$.

Die Anzahl d_M von nichttrivialen Elementarteilern heißt Dimension des Musters $\mathcal{P}(\mathbf{M})$. Die Dimension d_M ist identisch zum Begriff des Rangs des von $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_M}\}$ aufgespannten Gitters [54, S. 13].

Lemma 3.3.

Gegeben seien eine Basis $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_M}\}$ und zwei verschiedene Koeffizienten-Vektoren $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M})^T, \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{d_M})^T$, d. h.

$$\lambda_i, \mu_i \in \{0, 1, \dots, \varepsilon_{d-d_M+i} - 1\}, \text{ für } i = 1, \dots, d_M,$$

und $\lambda_j \neq \mu_j$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, d_M\}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{d_M} \lambda_i \mathbf{y}_i \Big|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})} \neq \sum_{i=1}^{d_M} \mu_i \mathbf{y}_i \Big|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}.$$

Beweis. Angenommen es gilt Gleichheit. Dann liegen beide Summen in der gleichen Kongruenzklasse bzgl. mod \mathbf{E}_d . Für die Differenz der beiden Summen gilt also

$$\sum_{i=1}^{d_M} (\lambda_i - \mu_i) \mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^d.$$

Nun ist für $j \in \{1, \dots, d_M\}$ mit $\lambda_j \neq \mu_j$ jedoch $0 < |\lambda_j - \mu_j| < \varepsilon_{d-d_M+j}$ und somit $(\lambda_j - \mu_j) \mathbf{y}_j \notin \mathbb{Z}^d$. Zusammen mit der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren ist dies ein Widerspruch. \square

Die Anzahl unterschiedlicher Elemente, die nach diesem Lemma existieren, ist $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_d = m = |\det \mathbf{M}|$. Ausgehend von einer Basis $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_M}\}$ des Musters $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ ist die Anordnung der Elemente durch die lexikografische Anordnung der Indizes, bezeichnet mit der Schreibweise

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) = \left(\sum_{j=1}^{d_M} \lambda_j \mathbf{y}_j \Big|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})} \right)_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M})=\mathbf{0}}^{\varepsilon_{d-d_M+1}-1, \dots, \varepsilon_d-1}, \quad (3.1)$$

auf der Menge $\mathbb{E}_M = \{0, 1, \dots, \varepsilon_{d-d_M+1} - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, \varepsilon_d - 1\}$ der Indizes möglich.

Beispiel 3.4.

Gegeben sei eine Zerlegung $M = QER$ der regulären Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ in Smith-Normalform, vgl. Definition 1.2. Weiter seien die Vektoren y_j definiert durch

$$y_j := R^{-1} \frac{1}{\varepsilon_{d-d_M+j}} e_{d-d_M+j}, \quad j = 1, \dots, d_M.$$

Diese sind linear unabhängig, da R^{-1} regulär ist und somit deren Spalten linear unabhängig sind. Sie erfüllen jedoch auch Teil a) der Definition 3.1, denn $R^{-1} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Somit ist $\{y_1, \dots, y_{d_M}\}$ eine Basis des Musters $\mathcal{P}(M)$.

Wegen $|\det Q| = 1$ ist nach Korollar 1.4

$$\Lambda(M) = \Lambda(ER) = \{y ; ERy \in \mathbb{Z}^d\} \cong \Lambda(E) = \{x ; Ex \in \mathbb{Z}^d\},$$

wobei $\phi : \Lambda(ER) \rightarrow \Lambda(E), \phi(y) = Ry$ den Isomorphismus zwischen den Gittern $\Lambda(M)$ und $\Lambda(E)$ beschreibt. Die gestauchten Einheitsvektoren

$$\frac{1}{\varepsilon_{d-d_M+j}} e_{d-d_M+j}, \quad j = 1, \dots, d_M,$$

bilden offensichtlich eine Basis des Musters $\mathcal{P}_I(E)$. Die Betrachtung der Musterpunkte $y \in \mathcal{P}(M)$ über die Indizes in (3.1) lässt sich also auch über die Isomorphie zu $\mathcal{P}(E)$ interpretieren.

Eine solche Basis des Musters $\mathcal{P}(M)$ hängt jedoch nicht von der Matrix M ab, sondern ist für andere Matrizen, die das gleiche Gitter $\Lambda(M)$ erzeugen, ebenso eine Basis. Dies zeigt das folgende

Lemma 3.5.

Gegeben seien zwei reguläre Matrizen $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, die das gleiche Gitter erzeugen, d. h. es gilt $\Lambda(M_1) = \Lambda(M_2)$, und eine Basis $\{y_1, \dots, y_{d_{M_1}}\}$ des Musters $\mathcal{P}(M_1)$. Dann ist $\{y_1, \dots, y_{d_{M_1}}\}$ auch eine Basis von $\mathcal{P}(M_2)$.

Beweis. Da die beiden Matrizen M_1 und M_2 das gleiche Gitter erzeugen, existiert nach Korollar 1.4 eine Matrix $J \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit $|\det J| = 1$, für die $M_1 = JM_2$ gilt. Sei $M_2 =$

3.2 Die schnelle Fourier-Transformation

QER eine Smith-Normalform von M_2 , dann ist $M_1 = JQER$ eine Smith-Normalform von M_1 , denn $JQ \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit $|\det JQ| = 1$. Die Elementarteiler $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ beider Matrizen und die Dimension der Muster $d_{M_1} = d_{M_2}$ sind also identisch. Die Menge der Basisvektoren $\{y_1, \dots, y_{d_{M_1}}\}$ erfüllt also die Definition 3.1 und ist somit eine Basis des Musters $\mathcal{P}(M_2)$. \square

Definition 3.6 (Biorthogonale Basen).

Gegeben seien die Basen $\{y_1, \dots, y_{d_M}\}$ des Musters $\mathcal{P}(M)$ und $\{h_1, \dots, h_{d_M}\}$ der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M^T)$. Sei heißen *biorthogonal*, falls

$$y_j^T h_i \equiv \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_{d-d_M+i}} \bmod 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 \bmod 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 3.7.

Durch Anwendung der Idee aus Beispiel 3.4 auf die transponierte Matrix M^T mit der Smith-Normalform $M^T = R^T E Q^T$ ergibt sich

$$y'_j = Q^{-T} \varepsilon_{d-d_M+j}^{-1} e_{d-d_M+j}, \quad j = 1, \dots, d_M,$$

als Basis für das Muster $\mathcal{P}(M^T)$. Durch Multiplikation mit M^T erhält man die Basis $\{h_1, \dots, h_{d_M}\}$ der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M^T)$ mit

$$h_j = R^T e_{d-d_M+j}, \quad j = 1, \dots, d_M.$$

Lemma 3.8.

Die Basen $\{y_1, \dots, y_{d_M}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ und $\{h_1, \dots, h_{d_M}\} \subseteq \mathcal{G}(M^T)$ aus den Beispielen 3.4 und 3.7 sind biorthogonal.

Beweis. Für beliebige $i, j \in \{1, \dots, d_M\}$ gilt

$$y_i^T h_j = (R^T e_{d-d_M+j})^T R^{-1} \frac{1}{\varepsilon_{d-d_M+i}} e_{d-d_M+i} = \frac{1}{\varepsilon_{d-d_M+i}} e_{d-d_M+j}^T e_{d-d_M+i}. \quad \square$$

3.2 Die schnelle Fourier-Transformation

Die Basen aus Abschnitt 3.1 werden im Folgenden verwendet, um eine schnelle Fourier-Transformation auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$ anzugeben. Dieser Algorithmus verallge-

meintert die schnelle Fourier-Transformation aus [35, 36]. In [36] basiert die Transformation auf einer beliebigen Faktorisierung der Matrix, allerdings konzentriert sich der im Folgenden präsentierte Ansatz auf die Verwendung einer Zerlegung mittels der Smith-Normalform (1.4). Diese wird auch in [35] verwendet, jedoch kann durch die Verwendung biorthogonaler Basen für das Muster und die erzeugende Menge auf die dort erwähnte Umsortierung verzichtet werden.

In einem allgemeineren Ansatz wird in [1] die Fourier-Transformation für abelsche Gruppen und deren Charaktere vorgestellt. Im Gegensatz zu dieser generelleren Herangehensweise ermöglichen die speziellen Eigenschaften der Muster eine Implementierung, die auf Arrays arbeitet. Zusätzlich wird es mit dem im Folgenden präsentierten Aufbau möglich, auf die Parallelisierung des Algorithmus einzugehen. Dies wird abschließend an einem Beispiel illustriert.

Vermeidung der Umsortierung

Aus der Gleichung (1.21) folgt bereits, dass sich mit einem vorherigen und einem nachgestellten Umsortierungsschritt in Form der Permutations-Matrizen P_y, P_h die Fourier-Transformation mit dem Row-Column-Algorithmus realisieren lässt. Dies soll im Folgenden durch die Basen zu

$$\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_{\varepsilon_{d-d_M+1}} \otimes \mathcal{F}_{\varepsilon_{d-d_M+2}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\varepsilon_d} \quad (3.2)$$

vereinfacht werden, wobei die ersten Faktoren $\mathcal{F}_{\varepsilon_1}, \dots, \mathcal{F}_{\varepsilon_{d-d_M}}$ im Kronecker-Produkt wegfallen, da $\mathcal{F}_1 = e^0 = 1$ ist. Dazu seien

$$\{y_1, \dots, y_{d_M}\} \subset \mathcal{P}(M) \quad \text{und} \quad \{h_1, \dots, h_{d_M}\} \subset \mathcal{G}(M^T)$$

Basen des Musters $\mathcal{P}(M)$ und der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M^T)$. Das folgende Theorem gibt nun hinreichende und notwendige Bedingungen an, unter denen die lexikographischen Anordnungen

$$\mathcal{P}(M) = \left(\sum_{j=1}^{d_M} \lambda_j y_j \Big|_{\mathcal{P}(M)} \right)_{\lambda \in \mathbb{E}_M} \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(M^T) = \left(\sum_{j=1}^{d_M} \mu_j h_j \Big|_{\mathcal{G}(M^T)} \right)_{\mu \in \mathbb{E}_M} \quad (3.3)$$

mit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M})^T$ und $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{d_M})^T$ die Gleichung (3.2) erfüllen. Dies verallgemeinert das Theorem 1 aus [2] dahingehend, dass die Aussage für ein beliebiges

3.2 Die schnelle Fourier-Transformation

Paar biorthogonaler Basen gilt und außerdem an Stelle der Implikation eine Äquivalenz steht.

Theorem 3.9 (Basen für das Kronecker-Produkt).

Werden die Anordnungen aus Gleichung (3.3) zur Konstruktion der Fourier-Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ verwendet, so gilt die Gleichheit in (3.2) genau dann, wenn die zwei Basen

$$\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_M}\} \text{ und } \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{d_M}\}$$

biorthogonal sind.

Beweis. Der Beweis folgt durch Induktion über d_M :

Für $d_M = 1$ ist in Gleichung (3.2) die Fourier-Matrix $\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \mathcal{F}_{\varepsilon_d}$, denn es gilt $\varepsilon_j = 1$ für $j = 1, \dots, d - 1$. Die Summen in (3.3) bestehen aus nur einem Term $\lambda_1 \mathbf{y}_1$ bzw. $\mu_1 \mathbf{h}_1$. Damit gilt die Gleichheit der Fourier-Matrizen genau dann, wenn $\mathbf{y}_1^T \mathbf{h}_1 \equiv \varepsilon_d^{-1} \pmod{1}$ erfüllt ist.

Sei $d_M > 1$ und nach Induktionsvoraussetzung gelte Theorem 3.9 für alle Fourier-Matrizen bis zur Musterdimension $d_M - 1$. Weiter seien die Koeffizienten in der Basis-Zerlegung $\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M-1}$ und $\mu_1, \dots, \mu_{d_M-1}$ mit $0 \leq \lambda_j, \mu_j < \varepsilon_{d-d_M+j}, j = 1, \dots, d_M - 1$, beliebig aber fest gewählt und es bezeichne

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{d-d_M+1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_{d-1}}} \exp \left(-2\pi i \sum_{j=1}^{d_M-1} \lambda_j \varepsilon_{d-d_M+j}^{-1} \mu_j \right).$$

Die Untermatrix von $\mathcal{F}(\mathbf{M})$, die für diese festen Werte der Elemente

$$\mathbf{x}_l = \sum_{j=1}^{d_M} \lambda_j \mathbf{y}_j \Big|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}, \quad l = \lambda_{d_M} = 0, \dots, \varepsilon_d - 1,$$

und

$$\mathbf{z}_k = \sum_{j=1}^{d_M} \mu_j \mathbf{h}_j \Big|_{\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)}, \quad k = \mu_{d_M} = 0, \dots, \varepsilon_d - 1,$$

generiert wird, kann als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{m}} \left(e^{-2\pi i \mathbf{z}_k^T \mathbf{x}_l} \right)_{k,l=0}^{\varepsilon_d-1} &= \frac{1}{\sqrt{m}} \left(e^{-2\pi i \left(\sum_{j=1}^{d_M} \mu_j \mathbf{h}_j \right)^T \left(\sum_{j=1}^{d_M} \lambda_j \mathbf{y}_j \right)} \right)_{k,l=0}^{\varepsilon_d-1} \\ &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_d}} \left(e^{-2\pi i k \mathbf{h}_{d_M}^T l \mathbf{y}_{d_M}} \right)_{k,l=0}^{\varepsilon_d-1} = c \mathcal{F}_{\varepsilon_d} \end{aligned} \quad (3.4)$$

geschrieben werden. Die letzte Gleichheit gilt genau dann, wenn die beiden Basisvektoren \mathbf{h}_{d_M} und \mathbf{y}_{d_M} die Biorthogonalität aus Definition 3.6 erfüllen.

Somit ist die Teilmatrix von $\mathcal{F}(M)$, die von beliebig aber fest gewählten Basis-Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M-1}, \mu_1, \dots, \mu_{d_M-1}$ erzeugt wird, genau dann identisch zu $\mathcal{F}_{\varepsilon_d}$, wenn die jeweils letzten Basis-Vektoren biorthogonal sind. Diese Matrizen $\mathcal{F}_{\varepsilon_d}$ stellen den letzten Faktor des Kronecker-Produktes in (3.2) dar. Der Vorfaktor c entspricht einem Element des gesamten, davor stehenden Produktes $\mathcal{F}_{\varepsilon_{d-d_M+1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{\varepsilon_{d-1}}$. Für dieses Kronecker-Produkt gilt Theorem 3.9 nach Induktionsvoraussetzung.

Die Gleichung (3.2) ist genau dann erfüllt, wenn die lexikographischen Anordnungen des Musters $\mathcal{P}(M)$ und der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(M^T)$ in (3.3) von einem Paar biorthogonaler Basen stammen. \square

Der Algorithmus

Die Techniken der schnellen Fourier-Transformation aus [10] lassen sich nun anwenden. Gegeben sei eine Basis $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_M}\}$ des Musters $\mathcal{P}(M)$. Dann existiert für jedes $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(M)$ eine eindeutige Darstellung, also

$$\exists! \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{E}_M : \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{d_M} \lambda_k \mathbf{y}_k \Big|_{\mathcal{P}(M)} .$$

Damit ist für einen Datenvektor $\mathbf{b} = (b_y)_{y \in \mathcal{P}(M)}$, der als Vektor der Abtastwerte einer Funktion f auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$ verstanden werden kann, auch eine Adressierung in den Basis-Koeffizienten $\mathbf{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{E}_M}$ möglich. Verkürzend bezeichne

$$\mathcal{G} := \mathcal{F}_{\varepsilon_{d-d_M+1}} \otimes \mathcal{F}_{\varepsilon_{d-d_M+2}} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{\varepsilon_{d-1}} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad n = \frac{m}{\varepsilon_d},$$

3.2 Die schnelle Fourier-Transformation

die Fourier-Transformation bezüglich der Basis-Vektoren $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_M-1}$. Die Fourier-Transformation bezüglich der lexikographischen Anordnung der Zeilen und Spalten der Fourier-Matrix lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}} &= (\mathcal{G} \otimes \mathcal{F}_{\varepsilon_d}) \mathbf{b} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{1,1}\mathcal{F}_{\varepsilon_d} & \mathcal{G}_{1,2}\mathcal{F}_{\varepsilon_d} & \cdots & \mathcal{G}_{1,n}\mathcal{F}_{\varepsilon_d} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathcal{G}_{n,1}\mathcal{F}_{\varepsilon_d} & \mathcal{G}_{n,2}\mathcal{F}_{\varepsilon_d} & \cdots & \mathcal{G}_{n,n}\mathcal{F}_{\varepsilon_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{(0,0,\dots,0)} \\ \vdots \\ b_{(0,0,\dots,\varepsilon_d-1)} \\ b_{(0,\dots,0,1,0)} \\ \vdots \\ b_{(0,\dots,0,1,\varepsilon_d-1)} \\ b_{(0,\dots,0,2,0)} \\ \vdots \\ b_{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_2-1,\dots,\varepsilon_d-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Berechnung kann so in zwei Teile zerlegt werden. Zunächst wird das Matrix-Vektor-Produkt

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_d} \left(b_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M})} \right)_{\lambda_{d_M}=0}^{\varepsilon_d-1}$$

für feste Werte $\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M-1}$ berechnet. Nach dieser Fourier-Transformation auf den Blöcken ist die zweite Fourier-Transformation eine verschachtelte, denn für jeden Wert $\lambda_{d_M} = 0, \dots, \varepsilon_d - 1$ kann hier die Multiplikation mit \mathcal{G} berechnet werden. Diese Aufteilung wird solange fortgesetzt, bis \mathcal{G} der klassischen Fourier-Matrix $\mathcal{F}_{\varepsilon_d-d_M+1}$ entspricht. Diese gesamte Berechnung, die in Algorithmus 3.1 als Mathematica-Quelltext realisiert ist, wird also, analog zur Induktion im Beweis zu Theorem 3.9, als Rekursion umgesetzt. Insgesamt führt die Analyse zu einer Laufzeit, die im folgenden Theorem festgehalten ist.

Theorem 3.10 (Komplexität der FFT auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$).

Gegeben sei eine Matrix $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ mit $m = |\det M| > 0$. Dann kann die Fourier-Transformation auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$ mittels Gleichung (3.5) in $\mathcal{O}(m \log m)$ Schritten berechnet werden.

Beweis. Gegeben sei eine beliebige Implementierung der eindimensionalen schnellen Fourier-Transformation. Bekanntermaßen ist ein solcher Algorithmus für einen Datenvektor der Länge k mit der Komplexität von $c_{\text{FFT}} k \log k + \mathcal{O}(k)$ Schritten, $c_{\text{FFT}} \in \mathbb{R}$, berechenbar.

Algorithmus 3.1. Die FFT auf dem Muster $\mathcal{P}(M)$.

```

1 FourierOnPattern[ $\varepsilon$ _,  $b$ _] := Block[{hatb},
2 %  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^{d_M}$ : vector containig the elementary divisors of M
3 % b: vector of input values given as  $b = (b_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{E}_M}$ 
4 %
5 % hatb: The Fourier transform  $\hat{b} = \mathcal{F}(M)b$ 
6 If [Length[ $\varepsilon$ ] == 1, Return[Fourier[b]];
7 % Perform the transforms on blocks of size  $\varepsilon_d$ 
8 Do [
9     hatb[[ $\{\mu_1, \dots, \mu_{d_{M-1}}\}, \text{All}\}] = Fourier[b[[ $\{\mu_1, \dots, \mu_{d_{M-1}}\}, \text{All}\}]];$ 
10    ,  $\{\mu_1, 1, \varepsilon_1\}, \dots, \{\mu_{d_M}, 1, \varepsilon_{d_M-1}\}$  ];
11 % Perform transform on the first  $d_{M-1}$  cycles recursively on interleaved blocks
12 Do [
13     % sec denotes  $d_M - 1$  times the term All
14     hatb[[sec,  $\xi$ ]] = FourierOnPattern[ $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d_{M-1}}\}, \text{hatb}[[\text{sec}, \xi]]$ ];
15    ,  $\{\xi, 1, \varepsilon_{d_M}\}$  ];
16 Return[hatb];
17 ];$ 
```

Dann folgt per Induktion über d_M : Der erste Schritt besteht aus der Berechnung der Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_d} \left(b_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M})} \right)_{\lambda_{d_M}=0}^{\varepsilon_d-1}$$

für beliebig aber fest gewählte $\lambda_1, \dots, \lambda_{d_M-1}$, $0 \leq \lambda_i < \varepsilon_{d-d_M+i}$. Dies umfasst $n := \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_{d-1}$ Fourier-Transformationen der Eingabegröße $k = \varepsilon_d$, die jeweils von der Komplexität $c_{\text{FFT}}\varepsilon_d \log \varepsilon_d + O(\varepsilon_d)$ sind.

Im zweiten Schritt werden die verschachtelten Fourier-Transformationen durchgeführt: Für jeden Wert $0 \leq \lambda_{d_M} < \varepsilon_d$ wird eine Transformation mit der Matrix $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ berechnet, von denen jede nach Induktionsvoraussetzung $c_{\text{FFT}}n \log n + O(n)$ Rechenschritte benötigt. Dies führt insgesamt auf

$$\begin{aligned}
& n(c_{\text{FFT}}\varepsilon_d \log \varepsilon_d + O(\varepsilon_d)) + \varepsilon_d(c_{\text{FFT}}n \log n + O(n)) \\
& = c_{\text{FFT}}n\varepsilon_d \log \varepsilon_d + O(m) + c_{\text{FFT}}n\varepsilon_d \log n + O(m) \\
& = c_{\text{FFT}}m(\log \varepsilon_d + \log n) + O(m) \\
& \leq c_{\text{FFT}}m \log m + O(m).
\end{aligned}$$
□

Ein Wert für die Konstante c_{FFT} aus dem vorigen Beweis findet sich mit $c_{\text{FFT}} = \frac{34}{9}$ Gleitkomma-Rechenoperationen in [24].

3.2 Die schnelle Fourier-Transformation

Der Beweis zeigt außerdem die Möglichkeiten der Parallelisierung der mehrdimensionalen Fourier-Transformation, welche sich aus der Struktur des Algorithmus ergeben: Im ersten Schritt werden n Transformationen der gleichen Größe $k = \varepsilon_d$ durchgeführt. Diese werden auf nicht überlappenden Blöcken von b berechnet. Dies gilt ebenso für den zweiten Schritt, denn auch die dort durchgeführten ε_d Transformationen arbeiten auf nicht überlappenden Blöcken. Es ist also in beiden Schritten möglich, jeweils eine SIMD-Implementierung wie in [18] zu verwenden. Zusätzlich kann in den einzelnen auftretenden eindimensionalen Transformationen eine weitere Parallelisierung eingesetzt werden, wenn diese so groß sind, dass der Initialisierungs-Overhead mehrerer Kerne nicht den Gewinn der Parallelisierung aufhebt.

Beispiel

Für verschiedene Muster $\mathcal{P}(M)$ der gleichen Anzahl $m = |\mathcal{P}(M)| = |\det M|$ an Punkten im Fall $d = 2$ lässt sich an deren Fourier-Transformationen betrachten, welchen Einfluss die Zerlegung (3.5) auf die Laufzeit hat. Die Muster lassen sich nach ihrer Musternormalform aus Definition 1.6 gruppieren, so dass es für die Laufzeiten genügt, lediglich einen Repräsentanten jeder Gruppe, nämlich die Musternormalform selbst, zu betrachten. Die Anzahl dieser Muster wird in [29, Lemma 2.6] beschrieben. Insgesamt sind die Musternormalformen von der Form

$$M = \begin{pmatrix} l & i \\ 0 & k \end{pmatrix} \text{ mit } m = kl, \quad k, l \in \mathbb{N}^+ \text{ und } 0 \leq i < k, \quad (3.6)$$

wobei die unterschiedlichen Zyklen in den Elementarteilern $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ auftreten, wenn i alle Teiler von k durchläuft.

Die Implementierung für dieses Beispiel basiert auf der Methode `Fourier[]`, wie sie in Wolfram Mathematica 9.0.1.0 gegeben ist und bereits als gegebene eindimensionale Fourier-Transformation im Algorithmus 3.1 vorkommt. Die Laufzeit dieser Implementierung wird nun betrachtet. Sowohl die Fourier-Transformationen in Zeile 9, als auch die rekursiven Aufrufe in Zeile 14 arbeiten dabei auf nicht überlappenden Datenteilen und können somit parallelisiert werden. Dazu steht in Mathematica die Methode `ParallelDo[]` zur Verfügung. Es ist jedoch in dieser Methode notwendig, den parallelen Zugriff auf ein Array durch Anpassung der Methode `MemberQ[]` zu implementieren. Außerdem ist es bei der parallelen Implementierung für den Fall, dass die erste Fourier-Transformation nur sehr wenige Daten umfasst, sinnvoll, eine Matrix-Multiplikation anstelle der eigentlichen Fourier-Transformation zu nutzen. Dies ist schneller für sehr kleine Werte, da in diesem Fall die Initialisierung der schnellen Fourier-

Tabelle 3.1. Laufzeiten der FFT auf Mustern $\mathcal{P}(M)$ der Form (3.6).

i	Zyklen	seriell (Sek.)	Faktor	parallel (Sek.)	Gewinn
0	4096	4096	25.414972	2.107527	12.05914
1	16777216	0.98697	0.96771	0.969766	1.01775
2	2	8388608	12.397334	12.1553	1.370723
4	4	4194304	24.671443	24.1897	1.203840
8	8	2097152	12.262814	12.0234	1.112375
16	16	1048576	12.126922	11.8901	1.134637
32	32	524288	12.486624	12.2428	1.143507
64	64	262144	12.357125	12.1158	1.251825
128	128	131072	12.545804	12.3008	1.446735
256	256	65536	11.531107	11.3060	1.964164
512	512	32768	13.574930	13.3099	2.639521
1024	1024	16384	20.138746	19.7455	2.633747
2048	2048	8192	16.184233	15.8682	4.434711
					3.649445

Transformation länger dauert, als das Aufstellen der Fourier-Matrix und die parallel ausgeführte Matrix-Vektor-Multiplikation.

Für einen zufälligen Datensatz $a = (a_y)_{y \in \mathcal{P}(M)}$, der einer Menge an Funktionswerten auf einem der Muster $\mathcal{P}(M)$ der Matrizen aus (3.6) entspricht, wird die Laufzeit einer seriellen und einer parallelen Implementierung der mehrdimensionalen Fourier-Transformation verglichen. Zusätzlich wird die serielle Implementierung mit der eindimensionalen Fourier-Transformation, also der Vorstellung, der Datensatz sei die Abtastung einer eindimensionalen Funktion, verglichen. Während der erste Vergleich die Parallelisierbarkeit der Implementierung demonstriert, illustriert der zweite Vergleich nicht nur die theoretisch gezeigte Komplexität des Algorithmus, sondern zeigt auch auf, wie groß der Aufwand ist, die Zerlegung in mehrere kleinere Fourier- Transformationen und die Adressierung der Datenblöcke durchzuführen.

Die erläuterten Algorithmen wurden auf einem Intel Core i7, der 4 Duo Cores mit je 3,4 Ghz besitzt, mit einem Arbeitsspeicher von 16 GB, Mac OS 10.8.2 als Betriebssystem gerechnet. Insgesamt ist es also möglich, 8 Prozesse parallel durchzuführen.

Für 50 zufällig erzeugte Datensätze wurden mit $k = l = 2^{11}$, also jeweils $m = 2^{24}$ reellen Zahlen umfassende Datenvektoren, die Laufzeiten des Algorithmus bezüglich aller Teiler i von k gemessen und in Tabelle 3.1 aufgeführt. Der Wert hinter der Spalte mit den Zeiten für die serielle Implementierung zeigt, um welchen Faktor der zweidi-

3.3 Die schnelle Wavelet-Transformation

mensionale Fall langsamer ist als der Eindimensionale. Die eindimensionale Fourier-Transformation benötigt dabei im Mittel 1.019914 Sekunden. Die letzte Spalte zeigt den Gewinn der Parallelisierung. Im Fall $i = 0$ sind von den insgesamt 8192 Fourier-Transformationen je 4096 im ersten und 4096 im zweiten Schritt des Algorithmus notwendig. In der seriellen Implementierung ist dies um einen Faktor von etwa 25 langsamer als die eindimensionale Fourier-Transformation. Die parallele Implementierung ist immerhin noch um den Faktor 12 schneller als die Serielle. Die Verwendung der parallelen Matrix-Vektor-Multiplikation bringt für diese Datensätze einen Vorteil, falls $\epsilon_1 \leq 128$ ist. Dieser Wert wurde empirisch gefunden.

Mit den vorgestellten Basen vereinfacht sich die Fourier-Transformation auf dem Muster also zu einer mehrdimensionalen tensorproduktartigen Fourier-Transformation, wobei die Dimensionen durch die Smith-Normalform gegeben sind. Weitere Aspekte der Parallelisierung für große Anzahlen von Prozessoren der dreidimensionalen Fourier-Transformation finden sich beispielsweise basierend auf der C++-Bibliothek FFTW in [42]. Es gibt viele weitere Möglichkeiten, mit mehrdimensionalen Fourier-Transformationen umzugehen, siehe etwa [16, Kapitel 9] für einen Überblick.

3.3 Die schnelle Wavelet-Transformation

In ähnlicher Weise wie für die Fourier-Transformation können die in diesem Kapitel eingeführten Basen für das Muster $\mathcal{P}(M)$ und die erzeugende Menge $\mathcal{G}(M^T)$ auch auf die Wavelet-Transformation aus Abschnitt 1.5 angewandt werden. Für diesen Abschnitt seien die regulären Matrizen $J, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ eine Faktorisierung von $M = JN$. Zu jeder dieser drei Matrizen sei eine Basis gegeben. Es bezeichne jeweils

$$\begin{aligned}\{x_1, \dots, x_{d_M}\} &\text{ für } \mathcal{P}(M), \\ \{y_1, \dots, y_{d_N}\} &\text{ für } \mathcal{P}(N)\end{aligned}$$

und

$$\{z_1, \dots, z_{d_J}\} \text{ für } \mathcal{P}(J) \tag{3.7}$$

eine Basis des jeweiligen Musters mit der üblichen, jedoch nicht eindeutigen, Sortierung in aufsteigender Zyklengröße. Im Folgenden ist nach einer gesamten Rechnung stets auf den entsprechenden Repräsentanten des Musters abzubilden, der in der gleichen Restklasse liegt. Auf die Notation $\circ|_{\mathcal{P}(M)}$ wird dabei verzichtet. Wie in

Abschnitt 3.1 gelten die Ausführungen analog für die beiden erzeugenden Mengen $\mathcal{G}(M)$ und $\mathcal{G}(M^T)$, wobei für den zweiten Fall die Rollen der Matrizen J und N wegen $M^T = N^T J^T$ vertauscht sind.

Die Skalierungs-Eigenschaft

Lemma 3.11 (Projektion).

Gegeben seien die regulären Matrizen $J, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und $M = JN$. Dann existiert für die Basen aus Gleichung (3.7) eine Matrix $P \in \mathbb{N}_0^{d_M \times d_N}$, so dass für jedes $y \in \mathcal{P}(N)$

$$\exists \mu \in \mathbb{E}_N \quad \exists \lambda \in \mathbb{E}_M : y = \sum_{k=1}^{d_N} \mu_k y_k = \sum_{l=1}^{d_M} \lambda_l x_l$$

gilt, wobei $\lambda = P\mu$.

Beweis. Nach Theorem 1.3 ist $\mathcal{P}(N) \subset \mathcal{P}(M)$. Insbesondere ist jeder Basisvektor $y_k \in \mathcal{P}(M)$ und kann somit bezüglich der Basis des Musters $\mathcal{P}(M)$ zerlegt werden:

$$\exists p_k = (p_{l,k})_{l=1}^{d_M} \in \mathbb{N}_0^{d_M} : y_k = \sum_{l=1}^{d_M} p_{l,k} x_l, \quad k = 1, \dots, d_N.$$

Dies lässt sich auf jeden Musterpunkt $y \in \mathcal{P}(N)$ anwenden, der in beiden Basen der Muster $\mathcal{P}(N)$ und $\mathcal{P}(M)$ dargestellt werden kann. Es existieren also $\mu \in \mathbb{E}_N$ und $\lambda \in \mathbb{E}_M$, so dass

$$y = \sum_{k=1}^{d_N} \mu_k y_k = \sum_{k=1}^{d_N} \mu_k \sum_{l=1}^{d_M} p_{l,k} x_l = \sum_{l=1}^{d_M} \sum_{k=1}^{d_N} \mu_k p_{l,k} x_l = \sum_{l=1}^{d_M} \lambda_l x_l. \quad \square$$

Während Lemma 1.23 a) eine direkte Verallgemeinerung von [50, Theorem 4.1.2a] ist, bieten die Basen eine weitere Möglichkeit der Beschreibung von Teilräumen. Im Ein-dimensionalen ist es, etwa bei festem Skalierungsfaktor $j = 2$, lediglich möglich, die Schrittweite der gleichverteilten Punkte auf $[-\pi, \pi]$ zu verdoppeln, also die Anzahl der Punkte und der Frequenzen in der erzeugenden Menge zu halbieren. Im Mehrdimensionalen ist es für eine Skalierung um den Faktor $j = |\det J|$ möglich, mehrere Zerlegungen anzugeben. Es gibt verschiedene Teilmuster $\mathcal{P}(N) \subset \mathcal{P}(M)$, die jeweils von der Wahl der Matrix J abhängen. Es ist dabei möglich, zu beschreiben, wie sich die Richtungen der Basisvektoren verändern. Aus Sicht der Mustergruppe $(\mathcal{P}(M), +|_{\mathcal{P}(M)})$,

3.3 Die schnelle Wavelet-Transformation

bzw. analog der erzeugenden Gruppe $(\mathcal{G}(M^T), +|_{\mathcal{G}(M^T)})$, werden anstelle der Richtungen die verschiedenen Zyklen und deren Veränderung betrachtet. Im Eindimensionalen ist dies ebenso ein Verringern der Elemente um den Faktor j^{-1} . Im Mehrdimensionalen ist es möglich, dass sich Zyklen in ihrer Länge und Richtung verändern und, dass neue Zyklen hinzukommen, solange deren Anzahl $d_N < d$ ist.

Im folgenden Theorem wird für den Fall, dass die Matrix J ein Muster $\mathcal{P}(J)$ der Dimension $d_J = 1$ erzeugt, ebendiese Veränderung der Zyklen in Länge und Richtung betrachtet. Die damit charakterisierten Eigenschaften in einem Muster umfassen beispielsweise alle Matrizen mit $|\det J| = 2$. Der allgemeinere Fall lässt sich daraus ableiten und wird nach dem Theorem dargestellt.

Theorem 3.12 (Die multivariate Skalierungs-Eigenschaft).

Gegeben seien die regulären Matrizen $J, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ und $M = JN$ mit der Musterdimension $d_J = 1$. Weiter seien die Basen der drei Muster wie in (3.7) gegeben und die Elementarteiler der Matrizen mit $\varepsilon_j^M, \varepsilon_j^J, \varepsilon_j^N, j = 1, \dots, d$, bezeichnet. Dann gilt

i) falls $N^{-1}z_1 \notin \text{span}\{y_1, \dots, y_{d_N}\}$, dass

a) $d_M = d_N + 1$ gilt und

b) ein $x_l \in \{x_1, \dots, x_{d_M}\}$ existiert, so dass

$$N^{-1}z_1 = \lambda x_l \bmod E_d, \quad \lambda \in \{1, \dots, \varepsilon_d^J - 1\} \text{ und } \varepsilon_l^M = \varepsilon_d^J,$$

2) falls $N^{-1}z_1 \in \text{span}\{y_1, \dots, y_{d_N}\}$, dass

a) $d_M = d_N$ gilt und

b) die Zerlegungen

$$N^{-1}z_1 = \sum_{l=1}^{d_M} \lambda_l x_l, \quad \lambda \in E_M, \quad \text{und} \quad N^{-1}z_1 = \sum_{k=1}^{d_N} \mu_k y_k, \quad \mu \in \mathbb{Q}^d,$$

existieren, mit

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon_d^J} P \mu, \quad P \in \mathbb{N}_0^{d_M \times d_N}. \quad (3.8)$$

Beweis. Wegen $\mathbf{z}_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{J})$ ist $\mathbf{J}\mathbf{z}_1 = \mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1 \in \mathbb{Z}^d$ und somit $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$.

Falls $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_N}\}$ ist, so gilt für die linearen Hüllen

$$\text{span}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_N}\} \subset \text{span}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_N}, \mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1\},$$

wobei Gleichheit ausgeschlossen ist. Dies gilt aber auch, wenn man die gewichteten Summen auf die Vorfaktoren aus \mathbb{E}_N bzw. $\mathbb{E}_N \times \mathbb{E}_J$ beschränkt. Mit Lemma 1.5 lässt sich jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ eindeutig zerlegen in

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{z} \Big|_{\mathcal{P}(\mathbf{M})}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mathbf{z} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}).$$

Dies kann bezüglich der Basen der beiden Muster $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ und $\mathcal{P}(\mathbf{J})$ weiter zerlegt werden in

$$\exists! \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{E}_N \exists! \theta \in \mathbb{E}_J : \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d_N} \mu_k \mathbf{y}_k + \theta \mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1,$$

wobei der zweite Term lediglich ein Summand ist, da $d_J = 1$ ist. Für den ersten Fall des Theorems ist die Menge $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_N}, \mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1\}$ linear unabhängig, womit a) gezeigt ist. Die Aussage b) ergibt sich aus der Teilmengen-Beziehung $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbf{M})$, denn damit sind alle Zyklen des ersten Musters auch Zyklen des zweiten Musters. Das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ enthält jedoch auch einen weiteren Basisvektor \mathbf{x}_l , der den gleichen Zyklus aufspannt wie der Vektor $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1$, der nach Voraussetzung nicht in den vorherigen Zyklen liegt.

Mit dem gleichen Ansatz folgt für den zweiten Fall $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1 \in \text{span}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_N}\}$, dass für die Zerlegung gilt

$$\exists! \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{E}_N \exists! \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Q}^{d_N} \exists! \theta \in \mathbb{E}_J : \mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1 = \sum_{k=1}^{d_N} \nu_k \mathbf{y}_k + \theta \sum_{k=1}^{d_N} \mu_k \mathbf{y}_k.$$

Somit ergibt sich die Aussage a). Wegen $\varepsilon_d^J \mathbf{z}_1 \in \mathbb{Z}^d$ gilt $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Q}^{d_N}$. Dies lässt sich ebenso verwenden, um auf die Zerlegung

$$\exists! \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{E}_N : \varepsilon_d^J \mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1 = \sum_{k=1}^{d_N} \mu_k \mathbf{y}_k$$

3.3 Die schnelle Wavelet-Transformation

das Lemma 3.11 anzuwenden. Es folgt für $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, dass

$$\exists! \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{E}_{\mathbf{M}} : \mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1 = \sum_{l=0}^{d_{\mathbf{M}}} \lambda_l \mathbf{x}_l = \frac{1}{\varepsilon_d^{\mathbf{J}}} \sum_{k=0}^{d_{\mathbf{N}}} \mu_k \mathbf{y}_k = \frac{1}{\varepsilon_d^{\mathbf{J}}} \sum_{k=0}^{d_{\mathbf{N}}} \mu_k \sum_{l=1}^{d_{\mathbf{M}}} p_{l,k} \mathbf{x}_l$$

und damit die Aussage in (3.8). \square

Die Gleichung (3.8) verallgemeinert den eindimensionalen Fall, in dem sich die Musterpunkte und Frequenz-Indizes lediglich vervielfachen. Diese Verringerung des Abstandes der Musterpunkte geschieht stets in einer bestimmten, durch $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z}_1$ beschriebenen Richtung. Im ersten Fall, in dem diese neue Richtung die Dimension erhöht, wird ein „Zyklus“ erweitert, der vorher die Länge $\varepsilon_{d-d_{\mathbf{N}}}^{\mathbf{N}} = 1$ hatte. Dieser Zyklus besitzt dann die Länge $\varepsilon_{d-d_{\mathbf{M}}+1}^{\mathbf{M}} = \varepsilon_d^{\mathbf{J}}$. Im zweiten Fall wird ein bestimmter Zyklus um den Faktor $\varepsilon_d^{\mathbf{J}}$ vervielfacht.

Das Theorem 3.12 gilt auch für Matrizen \mathbf{J} mit mehr als einem Basisvektor. Dazu wird die Basis $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{d_{\mathbf{J}}}\}$ des Musters $\mathcal{P}(\mathbf{J})$ in zwei disjunkte Mengen B_1, B_2 zerlegt, die je den ersten bzw. zweiten Fall des Theorems erfüllen. Dann ergibt sich die Dimension des Musters $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ zu $d_{\mathbf{M}} = d_{\mathbf{N}} + |B_1|$ und jeder Basisvektor $\mathbf{z}_j \in B_2$ erfüllt eine Skalierungseigenschaft wie in (3.8).

Der Algorithmus

Für eine Faktorisierung der regulären Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ der Form $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N}$, $\mathbf{J}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, seien die Funktionen $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_{|\det \mathbf{J}|}$, die eine Zerlegungsstufe der Multiskalen-Analyse aus Abschnitt 1.5 darstellen, gegeben. Es liegt also die Zerlegung

$$V_{\mathbf{M}}^{\varphi} = \bigoplus_{j=1}^{|\det \mathbf{J}|} V_{\mathbf{N}}^{\psi_j}$$

vor und insbesondere existieren Koeffizientenvektoren $\mathbf{b}_j = (b_{j,y})_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^m$, so dass

$$\psi_j = \sum_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} b_{j,y} \mathbf{T}_y \varphi \in V_{\mathbf{M}}^{\varphi}, \quad j = 1, \dots, |\det \mathbf{J}|,$$

gilt. Es seien weiter eine Funktion f mit

$$f = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} T_{\mathbf{y}} \varphi \in V_{\mathbf{M}}^{\varphi}$$

und zwei Basen mit $\{h_1, \dots, h_{d_M}\}$ für $\mathcal{G}(M^T)$ und $\{k_1, \dots, k_{d_N}\}$ für $\mathcal{G}(N^T)$ gegeben. Dann lässt sich die Wavelet-Transformation von f für dieses eine Level durch die folgenden Schritte beschreiben:

- 1) Berechne die Fourier-Transformationen $\hat{\mathbf{a}} = \mathcal{F}(M)\mathbf{a}$ und $\hat{\mathbf{b}} = \mathcal{F}(M)\mathbf{b}_j$ für $j = 1, \dots, |\det J|$.
- 2) Berechne die Matrix P zur Umrechnung von Koeffizientenvektoren aus der Basis $\{k_1, \dots, k_{d_N}\}$ in die Basis $\{h_1, \dots, h_{d_M}\}$ nach Lemma 3.II.
- 3) Berechne für jeden Basisvektor $g_j, j = 1, \dots, d_J$, einer Basis $\{g_1, \dots, g_{d_J}\}$ von $\mathcal{G}(J^T)$ die Zerlegung

$$N^T g_j = \sum_{i=1}^{d_M} q_{i,j} h_i \Big|_{\mathcal{G}(M^T)}, \quad (q_{i,j})_{i=1}^{d_M} \in \mathbb{E}_M, j = 1, \dots, d_J,$$

in $\mathcal{G}(M^T)$ und verwende diese, um $N^T g \in \mathcal{G}(M^T), g \in \mathcal{G}(J^T)$, mittels des entsprechenden Koeffizientenvektors $\lambda_g \in \mathbb{E}_M$ darzustellen.

- 4) Berechne $\lambda = P\mu|_{\mathbb{E}_M}$ für jedes Element $h \in \mathcal{G}(N^T)$ der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(N^T)$, indem alle Werte $\mu \in \mathbb{E}_N$ durchlaufen werden und damit

$$\begin{aligned} \hat{d}_{j,h} &= \frac{1}{\sqrt{|\det J|}} \sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} \overline{\hat{b}_{j,h+N^T g}} \hat{a}_{h+N^T g}, \\ &\quad j = 1, \dots, |\det J|, \quad h \in \mathcal{G}(N^T), \end{aligned}$$

wobei $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$ adressiert werden durch $\lambda + \lambda_g|_{\mathbb{E}_M}$ und $\hat{\mathbf{d}}_j$ durch μ , vgl. (1.50) und (1.51).

3.3 Die schnelle Wavelet-Transformation

- 5) Führe die inverse Fourier-Transformation für jeden Anteil \hat{d}_j durch, um die Zerlegung

$$f = \sum_{j=1}^{|\det J|} \sum_{y \in \mathcal{P}(N)} d_{j,y} T_y \psi_j$$

zu erhalten.

In den Schritten 1, 4 und 5 ist es möglich, auch die Koeffizienten b_j , d_j und deren Fourier-Transformierten \hat{b}_j , \hat{d}_j über die Basisvektoren $g_k \in \mathcal{G}(J^T)$, $k = 1, \dots, d_J$, der erzeugenden Menge zu adressieren, anstatt mit einer beliebig aber festen Sortierung $j = 1, \dots, |\det J|$. Dies ist jedoch erst sinnvoll, wenn $d_J > 1$ ist. Andernfalls ist durch die Vielfachen des einzigen Basisvektors $kg_1 \in \mathcal{G}(J^T)$, $k = 1, \dots, \varepsilon_d^J = |\det J|$, eine natürliche Sortierung gegeben. Für eine beliebig aber fest gewählte Sortierung ist eine Adressierung über den Index j darüber hinaus übersichtlicher in der Notation.

Im Spezialfall $|\det J| = 2$ sei ψ_1 diejenige Funktion, die in gewissem Sinne den niedrfrequenten Anteil von φ darstellt und ψ_2 diejenige, die den hochfrequenten Anteil repräsentiert. Dann vereinfachen sich die Summen des vierten Schrittes zu lediglich 2 Summanden. Der Algorithmus beschreibt dann einen Schritt der dyadischen Wavelet-Transformation. Für jede weitere Zerlegung eines der Räume $V_N^{\psi_j}$ in eine weitere direkte Summe translationsinvarianter Räume, also mit $N = J_2 O$, sind lediglich die Schritte 2 bis 4 erneut zu berechnen, denn mit \hat{b}_j liegt das Ergebnis der ersten Zerlegung bereits als Fourier-Transformierte der Koeffizienten vor.

Für eine feste Anzahl von $m = |\det M|$ Datenpunkten lässt sich auch hier die Komplexität des Algorithmus, also die Laufzeit, angeben. Obwohl die Anzahl Wavelet-Räume mit $|\det J|$ und die Dimension d konstant sind, sollen sie in den folgenden Ausführungen als Bestandteil genannt werden, um hervorzuheben, wie sich diese beiden Werte auf die Laufzeit auswirken.

Zunächst werden im ersten Schritt $|\det J| + 1$ Fourier-Transformationen durchgeführt. Jede dieser Transformationen hat die Eingabegröße m . Im letzten Schritt werden ebenso Fourier-Transformationen berechnet, genauer $|\det J|$ Transformationen der Eingabegröße $n = \frac{m}{|\det J|}$. Mit der Laufzeit-Komplexität aus Theorem 3.10 benötigt der fünfte Schritt $|\det J| c_{\text{FFT}} n \log n + \mathcal{O}(n) < c_{\text{FFT}} m \log m + \mathcal{O}(m)$ Rechenschritte. Zusammen benötigen die Fourier-Transformation im ersten und fünften Schritt des Algorithmus $(|\det J| + 2)c_{\text{FFT}} m \log m = \mathcal{O}(m \log m)$ Rechenoperationen.

In Schritt 2 müssen d_N , in Schritt 3 d_J Gleichungssysteme mit d Unbekannten gelöst werden. Diese beiden Schritte lassen sich in adaptiven Verfahren durch Vorberechnungen im Aufwand verringern. Schlechtestenfalls sind jeweils d Gleichungssysteme zu lösen, also $2c_1d^4 = \mathcal{O}(d^4)$ Rechenschritte nötig, wobei c_1 eine algorithmenabhängige Konstante ist.

Schlussendlich umfasst Schritt 4 die Berechnung von $|\det J||\mathcal{G}(N^T)| = m$ Koeffizienten, die sich jeweils als Summe von $|\det J|$ Werten ergeben, so dass dieser Teil in $c_2|\det J|m = \mathcal{O}(m)$ Schritten berechnet werden kann.

Insgesamt ergibt sich also ein Rechenaufwand von

$$(|\det J| + 2)c_{\text{FFT}}m \log m + 2c_1d^4 + c_2|\det J|m + \mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(m \log m),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, die von der entsprechenden Implementierung abhängen. Sie sind jedoch insbesondere unabhängig von $m, |\det J|, d$ und n .

Liegen die Eingabedaten als Fourier-Transformierte vor und werden die Ausgaben ebenfalls in Fourier-Koeffizienten benötigt, so entfallen der erste und letzte Schritt; die Wavelet-Transformation ist dann in $\mathcal{O}(m)$ Rechenschritten durchführbar. Dies gilt auch für weitere Zerlegungen einer der Funktionen ψ_j , denn für diese ist lediglich eine Wiederholung der Schritte 2–4 notwendig.

Die $|\det J|$ Fourier-Transformationen im ersten Schritt sowie die Schritte 2 und 3 sind Berechnungen, die unabhängig von den Daten selbst notwendig sind. Sie können also zwischengespeichert werden und müssen so für eine Zerlegung weiterer Daten in Form von Funktionen f_2, f_3, \dots nicht erneut berechnet werden. Somit vereinfacht sich die Betrachtung der Rechenschritte für vorberechnete Adressierungsvektoren λ_g zu

$$2c_{\text{FFT}}m \log m + c_2|\det J|m + \mathcal{O}(m).$$

Liegen die Koeffizienten \hat{d} von $f \in V_M^\varphi$ bereits im Frequenz-Bereich vor, so entfallen auch die restlichen Fourier-Transformationen und es verbleibt lediglich Schritt 4 des Algorithmus, also eine schnelle Wavelet-Transformation der Komplexität

$$c_2|\det J|m = \mathcal{O}(m).$$

4

Trigonometrische Polynome

Eine wichtige Eigenschaft von Wavelet-Systemen $\psi_{j,y} := T_y \psi_j$, $y \in \mathcal{P}(M_j)$, ist die Beschreibung von Details sowohl im Frequenz- als auch im Ortsbereich. Ersteres wird dabei durch die verschiedenen Level $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ realisiert, Weiteres durch Translation $T_y \psi_j$ des Wavelets ψ_j zum Level j . Dazu müssen jedoch die Wavelets auch im Ortsbereich eine gewisse Lokalisierung aufweisen. Im Eindimensionalen werden in [50] de la Vallée Poussin-Mittel und die daraus resultierenden Wavelets betrachtet, die aufgrund des Abklingverhaltens ihrer Fourier-Koeffizienten eine gewisse Lokalität aufweisen.

Dieses Kapitel widmet sich solchen lokalisierten Skalierungsfunktionen φ_j , die einer periodischen, anisotropen Multiskalen-Analyse $((\{J_l\}_{l>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ genügen. Dabei entstehen die Fourier-Koeffizienten der Skalierungsfunktionen φ_j als Abtastung einer r -mal stetig differenzierbaren Funktion g . Analog entstehen die dazugehörigen Wavelets ψ_j ebenso als Abtastung einer solchen Funktion. Insgesamt verallgemeinert diese Konstruktion nicht nur die eindimensionalen de la Vallée Poussin-Mittel aus [50], sie ergänzt diese auch um weitere eindimensionale Funktionen. Die Konstruktion beinhaltet auch die in [29] eingeführten und in [2] verwendeten Dirichlet-Kerne.

Ausgehend von einer Einführung in die Notation der eindimensionalen Theorie der de la Vallée Poussin-Mittel aus [50] beschreibt Abschnitt 4.1 die Motivation für die nachfolgende Konstruktion. Der vorgestellte Ansatz verallgemeinert die de la Vallée Poussin-Mittel φ_N^T aus dem Eindimensionalen und zeigt die Herausforderungen im Mehrdimensionalen auf. Dabei ist ein wesentlicher neuer Fall die Dilatationsmatrix $J_D := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, die im Eindimensionalen kein Analogon besitzt.

In Abschnitt 4.2 werden de la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $l \leq n \in \mathbb{N}$, eingeführt, die neben der Matrix M_l zusätzlich von einem Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{l+1,n}$ abhängen und auf einer Funktion g basieren. Für die klassischen de la Vallée Poussin-

Mittel entspricht g einer gewissen C^1 -Funktion B_α . Die Konstruktion ist dabei derart allgemein, dass als Dilatationsmatrizen J_k , $k = l, \dots, n$, beliebige reguläre ganzzahlige Matrizen verwendet werden können. Der nachfolgende Abschnitt 4.3 führt für den dyadischen Fall die dazugehörigen Wavelets $\psi_{M_l}^{J_{l+1,n}}$, $l \leq n \in \mathbb{N}$, ein. Dieser Ansatz lässt alle Dilatationsmatrizen J mit Determinante ± 2 zu, also insbesondere neben der Matrix J_D auch die Scherungsmatrizen J_X^\pm, J_Y^\pm . Auf Basis einer Menge \mathcal{J}_d an Matrizen stellt der Abschnitt 4.4 zwei Ansätze vor, die Wavelets mit einer gewissen Hauptrichtung v zu konstruieren bzw. in einer Wavelet-Zerlegung zu erhalten.

Unter wenigen Einschränkungen an den Träger der Funktion g beschreibt der Abschnitt 4.5 schließlich, wie sich die rekursive Definition 4.6 zu einer expliziten Formel vereinfacht. Daraus ergeben sich die multivariaten de la Vallée Poussin-Mittel φ_M^J . Dies stellt einen Weg dar, aus den verallgemeinerten Mitteln eine Multiskalen-Analyse $(\{J_l\}_{l>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ zu erzeugen.

4.1 Einführung und Idee

Ausgehend von der Notation der klassischen de la Vallée Poussin-Mittel φ_N^T , wie sie in [50] zur Konstruktion von Wavelets verwendet werden, führt dieser Abschnitt zunächst eine Formulierung ein, bei der die Funktion b_α , aus der durch Abtastung die Fourier-Koeffizienten $c_k(\varphi_N^T)$, $k \in \mathbb{Z}$, entstehen, unabhängig von N definiert ist. Dabei wird der absolute Wert T durch einen relativen Wert $\alpha = \frac{T}{N}$ ersetzt. Mit dieser relativen Angabe wird dann der mehrdimensionale Fall für Funktionen B_α , die als Tensorprodukt aus b_α hervorgehen, eingeführt. Für die Staffelung der Räume, wie sie für eine Multiskalen-Analyse aus Abschnitt 1.5 notwendig ist, lässt sich eine zu Lemma 1.23 e) analoge Formulierung auch in den Funktionen angeben. Für den Fall, dass dabei die Dilatationsmatrix keine Diagonal-Matrix ist, tritt bei ebendieser Staffelung ein Sonderfall auf. Dies wird an der Matrix J_D illustriert.

Allgemeiner lassen sich die de la Vallée Poussin-Mittel φ_N^T auch als Abtastung gewisser B-Splines bzw. im Mehrdimensionalen Box-Splines B_Ξ interpretieren, die abschließend kurz eingeführt werden.

4.1 Einführung und Idee

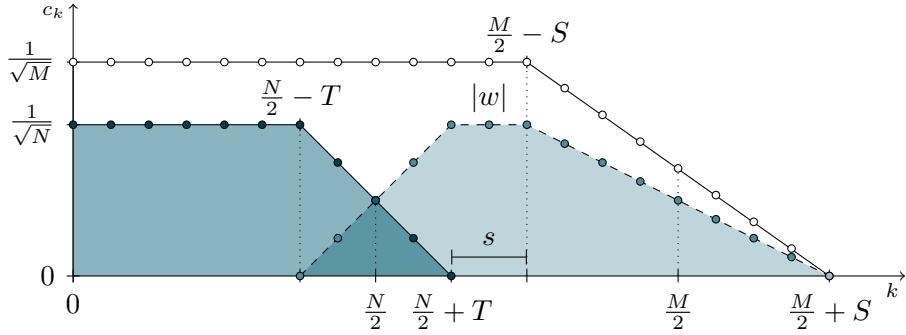


Abbildung 4.1. Die Fourier-Koeffizienten $c_k(\varphi_N^T)$, $|c_k(\psi_{M,N}^{S,T})|$, $c_k(\varphi_M^S)$, $k \geq 0$, (dunkel, hell, weiß) der de la Vallée Poussin-Mittel φ_N^T , φ_M^S und des dazugehörigen Wavelets $\psi_{M,N}^{S,T}$ für $M = 32 = 2N$, $S = 4 = 2T$ und die dazugehörigen Funktionen $\sqrt{N}^{-1} b_{\frac{T}{N}}(N^{-1}\circ)$, $\sqrt{M}^{-1} b_{\frac{S}{M}}(M^{-1}\circ)$ und $|\sqrt{N}^{-1} w_{\frac{S}{M}, \frac{T}{N}}(N^{-1}\circ)|$.

Die klassischen de la Vallée Poussin-Mittel

In [50, Kapitel 4] werden die de la Vallée Poussin-Mittel φ_N^T für gerade $N \in 2\mathbb{N}$ und $\frac{N}{2} \geq T \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\varphi_N^T = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\circ} \quad \text{mit} \quad c_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } |k| < \frac{N}{2} - T, \\ \frac{\frac{N}{2}+T-|k|}{2T} & \text{falls } \frac{N}{2} - T \leq |k| \leq \frac{N}{2} + T, \\ 0 & \text{falls } \frac{N}{2} + T < |k| \end{cases} \quad (4.1)$$

und zur Konstruktion einer Multiskalen-Analyse genutzt. Für zwei aufeinanderfolgende Skalierungsräume $V_N^{\varphi_N^T}$, $V_M^{\varphi_M^S}$ mit den de la Vallée Poussin-Mitteln φ_N^T , φ_M^S , $M = 2N$, $S \leq N$, ist dies in Abbildung 4.1 gezeigt. Die Fourier-Koeffizienten sind gegeben durch die Abtastung eines stückweise definierten linearen Splines der Form

$$b_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{2} - \alpha, \\ \frac{\frac{1}{2}+\alpha-|x|}{2\alpha} & \text{falls } \frac{1}{2} - \alpha < |x| < \frac{1}{2} + \alpha, \text{ für } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{2} + \alpha \leq |x|, \end{cases}$$

mit

$$c_k(\varphi_N^T) = \frac{1}{\sqrt{N}} b_{\frac{T}{N}}\left(\frac{k}{N}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es bezeichne b_0 den Grenzfall $b_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} b_\alpha$. Die Grenzen bezeichnen genau den modifizierten Dirichlet-Kern b_0 und den Féjer-Kern $b_{\frac{1}{2}}$. Um eine dyadische Multiskalen-Analyse zu erzeugen, muss auf jedem Level nach [50, Satz 4.1.3] gelten, dass

$$S + T \leq \frac{N}{2}. \quad (4.2)$$

Dies lässt sich bezüglich b_α auch schreiben als $\frac{2S}{M} + \frac{T}{N} \leq \frac{1}{2}$. Die beiden Bereiche $[\frac{N}{2} - T, \frac{N}{2} + T]$ und $[\frac{M}{2} - S, \frac{M}{2} + S]$ der abklingenden Koeffizienten dürfen sich also nicht überschneiden, sonst entsteht ein Widerspruch zu $\varphi_N \in V_M^{\varphi_M}$ nach Lemma 1.23 e). Somit erzeugt beispielsweise der Féjer-Kern keine Multiskalen-Analyse.

In Abbildung 4.1 wird die Gültigkeit der Ungleichung (4.2) durch die Existenz der Strecke mit Länge s verdeutlicht. Im Fall des Dirichlet-Kerns ist $S = T = 0$ und $s = \frac{N}{2}$. Im Fall $2(S + T) = N$ ist $s = 0$, es entsteht jedoch kein Widerspruch zu Lemma 1.23 e), denn es gilt $c_{\frac{N}{2}+T}(\varphi_N^T) = c_{-\frac{N}{2}-T}(\varphi_N^T) = 0$.

Ist $2\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$ erfüllt, so gilt für die Funktion

$$w(x) = w_{\alpha,\beta}(x) := e^{-\frac{ix\pi}{4}} \left(b_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) - b_\beta(x) \right) = e^{-\frac{ix\pi}{4}} \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}} b_\beta(x + 1 + 2z) \right) b_\alpha\left(\frac{x}{2}\right)$$

die Gleichheit der beiden Formulierungen. Das Wavelet $\psi = \psi_{M,N}^{S,T}$ ist dann gegeben durch Abtastung dieser Funktion, also

$$c_k(\psi) = \frac{1}{\sqrt{N}} w_{\frac{S}{M}, \frac{T}{N}}(N^{-1}k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion $|w|$ ist zusammen mit den Beträgen der Fourier-Koeffizienten $|c_k(\psi)|$ ebenso in Abbildung 4.1 dargestellt.

Die Bedingung aus Ungleichung (4.2) lässt sich auch dahingehend interpretieren, dass für die Projektion in den Raum der Translate $T_x \psi$, $x \in \mathcal{P}(N) = \{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$, mindestens ein trigonometrisches Polynom $\exp(i k \circ)$ exakt reproduziert werden muss. Im Fall $s = 0$ entspricht dies dem trigonometrischen Polynom $\exp(i(\frac{N}{2} + T) \circ) = \exp(i(\frac{M}{2} - S) \circ)$, im Fall $s > 0$ mindestens der Funktion $\exp(i(\frac{M+N}{4} + \frac{T-S}{2}) \circ)$.

Die Betrachtung der Funktionen b_α, b_β und $w_{\alpha,\beta}$ ermöglicht eine Charakterisierung zweier Skalierungsräume, die lediglich vom Dilatationsfaktor j , im Dyadischen also $j = 2$, abhängt. Die Restklassen $[k]_N$, $k \in \mathbb{Z}$, werden dabei übertragen auf $[y]_1$,

4.1 Einführung und Idee

$y \in \frac{1}{N}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Während T, S in absoluten Werten die Menge der Frequenzen charakterisieren, in denen ein Abklingverhalten vorliegt, wird dies durch die Werte α, β relativ zum Gesamtspektrum beschrieben.

Im Intervall $[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha]$ bzw. $[\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2} + \beta]$ der Funktionen b_α, b_β lässt sich eine beliebige Glattheit erzeugen, ohne dass dies den Ausführungen dieses Abschnitts widerspricht. In [38] wurden solche Funktionen zur Kantendetektion in periodischen Signalen verwendet.

Verallgemeinerung ins Mehrdimensionale

Um die Überlegungen und Zusammenhänge des vorhergehenden Abschnitts auf das Mehrdimensionale zu übertragen, sei zunächst der zweidimensionale Fall dyadischer Wavelets betrachtet. Dabei sei

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &:= \{\mathbf{J}_X, \mathbf{J}_Y, \mathbf{J}_D, \mathbf{J}_X^\pm, \mathbf{J}_Y^\pm\} \\ &:= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

eine Menge von Dilatationsmatrizen. Die Funktion

$$B_\alpha(\mathbf{x}) := b_{\alpha_1}(x_1)b_{\alpha_2}(x_2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, \quad (4.4)$$

ermöglicht es, die Skalierungsfunktion φ_M^α über ihre Fourier-Koeffizienten

$$c_k(\varphi_M^\alpha) := \frac{1}{\sqrt{|\det M|}} B_\alpha(M^{-T} k), \quad k \in \mathbb{Z}^2,$$

zu definieren.

Beispiel 4.1.

Für die Matrix $M = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 1.10 und $\alpha = \frac{1}{10}(1, 1)^T$ ist in Abbildung 4.2 a) die Funktion $B_\alpha(M^{-T} \circ)$ dargestellt, aus deren Abtastung die Fourier-Koeffizienten $c_k(\varphi_M^\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}^d$, entstehen. Sie ergibt sich durch Skalierung und Scherung der in Abbildung 4.2 b) gezeigten Funktion B_α , deren Träger in c) schematisch illustriert ist. Die gestrichelte Linie zeigt den Rand $\partial \text{supp}(B_\alpha)$, die durchgezogene Linie den zentrierten Einheitskubus $Q_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, auf den die Modulo-Operation $\circ \bmod M^T$ nach der Skalierung durch M^{-T} zurückgeführt wird. Die ganzzahligen Vektoren $k \in \mathcal{G}_S(M^T)$

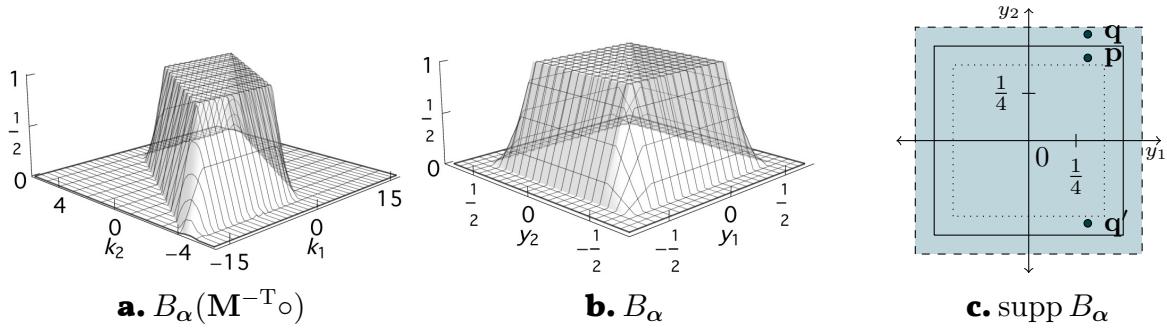


Abbildung 4.2. Drei Darstellungen der Funktion B_α , $\alpha = \frac{1}{10}(1, 1)^T$: a) Als Funktion, aus deren Abtastung die Fourier-Koeffizienten entstehen, b) auf dem Einheitskubus und c) als schematische Zeichnung des Supports bezüglich des Einheitskubus. Dort wird die Symmetrie bezüglich der Achsen deutlich.

werden dabei auf das Muster $\mathcal{P}_S(M^T)$ innerhalb des zentrierten Einheitskubus \mathcal{Q}_2 abgebildet. Die gepunktete Linie kennzeichnet den Übergang der konstanten Funktion innerhalb zum Abklingen außerhalb.

Für die Betrachtung aller Elemente $x + \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathcal{P}_S(M^T)$, genügt es aufgrund der Symmetrie der Funktion B_α sich auf einen Quadranten zu beschränken. Sei $q \in \text{supp } B_\alpha$ ein Punkt im ersten Quadranten. Dann liegt zwar $q' := q - (0, 1)^T \equiv q \bmod 1$ nicht im ersten Quadranten, es gibt jedoch einen Punkt p im ersten Quadranten, der durch Multiplikation mit einem Vorzeichenvektor aus q' hervorgeht. In diesem Fall gilt für den Punkt $p = (q'_1, -q'_2)^T$, der in Abbildung 4.2 c) dargestellt ist, dass $B_\alpha(q') = B_\alpha(p)$.

Für die Zerlegung einer regulären Matrix $M = JN \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ ist die Gültigkeit der Inklusion $\varphi_N^\beta \in V_M^{\varphi_M^\alpha}$, $\beta \in [0, \frac{1}{2}]^2$, nach Lemma I.23 e) notwendig, damit analog zu den ein-dimensionalen Ausführungen ein Schritt der Multiskalen-Analyse $(\{J_l\}_{l>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$ aus Abschnitt I.5 entsteht. Gilt sogar, dass eine Funktion $\tilde{a}_J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, die bezüglich jeder Dimension 1-periodisch ist, so dass

$$B_\beta(J^T x) = \tilde{a}_J(x) B_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (4.5)$$

erfüllt ist, so gilt die Inklusion für alle regulären Matrizen $M, N \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$, $M = JN$, denn dann ergeben sich Koeffizienten für Lemma I.23 e) analog zu den Fourier-Koeffizienten als Abtastung der Funktion \tilde{a}_J über

$$\hat{a}_h = \tilde{a}_J(M^{-T} h), \quad h \in \mathcal{G}_S(M^T). \quad (4.6)$$

4.1 Einführung und Idee

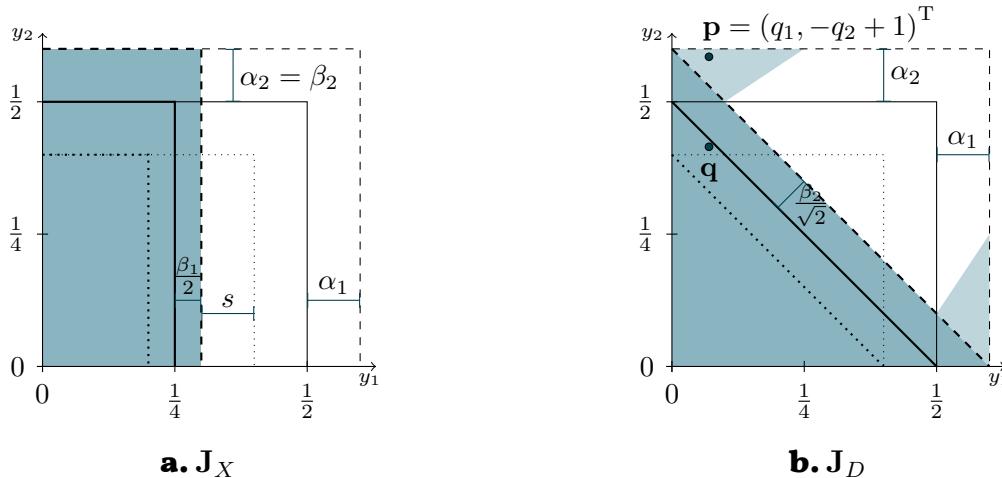


Abbildung 4.3. Die Funktionen B_α (weiß) und $B_\beta(J^T \circ)$ (dunkel) für die Matrizen a) J_X und b) J_D , sowie jeweils $\alpha = \beta = \frac{1}{10}(1, 1)^T$. In hell ist der Bereich gekennzeichnet, in dem es zu einem Widerspruch kommt, etwa mit den Punkten p und q.

In dieser Konstruktion entsteht ein Widerspruch, falls $\text{supp } B_\beta(\mathbf{J}^T \circ) \not\subset \text{supp } B_\alpha$ gilt. Andernfalls lässt sich die Aussage auf $x \in \text{supp } B_\alpha$ beschränken. Die Inklusion hängt neben den Parametern α, β wesentlich von der Wahl der Matrix J ab. Dazu seien zum Abschluss dieses Abschnitts 2 Fälle zur Illustration genannt, die in Abbildung 4.3 dargestellt sind.

Ist $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X$ und $\alpha_2 = \beta_2$, so entsteht auf jeder Horizontalen der eindimensionale Fall wie im vorherigen Abschnitt. Es muss also nach (4.2) gelten, dass $2\alpha_1 + \beta_1 \leq \frac{1}{2}$, d. h. $\alpha_1 + \frac{\beta_1}{2} \leq \frac{1}{4}$. Dies ist in Abbildung 4.3 a) dargestellt durch die eingezeichnete Strecke der Länge $s \geq 0$.

Ist allerdings $J = J_D$, so kommt es in der eingeführten Konstruktionsidee als direkte Verallgemeinerung des Eindimensionalen zu einem Widerspruch, sobald einer der Einträge von α, β von 0 verschieden ist. Dies ist in Abbildung 4.3 b) dargestellt: Im Punkt q gilt $B_\alpha(q) \neq 0$ und $B_\beta(J_D^{-T}q) \neq 0$. Es existiert jedoch ein zweiter Punkt $q' = q - (0, 1)^T$, siehe in Abbildung 4.3 b) den dazu an der y_1 -Achse gespiegelten Punkt p , mit $B_\alpha(q') \neq 0 = B_\beta(J^{-T}q')$. Dies ist ein Widerspruch zur Existenz einer 1-periodischen Funktion \tilde{a}_{J_D} . Das bedeutet, dass es einzelne Matrizen M geben kann, für die diese Konstruktion zweier Funktionen $\varphi_N^\beta, \varphi_M^\alpha$ die Inklusion $\varphi_N^\beta \in V_M^{\varphi_M^\alpha}$ erfüllt, im Allgemeinen gilt dies jedoch nicht. Genauer genügt es, wenn in den hell markierten Bereichen der Abbildung 4.3 b) ein Musterpunkt $y \in \mathcal{P}(M^T)$ liegt, denn dann gibt es eben beschriebenen Widerspruch. Gilt für den kleinsten Eigenwert $\lambda_1(M)$ der Matrix M , dass $\lambda_1(M)^{-1} \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, so liegt ein Widerspruch vor. Eine Multiskalen-

Analyse, welche die Matrix J_D beinhaltet, benötigt also einen anderen Ansatz. Einen ähnlichen Widerspruch erzeugen die Matrizen J_X^\pm, J_Y^\pm bereits für $\alpha = \beta = 0$.

Box-Splines

Im Folgenden werden anstelle der Konstruktion aus den vorhergehenden Abschnitten allgemeine Polynome $B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ der Gestalt

$$B(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \lambda_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{N}^d,$$

verwendet, wobei für die Monome die Kurzschreibweise $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$ benutzt wird. Die Summe der Elemente $\|\alpha\|_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ bezeichnet den Totalgrad eines Monoms \mathbf{x}^α , das Maximum $\|\alpha\|_\infty = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ den Grad. Analog bezeichnet das Maximum der Grade bzw. der Totalgrade aller Monome von B mit $\lambda_\alpha \neq 0$ den Grad bzw. Totalgrad von B . Außerdem lassen sich Funktionen auch auf Geradenstücken oder Gebieten durch unterschiedliche Polynome definieren. Für solche stück- oder gebietsweisen Polynome B ergeben sich Grad und Totalgrad als Maximum aller in der Funktion vorkommenden Strecken- bzw. Gebietspolynome.

Die Box-Splines, siehe [3], sind eine Verallgemeinerung der eindimensionalen B-Splines, siehe etwa [41], und somit stück- bzw. gebietsweise Polynome. Dazu seien

$$\chi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } x = \pm \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{falls } x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

und

$$\chi(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^d \chi(x_i), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

definiert. Sie heißen die charakteristischen Funktionen des (symmetrischen) Einheitsintervalls bzw. des d -dimensionalen Einheitskubus.

Weiter sei eine Matrix $\Xi \in \mathbb{R}^{d \times s}$, $s \in \mathbb{N}$, im Folgenden auch verstanden als eine verallgemeinerte Menge von s Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$, welche die Spalten von Ξ bilden.

4.1 Einführung und Idee

Dabei sind Mehrfachvorkommen erlaubt. Weiter bezeichne $\Xi \setminus \xi$ die Matrix der Spalten von Ξ , bei denen ein Vorkommen des Vektors $\xi \in \mathbb{R}^d$ entfernt worden ist. Für eine zweite Matrix Θ bezeichne $\Theta \subset \Xi$, dass jede Spalte von Θ mindestens einmal in Ξ vorkommt.

Im Folgenden sei $s \geq d$ und Ξ stets derart gegeben, dass d Spalten existieren, die linear unabhängig sind. Insbesondere ist also jede der im Folgenden auftretenen Matrizen $\Xi \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär.

Definition 4.2 (Box-Spline).

Für eine Matrix $\Xi \in \mathbb{R}^{d \times s}$, die d linear unabhängige Spalten besitzt, ist der (zentrierte) Box-Spline $B_\Xi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$B_\Xi(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{|\det \Xi|} \chi(\Xi^{-1} \mathbf{x}) & \text{falls } s = d, \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} B_{\Xi \setminus \xi}(\mathbf{x} - t\xi) dt & \text{falls } s > d \text{ und } \xi \in \text{span } \Xi \setminus \xi. \end{cases}$$

Der zweite Fall in der Definition ist wohldefiniert, denn da d linear unabhängige Vektoren in Ξ existieren, liegt für $s > d$ mindestens ein Spaltenvektor in der linearen Hülle der Restlichen. Das nachfolgende Lemma listet die wesentlichen in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften der Box-Splines auf. Die Beweise finden sich in [3].

Lemma 4.3.

Gegeben sei ein Box-Spline B_Ξ , $\Xi \in \mathbb{R}^{d \times s}$. Dann gilt

- a) B_Ξ besitzt den kompakten Träger

$$\text{supp } B_\Xi = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^s \alpha_i \xi_i ; -\frac{1}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{1}{2} \right\}$$

und ist auf diesem nicht negativ.

- b) B_Ξ ist stück- bzw. gebietsweise ein Polynom vom Totalgrad höchstens $s - d$.

- c) B_Ξ ist entlang jeder Richtung t -mal stetig differenzierbar mit

$$t := \min \{ r ; \Theta \in \mathbb{R}^{d \times r} \text{ mit } \Theta \subset \Xi \text{ und } \text{span}(\Xi \setminus \Theta) \neq \mathbb{R}^d \} - 2.$$

d) B_{Ξ} bildet eine Zerlegung der 1. Es gilt für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, dass

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} B_{\Xi}(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = 1.$$

4.2 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen

Im Folgenden sei eine Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, welche die Eigenschaften

F1) $\forall \mathbf{x} \in \text{supp } g : g(\mathbf{x}) \geq 0$ und $g(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \mathcal{Q}_d$,

F2) $\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = 1$, für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}_d$,

erfüllt. Die Funktion g kann so gewählt werden, dass ihre partiellen Ableitungen r -mal stetig differenzierbar sind. Eine Möglichkeit, diese Funktion g zu wählen, ist, $g = B_{\alpha}$ zu setzen, derjenigen Funktion, die dem Tensorprodukt der eindimensionalen Funktionen aus Gleichung (4.4) entspricht. Weitere Funktionen, die diese Eigenschaften erfüllen, sind etwa zentrierte Box-Splines B_{Ξ} , bei denen $\mathbf{E}_d \subset \Xi$ ist.

Definition 4.4 (Dilatations-Operator).

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ und eine reguläre Matrix $\mathbf{J} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ ist der *Dilatations-Operator* gegeben durch

$$D_{\mathbf{J}} f := \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} f(\mathbf{J} \circ).$$

Definition 4.5 (\mathbf{J} -Periodisierung von f).

Sei $\mathbf{J} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ eine reguläre Matrix. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ heißt \mathbf{J} -summierbar, falls für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$f^{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{x} + \mathbf{J}^T \mathbf{z}) < \infty.$$

Die Funktion $f^{\mathbf{J}}$ ist \mathbf{J}^T -periodisch, d. h. $f^{\mathbf{J}}(\mathbf{J}^{-T} \circ)$ ist 1-periodisch in jeder Dimension, und heißt \mathbf{J}^T -Periodisierung von f .

Eine Funktion g mit den Eigenschaften F1) und F2) ist insbesondere \mathbf{J} -summierbar für alle regulären Matrizen $\mathbf{J} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, denn es gilt $\mathbf{J}^T \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{Z}^d$. Durch die Periodisierung

4.2 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen

bleiben Grad, Totalgrad und Differenzierbarkeits-Eigenschaften eines Polynoms f in der \mathbf{J}^T -Periodisierung $f^{\mathbf{J}}$ erhalten.

Es bezeichne für zwei Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, von denen f_1 \mathbf{J} -summierbar ist,

$$\Phi_{\mathbf{J}}(f_1, f_2) := f_1^{\mathbf{J}} \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \mathbf{D}_{\mathbf{J}^{-T}} f_2 = \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} f_1(\circ - \mathbf{J}^T \mathbf{z}) \right) f_2(\mathbf{J}^{-T} \circ)$$

den Operator, der f_1 \mathbf{J}^T -periodisiert und mit $\mathbf{D}_{\mathbf{J}^{-T}} f_2$ multipliziert.

Für gegebene reguläre Matrizen $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_n \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, $n \in \mathbb{N}$, bezeichne

$$\mathcal{J}_{l,k} := \begin{cases} (\mathbf{J}_j)_{j=l}^k \in (\mathbb{Z}^{d \times d})^{k-l+1} & \text{falls } 1 \leq l \leq k \leq n, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

den dazugehörigen Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{l,k}$, der die Matrizen $\mathbf{J}_l, \dots, \mathbf{J}_k$ umfasst. Dabei schränkt die Schreibweise $\mathcal{J}_{l,k} \in \mathcal{X}^{k-l+1}$ die Matrizen \mathbf{J}_j , $j = l, \dots, k$, auf die Menge \mathcal{X} an Matrizen ein. Ein Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{1,n}$, für den $|\det \mathbf{J}_j| = 2$, $j = 1, \dots, n$, gilt, heißt dyadisch.

Für einen Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{1,n}$ sind die Funktionen $B_{\mathcal{J}_{l,k}}$, $l, k \in \{1, \dots, n\}$, rekursiv definiert durch

$$B_{\mathcal{J}_{l,k}} := \begin{cases} \Phi_{\mathbf{J}_l}(g, B_{\mathcal{J}_{l+1,k}}) & \text{falls } l \leq k, \\ g & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit den Eigenschaften F1) und F2) ist.

Definition 4.6 (De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen).

Gegeben sei eine reguläre Matrix $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, $m_0 = |\det \mathbf{M}_0| > 0$, und ein Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{1,n} \in (\mathbb{Z}^{d \times d})^n$, $n \in \mathbb{N}$, regulärer Matrizen \mathbf{J}_l , $l = 1, \dots, n$. Es bezeichne für $l = 1, \dots, n$ jeweils $\mathbf{M}_l := \mathbf{J}_l \cdot \dots \cdot \mathbf{J}_1 \mathbf{M}_0$ und $m_l := |\det \mathbf{M}_l|$.

Dann heißen die Funktionen $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $l = 0, \dots, n$, also insbesondere $\varphi_{\mathbf{M}_n}^{\mathcal{J}_{n+1,n}} = \varphi_{\mathbf{M}_n}^\emptyset$, die gegeben sind durch ihre Fourier-Koeffizienten

$$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}) := \frac{1}{\sqrt{m_l}} B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}(\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{d \times d}, \quad l = 0, \dots, n,$$

de la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen.

Dabei bezeichne

$$V_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} := \text{span} \left\{ T_{\mathbf{y}} \varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} ; \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_l) \right\}, \quad l \in \{0, \dots, n\},$$

den Raum der Translate der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktion $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ auf dem Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M}_l)$.

Lemma 4.7.

Gegeben seien die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $l = 0, \dots, n$, aus Definition 4.6. Dann gelten folgende Aussagen:

- a) Die Räume der Translate sind geschachtelt, denn $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} \in V_{\mathbf{M}_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}$, $l = 0, \dots, n-1$.
- b) Für ein jedes $l \in \{0, \dots, n\}$ sind die Translate $T_{\mathbf{y}} \varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}_S(\mathbf{M}_l)$, linear unabhängig.
- c) Sei $g \in C^r(\mathbb{R}^d)$, $r \in \mathbb{N}$ und $l \in \{0, \dots, n\}$. Dann gilt $B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}(\mathbf{M}_l^{-T} \circ) \in C^r(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. a) Sei $l \in \{0, \dots, n-1\}$ beliebig aber fest gewählt. Es sei

$$\hat{a}_{\mathbf{h}} := \sqrt{|\det \mathbf{J}_{l+1}|} g^{\mathbf{J}_{l+1}}(\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}_S(\mathbf{M}_{l+1}^T).$$

Durch Anwenden der Zerlegung von $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ in $\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}_{l+1}^T \mathbf{z}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}_S(\mathbf{M}_{l+1}^T)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$, folgt

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}_{l+1}^T \mathbf{z}}(\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}) &= \frac{1}{\sqrt{m_j}} B_{\mathcal{J}_{l+1,n}} \left(\mathbf{M}_l^{-T} (\mathbf{h} + \mathbf{M}_{l+1}^T \mathbf{z}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_j}} \Phi_{\mathbf{J}_{l+1}}(g, B_{\mathcal{J}_{l+2,n}}) (\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{h} + \mathbf{J}_{l+1}^T \mathbf{z}) \\ &= \frac{\sqrt{|\det \mathbf{J}_{l+1}|}}{\sqrt{m_{j+1}}} \left(\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{h} + \mathbf{J}_{l+1}^T (\mathbf{x} + \mathbf{z})) \right) \\ &\quad \times B_{\mathcal{J}_{l+2,n}}(\mathbf{J}_{l+1}^{-T} (\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{h} + \mathbf{J}_{l+1}^T \mathbf{z})) \\ &= \hat{a}_{\mathbf{h}} \frac{1}{\sqrt{m_{l+1}}} B_{\mathcal{J}_{l+2,n}}(\mathbf{M}_{l+1}^{-T} \mathbf{h} + \mathbf{z}) \\ &= \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}_{l+1}^T \mathbf{z}}(\varphi_{\mathbf{M}_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}) \end{aligned}$$

und somit folgt mit Lemma I.23 e) die Aussage.

4.2 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen

b) Sei $\mathbf{h} \in \mathcal{G}_S(\mathbf{M}_l^T)$, $l \in \{0, \dots, n\}$. Dann folgt $c_{\mathbf{h}}(\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}) = \frac{1}{\sqrt{m_l}} B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}(\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{h})$ und $\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{h} \in \mathcal{Q}_d$:

Für $l = n$ gilt $c_{\mathbf{h}}(\varphi_{\mathbf{M}_n}^{\mathcal{J}_{n+1,n}}) \neq 0$, denn für $\mathbf{x} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ ist $B_{\mathcal{J}_{n+1,n}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) > 0$.

Für $0 \leq l < n$ gilt per Induktion über l , dass nach Induktionsvoraussetzung die Funktion $B_{\mathcal{J}_{l+2,n}}(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}(\mathbf{x}) &= \Phi_{\mathbf{J}_{l+1}}(g, B_{\mathcal{J}_{l+2,n}})(\mathbf{x}) \\ &= \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}} g(\mathbf{x} + \mathbf{J}_{l+1}^T \mathbf{z}) \right) B_{\mathcal{J}_{l+2,n}}(\mathbf{J}_{l+1}^{-T} \mathbf{x}) > 0, \end{aligned}$$

denn $\mathbf{J}_{l+1}^{-T} \mathbf{x} \in \mathcal{Q}_d$ und g ist nichtnegativ. Daher gilt $c_{\mathbf{h}}(\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}) \neq 0$ für alle $\mathbf{h} \in \mathcal{G}_S(\mathbf{M}_l^T)$. Damit sind die Translate $T_y \varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $y \in \mathcal{P}_S(\mathbf{M}_l)$, nach Lemma I.23 g) linear unabhängig.

c) Für $l = n$ entspricht $B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}(\mathbf{M}_l^{-T} \circ)$ der um \mathbf{M}_n^{-T} gestauchten Funktion g und ist somit nach Voraussetzung in $C^r(\mathbb{R}^d)$. Für $0 \leq l < n$ folgt dies mit der gleichen Induktion wie in b). \square

Analog zum Teil c) des vorigen Lemmas lassen sich auch 1-periodische Funktionen $\tilde{a}_{\mathbf{J}_{l+1}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 0, \dots, n-1$, wie in Gleichung (4.5) angeben, und zwar

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\mathbf{J}_{l+1}} &:= \sqrt{|\det \mathbf{J}_{l+1}|} g^{\mathbf{J}_{l+1}}(\mathbf{M}_l^{-T} \circ) \\ &= \sqrt{|\det \mathbf{J}_{l+1}|} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{M}_l^{-T} \circ + \mathbf{J}_{l+1}^T \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Damit lässt sich eine de la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktion $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $l < n$, auf Grundlage der Koeffizienten $\hat{a}_{\mathbf{h}} = \tilde{a}_{\mathbf{J}_{l+1}}(\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}_S(\mathbf{M}_{l+1}^T)$, im darüberliegenden Raum $V_{\mathbf{M}_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}$ angeben. Mit diesen Koeffizienten und Lemma I.30 lassen sich Algorithmen, wie die Orthonormalisierung der Translate oder eine Projektion auf den Raum der Translate $T_y \varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $y \in \mathcal{P}_S(\mathbf{M}_l)$, durchführen.

Lemma 4.8.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{J}_{1,n} \in \{\mathbf{J}_X, \mathbf{J}_Y, \mathbf{J}_D\}^n$ und die Funktion $g = B_{\mathbf{E}_d} = \chi$. Dann entsprechen die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $l = 0, \dots, n$, den Dirichlet-Kernen $D_{\mathbf{M}_l}^{\text{re}}$ aus [29, Abschnitt 6].

Beweis. Für $l = n$ ist mit den Koeffizienten

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{m_j}} \chi(\mathbf{M}_n^{-T} \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathcal{K}(\mathbf{M}^T),$$

die de la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktion $\varphi_{\mathbf{M}_n}^\emptyset$ identisch mit dem reellen Dirichlet-Kern $D_{\mathbf{M}_n}^{\text{re}}$, vgl. [29, S. 60]. Für $l < n$ gilt per Induktion über l und der Tatsache, dass sich die Summe in

$$B_{\mathcal{J}_{l+1,n}} = \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \chi(\circ - \mathbf{J}_{l+1}^T \mathbf{z}) \right) B_{\mathcal{J}_{l+2,n}}(\mathbf{J}_{l+1}^{-T} \circ)$$

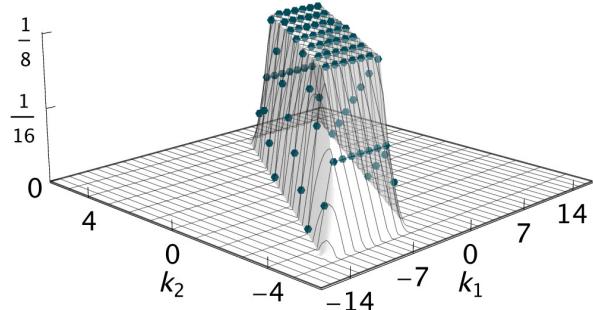
lediglich in den Randpunkten von χ unterscheidet und diese durch die Multiplikation wieder hergestellt werden, dass $B_{\mathcal{J}_{l+1,n}} = \chi$, $l = 0, \dots, n$. \square

Beispiel 4.9.

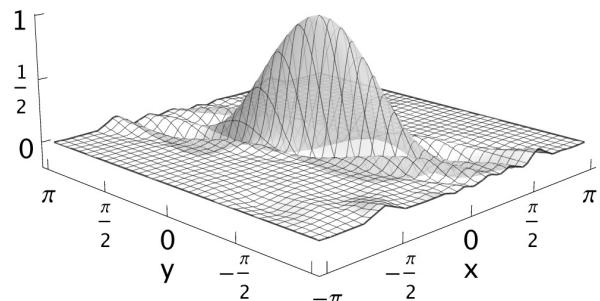
Für die folgenden Beispiele sei $n = 1$, also die Zerlegung eines Levels der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_N^{(J)}, \varphi_M^\emptyset$ betrachtet. Die dabei verwendete Funktion $g = B_\alpha$ wurde bereits in Gleichung (4.4) eingeführt.

- a) Für $d = 1$ und $M = 2N$, $N \in \mathbb{N}$, also $J = 2$, sowie $N > T \in \mathbb{N}$ und $S = 2T < 2N = M$ sei $\alpha = \frac{T}{N} = \frac{S}{M}$. Dann entsprechen für $S + T = 3N\alpha \leq \frac{N}{2}$, vgl. (4.2), die Funktionen $\varphi_M^\emptyset, \varphi_N^{(J)}$ aus Definition 4.6 den klassischen de la Vallée Poussin-Mitteln φ_M^S, φ_N^T aus [50].
- b) Es seien $d = 2$, $\alpha = \frac{1}{10}(1, 1)^T$, $\mathbf{N}_X = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{M} = \mathbf{J}_X \mathbf{N}_X$. Die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen φ_M^\emptyset und $\varphi_{\mathbf{N}_X}^{(J_X)}$ sind über ihre Fourier-Koeffizienten als Abtastungen der beiden stetigen Funktionen $\sqrt{m}^{-1} g(\mathbf{M}^{-T} \circ)$ und $\sqrt{\frac{m}{2}}^{-1} \Phi_{\mathbf{J}_X}(g, g)(\mathbf{N}_X^{-T} \circ)$ gegeben. Die Funktionen sind identisch mit denjenigen, die im Abschnitt 4.1 mit $\alpha = \beta = \frac{1}{10}(1, 1)^T$ betrachtet wurden. Die von 0 verschiedenen Fourier-Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{N}_X}^{(J_X)}), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, sind zusammen mit der stetigen Funktion $\sqrt{\frac{m}{2}}^{-1} B_{\frac{1}{10}}(\mathbf{N}_X^{-1} \circ)$, aus deren Abtastung sie entstehen, in Abbildung 4.4 a) gezeigt. Die damit definierte de la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktion $\varphi_{\mathbf{N}_X}^{(J_X)}$ ist in Abbildung 4.4 b) dargestellt.
- c) Für die Zerlegung aus b) mit $\alpha = \beta = 0$ entstehen die Dirichlet-Kerne $D_{\mathbf{M}}$ und $D_{\mathbf{N}_X}$, vergleiche Lemma 4.8. Die Funktion $\sqrt{\frac{m}{2}}^{-1} B_0$, aus deren Abtastung die Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}(D_{\mathbf{N}_X})$ entstehen, ist nicht stetig, vgl. Abbildung 4.4 c). Im Vergleich zum Dirichlet-Kern $D_{\mathbf{N}_X}$ ist die de la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktion $\varphi_{\mathbf{N}_X}^{(J_X)}$ glatter, vgl. dazu die Abbildungen 4.4 b) und d).

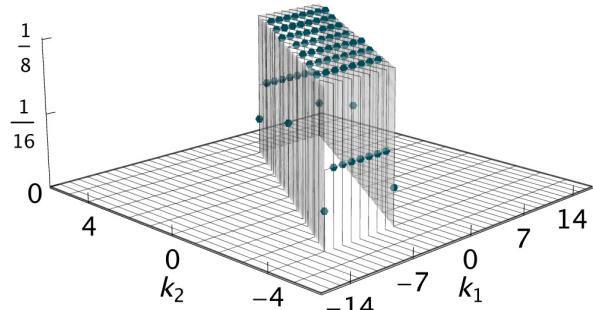
4.2 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen



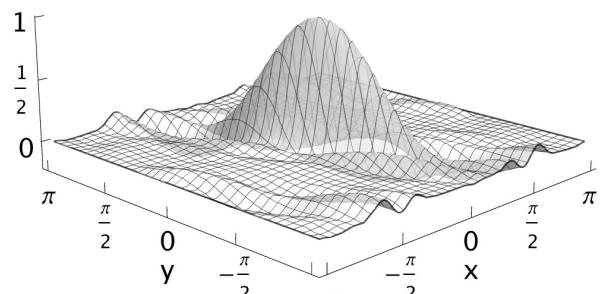
a. $\sqrt{\frac{m}{2}}^{-1} B_{\frac{1}{10}}(N_X^{-1} \circ)$ und $c_k(\varphi_{N_X}^{J_X})$.



b. $\varphi_{N_X}^{(J_X)}$.



c. $\sqrt{\frac{m}{2}}^{-1} B_0(N_X^{-1} \circ)$ und $c_k(D_{N_X})$.



d. D_{N_X} .

Abbildung 4.4. Die Fourier Koeffizienten $\varphi_{N_X}^{(J_X)}$ der in Beispiel 4.9 b) beschriebenen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktion $\varphi_{N_X}^{(J_X)}$ in a) und b) im Vergleich zum Dirichlet-Kern D_{N_X} aus Beispiel 4.9 c), der in c) und d) dargestellt ist.

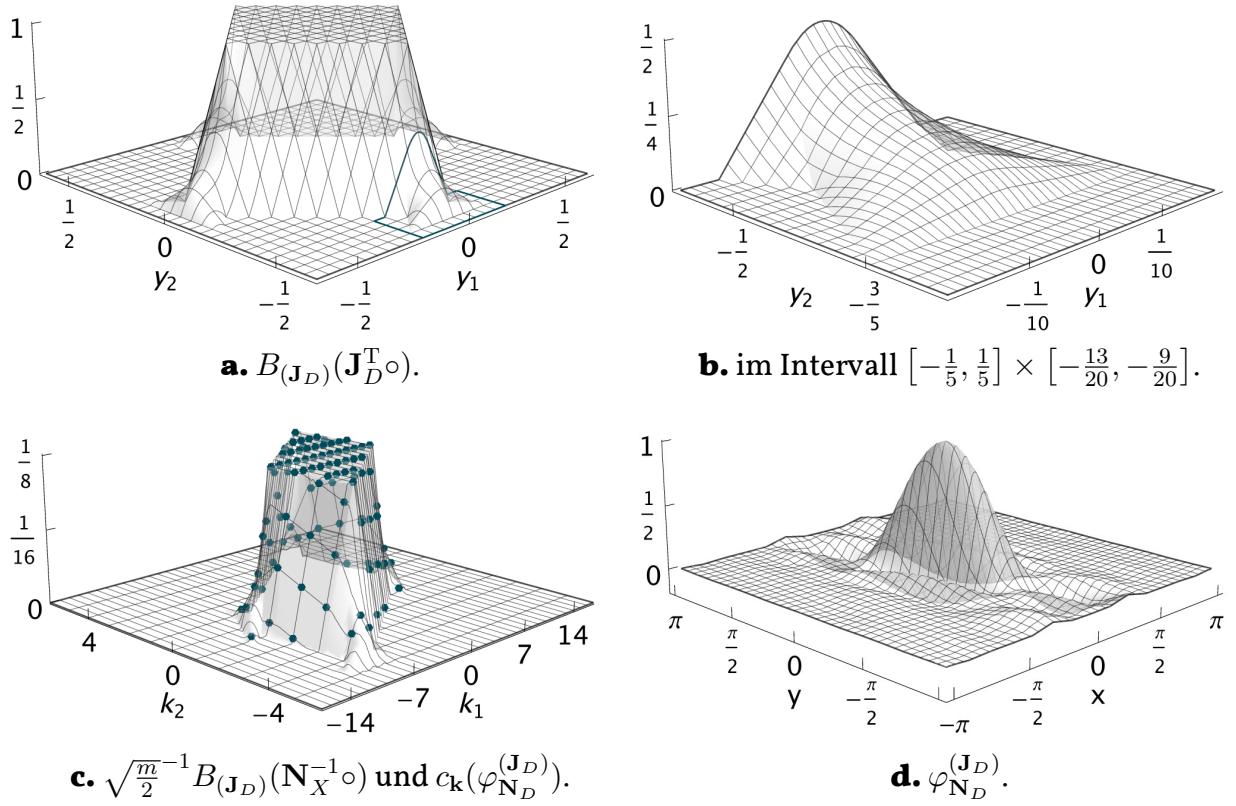
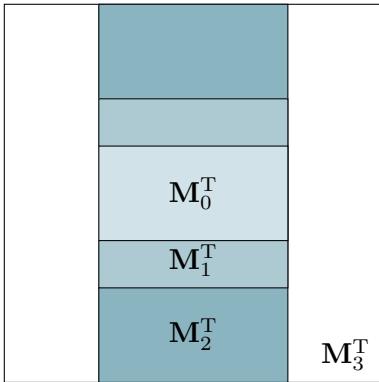


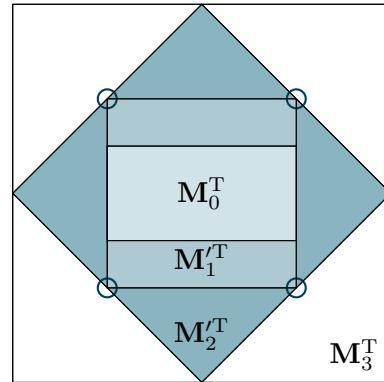
Abbildung 4.5. In Analogie zu Abbildung 4.2 b) ist $B_{(J_D)}(J_D^T \circ)$ aus Beispiel 4.9 d) in a) dargestellt; der Einheitskubus korrespondiert hier zu demjenigen bzgl. M^{-T} . Der hervorgehobene Bereich ist in b) vergrößert dargestellt. Auf allen Gitterpunkten in c) liegen die Fourier-Koeffizienten $c_k(\varphi_{N_D}^{(J_D)})$, von denen die echt positiven eingezeichnet sind. Die daraus resultierende Funktion $\varphi_{N_D}^{(J_D)}$ ist in d) gezeigt.

- d) Seien d und α wie in b) und $N_D = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Dann ist mit $M = J_D N_D$ diese Matrix M ebenso wie aus b). Bei der Konstruktion der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen φ_M^\emptyset und $\varphi_{N_D}^{(J_D)}$ entsteht der in Abbildung 4.3 b) dargestellte Widerspruch nicht. Die Funktion $\sqrt{\frac{m}{2}}^{-1} B_{J_{1,1}}(M^{-T} \circ) = \sqrt{\frac{m}{2}}^{-1} [g, g]^{J_D}(M^{-T} \circ)$ ist in Abbildung 4.5 a) gezeigt, wobei insbesondere der Bereich um den Punkt $(0, -\frac{1}{2})^T$ in Abbildung 4.5 b) die Stetigkeit der Funktion verdeutlicht. Die Fourier-Koeffizienten $c_k(\varphi_{N_D}^{(J_D)}) = \sqrt{\frac{m}{2}} [g, g]^{J_D}(N_D^{-T} k)$ sind in Abbildung 4.5 c) zusammen mit dem ganzzahligen Gitter dargestellt, die damit definierte Funktion $\varphi_{N_D}^{(J_D)}$ in Abbildung 4.5 d). Es liegen je drei Koeffizienten in jedem der vier Bereiche, die durch die J_D^T -Periodisierung manipuliert wurden im Vergleich zur Funktion $\sqrt{\frac{m}{2}}^{-1} g(N_D^{-T} \circ)$.

4.2 De la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktionen



a. $M_3 = J_X J_Y J_Y M_0$.



b. $M_3 = J_D J_D J_Y M_0$.

Abbildung 4.6. Zwei unterschiedliche Möglichkeiten, die Matrix M_3 als Produkt dreier Dilatationsmatrizen und M_0 zu schreiben; illustriert anhand des Trägers, den die Funktionen $B_{\mathcal{J}_{l,3}}(M_l^{-T} \circ)$ bzw. $B_{\mathcal{J}'_{l,3}}(M_l'^{-T} \circ)$ aus der Definition 4.6 der de la Vallée Poussin-Mittel $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,3}}$, $l = 0, 1, 2, 3$, nach Eigenschaft F1 von g mindestens besitzen.

Die Konstruktion der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen ermöglicht also, ausgehend von einer Funktion g und einer Menge an regulären Dilatationsmatrizen J_l , $l = 1, \dots, n$, Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ anzugeben, so dass die dazugehörigen Räume gestaffelt sind und jeweils die Dimension m_l besitzen. Dabei hängt $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ von den $n - l$ Dilatationsmatrizen aus dem Vektor $\mathcal{J}_{l+1,n}$ ab und kann rekursiv mittels $B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ berechnet werden. Die Koeffizienten, welche die Funktion $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ für $l < n$ im darüberliegenden Raum $V_{M_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}$ charakterisieren, lassen sich hingegen explizit und in geschlossener Form durch Koeffizienten \hat{a}_h , $h \in \mathcal{G}(M_{l+1}^T)$, aus dem Beweis von Lemma 4.7 a) angegeben.

Für die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ sind also wie bei der Multiskalen-Analyse ($\{J_l\}_{l>0}$, $\{V_k\}_{k \geq 0}$) die Dilatationsmatrizen von besonderer Bedeutung. Dass es dabei nicht nur genügt, die Matrizen M_0 und M_n zu kennen, wie es im eindimensionalen dyadischen Fall möglich wäre, zeigt das folgende

Beispiel 4.10.

Gegeben sei eine Diagonalmatrix $M_3 = N E_2$, $N \in 4\mathbb{Z}$. Die Matrix $M_0 = \text{diag}\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{4}\right)$ ist mit den Matrix-Vektoren $\mathcal{J}_{1,3} = (J_Y, J_Y, J_X)$, also $M_3 = J_X J_Y J_Y M_0$ und $\mathcal{J}'_{1,3} = (J_Y, J_D, J_D)$, also $M_3 = J_D J_D J_Y M_0$, darstellbar. Beide Matrix-Vektoren können für die Konstruktion der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,3}}$ bzw. $\varphi_{M'_l}^{\mathcal{J}'_{l+1,3}}$ mit $M_0 = M'_0$ und $M_3 = M'_3$ verwendet werden. In Abbildung 4.6 sind für beide

Matrix-Vektoren $\mathcal{J}_{1,3}$ und $\mathcal{J}'_{1,3}$ die Gebiete $M_l^T \mathcal{Q}_2$ in a) und $M'_l^T \mathcal{Q}_2$ in b) gezeigt. Diese Gebiete sind diejenigen, die $\text{supp } B_{\mathcal{J}_{l+1,3}}(M_l^{-T} \circ)$ bzw. $\text{supp } B_{\mathcal{J}'_{l+1,3}}(M'^{-T} \circ)$ jeweils mindestens umfassen, da g die Eigenschaft F1 erfüllt. Für $l = 2$ unterscheiden sich diese Bereiche und die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_2}^{(J_X)}$ und $\varphi_{M'_2}^{(J_D)}$ sind nicht identisch. Für $l = 0, 1$ lässt sich nur aus dem minimalen Träger nicht auf die Identität von $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,3}}$ und $\varphi_{M'_l}^{\mathcal{J}'_{l+1,3}}$ schließen. Insbesondere erzeugt die J_D^T -Periodisierung in der Konstruktion der Skalierungsfunktion $\varphi_{M'_1}^{\mathcal{J}'_{2,3}} = \varphi_{M'_1}^{(J_D)}$ an den in b) gekennzeichneten Eckpunkten analog zum Beispiel 4.9 d) einen Träger außerhalb des minimalen Quadrates, falls g nicht dem Dirichlet-Fall $g = B_0$ entspricht. Ob die Gleichheit der Räume $V_{M_0}^{\mathcal{J}_{1,3}} = V_{M_0}^{\mathcal{J}'_{1,3}}$ oder gar der Funktionen $\varphi_{M_0}^{\mathcal{J}_{1,3}} = \varphi_{M_0}^{\mathcal{J}'_{1,3}}$ gilt, hängt davon ab, welchen Einfluss die jeweiligen J^T -Periodisierungen der darüberliegenden Level haben.

Unter welchen Bedingungen auf die Gleichheit $\varphi_{M_0}^{(J_Y, J_Y, J_X)} = \varphi_{M_0}^{(J_Y, J_D, J_D)}$ und somit die Gleichheit der dazugehörigen Räume geschlossen werden kann, betrachtet der Abschnitt 4.5.

Im Allgemeinen ist es also notwendig, zur Konstruktion der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktion $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l,n}}$ die Dilatationsmatrizen J_{l+1}, \dots, J_n zu kennen. Für eine Multiskalen-Analyse ($\{J_l\}_{l>0}$, $\{V_j\}_{j\geq 0}$) bedeutet dies, den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ zu betrachten. Eine mögliche Konstruktion einer Multiskalen-Analyse mit de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen findet sich ebenso im Abschnitt 4.5.

4.3 Dyadische de la Vallée Poussin-artige Wavelets

Die Konstruktion der Wavelets ψ_j zu einer dyadischen Multiskalen-Analyse ($\{J_l\}_{l>0}$, $\{V_j\}_{j\geq 0}$) aus Lemma 1.33 kann analog für die Funktionen $B_{\mathcal{J}_{l,k}}$, $l, k \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ aus Definition 4.6 adaptiert werden. Damit lassen sich für jede Matrix M_l die dazugehörigen Wavelets $\psi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ definieren. Für einen dyadischen Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{1,n}$ sind die Vektoren $v_l \in \mathcal{P}(J_l^T) \setminus \{0\}$ und $w_l \in \mathcal{P}(J_l) \setminus \{0\}$, $l = 1, \dots, n$, eindeutig bestimmt. Die Funktionen $\tilde{B}_{\mathcal{J}_{l,k}}$, $1 \leq l \leq k \leq n \in \mathbb{N}$, deren Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{1,n}$ dyadisch ist, sind gegeben durch

$$\tilde{B}_{\mathcal{J}_{l,k}} := e^{-2\pi i \circ^T w_l} \Phi_{J_l} \left(T_{\frac{v_l}{2\pi}} g, B_{\mathcal{J}_{l+1,k}} \right).$$

4.3 Dyadische de la Vallée Poussin-artige Wavelets

Sie unterscheiden sich von $B_{\mathcal{J}_{l,k}}$ lediglich im ersten Rekursionsschritt. An Stelle der Funktion g tritt hier deren Translat $T_{\frac{\mathbf{v}_l}{2\pi}}g = g(\circ - \mathbf{v}_l)$ und der Faktor $e^{-2\pi i \circ^T \mathbf{w}_l}$ wird ergänzt.

Definition 4.11 (Dyadische de la Vallée Poussin-artige Wavelets).

Gegeben sei eine reguläre Matrix $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, $m_0 = |\det \mathbf{M}_0| > 0$ und ein dyadischer Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$, sowie die Matrizen \mathbf{M}_l , $l = 1, \dots, n$, wie in Definition 4.6.

Dann heißen die Funktionen $\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, die definiert sind durch ihre Fourier-Koeffizienten

$$c_{\mathbf{k}}(\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}) := \frac{1}{\sqrt{m_l}} \tilde{B}_{\mathcal{J}_{l+1,n}}(\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{d \times d}, l = 0, \dots, n-1,$$

de la Vallée Poussin-artige Wavelets.

Dabei bezeichne für $l \in \{0, \dots, n-1\}$

$$W_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} := \text{span} \left\{ T_{\mathbf{y}} \psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} ; \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_l) \right\}$$

den Raum der Translate des de la Vallée Poussin-artigen Wavelets $\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ auf dem Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M}_l)$.

Lemma 4.12.

Für $n \in \mathbb{N}$, eine reguläre Matrix $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ sowie einen dyadischen Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{1,n} \in (\mathbb{Z}^{d \times d})^n$ seien die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $l = 0, \dots, n$, und die de la Vallée Poussin-artigen Wavelets $\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $l = 0, \dots, n-1$, gegeben.

Dann gelten für jedes $l \in \{0, \dots, n-1\}$ folgende Aussagen:

a) Das Wavelet $\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ liegt im nächstgrößeren Skalierungsraum, d. h.

$$\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} \in V_{\mathbf{M}_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}.$$

b) Es gilt die orthogonale Zerlegung $V_{\mathbf{M}_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}} = V_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} \oplus W_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$.

c) Die Translate $T_{\mathbf{y}} \psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_l)$, sind linear unabhängig.

d) Sei $g \in C^r(\mathbb{R}^d)$, $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\tilde{B}_{\mathcal{J}_{l+1,n}}(\mathbf{M}_l^{-T} \circ) \in C^r(\mathbb{R}^d).$$

Beweis. Sei $l \in \{0, \dots, n-1\}$ beliebig aber fest gewählt. Die beiden Vektoren $\mathbf{v}_{l+1} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_{l+1}^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\mathbf{w}_{l+1} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_{l+1}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ sind wegen $|\det \mathbf{J}_{l+1}| = 2$ eindeutig bestimmt. Damit gilt für die einzelnen Aussagen:

a) Analog zu den \hat{a}_h aus dem Beweis von Lemma 4.7 sei für $\mathbf{h} \in \mathcal{G}_S(\mathbf{M}_{l+1}^T)$

$$\begin{aligned}\hat{b}_{\mathbf{h}} &:= \sqrt{|\det \mathbf{J}_{l+1}|} e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{w}_{l+1}} \left(T_{\frac{\mathbf{v}_{l+1}}{2\pi}} g \right)^{\mathbf{J}_{l+1}} (\mathbf{M}_l^{-T} \mathbf{h}) \\ &= \sqrt{|\det \mathbf{J}_{l+1}|} e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{w}_{l+1}} \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{M}_l^{-T} + \mathbf{J}_{l+1}^{-T} \mathbf{z} - \mathbf{v}_{l+1}) \right).\end{aligned}$$

Die Aussage folgt dann mit den gleichen Schritten, wie im Beweis des Lemmas 4.7 a), wobei $B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ in der ersten Zeile durch $\tilde{B}_{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ zu ersetzen ist und somit die $\hat{b}_{\mathbf{h}}$ anstelle der $\hat{a}_{\mathbf{h}}$ in den Gleichungen auftreten.

b) Mit den Koeffizienten $\hat{a}_{\mathbf{h}}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{l+1}^T)$, aus Lemma 4.7 a) und $\hat{b}_{\mathbf{h}}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{l+1}^T)$, aus a) erfüllt das de la Vallée Poussin-artige Wavelet $\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ die Voraussetzungen des Lemmas I.33. Mit ebendiesem Lemma und den Werten

$$\sigma_{\mathbf{h}} := e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{w}_{l+1}}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{l+1}^T),$$

welche die Gleichungen (I.52) und (I.53) erfüllen, folgt die Aussage.

c) Die Aussage folgt direkt aus b) und der linearen Unabhängigkeit der Translate

$$T_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_l), \quad \text{und} \quad T_{\mathbf{y}} \varphi_{\mathbf{M}_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_{l+1}).$$

d) Die Behauptung folgt mit den Anpassungen wie in a) analog zu Lemma 4.7 c). \square

Analog zu Lemma 4.12 d) und der Gleichung (4.7) lässt sich auch hier eine 1-periodische Funktion $\tilde{b}_{\mathbf{J}_{l+1}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $l = 0, \dots, n-1$, angeben, aus deren Abtastung die Koeffizienten $\hat{b}_{\mathbf{h}}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{l+1}^T)$, entstehen. Die Funktion $\tilde{b}_{\mathbf{J}_{l+1}}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{\mathbf{J}_{l+1}} &:= \sqrt{|\det \mathbf{J}_{l+1}|} e^{-2\pi i \mathbf{o}^T \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{w}_{l+1}} \left(T_{\frac{\mathbf{v}_{l+1}}{2\pi}} g \right)^{\mathbf{J}_{l+1}} (\mathbf{M}_l^{-T} \circ) \\ &= e^{-2\pi i \mathbf{o}^T \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{w}_{l+1}} \tilde{a}_{\mathbf{J}_{l+1}}(\circ - \mathbf{v}_{l+1}).\end{aligned}$$

4.4 Richtungsselektive Wavelets

Die beiden Funktionen $\tilde{a}_{\mathbf{J}_{l+1}}, \tilde{b}_{\mathbf{J}_{l+1}}$ ermöglichen es somit, falls die Translate von $\varphi_{\mathbf{M}_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}$ orthonormiert sind, Orthonormalbasen für $V_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ und $W_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ anzugeben. Mit diesen durch Abtastung erhaltenen Koeffizienten kann anschließend ebenso die Wavelet-Transformation, vgl. (1.50) und (1.51), berechnet werden. Insgesamt sind dazu bei gegebenem Raum $V_{\mathbf{M}_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}$ lediglich die Funktion g und die Matrix \mathbf{J}_{l+1} notwendig, über die sich die Vektoren $\mathbf{v}_{l+1} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_{l+1}^T) \setminus \{0\}$ und $\mathbf{w}_{l+1} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_{l+1}) \setminus \{0\}$ eindeutig ergeben.

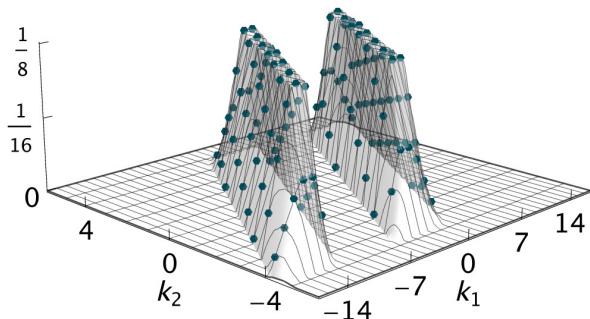
Analog zu den Skalierungsfunktionen ergeben sich aus den de la Vallée Poussin-artigen Wavelets die eindimensionalen de la Vallée Poussin-Wavelets, vgl. [50, Abschnitt 4.2] im Fall $d = 1$, falls $g = b_\alpha$ mit $\alpha \leq \frac{1}{6}$ ist. Die Dirichlet-Wavelets, die in [29, Gleichung (42)] definiert werden, ergeben sich, falls $g = \chi$ ist, wobei der Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{1,n}$ dann wieder auf die Matrizen $\mathbf{J}_D, \mathbf{J}_X$ und \mathbf{J}_Y beschränkt sein muss. Während also dieser Ansatz beide Fälle auf den anisotropen Fall erweitert, verallgemeinert er auch die Fälle selbst, denn ist im ersten Fall $\alpha > \frac{1}{6}$ oder im zweiten eine Dilatationsmatrix \mathbf{J} nicht eine der Dreien, so ergeben sich in dieser Konstruktion trotzdem gültige Wavelets.

Beispiel 4.13.

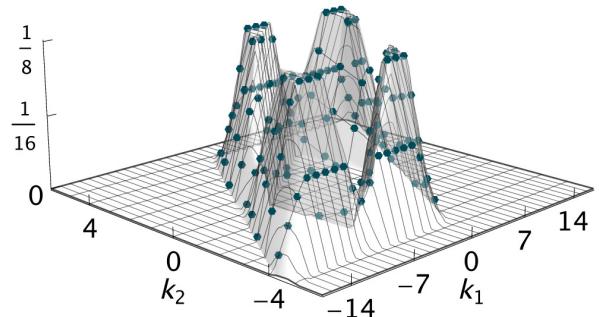
Gegeben seien wie in den Beispielen 4.9 b) und d) mit $n = 1$ die Matrizen $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N}_X = \mathbf{J}_X^{-1}\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}_D = \mathbf{J}_D^{-1}\mathbf{M}$. Dann sind die dazugehörigen Wavelets $\psi_{\mathbf{N}_X}^{(\mathbf{J}_X)}$ und $\psi_{\mathbf{N}_D}^{(\mathbf{J}_D)}$ in Abbildung 4.7 dargestellt: Wie bei den Skalierungsfunktionen $\varphi_{\mathbf{N}_X}^{(\mathbf{J}_X)}$ und $\varphi_{\mathbf{N}_D}^{(\mathbf{J}_D)}$ wird an den Abbildungen a) und b) deutlich, dass die Fourier-Koeffizienten der Wavelets $\psi_{\mathbf{N}_X}^{(\mathbf{J}_X)}$ und $\psi_{\mathbf{N}_D}^{(\mathbf{J}_D)}$ vor Multiplikation mit $e^{-2\pi i k^T \mathbf{M}_{l-1}^{-1} \mathbf{w}_l}$, $\mathbf{w}_l \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_X)$ bzw. $\mathbf{w}_l \in \mathcal{P}(\mathbf{J}_D)$, als Abtastung einer stetigen nichtnegativen Funktion entstehen. In den dazugehörigen Abbildungen c) und d) ist in den Konturplots ersichtlich, dass beide Wavelets hohe Frequenzen gewisser Richtungen besitzen, wobei für das Wavelet $\psi_{\mathbf{N}_X}^{(\mathbf{J}_X)}$ eine Richtung und für $\psi_{\mathbf{N}_D}^{(\mathbf{J}_D)}$ zwei Richtungen in Form von je zwei Dreiecken von Bedeutung sind. Diese Präferenz wird auch in den Abbildungen e) und f) der Funktionen $\psi_{\mathbf{N}_X}^{(\mathbf{J}_X)}$ und $\psi_{\mathbf{N}_D}^{(\mathbf{J}_D)}$ im Ortsbereich deutlich.

4.4 Richtungsselektive Wavelets

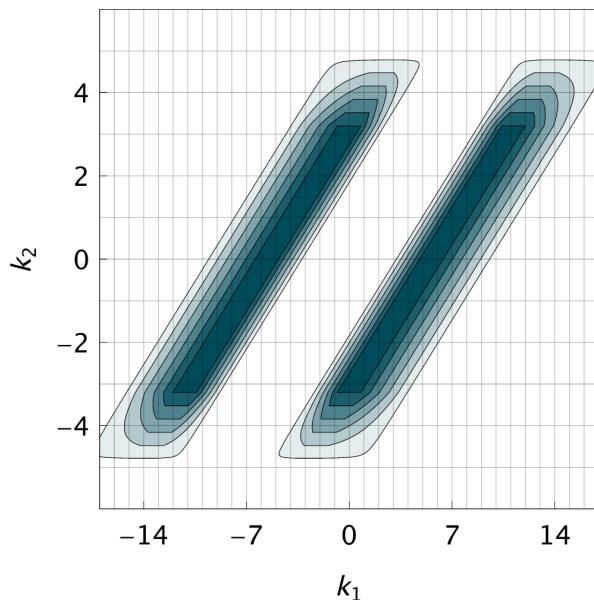
Neben der Eigenschaft aus Lemma 4.7 c) und 4.12 d), dass die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ und -Wavelets $\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ bezüglich ihrer Fourier-Koeffizienten jeweils als Abtastung einer beliebig glatt wählbaren Funktion $B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ bzw. $\tilde{B}_{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ entstehen, ist ein weiterer wesentlicher Punkt, dass für die Konstruktion der d -dimensionalen de la Vallée Poussin-artigen Wavelets $\psi_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ alle Matrizen



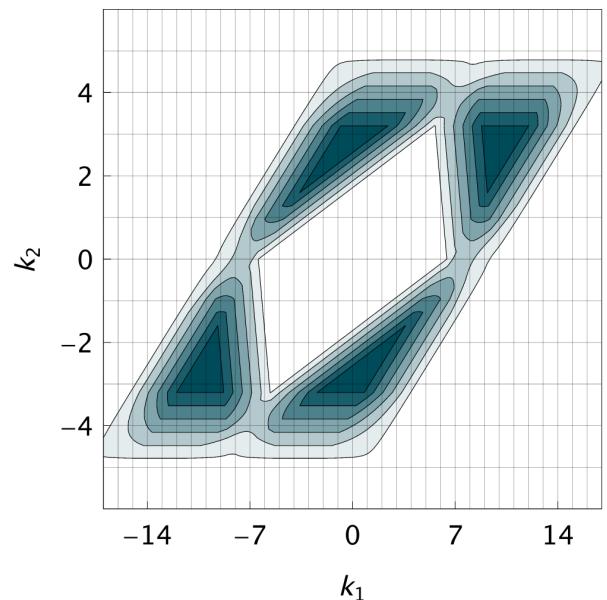
a. 3D-Plot der $|c_k(\psi_{N_X}^{(J_X)})|$.



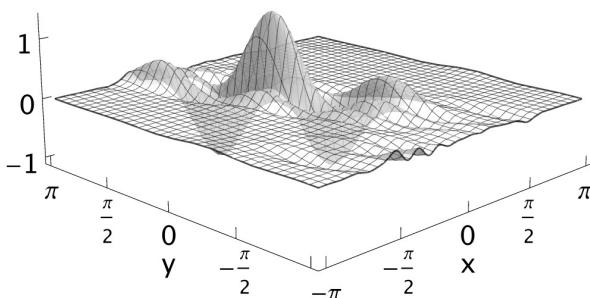
b. 3D-Plot der $|c_k(\psi_{N_D}^{(J_D)})|$.



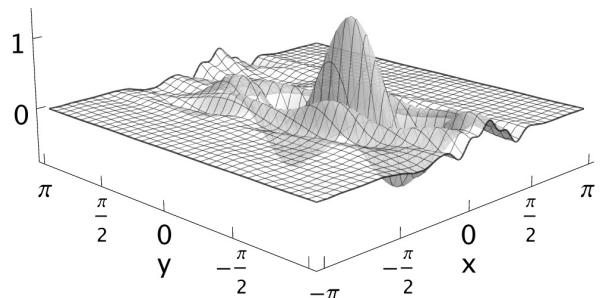
c. Konturplot der $|c_k(\psi_{N_X}^{(J_X)})|$.



d. Konturplot der $|c_k(\psi_{N_D}^{(J_D)})|$.



e. $\psi_{N_X}^{(J_X)}$.



f. $\psi_{N_D}^{(J_D)}$.

Abbildung 4.7. Die Wavelets $\psi_{N_X}^{(J_X)}$ und $\psi_{N_D}^{(J_D)}$ im Vergleich.

4.4 Richtungsselektive Wavelets

$\mathbf{J} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ der Betragsdeterminante 2 im Matrix-Vektor $\mathcal{J}_{l+1,n}$ möglich sind. Dieser Abschnitt stellt eine Methode vor, die insbesondere auf Basis der Scherungsmatrizen $\mathbf{J}_X^\pm = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J}_Y^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ eine bestimmte Richtung in den Wavelet-Räumen $V_{\mathbf{M}_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ präferiert. Dies wird anhand der Konstruktion bestimmter Matrix-Vektoren $\mathcal{J}_{l+1,n}$ vorgestellt, wobei \mathbf{M}_n als Diagonalmatrix gewählt wird. Die Konstruktion orientiert sich somit daran, dass Daten häufig auf einem Tensorprodukt-Gitter gegeben sind. Analog kann jedoch auch mit der entworfenen Matrix \mathbf{M}_1 , welche die Richtung enthält, gesampled und schließlich mit \mathbf{J}_1 zerlegt werden.

Definition 4.14.

Gegeben sei eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Ein Vektor $\mathbf{v} \in \partial(\mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d) \subset \mathbb{R}^d$ auf dem Rand des mit \mathbf{M}^T multiplizierten, zentrierten Einheitskubus heißt *Richtung* von \mathbf{M} .

Die Richtungen einer Matrix \mathbf{M} sind nicht normiert, ihre euklidische Länge $\|\mathbf{v}\|$ gibt eine Möglichkeit an, sie zueinander in Relation zu setzen; sie genügen jedoch nicht, um für eine Richtung \mathbf{v} anzugeben, wie viele ganzzahlige Punkte auf einer Geraden in Richtung \mathbf{v} in der erzeugende Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ liegen. Dazu seien im Folgenden spezielle Richtungen betrachtet.

Definition 4.15.

Gegeben sei eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$. Die Vektoren $\mathbf{v}_i := \frac{1}{2}\mathbf{M}^T \mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, d$, bezeichnen spezielle Richtungen von \mathbf{M} . Sei i_j , $j = 1, \dots, d$, eine Sortierung der Indizes $1, \dots, d$, so dass $\|\mathbf{v}_{i_l}\| \leq \|\mathbf{v}_{i_k}\|$ für $l \leq k$.

Dann heißt die Menge der normierten Vektoren

$$\mathcal{R}_\mathbf{M} = \mathcal{R} := \left\{ \frac{\mathbf{v}_{i_j}}{\|\mathbf{v}_{i_j}\|} ; \quad j = 1, \dots, d, \|\mathbf{v}_{i_j}\| = \|\mathbf{v}_{i_d}\| \right\}$$

Menge der Hauptrichtungen von \mathbf{M} und $l_\mathbf{M} := \|\mathbf{v}_{i_d}\|$ ist die Länge der Hauptrichtungen. Ist das Maximum eindeutig, also $|\mathcal{R}| = 1$, so heißt \mathbf{v}_{i_d} Hauptrichtung von \mathbf{M} . Die Hauptrichtung \mathbf{v}_{i_d} heißt dominant, falls $l_\mathbf{M} = \|\mathbf{v}_{i_d}\| > 2\|\mathbf{v}_{i_{d-1}}\|$.

Es gilt $n_i = 2\|\mathbf{v}_i\| \in \mathbb{N}$ und es gilt wegen Definition 1.1 der erzeugenden Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, dass vom Ursprung aus in Richtung \mathbf{v}_i insgesamt n_i paarweise unterschiedliche Punkte $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ auf einem Zyklus liegen.

Definition 4.16.

Gegeben sei eine Zerlegung der regulären Matrix $M = JN$, $J, N \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, $|\det J| = 2$. Der dazugehörige Wavelet-Raum $W_N^{(J)}$ sowie das de la Vallée Poussin-artige Wavelet $\psi_N^{(J)}$ aus Definition 4.11 heißen

- a) *richtungserhaltend* (für eine Hauptrichtung $v^* \in \mathcal{R}_M$), falls eine Hauptrichtung $v \in \mathcal{R}_M$ existiert (bzw. $v = v^*$ ist), so dass $l_M v$ eine Richtung von N ist.
- b) *richtungssensitiv*, falls für eine Hauptrichtung $v \in \mathcal{R}_M$ von M gilt, dass $\frac{l_M}{2} v \in \mathcal{R}_N$ ist.

Die folgenden Betrachtungen konzentrieren sich auf den Fall $d = 2$, genauer die Matrizen $J \in \mathcal{J}$, vgl. (4.3). Ins Mehrdimensionale verallgemeinert sind dies alle Skalierungen von Achsen und Dreh-Skalierungen in einer Ebene. Lediglich für Scherungen ergeben sich Veränderungen in Hyperebenen, etwa bei der Scherungsmatrix $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dort gelten die folgenden Betrachtungen bezüglich der richtungserhaltenden Eigenschaft jedoch insgesamt analog.

Aus der Betrachtung der Strecken $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{\pm \frac{1}{2}\}$ bzw. $\{\pm \frac{1}{2}\} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ folgt direkt

Lemma 4.17.

Sei $N \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ eine reguläre Matrix. Das de la Vallée Poussin-artige Wavelet $\psi_N^{(J)}$, $J \in \mathcal{J}$, ist richtungserhaltend genau dann, wenn $J \neq J_D$.

Für eine Wavelet-Zerlegung gewisser Daten, also einer Funktion $f_M \in V_M^{\varphi_M^\emptyset}$ mit einer de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktion φ_M^\emptyset , und einer Richtung $v^* \in \mathbb{R}^2$, $\|v^*\| = 1$, stellen die folgenden Ausführungen eine Wahl des Matrix-Vektors $\mathcal{J}_{1,n}$ vor, so dass die dominante Hauptrichtung von N der Zerlegung $M = J_n \cdots J_1 N$ die Richtung v^* annähert. Dabei gibt es stets eine weitere Zerlegung $N = J_0 N'$, deren Wavelet $\psi_{N'}^{(J_0 \cdots J_n)}$ richtungssensitiv bezüglich der v^* annähernden, dominanten Hauptrichtung ist. Illustriert werden die folgenden Betrachtungen stets bezüglich des minimalen Trägers der Funktion g aus den Definitionen 4.6 und 4.11. Dazu sei verkürzend für $\mathcal{J}_{1,n}$ anstelle der Matrizen die Buchstabenkombination der Matrizen aus \mathcal{J} genannt: Der Vektor $(J_D, J_Y, J_Y, J_Y^+, J_X)$ sei beispielsweise kurz mit „DYY⁺X“ bezeichnet.

Für eine Matrix $M = \text{diag}(N, N) \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$, $3 < N \in \mathbb{N}$, sind die möglichen Zerlegungen für zwei Dilatationsmatrizen $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$ in Tabelle 4.1 gezeigt. Das äußere Quadrat ist dabei der Rand $\partial(M^T Q_2)$, die innerste Fläche stellt $N^T Q_2$ dar, wobei die Matrix N jeweils durch die Zerlegung $M = J_2 J_1 N$ gegeben ist.

4.4 Richtungsselektive Wavelets

Tabelle 4.1. Zerlegungsmöglichkeiten mittels zweier Wavelet-Level.

J_1/J_2	X	Y	D	Y^+	Y^-	X^+	X^-
X							
Y							
D							
Y^+							
Y^-							
X^+							
X^-							

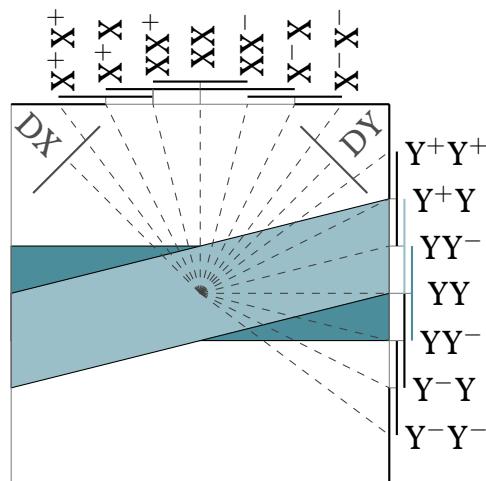


Abbildung 4.8. Eine Hälfte der Hauptrichtung (gestrichelt) und der längenerhaltenden Richtungen (teilweise abgesetzt). Die Diagonalen sind dabei lediglich exakt als Hauptrichtungen vorhanden, wenn mittels $J_1 = J_D$ auf die Richtungserhaltung verzichtet wird.

Für $J_1 = J_D$ oder $J_2 = J_D$ ist analog zum Lemma 4.17 keine der Hauptrichtungen richtungserhaltend, ist $J_1 \in \{J_X, J_Y\}$, so bleibt wenigstens eine Richtung über zwei Level erhalten, die jedoch dann keine Hauptrichtung mehr ist. Für die Kombination einer Scherungsmatrix mit der Matrix J_D gilt dies ebenso.

Für die Kombination zweier Dilatationsmatrizen XY^\pm oder analog YX^\pm sowie die Kombination zweier Scherungsmatrizen $Y^\pm X^\pm$ mit unterschiedlichem Buchstaben ist ebenso keine Hauptrichtung richtungserhaltend.

Für die restlichen achtzehn Matrizen lässt sich ein Schema angeben, mit dem konstruktiv eine Hauptrichtung angegeben werden kann, die bezüglich M eine Richtung ist: Da die Kombinationen XX^\pm und $X^\pm X^\mp$ die gleiche Matrix ergeben, bzw. analog für YY^\pm und $Y^\pm Y^\mp$, kann auf die Matrix-Kombinationen Y^+Y^- , Y^-Y^+ , X^+X^- und X^-X^+ verzichtet werden. Die verbleibenden Vierzehn sind in Abbildung 4.8 wie folgt dargestellt: Die gestrichelte Linie zeigt die dominante Hauptrichtung, die vertikalen bzw. horizontalen Linien die restlichen längenerhaltenden Richtungen, die zu einer zweifachen Zerlegung mit Y und Y^\pm bzw. X und X^\pm gehören. Dies lässt sich binär beschreiben, indem für den ersten Quadranten Y mit 0, Y^- mit 1 kodiert wird. Für einen Winkel $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, den eine Richtung v^* mit der y_1 -Achse bildet, wähle man für $0 \leq \alpha \leq \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ die Matrix $J_1 = J_Y$, für $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ die Matrix $J_1 = J_Y^-$. Diese Teilung kann für die nachfolgenden Matrizen mit der gleichen Unterteilung fortgesetzt werden und nähert so die Richtung v^* an.

4.4 Richtungsselektive Wavelets

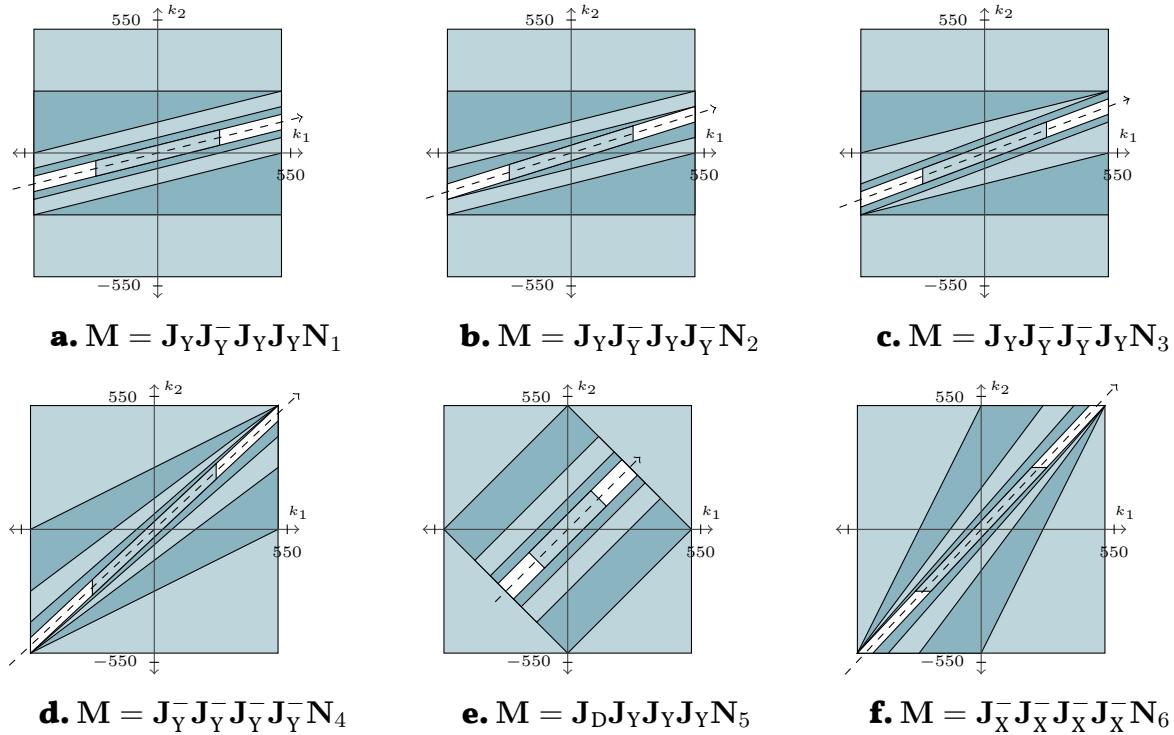


Abbildung 4.9. In a)-c) sind drei Richtungen gezeigt, die bei einer Zerlegung von 4 Leveln möglich sind. d)-f) zeigen zwei richtungserhaltende Näherungen und eine exakte, aber nicht richtungserhaltene Zerlegung in Richtung einer Diagonalen.

Ein Sonderfall ist für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ gegeben: Mit $J_1 = J_D$ und anschließender Wahl $J_i = J_Y, i \geq 2$, bis die Hauptrichtung dominant ist, kann die Richtung exakt dargestellt werden. Für diese Richtung bietet nämlich der obige Ansatz den Nachteil, dass mittels $J_l = J_Y^-, l \geq 1$, oder $J_l = J_X^-$ die Richtung $\alpha = \frac{\pi}{4}$ lediglich angenähert wird, vgl. auch Abbildung 4.10. Die Richtung mit dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$ liegt in den Näherungen mit Scherungsmatrizen stets am Rand des jeweiligen Richtungsspektrums. Zwar ist die Hauptrichtung im Fall $J_1 = J_D$ nicht richtungserhaltend, sie ist jedoch, bis auf die Länge, exakt identisch mit der gesuchten Richtung, vgl. Beispiel 4.19. Hier gehen also gewisse Informationen für diese Richtung „verloren“. Ist eine Richtung v^* erreicht oder mit einem gewissen, genügend kleinen Fehler angenähert, so kann mit der entsprechenden richtungssensitiven Matrix $J \in \mathcal{J}$ das Detail in einem Wavelet-Raum dargestellt werden. Die richtungssensitive Matrix ist für die Konstruktion mit X und X^\pm und den Ansatz DXXX... die Matrix J_Y und analog für Zerlegungen mit Y und Y^\pm und den Ansatz DYYY... die Matrix J_X .

Beispiel 4.18.

Sei $V_{20} = V_M^{\varphi_M^\emptyset}$ mit $M = 2^{10}E_2$. Die Zerlegung der Level sei gegeben durch die Form

$$M = J_1 J_2 J_3 J_4 J_X N_i, \quad (4.8)$$

wobei die Matrix N_i sich jeweils in Abhängigkeit der Dilatationsmatrizen verändert. In Abbildung 4.9 sind für dieses Beispiel drei aufeinanderfolgende Richtungen gezeigt, d. h., die Bilder 4.9 a)-c) zeigen drei Richtungen, die in der binären Kodierung aufeinanderfolgende Zahlen darstellen. Die Abbildungen 4.9 d) und f), letztere mit J_Y statt J_X an letzter Stelle, zeigen zwei Näherungen für die Diagonale, die in e) exakt mit der dominanten, jedoch nicht richtungserhaltenden Hauptrichtung dargestellt ist. Die jeweils weißen Bereiche kennzeichnen den minimalen Träger der Fourier-Koeffizienten $c_k(\psi_{N_i}^{(J_1 \cdots J_4 J_X)})$ des jeweiligen richtungssensitiven Wavelets $\psi_{N_i}^{(J_1 \cdots J_4 J_X)}$, bzw. für f) ist die fünfte Dilatationsmatrix J_Y . Die binäre Kodierung aller möglichen Richtungen mit vier Zerlegeschritten ist in Abbildung 4.10 gezeigt und illustriert damit die Genauigkeit der Richtungswahl nach vier Wavelet-Leveln.

Da die richtungssensitiven Anteile in diesem Beispiel sich im fünften Zerlegeschritt finden, besteht der entsprechende Wavelet-Raum $W_{N_i}^{(J_1 \cdots J_4 J_X)}$ aus einem Zweiunddreißigstel der ursprünglichen Menge an Translates in $V_M^{\varphi_M^\emptyset}$. Dies gilt ebenso für den Raum der Translate $V_{N_i}^{(J_1 \cdots J_4 J_X)}$ der Skalierungsfunktion im fünften Level.

Beispiel 4.19.

Der Box-Spline B_Θ mit der Matrix $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, der in Abbildung 4.11 a) dargestellt ist, sei auf den Musterpunkten $2\pi\mathcal{P}_S(M)$ mit $M = 2^{10}E_2$ abgetastet. Die Funktion B_Θ besitzt in den Richtungsableitungen dritter Ordnung in x - und y -Richtung jeweils 6 Unstetigkeitslinien sowie in der Diagonalen $v_1 = (1, 1)^T$ in der Richtungsableitung vierter Ordnung. Mit der Gleichung (2.5) können diese Abtastwerte in die Translate einer beliebigen Skalierungsfunktion bezüglich M , die einen Fundamentalinterpolanten besitzt, umgerechnet werden und es entsteht die Funktion $f_M \in V_{20} = V_M$ einer Multiskalen-Analyse ($\{J_k\}_{k>0}$, $\{V_j\}_{j \geq 0}$). Für die Zerlegungen $M = J_X N_X$ und $M = J_D N_D$ vergleichen die Abbildungen 4.11 b)-e) den Dirichlet-Fall $g = B_0$, dessen Räume mit W^1, V^1 bezeichnet seien, mit dem de la Vallée Poussin-artigen Wavelet basierend auf $g = B_\alpha$, $\alpha = \frac{1}{10}(1, 1)^T$, dessen Räume mit W^2, V^2 bezeichnet seien.

Im Wavelet-Raum $W_{N_D}^1$ liegt ein Anteil der Funktion f_M , der jeweils die Diagonalen als Richtungen bevorzugt. Dabei liegen für den Dirichlet-Fall $\alpha = 0$ sämtliche Fourier-Koeffizienten $c_{(0,y)^T}(f_M)$ und $c_{(x,0)^T}(f_M)$, $x, y \in \{-2^9, -2^9 + 1, \dots, 2^9 - 1\}$, im Raum $V_{N_D}^1$. Daher treten die Unstetigkeitsstellen der Diagonalen klar hervor. Für den

4.4 Richtungsselektive Wavelets

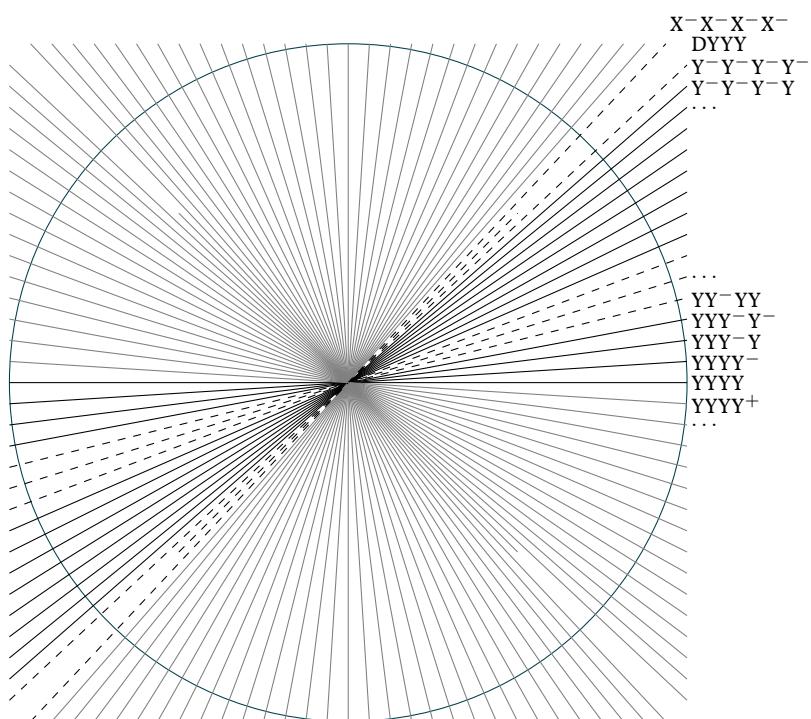
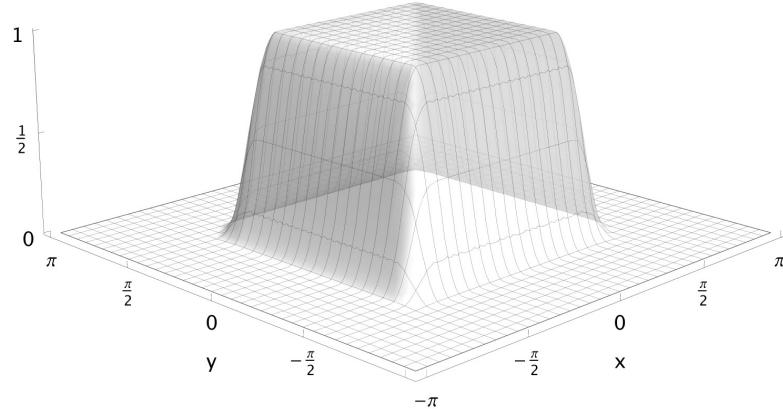
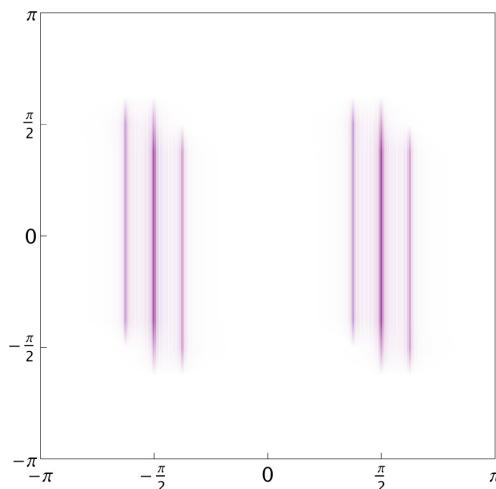


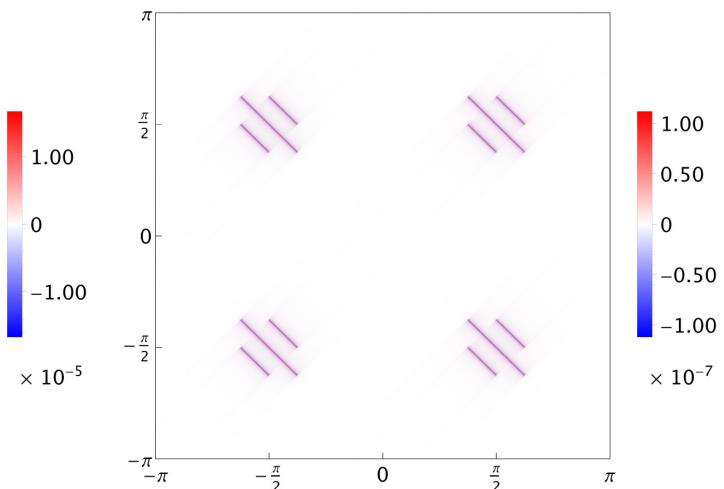
Abbildung 4.10. Alle Richtungen, die in einer Zerlegung mittels Y und Y^\pm bzw. X und X^\pm nach vier Leveln entstehen. Dabei kann binär in je zwei Matrizen „gezählt“ werden. Die gestrichelten Linien sind die Richtungen aus Abbildung 4.9.



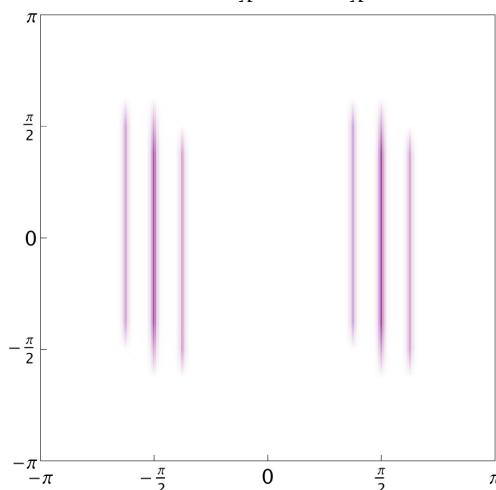
a. Der Box-Spline B_Θ .



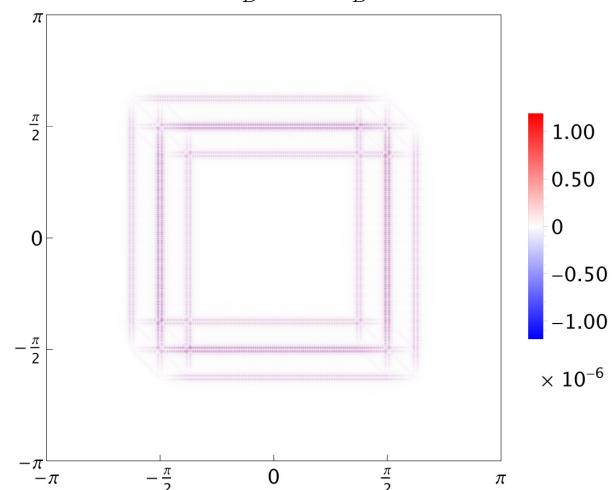
b. $g_{N_X}^1 \in W_{N_X}^1, \alpha = 0$.



c. $g_{N_D}^1 \in W_{N_D}^1, \alpha = 0$.



d. $g_{N_X}^2 \in W_{N_X}^2, \alpha = \frac{1}{10}(1, 1)^T$.



e. $g_{N_D}^2 \in W_{N_D}^2, \alpha = \frac{1}{10}(1, 1)^T$.

Abbildung 4.11. Der Box-Spline B_Θ aus Beispiel 4.19 ist in a) dargestellt. Die Abbildungen b) und c) zeigen jeweils den Wavelet-Anteil der Dirichlet-Wavelets, d) und e) im Vergleich dazu die Wavelet-Anteile bezüglich der de la Vallée Poussin-artigen Wavelets.

4.4 Richtungsselektive Wavelets

de la Vallée Poussin-Fall liegen einige der eben genannten Koeffizienten im Wavelet-Raum $W_{N_D}^2$, so dass dort die Unstetigkeitsstellen der Richtungsableitung vierter Ordnung durch diejenigen der dritten Ordnung entlang der Achsen überlagert werden. Da diese in ihrer Ausprägung um den Faktor 10 größer sind, sind die Unstetigkeitsstellen orthogonal zur Diagonalen in Abbildung 4.11 e) nicht zu sehen.

Für die Zerlegung $M = J_X N_X$ wird in den Abbildungen 4.11 b) und d) deutlich, dass die Unstetigkeitsstellen der Richtungsableitung dritter Ordnung im Fall des de la Vallée Poussin-artigen Wavelets $\psi_{N_X}^{(J_X)}$ mit $\alpha = \frac{1}{10}(1, 1)^T$ klarer hervortreten sowohl in der Ausprägung der Koeffizienten als auch in der Lokalisierung.

Um mit den de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l,n}}$ Kanten darzustellen, die orthogonal zu einer der Diagonalen liegen, seien die Matrizen in $\mathcal{J}_{1,n}$, $n \geq 2$, so gewählt, dass im letzten Schritt die Diagonale die dominante Hauptrichtung des Wavelet-Raumes $W_{M_0}^{\mathcal{J}_{1,n}}$ ist. Dies entspricht der Wahl der Matrix-Vektoren als $\mathcal{J}_{1,5} = (J_D, J_Y, J_Y, J_Y, J_X)$ und $\mathcal{J}'_{1,5} = (J_D, J_X, J_X, J_X, J_Y)$. Die Anteile von f_M , die in der Zerlegung über diese fünf Wavelet-Level in $W_{N_i}^{\mathcal{J}_{1,5}}$ bzw. für die zweite Zerlegung in $W_{N'_i}^{\mathcal{J}'_{1,5}}$ liegen, sind in Abbildung 4.12 dargestellt. In Abbildung a) sind dies exakt die Kanten, die im Box-Spline B_Θ orthogonal zur Diagonalen $v_1 = (1, 1)^T$ in der die Richtungsableitung vierter Ordnung vorliegen. Die Unstetigkeitsstellen dieser Richtungsableitung orthogonal zur Richtung v_1 treten in diesem Wavelet-Raum so deutlich hervor, da in Richtung v_1 die richtungssensitive Hauptrichtung des Wavelets liegt. Das Frequenzspektrum, welches in Abbildung 4.13 a) dargestellt ist, verdeutlicht diese Richtungspräferenz. Dabei sind hier, analog zu vorigen Skizzen der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen neben dem Rand des Trägers sowohl die mittlere Linie des Pyramidenstumpfes als auch der Bereich als gepunktete Linie eingezeichnet, innerhalb dessen die Beträge $|c_k(\psi_{N'_i}^{\mathcal{J}_{1,5}})|$ konstant sind.

Orthogonal dazu liegen, in Abbildung 4.12 b) dargestellt, keine Geraden sondern lediglich Punkte, an denen die Richtungsableitungen vierter Ordnung Unstetigkeitsstellen besitzen. Diese Punkte sind identisch mit den Endpunkten aller Unstetigkeitsgeraden der dritten Richtungsableitungen des Box-Splines B_Θ . Der Träger der Fourier-Koeffizienten des zu diesem Raum gehörenden Wavelets $\psi_{N'_i}^{\mathcal{J}'_{1,5}}$ ist in Abbildung 4.13 b) dargestellt. Der dazugehörige Wavelet-Raum $W_{N'_i}^{\mathcal{J}'_{1,5}}$ ist richtungssensitiv bezüglich der Diagonalen $v_2 = (1, -1)^T$. An den Größenordnungen wird deutlich, dass die Unstetigkeitsstellen, die in diesem Wavelet-Raum dargestellt sind, in einer höheren Ableitung liegen als die Unstetigkeitslinien entlang der ersten Diagonalen v_1 .

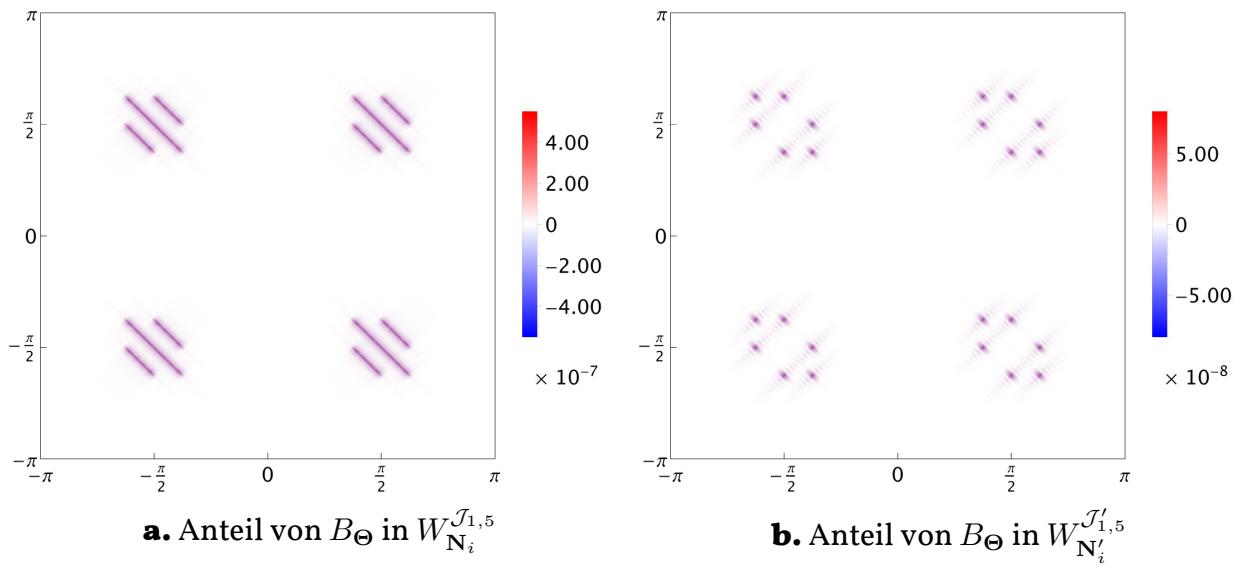


Abbildung 4.12. Die Wavelet-Anteile der Funktion B_Θ aus Beispiel 4.19, die nach 5 Zerlegeschritten jeweils eine der Diagonalen, $v_1 = (1, 1)^T$ in a) und $v_2 = (1, -1)^T$ in b) als dominante Hauptrichtungen besitzen. Es werden damit jeweils Kanten detektiert, die orthogonal dazu liegen.

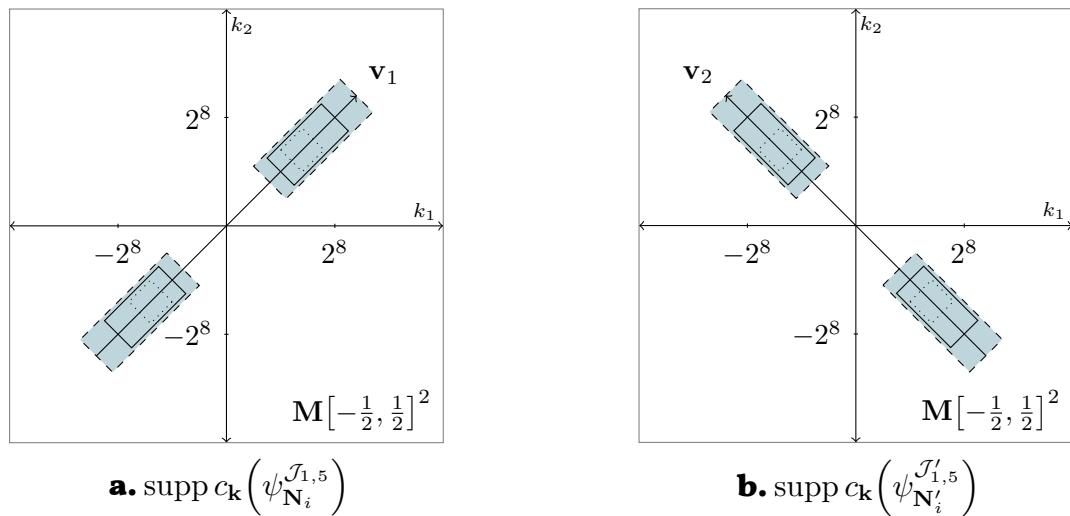
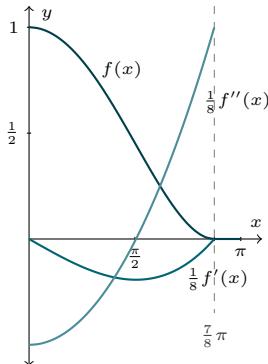
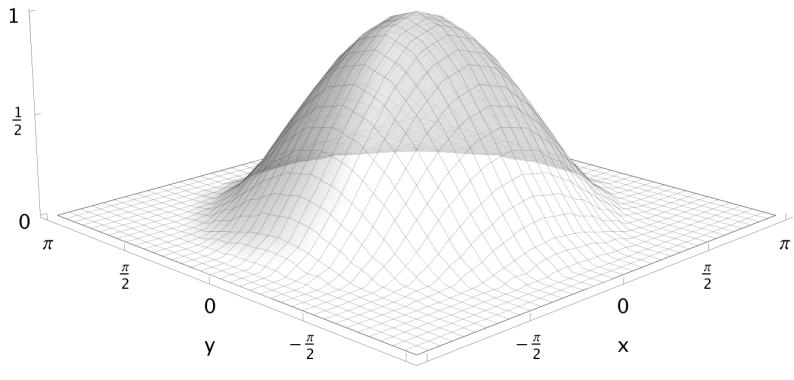


Abbildung 4.13. Frequenzspektren der Wavelets, die nach fünf Zerlegeschritten für gewisse Skalierungsmatrizen J_l entstehen, und welche die Diagonalen v_1, v_2 wie in Abbildung 4.12 als eine wesentliche Richtung enthalten. Die Darstellung folgt dem Schema aus Abbildung 4.2 c): Die gestrichelten Linien geben die Grenzen des Trägers an, innerhalb des gepunkteten Bereichs sind die Fourier-Koeffizienten konstant.

4.4 Richtungsselektive Wavelets



a. $f(x)$, $\frac{1}{8}f'(x)$ und $\frac{1}{8}f''(x)$.



b. Die radiale Funktion $F(x)$.

Abbildung 4.14. Die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 4.20 und ihre ersten beiden Ableitungen, je um $\frac{1}{8}$ skaliert, sind in a) gezeigt. Es tritt eine Unstetigkeitsstelle in der zweiten Ableitung auf. Als radiale Funktion entsteht die Funktion $F(x)$ auf dem Torus \mathbb{T}^2 in b).

Beispiel 4.20.

Gegeben sei die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{8x}{7\pi} + 1\right)^2 \left(\frac{8x}{7\pi} - 1\right)^2, & \text{falls } x \in [0, \frac{7\pi}{8}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\text{supp } f \subset [0, \pi]$, gilt für die radiale Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(\mathbf{x}) := f(\|\mathbf{x}\|)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, dass deren Träger $\text{supp } F \subset (-\pi, \pi)^2$ erfüllt, vgl. Abbildung 4.14. Da f in der zweiten Ableitung eine Unstetigkeitsstelle bei $x = \frac{7\pi}{8}$ hat, besitzt F jeweils Unstetigkeitsstellen in den Richtungsableitungen zweiter Ordnung, und zwar auf dem Kreis mit Radius $r = \frac{7\pi}{8}$, in alle Richtungen außer den Tangenten, die am Kreis liegen.

Mit der Matrix $\mathbf{M} = 2^{10}\mathbf{E}_2$ aus den Beispielen 4.18 und 4.19 sei F wie die Funktion aus dem zweiten Beispiel auf den Musterpunkten $2\pi\mathcal{P}_S(\mathbf{M})$ interpoliert und mit den Dilatationsmatrizen aus dem ersten Beispiel zerlegt, die in Abbildung 4.9 a)-c) dargestellt sind. Die Konstruktion erzeugt dabei jeweils eine dominante Hauptrichtung \mathbf{v}^* für den Wavelet-Raum, die in den eben genannten drei Abbildungen eingetragen sind. Der entsprechende Wavelet-Anteil von F ist in den Abbildungen 4.15 a)-c) dargestellt. Auch dort ist die dominante Richtung des dazugehörigen Wavelet-Raumes eingetragen. Die zwei Richtungen der anderen Wavelet-Räume dienen in diesen Abbildungen als Referenz. Die Unstetigkeitsstellen auf dem Kreis in den Richtungsableitungen zweiter Ordnung sind orthogonal zur jeweiligen Richtung \mathbf{v}^* in den entspre-

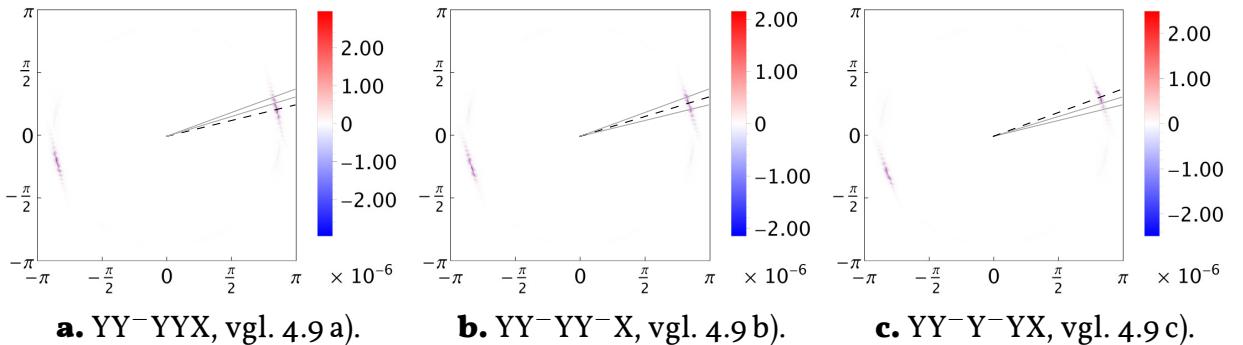


Abbildung 4.15. Wavelet-Anteile der Funktion F aus Beispiel 4.20 bezüglich dreier verschiedener richtungsorientierter Zerlegungen. Die jeweils dargestellte Richtung ist gestrichelt, die anderen Beiden sind als Referenz in grau eingetragen. Die Richtungspräferenz wird im Vergleich zu den schematischen Darstellungen der Abbildungen 4.9 a)-c) deutlich.

chenden Wavelet-Räumen zu sehen. Die Grenzen der detektierten Richtungen bilden die dominanten Richtungen der in der Konstruktion benachbarten Wavelet-Räume, d. h. die in der binären Zählweise vom vorhergehenden und nachfolgenden Matrix-Vektor erzeugten Wavelet-Räume.

4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume

Die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ aus Definition 4.6 übertragen die eindimensionalen de la Vallée Poussin-Mittel φ_N^T, φ_M^S aus (4.1) nicht nur ins Mehrdimensionale, sondern bieten ebenso eine Konstruktion für den Fall $\frac{2S}{M} + \frac{T}{N} > \frac{1}{2}$. Allerdings besitzen die Fourier-Koeffizienten $c_k(\varphi_N^T)$ dann einen Träger, der aus drei nicht zusammenhängenden Intervallen besteht und die Funktion φ_N^T hängt in diesem Fall zusätzlich von S ab. Diese Abhängigkeit ist nicht vorhanden, falls die in Abschnitt 4.1 genannte Ungleichung (4.2) gilt. Die Funktion φ_N^T hängt nach der Konstruktion ebendieses Abschnittes weder vom Parameter S noch von der gewählten Dilatation $J \geq 2$ ab, die zusammen die Skalierungsfunktion φ_M^S des nächstgrößeren Raumes einer Multiskalen-Analyse bilden.

Dieser Abschnitt stellt ein Kriterium vor, das analog zur Ungleichung (4.2) die Abhängigkeit der einzelnen Level $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}, \varphi_{M_{l+1}}^{\mathcal{J}_{l+2,n}}, \varphi_{M_{l+2}}^{\mathcal{J}_{l+3,n}}$ für $0 \leq l < n-2$ und $n \geq 2$ zueinander charakterisiert. Die Unabhängigkeit der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}, \varphi_{M_k}^{\mathcal{J}_{k+1,n}}, l < k$, ist in dem Sinne gemeint, dass die Funktion

4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume

$\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} = \varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,k}}$ erllt und somit unabhängig von der Wahl der Dilatationsmatrizen $J_j, j = k+1, \dots, n$, ist. Dies überträgt sich direkt auf die dazugehörigen Räume $V_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} = V_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,k}}$ und $V_{M_k}^{\mathcal{J}_{k+1,n}}$ der Translate.

Für eine Funktion g mit den Eigenschaften F1) und F2) frt dieser Abschnitt eine weitere Eigenschaft bezüglich des Trers ein. Mit einer Funktion g , die diese drei Eigenschaften besitzt, ist es möglich, eine solche Unabhängigkeit zwischen den de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ und $\varphi_{M_{l+2}}^{\mathcal{J}_{l+3,n}}$, also den Leveln l und $l+2$, zu erreichen. Damit tritt anstelle der rekursiven Definition durch die Funktionen $B_{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ eine geschlossene Form der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktion $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ und eine Multiskalen-Analyse ($\{J_l\}_{l>0}, \{V_j\}_{j\geq 0}$) kann auf Basis der darin definierten de la Vallée Poussin-Mittel φ_M^J angegeben werden.

Es sei für ein $p \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ das Gebiet Ω_p^d definiert durch

$$\Omega_p^d := \bigtimes_{j=1}^d \left[-\frac{1}{2} - p_j, \frac{1}{2} + p_j \right]$$

und verkzend bezeichne für $p \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ das Gebiet $\Omega_p^d = \Omega_{p1}^d$.

Lemma 4.21.

Gegeben sei eine Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Eigenschaften F1) und F2) erllt mit $\text{supp } g \subset \Omega_p^d$ und $0 \leq p_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, d$. Dann gilt

$$\forall x \in \Omega_{-p}^d : g(x) = 1.$$

Beweis. Für $x \in \Omega_{-p}^d$ gilt $(x + \mathbb{Z}^d) \cap \Omega_p^d = \{x\}$, denn für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ gelten $x_i + 1 > -\frac{1}{2} + p_i + 1 = \frac{1}{2} + p_i$ und $x_i - 1 < \frac{1}{2} - p_i - 1 = -\frac{1}{2} - p_i$. Die Aussage folgt daraus mit Eigenschaft F2) von g . \square

Für den Rest dieses Abschnitts sei

$$g(x) = \prod_{i=1}^d g_i(x_i), \quad \text{supp } g_i \subset \Omega_{p_j}^1 \quad \text{für } i = 1, \dots, d, \tag{4.9}$$

wobei $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, d$, Funktionen sind, welche die Eigenschaften F1) und F2) für den Fall $d = 1$ erllen.

Im Weiteren sei zunächst der Fall $d = 2$ mit den Matrizen $\mathbf{J}_l \in \{\mathbf{J}_X, \mathbf{J}_Y, \mathbf{J}_D\}$ betrachtet. Dazu sind in den folgenden zwei Lemmata zwei technische Vorüberlegungen formuliert.

Lemma 4.22.

Für $\mathbf{J} \in \{\mathbf{J}_X, \mathbf{J}_Y\}$ und eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ von der Form (4.9) mit $\text{supp } g \subset \Omega_p^2$ und $0 \leq p \leq \frac{1}{6}$ gilt

$$\Phi_{\mathbf{J}}(g, g) = g.$$

Beweis. Der Beweis sei hier für $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X$ geführt, er folgt analog mit vertauschten Koordinaten für $\mathbf{J} = \mathbf{J}_Y$. Es gilt $\text{supp } g \subset \Omega_p^2$, $\text{supp } g(\mathbf{J}_X^{-T} \circ) \subset \mathbf{J}_X^T \Omega_p^2$ und für $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{Z}^2$ mit $z_1 = 0$, dass $\mathbf{z} + \Omega_p^2 \cap \mathbf{J}_X \Omega_p^2 \neq \emptyset$ für $0 \leq p < \frac{1}{2}$ genau dann gilt, wenn $z_2 \in \{-1, 0, 1\}$.

Für $z_2 \in \{-1, 0, 1\}$ ist die Aussage $\forall z_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : (\mathbf{J}_X^T \mathbf{z} + \Omega_p^2) \cap \mathbf{J}_X \Omega_p^2 \neq \emptyset$ äquivalent zu $p \leq \frac{1}{6}$, denn für $z_1 > 0$ gilt $-\frac{1}{2} - p + 2z_1 > 1 + 2p$ genau dann, wenn $p < -\frac{1}{2} + \frac{2z_1}{3}$. Diese Ungleichung folgt ebenso für $z_1 < 0$ mit den jeweils anderen Intervallgrenzen $\frac{1}{2} + p + 2z_1$ und $-1 - 2p$. Insbesondere gilt somit auch $\frac{1}{2} + p \leq \frac{4}{6} \leq 1 - 2p$.

Für $\mathbf{x} \in \Omega_{(p,-p)^T}^2 \subset \mathbf{J}_X \Omega_{(p,-p)^T}^2$ ist mit den vorherigen Ausführungen und Eigenschaft F2) der Funktion g

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{x} + \mathbf{J}_X^T \mathbf{z}) = g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{J}_X^{-T} \mathbf{x}) = 1.$$

Für $\mathbf{x} \in \Omega_p^2$, $|x_2| > \frac{1}{2} - p$ umfasst die Summe über \mathbf{z} einen weiteren Summanden außer $\mathbf{z} = \mathbf{0}$: $z_2 = 1$ für $x_2 < -\frac{1}{2} + p$ bzw. $z_2 = -1$ für $x_2 > \frac{1}{2} + p$. Dabei treten folgende zwei Fälle auf:

Die Summe ergibt sich im ersten Fall für $|x_1| < \frac{1}{2} - p$ wegen Eigenschaft F2) von g zu 1 und es gilt

$$\left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{x} + \mathbf{J}_X^T \mathbf{z}) \right) g(\mathbf{J}_X^{-T} \mathbf{x}) = g(\mathbf{J}_X^{-T} \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}).$$

Die letzte Gleichheit gilt, da aus $|\frac{x_1}{2}| \leq |x_1| < \frac{1}{2} - p$ folgt, dass

$$g(\mathbf{J}_X^{-T} \mathbf{x}) = g_1\left(\frac{x_1}{2}\right) g_2(x_2) = g_2(x_2) = g_1(x_1) g_2(x_2) = g(\mathbf{x}).$$

4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume

Im zweiten Fall, für $\frac{1}{2} - p \leq |x_1| \leq \frac{1}{2} + p$, ergibt sich die Summe nicht zu 1, denn von den 4 Summanden, die sich im Trer von g für die Summation nach Eigenschaft F2) zu 1 ergeben, liegen aufgrund der um \mathbf{J}_X gestreckten Summation nur zwei Summanden innerhalb von $\text{supp } g(\mathbf{J}_x^{-T} \circ)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} g(\mathbf{x} + \mathbf{J}_X^T \mathbf{z}) \right) g(\mathbf{J}_X^{-T} \mathbf{x}) &= g_1(x_1) \left(g_2(x_2) + g_2(x_2 \pm 1) \right) g_1\left(\frac{x_1}{2}\right) g_2(x_2) \\ &= g_1(x_1) g_2(x_2) = g(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit daraus folgt, dass sich die Summe der g_2 -Funktionswerte zu 1 ergibt und g_1 an der Stelle $\frac{x_1}{2}$ wegen $\left|\frac{x_1}{2}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{p}{2} \leq \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2} - p$ ebenso 1 ist. Insgesamt folgt damit das Lemma für $0 \leq p \leq \frac{1}{6}$. \square

Lemma 4.23.

Gegeben sei für $0 \leq p \leq \frac{1}{6}$ eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von der Form (4.9) mit $\text{supp } g \subset \Omega_p^2$ und $\mathbf{J} \in \{\mathbf{J}_X, \mathbf{J}_Y, \mathbf{J}_D\}$. Dann gilt

$$\Phi_{\mathbf{J}}(g, \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g)) = \Phi_{\mathbf{J}}(g, g) \quad (4.\text{IO})$$

genau dann, wenn

$$\left(\bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \Omega_p^2 + \mathbf{J}^T \mathbf{z} \right) \cap \mathbf{J}^T \Omega_p^2 \subset \mathbf{J}^T \mathbf{J}_D^T \Omega_{-p}^2. \quad (4.\text{II})$$

Beweis. Zu Beginn des Beweises seien einige Vorbemerkungen formuliert. Die Funktion $\Phi_{\mathbf{J}}(g, \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g))$ lautet ausgeschrieben

$$\Phi_{\mathbf{J}}(g, \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g)) = \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} g(\circ + \mathbf{J}^T \mathbf{z}) \right) \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{J}^{-T} \circ + \mathbf{J}_D^T \mathbf{y}) \right) g(\mathbf{J}_D^{-T} \mathbf{J}^{-T} \circ).$$

Beide Summen sind wegen des Trers und der Positivität von g absolut summierbar und somit sind die Summanden vertauschbar. Für Summanden der ersten Summe kann außer der Verschiebung um \mathbf{z} eine Weitere um $\mathbf{J}_D^T \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$, hinzugefügt werden, da dieser Vektor ganzzahlig ist.

Es gilt also

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{J}}(g, \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g)) &= \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} g(\circ + \mathbf{J}^T(\mathbf{z} + \mathbf{J}_D^T \mathbf{y})) \right) g(\mathbf{J}^{-T}(\circ + \mathbf{J}^T \mathbf{J}_D^T \mathbf{y})) \right) \\ &\quad \times g(\mathbf{J}_D^{-T} \mathbf{J}^{-T} \circ) \\ &= \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} \Phi_{\mathbf{J}}(g, g)(\circ + \mathbf{J}^T \mathbf{J}_D^T \mathbf{y}) \right) g(\mathbf{J}_D^{-T} \mathbf{J}^{-T} \circ).\end{aligned}$$

Der Summand $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ besitzt wegen $\text{supp } g \subset \Omega_p^2$ den Träger

$$\bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \Omega_p^2 + \mathbf{J}^T \mathbf{z}.$$

Es gelte die Teilmengenbeziehung (4.II). Angenommen es gibt ein $\mathbf{y} \neq 0$, so dass der Schnitt

$$\left(\left(\mathbf{J}^T \mathbf{J}_D^T \mathbf{y} + \bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \Omega_p^2 + \mathbf{J}^T \mathbf{z} \right) \cap \mathbf{J}^T \Omega_p^2 \right) \cap \mathbf{J}^T \mathbf{J}_D^T \Omega_{-p}^2 \quad (4.I2)$$

nicht leer ist. Dann existiert jedoch ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{J}^T \mathbf{J}_D^T (\mathbf{y} + \Omega_p^2 \setminus \Omega_{-p}^2)$, der in dem linken Schnitt enthalten ist. Dies ist ein Widerspruch zu (4.II). Daraus folgt, dass sich auf $\mathbf{J}^T \mathbf{J}_D^T \Omega_{-p}^2$ die Summe lediglich auf den Summanden $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ beschränkt und somit gilt für $\mathbf{x} \in \mathbf{J}^T \mathbf{J}_D^T \Omega_{-p}^2$ die Gleichheit $g(\mathbf{J}_D^{-T} \mathbf{J}^{-T} \mathbf{x}) = 1$. Es folgt

$$\Phi_{\mathbf{J}}(g, g)(\circ) g(\mathbf{J}_D^{-T} \mathbf{J}^{-T} \circ) = \Phi_{\mathbf{J}}(g, g)$$

und somit aus (4.II) die Gleichung (4.IO).

Es gelte die Gleichung (4.IO). Dann lassen sich die Schritte aus dem vorigen Absatz in umgekehrter Reihenfolge anwenden: Die Gleichheit $\Phi_{\mathbf{J}}(g, \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g)) = \Phi_{\mathbf{J}}(g, g)$ ist äquivalent zu $\Phi_{\mathbf{J}}(g, g)(\circ) g(\mathbf{J}_D^{-T} \mathbf{J}^{-T} \circ) = \Phi_{\mathbf{J}}(g, g)$, für $\mathbf{y} \neq 0$ ergibt sich in Gleichung (4.I2) die leere Menge und für $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ folgt aus der Gleichheit weiter, dass für alle

$$\mathbf{x} \in \left(\bigcup_{\mathbf{z}, \|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1} \Omega_p^2 + \mathbf{J}^T \mathbf{z} \right) \cap \mathbf{J}^T \Omega_p^2 \quad \text{gilt} \quad g(\mathbf{J}_D^{-T} \mathbf{J}^{-T} \mathbf{x}) = 1.$$

Insgesamt folgt damit die Äquivalenz von (4.IO) und (4.II). \square

4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume

Theorem 4.24 (Unabhängigkeit der Skalierungsräume).

Für $0 \leq p \leq \frac{1}{14}$ sei eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von der Form (4.9) mit $\text{supp } g \subset \Omega_p^2$ gegeben. Sei $M_0 \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ eine reguläre Matrix und $J_{1,n} \in \{J_X, J_Y, J_D\}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein Matrix-Vektor. Für die dazugehörigen de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{J_{l+1,n}}$, $l = 0, \dots, n$, gelten dann folgende Aussagen:

a) Ist $J_n \in \{J_X, J_Y\}$, so gilt für die Skalierungsfunktion $\varphi_{M_{n-1}}^{J_{n,n}}$ zum Level $l = n - 1$

$$\varphi_{M_{n-1}}^{J_{n,n}} = \varphi_{M_{n-1}}^\emptyset.$$

b) Ist $J_n = J_D$, so gilt für die Skalierungsfunktion $\varphi_{M_{n-2}}^{J_{n-1,n}}$ zum Level $l = n - 2$

$$\varphi_{M_{n-2}}^{J_{n-1,n}} = \varphi_{M_{n-2}}^{J_{n-1,n-1}}.$$

Beweis. Die Aussage von Lemma 4.22 gilt für $p \leq \frac{1}{14}$. Für $J_n \in \{J_X, J_Y\}$ folgt, dass mit der Definition 4.6 der de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen für deren Fourier-Koeffizienten $c_k(\varphi_{M_{n-1}}^{J_{n,n}})$, $k \in \mathbb{Z}^2$, gilt

$$c_k(\varphi_{M_{n-1}}^{J_{n,n}}) = \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \Phi_{J_n}(g, g)(M_{n-1}^{-T} k) = \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} g(M_{n-1}^{-T} k) = c_k(\varphi_{M_{n-1}}^\emptyset).$$

Sei $J_n = J_D$. Die Fourier-Koeffizienten lauten dann

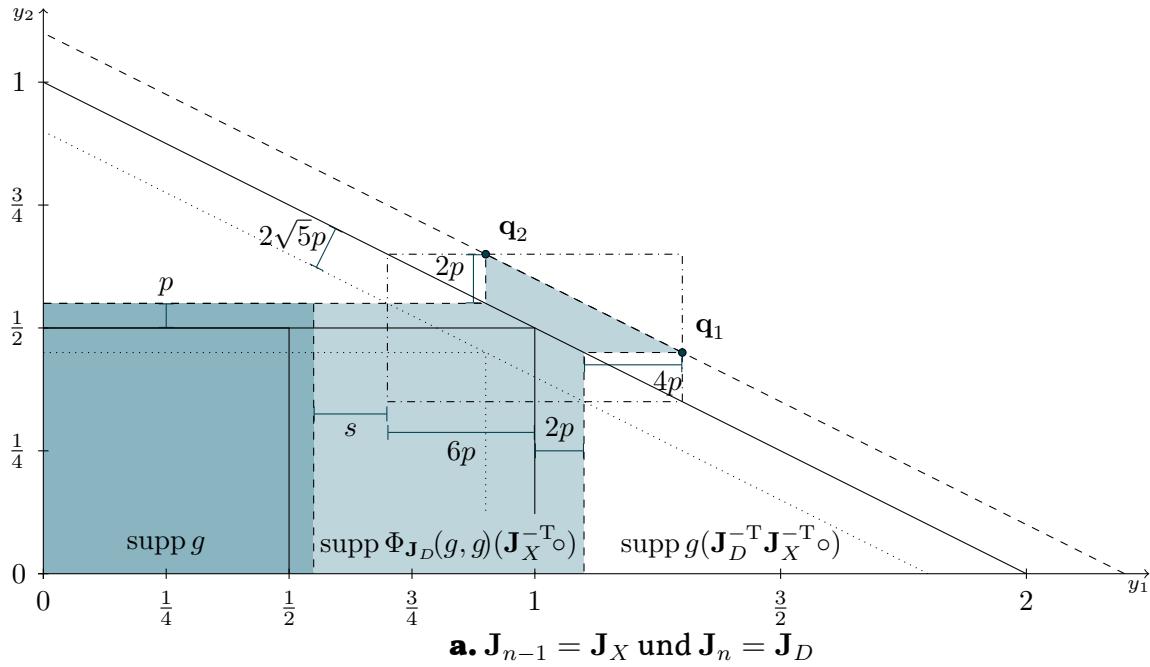
$$c_k(\varphi_{M_{n-1}}^{J_{n,n}}) = \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \Phi_{J_D}(g, g)(M_{n-1}^{-T} k), \quad k \in \mathbb{Z}^2,$$

und

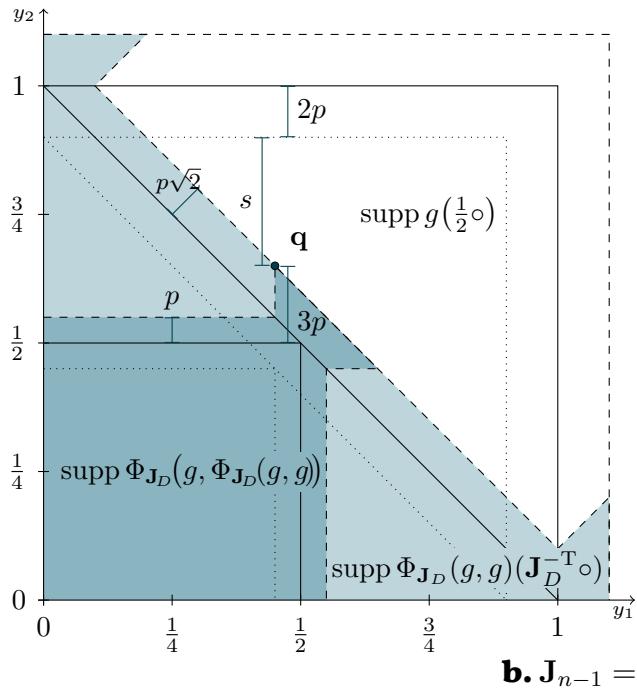
$$c_k(\varphi_{M_{n-2}}^{J_{n-1,n}}) = \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \Phi_{J_{n-1}}(g, \Phi_{J_D}(g, g))(M_{n-2}^{-T} k), \quad k \in \mathbb{Z}^2.$$

Aus Symmetrie-Gründen sind die folgenden Betrachtungen auf den ersten Quadranten beschränkt, vgl. Abbildung 4.16 a) und b), denn diese Situation findet sich in den anderen Quadranten durch Spiegelung an der y_1 - und y_2 -Achse bzw. Drehung um den Ursprung analog wieder.

Der folgende Beweis ist für $J_{n-1} = J_X$ geführt, gilt aber auch analog für $J_{n-1} = J_Y$. In Abbildung 4.16 a) sind für den Fall $p = \frac{1}{20}$ die drei Funktionen g , $\Phi_{J_D}(g, g)(J_X^{-T} \circ)$



a. $\mathbf{J}_{n-1} = \mathbf{J}_X$ und $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_D$



b. $\mathbf{J}_{n-1} = \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_D$

Abbildung 4.16. Skizze der Träger dreier sukzessiver Skalierungsfunktionen für verschiedene Skalierungsmatrizen und $p = \frac{1}{20}$.

4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume

und $g(\mathbf{J}_D^{-T} \mathbf{J}_X^{-T} \circ)$ dargestellt, deren Trer jeweils durch die gestrichelte Linie abgeschlossen wird. Zusätzlich sind Ω_a^2 , $\mathbf{J}_X^T \Omega_a^2$ und $\mathbf{J}_X^T \mathbf{J}_D^T \Omega_a^2$ für $a = 0$ sowie für $a = -p$ als gepunktete Linien eingezeichnet, denn im Gebiet innerhalb dieser gepunkteten Linie ist die jeweilige Funktion wegen Eigenschaft F2) von g stets 1. Für die Eckpunkte $\mathbf{r}_x = (\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2} - p)^T$ und $\mathbf{r}_y = (-\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p)^T$ von Ω_p^2 gilt $\mathbf{J}_X^T \mathbf{J}_D^T \mathbf{r}_x = (2 - 4p, 0)^T$ und $\mathbf{J}_X^T \mathbf{J}_D^T \mathbf{r}_y = (0, 1 - 2p)^T$. Somit liegt zunächst $\Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g)(\mathbf{J}_X^{-T} \circ)$ aufgrund der durch die Summation hinzugefügten Rder lediglich innerhalb $\Omega_{(6p, 3p)}^2$. Gilt jedoch, dass

$$\text{supp } g \cap [1 - 6p, 1 + 6p] \times [\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2} + p] = \emptyset$$

erfüllt ist, so lässt sich Lemma 4.22 anwenden, denn dann ist der Schnitt dieses Gebietes mit $g^{\mathbf{J}_X}$ leer. Dieses Gebiet ist in Abbildung 4.16 a) durch ein mit Strich-Punkt umrandetes Rechteck gekennzeichnet. Ist also dieser Schnitt leer, so entspricht die Funktion $\Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g)(\mathbf{J}_X^{-T} \circ)$ der Funktion $g(\mathbf{J}_X^{-T} \circ)$.

Der leere Schnitt ist wegen $\text{supp } g \subset \Omega_p^2$ genau dann erfüllt, wenn für die in Abbildung 4.16 a) eingetragene Strecke s gilt

$$1 - 6p - \left(\frac{1}{2} + p\right) =: s \geq 0, \quad \text{d. h. } p \leq \frac{1}{14}.$$

Somit folgt für $p \leq \frac{1}{14}$ und $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}_{n-2}}^{\mathcal{J}_{n-1,n}}) &= \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \Phi_{\mathbf{J}_X}(g, \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g))(\mathbf{M}_{n-2}^{-T} \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \Phi_{\mathbf{J}_X}(g, g)(\mathbf{M}_{n-2}^{-T} \mathbf{k}) \\ &= c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}_{n-2}}^{\mathcal{J}_{n-1,n-1}}). \end{aligned}$$

Mit $p \leq \frac{1}{14}$ sind außerdem die Voraussetzungen für Lemma 4.22 erfüllt und es gilt analog zum Teil a) sogar noch weiter $\varphi_{\mathbf{M}_{n-2}}^{\mathcal{J}_{n-1,n-1}} = \varphi_{\mathbf{M}_{n-2}}^{\emptyset}$.

Für $\mathbf{J}_{n-1} = \mathbf{J}_D$ ist die Skizze der drei aufeinanderfolgenden Skalierungsfunktionen für $p = \frac{1}{20}$ in Abbildung 4.16 b) dargestellt mit der analogen Farbgebung und Liniengestalt wie in der Abbildung zum ersten Teil des Beweises. Für den Trer der Funktion $B_{\mathcal{J}_{n-1,n}} = \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g))$ sei q derjenige Eckpunkt mit der grsten y -Koordinate. Bei $q_1 = \frac{1}{2} - p$ schneidet die horizontale Grenze des Trers $\text{supp } g \subset \Omega_p^2$, die eingetragene Diagonale, die Grenze des Trers $\mathbf{J}_D \Omega_0^2$. Dort liegt ein Teil des Trers der um $\mathbf{J}_D^T (0, 1)^T$ verschobenen Funktion g . Senkrecht zur eben genannten Horizontalen

verläuft vom Punkt $(\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2} + p)^T$ die Grenze ebendieses Trägers. Sie endet im Punkt \mathbf{q} dessen Koordinaten sich aus dem Schnitt mit $\mathbf{J}_D^T \Omega_p^2$ bestimmen lassen zu $\mathbf{q} = (\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2} + 3p)^T$.

Es gilt für diesen Eckpunkt \mathbf{q} , dass $\mathbf{q} \in \mathbf{J}_D^T \mathbf{J}_D^T \Omega_{-p}^2 = 2\Omega_{-p}^2 = \{\mathbf{x} ; \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1 - 2p\}$ genau dann, wenn

$$\|\mathbf{q}\|_\infty = \frac{1}{2} + 3p \leq 1 - 2p \Leftrightarrow 1 - 2p - \left(\frac{1}{2} + 3p\right) =: s \geq 0, \quad \text{d. h. } p \leq \frac{1}{10}.$$

In Abbildung 4.16 b) ist die Länge s dieser Strecke ebenso eingezeichnet. Die Existenz dieser Strecke, also eines Wertes $s \geq 0$ ist gleichbedeutend damit, dass für den Träger die Teilmengenbeziehung $\text{supp } B_{\mathcal{J}_{n-1,n}} \subset \mathbf{J}_D^T \mathbf{J}_D^T \Omega_{-p}^2$ gilt. Es folgt mit Lemma 4.23, dass für beliebiges $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$ gilt

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}_{n-2}}^{\mathcal{J}_{n-1,n}}) &= \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g)) (\mathbf{M}_{n-2}^{-T} \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g) (\mathbf{M}_{n-2}^{-T} \mathbf{k}) \\ &= c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}_{n-2}}^{\mathcal{J}_{n-1,n-1}}). \end{aligned}$$

□

Beide Grenzen $p \leq \frac{1}{14}$ und $p \leq \frac{1}{10}$ aus dem Beweis zu b) des vorigen Theorems sind in dem Sinne scharf, dass sowohl ein Unterschreiten von $p \leq \frac{1}{14}$ im ersten Fall als auch $p \leq \frac{1}{10}$ im zweiten zu einem Widerspruch für eine Matrix \mathbf{M}_{n-2} führt, so deren Determinante nur groß genug ist. Dies verdeutlicht Abbildung 4.17 für den Fall b) des vorigen Theorems mit $\mathbf{J}_{n-1} = \mathbf{J}_D$: Dort sind die Träger für $p = \frac{1}{10}$ aufgetragen. Zum Punkt \mathbf{q} existiert ein Punkt \mathbf{p} , der in der gleichen Restklasse mod \mathbf{E}_2 ist und der ebenso auf dem Rand des Trägers der Funktion $\Phi_{\mathbf{J}_D}(g, g)(\mathbf{J}_D^{-T} \circ)$ liegt, vgl. den dazu an der y_1 -Achse gespiegelten Punkt \mathbf{q}' . Analog liegt für $p = \frac{1}{14}$ der Eckpunkt $\mathbf{q} = (\frac{1}{2} + p)\mathbf{1} \in \Omega_p^2$ auf dem Rand von $\mathbf{J}_X^T \mathbf{J}_D^T \Omega_p^2$.

Das Theorem 4.24 lässt sich verallgemeinern auf den Fall, dass für jedes Level $l \in \mathbb{N}_0$ eine eigene Funktion $h_l \in \Omega_{\mathbf{p}_l}^2$, $\mathbf{p}_l \in [0, \frac{1}{2}]^d$, anstelle von g gewählt wird, wobei einerseits $\max_l \|\mathbf{p}_l\|_\infty = p \leq \frac{1}{14}$ erfüllt sein muss, andererseits in der Tensorprodukt-Struktur für eine Skalierung $\mathbf{J}_l \in \{\mathbf{J}_X, \mathbf{J}_Y\}$ diejenige Dimension, die nicht verändert wird, auch in der Funktion unverändert bleibt, also $h_{l,i} = h_{l+1,i}$ ist, damit Lemma 4.22 weiter anwendbar ist.

4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume

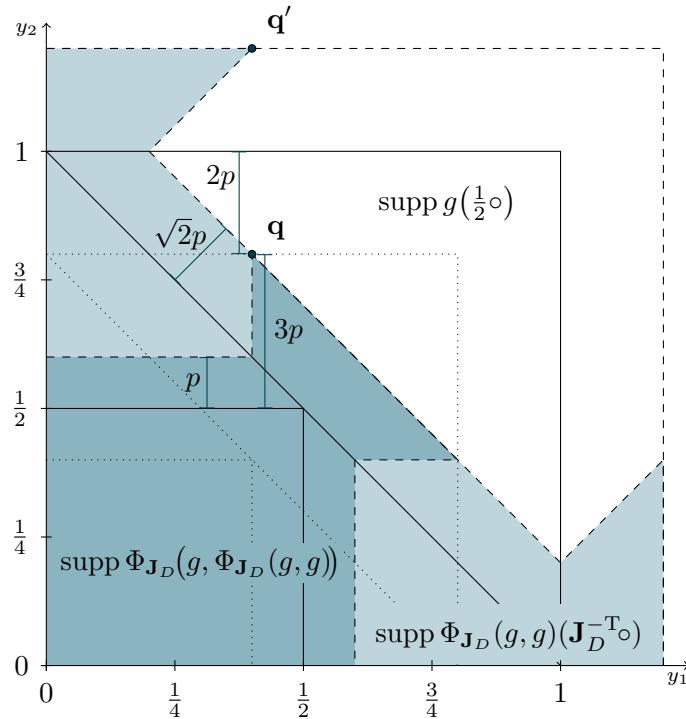


Abbildung 4.17. Skizze der Träger dreier sukzessiver Skalierungsfunktionen für den Fall, dass $J_{n-1} = J_n = J_D$ und $p = \frac{1}{10}$ ist. Hier ist $s = 0$.

Die Scherungsmatrizen J_Y^\pm , J_X^\pm und andere dyadische Dilatationsmatrizen können ausgehend von diesem Theorem in einer Multiskalen-Analyse ($\{J_j\}_{j \geq 0}$, $\{V_k\}_{k \geq 0}$) verwendet werden, denn tritt nur eine endlich lange Folge dieser Matrizen auf, etwa in den Leveln $l, l+1, \dots, k$, so wird danach in den Leveln $k+1, k+2$ diese Abhängigkeit wieder aufgelöst. So ist auch mit diesen Matrizen eine Schachtelung möglich, in der ein Raum $V_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$ nur von endlich vielen nachfolgenden Räumen abhängt.

Im Höherdimensionalen, $d > 2$, lässt sich eine ähnliche Aussage treffen: Sei \mathcal{J}_d als die Menge der Matrizen gegeben, die durch J_{x_i} , $i \in \{1, \dots, d\}$, als Skalierung der x_i -Achse um den Faktor 2 oder mit J_{x_i, x_j} , $i, j \in \{1, \dots, d\}$ als Rotation um $\frac{\pi}{4}$ in der x_i - x_j -Ebene und Skalierung dieser Ebene um $\sqrt{2}$ definiert sind. Die Matrizen J_{x_i, x_j} bilden also die höherdimensionale Verallgemeinerung von J_D , denn jede dieser Matrizen besteht in der Untermatrix bezogen auf die Spalten und Zeilen i, j aus der Matrix J_D und ist andernfalls identisch zur Einheitsmatrix E_d . Für diese Menge an Matrizen stellt das folgende Lemma eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des Theorems 4.24 dar.

Lemma 4.25.

Sei $d > 2$ und $0 \leq p \leq \frac{1}{14}$, eine Funktion g von der Form (4.9) mit $\text{supp } g \subset \Omega_p^d$ und eine reguläre Matrix $M_0 \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ gegeben wie in Theorem 4.24. Der Vektor der Dilatationsmatrizen $J_{1,n} \in \mathcal{J}_d^n$, $n \in \mathbb{N}$, erfülle die Eigenschaft

$$J_l = J_{x_i, x_j} \Rightarrow J_{l-1} \in \{J_{x_i}, J_{x_j}, J_{x_i, x_j}\}, \quad i, j \in \{1, \dots, d\}, \quad l = 2, \dots, n. \quad (4.13)$$

Dann gelten für die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}}$, $l = 0, \dots, n$, folgende Aussagen:

a) Ist $J_n = J_{x_i}$, $i \in \{1, \dots, d\}$, so gilt

$$\varphi_{M_{n-1}}^{\mathcal{J}_{n,n}} = \varphi_{M_{n-1}}^\emptyset.$$

b) Ist $J_n = J_{x_i, x_j}$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$, so gilt

$$\varphi_{M_{n-2}}^{\mathcal{J}_{n-2,n}} = \varphi_{M_{n-2}}^{\mathcal{J}_{n-1,n-1}}.$$

Bemerkung 4.26.

Die Eigenschaft (4.13) ist für den Fall $d = 2$ stets erfüllt.

Beweis des Lemmas 4.25. Die Aussage a) folgt analog zu Theorem 4.24 a). Die Aussage b) folgt daraus, dass mit Gleichung (4.13) die Argumentation aus Theorem 4.24 b) auf die x_i - x_j -Ebene angewandt wird. \square

Theorem 4.24 und Lemma 4.25 zeigen, dass die Identität $V_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} = V_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,l+1}}$ gilt, falls der Matrix-Vektor $J_{1,n} \in \mathcal{J}_d^n$ die Aussage (4.13) erfüllt und $g \in \Omega_p^d$, $0 \leq p \leq \frac{1}{14}$, von der Form (4.9) ist. In diesem Fall genügt es, höchstens eine nachfolgende Dilatationsmatrix J_{l+1} zu kennen, um die de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktion $\varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} = \varphi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,l+1}}$ anzugeben. Außerdem überträgt sich diese Abhängigkeit von nur einer Dilatationsmatrix ebenso auf die dazugehörigen de la Vallée Poussin-artigen Wavelets $\psi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,n}} = \psi_{M_l}^{\mathcal{J}_{l+1,l+1}}$. Dies fasst die folgende Definition zusammen.

4.5 Abhängigkeitstiefe der Skalierungsräume

Definition 4.27.

Sei $g \in \Omega_p^n$, $0 \leq p \leq \frac{1}{14}$, eine Funktion wie in Gleichung (4.9), $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ eine reguläre Matrix und $\mathbf{J} \in \mathcal{J}_d$ gegeben. Die (mehrdimensionalen) *de la Vallée Poussin-Mittel* $\varphi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{J}}$ sind dann gegeben durch

$$\varphi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{J}} := \varphi_{\mathbf{M}}^{(\mathbf{J})}$$

und die *de la Vallée Poussin-Wavelets* $\psi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{J}}$ durch

$$\psi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{J}} := \psi_{\mathbf{M}}^{(\mathbf{J})}.$$

Die mehrdimensionalen *de la Vallée Poussin-Mittel* und -Wavelets $\varphi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{J}}, \psi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{J}}$ bilden einen Spezialfall der *de la Vallée Poussin-artigen Skalierungsfunktionen* und Wavelets. Sie erfüllen somit die Lemmata 4.7 und 4.12. Insbesondere gelten die beiden folgenden expliziten Formeln für die Fourier-Koeffizienten beider Funktionen:

Mit den eindeutig gegebenen Vektoren $\mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}^T) \setminus \{0\}$ und $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}) \setminus \{0\}$ sowie $m = |\det \mathbf{M}|$ gilt

$$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{J}}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \Phi_{\mathbf{J}}(g, g)(\mathbf{M}^{-T} \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{d \times d},$$

und

$$c_{\mathbf{k}}(\psi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{J}}) = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{w}} \Phi_{\mathbf{J}}\left(\mathbf{T}_{\frac{\mathbf{v}}{2\pi}} g, g\right)(\mathbf{M}^{-T} \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{d \times d}.$$

Korollar 4.28.

Gegeben sei eine Folge $\{\mathbf{J}_l\}_{l>0}$ von Matrizen $\mathbf{J}_l \in \mathcal{J}_d$, die für alle $l \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft (4.13) erfüllt und seien für $l \geq 0$ die Matrizen \mathbf{M}_l wie in Definition 1.24 bezeichnet. Dann bilden die Räume $V_l = V_{\mathbf{M}_l}^{\mathbf{J}_{l+1}}$ der *de la Vallée Poussin-Mittel* $\varphi_{\mathbf{M}_l}^{\mathbf{J}_{l+1}}$, $l \geq 0$, eine dyadische Multiskalen-Analyse $(\{\mathbf{J}_l\}_{l>0}, \{V_j\}_{j \geq 0})$.

Literaturverzeichnis

- [1] L. Auslander, J.R. Johnson, R.W. Johnson, *Fast Fourier transform algorithms for finite abelian groups*, Tech. Rep. DU-MCS-95-01, Drexel Univ., 1995, url: <http://www.cs.drexel.edu/static/reports/DU-MCS-95-01.pdf>.
- [2] R. Bergmann, *The fast Fourier transform and fast wavelet transform for patterns on the torus*, ersch. in Appl. Comput. Harmon. Anal. (2013), doi: 10.1016/j.acha.2012.07.007, url: <http://arxiv.org/abs/1107.5415v1>.
- [3] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider, *Box splines*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [4] J.W.S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [5] D.R. Chen, *Frames of periodic shift-invariant spaces*, J. Approx. Theory 107 (2000) 204–211, doi: 10.1006/jath.2000.3486.
- [6] C.K. Chui, *An Introduction to wavelets*, Wavelet Analysis and Its Applications I, Academic Press, 1992.
- [7] C.K. Chui, C. Li, *A general framework of multivariate wavelets with duals*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 1 (1994) 368–390, doi: 10.1006/acha.1994.1023.
- [8] C.K. Chui, H.N. Mhaskar, *On trigonometric wavelets*, Constr. Approx. 9 (1993) 167–190, doi: 10.1007/BF01198002.
- [9] A. Cohen, *Non-stationary multiscale analysis*, in: C.K. Chui, L. Montefusco, L. Puccio (Eds.), *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, Wavelet Analysis and Its Applications 5, Academic Press, 1994, pp. 3–12.
- [10] J.W. Cooley, J.W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comput. 19 (1965) 297–301, doi: 10.2307/2003354.
- [11] S. Dahlke, G. Steidl, G. Teschke, *The continuous shearlet transform in arbitrary space dimensions*, J. Fourier Anal. Appl. 16 (2010) 340–364, doi: 10.1007/s00041-009-9107-8.

- [12] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Commun. Pure Appl. Math. 41 (1988) 909–996, doi: 10.1002/cpa.3160410705.
- [13] I. Daubechies, *Ten Lectures on wavelets*, SIAM, 1992.
- [14] F.J. Delvos, *Periodic interpolation on uniform meshes*, J. Approx. Theory 51 (1987) 71–80, doi: 10.1016/0021-9045(87)90096-7.
- [15] M.N. Do, M. Vetterli, *The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation*, IEEE Trans. Image Process. 14 (2005) 2091–2106, doi: 10.1109/TIP.2005.859376.
- [16] P. Duhamel, M. Vetterli, *Fast fourier transforms: a tutorial review and a state of the art*, Signal Processing 19 (1990) 259–299, doi: 10.1016/0165-1684(90)90158-U.
- [17] M.J. Fadili, J.L. Starck, *Curvelets and ridgelets*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science 3 (2007) 1718–1738, doi: 10.1007/978-0-387-30440-3_III.
- [18] F. Franchetti, H. Karner, C. Kral, S. and Ueberhuber, *Architecture independent short vector FFTs*, Proc IEEE ICASSP '01 2 (2001) 1109–1112, doi: 10.1109/I-CASSP.2001.941115.
- [19] E. Freitag, *Funktionentheorie 2*, Springer-Lehrbuch, Springer, 2009.
- [20] S.S. Goh, S.L. Lee, K.M. Teo, *Multidimensional periodic multiwavelets*, J. Approx. Theory 98 (1999) 72–103, doi: 10.1006/jath.1998.3279.
- [21] K. Guo, D. Labate, *Analysis and detection of surface discontinuities using the 3D continuous shearlet transform*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 30 (2010) 231–242, doi: 10.1016/j.acha.2010.08.004.
- [22] K. Guo, D. Labate, W.Q. Lim, G. Weiss, E. Wilson, *Wavelets with composite dilations and their MRA properties*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 20 (2006) 202–236, doi: 10.1016/j.acha.2005.07.002.
- [23] M.H. Gutknecht, *Attenuation factors in multivariate Fourier analysis*, Numer. Math. 51 (1987) 615–629, doi: 10.1007/BF01400173.
- [24] S.G. Johnson, M. Frigo, *A modified split-radix FFT with fewer arithmetic operations*, IEEE Trans. Signal Process. 55 (2006) 111–119, doi: 10.1109/TSP.2006.882087.
- [25] N. Kalwat, *Multivariate verschiebungsinvariante Räume und Interpolation durch Translate*, Diplomarbeit, Universität zu Lübeck, 2003.

Literaturverzeichnis

- [26] S. Klatt, *Erzeugende Muster für translationsinvariante Räume multivariater periodischer Funktionen*, Diplomarbeit, Universität zu Lübeck, 2008.
- [27] R. Kochendörffer, *Einführung in die Algebra*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.
- [28] Y.W. Koh, S.L. Lee, H.H. Tan, *Periodic orthogonal splines and wavelets*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 2 (1995) 201–218, doi: [10.1006/acha.1995.1014](https://doi.org/10.1006/acha.1995.1014).
- [29] D. Langemann, J. Prestin, *Multivariate periodic wavelet analysis*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 28 (2010) 46–66, doi: [10.1016/j.acha.2009.07.001](https://doi.org/10.1016/j.acha.2009.07.001).
- [30] F. Locher, *Interpolation on uniform meshes by the translates of one function and related attenuation factors*, Math. Comput. 37 (1981) 403–416, doi: [10.2307/2007435](https://doi.org/10.2307/2007435).
- [31] A.K. Louis, P. Maass, A. Rieder, *Wavelets: Theorie und Anwendungen*, Teubner, 1994.
- [32] S.G. Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell. 11 (1989) 674–693, doi: [10.1109/34.192463](https://doi.org/10.1109/34.192463).
- [33] S.G. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 1999.
- [34] I.E. Maximenko, M.A. Skopina, *Multidimensional periodic wavelets*, St. Petersbg. Math. J. 15 (2003) 165–190, doi: [10.1090/S1061-0022-04-00808-8](https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00808-8).
- [35] R. Mersereau, E. Brown III, A. Guessoum, *Row-column algorithms for the evaluation of multidimensional DFT's on arbitrary periodic sampling lattices*, IEEE ICASSP '83 8 (1983) 1264–1267, doi: [10.1109/ICASSP.1983.1171991](https://doi.org/10.1109/ICASSP.1983.1171991).
- [36] R.M. Mersereau, T. Speake, *A unified treatment of Cooley-Tukey algorithms for the evaluation of the multidimensional dft*, IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Process. 29 (1981) 1011–1018, doi: [10.1109/TASSP.1981.1163687](https://doi.org/10.1109/TASSP.1981.1163687).
- [37] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 37, Cambridge University Press, 1993.
- [38] H.N. Mhaskar, J. Prestin, *On the detection of singularities of a periodic function*, Adv. Comput. Math. 12 (2000) 95–131, doi: [10.1023/A:1018921319865](https://doi.org/10.1023/A:1018921319865).
- [39] F.J. Narcowich, J.D. Ward, *Wavelets associated with periodic basis functions*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 3 (1996) 40–56, doi: [10.1006/acha.1996.0003](https://doi.org/10.1006/acha.1996.0003).

- [40] I.Y. Novikov, M.A. Skopina, V.Y. Protasov, *Wavelet theory*, Translations of Mathematical Monographs 239. American Mathematical Society, 2011.
- [41] L.A. Piegl, W. Tiller, *The Nurbs Book*, Monographs in Visual Communication, Springer, 1997.
- [42] M. Pippig, *An efficient and flexible parallel FFT implementation based on FFTW*, in: C. Bischof, H.G. Hegering, W.E. Nagel, G. Wittum (Eds.), Comp. in HPC, Springer-Verlag, Berlin, 2012, pp. 125–134, doi: [10.1007/978-3-642-24025-6_11](https://doi.org/10.1007/978-3-642-24025-6_11).
- [43] G. Plonka, M. Tasche, *Periodic wavelets*, Preprint 93/11 der Preprintreihe des FB Mathematik, Universität Rostock, 1993.
- [44] G. Plonka, M. Tasche, *A unified approach to periodic wavelets*, in: C.K. Chui, L. Monefusco, L. Puccio (Eds.), Wavelets: Theory, Algorithms and Applications, Wavelet Analysis and Its Applications 5, Academic Press, New York, 1994, pp. 137–151.
- [45] G. Plonka, M. Tasche, *On the computation of periodic spline wavelets*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 2 (1995) 1–14, doi: [10.1006/acha.1995.1001](https://doi.org/10.1006/acha.1995.1001).
- [46] G. Pöplau, *Multivariate periodische Interpolation durch Translate und deren Anwendung*, Dissertation, Universität Rostock, 1995.
- [47] G. Pöplau, F. Sprengel, *Some error estimates for periodic interpolation on full and sparse grids*, in: A. le Méhauté, C. Rabut, L.L. Schumaker (Eds.), Curves and Surfaces with Applications in CAGD, Vanderbilt University Press, 1997, pp. 355–362.
- [48] H.J. Schmeisser, H. Triebel, *Topics in Fourier analysis and function spaces*, Wiley, 1987.
- [49] I.J. Schoenberg, *Cardinal Spline Interpolation*, SIAM, 1987.
- [50] K. Selig, *Periodische Wavelet-Packets und eine gradoptimale Schauderbasis*, Dissertation, Universität Rostock, 1998.
- [51] W. Sickel, F. Sprengel, *Some error estimates for periodic interpolation of functions from Besov spaces*, in: K. Jetter, H. Werner, R. Manfred (Eds.), Proc. 3rd Int. Conf. Multivariate Approx. Theory, 1998, pp. 295–321.
- [52] M. Skopina, *Multiresolution analysis of periodic functions*, East J. Approx 3 (1997) 203–224, doi: [10.1090/S1061-0022-04-00808-8](https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00808-8).
- [53] M. Skopina, *Wavelet approximation of periodic functions*, J. Approx. Theory 104 (2000) 302–329, doi: [10.1006/jath.1999.3434](https://doi.org/10.1006/jath.1999.3434).

Literaturverzeichnis

- [54] I.H. Sloan, S. Joe, *Lattice methods for multiple integration*, Oxford University Press, USA, 1994.
- [55] F. Sprengel, *Interpolation und Waveletzerlegung multivariater periodischer Funktionen*, Dissertation, Universität Rostock, 1997.
- [56] F. Sprengel, *A class of periodic function spaces and interpolation on sparse grids*, Numer. Funct. Anal. Optimization 21 (2000) 273–293, doi: 10.1080/01630560008816955.
- [57] W.H. Steeb, *Kronecker product of matrices and applications*, B.I. Wissenschaftsverlag, 1991.
- [58] G. Steidl, *On multivariate attenuation factors*, Numer. Algorithms 9 (1995) 245–261, doi: 10.1007/BF02141590.
- [59] E.M. Stein, G.L. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1971.
- [60] G. Strang, G. Fix, *A Fourier analysis of the finite element variational method*, in: G. Geymonat (Ed.), *Constructive aspects of functional analysis*, CIME Rome, 1971, pp. 796–830, doi: 10.1007/978-3-642-10984-3_7.
- [61] A. Zygmund, *Trigonometric series, vol. I & II*, Cambridge Mathematical Library Series, Cambridge University Press, 2nd Ed., 1988.

Verzeichnisse

Abbildungsverzeichnis

1.1	Der 2-Torus und eine Funktion auf diesem	8
1.2	Muster und erzeugende Menge für die Matrizen aus Beispiel 1.10	18
1.3	Die Niveaulinien zweier Gewichtsfunktionen σ_2^M	23
4.1	Die Fourier-Koeffizienten der de la Vallée Poussin-Mittel	85
4.2	Drei Darstellungen der Funktion B_α	88
4.3	Die Funktionen $B_\beta(J^T \circ)$ und B_α für die Matrizen J_X und J_D	89
4.4	Die de la Vallée Poussin-artige Skalierungsfunktion und der Dirichlet-Kern für N_X	97
4.5	$B_{(J_D)}$, $c_k(\varphi_{N_D}^{(J_D)})$ und $\varphi_{N_D}^{(J_D)}$ aus Beispiel 4.9 d)	98
4.6	Zwei Wahlen der Skalierungsmatrizen $J_l, l = 1, 2, 3$	99
4.7	Die Wavelets $\psi_{N_X}^{(J_X)}$ und $\psi_{N_D}^{(J_D)}$ im Vergleich.	104
4.8	Ein Schema zur Darstellung von Hauptrichtungen	108
4.9	Sechs richtungssensitive Wavelets für Wavelets nach vier Leveln	109
4.10	Alle möglichen Richtungen richtungssensitiver Wavelets nach 4 Leveln	111
4.11	Der Box-Spline B_Θ und seine Zerlegungen mit Dirichlet- und de la Vallée Poussin-artigen- Wavelets	112
4.12	Fünf Zerlege-Schritte zur Betrachtung der Diagonalen	114
4.13	Frequenzspektren zweier Wavelets, die je eine Diagonale bevorzugen .	114
4.14	Die Funktionen $f(x), f'(x), f''(x)$ und $F(x)$ aus Beispiel 4.20	115
4.15	Drei Wavelet-Anteile verschiedener Zerlegungen von $F(x)$	116
4.16	Frequenz-Träger dreier sukzessiver Funktionen im Fall $p = \frac{1}{20}$	122
4.17	Frequenz-Träger dreier sukzessiver Funktionen im Grenzfall $p = \frac{1}{10}$.	125

Tabellenverzeichnis

3.I	Laufzeiten der FFT auf Mustern $\mathcal{P}(M)$ der Form (3.6).	74
4.I	Zerlegungsmöglichkeiten mittels zweier Wavelet-Level.	107

wissenschaftlicher Werdegang

Ronny Bergmann

10.02.1983 * in Hamburg

1990 – 2003 Schulbesuch in Mollhagen und Bargteheide
Jun. 2003 Abitur am *Gymnasium Eckhorst*, Bargteheide

2004 – 2009 Studium an der *Universität zu Lübeck*
Sep. 2009 Diplom in Informatik mit Nebenfach Medieninformatik
an der *Universität zu Lübeck*
Titel der Diplomarbeit:
Interaktive und automatisierte Hypergraphenvisualisierung mittels NURBS-Kurven
Betreuer: PD Dr. Hanns-Martin Teichert

seit Okt. 2009 wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Institut für Mathematik der Universität zu Lübeck