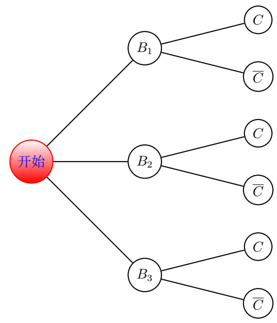
1.16 设甲、乙、丙三导弹向同一敌机射击，甲、乙、丙击中敌机的概率分别为 0.4，0.5，0.7。如果只有一颗导弹击中，飞机坠毁的概率为 0.2；如两弹击中，飞机坠毁的概率为 0.6；如三弹击中，飞机坠毁的概率为 0.9。（1）求飞机坠毁的概率；（2）若飞机已经坠毁，问飞机最有可能是被几颗导弹击中的？

分析：可以用序贯树图分析



解：设 A_i={第 i 个导弹击中敌机}，$i=1,2,3$, B_i={共有 i 颗导弹击中敌机}，$i=1,2,3$, C={飞机坠毁}，则根据独立性（（1）先设事件（2））给出事件有关数据）

$$
\begin{aligned}
P(B_1) =& P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = 0.36\\
P(B_2) =& P(A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3) = 0.41\\
P(B_3) =& P(A_1A_2A_3) = 0.14
\end{aligned}
$$

且由已知可得： $P(C|B_1)=0.2, P(C|B_2)=0.6, P(C|B_1)=0.9$

（1）根据全概率公式，所求概率为：（（3）全概率公式必须写出来（4）不要忘了最后结果）

$$
\begin{aligned}
P(C) =& \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B|A_k)\\
=& 0.36\times 0.2 + 0.41\times 0.6 + 0.14\times 0.9\\
=& 0.444
\end{aligned}
$$

（2）根据贝叶斯公式：

$$
\begin{aligned}
P(B_1|C) =& \frac{P(B_1)P(C|B_1)}{P(C)} = 0.1622\\
P(B_2|C) =& \frac{P(B_2)P(C|B_2)}{P(C)} = 0.5541\\
P(B_3|C) =& \frac{P(B_3)P(C|B_3)}{P(C)} = 0.2837
\end{aligned}
$$

飞机最有可能被两颗导弹击中。

1. 设随机变量X的概率密度函数是恒大于零的偶函数，且$E(X^2)<\infty$，讨论X与$|X|$的相关性和独立性。

分析：提示：关键计算 $cov(X,|X|)$

解：设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则由已知：

$$E(X|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|f(x)dx = 0$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$$

所以

$$cov(X, |X|) = E(X|X|) - E(X)E(|X|) = 0$$

从而 $\rho_{XY} = 0$，即 X 与 $|X|$ 不相关。又

$$P\{X \leq -2, |X| \leq 1\} = 0 \neq P\{X \leq -2\}P\{|X| \leq 1\}$$

所以 X 与 $|X|$ 不独立。

2. 随机变量X_1, X_2相互独立，都服从区间$(0,2)$上的均匀分布，求$Y = max\{X_1, X_2\}$的数学期望。

3. 设二维正态随机变量$(X,Y) \sim N(1, 3^2; 0, 4^2; -\frac{1}{2})$,设$Z = 2X + bY$，$b$ 为实数，问X与Z在什么条件下不相关？

   解：由问题，b 需要满足 $\rho_{XZ} = 0$，等价于满足 $cov(X,Z) = 0$ 因为：

$$\begin{aligned} cov(X,Z) =& cov(X, 2X + bY) \\ =& cov(X, 2X) + cov(X, bY) \\ =& 2D(X) + bcov(X,Y) \\ =& 18 + b\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} \\ =& 18 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4b \\ =& 18 - 6b \\ =& 0 \end{aligned}$$

   所以 $b = 3$ 即为所求。

4. 今有两个人进行乒乓球比赛，若有一人胜4局则比赛宣告结束，假定每局比赛中两个人获胜的概率都是1/2，问需要比赛的局数的数学期望是多少？

   解：设需要比赛的局数为 X，则 X 可取 4，5，6，7（离散 R.V. 的期望关键是找分布律，分布律的关键是取值及对应概率）

$$P\{X = 4\} = P\{\text{甲赢4局或乙赢4局}\} = 2 \times 0.5^4 = 1/8$$

类似地

$$\begin{aligned}P\{X=5\}=&2P\{\text{甲赢4局输1局}\}=2\times C_4^1 0.5^5=1/4\\P\{X=6\}=&2P\{\text{甲赢4局输2局}\}=2\times C_5^2 0.5^6=5/16\\P\{X=7\}=&2P\{\text{甲赢4局输3局}\}=2\times C_6^3 0.5^7=5/16\end{aligned}$$

所以

$$E(X)=\sum_{k=4}^{7}kP\{X=k\}=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}=\frac{93}{16}$$

5. 加法器在做加法运算时，根据四舍五入原则先对每个数取整后再运算，这样产生的误差服从区间 $[-0.5,0.5]$ 上的均匀分布。问：要使误差总和的绝对值不超过 10 的概率大于 0.95，最多能有多少个数相加？

解：设最多有 n 个数相加，且 X_i 为第 i 误差，$i=1,2,\cdots,n$ (先引入记号表示问题中的随机变量)

由已知，$X_i,i=1,2,\cdots,n$ 相互独立，且都服从 $U(-0.5,0.5)$，所以 $E(X_i)=0,D(X_i)=1/12$, (说明随机变量序列满足中心极限定理成立的条件)

所以 $\{X_i\}$ 服从中心极限定理，因此有(下结论)

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\dot{\sim}N(0,\frac{n}{12})$$

所以

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\leq 10\right\}\approx\Phi\left(\frac{10-0}{\sqrt{n/12}}\right)-\Phi\left(\frac{-10-0}{\sqrt{n/12}}\right)=2\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right)-1>0.95$$

因此 $\Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\right)>0.975=\Phi(1.96)$，所以 $\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}>1.96$，即 $n<\frac{1200}{1.96^2}=312.4$，最多有 312 个数相加。

6. 设总体$\xi\sim N(0,\sigma^2),\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{15}$为简单随机样本，试判断统计量

$$T=\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^i\xi_i}{\sqrt{2}\sqrt{\sum\limits_{i=11}^{15}\xi_i^2}}$$

服从什么分布，并给出理由。

解：由样本的定义，知道 $\xi_i\sim N(0,\sigma^2),i=1,2,\cdots,15$ 并且它们相互独立。因此 $\frac{\xi_i}{\sigma}\sim N(0,1),i=1,2,\cdots,15$，并且 $\frac{\xi_i}{\sigma},i=1,2,\cdots,15$ 也相互独立。（后面要用到的随机变量的分布和独立性在前面可以一次性由已知给出）

由 χ^2 分布结构定理可得。（前面已经给出了构造 χ^2 所需的条件，不用重复叙述）

$$\chi^2=\sum_{i=11}^{15}\left(\frac{\xi_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(5)$$

另一方面，根据正态分布的可加性知道

$$\sum_{i=1}^{10}(-1)^i\xi_i \sim N(0,10\sigma^2)$$

即

$$U=\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^i\xi_i}{\sqrt{10}\sigma}\sim N(0,1)$$

注意到 U 与 χ^2 也是相互独立的。（独立性是构造 t 分布必不可少的条件，必须明确指出），由 t 分布结构定理可知

$$T=\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^i\xi_i}{\sqrt{2}\sqrt{\sum\limits_{i=11}^{15}\xi_i^2}}=\frac{U}{\sqrt{\chi^2/5}}\sim t(5)$$

7. 设总体 ξ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

解：总体期望为：（只要是矩估计，一定要知道总体期望）

$$\begin{aligned}E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}\\ =\frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx\end{aligned}$$

设 $X\sim N(0,\theta^2)$，则 $E(\xi)=\frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}E(X^2)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta$，所以 $\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}E(\xi)$，将 $E(\xi)$ 的矩估计 $\overline{X}$ 代入即可得到 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\overline{X}$（将未知参数用总体矩表示，然后将总体矩用其对应的估计量代替后，即可得到未知参数的矩估计量，注意加 ˆ，并且样本矩大写）

8. 已知幼儿在正常情况下服从正态分布，现从某一幼儿园 5 岁至 6 岁的幼儿中随机抽查了 9 人，其身高(以 cm 为单位)分别为 115，120，131，115，109，115，115，105，110，试在置信度 95% 条件下，求 5 岁至 6 岁的幼儿身高方差的置信区间。

解：设幼儿身高 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，问题即为求 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。（没有给出分布的形式时，要引入参数给出分布，如果问题已经有各参数符号，这一步可以省略。最好明确指出对哪个参数做估计）

由于 μ 未知，估计 σ^2，枢轴变量选 （先指明在什么情况下估计哪个参数，选什么枢轴变量）

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：（给出相应的置信区间公式，并明确指明置信度）

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] \tag{1}$$

由于 $\alpha=0.05, n=9$，所以 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=17.353, \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=2.18$（给出计算答案需要的各参数的值）

又根据样本可算得 $(n-1)s^2=442$, 代入 (1) 可得 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为（代入计算后的到最终的答案）

$$\left[\frac{442}{17.353}, \frac{442}{2.18}\right]=[25.47, 202.75]$$

9. 设$\hat{\mu}_1$和$\hat{\mu}_2$为总体均值μ的两个估计量，已知$E(\hat{\mu}_1)=E(\hat{\mu}_2)=\mu$, $D(\hat{\mu}_1)=1, D(\hat{\mu}_2)=4, \rho_{\mu_1\mu_2}=1/2$，做统计量$\hat{\mu}_3=c_1\hat{\mu}_1+c_2\hat{\mu}_2(c_1>0, c_2>0)$，问：要使形如$\hat{\mu}_3$的统计量为$\mu$的无偏估计且最有效，常数$c_1, c_2$应满足什么条件？

10. 设测量误差服从零均值的正态分布，进行4次独立测量，各次误差为0.1，-0.08，0.04，-0.07。求测量误差方差的极大似然估计值。

解：设测量误差$X\sim N(0,\sigma^2), x_1, x_2, x_3, x_4$为样本观测值。（给必要的符号，设样本观测值也是必要的一步）

似然函数为：（极大似然估计关键步骤）

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{4\pi^2\sigma^4}e^{-\frac{0.029}{\sigma^2}}$$

取对数 （取对数是为了好求驻点）

$$\ln L(\sigma)=-\ln 4\pi^2-4\ln\sigma-\frac{0.029}{\sigma^2}$$

求导并令其等于 0 得到驻点方程：（一般需要解驻点方程或方程组）

$$\frac{d\ln L}{d\sigma}=-\frac{4}{\sigma}+2\frac{0.029}{\sigma^3}=0$$

解之可得 σ^2 的最大似然估计值 $\hat{\sigma}^2=0.0145$（最终，根据样本，计算出最大似然估计值。对σ求导和对σ^2 求导得到的估计值结果一样!）

11. 已知锰的融化点 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 进行 5 次测量，得到结果如下（$^\circ C$）：

$$1269, 1271, 1256, 1265, 1254$$

取显著性水平 $\alpha=0.05$, 是否可以认为锰的融化点是 $1260^\circ C$?

解：依题意，需要检验假设：（任何一个假设检验的第一步必定是建立检验假设，如果参数在题目中没

有明显给出，应先给出总体分布，明确指出对分布中的哪个参数做检验）

$$H_0: \ \mu = \mu_0 = 1260, \qquad H_1: \mu \neq \mu_0$$

由于 σ 未知，用 t 检验法，当 H_0 成立时，检验统计量（明确指出属于哪类检验问题，用了什么检验统计量）

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

H_0 的拒绝域为（指出拒绝域）

$$\{t \big| |t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

根据观测值可算得 $\bar{x} = 1263, s = 7.6485$，代入计算得到检验统计量的值 $t = 0.7845$，又因为 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(4) = 2.7764$, 由于（计算检验统计量，并跟拒绝域作比较）

$$|t| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

可知 t 落在接受域里，因此在显著性水平 0.05 下接受 H_0，即可以认为锰的融化点是 $1260°C$（做出拒绝或接受 H_0 的判断，并指出显著性水平）

12. 设某工厂生产的保险丝的融化时间 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，通常情况下其方差为 400。某一天，任取 25 个保险丝测量融化时间，得到样本均值 $\bar{x} = 62.24$，样本方差 $s^2 = 404.77$。取显著性水平 $\alpha = 0.01$, 检验这天生产的保险丝融化时间的分散度与通常情况有无显著差异？

解：依题意，需要检验假设：

$$H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2 = 400, \qquad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

用 χ^2 检验法，由于 μ 未知，当 H_0 成立时，检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

H_0 的拒绝域为

$$\{\chi^2 \big| \chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad \text{或者} \quad \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

根据观测值可算得检验统计量的值 $\chi^2 = 24.2862$，又因为 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.005}(24) = 45.559, \chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.995}(24) = 9.886$, 所以

$$\chi^2_{0.995}(24) < \chi^2 < \chi^2_{0.005}(24)$$

可知 χ^2 在接受域里，因此在显著性水平 0.01 下接受 H_0，即可以认为这天生产的保险丝融化时间的分散度与通常情况无显著差异

13. 在考察硝酸钠的可溶程度时，对一系列不同温度观察它在100毫升的水中溶解的硝酸钠的重量，得到一组

观测值 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, 9$ 计算得：

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 234, \sum_{i=1}^{9} y_i = 811.3, \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 10144$$
$$\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 76218.1339, \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 24628.6$$

从理论上推测，温度 x_i 与溶解得硝酸钠的重量Y_i之间有关系式：$Y_i = a + bx_i + \epsilon_i, i = 1, 2, \cdots, 9$。式子中 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_9$ 相互独立，均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$

(a) 求未知参数 a,b, 的最小二乘估计值和 σ^2 的无偏估计值；

(b) 检验线性回归是否显著($\alpha = 0.01$)?（结果保留四位有效数字）

自由度 / α	6	7
0.01	0.834	0.798
0.005	0.870	0.836

解：（a）由已知可得（应记住最小二乘估计中的每一个计算公式，并在求解时给出来）

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 234/9 = 26 \quad \bar{y} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} y_i = 811.3/9 = 90.14$$

$$\ell_{xy} = \sum_{i=1}^{9} x_i y_i - 9\bar{x}\bar{y} = 3534.8, \ell_{xx} = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 - 9\bar{x}^2 = 4060, \ell_{yy} = \sum_{i=1}^{9} y_i^2 - 9\bar{y}^2 = 3083.95$$

所以

$$\hat{b} = \frac{\ell_{xy}}{\ell_{xx}} = 0.87, \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 67.52, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n-2}(\ell_{yy} - \hat{b}^2\ell_{xx}) = 0.92$$

因此，所求经验回归方程为：（不管问题是否有此一问，最好给出经验回归方程）

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x = 67.52 + 0.87x$$

(2) 样本相关系数值为：（注意给出 R 的公式）

$$R = \frac{\ell_{xz}}{\sqrt{\ell_{xx}}\sqrt{\ell_{zz}}} \approx 1$$

显然 （跟显著性阈值作比较）

$$R > R_\alpha(n-2) = R_{0.01}(7) = 0.798$$

因此，在显著性水平 0.01 下，线性关系显著成立。（做出线性关系是否显著成立的判断，并指明显著性水平）