



# Die multivariate anisotrope Wavelet-Transformation auf dem Torus

Ronny Bergmann

Institut für Mathematik  
Universität zu Lübeck

Kolloquiumsvortrag  
Kaiserslautern  
8. April 2013

# Einführung

## Periodische Wavelets im Eindimensionalen

- translationsinvariante Räume mit Verschiebung  $2\pi/N$
- Wavelets [PT95]
- schnelle Algorithmen und de la Vallée Poussin-Mittel [Se98]

## Im Mehrdimensionalen

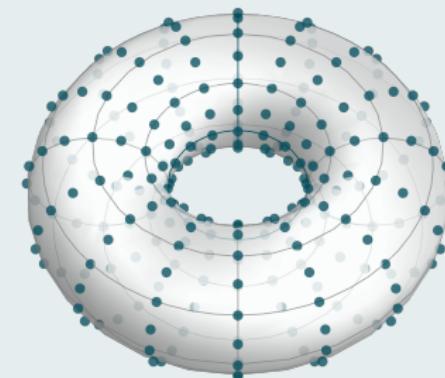
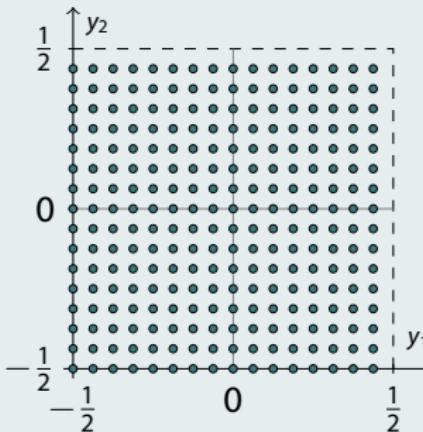
- Verschiebungen auf  $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi]^d$
- aus dem Skalierungsfaktor  $J$  wird eine Skalierungsmatrix  $\mathbf{J}$  [MS03]
- bei festem Faktor (z. B.  $|\det \mathbf{J}| = 2$ ) verschiedene Matrizen möglich [LP10]
- Richtungspräferenz
- Umgang mit „Curse of Dimension“

# Muster

gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  einer regulären Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1} \mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$$



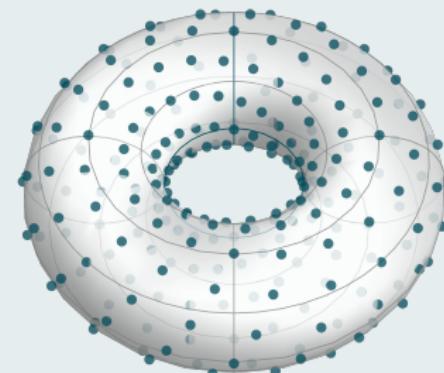
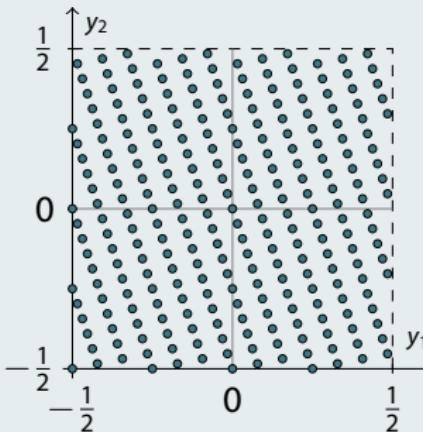
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

# Muster

gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  einer regulären Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1} \mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$$



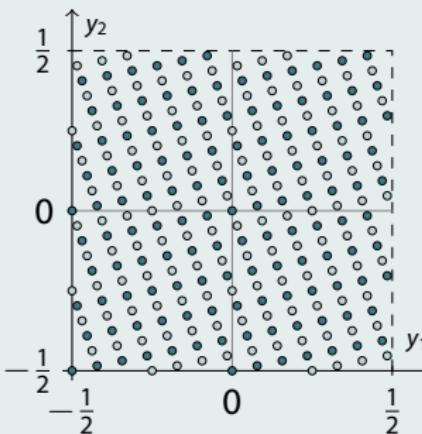
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

# Muster

gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  einer regulären Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1} \mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$$



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

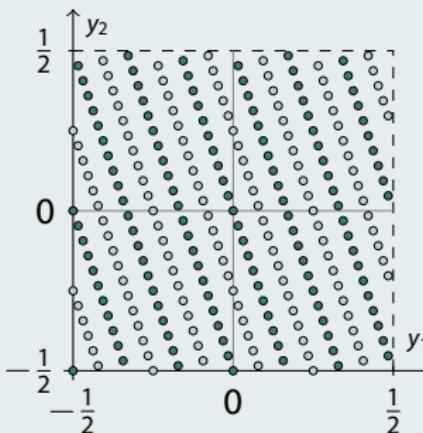
- $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\det \mathbf{M}| =: m$
- $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), + \bmod 1)$  ist eine Gruppe
- Teilmuster  $\mathcal{P}(\mathbf{N})$   
für  $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{J}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$
- etwa im dyadischen Fall  $|\det \mathbf{J}| = 2$ :
- $\mathbf{J}_X := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

# Muster

gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  einer regulären Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1} \mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$$



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

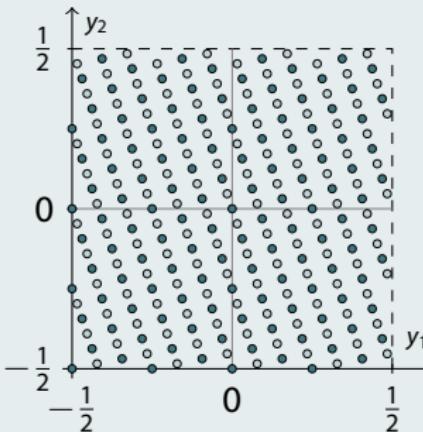
- $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\det \mathbf{M}| =: m$
- $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), + \bmod 1)$  ist eine Gruppe
- Teilmuster  $\mathcal{P}(\mathbf{N})$   
für  $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{J}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$
- etwa im dyadischen Fall  $|\det \mathbf{J}| = 2$ :
- $\mathbf{J}_X := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{J}_Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

# Muster

gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  einer regulären Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1} \mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$$



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

- $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\det \mathbf{M}| =: m$
- $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), + \bmod 1)$  ist eine Gruppe
- Teilmuster  $\mathcal{P}(\mathbf{N})$   
für  $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{J}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$
- etwa im dyadischen Fall  $|\det \mathbf{J}| = 2$ :
- $\mathbf{J}_X := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{J}_Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{J}_D := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

# Translationsinvarianz I

Mit  $T_y f := f(\circ - 2\pi y)$  heißt  $V \subset L_2(\mathbb{T}^d)$  **M-invariant**, falls

$$\forall y \in \mathcal{P}(\mathbf{M}) : T_y f \in V.$$

$\Rightarrow$  Raum der Translate  $V_{\mathbf{M}}^f := \text{span}\{T_y f, \quad y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$  ist **M-invariant**, denn

$g \in V_{\mathbf{M}}^f$  lässt sich schreiben als

$$g = \sum_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_y T_y f, \quad a_y \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad T_x g = \sum_{y \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{y-x} T_y f \in V_{\mathbf{M}}^f$$

# Fourier-Transformation

Die Menge  $\mathcal{G}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}\mathcal{P}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Z}^d$  heißt *erzeugende Menge*.

Die Fourier-Matrix auf  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ :

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) := \frac{1}{\sqrt{m}} \left( e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

- $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$  adressiert Zeilen
- $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$  die Spalten
- für  $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathcal{P}(\mathbf{M})$  je eine feste Anordnung der Elemente
- mit  $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^m$  (sortiert wie die Spalten): DFT auf  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} = \sqrt{m} \mathcal{F}(\mathbf{M}) \mathbf{a} \in \mathbb{C}^m$$

# Fourier-Koeffizienten

- Fourier-Koeffizienten für  $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$

$$c_{\mathbf{k}}(f) := \langle f, e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{o}} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

⇒ Parsevalsche Gleichung:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(f) \overline{c_{\mathbf{k}}(g)}$$

- Gramsche Matrix  $\mathbf{G} = (\langle T_{\mathbf{x}} f, T_{\mathbf{y}} f \rangle)_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$  diagonalisierbar mit  $\mathcal{F}(\mathbf{M})$

⇒  $T_{\mathbf{y}} f, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$  linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \forall \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T) : \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)|^2 > 0$$

# Translationsinvarianz II

Charakterisierung der Translate in Fourier-Koeffizienten

Schreiben  $g \in V_{\mathbf{M}}^f$  mit  $c_{\mathbf{k}}(\mathsf{T}_{\mathbf{y}}f) = e^{-2\pi i \mathbf{y}^T \mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(f)$  als

$$g = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} \mathsf{T}_{\mathbf{y}} f \Leftrightarrow c_{\mathbf{k}}(g) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} c_{\mathbf{k}}(f), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

Zerlegen  $\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$  ( $e^{-2\pi i \mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{y}} = 1$ )

$$\Leftrightarrow c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(g) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f) = \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)$$

# Schnelle Algorithmen I

Zurück zum Tensorprodukt

- *Smith-Normalform:* Zerlegung in ganzzahlige Matrizen  $\mathbf{M} = \mathbf{QER}$  mit  $|\det \mathbf{Q}| = |\det \mathbf{R}| = 1$  und  $\mathbf{E} = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_d), \epsilon_{j-1} | \epsilon_j, j = 2, \dots, d$   
⇒ Basiswechsel zu Tensorprodukt-Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{E})$

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{P}_\mathbf{h} \mathcal{F}_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\epsilon_d} \mathbf{P}_\mathbf{y}, \quad \mathcal{F}_\epsilon = \left( e^{-2\pi i h \epsilon^{-1} g} \right)_{g,h=0}^{\epsilon-1}$$

- $\mathbf{P}_\mathbf{h}$  und  $\mathbf{P}_\mathbf{y}$  Umsortierung in  $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$  und  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$   
⇒ Row-Column-Algorithmus

⇒ Fourier-Transformation in  $O(m \log m)$

# Wavelet-Transformation

Gegeben seien

- Faktorisierung  $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N}$ ,  $|\det \mathbf{J}| = 2$
- Skalierungsfunktionen  $\xi, \varphi \in L_2(\mathbb{T}^d)$ ,  $\varphi \in V_{\mathbf{M}}^\xi$  mit
- $T_{\mathbf{y}}\xi$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$  linear unabhängig  $\Rightarrow \dim V_{\mathbf{M}}^\xi = m$
- $T_{\mathbf{x}}\varphi$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$  linear unabhängig  $\Rightarrow \dim V_{\mathbf{N}}^\varphi = \frac{m}{2}$

$\Rightarrow$  Es existiert ein Wavelet  $\psi$ , so dass  $V_{\mathbf{M}}^\xi = V_{\mathbf{N}}^\varphi \oplus V_{\mathbf{N}}^\psi$

$\Rightarrow$  Zerlegung der Funktion  $f_{\mathbf{M}} \in V_{\mathbf{M}}^\xi$  in  $f_{\mathbf{M}} = f_{\mathbf{N}} + g_{\mathbf{N}}$ ,  $f_{\mathbf{N}} \in V_{\mathbf{N}}^\varphi$ ,  $g_{\mathbf{N}} \in V_{\mathbf{N}}^\psi$

- $f_{\mathbf{N}}$  ist eine „gröbere Darstellung“
- $g_{\mathbf{N}}$  heißt Wavelet-Anteil von  $f_{\mathbf{M}}$   $\Rightarrow$  Detail
- richtungsselektiv, abhängig von  $\mathbf{J}$

# Schnelle Algorithmen II

Beschreibung im Frequenzbereich

Zerlegung in Fourier- und  $V_M^\xi$ -Koeffizienten: Mit

$$f_M = \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_{f_M, y} T_y \xi, \quad \varphi = \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_{\varphi, y} T_y \xi$$

gilt für die gesuchte Funktion  $f_N = \sum_{x \in \mathcal{P}(N)} a_{f_N, x} T_x \varphi$

$$\hat{a}_{f_N, k} = \frac{1}{\sqrt{|\det J|}} \sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} \overline{\hat{a}_{\varphi, k+N^T g}} \hat{a}_{f_M, k+N^T g}, \quad k \in \mathcal{G}(N^T)$$

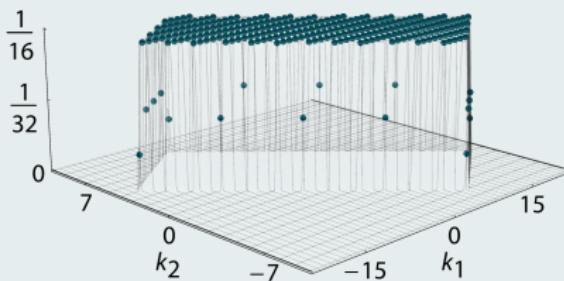
analog mit  $\psi \in V_M^\xi$  für  $g_N \in V_N^\psi$

⇒ Wavelet-Transformation in  $O(m)$

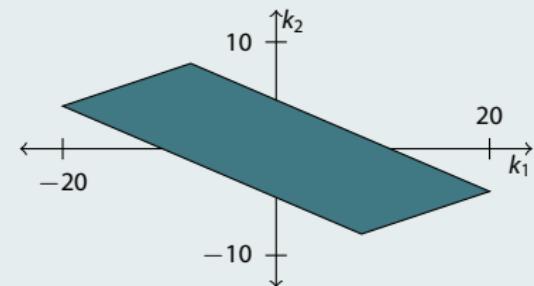
# Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion  $c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}(\mathbf{M}^T)}(\mathbf{k})$
- ⇒ Gibbs-Phänomen
- Ränder gesondert betrachten für Orthonormalität

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}})$

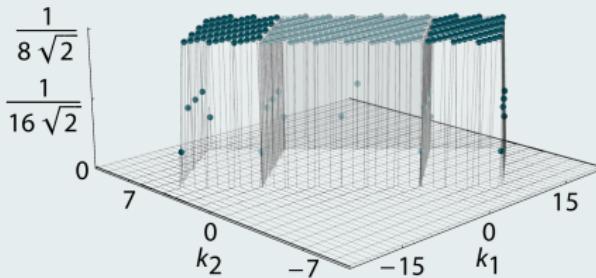


schematisch

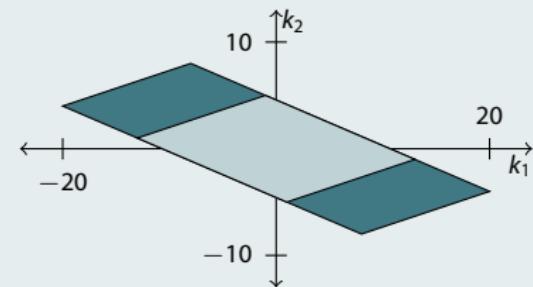
# Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion  $c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}(\mathbf{M}^T)}(\mathbf{k})$
- ⇒ Gibbs-Phänomen
- Ränder gesondert betrachten für Orthonormalität

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{N}}), |c_{\mathbf{k}}(\psi_{\mathbf{N}})|$

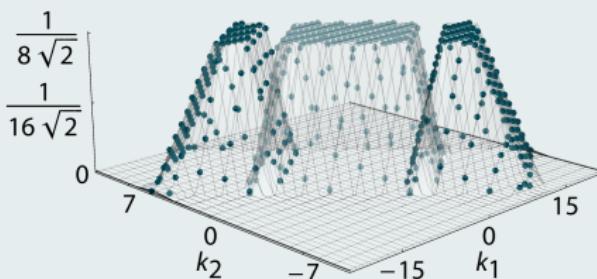


schematisch

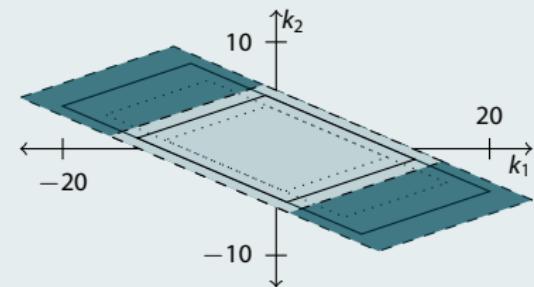
# Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- de la Vallée Poussin-Mittel  $c_{\mathbf{k}}(\tilde{\varphi}_{\mathbf{M}})$
- ⇒ Lokalisierung
- Glattheit auch am Rand

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$$c_{\mathbf{k}}(\tilde{\varphi}_{\mathbf{N}}), |c_{\mathbf{k}}(\tilde{\psi}_{\mathbf{N}})|$$

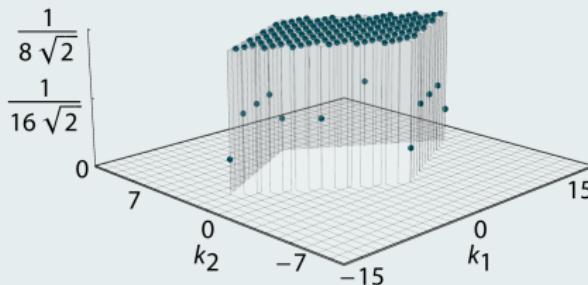


schematisch

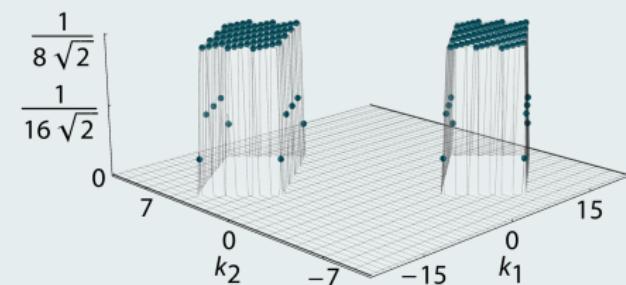
# Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion  $c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}(\mathbf{M}^T)}(\mathbf{k})$
- ⇒ Gibbs-Phänomen
- Ränder gesondert betrachten für Orthonormalität

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{N}})$$

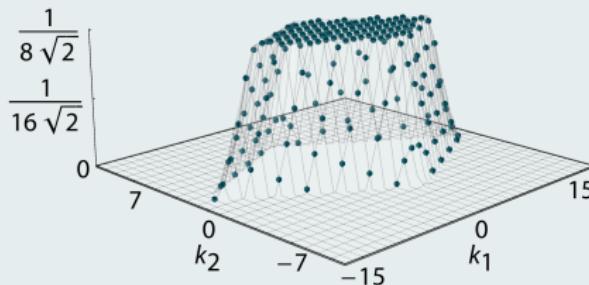


$$c_{\mathbf{k}}(\psi_{\mathbf{N}}) \times e^{2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{g}}, \mathbf{g} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}) \setminus \{\mathbf{0}\}$$

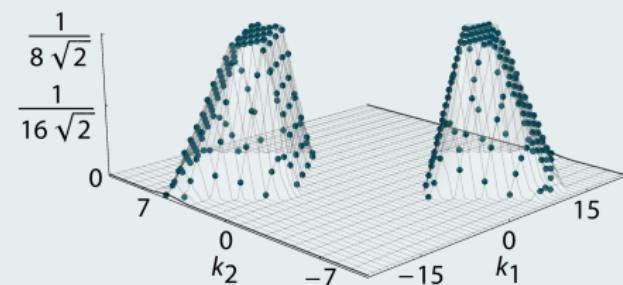
# Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
  - de la Vallée Poussin-Mittel  $c_{\mathbf{k}}(\tilde{\varphi}_{\mathbf{M}})$
- ⇒ Lokalisierung
- Glattheit auch am Rand

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$$c_{\mathbf{k}}(\tilde{\varphi}_{\mathbf{N}})$$



$$c_{\mathbf{k}}(\tilde{\psi}_{\mathbf{N}}) \times e^{2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{g}}, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}) \setminus \{\mathbf{0}\}$$

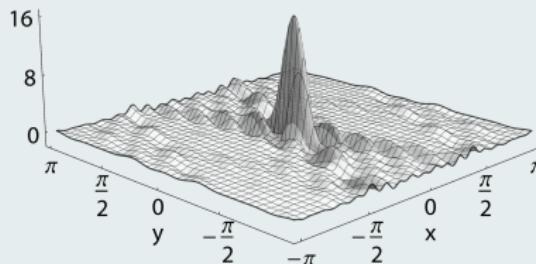
# Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion  $\varphi_{\mathbf{M}}$

⇒ Gibbs-Phänomen

- im Zeitbereich: Richtungspräferenz

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$\varphi_{\mathbf{M}}$

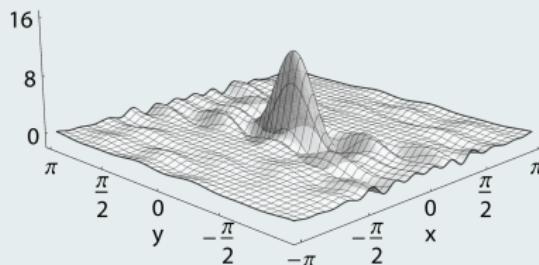
# Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion  $\varphi_{\mathbf{M}}$

⇒ Gibbs-Phänomen

- im Zeitbereich: Richtungspräferenz

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$\varphi_{\mathbf{N}}$

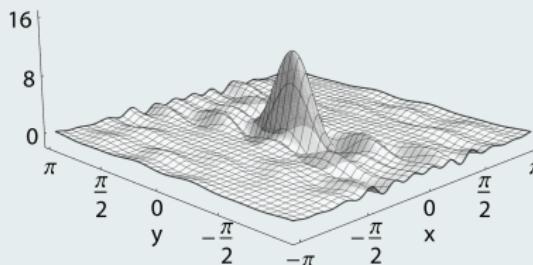
# Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion  $\varphi_{\mathbf{M}}$

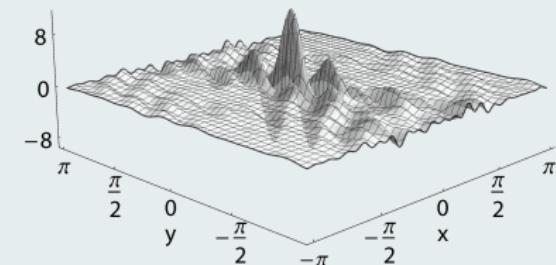
⇒ Gibbs-Phänomen

- im Zeitbereich: Richtungspräferenz

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$\varphi_{\mathbf{N}}$



$\psi_{\mathbf{N}}$

# Konstruktion von Wavelet-Systemen

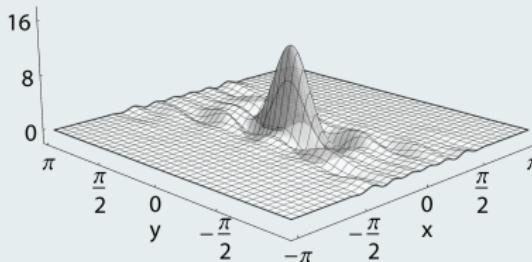
- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$

- de la Vallée Poussin-Mittel  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{M}}$

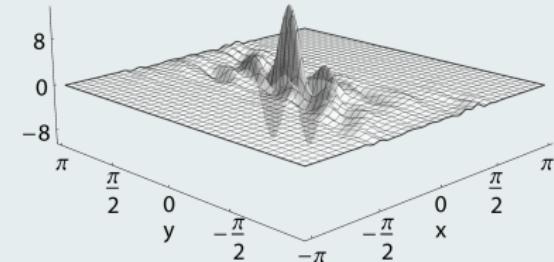
⇒ Lokalisierung

- im Zeitbereich: Richtungspräferenz

Für  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

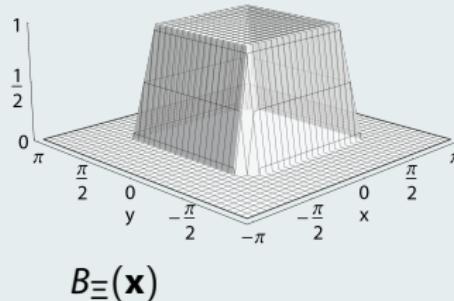


$\tilde{\varphi}_{\mathbf{N}}$

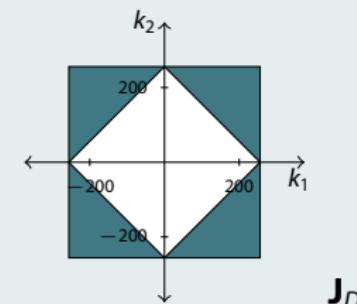
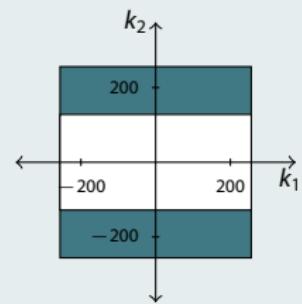
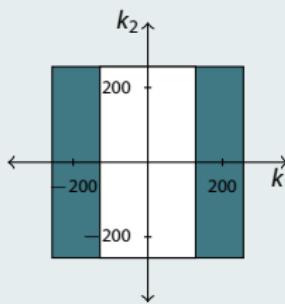


$\tilde{\psi}_{\mathbf{N}}$

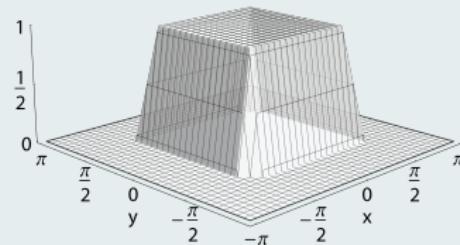
# Beispiel: Zerlegung und Richtungen



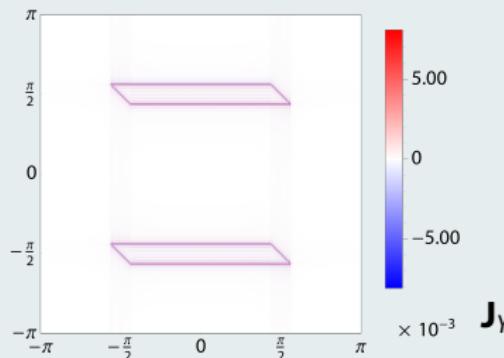
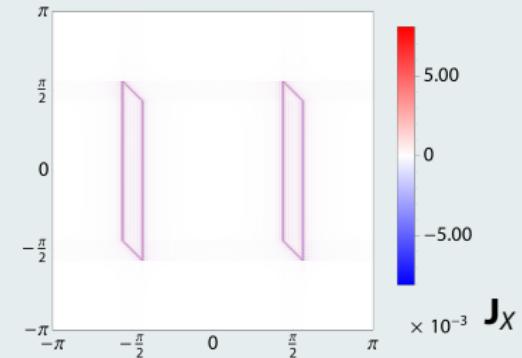
- Box Spline  $B_{\Xi}$ ,  $\Xi = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
- Samplingpunkte:  
 $2\pi\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ ,  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Dirichlet-Wavelets
- 3 Zerlegungsmöglichkeiten:



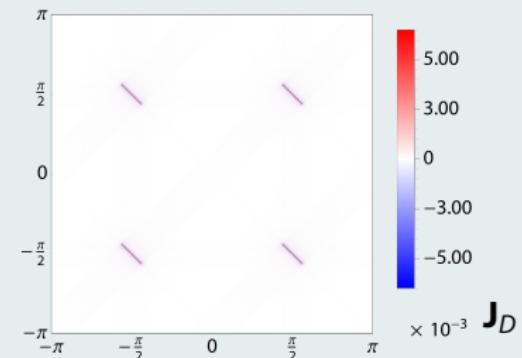
# Beispiel: Zerlegung und Richtungen



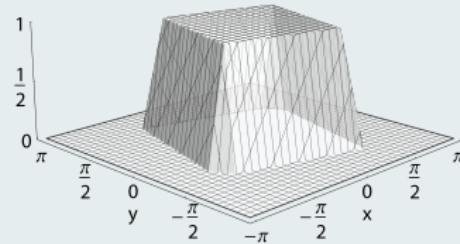
$B_{\Xi}(\mathbf{x})$



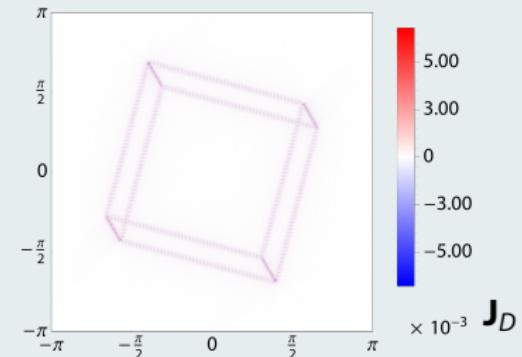
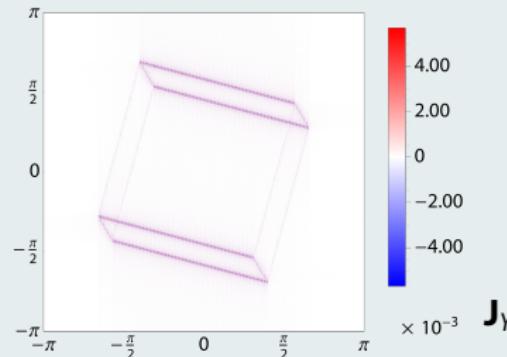
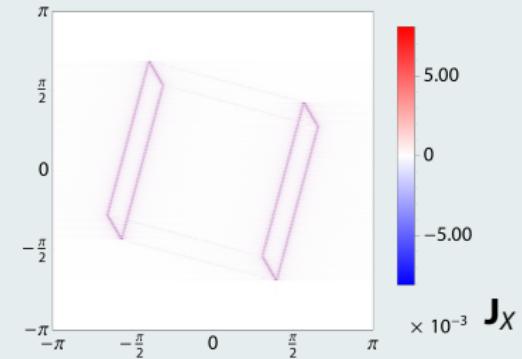
multivariate periodische Wavelets



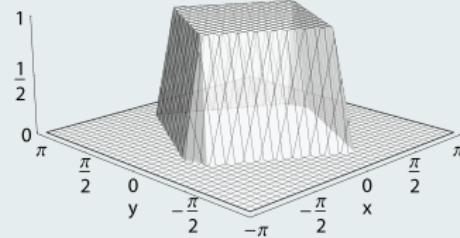
# Beispiel: Zerlegung und Richtungen



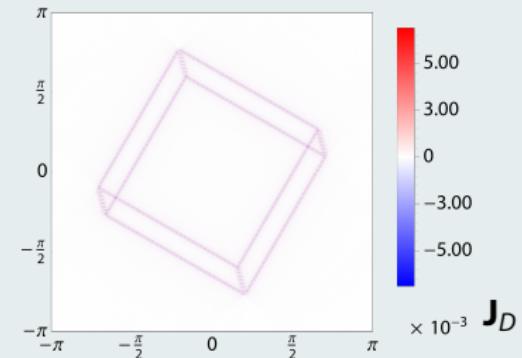
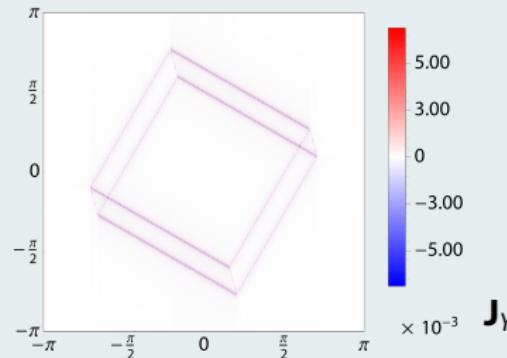
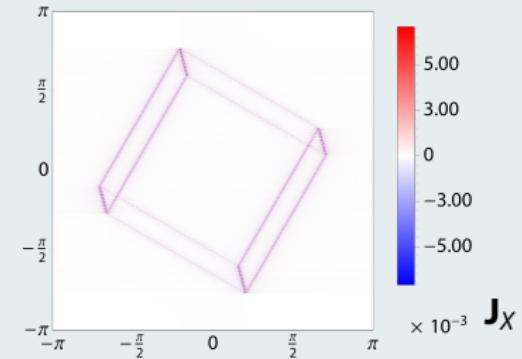
$$B_E\left(\mathbf{R}_{\frac{\pi}{12}} \mathbf{x}\right)$$



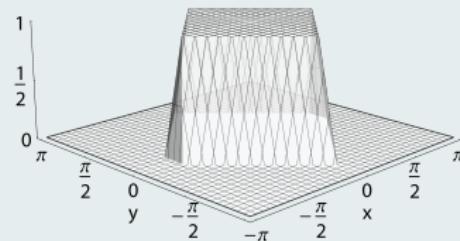
# Beispiel: Zerlegung und Richtungen



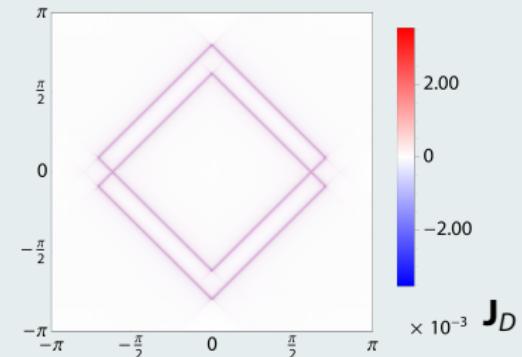
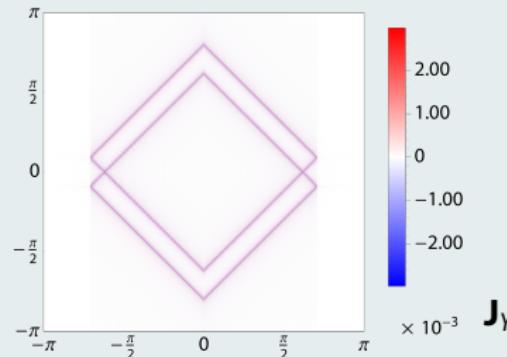
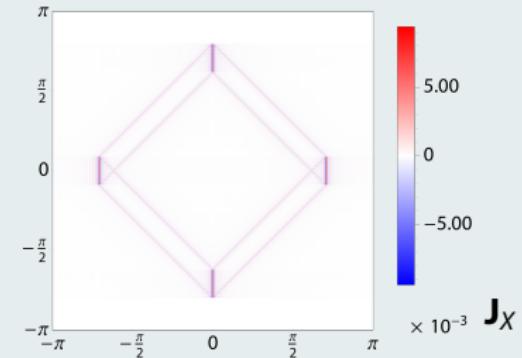
$$B_E(\mathbf{R}_{\pi/6} \mathbf{x})$$



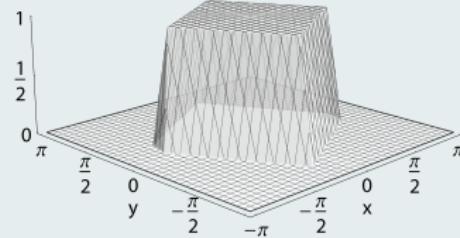
# Beispiel: Zerlegung und Richtungen



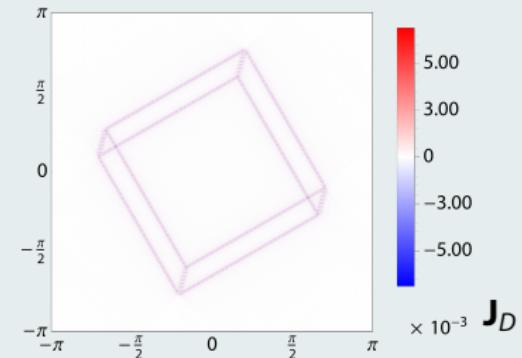
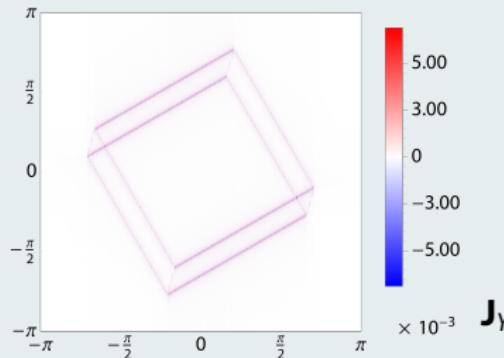
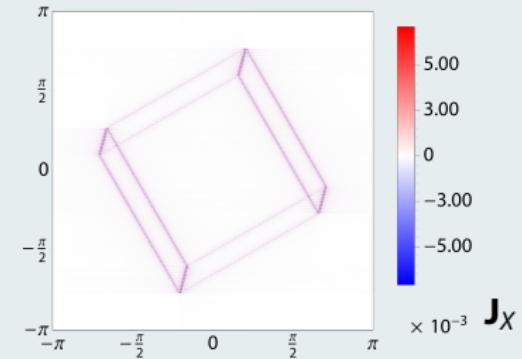
$$B_E(\mathbf{R}_{\frac{\pi}{4}} \mathbf{x})$$



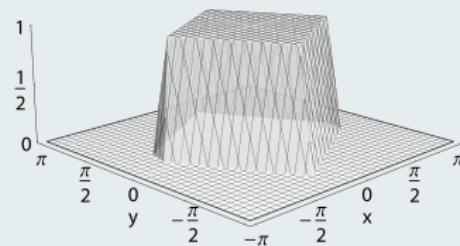
# Beispiel: Zerlegung und Richtungen



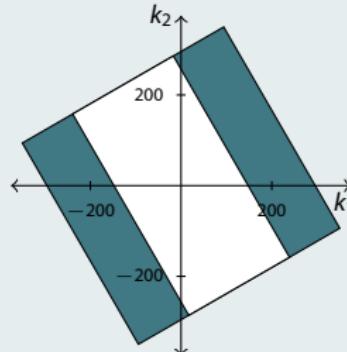
$$B_E(\mathbf{R}_{\pi/3} \mathbf{x})$$



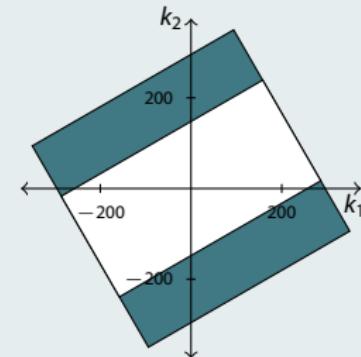
## Beispiel: Zerlegung und Richtungen



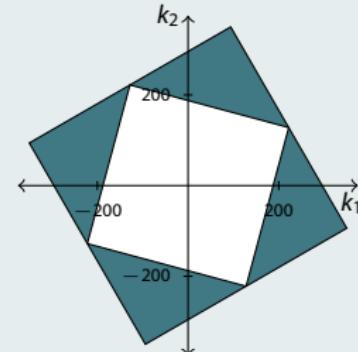
$$B_{\Xi}(\mathbf{R}_{\frac{\pi}{3}} \mathbf{x}), \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 256 & -444 \\ 444 & 256 \end{pmatrix}$$



$\mathbf{J}_Y$

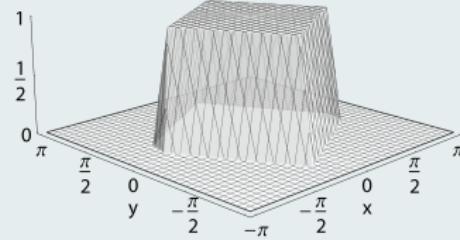


$\mathbf{J}_X$

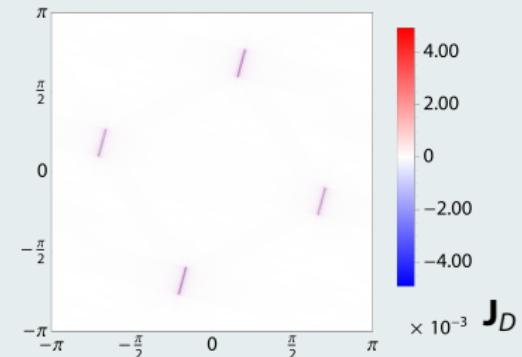
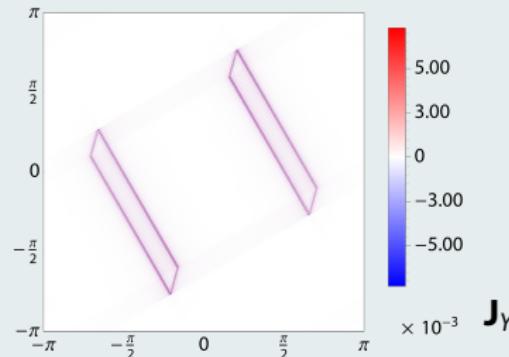
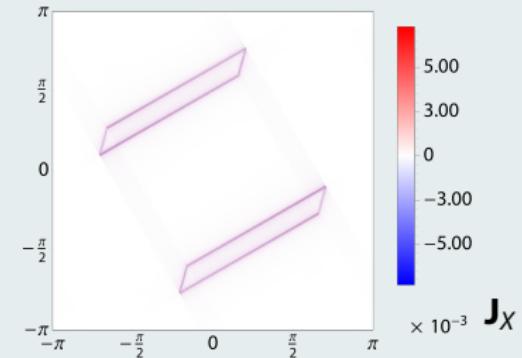


$\mathbf{J}_D$

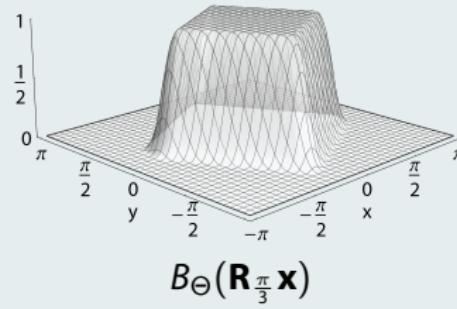
# Beispiel: Zerlegung und Richtungen



$$B_{\Xi}(\mathbf{R}_{\frac{\pi}{3}} \mathbf{x}), \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 256 & -444 \\ 444 & 256 \end{pmatrix}$$

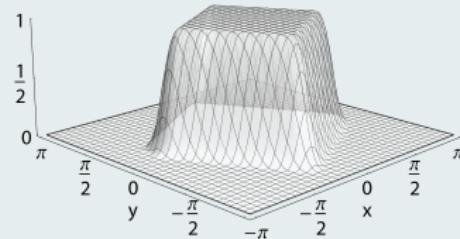


## Beispiel: Zerlegung und Lokalität

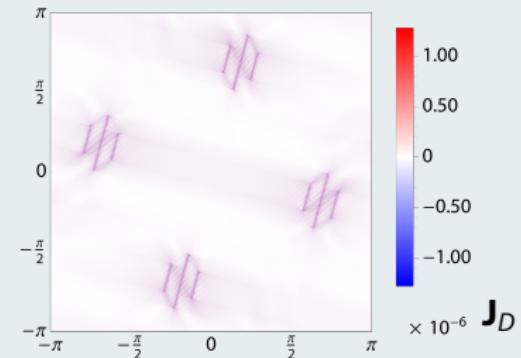
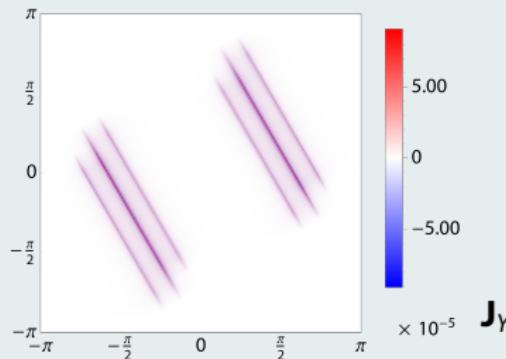
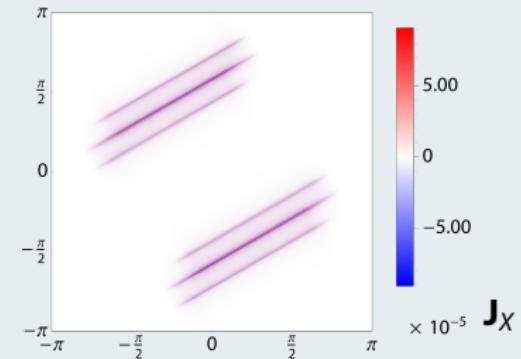


- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- Samplingpunkte:  $2\pi\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_2)$ ,  
 $\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 256 & -444 \\ 444 & 256 \end{pmatrix}$
- gleiche Zerlegung wie im letzten Beispiel

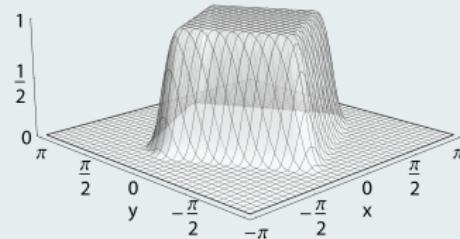
# Beispiel: Zerlegung und Lokalität



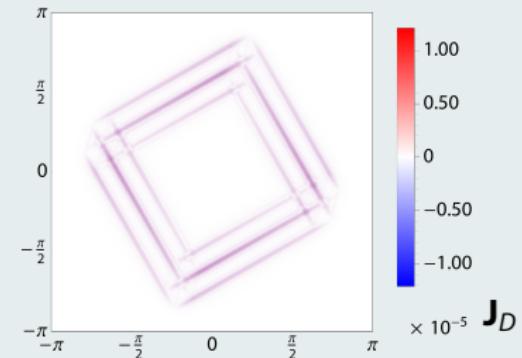
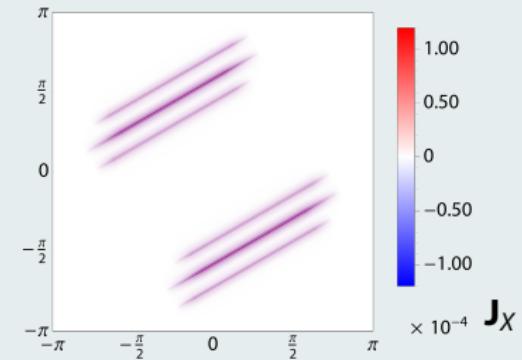
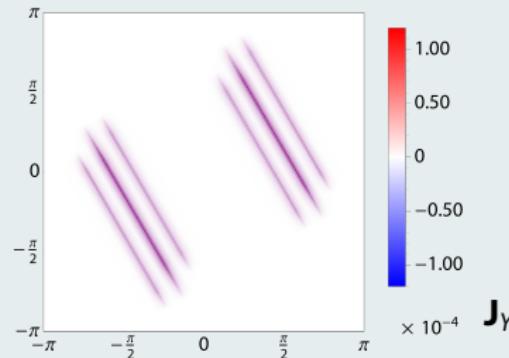
$B_\Theta(R_{\frac{\pi}{3}}x)$   
Dirichlet-Wavelets



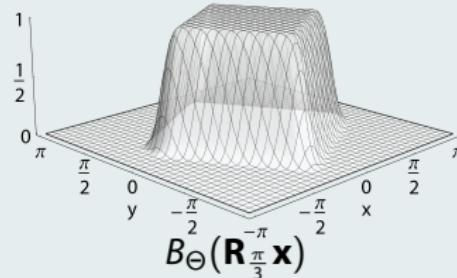
# Beispiel: Zerlegung und Lokalität



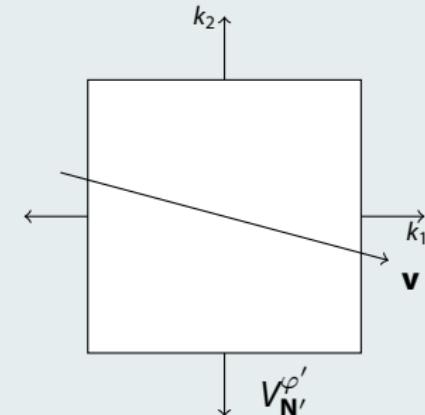
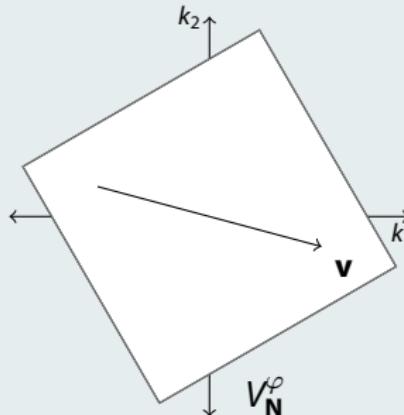
$B_\Theta(R_{\frac{\pi}{3}}x)$   
de la Vallée Poussin-Wavelets



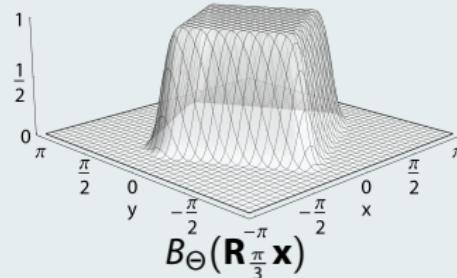
## Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



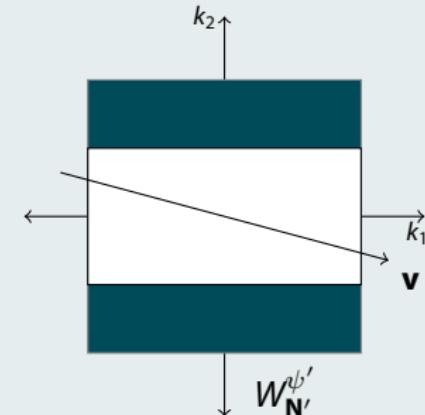
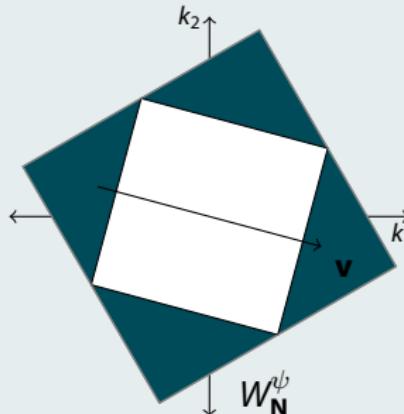
- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung:  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{N}$   
bzw.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{N}'$



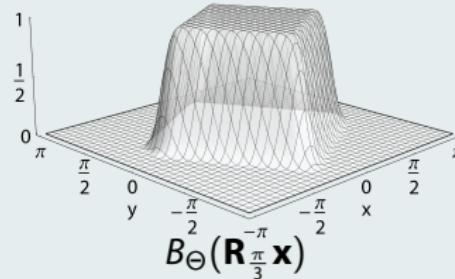
## Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



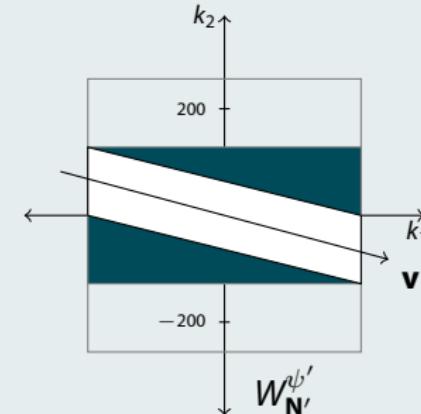
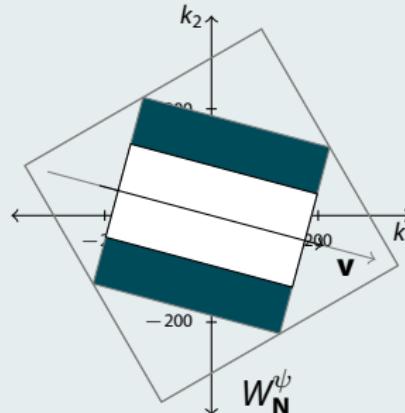
- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung:  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{N}$   
bzw.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{N}'$



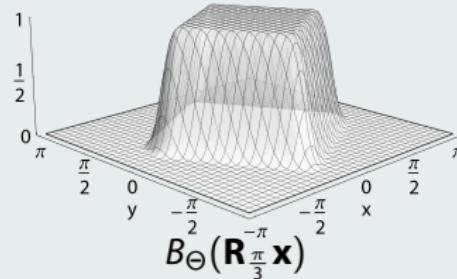
# Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



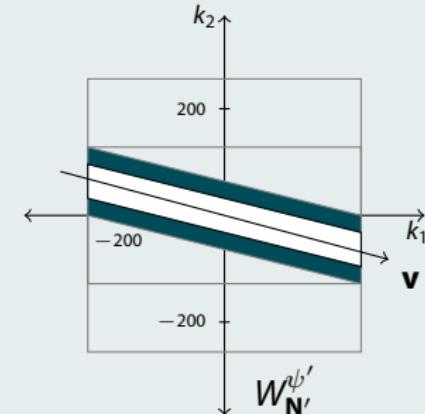
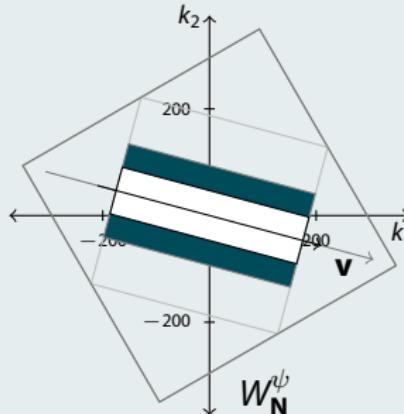
- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung:  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{N}$   
bzw.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{N}'$



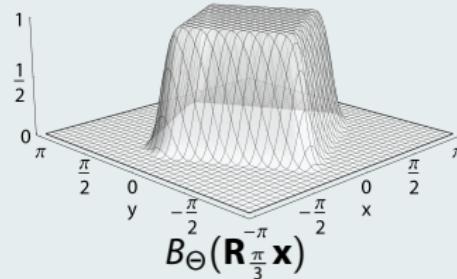
# Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



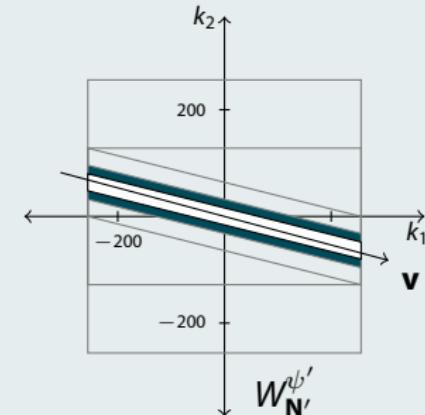
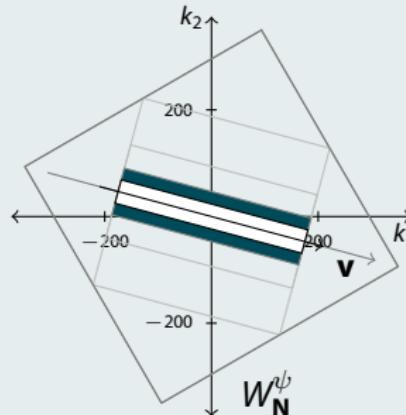
- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung:  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{N}$   
bzw.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{N}'$



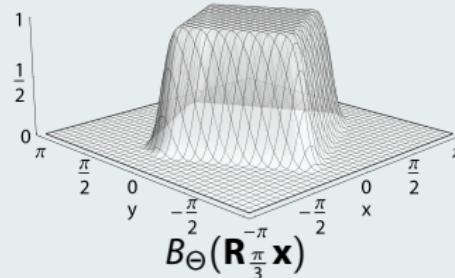
## Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



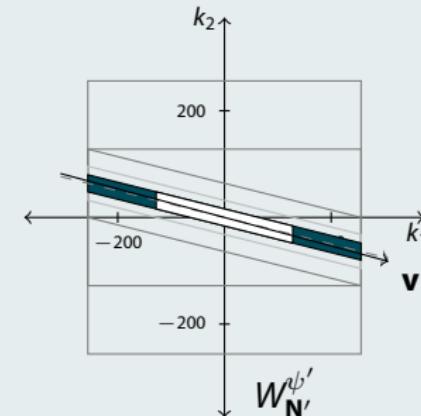
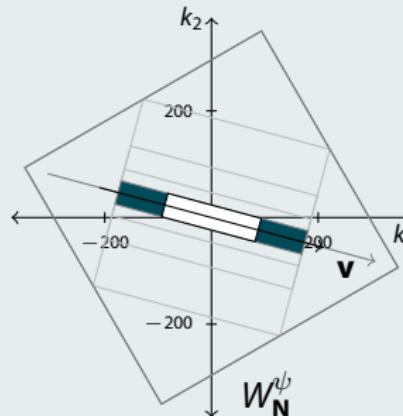
- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung:  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{N}$   
bzw.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{N}'$



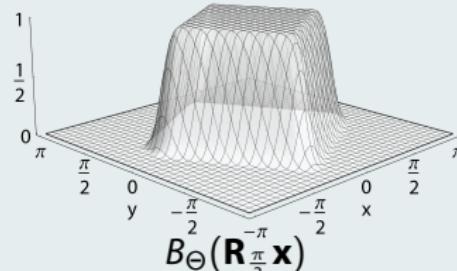
# Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



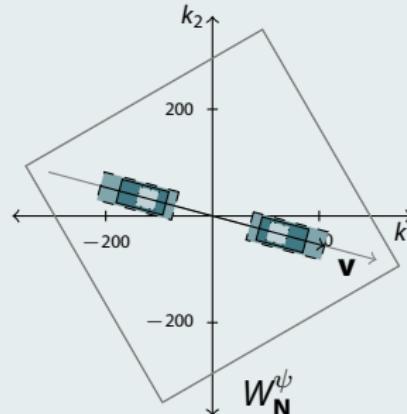
- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung:  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}$   
bzw.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}'$



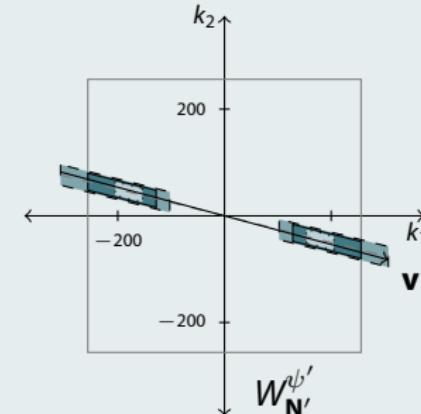
# Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



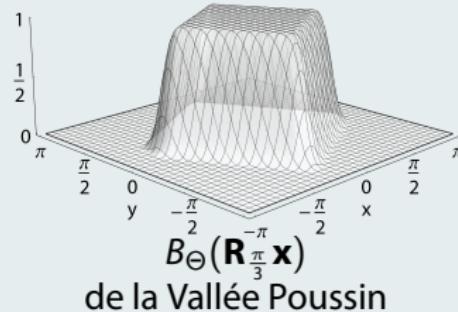
de la Vallée Poussin



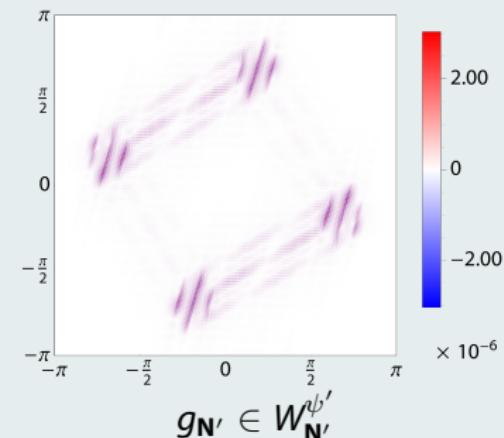
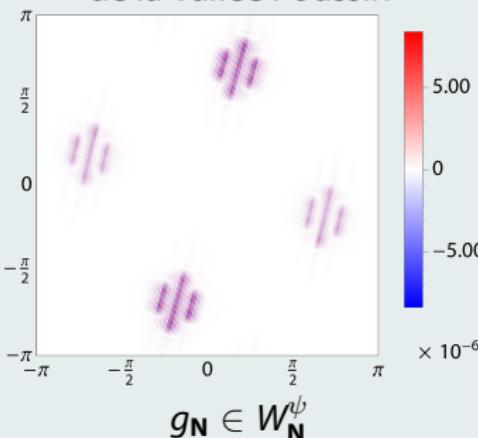
- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung:  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}$   
bzw.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}'$



## Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



- Box Spline  $B_\Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um  $\frac{\pi}{3}$  gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung:  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}$   
bzw.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}'$



# Zusammenfassung

- Muster  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$  verallgemeinern äquidistante Punkte
- auf  $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ : FFT & schnelle Wavelet-Transformation
- Vergleich der Dirichlet- und de la Vallée Poussin-artige Wavelets
- Richtungspräferenz bei der Kantendetektion
- Mit den de la Vallée Poussin-Wavelets
  - gute Lokalisationseigenschaften
  - Scherungsmatrizen möglich, etwa  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

## Literatur

- [Be13] rb, *The fast Fourier Transform and fast Wavelet Transform for Patterns on the Torus*, erscheint im ACHA (2013).
- [LP10] D. Langemann, J. Prestin, *Multivariate periodic wavelet analysis*, ACHA 28 (2010), p. 46–66.
- [MS03] I. E. Maximenko, M. A. Skopina, *Multivariate periodic wavelets*, St. Petersbg. Math. J. 15 (2003), p. 165–190.
- [PT95] G. Plonka, M. Tasche, *On the computation of periodic spline wavelets*, ACHA 2 (1995), p. 1–14.
- [Se95] K. Selig, *periodische Wavelet-Packets und eine gradoptimale Schauderbasis*, Dissertation, Universität Rostock, 1998.

## Literatur

- [Be13] rb, *The fast Fourier Transform and fast Wavelet Transform for Patterns on the Torus*, erscheint im ACHA (2013).
- [LP10] D. Langemann, J. Prestin, *Multivariate periodic wavelet analysis*, ACHA 28 (2010), p. 46–66.
- [MS03] I. E. Maximenko, M. A. Skopina, *Multivariate periodic wavelets*, St. Petersbg. Math. J. 15 (2003), p. 165–190.
- [PT95] G. Plonka, M. Tasche, *On the computation of periodic spline wavelets*, ACHA 2 (1995), p. 1–14.
- [Se95] K. Selig, *periodische Wavelet-Packets und eine gradoptimale Schauderbasis*, Dissertation, Universität Rostock, 1998.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.